



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## DEFORMAČNÍ A NAPĚŤOVÁ ANALÝZA LEBEČNÍCH IMPLANTÁTŮ S VYUŽITÍM ANALYTICKÉHO A NUMERICKÉHO ŘEŠENÍ

STRESS-STRAIN ANALYSIS OF SKULL IMPLANT USING ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTION  
METHODS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Dominik Sehnal

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Petr Marcián, Ph.D.

BRNO 2017



# Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Dominik Sehnal</b>
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	<b>Ing. Petr Marcián, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Deformační a napěťová analýza lebečních implantátů s využitím analytického a numerického řešení**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Řešení úlohy pružnosti a pevnosti je dle realizace možné analyticky nebo numericky. Analytické řešení s využitím integračního nebo diferenciálního přístupu je možné na tělesech jednoduchých tvarů. V tomto případě by se jednalo o částečnou kulovou skořepinu. Numerické řešení, u něhož se převádí spojitý problém na konečný počet neznámých parametrů, umožňuje řešit složité tvary těles, tj. přejít na vyšší úroveň modelu a řešit lebeční implantát skutečného tvaru odpovídajícího tvaru lebky.

### **Cíle bakalářské práce:**

Provést rešerši dostupné literatury související s tématem.

Provést analytické řešení na idealizovaném modelu lebky (tvar částečné sférické skořepiny).

Provést numerické řešení na idealizovaném modelu lebky (tvar částečné sférické skořepiny).

Srovnání výsledků řešení s modelem vytvořeným na dodaném modelu lebky.

### **Seznam literatury:**

Huotilainen, E., Jaanimets, R., Valášek, J., Marcián, P., Salmi, M., Tuomi, J., Mäkitie, A. a Wolff, J. (2014): Inaccuracies in Additive Manufactured Medical Skull Models Caused by the DICOM to STL Conversion Process. Journal of cranio- maxillofacial surgery, roč. 42, č. 5, s. e259 (e265 s.). DOI: 10.1016/j.jcms.2013.10.001

Ridwan-Pramana, A.; Marcián, P.; Borák, L.; Narra, N.; Forouzanfar, T.; Wolff, J. Structural and mechanical implications of PMMA implant shape and interface geometry in cranioplasty – a finite element study (2016). Journal of cranio- maxillofacial surgery, roč. 44, č. 1, s. 34-44. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcms.2015.10.014>

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato práce je zaměřena na deformačně napěťovou analýzu lebečního implantátu. Obsahuje rešerši dostupné literatury zabývající problematikou lebečních implantátů a řešením jejich napěťové analýzy. Dále jsou zde základní informace o přístupu k návrhu a výrobě lebečních implantátů. Následně jsou řešeny dva způsoby možného řešení deformačně napěťové analýzy na výpočtovém modelu lebky (částečné sférické skořepině) a to analyticky a numericky metodou konečných prvků v programu Ansys. Vypočtená řešení z jednoho typu úlohy deformace a napětí jsou porovnávána a vyhodnocována s řešením získaným na vyšší úrovni výpočtového modelu lebky s aplikovaným implantátem nepravidelného tvaru.

## **Abstract**

This thesis focuses on stress-strain analysis of cranial implant. The research of literature available dealing with the problems of cranium implants and the solution of the stress analysis is incorporated. Furthermore, the basic information about an approach to the design and fabrication of medical implants is included. Subsequently, two ways of possible solution to the method of stress-strain analysis on an computational model of cranium (partially spherical shell) are introduced. These are analytical and numerical solution by using the finite element method in the Ansys programme. The calculated solutions of a particular type of task about deformation and stress are compared and evaluated with the solution acquired from the high level computational model of cranium with shaped irregular implant applied.

## **Klíčová slova**

Lebeční implantát, Deformačně-napěťová analýza, Metoda konečných prvků, membránová skořepina, PMMA

## **Keywords**

Cranial implant, Stress-strain Analysis, Finite Element Methods, Membrane shell, PMMA

## **Bibliografická citace**

SEHNAL, D. Deformační a napěťová analýza lebečních implantátů s využitím analytického a numerického řešení. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 53 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Petr Marcián, Ph.D..

## **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Deformační a napět'ová analýza lebečních implantátů s využitím analytického a numerického řešení“ vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který tvoří přílohu této práce.

26. května 2017

.....  
Dominik Sehnal

## **Poděkování**

Rád bych poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce Ing. Petru Marciánovi, Ph. D. za vedení, odbornou pomoc a cenné rady při zpracovávání této práce. Velký dík patří mé rodině za podporu a trpělivost během studia.



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b> .....	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Popis problémové situace</b> .....	<b>4</b>
2.1.	Formulace problému .....	4
2.2.	Cíle práce .....	4
<b>3</b>	<b>Rešerše</b> .....	<b>5</b>
3.1.	Literatura zaměřená na analytické řešení skořepin .....	5
3.2.	Práce zaměřené na výpočetní řešení deformačně napěťové analýzy metodou konečných prvků.....	6
3.3.	Shrnutí rešerše .....	7
<b>4</b>	<b>Anatomie</b> .....	<b>8</b>
4.1.	Lebka.....	8
4.2.	Mozková část .....	8
4.3.	Obličejová část .....	8
4.4.	Kostní tkáň .....	9
4.5.	Mechanické vlastnosti ploché kosti lebeční .....	10
4.6.	Intrakraniální tlak .....	11
<b>5</b>	<b>Lebeční implantát</b> .....	<b>12</b>
5.1.	Materiály pro výrobu implantátu .....	13
5.2.	Získávání a zpracování dat.....	14
5.3.	Vytvoření modelu.....	14
5.4.	Způsob výroby .....	14
5.5.	Fixace .....	14
<b>6</b>	<b>Analytické řešení</b> .....	<b>15</b>
6.1.	Vstupní hodnoty rozměrů implantátu a zatížení .....	15
6.2.	Řešení membránové (bezmomentové) skořepiny .....	17
6.3.	Řešení částečné sférické skořepiny zatížené tlakem působícím na malou kruhovou oblast se středem na pólu.....	20
<b>7</b>	<b>Numerické řešení metodou konečných prvků</b> .....	<b>25</b>

7.1. Skořepina zatížená na celém vnějším i vnitřním povrchu .....	26
7.2. Výsledky řešení skořepiny zatížené na celém vnějším i vnitřním povrchu .....	32
7.3. Skořepina zatížená tlakem působícím na malou kruhovou oblast se středem na pólu .....	33
7.4. Výsledky řešení skořepiny zatížená tlakem působícím na malou kruhovou oblast se středem na pólu .....	39
7.5. Implantát zatížený tlakem působícím na kruhovou oblast o poloměru $r_0$ .....	41
<b>8 Porovnání výsledků a vyhodnocení .....</b>	<b>43</b>
8.1. Porovnání numerického řešení s analytickým (membránová skořepina) .....	43
8.2. Porovnání numerického řešení s analytickým (částečná sférická skořepina zatížená tlakem působícím na malou kruhovou oblast se středem na pólu) .....	44
<b>9 Závěr .....</b>	<b>46</b>
<b>Seznam použitých zdrojů.....</b>	<b>47</b>
<b>Seznam příloh .....</b>	<b>53</b>

# 1 Úvod

Mozek je nejdůležitější orgán lidského těla. Proto je chráněn lebkou, která mu poskytuje mechanickou ochranu. I přes tuto důkladnou ochranu, která je tomuto nezbytně důležitému orgánu poskytována, dochází poměrně často k poraněním, která způsobují ztrátu funkce lebky. Nejčastěji je to zapříčiněno traumatickým poraněním mozku (TBI<sup>1</sup>), jinak řečeno poraněním hlavy.

TBI je úraz způsobený vnější mechanickou silou, která vede v některých případech k poškození mozku [1]. Příčiny vniku TBI jsou ve většině případech dopravní nehody (automobilů, motocyklů, jízdních kol či chodců), dále úrazy vzniklé při sportu, pády nebo střelná zranění [2]. Další narušení lebky vzniká v důsledku nádorového onemocnění, kdy sice lebka není porušena, avšak pacient je v ohrožení života a je nutné otevření lebky pro předejití poškození mozku. V tomto případě, kdy lebka není defektní, se uplatňuje operační postup zvaný kraniektomie. Pokud došlo k poškození lebky následkem traumatu, chirurg odstraňuje kousky kostní tkáně a upravuje okraje defektu. Tento způsob operačního přístupu se nazývá kraniotomie. Po obou těchto lékařských výkonech je snaha lebeční defekt zakrýt. Toho se dosáhne operačním úkonem tzv. kranioplastikou, kterou je možno provést více způsoby. Jako první přichází v úvahu navrácení vyříznuté části lebky na původní místo, to však je možné jen u kraniektomie. Proto se používají k nahrazení chybějící nebo odebrané, části kosti lebeční implantáty, které nejen že nahrazují funkci lebky, ale musí být i esteticky přijatelné pro pacienta [3].

Lebeční implantáty jsou používány již od pradávna [4]. Avšak současný přístup k návrhu a tvorbě implantátu zaznamenal v posledních letech značný pokrok. Používají se personalizované implantáty, které jsou vytvářeny pro daný defekt. Jedná se o takzvané předem připravované implantáty. Ty jsou navrhovány nejčastěji na základě CT (computed tomography) snímků, ze kterých je vytvořen počítačový model lebky s defektem. Ve specializovaném softwaru je defektní část lebky doplněna a z ní vytvořen model implantátu. Na něm je možné simulovat různé druhy namáhání, a podle toho upravit jednotlivé parametry, jako tloušťku, okraje, volbu způsobu fixace. Důležitou roli hraje i volba materiálu, na které závisí celkový návrh. Materiál musí být hlavně biokompatibilní a nekorozivní, aby nedošlo k pooperativním komplikacím, jako je například infekce. Výroba se zprostředkovává pomocí technologií Additive manufacturing (AM) nebo rapid prototyping (RP). Nevýhodou je, že při návrhu i výrobě tímto přístupem dochází k nepřesnostem, které způsobují nesprávné dosednutí implantátu na kost, což může způsobovat lokální zvýšení napětí. Naproti tomu díky předem vyrobeným implantátům se značně zkrátila doba trvání operace. Ke zlepšení kvality života léčených osob přispívá i estetická funkce, kterou lebeční implantáty poskytují [5; 6].

Traumatická zranění mozku jsou stále aktuální problém. Nedochází k úbytku případů TBI, ale lékařům se daří snižovat procento smrtelných případů [7]. K pokračování ve snižování úmrtnosti následkem TBI je nutné provedení léčby co nejlépe, aby se eliminovaly možné poruchy. K tomu je zapotřebí i důkladný popis celé problematiky ze všech možných hledisek, v případě této práce z inženýrského pohledu pomocí deformačně napěťové analýzy lebečního implantátu.

---

<sup>1</sup> traumatic brain injury (en)

## 2 Popis problémové situace

Léčba lebečních defektů je problém, jehož historie sahá k samotným počátkům chirurgie. Optimálním řešením by byla regenerace a obnova kosti v místě defektu. To ovšem není vždy možné, a proto je rekonstrukce lebky zprostředkována pomocí implantátu [4]. Tato rekonstrukce má za cíl zajistit ochranou funkci lebky a obnovit její estetiku, čemuž je nutné přizpůsobit navržení implantátu [5]. Musí zajistit pacientovi bezúhonný návrat do běžného života. Při návrhu se často klade velký důraz na náklady, podle kterých se odvíjí například volba materiálu. Materiál musí být nezávadný pro lidské tělo (biokompatibilní), aby nedocházelo k pooperačním komplikacím (záněty, infekce). V kranioplastice je běžné použití titanových slitin, keramik, plastů (PEEK) a akrylů (PMMA) [4]. Tato práce se zaměřuje především na materiál PMMA, který má oproti slitinám titanu nižší cenu. Podle volby materiálu se určují další parametry implantátu, jeho tloušťka a způsob fixace. Tloušťka musí být volena tak, aby nedošlo k porušení implantátu za běžných podmínek, jako je například zatížení implantátu vahou hlavy, což může nastat třeba při podepření hlavy v místě, kde je implantát aplikován.

Pro určení vhodné tloušťky je třeba provést napěťovou analýzu. Její řešení lze získat experimentálně nebo výpočetně. Nicméně z důvodů složitosti je v této práci upřednostňováno řešení pouze výpočetním modelováním. To je proveditelné metodou konečných prvků nebo analyticky. Ovšem analytické řešení je použitelné pouze pro jednoduchá tělesa. Proto jsou v této práci použity dvě různé úrovně modelu. První je výpočtový model implantátu, jako částečné sférické skořepiny. Tento model je možné řešit jak analyticky pomocí známých vztahů prosté pružnosti, tak numericky metodou konečných prvků. Model vyšší úrovně je výpočtový model implantátu včetně okolní kostní tkáně, která v sobě zahrnuje obecný tvar lebky s nepravidelným tvarem defektu (chybějící části lebeční kosti). Implantát je upevněn k lebce pomocí fixátorů. Řešení takového modelu je možné pouze numericky pomocí metody konečných prvků. Nevýhodou tohoto řešení je časová náročnost při tvorbě výpočtového modelu a také vlastní řešení na výpočetní technice.

Vytvoření výpočtových modelů a jejich srovnání vyžaduje řešení řady dílčích problémů týkajících se tvaru implantátu jeho materiálu apod.

### 2.1. Formulace problému

Provedení deformačně napěťové analýzy s využitím různých úrovní výpočtových modelů.

### 2.2. Cíle práce

- Provést rešerši dostupné literatury související s deformačně napěťovou analýzou lebečního implantátu.
- Provést analytické řešení na idealizovaném modelu lebky (tvar částečné sférické skořepiny).
- Provést numerické řešení na idealizovaném modelu lebky (tvar částečné sférické skořepiny).
- Srovnání výsledků řešení s modelem vytvořeným na dodaném modelu lebky.

### 3 Rešerše

Předmětem této studie je uvést literaturu zabývající se analytickým řešením, které by bylo aplikovatelné na lebeční implantát a nalézt práce zaměřující se na deformačně-napěťovou analýzu numerickým řešením pomocí metody konečných prvků (MKP).

Studie je v oblasti analytického řešení zaměřena na teorii skořepin a na problematiku řešenou deformačně-napěťovou analýzou pomocí MKP. Cílem této rešerše je získat informace o řešených problémech při návrhu lebečního implantátu a možných způsobech analytického řešení.

#### 3.1.Literatura zaměřená na analytické řešení skořepin

##### **Mechanika těles: pružnost a pevnost II [8]**

ONDRAČEK, Emanuel, a kol.

Skriptu slouží, jako učební text pro předmět Pevnost pružnost 2. Obsahuje základní popis obecné pružnosti, popis základních typů těles a způsoby jejich řešení.

Je zde popsána rotační bezmomentová skořepina, podmínky platnosti bezmomentovosti a způsob řešení daných skořepin. Tato teorie popisuje model aplikovatelný na lebeční implantát.

##### **Roark's Formulas for Stress and Strain [9]**

Warren C. YOUNG a Richard G. BUDYNAS

Kniha je zpracována, jako odborná příručka. Obsahuje popis nejrůznějších možných řešení jak analytických, tak numerických. Nedílnou součástí tvoří tabulky, ve kterých jsou jednotlivá tělesa popsána rovnicemi určujícími jejich charakteristickou deformaci a napjatost, s cílem usnadnit práci výpočtářům.

Shrnutí velkého množství poznatků v tabulkách umožňuje snadné vyhledávání modelu tělesa, kterým je možné nahradit lebeční implantát s širokou škálou způsobů namáhání. Důležitým aspektem je volba jednotek. Již v úvodu knihy je oznámeno používání jak jednotek soustavy SI, tak jednotek Angloamerické měrné soustavy, proto je třeba dbát při používání vypočtených konstant a koeficientů o jaký jednotkový systém se jedná.

##### **Stresses and Small Displacements of Shallow Spherical Shells. II [10]**

REISSNER, Eric

Journal of Mathematics and Physics, vol. 25, no. 1-4, pp. 279-300, 1946

V článku jsou upraveny rovnice teorie mělkých sférických skořepin a získáno možné řešení pro případ rotační symetrie. Jedná se o řešení dvou diferenciálních rovnic. Z tohoto řešení jsou získány rovnice na explicitní výsledky pro mělké sférické skořepiny s odlišným způsobem zatížení a různými okrajovými podmínkami.

Jedná se o vysoce odbornou práci, ve které jsou vyjádřeny rovnice pro výpočet napětí a deformace v případě částečné sférické skořepiny zatížené tlakem na malou oblast se středem na pólu skořepiny. Pro takový případ je zde navíc explicitní vyjádření velikosti napětí a průhybu na pólu skořepiny, kde je deformace i napětí maximální. Tento model odpovídá lebečnímu implantátu zařazenému v lebce a zatíženému silou působící na malou oblast.

### **3.2.Práce zaměřené na výpočetní řešení deformačně napět'ové analýzy metodou konečných prvků**

#### **Structural and mechanical implications of PMMA implant shape and interface geometry in cranioplasty – A finite element study [5]**

Ridwan-Pramana Angela, Marcián Petr, Borák Libor, Narra Nathaniel, Forouzanfar Tim, Wolff Jan

Journal of Cranio-Maxillofacial Surgery, vol. 44, no. 1, pp. 34-44, 2016

Článek vyšetřující působení tvaru a typu rozhraní kost-implantát na rozložení napětí v implantátu vyrobeného z materiálu PMMA. Je zde vytvořeno 15 kombinací jednoduchých geometrických tvaru (čtverec, kruh, trojúhelník, nepravidelný) s různým typem rozhraní dle velikosti úhlu zešikmení (záporné, pozitivní a neutrální). Metodou konečných prvků byla zjišťována velikost maximálního napětí. Tyto výsledky byly pro jednotlivé kombinace porovnány a vyhodnoceny.

Studie je zdrojem informací pro řešení implantátu pomocí MKP. Je zde podrobný popis vytváření sítě a použití prvků v programu Ansys.

#### **Finite element analysis of the skull implant using ansys software [11]**

SHWETA, P a ANBURAJAN M.

3rd International Conference on Electronics Computer Technology, pp. 420-425, 2011

Práce se zaměřuje na jeden konkrétní problém návrhu lebečního implantátu pro daného pacienta. Je zde uveden způsob vytvoření 3D modelu, navrhnutí vhodného implantátu a analýza MKP. Ta slouží k určení ideálního materiálu pro výrobu implantátu. Je zde voleno mezi materiály, jako PMMA, Titan a ocel.

Práce uvádí způsob řešení návrhu a analýzy implantátu.

#### **Finite Element Analysis of Cranial Implant [12]**

CHAMRÁD, J., MARCIÁN P., BORÁK L. a WOLFF J.

Engineering Mechanics 2016, vol. 22, pp. 234-237, 2016

Článek ve sborníku se zaměřuje na individuální implantáty vyráběné moderní technologií 3D tisku. Je zde vyšetřována přesnost implantátu z materiálu PMMA. Konkrétně cílem této studie je posouzení nepřesností na rozhraní kost-implantát spojené s výrobou. Hodnocení je provedeno pomocí výpočtové simulace, kde je porovnáván implantát s dokonalým rozhraním „ideálním“ a implantát s nedokonalým rozhraním „skutečným“. U implantátu s nedokonalým rozhraním nedochází k přesnému dolehnutí ploch okrajů implantátu, defektu, a to zapříčiňuje zvětšení napětí.

Práce ukazuje rozdíl v napět'ové analýze při řešení dokonalého a nedokonalého rozhraní. Tento aspekt je důležité zohlednit při návrhu a výrobě implantátu. Jedná se o cenný zdroj zabývající se konkrétním problémem.

**FEM assisted evaluation of PMMA and Ti6Al4V as materials for cranioplasty resulting mechanical behaviour and the neurocranial protection [13]**

TSOUKNIDAS, A., S. MAROPOULOS, S. SAVVAKIS a N. MICHAILEDIS

Bio-medical materials and engineering, vol. 21, no. 3, pp. 139-147, 2011

Článek se zaměřuje se na posouzení mechanické pevnosti, odolnosti proti nárazům a kritickému průhybu implantátu, vyrobeného z dvou různých materiálů používaných v kranioplastice, PMMA a slitiny titanu. Zde se ukázalo, že i přes lepší pevnostní vlastnosti slitiny titanu, existuje několik aspektů působících v prospěch PMMA (např. rozdílnost modulu pružnosti kosti a slitiny titanu může vést k resorpci kosti a tím uvolnit fixaci). Vytvořený model implantátu a fixace je pro oba materiály shodný, díky čemuž je umožněno přímé srovnání výsledků. K řešení je použita MKP.

Článek řeší na konkrétním lebečním implantátu deformačně napěťovou analýzou vhodnost použití různých materiálů a zdůrazňuje jejich klady a zápory.

### **3.3. Shrnutí řešerše**

Uvedené práce zaměřené na analytické řešení obsahují důkladné popsání způsobu výpočtu napěťové analýzy částečné sférické skořepiny. V rámci řešerše byla vybrána dvě možná řešení napjatosti a deformace aplikovatelná na model lebečního implantátu. Prvním je řešení membránové skořepiny a druhým řešení částečné sférické skořepiny zatížené tlakem působícím na malou kruhovou oblast se středem na pólu.

Práce zabývající se přímo lebečními implantáty ukazují různé typy řešených problémů na vyšší úrovni modelu: rozhraní implantát-lebka, volba materiálu, nepřesnosti implantátu. Pro výpočet napěťové analýzy byl vždy použit software Ansys. Dle data vzniku prací je patrná aktuálnost tohoto tématu.

