



Pedagogická  
fakulta  
Faculty  
of Education

Jihočeská univerzita  
v Českých Budějovicích  
University of South Bohemia  
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích  
Pedagogická fakulta  
Katedra aplikované fyziky a techniky

Bakalářská práce

# Sbírka řešených příkladů ze statiky II

Vypracovala: Petra Šimanová  
Vedoucí práce: PaedDr. Bedřich Veselý, Ph.D.

České Budějovice 2022

Prohlašuji, že jsem autorem této kvalifikační práce a že jsem ji vypracovala pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu použitých zdrojů.

V Českých Budějovicích 10. dubna 2022

Petra Šimanová

## **Poděkování**

Za nevšední ochotu a pomoc, za cenné rady a konzultace děkuji vedoucímu práce PaedDr. Bedřichu Veselému, Ph.D., který mi pomohl při vypracování této bakalářské práce.

## **ANOTACE**

Práce je koncipována jako stručný učební text k předmětu Technická mechanika I na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. V práci jsou zahrnuta následující témata: prutové soustavy, těžiště, pasivní odpory, tření, kladky a kladkostroje. Teorie je doplněna o příklady s komentovaným řešením, u prutových soustav je početní řešení doplněno i grafickým. Práce může sloužit vyučujícím předmětu při přípravě na výuku a studentům při samostudiu nebo přípravě k různým zkouškám či testům.

Klíčová slova: prutová soustava, rovnováha sil, těžiště, tření, kladka

## **ANNOTATION**

The thesis is intended as a brief teaching text for the course Technical Mechanics I at the Faculty of Education of the University of South Bohemia in České Budějovice. It includes the following topics: truss structures, centre of gravity, passive resistances, friction, pulleys and pulley systems. The theory is supplemented by examples with annotated solutions, in the case of truss structures the numerical solution is accompanied by graphical solutions. The work can be used by the teachers of the subject in preparation for classes as well as by students in self-study or preparation for various exams or tests.

Keywords: truss structure, equilibrium, centre of gravity, friction, pulley

# OBSAH

1. Úvod práce .....	6
2. Základní pojmy .....	8
3. Prutové soustavy (příhradové konstrukce) .....	10
3.1 Metoda styčnicková .....	11
3.2 Metoda průsečná .....	23
4. Těžiště .....	27
4.1 Guldinovy věty .....	33
5. Pasivní odpory, tření .....	39
5.1 Smykové tření .....	39
5.2 Tření vláknové (pásové) .....	43
5.3 Valivý odpor .....	46
5.4 Tření čepové .....	48
5.5 Tuhost (neohebnost) lana .....	51
6. Kladky a kladkostroje .....	54
6.1 Pevná kladka .....	54
6.2 Volná kladka .....	55
6.3 Kladkostroj .....	56
7. Závěr .....	63
Seznam použitých zdrojů .....	65

# 1. ÚVOD PRÁCE

Cílem této bakalářské práce je navázat na mou předchozí bakalářskou práci s názvem Sbíрка řešených příkladů ze statiky [1], kterou jsem vytvořila při studiu oboru Základy výrobní techniky se zaměřením na vzdělávání na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Hlavním důvodem pro výběr tohoto tématu byla snaha o doplnění práce o témata, která nebyla v předchozí kvalifikační práci zahrnuta z důvodu jejího omezeného rozsahu. Rozhodujícím faktorem tak bylo postihnutí celého obsahu vyučovaného předmětu Technická mechanika I – Statika.

Při procházení témat, která jsem chtěla ve své práci přiblížit, jsem se na jedné straně setkala s dostatečným množstvím odborných knih bohatých na informace týkající se statiky z fyzikálního pohledu, ale také se sbírkami plnými příkladů. V nich lze nalézt příklady zadané k procvičení probírané látky bez uvedení jejich výsledků a postupů řešení, příklady s uvedenými výsledky bez postupu jejich získání, ale i příklady řešené, bohužel ne podrobným, názorným a pochopitelným způsobem. Na druhou stranu u některých témat bylo velmi těžké dohledat i kvalitně zpracovanou teorii, která by byla vhodně doplněna ilustrativními příklady na demonstraci naznačených postupů řešení. Z tohoto důvodu bych chtěla, aby tato práce sloužila jako učební materiál pro samostudium nebo pomocný text pro vyučující.