## 4 Anatomie

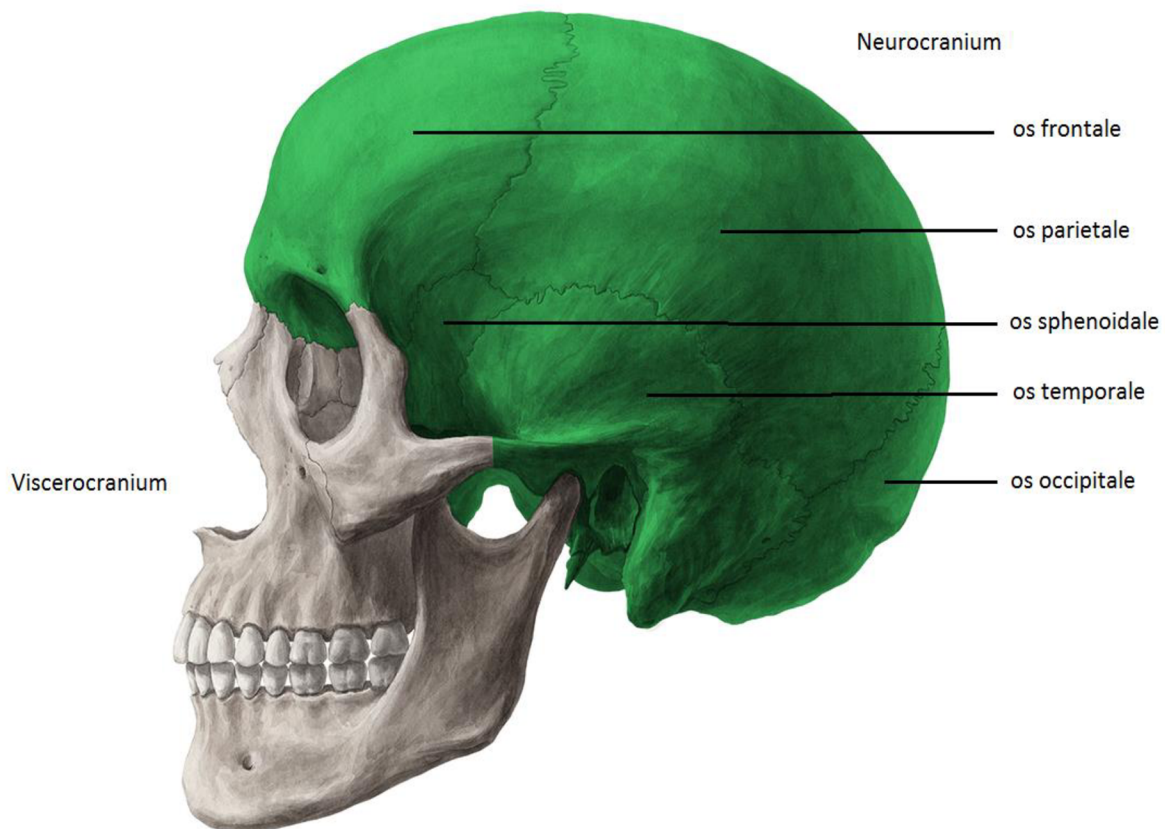
### 4.1. Lebka

Lebka je komplikovaným souborem 22 kostí. Představuje ochranu pro mozek a jsou v ní uloženy nejdůležitější smyslové orgány těla [14]. Skládá se z dvou hlavních částí: části mozkové (neurocranium) a části obličejové (viscerocranium) [15].

### 4.2. Mozková část

Mozková část (neurocranium) je schránka mozku. Zahrnuje 7 plochých kostí, které obklopují dutinu lebeční (*cavitas cranii*), ve které je uložen mozek, a kost čichovou (*ossis ethmoidalis*). Ploché kosti neurocrania jsou kosti klínové (*os sphenoidale*), kosti spánkové (*ossa temporalia*), kost tylní (*os occipitale*), kosti temenní (*ossa parietalia*) a kost čelní (*os frontale*) [15].

Tyto lebeční kosti jsou spojeny švy, což jsou pevné vazivové spoje, které představují zvláštní typ spojení. Kostí jsou v nich svými výběžky vzájemně do sebe zaklíněny, což brání jejich pohybu. Hlavní švy jsou šev věčcítý (*sutura coronalis*) probíhá napříč lební klenbou a šev šípový (*sutura sagittalis*) spojující vzájemně kosti temenní [16].



Obr. 4.1: Neurocranium a viscerocranium (editováno) [17]

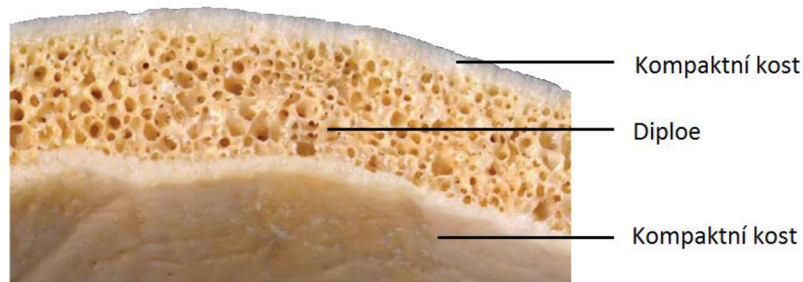
### 4.3. Obličejová část

Obličejová část (viscerocranium) se nachází v přední části lebky a zahrnuje obličej, čelisti a střed lebky [15].



#### 4.4. Kostní tkáň

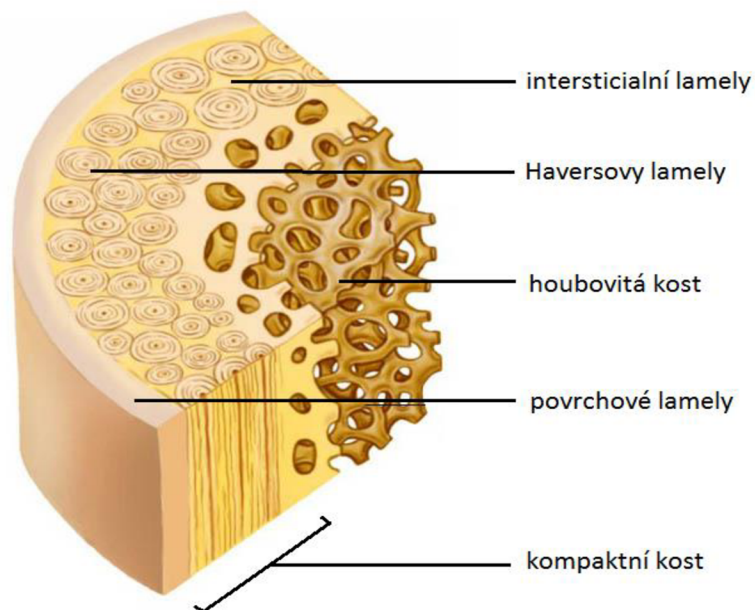
Kostní tkáň je tvrdá kompaktní mineralizovaná pojivová tkáň, která se skládá z 3 složek: organické hmoty, minerálu hydroxyapatitu a vody. Na makroskopické úrovni rozlišujeme hustou kompaktní kost a porézní houbovitou kost. Ploché kosti lebeční se skládají ze dvou tenkých vrstev kompaktní kosti obklopujících střední vrstvu kosti houbovité (diploe) [16; 18]. Tento typ trojvrstvého uspořádání se nazývá sendvičové uspořádání, jak je ukázáno na obrázku 4.2 [15].



Obr. 4.2: Diploe (editováno) [19]

Kompaktní kostní tkáň (kompakta) obsahuje Haversovy, intersticiální a povrchové lamely (obrázek 3.3). Porozita je velmi malá, tvoří ji Haversovy kanálky, jež obklopují cévy [15; 18].

Houbovitá kostní tkáň (spongióza) je tvořena lamelárně upravenými trámečky kosti. Ty vytvářejí prostorovou síť. Objemové procento těchto trámečků činí asi 25-30 % objemu celkové spongiózy a jejich tloušťka se pohybuje okolo 200  $\mu\text{m}$  [18]. Wolfův zákon popisuje chování kostí, kdy dochází v důsledku funkčních nároků v kosti k přestavbě vnitřní kostní struktury [20]. V kostech jsou trámečky spongiózy orientovány tak, že převažující směry jejich orientace odpovídají směřům hlavních napětí [18].



Obr. 4.3: Kompakta (editováno) [21]

#### 4.5. Mechanické vlastnosti ploché kosti lebeční

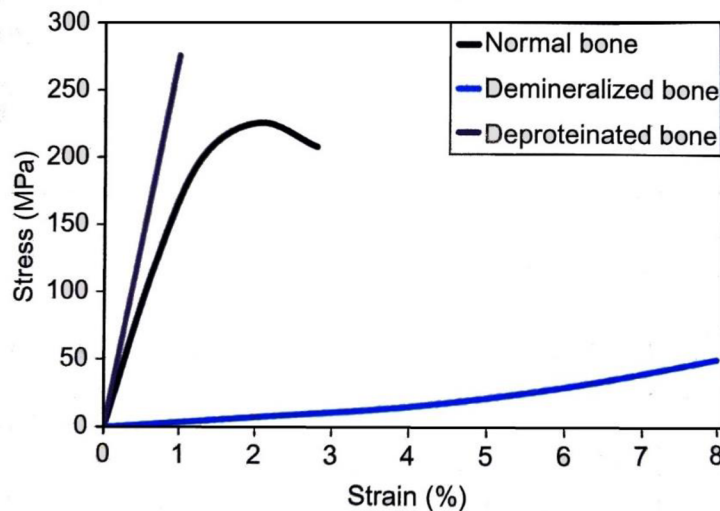
Mechanické vlastnosti kosti jsou ovlivněny mnoha faktory. Mezi nejdůležitější patří objemový podíl kosti, geometrie a materiálové vlastnosti.

Objemový podíl kosti, je sledován převážně u houbovité kosti, která má porézní strukturu. Pro jeho určení jsou zavedeny veličiny jako, objemový zlomek kostní tkáně (BV/TV) a zdánlivá hustota mineralizované kosti (aBMD<sup>2</sup>). BV/TV udává podíl objemu kostní tkáně ku objemu ostatních tkání a aBMD je hustota samotné kosti v rámci objemu dané oblasti.

Geometrii je myšleno dané rozmístění kostní tkáně na úrovni makrostruktury. V kosti, jako živé tkáni, probíhá proces remodelace, při které dochází k zesilování a tvorbě trámčiny, dle směru zatěžování. Proto se makrostruktura jednotlivých částí ploché kosti může značně lišit.

Materiálové vlastnosti kostní tkáně popisuje termín *tissue quality*, který odráží chemické a fyzikální vlastnosti kosti nezávisle na hmotnosti a výskytu. Jedná se o nanostrukturu (10<sup>-7</sup> až 10<sup>-9</sup> m), kde je kost uvažována, jako dvoufázový kompozitní materiál skládající se z relativně ohebného kolagenu protkaného a obklopeného tuhým odolným hydroxyapatitem.

Kolagen tvoří hmotnostně 20 až 25 % kostní tkáně, kde je charakterizován pevností v tahu a tažností. Hydroxyapatit vytváří hmotnostně 65 % kostní tkáně a způsobuje tlakovou pevnost a tuhost. Částečná absence některé z těchto složek může vést ke křehkému chování kosti (deproteinizace) nebo naopak k ztrátě pevnosti (demineralizace) viz obrázek 4.4 [18].



Obr. 4.4: Závislost mechanického chování kosti na obsahu kolagenu a minerálů [18]

U lebečních plochých kostí má velký vliv na mechanické vlastnosti vnitřní uspořádání a velikost zastoupení různých typů kostní tkáně (kost v trojvrstevém uspořádání může být až třikrát pevnější než kost ve švu [22]. Hodnoty modulu pružnosti u dospělého člověka byly zjišťovány experimentálně a pohybují se kolem 15 GPa. Ovšem tato hodnota se může značně lišit v závislosti na místě odběru vzorku, typu experimentu, rychlosti a směru zatěžování a stavu kosti [23].

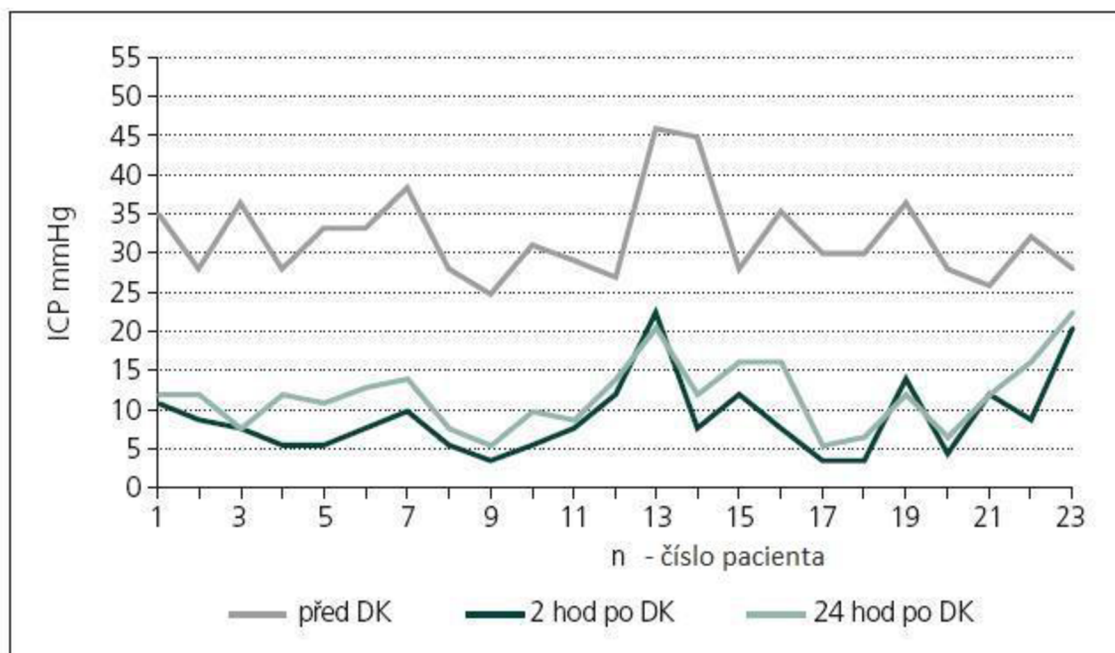
<sup>2</sup> aBMD – apparent bone mineral density (en)

#### 4.6. Intrakraniální tlak

Intrakraniální tlak (ICP<sup>3</sup>) je termín, kterým je označován tlak uvnitř dutiny lebeční a v neurochirurgii sehrává významnou úlohu při sekundárním poškození mozku [24]. Sekundárním poraněním jsou myšlena poranění vznikající v návaznosti na úraz [25].

Intrakraniální prostor je ohraničený pevným skeletem lebky, který zaujímá objem přibližně 1700 ml. Tento objem je dle Monroova-Kellieho doktríny tvořený mozkovou tkání (80 %), krví v mozkových cévách (10 %), mozkomíšním mokem (10 %) [25]. Objem je v důsledku charakteru lebky neměnný a z důvodu velkého obsahu vody také nestlačitelný. Proto musí při jakémkoliv zvětšení objemu některé z vyjmenovaných složek dojít ke kompenzaci, tedy zmenšení objemu ostatních složek. Tyto kompenzační schopnosti jsou však omezené asi na 100 ml objemu. Pokud dojde k vyčerpání kompenzačního objemu, dochází k zvýšení ICP, což může vést k bolestem hlavy, bezvědomím a může vést až k smrti pacienta [25]. Je třeba provést dekompresivní kranioektomii (DK), což je typ neurochirurgické operace, která se provádí za účelem radikálního snížení ICP. Jedno z indikačních kritérií k provedení DK je vzestup ICP nad 25 mm Hg na déle než 60 minut (obrázek 4.5) [26].

Normální hodnoty ICP v leže se u dospělých pohybují v pásmu od 7–15 mm Hg (0,9-2 kPa). Ve vzpřímené poloze může ICP klesnout až pod hodnotu atmosférického tlaku [24]. Tato hodnota pro stojícího dospělého člověka se pohybuje kolem -10 mm Hg (-1,3 kPa), ale ne méně než -15 mm Hg [27]. Také během kýchání nebo smrkání může ICP krátkodobě stoupnout až na hodnotu 60 mm Hg (8 kPa) [24].



Obr. 4.5: Hodnoty ICP v mm Hg u 23 pacientů v perspektivním souboru [26]

<sup>3</sup> intracranial pressure (en)

## 5 Lebeční implantát

Pro zakrytí větších lebečních defektů, se používá v první řadě autonomní kost, avšak často se volí řešení použití implantátu. Tyto implantáty mohou být buď předem připravené a vyrobené pro daný defekt (takzvané patient specific implants) nebo univerzální ne-předpřipravené implantáty. U předem připravovaných implantátů neboli personalizovaných implantátů, je možné použití různých materiálů, jako PMMA, PEEK nebo titan.

U ne-předempřipravených implantátů se standardně jedná o PMMA desky, nebo titanové mřížky různého designu, které jsou upravovány a tvarovány intraoperativně<sup>4</sup> [28].



*Obr. 5.1: Příklad personalizovaného implantátu ze slitiny titanu [28]*

V dnešní době vstupují do popředí personalizované implantáty. Ty vyžadují složitější přípravu, ale značně zkracují samotný zákrok oproti způsobu tvarování přímo na operačním sále, a tím snižují riziko neúspěchu. Tato příprava se skládá z několika stádií: získání dat z medicínských zařízení, vytvoření modelu implantátu pomocí CAD/CAM a výroba implantátu. Je třeba i volba vhodného materiálu a po výrobě následuje opracování, sterilizace a aplikace [5].

Ale je třeba si uvědomit, že v tomto novém přístupu pro tvorbu implantátů je možné v každém stádiu přípravy vytvořit geometrickou chybu, která může mít za následek špatnou konektivitu implantátu s lebkou [5]. Tato chyba může být dána formátováním dat z formátu DICOM (Digital Imaging and Communications in Medicine), která jsou vytvořena na medicínském zařízení, do formátu STL, ve kterém je vytvářen a navrhován implantát, nebo samotnou výrobou [29].

---

<sup>4</sup> Intraoperativně – v průběhu operace

## 5.1. Materiály pro výrobu implantátů

Vhodný materiál v kranioplastice by měl splňovat tyto podmínky [30]:

- Radiolucence
- Odolnost vůči infekcím
- Nízkou tepelnou roztažnost
- Odolnost vůči biomechanickým procesům
- Lehkou tvarovatelnost

### PMMA (polymethyl-methacrylat)

Polymethylmethakrylát (PMMA), běžně známý jako plexisklo nebo akrylátové sklo je průhledný syntetický polymer s vlastnostmi termoplastu [31].

Methyl-methacrylate začal být využíván v kranioplastice během 2. světové války. Výhody akrylu nad kovovými materiály spočívá v jeho jednoduché tvarovatelnosti, nízké hmotnosti, nízké ceně a průsvitnosti pro rentgenové záření. Akryl ve formě methyl-methacrylatu (PMMA) je možné tvarovat přímo na operačním sále. Proto je nejrozšířenější materiál používaný pro výrobu kraniálních implantátů [30]. Materiál má modul pružnosti 3000 MPa a Poissonův poměr 0,38 [32].

### Titan

V současné době je titan jediný kov využívaný v kranioplastice [4]. Vedle kovových biomateriálů, jako jsou nerezové oceli a Co-Cr slitiny, patří slitiny titanu k nejvhodnějším materiálům využívaným pro medicínské účely. Titan je vysoce biokompatibilní, bez možného rizika vzniku alergické reakce, má dobrou pevnost, a odolný vůči korozi [33; 4]. Slitiny titanu můžeme rozdělit dle překrystalisace na typ slitiny:  $\alpha$ ,  $\beta$ , nebo  $\alpha+\beta$ . Mezi nejpoužívanější titanové slitiny používané v medicíně k výrobě implantátů patří CP Ti (ASTM F67) a Ti-6Al-4V ELI slitina (ASTM F136).

CP Ti je slitina  $\alpha$ . Skládá se z 98,9-99,6 % z titanu a v závislosti na obsahu kyslíku se mění materiálové vlastnosti. S jeho rostoucím obsahem se zvyšuje mez kluzu v tahu. Při 0,18 % kyslíku je mez kluzu v tahu 170 MPa a při 0,40 % 485 MPa. Tato slitina je rozdělena na 4 stupně právě dle obsahu kyslíku, je také využívána převážně na dentální implantáty [34].

Slitina Ti-6Al-4V ELI je dvoufázová slitina ( $\alpha+\beta$ ), jejíž mikrostruktura závisí na tepelném zpracování. Obsah titanu se pohybuje mezi 88,3–90,8 % [34]. Ti-6Al-4V ELI má modul pružnosti roven 110 GPa, mez pevnosti v rozmezí 860-965 MPa, mez kluzu 795-875 MPa a Poissonův poměr 0,3 [35].

### PEEK (Polyether ether keton)

Polyether ether keton je semikrystalický termoplast, který je radiolucenční a tvrdý [36]. Navíc PEEK je nealergenní, inertní materiál s vysokou teplotní tolerancí, díky čemuž je možná důkladnější sterilizace. PEEK je možné tvarovat během operace dle potřeby [37]. Materiál má modul pružnosti 3,2 GPa a Poissonův poměr 0,4 [38].

Tab. 5.1: Mechanické vlastnosti materiálů

Materiál:	Kost	PMMA	PEEK	Ti-6Al-4V ELI
E [MPa]	15000	3000	3200	110000
$\nu$ [-]	0,3	0,38	0,4	0,3

## 5.2. Získávání a zpracování dat

Před operací je třeba získat 3D data pomocí lékařské zobrazovací metody. Vzhledem k výbornému kontrastu tvrdé tkáně (kosti) a prostorovému rozlišení, je z počítačového tomografu (CT) možné získat nejlepší 3D data o kostěných strukturách. Data získaná pomocí lékařského zobrazení jsou ve formátu DICOM a jsou převáděny do formátu STL (Standard Tessellation Language) [6]. Ke změně formátu dat je používán speciální algoritmus nazývaný segmentace, který vytvoří z jednotlivých snímků 3D model zájmové struktury (kosti, tkáně) [39].

## 5.3. Vytvoření modelu

Model implantátu je navrhován tak, aby zakryl celý defekt a splnil bezpečnostní požadavky. Navrhování implantátu je možné například pomocí 3Matic-softwaru (3Matic, Mimics, Pro-Engineer, Freeform) [28]. Existují 2 metody návrhu tvaru implantátu, aby vypadal esteticky dobře a zároveň chránil pod ním ležící mozek [40].

První metoda se nazývá metoda zrcadlení, kdy je implantát navrhován pomocí symetrie z protilehlé části lebky.

Druhá metoda je pomocí matematických algoritmů, které slouží k vyplňování defektů a tvorbě zakřivení. Není zde použito zrcadlení. [40; 41].

Při tvorbě modelu je třeba zvažovat umístění a počet šroubů, tloušťku implantátu vzhledem k velikosti a estetiku.

## 5.4. Způsob výroby

Implantát je vyráběn pomocí technologií Additive manufacturing (AM) nebo rapid prototyping (RP). Vzhledem k volbě materiálu je možné volit různé techniky AM, jako například 3D tisk, selective laser sintering nebo direct metal laser sintering, v závislosti na volbě materiálu [39]. Po AM následuje sterilizace a doručení do nemocnice [28].

## 5.5. Fixace

Správné zajištění a stabilita lebečního implantátu je zprostředkována pomocí fixačního systému. Ten by má zajišťovat stabilitu a nepohyblivost implantátu, dále by měl být biokompatibilní, lehce použitelný, rozložitelný a kompatibilní s CT zobrazováním.

V současnosti je nejvíce používán fixační systém šroub-deska, kdy mezi lebkou a implantátem je fixátor (deska) upevněný pomocí šroubů. Všechny prvky tohoto systému jsou vyráběny z titanu nebo jeho slitin. Je tedy vysoká biokompatibilita celého systému.

Existuje velké množství různých tvarů fixátorů volených pro použití dle charakteru defektu. Fixátory jsou při operaci tvarovány, aby rýsovaly povrch lebky. Pro připevnění jsou používány samořezné šrouby, pro které není třeba předvrtávat díru. Průměr těchto šroubů je 1 nebo 1,5 mm s délkou odvíjející se od typu výrobce [42].



Obr. 4.2: Mikro šroub a fixátor (1 mm) výrobce KLS Martin Group [43; 44]

## 6 Analytické řešení

Pro analytické řešení deformace a napjatosti implantátu je třeba z důvodů řešitelnosti zjednodušit jeho geometrii. Skořepina je těleso plošného charakteru zakřivené v jednom nebo obou hlavních směrech. Definuje se střednicí a tloušťkou, přičemž střednice je určena, jako geometrické místo bodů, které půlí tloušťku skořepiny [45]. Výpočtový model implantátu je uvažován, jako rotačně symetrická částečná kulová skořepina konstantní tloušťky, jejíž geometrie je definována základními parametry: Poloměrem koule  $R$ , poloměrem kružnice vymežující hranu kulové výseče  $r$  a tloušťkou skořepiny  $t$ .

Analytické řešení je provedeno dvěma způsoby. První pomocí teorie membránových skořepin [8]. V tomto případě působí na skořepinu zatížení na celé vnitřní straně intrakraniálním tlakem  $p_n$  a z vnějšku tlakem  $p_t$ , který se rovná síle  $F$  vyvolané váhou hlavy v gravitačním poli rozložené na vnější povrch skořepiny. Druhý způsob je řešení, jako částečná sférická skořepina zatížená tlakem, vyvolaným silou  $F$ , působícím na malou kruhovou oblast se středem na pólu skořepiny [10].

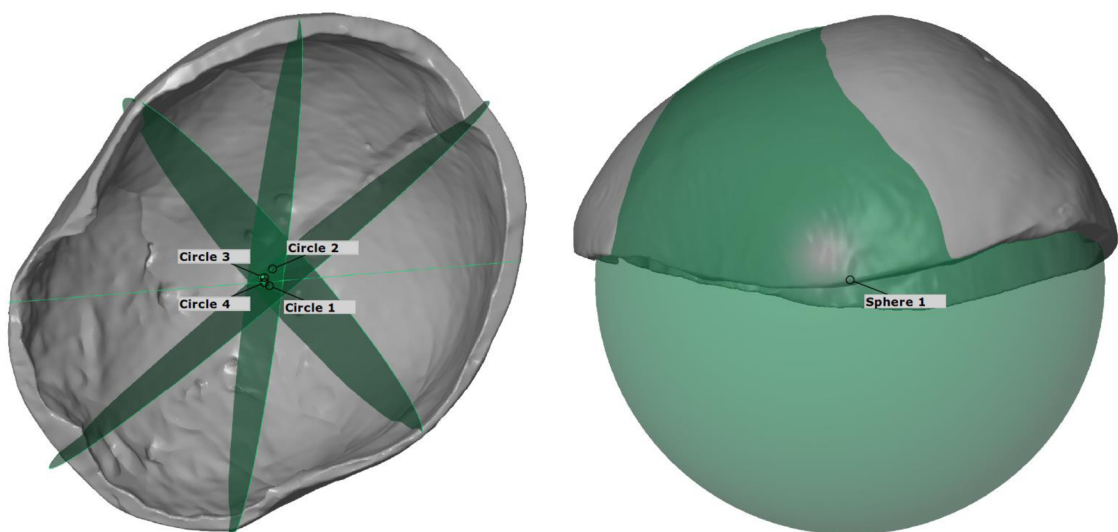
U obou řešení je souřadný systém následující: osy  $x$  a  $z$  jsou v každém bodě tělesa v tečném směru ke střednici, osa  $y$  leží ve směru normály střednice.

### 6.1. Vstupní hodnoty rozměrů implantátu a zatížení

Mezi parametry, které budou dále potřebné pro výpočty, je třeba znát poloměr lebky, hmotnost hlavy, zatěžující sílu, poloměr implantátu a tloušťku implantátu. Geometrické hodnoty jsou určeny z referenčního modelu lebky s defektem.

#### Poloměr lebky $R$

Hodnota poloměru lebky, geometricky zjednodušené na kulové těleso, je určena z referenčního modelu, který je ve formátu STL a na němž je pomocí softwaru GOM Correlate vytvořeno několik pomocných kružnic, které jsou definovány třemi body ležícími na daném modelu (Obr. 6.1). Z aritmetického průměru poloměrů těchto pomocných kružnic je získán konečný poloměr  $R=84$  mm.



Obr. 6.1: Určení poloměru koule aproximující lebku, vlevo pomocné kružnice, napravo koule o poloměru  $R=84$  mm

## Hmotnost hlavy

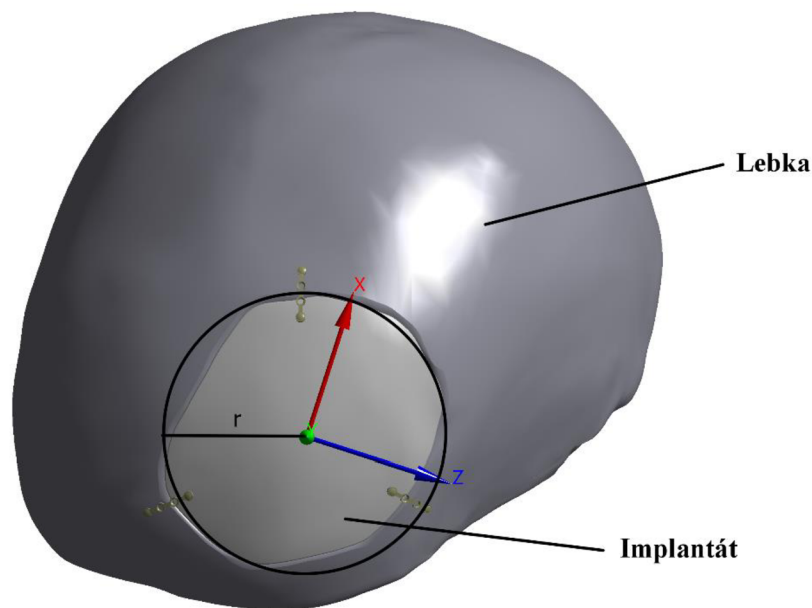
Pro určení hmotnosti lidské hlavy dospělého člověka byla sesbírána data ze studií zabývajících se určováním hmotnosti hlavy u pacientů. Jedná se o studie vzniklé v polovině 20. století až do roku 2005. Shrnutím jejich výsledků byl zjištěn rozsah dané hmotnosti od 2,5 kg až po 5,5 kg. Přičemž hodnoty se značně liší v závislosti na individualitě pacienta, jeho pohlaví a věku. V této práci je hodnota hmotnosti hlavy brána jako 5 kg [18].

## Zatěžovací síla $F$

Síla působící na vnější povrch implantátu je rovna působící síle hmotnosti hlavy v gravitačním poli Země, kde je za gravitační zrychlení uvažováno  $g=10 \text{ ms}^{-2}$ . Síla  $F$  je tedy rovna 50 N.

## Poloměr implantátu $r$

Na modelu implantátu, jako částečné sférické skořepiny by se jednalo o hodnotu poloměru podstavy kulového vrchlíku. U výpočtového modelu lebky s aplikovaným implantátem nepravidelného tvaru (Obr. 6.2) byl implantát uvažován, jako 2D obrazec. Byla zanedbána jeho výška a tloušťka. Na obrazci byly měřeny vzdálenosti protilehlých okrajů pomocí úseček procházejících těžištěm obrazce. Výsledná hodnota poloměru  $r$  je rovna polovině aritmetického průměru stanoveného ze vzdáleností těchto úseček a je rovna 30 mm.



Obr. 6.2: Referenční model lebky s aplikovaným lebečním implantátem, na kterém je znázorněna kružnice o poloměru  $r=30 \text{ mm}$

## Tloušťka $t$

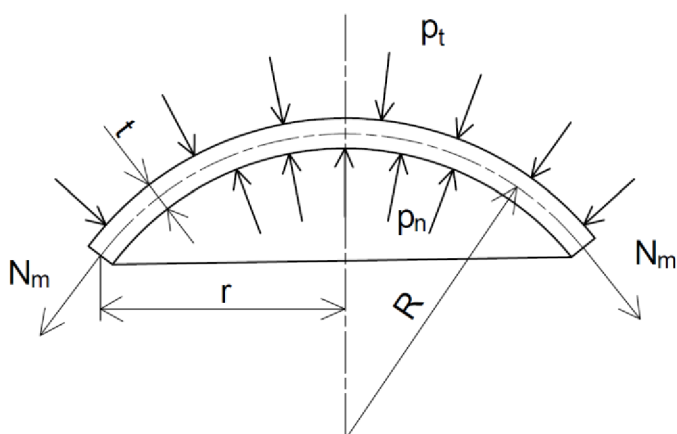
Tloušťka implantátu je proměnná, na které závisí velikost napětí a deformace. Referenční hodnota pro následující způsoby řešení je  $t=3 \text{ mm}$ .



## 6.2. Řešení membránové (bezmomentové) skořepiny

Skořepina je uvažována jako bezmomentová. To znamená, že ohybové napětí vzniklé zatížením je zanedbatelné oproti celkovému normálovému napětí, a tedy jej považujeme za nulové.

Pro takové řešení je potřeba splnit podmínky membránové napjatosti: skořepina je zatížena tlakem působícím na vnější i vnitřní plochu, má konstantní tloušťku  $t$  a okraj je vázán podporou ve směru střednice. Je uvažováno zjednodušení okrajových podmínek, aby bylo vyhověno membránové teorii. Odvození vztahů a postup řešení je popsán ve skriptech Pružnost pevnost II [8].



Obr. 6.3: Geometrie a zatížení skořepiny

Vstupní hodnoty geometrie tělesa viz předchozí podkapitola 6.1. Vnější tlak  $p_t$  se rovná síle  $F$  rozložené na plochu skořepiny  $S$ . Vnější plocha implantátu  $S$  je získána z geometrie výpočtového modelu částečné sférické skořepiny v programu Ansys a má hodnotu  $2920,24 \text{ mm}^2$ . Tedy  $p_t = 0,017 \text{ MPa}$  a intrakraniální tlak uvažován za normálních podmínek je  $p_n = 0,002 \text{ MPa}$ . Materiálem je PMMA.

Tab. 6.1: Vstupní hodnoty

R	84 mm
r	30 mm
t	3 mm
$p_n$	0,002 MPa
$p_t$	0,017 MPa
E	3000 MPa
$\nu$	0,38

### Kontrola podmínky tenkostěnné skořepiny:

Podmínka stanovuje, zda můžeme těleso uvažovat, jako tenkostěnnou skořepinu.

$$\frac{R}{t} > 10$$

Dosažení:

$$28 > 10$$

podmínka  
splněna

### Výpočet napětí:

Určení napětí u membránových skořepin lze pomocí Laplaceovy rovnice (6.1):

$$\frac{p}{t} = \frac{\sigma_m}{r_m} + \frac{\sigma_t}{r_t} \quad 6.1$$

Velikost tlaku  $p$  je rovna rozdílu tlaků  $p_n$  a  $p_t$ .

$$p = p_n - p_t = 0,002 - 0,017 = -1,50 \times 10^{-2} \text{ MPa}$$

Jelikož se jedná o rotačně souměrnou kulovou skořepinu, jsou tečný  $r_t$  a meridiánový  $r_m$  poloměr rovny poloměru koule  $R$ .

$$r_m = r_t = R = 84 \text{ mm}$$

Dále tečné a meridiánové napětí  $\sigma_t$ ,  $\sigma_m$  jsou stejně velká.

$$\sigma_m = \sigma_t = \sigma$$

Za těchto předpokladů vyjádření velikosti napětí lze rovnicí (6.2):

$$\sigma = \frac{pR}{2t} \quad 6.2$$

Dosazení: 
$$\sigma = \frac{-0,015 \times 84}{2 \times 3} = -0,21 \text{ MPa}$$

### Výpočet deformace:

Deformace je odvozena z Hookova zákona. Pro změnu poloměru  $\Delta R$  platí vztah (6.3):

$$\Delta R = \frac{R}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_m) \quad 6.3$$

Kde po dosazení rovnice pro napětí (6.2) do je upraven vztah na (6.4):

$$\Delta R = \frac{R}{E} \left( \frac{pR}{2t} - \nu \frac{pR}{2t} \right) = \frac{pR^2}{2Et} (1 - \nu) \quad 6.4$$

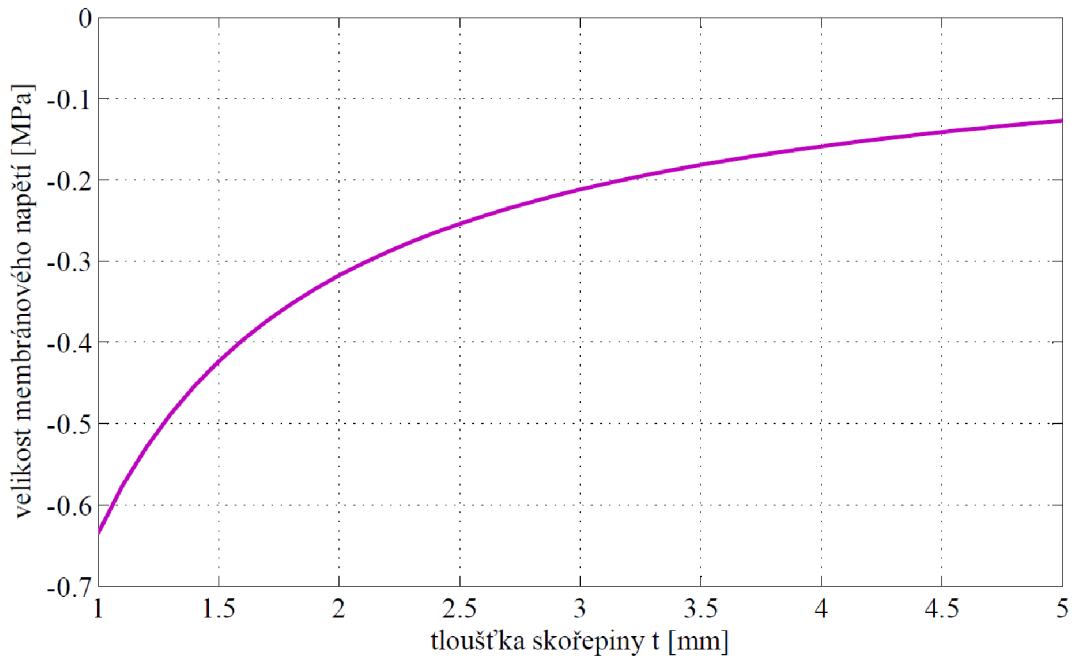
Dosazení: 
$$\Delta R = \frac{-0,015 \times 84^2}{2 \times 3 \times 3000} \times (1 - 0,38) = -3,65 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

Pro tento případ platí, že maximální průhyb v místě osy rotace  $\Delta y$  je roven změně poloměru  $\Delta R$ .

### Sestavení grafů závislosti velikosti napětí $\sigma$ a deformace $\Delta y$ (maximální průhyb) na tloušťce $t$ pro různé materiály:

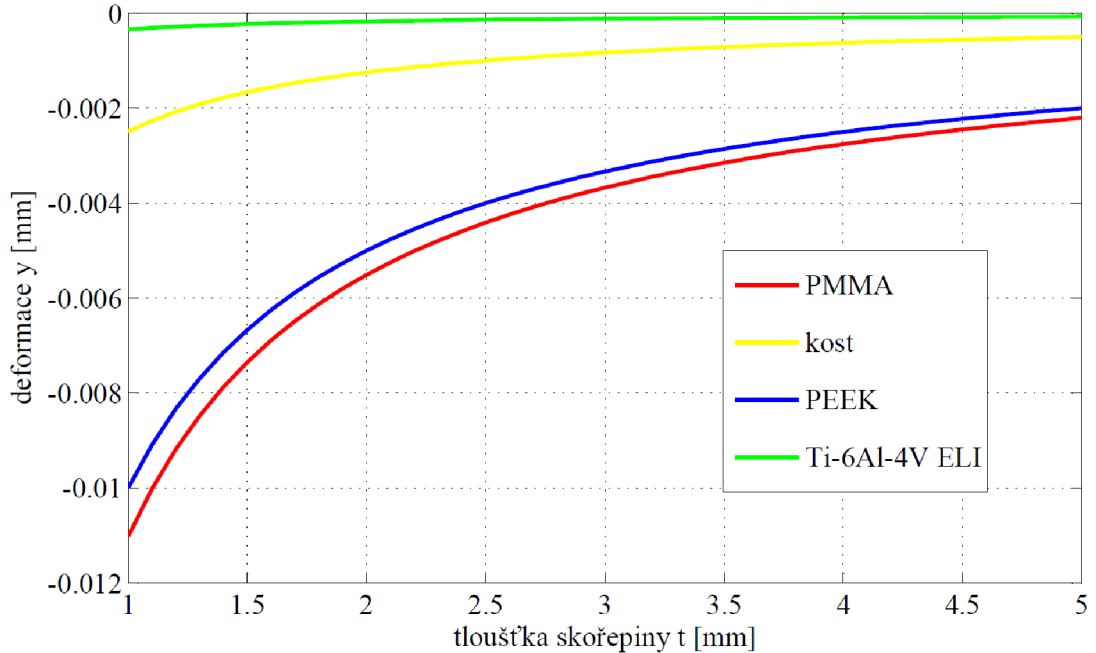
Aby byla vytvořena představa o ovlivnění tloušťkou skořepiny deformace  $\Delta y$ , byl pomocí programu Matlab vytvořen graf závislosti  $\Delta y$ - $t$  a  $\sigma$ - $t$ . A to pro různé biokompatibilní materiály viz tabulka 5.1.

### Graf závislosti $\sigma - t$



Obr. 6.4: Graf závislosti velikosti napětí na tloušťce skořepiny

### Graf závislosti $\Delta y - t$ , různé materiály



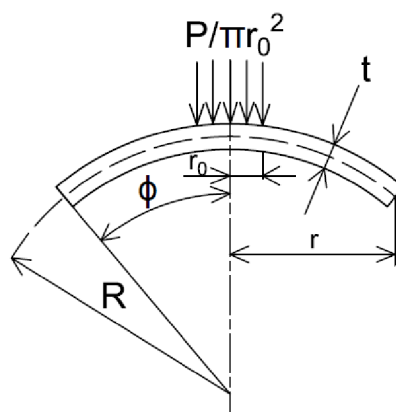
Obr. 6.5: Graf závislosti deformace ve směru osy  $y$  na tloušťce skořepiny, sestaveno pro různé materiály

### 6.3.Řešení částečné sférické skořepiny zatížené tlakem působícím na malou kruhovou oblast se středem na pólu

Řešení částečné sférické skořepiny zatížené tlakem  $p$  na malou kruhovou oblast o poloměru  $r_0$  s centrem na pólu vychází ze vztahů odvozených v práci E. Reissnera [10]. V tomto případě je uvažováno zatížení pouze vnějším tlakem  $p_t$ , který je stejně jako v předešlém řešení popsán působením síly  $F=50\text{ N}$ , dále označované  $P$ , na oblast o poloměru  $r_0=10\text{ mm}$ . Ostatní vstupní hodnoty jsou stejné jako v předešlém řešení. Pro správné řešení konečných vztahů pro napětí a deformaci je nutné dosazení v jednotkách Angloamerické měrné soustavy. Tyto převedené jednotky jsou uvedeny v tabulce 6.2. Jako materiál pro referenční výpočet je opět uvažováno PMMA.

Tab. 6.2: vstupní hodnoty + převod jednotek

Parametry:	SI	Angloamerická měrná soustava (Imperial units)
R	84 mm	3,31 in
r	30 mm	1,18 in
t	3 mm	0,12 in
P	50 N	11,24 lbf
$r_0$	10 mm	0,39 in
E	3000 MPa	435113 psi
$\nu$	0,38	0,38



Obr. 6.6: Geometrie a zatížení skořepiny

#### Kontrola podmínek

Pro použití následujícího řešení je třeba splnit tyto podmínky:

1. Podmínka tenkostěnné skořepiny:

$$\frac{R}{t} > 10$$

Dosazení:

$$28 > 10$$

podmínka  
splněna

2. Podmínka  $\phi > \phi_0$ :

Následující vzorce na výpočet napětí a průhybu jsou aplikovatelné i na zatížení mimo osu rotace. Podmínka stanovuje minimální velikost úhlu  $\phi_0$  daného vztahem (6.5). Pokud by například byl úhel poloviční, došlo by k ovlivnění výsledků vazbou na okraji skořepiny a výsledek by byl značně nepřesný. Úhel  $\phi$  je vypočítán dle rovnice (6.6).

$$\phi_0 = \sin^{-1}(1,65\sqrt{t/R}) \quad 6.5$$

$$\phi = \sin^{-1}(r/R) \quad 6.6$$

Dosazení:

$$\phi_0 = \sin^{-1}\left(1,65\sqrt{3/84}\right) = 0,32 \text{ rad}$$

$$\phi = \sin^{-1}(30/84) = 0,37 \text{ rad}$$

$$0,37 > 0,32$$

podmínka  
splněna

### Určení Koeficientů A, B, C

Tyto numerické koeficienty závisí na parametru  $\mu$ , který je dán vztahem (6.7):

$$\mu = r_0 \left[ \frac{12(1 - v^2)}{R^2 t^2} \right]^{1/4} \quad 6.7$$

Dosazení:  $10 \times \left[ \frac{12 \times (1 - 0,38^2)}{84^2 \times 3^2} \right]^{1/4} = 1,13 [-]$

Hodnoty těchto koeficientů jsou zapsány v tabulce 6.3. Pro jejich přesné určení byla provedena aproximace tabulkových dat pomocí exponenciální funkce (koeficient  $A=f(\mu)$ ,  $B=f(\mu)$ ,  $C=f(\mu)$ ).