Vlastní text práce bude sestaven z pohledu pedagoga s delší pedagogickou praxí a budu se snažit klást v postupech směřujících k vyřešení příkladů důraz na dobrou pochopitelnost, názornost a srozumitelnost. Práce nebude dělena standardním způsobem na teoretickou a praktickou část, ale bude koncipována tak, že na začátku každého tématu bude teorie, která bude obsahovat i názorné obrázky a bude ihned doplněna několika příklady s podrobnějším komentovaným řešením.

Většina témat zahrnutých do této práce budou technické aplikace základních poznatků ze statiky, které byly součástí předchozí bakalářské práce. Konkrétně se jedná o vyšetřování obecné soustavy rovinných sil, popř. hledání rovnováhy soustavy sil na těleso působících. Předpokládá se tak dobrá znalost těchto postupů. Bude také nezbytné uvést v první kapitole alespoň souhrn základních vztahů a rovnic potřebných pro tvorbu komentářů řešení příkladů. V mnohem menší míře budou také uplatňována grafická řešení, která by totiž nepřinášela nové poznatky či dovednosti a pouze by neúměrně navýšovala rozsah práce.

Při výběru ilustrativních příkladů je možné se inspirovat ve sbírkách úloh z fyziky na základních školách či sbírkách úloh z mechaniky pro střední odborné školy, popř. lze příklady i vymyslet. To má ovšem svá specifika a náležitosti. Příklady by alespoň částečně měly odpovídat realitě každodenního života. V případě zajímavých výsledků je u příkladu třeba uvést i krátkou diskusi s ohledem na jejich praktické využití. U příkladů s grafickým řešením je potřeba volit zadání tak, aby se vše vešlo na kreslicí list, ale aby přesto vše zůstalo přehledné a srozumitelné. Početní řešení musí být proveditelná jednoduchým matematickým aparátem zahrnujícím řešení lineárních rovnic nebo jejich soustav či základní znalosti geometrie v rovině včetně goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku. Z vlastní zkušenosti totiž vím, že u studentů oboru technická výchova nebývá znalost matematického aparátu na takové úrovni, jako např. u studentů fyziky či matematiky.

Jsem přesvědčena, že i tato sbírka řešených příkladů ze statiky opět nalezne uplatnění ve vyučovací praxi nejen na středních odborných školách s technickým zaměřením, ale i na vysokých školách a bude přínosem jako učební text pro samostudium.

## 2. ZÁKLADNÍ POJMY

Statika je nauka, která se zabývá rovnováhou těles a nahrazováním silových soustav [2]. Jedná se o část mechaniky zabývající se vzájemným působením těles. Vzájemné působení těles se vyjadřuje vzájemným působením sil, tedy silovými účinky. Jednotlivé úlohy ve statice se řeší početně nebo graficky [3].

### Tuhé těleso

je těleso, jehož tvar ani objem se působením libovolných sil nemění. Síly působící na těleso mají tedy jen pohybové účinky. Je zaváděno pro zjednodušení výpočtů.

### Pružné těleso

je těleso, které se působením vnější síly deformuje. Pokud ale odstraníme působící sílu, vrací se zpět do původního stavu, aniž by došlo k trvalé deformaci. Někdy se používá termín elastická deformace.

### Nepružné těleso

je těleso, které při působení libovolných sil změní svůj tvar a po odstranění těchto sil zůstane těleso zdeformované. Někdy se používá termín trvalá (plastická) deformace.