Tyto funkce mají následující tvar:

$$A = -0,0301\mu^2 - 0,0676\mu + 0,437$$

$$B = -0,0147\mu^2 - 0,0344\mu + 0,2185$$

$$C = 1,3588 \times e^{-1,35\mu}$$

Dosazení:  $A=0,32$ ;  $B=0,16$ ;  $C=0,29$ ;

Tab. 6.3: Hodnoty koeficientů A, B, C pomocí parametru  $\mu$  [9]

$\mu$	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
A	0,433	0,431	0,425	0,408	0,386	0,362	0,337	0,311	0,286
B	0,217	0,215	0,212	0,204	0,193	0,181	0,168	0,155	0,143
C	$\infty$	1,394	1,064	0,739	0,554	0,429	0,337	0,266	0,211

### Výpočet průhybu

Maximální průhyb, tedy deformace ve směru osy y, se nachází na ose symetrie skořepiny a je popsán vztahem (6.8):

$$\Delta y = -A \frac{PR\sqrt{1 - v^2}}{Et^2} \quad 5 \quad 6.8$$

Pro správný výpočet je třeba dosadit v jednotkách Angloamerické měrné soustavy.

$$\Delta y = -0,32 \times \frac{11,24 \times 3,31 \times \sqrt{1 - 0,38^2}}{435113 \times 0,12^2} = -1,83 \times 10^{-3} \text{ in}$$

V jednotkách SI:

$$\Delta y = 1,83 \times 10^{-3} \times 25,4 = -4,64 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

<sup>5</sup> Kontrola fyzikálních rozměrů:  $w[in] = \frac{P[lb] \times R[in]}{E \left[ \frac{lb}{in^2} \right] \times t^2[in^2]} = [in]$

### Výpočet maximálního membránového napětí lokalizovaného pod středem zatížení $\sigma_m$

Protože se jedná o rotačně symetrickou skořepinu jsou normálová napětí působící tečně na střednici shodná, tedy dle souřadného systému platí:

$$\sigma_{nx} = \sigma_{nz} = \sigma_m$$

Vztah pro jeho výpočet je následující (5.9):

$$\sigma_m = -B \frac{P\sqrt{1-v^2}}{t^2} \quad 6$$
 6.9

Po dosazení hodnot v jednotkách Angloamerického měrného systému:

$$\sigma_m = -0,16 \times \frac{11,24 \times \sqrt{1-v^2}}{0,12^2} = -111,01 \text{ psi}$$

V jednotkách SI:

$$\sigma_m = -111,01 \times 0,0068948 = -0,77 \text{ MPa}$$

### Výpočet maximálního ohybového napětí pod středem zatížení $\sigma_b$

Stejná velikost ohybového napětí platí stejně jako u membránového napětí, tedy:

$$\sigma_{bx} = \sigma_{bz} = \sigma_b$$

Maximální ohybové napětí je dáno vztahem (6.10):

$$\sigma_b = -C \frac{P(1+v)}{t^2} \quad 7$$
 6.10

Po dosazení hodnot v jednotkách Angloamerického měrného systému:

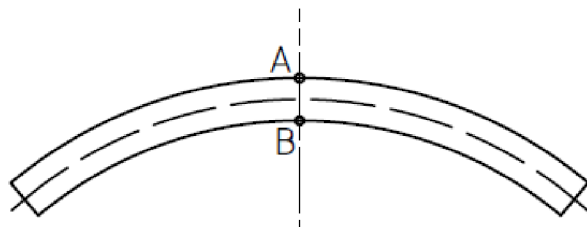
$$\sigma_b = -0,29 \times \frac{11,24 \times (1+0,38)}{0,12^2} = -317,74 \text{ psi}$$

V jednotkách SI:

$$\sigma_b = -317,74 \times 0,0068948 = -2,19 \text{ MPa}$$

### Určení maximálního napětí

Vyšetřovaná nebezpečná místa s maximálním napětím se nachází na ose symetrie skořepiny na vnějším bod A a vnitřní bod B povrchu.



Obr. 6.7: Kontrolované body

<sup>6</sup> Kontrola fyzikálních rozměrů:  $\sigma_m [\text{psi}] = \frac{P[\text{lb}]}{t^2[\text{in}^2]} = [\text{lb}/\text{in}^2] = [\text{psi}]$

<sup>7</sup> Kontrola fyzikálních rozměrů:  $\sigma_b [\text{psi}] = \frac{P[\text{lb}]}{t^2[\text{in}^2]} = [\text{psi}]$

Pro bod A platí, že jak membránové napětí, tak ohybové napětí působí tlakově. Proto celkové napětí bude záporné a jeho velikost v bodě A se rovná:

$$\sigma_A = -\sigma_m - \sigma_b = 0,77 + 2,19 = 2,96 \text{ MPa}$$

Bod B je namáhán tlakem přes membránové napětí a zároveň tahem od ohybového napětí, a tedy velikost napětí v bodě B se rovná:

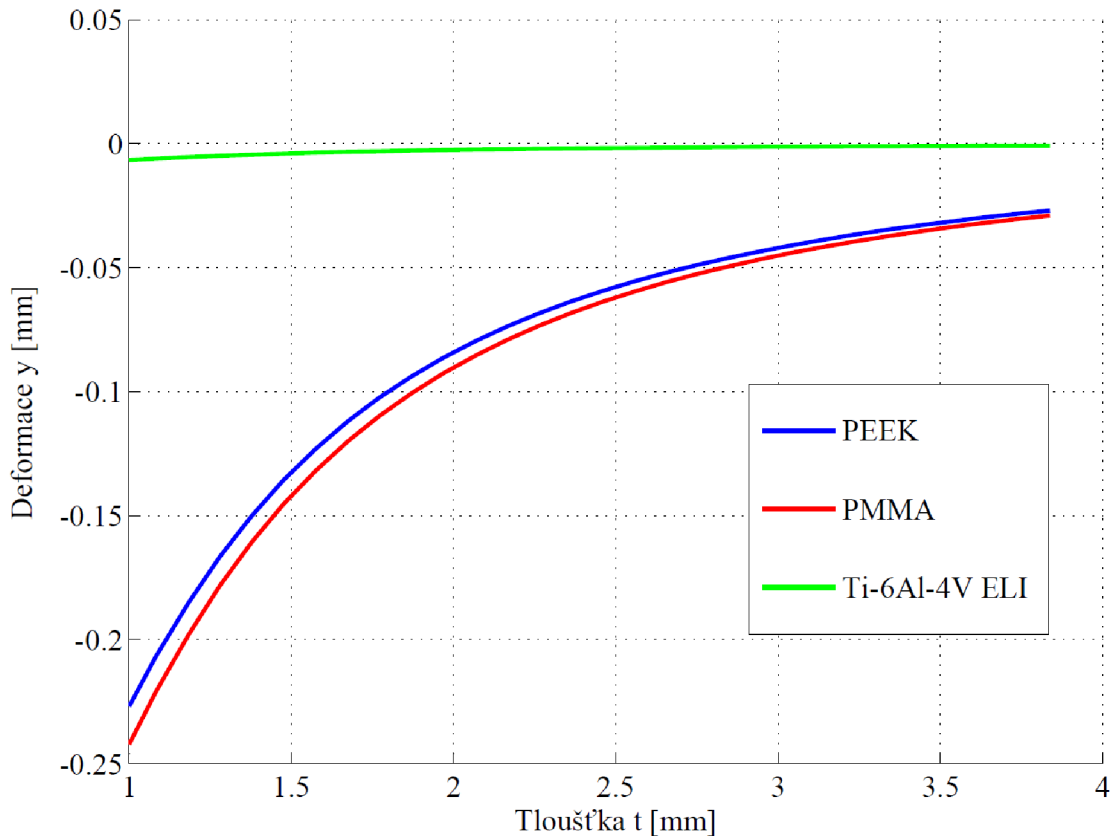
$$\sigma_B = -\sigma_m + \sigma_o = 0,77 - 2,19 = -1,42 \text{ MPa}$$

### Sestavení grafů závislostí velikosti deformace $\Delta y$ a napětí $\sigma_m$ , $\sigma_b$ na tloušťce $t$

Materiálové charakteristiky jsou v tabulce 5.1.

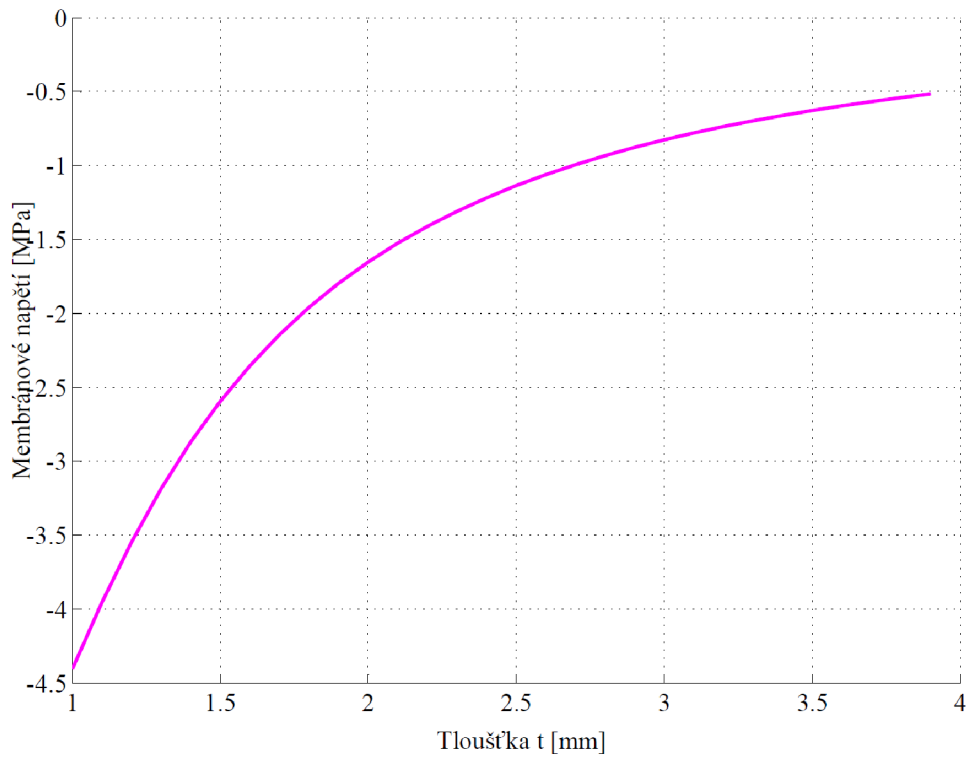
Interval tloušťky  $t$  je dán od 1 mm do 3,9 mm, kde hodnota 3,9 je poslední hodnota splňující druhou podmínku  $\phi > \phi_0$ .

#### Graf $\Delta y - t$



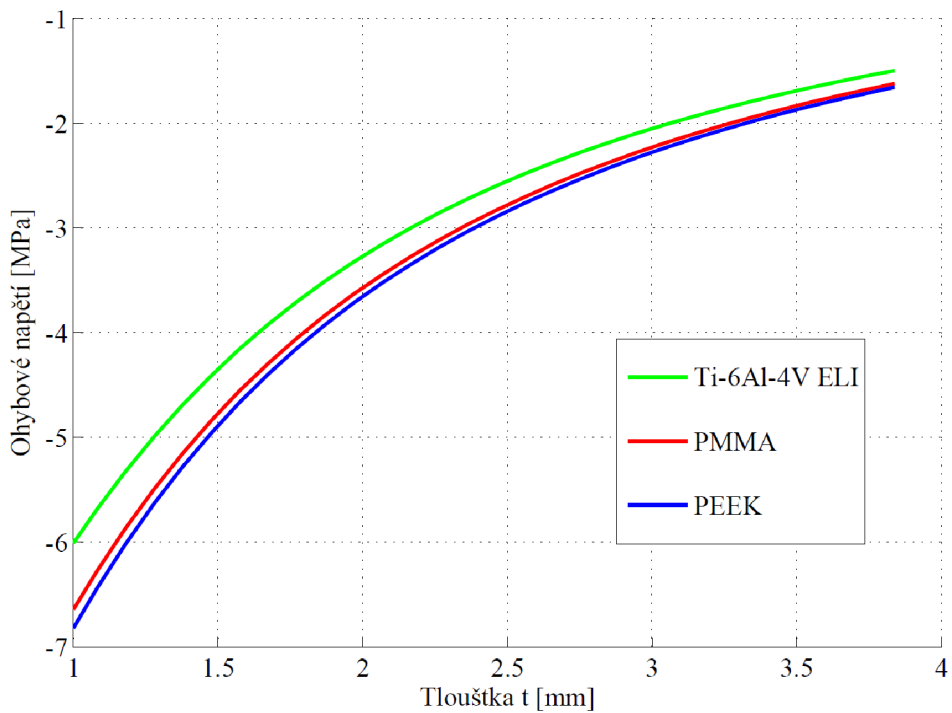
Obr. 6.8: Graf závislosti deformace ve směru osy  $y$  na tloušťce skořepiny pro různé materiály

**Graf  $\sigma_m - t$**



*Obr. 6.9: Graf závislosti membránového napětí na tloušťce skořepiny*

**Graf  $\sigma_b - t$**



*Obr. 6.10: Graf závislosti maximálního ohybového napětí na tloušťce skořepiny pro různé materiály*



## 7 Numerické řešení metodou konečných prvků

Metoda konečných prvků je jednou z nejpoužívanějších metod pro získání deformačně-napěťové analýzy. V současnosti existuje mnoho různých softwarů zabývajících se touto problematikou. V této práci je použit software Ansys Workbench 18. Řešeny jsou dva typy úloh na výpočtovém modelu částečné sférické skořepiny se stejnými podmínkami jako v analytickém řešení. Implantát je modelován jako kulová výseč (Obr. 7.1). První úloha je analogie bezmomentové skořepiny: skořepina zatížená na celém vnějším i vnitřním povrchu. Druhá úloha je skořepina zatížená tlakem působícím na malou kruhovou oblast se středem na pólu. Třetí typ řešení (kapitola. 7.5) je obdoba druhé úlohy provedené na výpočtovém modelu s nepravidelným tvarem implantátu. Jedná se o vyšší úroveň řešení a bylo provedeno vedoucím této práce, jelikož spadá nad rámec znalostí bakalářského studia.

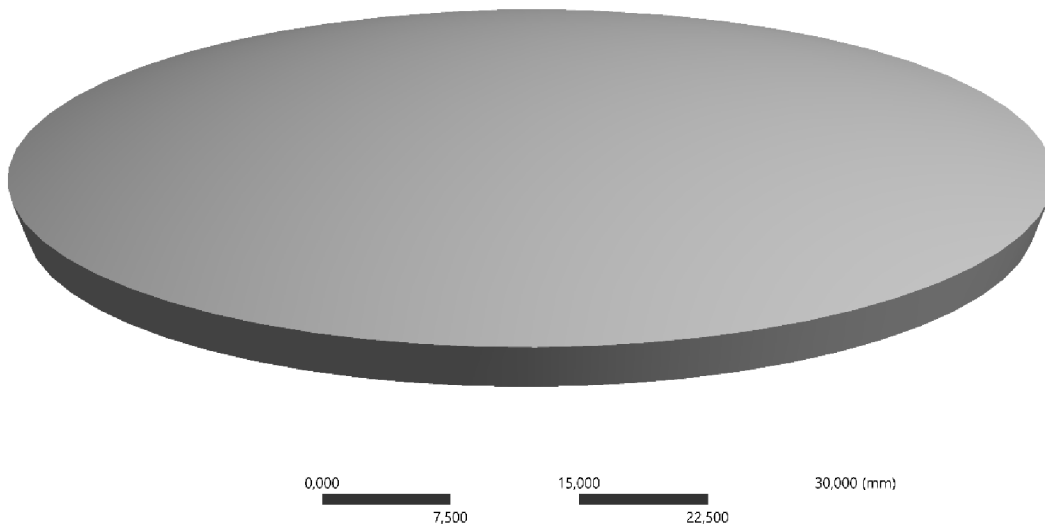
Postup při řešení na výpočtovém modelu částečné sférické skořepiny: vytvoření modelu, nastavení materiálových vlastností, vytvoření sítě konečných prvků, zadání okrajových podmínek a řešení.

Každá z následujících úloh na výpočtovém modelu částečné sférické skořepiny bude řešena třemi způsoby:

1. 2D úloha osově symetrická
2. 3D úloha těleso
3. 3D úloha skořepina

Modely skořepin budou vytvořeny s ohledem na symetrii, kdy je k řešení 2D úloh použita polovina průřezu v rovině symetrie a u 3D úloh je použita jedna čtvrtina částečné kulové skořepiny. Materiálem implantátu je ve všech případech PMMA, jehož mechanické vlastnosti jsou popsány v tabulce 5.1.

Výpočty jsou provedeny pro modely o tloušťkách 1, 2, 3 a 4 mm (3.9 mm). Referenční řešení je provedeno na modelu o tloušťce 3 mm.



Obr. 7.1: Výpočtový model lebečního implantátu, referenční model s poloměrem koule  $R=84$  mm, poloměrem podstavy  $r=30$  mm a tloušťkou  $t=3$  mm

## 7.1. Skořepina zatížená na celém vnějším i vnitřním povrchu

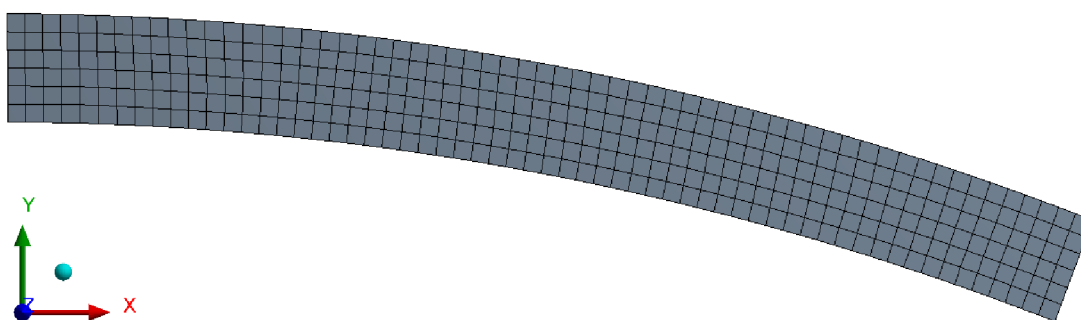
Rozměry a materiálové vlastnosti referenčního modelu jsou stejné jako v analytickém řešení membránové skořepiny viz tabulka 6.1. Tedy geometrické rozměry jsou: poloměr koule  $R=84$  mm, poloměr kružnice podstavy  $r=30$  mm, tloušťka skořepiny  $t=3$  mm (Obr. 6.3).

### 2D úloha

Pro řešení rovinné 2D úlohy rotačně symetrického tělesa je nastaveno chování osově symetrické (axisymetrické).

#### Síť:

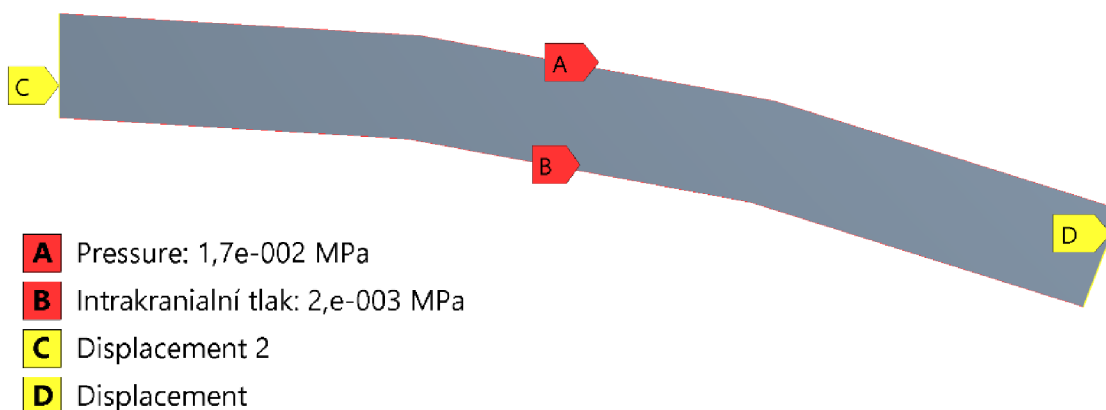
Osa rotace leží na levé hraně obrazce.



Obr. 7.2: Síť vytvořená na 2D modelu z prvků Plane183 pro osovou symetrii

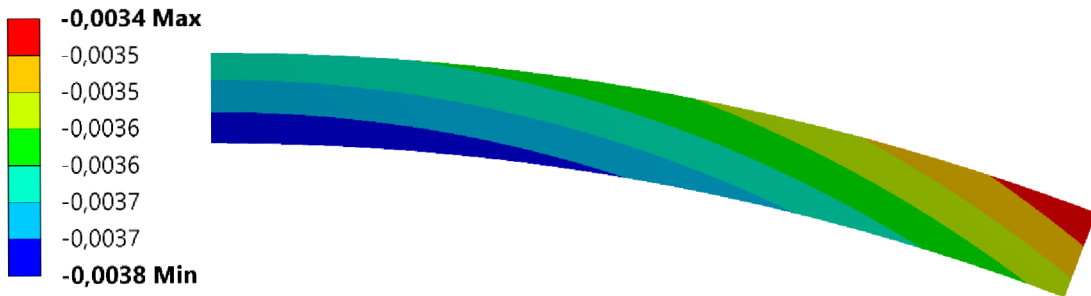
#### Okrajové podmínky:

Okrajové podmínky předpokládají bezmomentovou skořepinu. Vnější okraj modelu, jeho pravá strana je zamezena v pohybu ve směru na ni tečném (vazba D). Tlak A o velikosti  $p_t=0,017$  MPa působí na horní křivku a tlak B o velikosti  $p_n=0,002$  MPa působí na spodní křivku modelu. Místo osy symetrie má dovolený pohyb pouze ve svislém směru (vazba C).



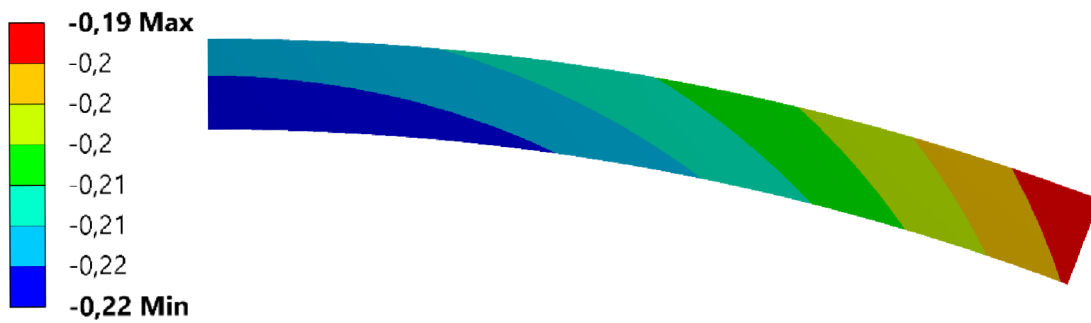
Obr. 7.3: Okrajové podmínky 2D modelu

**Deformace ve směru osy y [mm]:**



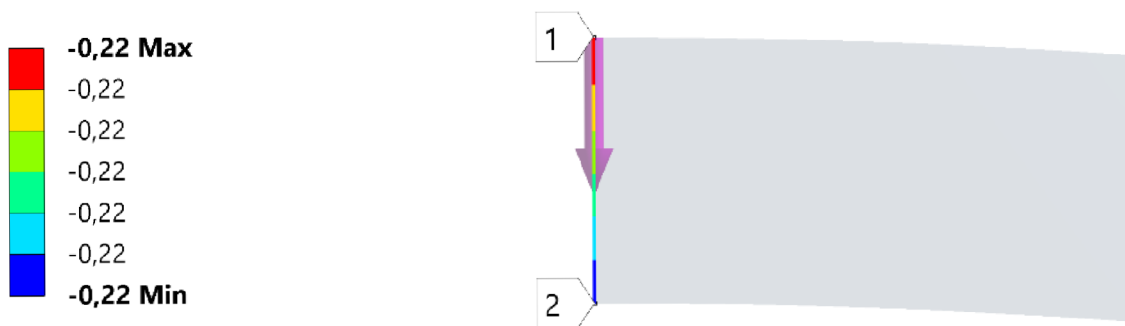
*Obr. 7.4: Celková deformace [mm]*

**Normálové napětí [MPa]:**



*Obr. 7.5: Normálové napětí ve skořepině [MPa]*

**Průběh normálového napětí po tloušťce tělesa na ose rotace:**

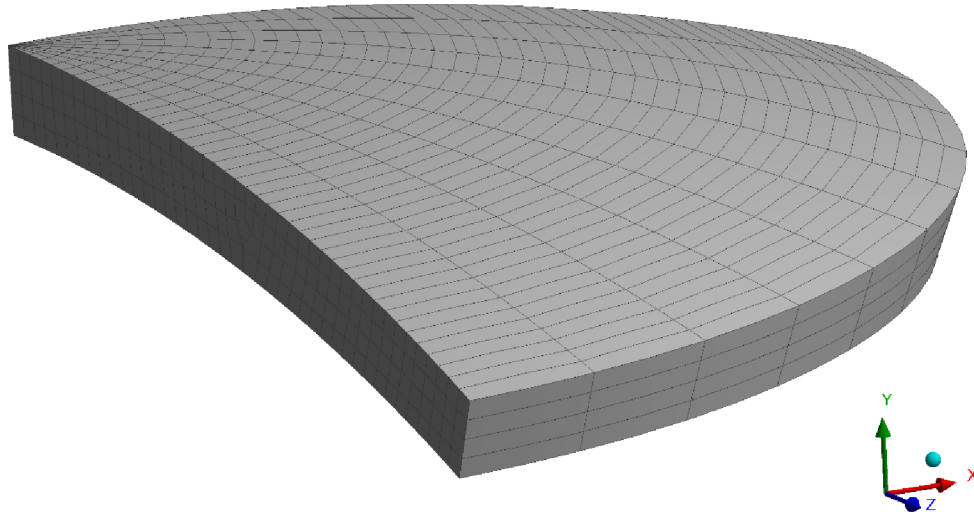


*Obr. 7.6: Linearizované normálové napětí po tloušťce skořepiny na ose rotace [MPa], jediné působící napětí je membránové*

### 3D úloha těleso

Částečná kulová skořepina je řešena, jako těleso pomocí prvků SOLID. Pro řešení deformace a napjatosti je využito symetrie tělesa.

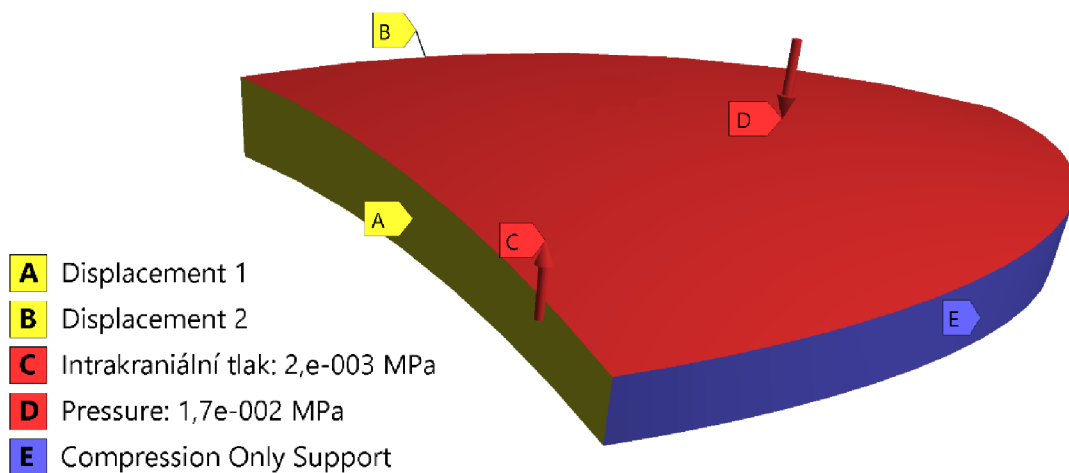
**Sít'**:



Obr. 7.7: Sít' vytvořená na 3D modelu z prvků Solid186

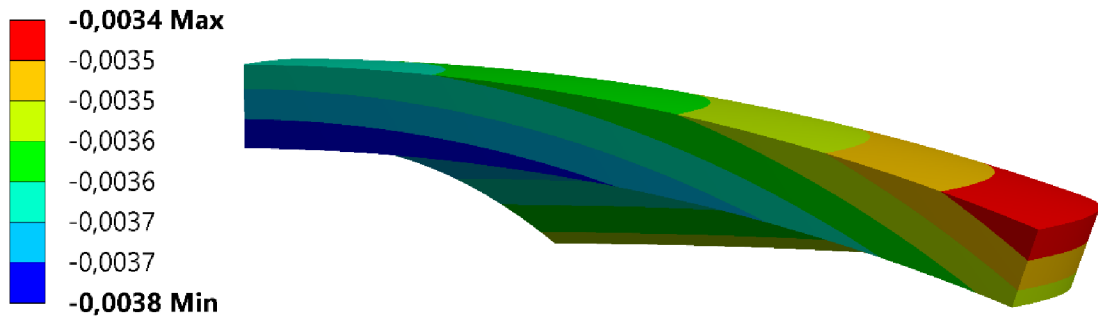
### Okrajové podmínky:

Těleso je podepřeno na ploše vnějšího okraje a podpora působí v tečném směru k této ploše. Tento typ podpory pro tělesa se zadává příkazem: *compression only support*. Plochy řezu rovinami symetrie A a B jsou zamezeny v pohybu ve směrech na nich tečných. Na vnější plochu tělesa působí tlak  $p_t=0,017$  MPa a na vnitřní plochu tělesa působí tlak  $p_n=0,002$  MPa (C a D).



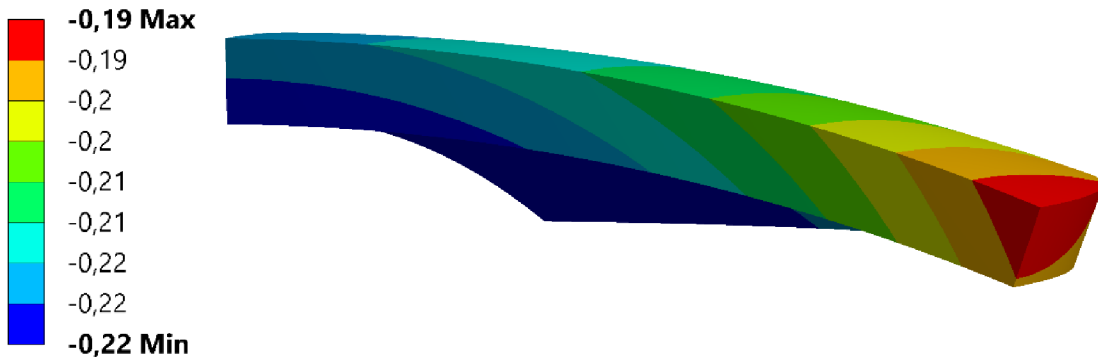
Obr. 7.8: Okrajové podmínky 3D modelu tělesa

**Deformace v ose y [mm]:**



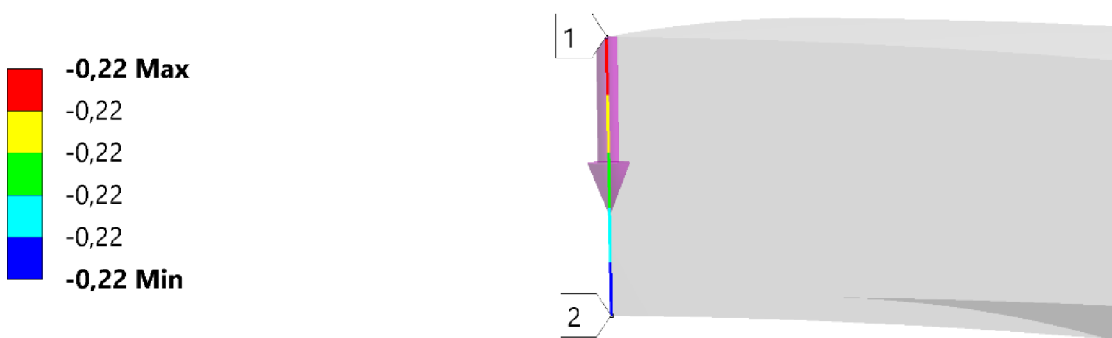
*Obr. 7.9: Deformace ve směru osy y [mm]*

**Normálové napětí [MPa]:**



*7.10: Normálové napětí v tělese ve směru osy z [MPa]*

**Detail průběhu normálového napětí po tloušťce tělesa na ose rotace [MPa]:**

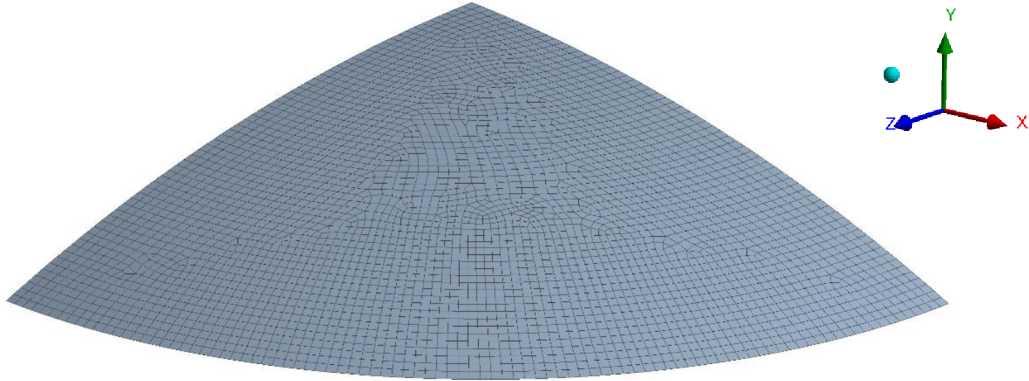


*Obr. 7.11: Linearizované normálové napětí po tloušťce tělesa na ose rotace [MPa]*

### 3D úloha skořepina

Pro výpočet skořepinového tělesa je použit prvek typu SHELL. Těleso je definováno střednicí a tloušťkou (3 mm).

Síť:

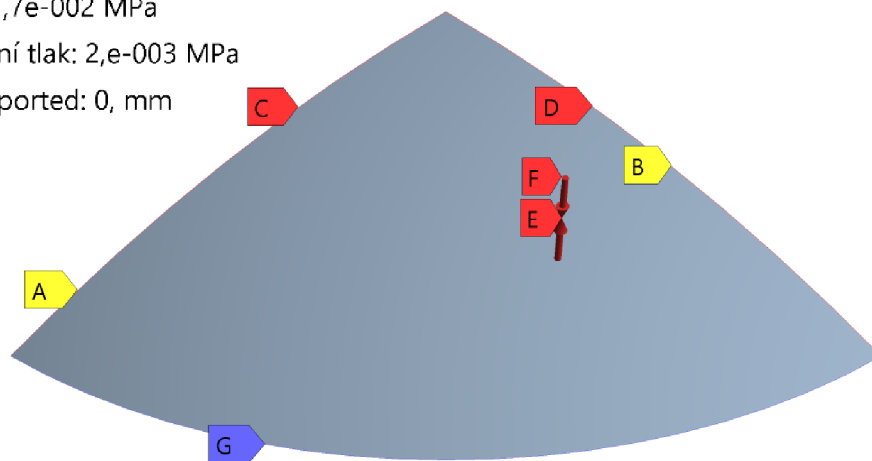


Obr. 7.12: Síť vytvořená na střednici 3D modelu skořepiny

### Okrajové podmínky:

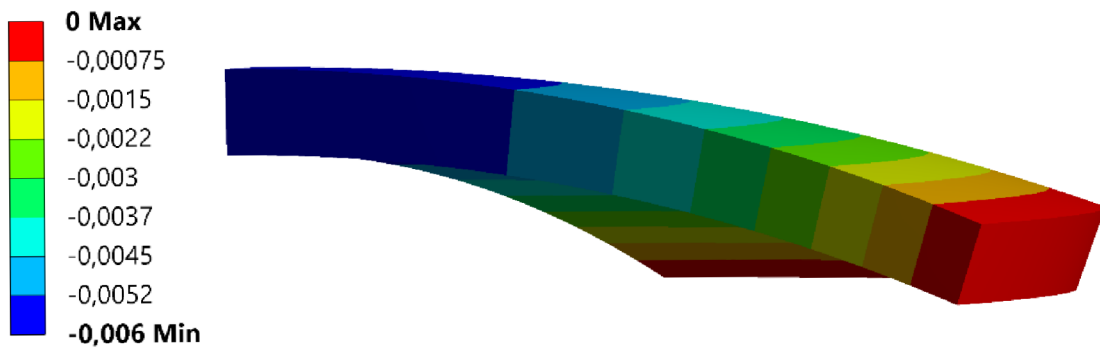
Hrana vnějšího okraje má zamezený pohyb ve všech směrech vazbou G, která představuje obecnou podporu. Dále jsou nastaveny podmínky symetrie pro vnitřní hrany, kdy hrana vzniklá řezem rovinou symetrie má zamezený pohyb ve směru tečnému k této rovině (vazba A a B) a nulové natočení kolem osy ve které hrana leží (vazby C osa z a D osa x). Na plochu působí kladný tlak  $p_n=0,002$  MPa (F) a záporný tlak  $p_t=-0,017$  MPa (E).

- A** Displacement
- B** Displacement 2
- C** Fixed Rotation: 0, °
- D** Fixed Rotation 2: 0, °
- E** Pressure: -1,7e-002 MPa
- F** Intrakraniální tlak: 2,e-003 MPa
- G** Simply Supported: 0, mm



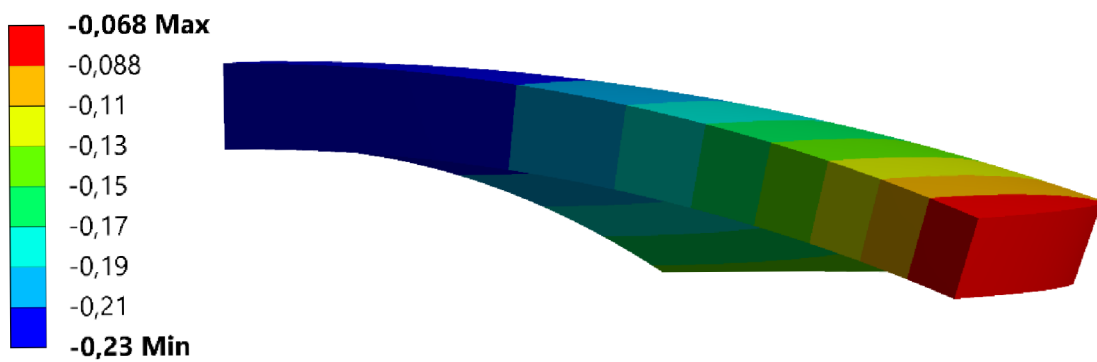
Obr. 7.13: Okrajové podmínky 3D modelu skořepiny

**Deformace ve směru osy y (průhyb) [mm]:**



*Obr. 7.14: Deformace skořepiny ve směru osy y [mm]*

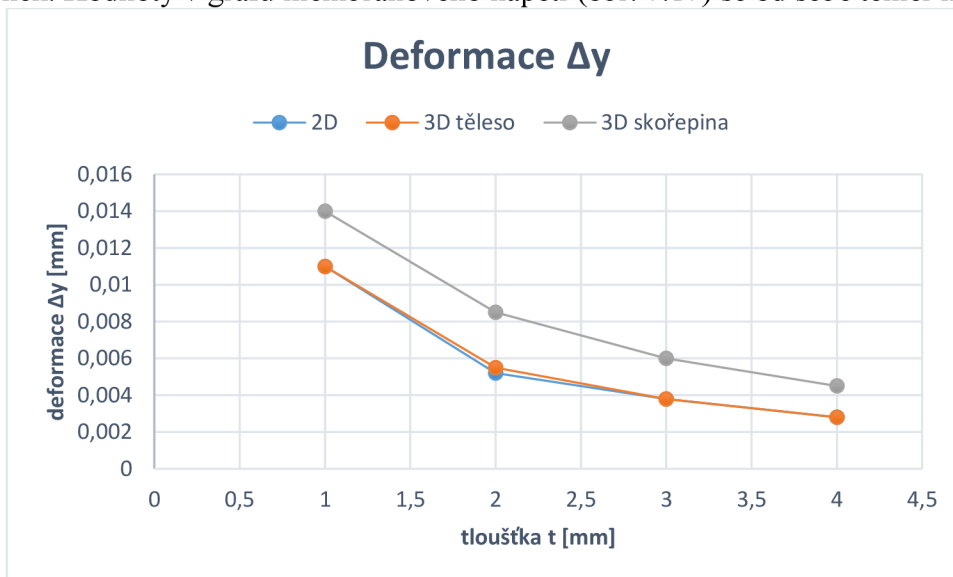
**Normálové napětí na střednici [MPa]:**



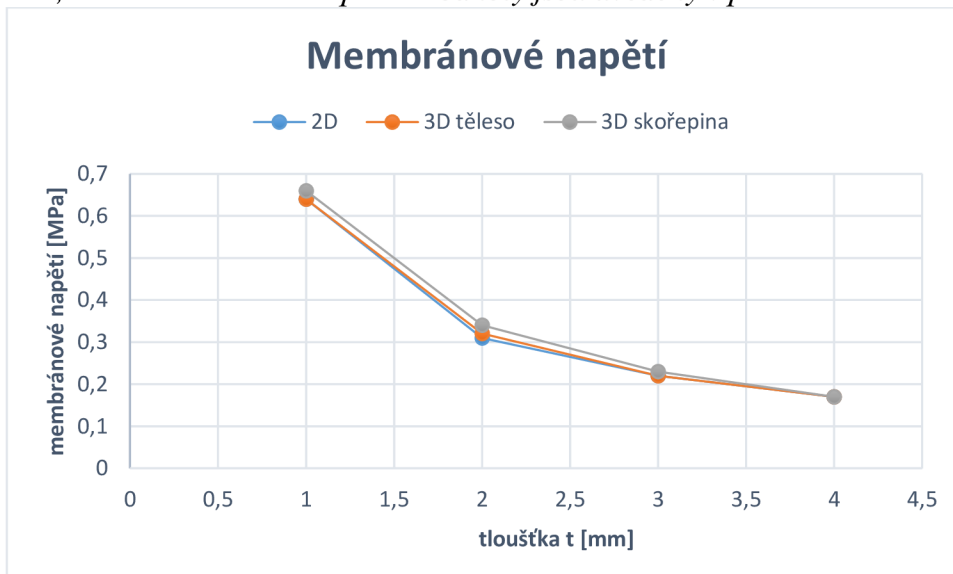
*Obr. 7.15: Normálové napětí na střednici skořepiny [MPa]*

## 7.2. Výsledky řešení skořepiny zatížené na celém vnějším i vnitřním povrchu

Grafy (obr. 7.16, 7.17) obsahují výsledky deformace a membránového napětí vypočtené z tří typů úloh (2D, 3D těleso, 3D skořepina) pro proměnnou tloušťku výpočtového modelu částečné sférické skořepiny, která nabírala hodnot 1, 2, 3 a 4 mm. Hodnoty jsou určeny na ose rotace výpočtového modelu. V grafu deformace  $\Delta y$  (obr. 7.16) jsou výsledky získané z 2D úlohy a 3D úlohy tělesa téměř shodné. Jejich vzájemné odchylky jsou způsobeny pouze nastavením odlišné sítě. Avšak vhodnějším způsobem řešení je 2D úloha, ve které je použito menší množství prvků (viz obr. 7.2, 7.7) se získáním stejného výsledku a tím zkrácena doba trvání výpočtu. 3D úloha skořepiny má rozdílné výsledky, které jsou způsobeny nastavením okrajových podmínek. Hodnoty v grafu membránového napětí (obr. 7.17) se od sebe téměř neliší.



Obr. 7.16: Graf závislosti deformace  $\Delta y$  [mm] na tloušťce  $t$  [mm] pro tři řešené úlohy: 2D, 3D těleso a 3D skořepinu. Hodnoty jsou uvedeny v příloze tabulka 1.