### Základní veličiny a jejich jednotky

délka ( $l$ ) – metr [m]

hmotnost ( $m$ ) – kilogram [kg]

síla ( $F$ ) – newton [N]

moment síly ( $M$ ) – newton metr [N·m]

plocha ( $S$ ) – metr čtvereční [m<sup>2</sup>]

objem ( $V$ ) – metr krychlový [m<sup>3</sup>]

V technické praxi se často užívají tisícové násobky nebo podíly základních jednotek, např. mm, km, MPa, kN atp.

V práci se vychází ze znalosti postupu řešení obecné rovinné soustavy sil a jejich rovnováhy, který není součástí této práce a který lze nalézt např. v [1, 2]. Předpokládá se tak znalost jak početního řešení, tak řešení grafického, a tedy i způsobu tvorby silových a vláknových obrazců, což nebude u jednotlivých příkladů již podrobně



komentováno. Pro další účely jsou níže shrnuty jen základní vzorce potřebné k určení početního řešení, na něž bude v komentářích k řešení jednotlivých úloh odkazováno.

### Rozklad každé $i$ -té síly $\vec{F}_i$ na složky

$$\begin{aligned} F_{ix} &= F_i \cdot \cos \alpha_i, \\ F_{iy} &= F_i \cdot \sin \alpha_i, \end{aligned} \quad (1)$$

kde  $F_i$  je velikost a  $\alpha_i$  je směrový úhel síly  $\vec{F}_i$ .

### Složky výslednice $\vec{F}$

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix}, \\ F_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy}. \end{aligned} \quad (2)$$

### Velikost výslednice $\vec{F}$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \quad (3)$$

### Směrový úhel $\omega$ výslednice $\vec{F}$

$$\tan \omega = \frac{F_y}{F_x}. \quad (4)$$

### Moment $\vec{M}$ síly $\vec{F}$ vzhledem k počátku $O$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (5)$$

jeho velikost je

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha, \quad (6)$$

kde  $\alpha$  je úhel obou vektorů.

### Výsledný moment sil vzhledem k bodu $O$ (s respektováním smyslu otáčení)

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^n (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) = x_1 \cdot F_{1y} - y_1 \cdot F_{1x} + x_2 \cdot F_{2y} - y_2 \cdot \\ &F_{2x} + \dots + x_n \cdot F_{ny} - y_n \cdot F_{nx}, \end{aligned} \quad (7)$$

kde  $x_i, y_i$  jsou souřadnice působišť  $i$ -té síly  $\vec{F}_i$ .

### Rameno $r_v$ nositelky výslednice $\vec{F}$

$$r_v = \frac{M}{F}. \quad (8)$$

### Silová rovnováha

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0. \quad (9)$$

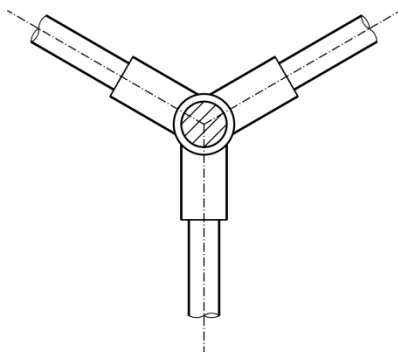
### Momentová rovnováha

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = 0. \quad (10)$$

### 3. PRUTOVÉ SOUSTAVY (PŘÍHRADOVÉ KONSTRUKCE)

Prutová soustava nebo také příhradová konstrukce je často používané technické řešení při navrhování nosných konstrukcí v různých zařízeních, strojích, objektech či budovách. Typickým příkladem jsou konstrukce mostů, střech, jeřábů, nosných rámců strojů atd. Je to soustava vzpěr a táhel, tzv. prutů, které jsou spojeny v jednom bodě. Takový bod se nazývá styčník. Styčníky označujeme podle počtu prutů spojených ve styčníku, dvojný, trojný atp.