Obr. 7.17: Graf závislosti velikosti membránového napětí  $\sigma_m$  [MPa] na tloušťce  $t$  [mm] pro tři řešené úlohy: 2D, 3D těleso a 3D skořepinu. Hodnoty viz příloha tabulka 2



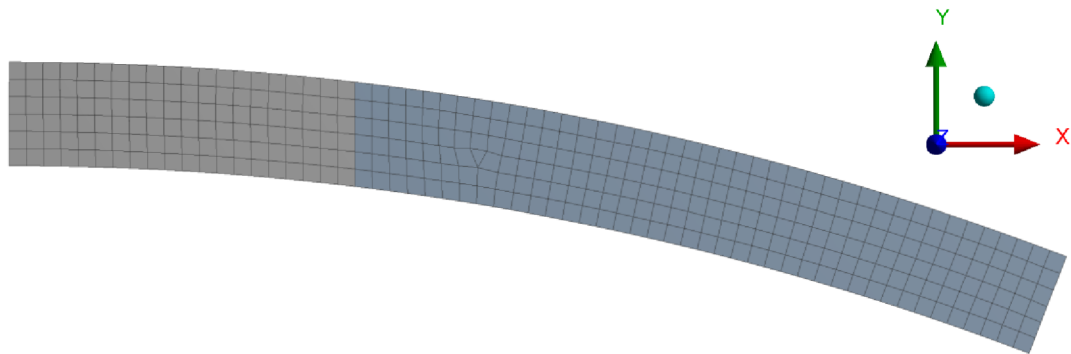
### 7.3.Skořepina zatížená tlakem působícím na malou kruhovou oblast se středem na pólu

Geometrické parametry referenčního modelu vycházejí z analytického řešení skořepiny zatížené tlakem působícím na malou kruhovou oblast se středem na pólu (tab. 6.2). Poloměr koule  $R=84$  mm, tloušťka skořepiny  $t=3$  mm, poloměr kruhové podstavy  $r=30$  mm a poloměr zatěžované oblasti  $r_0=10$  mm. Zatížení tlakem  $p_t$  se rovná síle  $F=50$  N působící na kruhovou oblast o poloměru  $r_0$ . Výsledný tlak je roven:

$$p_t = \frac{F}{\pi \times r_0^2} = \frac{50}{\pi \times 10^2} = 0,159 \text{ MPa}$$

#### 2D úloha

Síť:



Obr. 7.18: Síť vytvořená na 2D modelu z prvku Plane

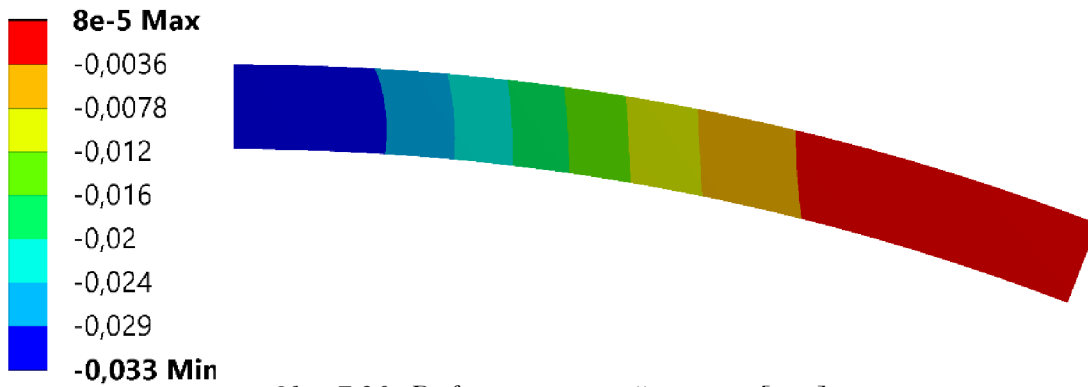
#### Okrajové podmínky:

Podmínka A je zatížení tlakem  $p_t$  hrany o velikosti poloměru  $r_0$ . Těleso je na vnější hraně vetknuté (vazba B).



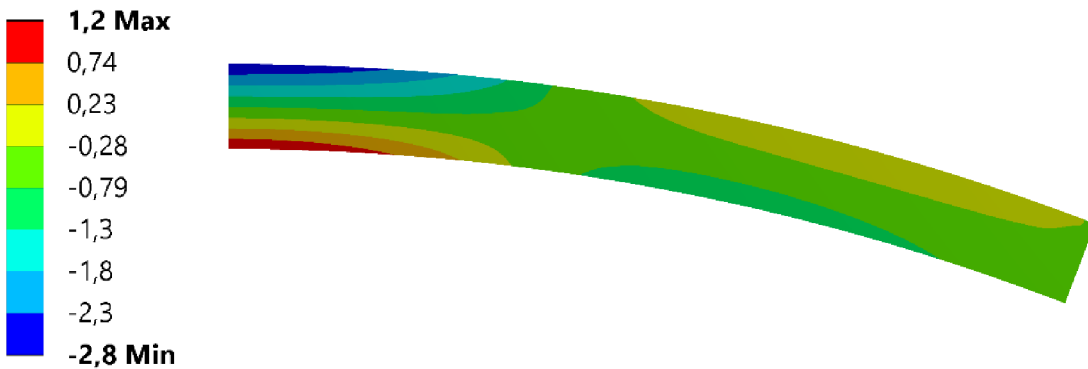
Obr. 7.19: Okrajové podmínky 2D modelu

**Deformace ve směru osy y (průhyb) [mm]:**



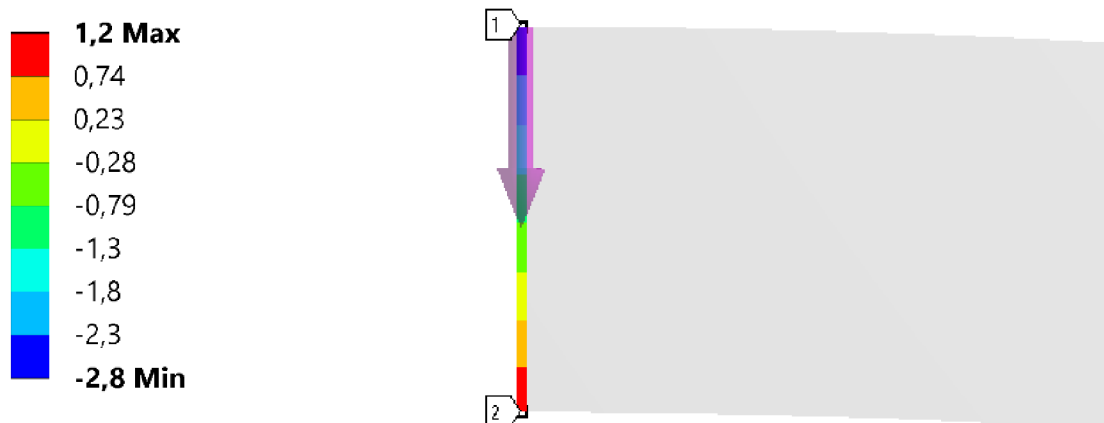
*Obr. 7.20: Deformace ve směru osy y [mm]*

**Normálové napětí [MPa]:**



*Obr. 7.21: Normálové napětí ve směru osy z [MPa]*

**Detail průběh normálového napětí po tloušťce tělesa na ose rotace [MPa]:**



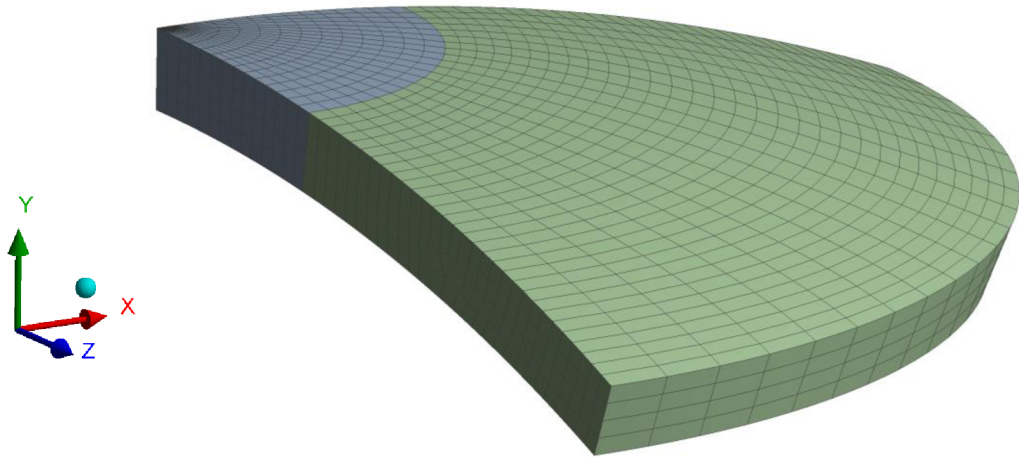
*Obr. 7.22: Linearizované normálové napětí po tloušťce tělesa na ose rotace [MPa]*

Tab. 7.1: Celkové normálové napětí působící na ose rotace tělesa a jeho složky:

místo	Membránové napětí [MPa]	Ohybové napětí [MPa]	Celkové napětí [MPa]
Bod 1	$-81,92 \times 10^{-2}$	-2,03	-2,85
Bod 2	$-81,92 \times 10^{-2}$	2,03	1,21

### 3D úloha těleso

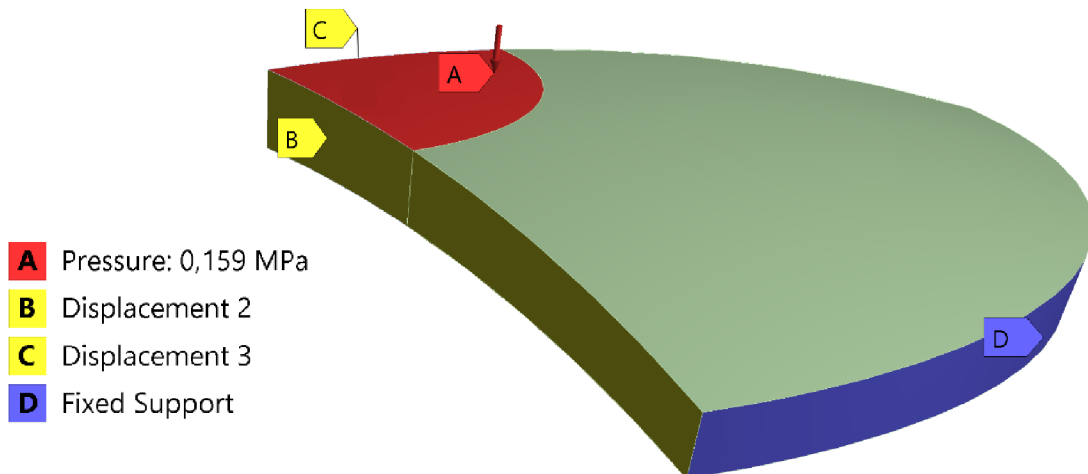
Síť:



Obr. 7.23: Síť vytvořená na 3D modelu z prvků Solid186

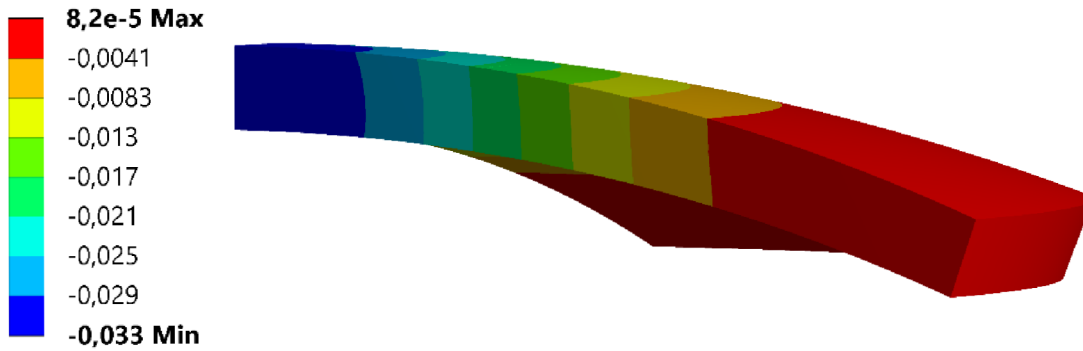
#### Okrajové podmínky:

Těleso je zatíženo tlakem  $p_i$  na oblast o poloměru  $r_0$ . Plochy řezu rovinami symetrie B a C jsou zamezeny v pohybu ve směrech na ně tečných. Vnější okraj tělesa je vetknutý (vazba D).



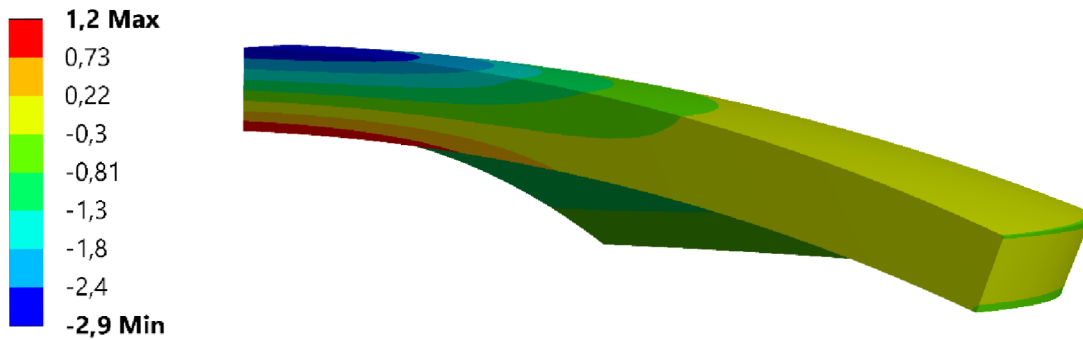
Obr. 7.24: Okrajové podmínky 3D modelu tělesa

**Deformace ve směru osy y (průhyb) [mm]:**



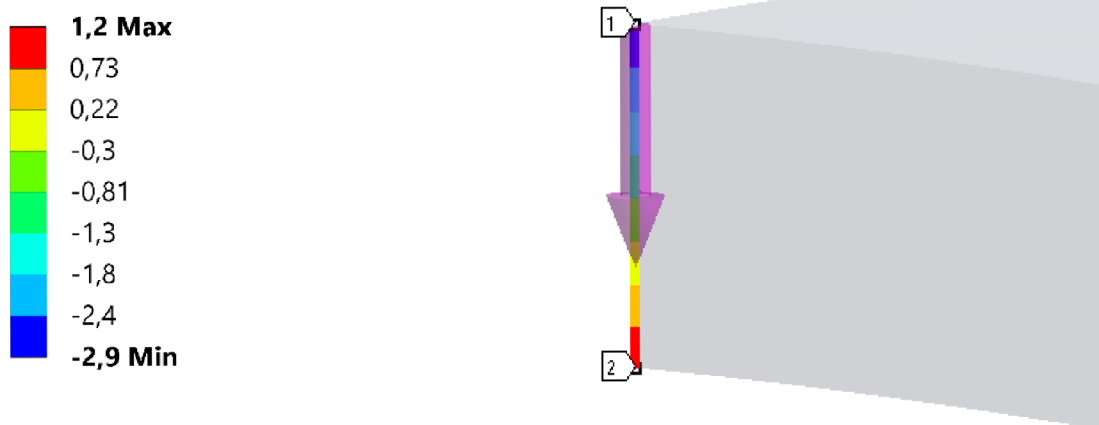
*Obr. 7.25: Deformace ve směru osy y [mm]*

**Normálové napětí [MPa]:**



*Obr. 7.26: Normálové napětí ve směru osy z [MPa]*

**Detail průběhu normálového napětí po tloušťce tělesa na ose rotace [MPa]:**



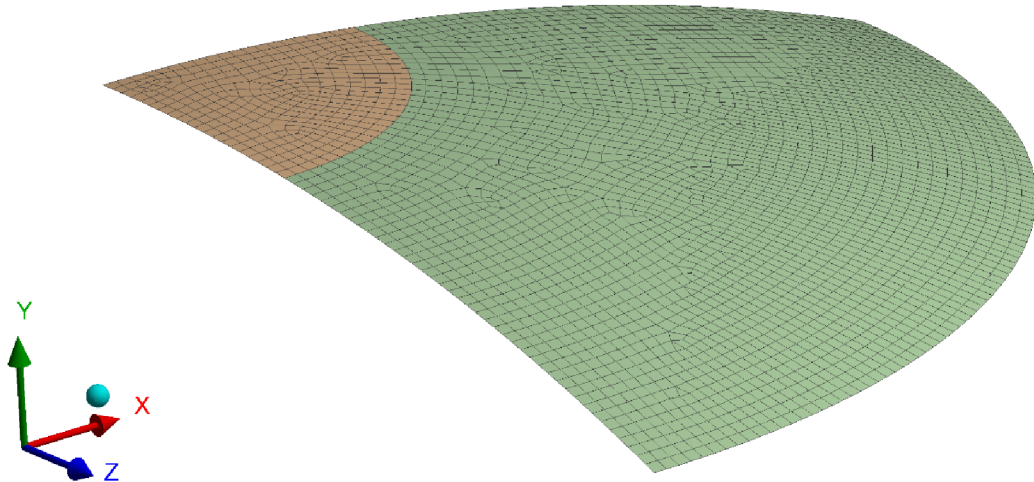
*Obr. 7.27: Linearizované normálové napětí po tloušťce tělesa na ose rotace [MPa]*

Tab. 7.2: Celkové normálové napětí působící na ose rotace tělesa a jeho složky

místo	Membránové napětí [MPa]	Ohybové napětí [MPa]	Celkové napětí [MPa]
Bod 1	$-83,94 \times 10^{-2}$	-2,05	-2,89
Bod 2	$-83,94 \times 10^{-2}$	2,05	1,21

## 3D úloha skořepina

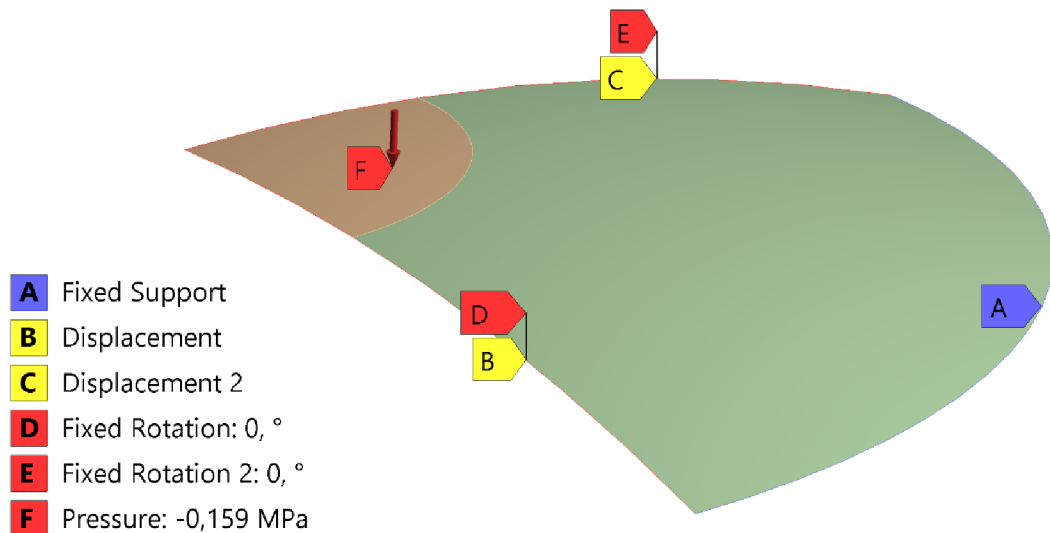
Síť:



Obr. 7.28: Síť vytvořená na 3D modelu skořepiny s jedním prvkem po tloušťce

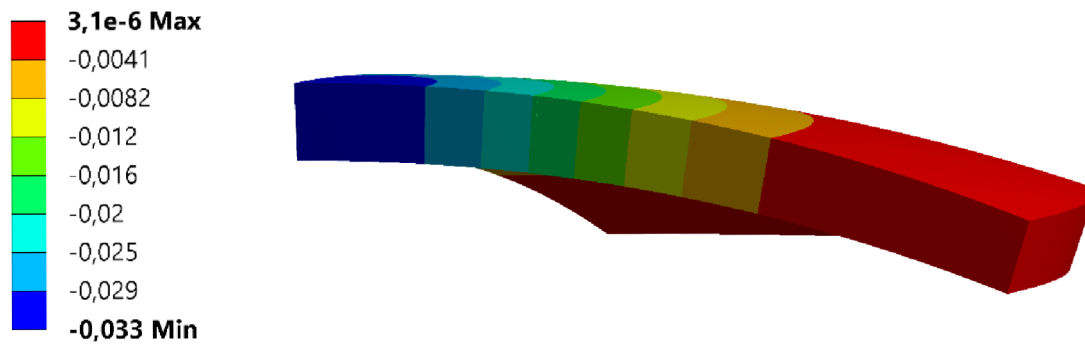
### Okrajové podmínky:

Skořepinové těleso je vetknuté na obvodové hraně (vazba A). Dále jsou nastaveny podmínky symetrie, kdy hrana vzniklá řezem rovinou symetrie má zamezený pohyb ve směru tečnému k této rovině (vazba B a C) a nulové natočení kolem osy, ve které hrana leží (vazby D a E). Tlakové zatížení o velikosti  $p_t = -0,159$  MPa působí na plochu o poloměru  $r_0$  (F).