Jednotlivé pruty jsou tvořeny z tyčí různých průřezů, jejichž příčné rozměry jsou oproti délce prutu velmi malé. Jedná se o štíhlé konstrukční prvky, které mohou být vyrobeny z lan, drátů, dřevěných latí či trámů, profilových ocelových tyčí apod. Při zakreslování pruty vyznačujeme pouze čarou. Z hlediska tuhosti celé příhradové konstrukce je důležité, aby jednotlivá pole soustavy měla tvar trojúhelníku, protože trojúhelník se těžko deformuje, kdežto obdélníkový nebo čtvercový tvar se deformuje mnohem snáze. Říkáme, že pruty tak tvoří staticky určité obrazce, tzn. nedochází ke změně poloh jejich jednotlivých členů, tvar soustavy se nemění. Při výpočtech předpokládáme, že pruty jsou spolu uchyceny kloubově (viz obr. 1) a namáhány pouze osovými silami – tahem nebo tlakem. Vnější síly mohou na konstrukci působit pouze ve styčnicích. V praxi často kloubové uložení chybí. Pak předpokládáme, že se nosník v rámci pružných deformací mírně zdeformuje tak, že se chová jako nosník s klouby ve styčnicích. Pak jsou pruty skutečně namáhány podle zjištěných osových sil.



Obr. 1: Kloubové spojení prutů příhradové konstrukce

Cílem řešení prutových soustav je zjistit reakce v ukotvení prutové soustavy a stanovení velikosti a smyslu sil působících v jednotlivých prutech. Pokud je celá soustava v rovnováze, je v rovnováze jakýkoli její člen, tzn. že jsou v rovnováze všechny síly, jak vnější, tak vnitřní. Řešení lze provádět početně či graficky a je důležité dodržovat určité postupy.

### 3.1 Metoda styčnicková

#### Početní řešení

Styčnicková metoda využívá podmínek rovnováhy v jednotlivých styčnicích. Celý postup výpočtu prutové soustavy lze popsat v několika krocích:

- 1) Schematicky nakreslíme prutovou soustavu a vyznačíme všechny působící vnější síly, a to jak akční (primární), zatěžující konstrukci, tak reakční (sekundární) v podporách uvádějících soustavu do rovnováhy.
- 2) Provedeme kontrolu statické určitosti. Vše zjistíme dosazením do obecné rovnice

$$z = 2k - 3, \quad (11)$$

kde  $k$  je počet kloubů a  $z$  je počet prutů (vzpěr). Pokud se levá strana rovná pravé, jedná se o konstrukci staticky určitou, kde nedochází ke změně polohy a je tvarově stálá. Mohou však nastat i případy, kdy se levá strana pravé rovnat nebude, pak se jedná o prutovou soustavu staticky neurčitou. Tato prutová soustava je tvarově přeuročena a některé vazby se překrývají – tato prutová soustava je pohyblivá.

- 3) Na základě podmínek rovnováhy (9, 10) určíme neznámé vnější síly, většinou se jedná o reakce v podporách.
- 4) Označíme si pruty a styčnický, kdy pruty značíme většinou arabskými číslicemi a styčnický římskými číslicemi.
- 5) Označíme neznámé osové síly ve styčnicích stejnými indexy jako má daný prut, v jehož směru působí. Předpokládáme, že jsou tahové (směřují ze styčnicku), ty považujeme za kladné. Pokud při výpočtech vyjde síla záporná, jedná se o sílu tlakovou směřující do styčnicku.
- 6) Každý styčnický řešíme jako rovnováhu soustavy sil o společném působišti. Začínáme vždy řešit od dvojného styčnicku, kde působí známá vnější síla, může to být i reakce. Do tohoto styčnicku mohou vést maximálně dva pruty s neznámými osovými silami, protože máme pouze dvě rovnice (9) posouvajících sil (ve směru osy  $x$  a  $y$ ). Momentovou rovnováhu (10) nelze užít, protože všechny síly působí v daném styčnicku (společné působiště), tj. mají nulová ramena, a tedy i nulové momenty [4].
- 7) Po vyřešení konkrétního styčnicku si do úvodního náčrtku naznačíme šipky, které značí skutečné působení sil z prutu na daný styčnický. K druhému konci prutu

vyznačíme šipky, které naznačují působení sil prutu na druhý styčník. K číselnému označení prutu přidáme znaménko plus, pokud se skutečně jedná o tah a mínus, pokud nám osová síla vyšla tlaková.