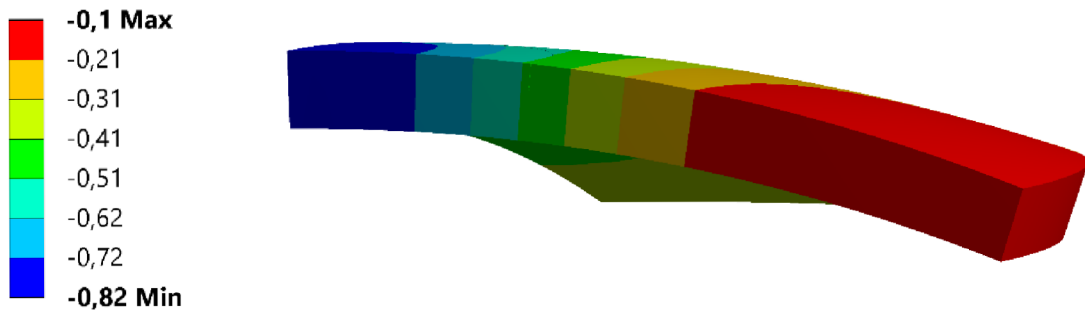
Obr. 7.29: Okrajové podmínky 3D modelu skořepiny

**Deformace ve směru osy y (průhyb) [mm]:**



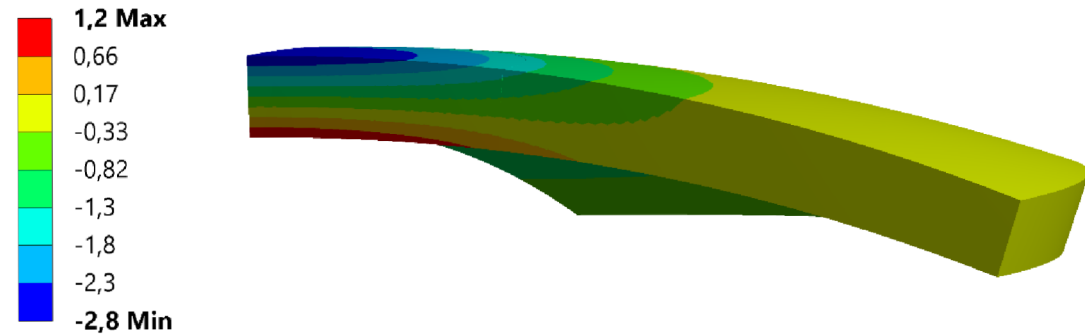
*Obr. 7.30: Deformace ve směru osy y [mm]*

**Normálové napětí na střednici [MPa]:**



*Obr. 7.31: Normálové napětí na střednici ve směru osy z [MPa]*

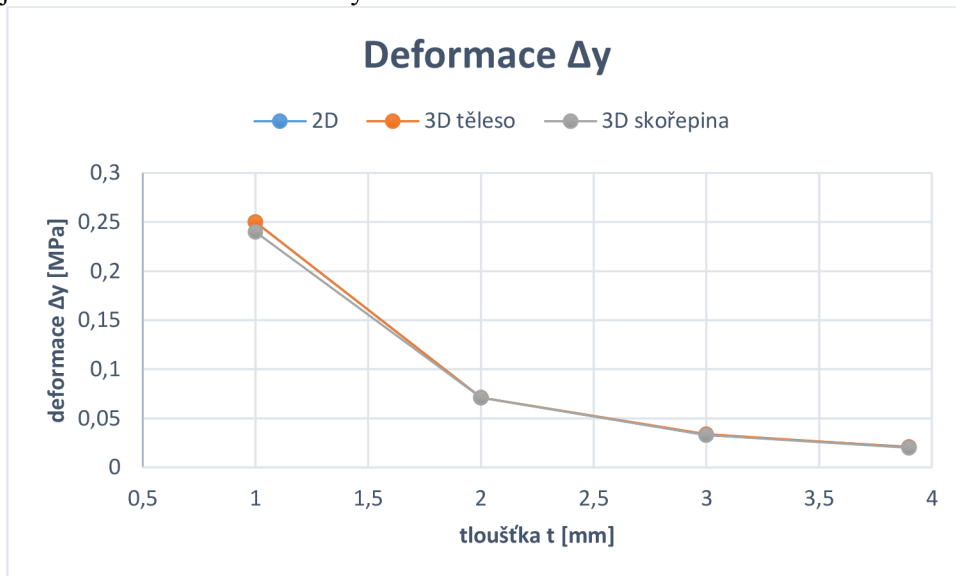
**Normálové napětí [MPa]:**



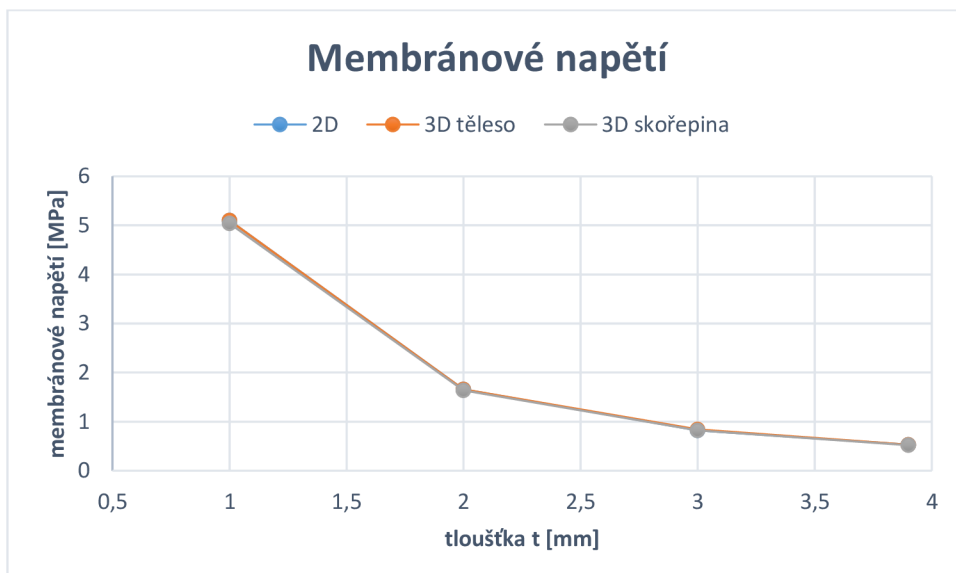
*Obr. 7.32: Normálové napětí ve směru osy z [MPa]*

## 7.4. Výsledky řešení skořepiny zatížená tlakem působícím na malou kruhovou oblast se středem na pólu

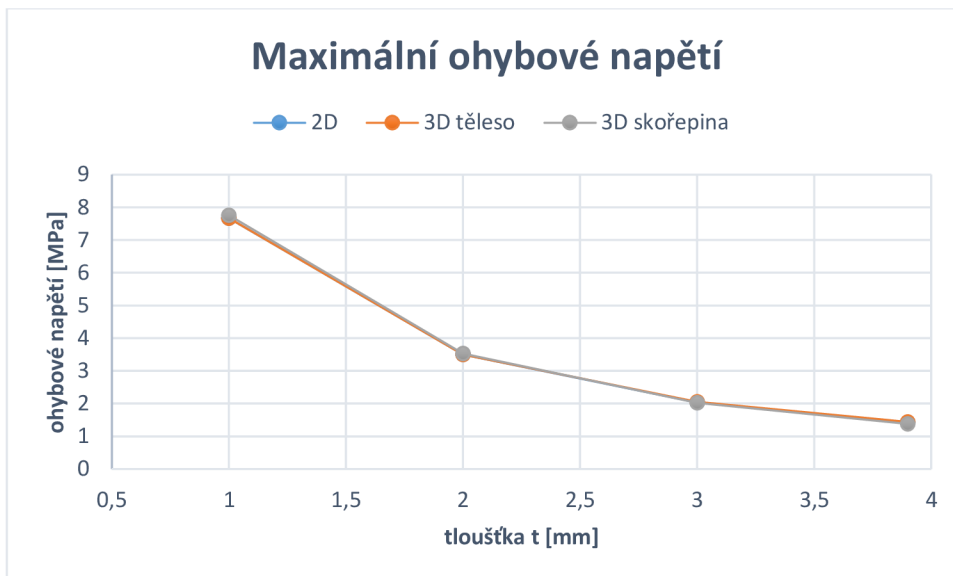
Výsledky deformace  $\Delta y$ , membránového a maximálního ohybového napětí, pro výpočtový model částečné sférické skořepiny o tloušťce 1, 2, 3 a 3,9 mm, jsou uvedeny v grafech (obr. 7.33, 7.34, 7.35). Jedná se o hodnoty působícího napětí a vzniklé deformace v místě osy rotace výpočtového modelu. Uvedeny jsou 3 různé způsoby řešení (2D, 3D těleso a 3D skořepina), které vykazují téměř shodné hodnoty. Nikde nedochází k výrazné rozdílnosti. Stejně jako u předešlého řešení je nejvhodnější řešit úlohu jako 2D na základě osové symetrie.



Obr. 7.33: Graf závislosti deformace  $\Delta y$  [mm] na tloušťce  $t$  [mm] pro tři řešení: 2D, 3D těleso a 3D skořepinu. Hodnoty jsou uvedeny v příloze tabulka 5.



Obr. 7.34: Graf závislosti velikosti membránového napětí  $\sigma_m$  [MPa] na tloušťce  $t$  [mm] pro tři řešení: 2D, 3D těleso a 3D skořepinu. Hodnoty jsou uvedeny v příloze tabulka 6



Obr. 7.35: Graf závislosti velikosti maximálního ohybového napětí  $\sigma_b$  [MPa] na tloušťce  $t$  [mm] pro tři řešení: 2D, 3D těleso a 3D skořepinu. Hodnoty jsou uvedeny v příloze tabulka 6



## 7.5. Implantát zatížený tlakem působícím na kruhovou oblast o poloměru $r_0$

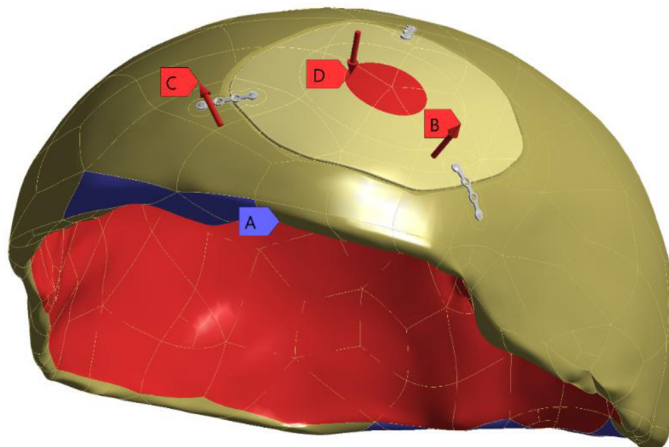
Vedoucím práce Ing. Petrem Marciánem, Ph.D. byl dodán výpočtový model včetně řešení. Model lebky je vytvořen na 3D úrovni s defektem nepravidelného tvaru, zahrnuje implantát a fixační systém. Jde o model včetně kontaktů. Vytvoření a řešení takového tohoto modelu přesahují rámec znalostí získaných za bakalářské studium, tudíž jsou prezentovány pouze výsledky řešení pro tloušťky implantátu 1, 2, 3 a 4 mm. Hodnota tloušťky referenčního modelu je 3 mm.

Materiály jsou následující: lebka-kost, implantát-PMMA a fixační systém (šrouby, fixátory) je ze slitiny titanu. Mechanické vlastnosti použitých materiálů jsou popsány v tabulce 5.1.

Výsledky řešení deformace a napětí jsou uvedeny v grafech (obr. 8.3, 8.4 a 8.5) kapitoly 8.2.

### Okrajové podmínky:

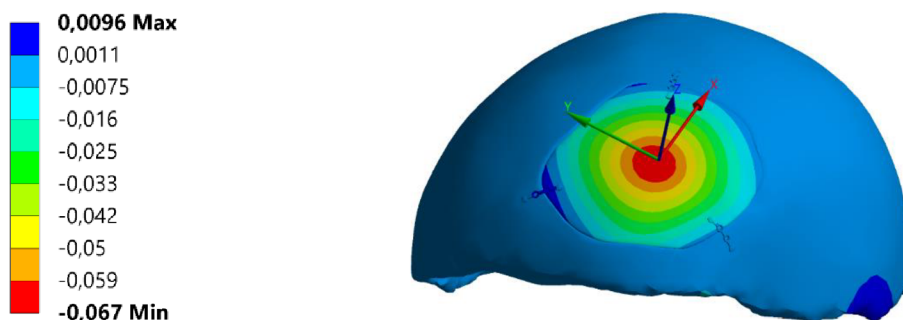
Implantát je zatížen z vnější strany silou  $F=50$  N působící na oblast o poloměru  $r_0$  (podmínka D) a vnitřní strany intrakraniálním tlakem  $p_n=0,002$  MPa, který působí v celé dutině lebeční (podmínky B a C).<sup>8</sup> Lebka je zafixována částí spodní hrany v místech čelní a týlní kosti (vazba A).



Obr. 7.36: Okrajové podmínky na výpočtovém modelu s nepravidelným lebky s aplikovaným implantátem

<sup>8</sup> Pozn. Šipky směřující vzhůru působí na vnitřní stranu, směřující dolů na vnější

**Deformace v ose z [mm]:**



Obr. 7.37: Deformace implantátu ve směru osy z

**Normálové napětí v ose x [MPa]:**



Obr. 7.38: Normálové napětí implantátu s označeným minimem a maximem

**Detail průběhu normálového napětí po tloušťce implantátu ve středu oblasti zatížené vnější silou [MPa]:**



Obr. 7.39: Detail průběhu normálového napětí po tloušťce implantátu v centru oblasti zatížené vnější silou [MPa], jednotlivá napětí v bodech 1 a 2 jsou popsány v tabulce 7.3

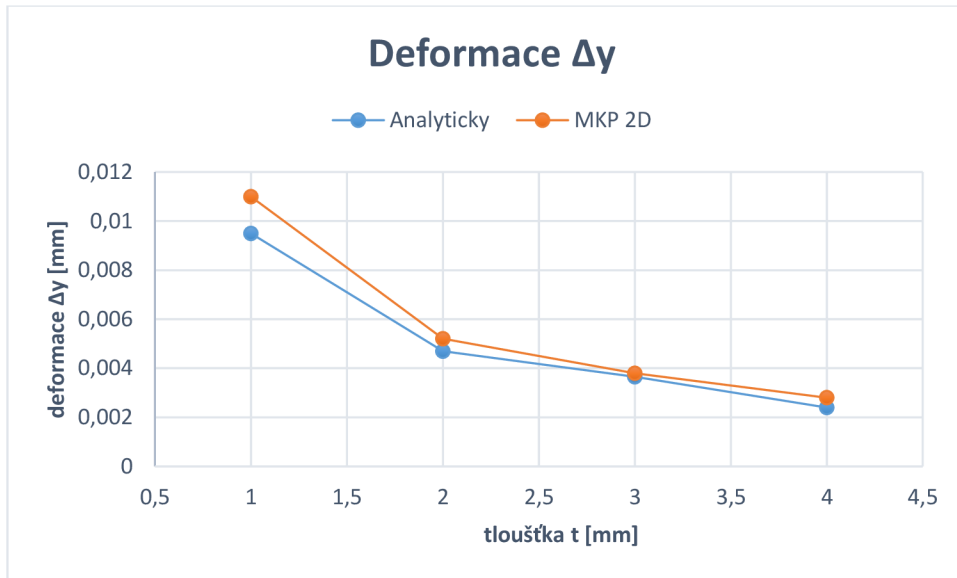
Tab. 7.3: Celkové napětí působící na ve středu oblasti zatížené vnější silou F a jeho složky:

místo	Membránové napětí [MPa]	Ohybové napětí [MPa]	Celkové napětí [MPa]
Bod 1	-0,92	-1,86	-2,78
Bod 2	-0,92	1,86	0,94

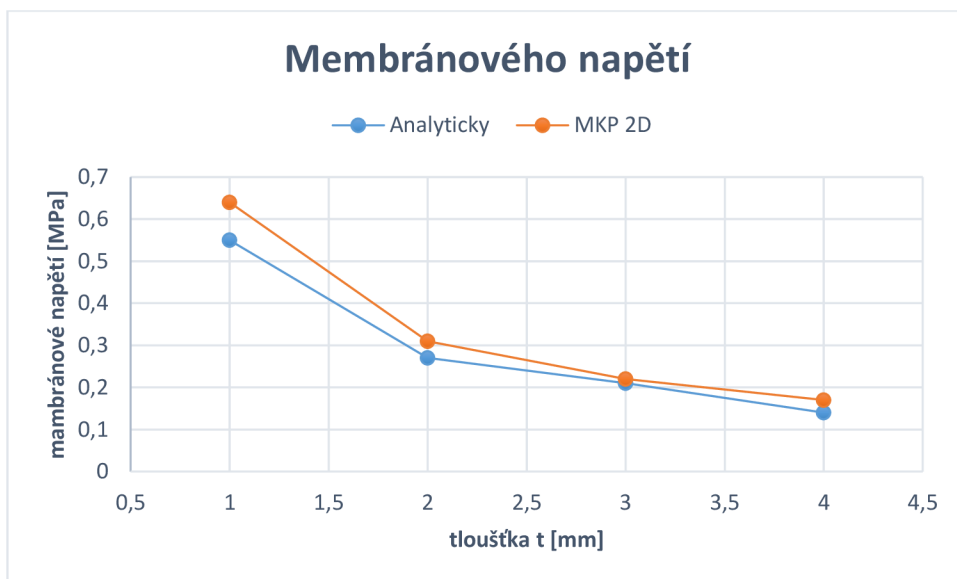
## 8 Porovnání výsledků a vyhodnocení

### 8.1. Porovnání numerického řešení s analytickým (membránová skořepina)

Pro porovnání numerického řešení jsou použity pouze reprezentativní hodnoty 2D úlohy, tyto hodnoty budou v grafech značeny zkratkou MKP 2D. Analytické řešení bylo vypočteno v programu Matlab. Výsledky jsou uvedeny v následujících grafech (obr. 8.1, 8.2).



Obr. 8.1: Graf porovnání deformace  $\Delta y$  [mm] v závislosti na tloušťce  $t$  [mm] numerického (MKP 2D) a analytického (Analyticky) řešení membránové skořepiny. Hodnoty viz příloha tabulka 3.



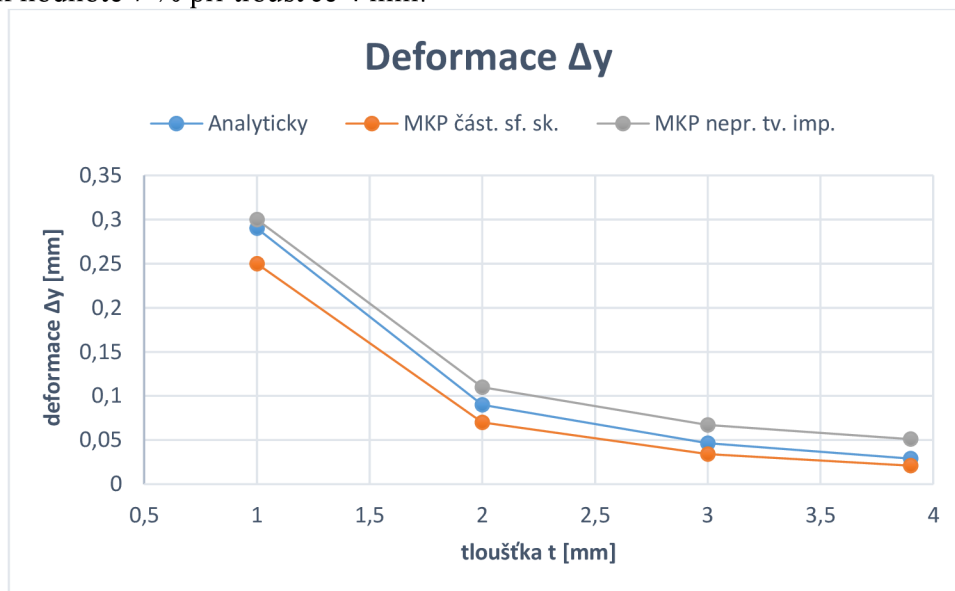
Obr. 8.2: Graf porovnání membránového napětí  $\sigma_m$  [MPa] v závislosti na tloušťce  $t$  [mm] numerického (MKP 2D) a analytického řešení membránové skořepiny. Hodnoty viz příloha tabulka 4.

Z výsledků je patrná klesající závislost mezi deformací nepřímo úměrné tloušťce. Tato nepřímá úměra platí rovněž pro napětí a tloušťku. V rámci deformace je maximální odchýlení numerického řešení vztahené k analytickému do 20 %. U membránového napětí tato odchylka dosahuje 21 % pro tloušťku 4 mm.

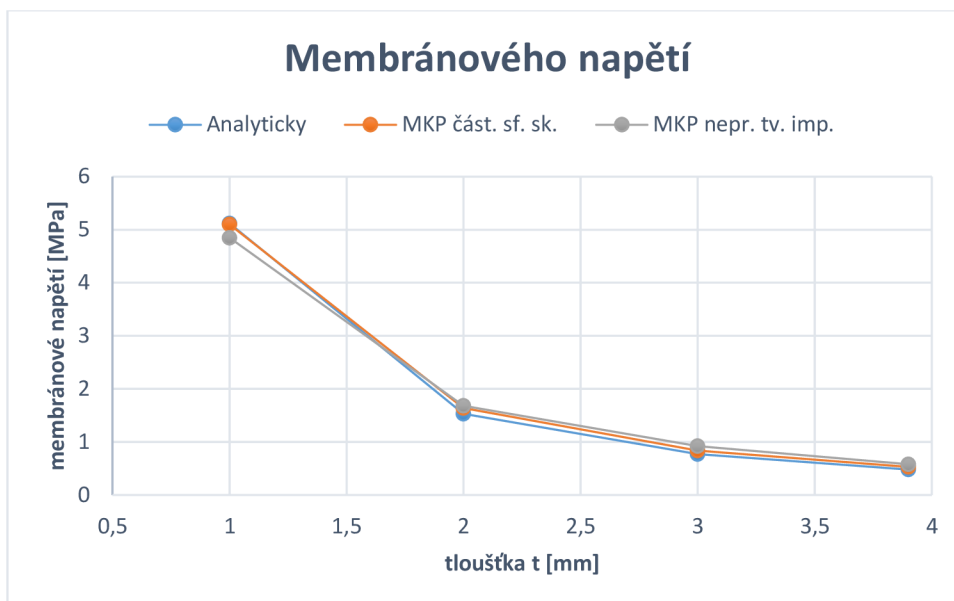
## 8.2. Porovnání numerického řešení s analytickým (částečná sférická skořepina zatížená tlakem působícím na malou kruhovou oblast se středem na pólu)

Porovnání třech typů řešení deformace a napětí implantátu se zatížením na oblast o poloměru  $r_0$  získané je uvedeno v grafech (obr. 8.3, 8.4, 8.5). Každý graf obsahuje řešení analytické (Analyticky), numerické metodou konečných prvků na výpočtovém modelu částečné sférické skořepiny (MKP část. sf. sk.) a výpočtovém modelu s nepravidelným tvarem implantátu (MKP nepr. tv. imp.), pro které jsou kvůli přehlednosti hodnoty získané pro implantát o tloušťce 4 mm přiřazeny k tloušťce 3,9 mm. Jako reprezentant numerického řešení na částečné sférické skořepině je uvedeno řešení 2D úlohy.