Takto pokračujeme i u ostatních styčniců.

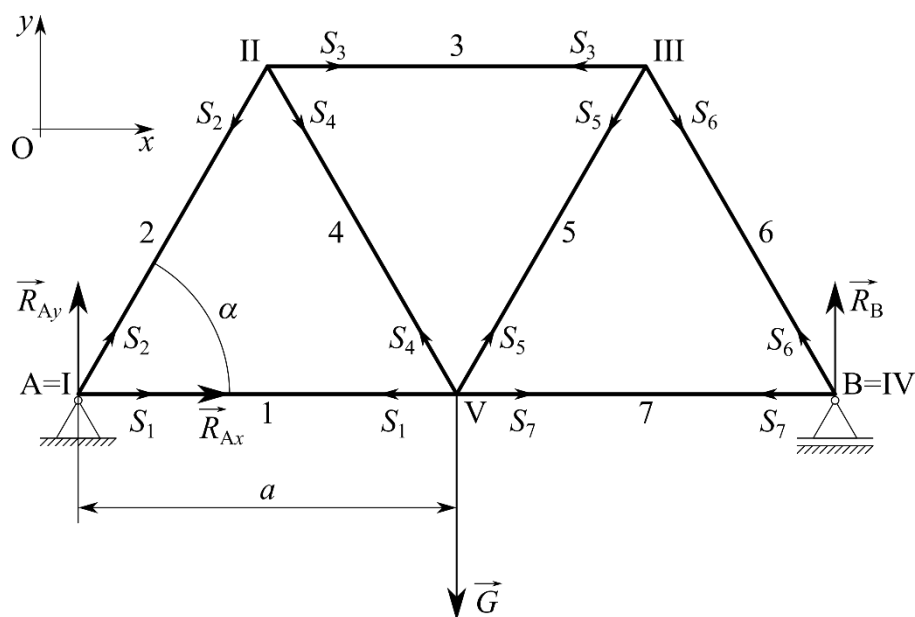
- 8) Jestliže se dostaneme ke styčníku, kde máme více neznámých, začneme řešit jiný styčník, kde máme neznámé pouze dvě a k danému styčníku se vrátíme později.
- 9) Poslední styčník řešíme pouze pro kontrolu – osově síly v prutech už známe z výpočtů ostatních styčniců.

### **Grafické řešení**

Nejdříve graficky vyřešíme rovnováhu vnějších sil pomocí silového a vláknového obrazce, viz např. v [1, 2]. Podstata grafického řešení osových sil spočívá v tom, že se postupně graficky řeší rovnováha jednotlivých styčniců, tzn. že sestrojujeme v jednom smyslu uzavřené silové obrazce pro jednotlivé styčnicí. Silové obrazce jednotlivých styčniců poté přidáme k silovému obrazci vnějších sil, ale nevyznačujeme směr sil pomocí šipek, ale pouze znaménky u číselného označení sil (+ pro tah, – pro tlak). Takto nám vznikne tzv. *Cremonův diagram*, nebo *obrazec* [5]. Stejně jako u početního řešení styčnicovou metodou můžeme řešit pouze takový styčník, který má jen dvě neznámé osově síly daných směrů. Silových obrazců je tolik, kolik má prutová soustava kloubů. Poslední styčník řešíme pouze pro kontrolu. Vzniklý silový obrazec posledního styčnicu nevnese do Cremonova diagramu nové informace, příslušné síly v něm již musí být zaneseny z řešení rovnováhy předchozích styčniců. Jako kontrolu správnosti vytvoření Cremonova diagramu je dobré ověřit, zda se pruty tvořící v prutové soustavě trojúhelník sbíhají v diagramu v jednom bodě.

### **Příklad 1:**

U prutové soustavy podle obr. 2 určete styčnicovou metodou všechny neznámé síly, tj. reakce v podporách a osově síly jednotlivých prutů, je-li tíha zátěže nosníku  $G$ . Jednotlivá pole soustavy mají tvar rovnostranného trojúhelníku o straně  $a$ .