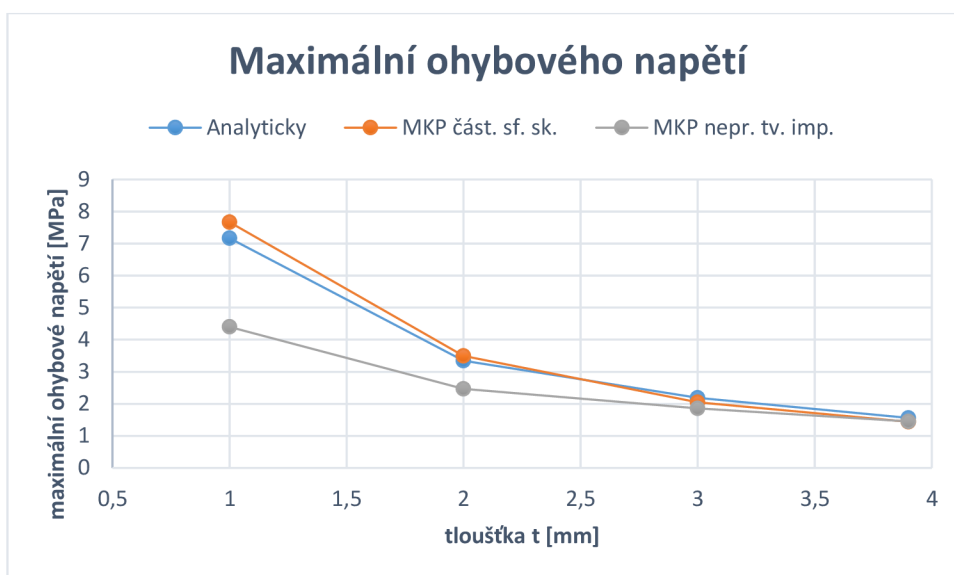
Výsledky deformace  $\Delta y$  (obr. 8.3) nejsou příliš shodné. Odchylka vztahující se k analytickému řešení se pohybuje pro numerické řešení modelu částečné sférické skořepiny v rámci 25 %. Pro numerické řešení modelu s nepravidelným tvarem implantátu je odchylka až 75 %. Hodnoty membránového napětí (obr. 8.4) jsou si velice blízká pro všechna řešení. Odchylka vztahovaná k analytickému řešení nabývá hodnot do 10 %. U maximálního ohybového napětí, je patrný rozdíl numerického řešení implantátu nepravidelného tvaru oproti zbylým řešením. Odchylka numerického řešení částečné kulové skořepiny od analytického se pohybuje kolem 5 %. Odchylka numerického řešení implantátu nepravidelného tvaru od analytického řešení vykazuje klesající charakter s rostoucí tloušťkou. Pro tloušťku 1 mm je odchylka 38 % a postupně klesá k hodnotě 7 % při tloušťce 4 mm.



Obr. 8.3: Graf deformace  $\Delta y$  implantátu ve středu zatížené oblasti. Obsahuje 3 způsoby řešení: analytické (Analyticky), numerické na výpočtovém modelu částečné sférické skořepiny (MKP část. sf. sk.) a numerické výpočetního modelu s nepravidelným tvarem implantátu (MKP nepr. tv. imp.). Hodnoty viz příloha tabulka 7.



Obr. 8.4: Graf závislosti membránového napětí na tloušťce implantátu. Obsahuje 3 způsoby řešení analytické (Analyticky), numerické na výpočtovém modelu částečné sférické skořepiny (MKP část. sf. sk.) a numerické výpočetního modelu s nepravidelným tvarem implantátu (MKP nepr. tv. imp.). Hodnoty viz příloha tabulka 8.



Obr. 8.5: Graf závislosti maximálního ohybového napětí na tloušťce implantátu. Obsahuje 3 způsoby řešení: analytické (Analyticky), numerické na výpočtovém modelu částečné sférické skořepiny (MKP část. sf. sk.) a numerické výpočetního modelu s nepravidelným tvarem implantátu (MKP nepr. tv. imp.). Místo vzniku napětí je pod centrem zatížené oblasti na implantátu. Hodnoty viz příloha tabulka 8.

## 9 Závěr

Bakalářská práce se zabývá problematikou z oblasti kraniální biomechaniky. V první části práce byla vypracována rešeršní studie prací, které se zabývají deformačně napěťovou analýzou lebečního implantátu. Řešení deformací a napětí lebečního implantátu bylo provedeno využitím analytického a numerického řešení pomocí metody konečných prvků. Výpočtový model lebečního implantátu byl nejprve řešen jako částečná kulová skořepina, která byla zatížena po celém vnějším i vnitřním povrchu. Druhá varianta řešení je pro implantát zatížený silou působící na malou kruhovou oblast o průměru  $r_0$  v centru implantátu. Řešení této úlohy bylo také provedeno jak analyticky, tak numericky na výpočtovém modelu částečné kulové skořepiny. Posledním řešeným modelem je lebeční implantát, jehož model je vytvořen na lebce pomocí skutečného tvaru defektu s nepravidelným tvarem. Výsledky všech těchto řešení byly vzájemně porovnány.

Bylo zjištěno, že numerická řešení částečné sférické skořepiny a analytická řešení obou úloh mají výsledky s maximální odchylkou kolem 20 %. Právě tato odchylka je způsobena geometrií výpočtového modelu částečné sférické skořepiny. Numerické řešení výpočtovém modelu s nepravidelným tvarem implantátu dosahuje zdaleka větších odchylek od analytického řešení než výpočtového modelu nižší úrovně. Tato skutečnost je zapříčiněna samotným charakterem výpočtového modelu, kde implantát nemá přesný tvar částečné kulové skořepiny. Z řešení výpočtového modelu s nepravidelným tvarem implantátu bylo zjištěno, že maximální napětí, které předpokládá analytické řešení v centru zatížené oblasti, se nachází v místech uchycení fixátorů (obr. 7.38) a několikanásobně převyšuje vyšetřované napětí pod centrem zatížení. Výpočtový model částečné sférické skořepiny lze tedy použít pouze k získání orientačních výsledků deformace implantátu, který musí být tomuto modelu tvarově podobný s tloušťkou v rozmezí 1 mm až 8 mm.

Dále z porovnání řešení obou úloh je patrná velká závislost napětí a deformace na velikosti zatížené oblasti. Pokud je zatížení koncentrováno na menší oblast, jsou výsledné hodnoty deformace a napětí mnohonásobně vyšší. Z toho důvodu je důležité při řešení napěťové analýzy výpočtového modelu brát v úvahu velikost zatěžované oblasti na implantátu.

## Seznam použitých zdrojů

- [1] Traumatic Brain Injury (TBI) - Definition and Pathophysiology. *Medscape* [online]. WebMD LLC, 2015 [cit. 2017-05-10]. Dostupné z: <http://emedicine.medscape.com/article/326510-overview>
- [2] Traumatické poranění mozku. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2016 [cit. 2017-05-10]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Traumatick%C3%A9\\_poran%C4%9Bn%C3%AD\\_mozku](https://cs.wikipedia.org/wiki/Traumatick%C3%A9_poran%C4%9Bn%C3%AD_mozku)
- [3] Operační přístupy k mozku a míše. *Wikiskripta* [online]. 2014 [cit. 2017-05-10]. ISSN ISSN 1804-6517. Dostupné z: [http://www.wikiskripta.eu/index.php/Opera%C4%8Dn%C3%AD\\_p%C5%99%C3%ADstupy\\_k\\_mozku\\_a\\_m%C3%AD%C5%A1e](http://www.wikiskripta.eu/index.php/Opera%C4%8Dn%C3%AD_p%C5%99%C3%ADstupy_k_mozku_a_m%C3%AD%C5%A1e)
- [4] HARRIS, Dominic A., Abigail J. FONG, Edward P. BUCHANAN, Laura MONSON, David KHECHOYAN a Sandi LAM. History of synthetic materials in alloplastic cranioplasty. *Neurosurgical Focus* [online]. 2014, **36**(4), 20- [cit. 2017-04-14]. DOI: 10.3171/2014.2.FOCUS13560. ISSN 10920684. Dostupné z: <http://thejns.org/doi/10.3171/2014.2.FOCUS13560>
- [5] RIDWAN-PRAMANA, Angela, Petr MARCIÁN, Libor BORÁK, Nathaniel NARRA, Tim FOROUZANFAR a Jan WOLFF. Structural and mechanical implications of PMMA implant shape and interface geometry in cranioplasty – A finite element study. *Journal of Cranio-Maxillofacial Surgery*. 2016, **44**(1), 34-44. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.jcms.2015.10.014>. ISSN 10105182. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1010518215003546>
- [6] HUOTILAINEN, Eero, Risto JAANIMETS, Jiří VALÁŠEK, Petr MARCIÁN, Mika SALMI, Jukka TUOMI, Antti MÄKITIE a Jan WOLFF. Inaccuracies in additive manufactured medical skull models caused by the DICOM to STL conversion process. *Journal of Cranio-Maxillofacial Surgery* [online]. 2014, **42**(5), 259-265 [cit. 2017-04-16]. DOI: 10.1016/j.jcms.2013.10.001. ISSN 10105182. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1010518213002862>
- [7] PEETERS, Wouter, Ruben VAN DEN BRANDE, Suzanne POLINDER, Alexandra BRAZINOVA, Ewout W. STEYERBERG, Hester F. LINGSMA a Andrew I. R. MAAS. Epidemiology of traumatic brain injury in Europe. *Acta Neurochirurgica* [online]. 2015, **157**(10), 1683-1696 [cit. 2017-05-10]. DOI:

10.1007/s00701-015-2512-7. ISSN 00016268. Dostupné z:  
<http://link.springer.com/10.1007/s00701-015-2512-7>

- [8] ONDRÁČEK, Emanuel. *Mechanika těles: pružnost a pevnost II*. Vyd. 4., přeprac., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 8021432608.
- [9] ROARK, Raymond J., Warren C. YOUNG a Richard G. BUDYNAS. *Roark's formulas for stress and strain*. 7th ed. New York: McGraw-Hill, 2002. ISBN 007072542x.
- [10] REISSNER, Eric. Stresses and Small Displacements of Shallow Spherical Shells. II. *Journal of Mathematics and Physics* [online]. 1946, **25**(1-4), 279-300 [cit. 2017-04-21]. DOI: 10.1002/sapm1946251279. ISSN 00971421. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1002/sapm1946251279>
- [11] SHWETA, P a M ANBURAJAN. Finite element analysis of the skull implant using ansys software. In: *Electronics Computer Technology (ICECT), 2011 3rd International Conference on* [online]. Kanyakumari: IEEE Publishing, 2011, **3**, s. 420-425 [cit. 2017-04-19]. DOI: 10.1109/ICECTECH.2011.5941784. ISBN 97814244486786.
- [12] CHAMRÁD, J., P. MARCIÁN, L. BORÁK a J. WOLFF. Finite Element Analysis of Cranial Implant. In: ZOLOTAREV, Igor a Vojtěch RADOLF. *Engineering Mechanics 2016*. 22. Svratka: Institute of Thermomechanics Academy of Sciences of the Czech Republic, v. v. i., 2016, s. 234-237. ISBN 978-80-87012-59- 8. ISSN 1805-8248.
- [13] TSOUKNIDAS, Alexander, Stergios MAROPOULOS, Savvas SAVVAKIS a Nikolaos MICHAILEDIS. FEM assisted evaluation of PMMA and Ti6Al4V as materials for cranioplasty resulting mechanical behaviour and the neurocranial protection. *Bio-medical materials and engineering* [online]. 2011, **21**(3), 139 [cit. 2017-04-19]. DOI: 10.3233/BME-2011-0663.
- [14] BURNIE, David. *Stručná encyklopedie lidského těla: [2000 hesel o stavbě a činnosti lidského těla]*. Bratislava: Talentum, 1996. ISBN 8096739042.
- [15] ČIHÁK, Radomír. *Anatomie*. 2., upr. a dopl. vyd. Ilustroval Milan MED. Praha: Grada, 2001. ISBN 8071699705.
- [16] ABRAHAMAS, Peter H. *Jak pracuje lidské tělo: [ilustrovaná encyklopedie anatomie a funkcí všech částí lidského těla]*. 1. české vyd. Praha: Svojtka & Co., 2014. ISBN 9788025611609.



- [17] Neurocranium - Yousun Koh. In: *Kenhub* [online]. b.r. [cit. 2017-04-10]. Dostupné z: [https://thumbor.kenhub.com/XfzJQIMBzg6BeRyOWq-Zg6NB7os=/fit-in/800x800/filters:watermark\(/images/logo\\_url.png,-10,-10,0\)/images/library/904/content\\_Neurocranium\\_article.png](https://thumbor.kenhub.com/XfzJQIMBzg6BeRyOWq-Zg6NB7os=/fit-in/800x800/filters:watermark(/images/logo_url.png,-10,-10,0)/images/library/904/content_Neurocranium_article.png)
- [18] BURR, David B., ed. a Matthew R. ALLEN, ed. *Basic and applied bone biology*. London: Elsevier, 2014. ISBN 9780124160156.
- [19] Diploe. In: *Anatomy and Physiology* [online]. Indiana: Ivy Tech Community College of Indiana, 2008 [cit. 2017-04-10]. Dostupné z: [http://faculty.ivytech.edu/~shopper6/ANPweb/gallery/images\\_and\\_SWFs/06/082\\_diploeB.png](http://faculty.ivytech.edu/~shopper6/ANPweb/gallery/images_and_SWFs/06/082_diploeB.png)
- [20] ROSINA, Josef, Jana VRÁNOVÁ, Hana KOLÁŘOVÁ a Jiří STANEK. *Biofyzika: Pro zdravotnické a biomedicínské obory*. 1. Praha: Grada Publishing a.s., 2013, 224 s. ISBN 978-80-247-8498-4.
- [21] Kompakta. In: *Jameda* [online]. Gütersloh / München: Wissen Media Verlag GmbH, 2017 [cit. 2017-04-10]. Dostupné z: <https://www.jameda.de/gesundheitslexikon/bilder/medium/524735.jpg>
- [22] DAVIS, Matthew T., Andre M. LOYD, Han-yu Henry SHEN, Maura H. MULROY, Roger W. NIGHTINGALE, Barry S. MYERS a Cameron Dale BASS. The mechanical and morphological properties of 6 year-old cranial bone. *Journal of Biomechanics*. 2012, **45**(15), 2493-2498. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2012.07.001>. ISSN 00219290. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021929012003818>
- [23] PETERSON, Jill a Paul C. DECHOW. Material properties of the human cranial vault and zygoma. *The Anatomical Record* [online]. 2003, **274**(1), 785-797 [cit. 2017-04-10]. DOI: 10.1002/ar.a.10096. ISSN 0003276x. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1002/ar.a.10096>
- [24] TYLL, Tomáš, Vlasta DOSTÁLOVÁ a David NETUKA. *Neuroanestezie a základy neurointenzivní péče*. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 2014. Aeskulap. ISBN 9788020431486.
- [25] SAMEŠ, Martin. *Neurochirurgie: učebnice pro lékařské fakulty a postgraduální studium příbuzných oborů*. 1. Praha: Maxdorf, 2005. Jessenius. ISBN 8073450720.
- [26] JURÁŇ, V., M. SMRČKA, K. SVOBODA, P. FADRUS, A. ŠPRLÁKOVÝ a R. GÁL. Indikace dekompresivní kraniektomie u traumat mozku. *Česká a slovenská*

- neurologie a neurochirurgie* [online]. 2009, **2009**(721055), 439-445 [cit. 2017-04-15]. Dostupné z: [http://www.csnn.eu/ceska-slovenska-neurologie-clanek/indikace-dekompresivni-kraniektomie-u-traumat-mozku-33209?confirm\\_rules=1](http://www.csnn.eu/ceska-slovenska-neurologie-clanek/indikace-dekompresivni-kraniektomie-u-traumat-mozku-33209?confirm_rules=1)
- [27] CHAPMAN, Paul H., Eric R. COSMAN a Michael A. ARNOLD. The Relationship between Ventricular Fluid Pressure and Body Position in Normal Subjects and Subjects with Shunts: A Telemetric Study. *Neurosurgery* [online]. 1990, **26**(2), 181-189 [cit. 2017-04-12]. DOI: 10.1227/00006123-199002000-00001. ISSN 0148396x. Dostupné z: <https://academic.oup.com/neurosurgery/article-lookup/doi/10.1227/00006123-199002000-00001>
- [28] LETHAUS, Bernd, Marielle POORT TER LAAK, Paul LAEVEN, Maikel BEERENS, David KOPER, Jules POUKENS a Peter KESSLER. A treatment algorithm for patients with large skull bone defects and first results. *Journal of Cranio-Maxillofacial Surgery* [online]. 2011, **39**(6), 435-440 [cit. 2017-04-16]. DOI: 10.1016/j.jcms.2010.10.003. ISSN 10105182. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1010518210001873>
- [29] IBRAHIM, Danilo, Tiago Leonardo BROILO, Claiton HEITZ, Marília Gerhardt DE OLIVEIRA, Helena Willhelm DE OLIVEIRA, Stella Maris Wanderlei NOBRE, José Henrique Gomes DOS SANTOS FILHO a Daniela Nascimento SILVA. Dimensional error of selective laser sintering, three-dimensional printing and PolyJet™ models in the reproduction of mandibular anatomy. *Journal of Cranio-Maxillofacial Surgery* [online]. 2009, **37**(3), 167-173 [cit. 2017-04-13]. DOI: 10.1016/j.jcms.2008.10.008. ISSN 10105182. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1010518208001777>
- [30] ABUZAYED, Bashar, Sabri AYDIN, GalipZihni SANUS, Seckin AYDIN a Baris KUCUKYURUK. Cranioplasty: Review of materials and techniques. *Journal of Neurosciences in Rural Practice* [online]. 2011, **2**(2), 162- [cit. 2017-04-15]. DOI: 10.4103/0976-3147.83584. ISSN 09763147. Dostupné z: <http://www.ruralneuropractice.com/text.asp?2011/2/2/162/83584>
- [31] MLEZIVA, Josef a Jaroslav KÁLAL. *Základy makromolekulární chemie*. 1. vyd. Bratislava: Alfa, 1986, 380 s.
- [32] GÓMEZ, F.J. a M. ELICES. Fracture of components with V-shaped notches. *Engineering Fracture Mechanics* [online]. 2003, **70**(14), 1913-1927 [cit. 2017-04-15]. DOI: 10.1016/S0013-7944(03)00131-0. ISSN 00137944. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0013794403001310>

- [33] NIINOMI, Mitsuo. Recent metallic materials for biomedical applications. *Metallurgical and Materials Transactions A* [online]. 2002, **33**(3), 477-486 [cit. 2017-04-14]. DOI: 10.1007/s11661-002-0109-2. ISSN 10735623. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/s11661-002-0109-2>
- [34] RATNER, B. D. *Biomaterials science: an introduction to materials in medicine*. 2nd ed. Boston: Elsevier Academic Press, 2004. ISBN 0125824637.
- [35] NIINOMI, Mitsuo. Mechanical properties of biomedical titanium alloys. *Materials Science and Engineering: A*. 1998, **243**(1–2), 231-236. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0921-5093\(97\)00806-X](http://doi.org/10.1016/S0921-5093(97)00806-X). ISSN 09215093. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S092150939700806X>
- [36] GOLDSMITH, Douglas, Andrew HOROWITZ a Gary ORENTLICHER. Facial Skeletal Augmentation Using Custom Facial Implants. *Atlas of the Oral and Maxillofacial Surgery Clinics* [online]. 2012, **20**(1), 119-134 [cit. 2017-04-16]. DOI: 10.1016/j.cxom.2011.12.002. ISSN 10613315. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1061331511000783>
- [37] HANASONO, Matthew M., Neha GOEL a Franco DEMONTE. Calvarial Reconstruction With Polyetheretherketone Implants. *Annals of Plastic Surgery* [online]. 2009, **62**(6), 653-655 [cit. 2017-04-16]. DOI: 10.1097/SAP.0b013e318184abc7. ISSN 01487043. Dostupné z: <http://content.wkhealth.com/linkback/openurl?sid=WKPTLP:landingpage&an=0000637-200906000-00018>
- [38] GARCIA-GONZALEZ, D., R. ZAERA a A. ARIAS. A hyperelastic-thermoviscoplastic constitutive model for semi-crystalline polymers: Application to PEEK under dynamic loading conditions. *International Journal of Plasticity* [online]. 2017, **88**, 27-52 [cit. 2017-04-19]. DOI: 10.1016/j.ijplas.2016.09.011. ISSN 07496419. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0749641916301760>
- [39] JARDINI, André Luiz, Maria Aparecida LAROSA, Rubens Maciel FILHO, Cecília Amélia de Carvalho ZAVAGLIA, Luis Fernando BERNARDES, Carlos Salles LAMBERT, Davi Reis CALDERONI a Paulo KHARMANDAYAN. Cranial reconstruction: 3D biomodel and custom-built implant created using additive manufacturing. *Journal of Cranio-Maxillofacial Surgery* [online]. 2014, **42**(8), 1877-1884 [cit. 2017-04-16]. DOI: 10.1016/j.jcms.2014.07.006. ISSN 10105182. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1010518214002303>

- [40] VAN DER MEER, Wicher J., Ruud R.M. BOS, Arjan VISSINK a Anita VISSER. Digital planning of cranial implants. *British Journal of Oral and Maxillofacial Surgery* [online]. 2013, **51**(5), 450-452 [cit. 2017-04-16]. DOI: 10.1016/j.bjoms.2012.11.012. ISSN 02664356. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S026643561200616X>
- [41] CARR, J.C., W.R. FRIGHT a R.K. BEATSON. Surface interpolation with radial basis functions for medical imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging* [online]. 2002, **16**(1), 96-107 [cit. 2017-04-16]. DOI: 10.1109/42.552059. ISSN 02780062. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/552059/>
- [42] MARCIANO, Frederick F. a A. Giancarlo VISHTEH. Fixation techniques for cranial flap replacement. *Operative Techniques in Neurosurgery*. 1998, **1**(1), 50-56. DOI: [http://doi.org/10.1016/S1092-440X\(98\)80008-X](http://doi.org/10.1016/S1092-440X(98)80008-X). ISSN 1092440x. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1092440X9880008X>
- [43] 1.0 mm Micro Plates. In: *KLS Martin group* [online]. Tuttlingen: KLS Martin, b.r. [cit. 2017-04-20]. Dostupné z: [http://www.klsmartin.com/uploads/tx\\_templavoila/1\\_38.jpg](http://www.klsmartin.com/uploads/tx_templavoila/1_38.jpg)
- [44] 1.0 mm Micro Screws. In: *KLS Martin group* [online]. Tuttlingen: klsmartin, b.r. [cit. 2017-04-20]. Dostupné z: [http://www.klsmartin.com/uploads/tx\\_templavoila/S15\\_12.jpg](http://www.klsmartin.com/uploads/tx_templavoila/S15_12.jpg)
- [45] PLACÁK, Václav a Josef KUNC. *Výpočet napjatosti skořepin*. 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1966. Teoretická knižnice inženýra.

## **Seznam příloh**

Tabulky vypočtených hodnot

Ukázka skriptu do programu Matlab