Obr. 2: Zadání příkladu 1 (u všech sil i jejich případných složek je vyznačen pouze předpokládaný směr, nejsou tedy zakresleny v měřítku; arabské číslice označují pruty, římské číslice označují styčníky)

### Řešení:

Provedeme kontrolu statické určitosti dle rovnice (11)

$$z = 2k - 3,$$

kde  $k = 5$  je počet styčníků (kloubů) a  $z = 7$  je počet prutů (vzpěr).

$$7 = 2 \cdot 5 - 3,$$

$$7 = 7,$$

tzn. soustava je staticky určitá.

Dále určíme reakce v podporách na základě rovnic silové rovnováhy (9) rozepsané do složek a momentové rovnováhy (10)

$$F_x: + R_{Ax} = 0,$$

$$F_y: R_{Ay} + R_B - G = 0.$$

$$\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B + \vec{M}_G = 0.$$

Vzhledem k bodu A (viz obr. 2) platí

$$0 + R_B \cdot 2a - G \cdot a = 0,$$

$$R_B = \frac{1}{2}G.$$

Po dosazení do silové rovnováhy ve směru y dostaneme po úpravě

$$R_{Ay} = \frac{1}{2}G,$$

z čehož vyplývá

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \frac{1}{2}G.$$

Označíme jednotlivé pruty, styčníky a osově síly ve styčnicích (viz obr. 2). Jako styčník I označíme takový, ve kterém je známa minimálně jedna vnější síla a zároveň jsou v tomto styčníku maximálně dvě neznámé osově síly. Zvolíme tedy styčník v podpoře A. Další styčníky v pořadí volíme libovolně. Zde celou konstrukci obcházíme po směru chodu hodinových ručiček. Všechny vnitřní úhly v trojúhelníkových polích jsou  $60^\circ$  (označíme je jednotně  $\alpha$ ), protože se jedná o rovnostranné trojúhelníky. Nyní budeme řešit silovou rovnováhu (9) jednotlivých styčniců rozepsáním na složky  $x$  a  $y$ .

*Styčník I*

$$F_x: S_1 + S_2 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$F_y: R_{Ay} + S_2 \cdot \sin \alpha = 0.$$

Z druhé rovnice dostaneme

$$S_2 = -\frac{R_{Ay}}{\sin \alpha} = -\frac{G}{2 \sin \alpha}$$

a dosazením do první po úpravě bude

$$S_1 = -S_2 \cdot \cos \alpha = R_{Ay} \cdot \cot \alpha = \frac{1}{2}G \cdot \cot \alpha.$$

*Styčník II*

$$F_x: S_3 + S_4 \cdot \cos \alpha - S_2 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$F_y: -S_2 \cdot \sin \alpha - S_4 \cdot \sin \alpha = 0.$$

Z druhé rovnice dostaneme s využitím výsledku styčnicu I

$$S_4 = -S_2 = \frac{R_{Ay}}{\sin \alpha} = \frac{G}{2 \sin \alpha}$$

a dosazením do první po úpravě bude

$$S_3 - 2S_2 \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow S_3 = 2S_2 \cdot \cos \alpha = -2 \cdot R_{Ay} \cot \alpha = -G \cdot \cot \alpha.$$

*Styčník III*

$$F_x: S_6 \cdot \cos \alpha - S_5 \cdot \cos \alpha - S_3 = 0,$$

$$F_y: -S_5 \cdot \sin \alpha - S_6 \cdot \sin \alpha = 0,$$

tj. soustava dvou rovnic o dvou neznámých  $S_5$  a  $S_6$ .

Z druhé rovnice plyne  $S_5 = -S_6$ , to dosadíme do první z rovnic a dostaneme s využitím výsledku styčnicu II po úpravě

$$2S_6 \cdot \cos \alpha = S_3 \Rightarrow S_6 = \frac{S_3}{2 \cos \alpha} = -\frac{R_{Ay}}{\sin \alpha} = -\frac{G}{2 \sin \alpha},$$

tedy také

$$S_5 = -S_6 = \frac{R_{Ay}}{\sin \alpha} = \frac{G}{2 \sin \alpha}.$$

*Styčnick IV*

$$F_x: -S_6 \cdot \cos \alpha - S_7 = 0,$$

$$F_y: R_B + S_6 \cdot \sin \alpha = 0.$$

Dosazením výsledku styčnicku III do první rovnice dostaneme po úpravě

$$S_7 = -S_6 \cdot \cos \alpha = R_B \cdot \cot \alpha = \frac{1}{2} G \cdot \cot \alpha.$$

*Styčnick V*

Tento styčnick je pouze pro kontrolu, protože všechny osové síly již známe z předchozích styčnicků.

$$F_x: S_7 + S_5 \cdot \cos \alpha - S_4 \cdot \cos \alpha - S_1 = R_B \cdot \cot \alpha + R_{Ay} \cdot \cot \alpha - R_{Ay} \cdot \cot \alpha - R_{Ay} \cdot \cot \alpha = \frac{1}{2} G \cdot (2 \cot \alpha - 2 \cot \alpha) = 0,$$

$$F_y: S_4 \cdot \sin \alpha + S_5 \cdot \sin \alpha - G = R_{Ay} + R_{Ay} - G = \frac{1}{2} G + \frac{1}{2} G - G = 0.$$

Vyjádříme si goniometrické funkce úhlu  $\alpha$ , tedy

$$\cos \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dosazením do vypočtených osových sil dostaneme

$$S_1 = \frac{1}{2} G \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot G \text{ (tah)},$$

$$S_2 = -\frac{1}{2} G \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot G \text{ (tlak)},$$

$$S_3 = -2 \cdot \frac{1}{2} G \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot G \text{ (tlak)},$$

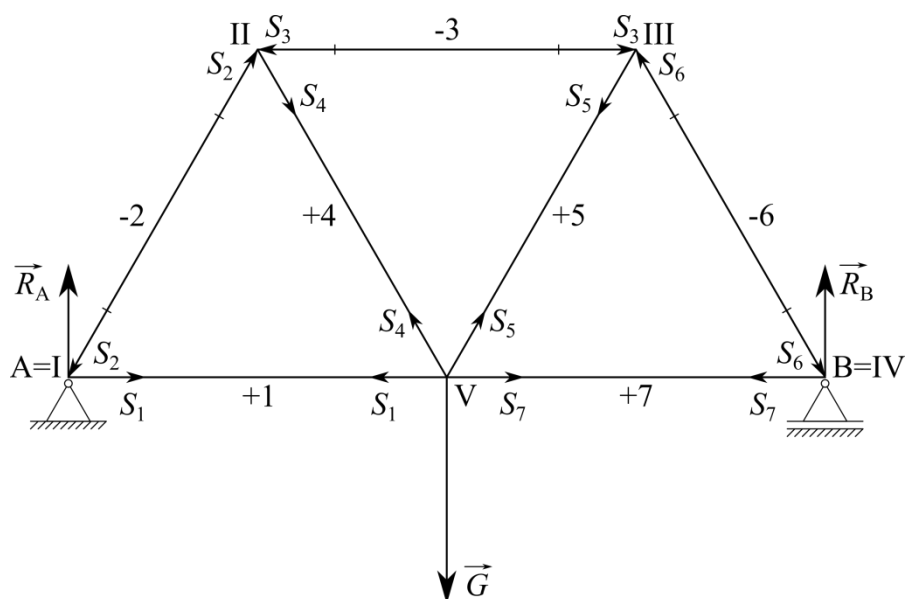
$$S_4 = \frac{1}{2} G \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot G \text{ (tah)},$$

$$S_5 = \frac{1}{2} G \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot G \text{ (tah)},$$

$$S_6 = -\frac{1}{2} G \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot G \text{ (tlak)},$$

$$S_7 = \frac{1}{2} G \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot G \text{ (tah)}.$$

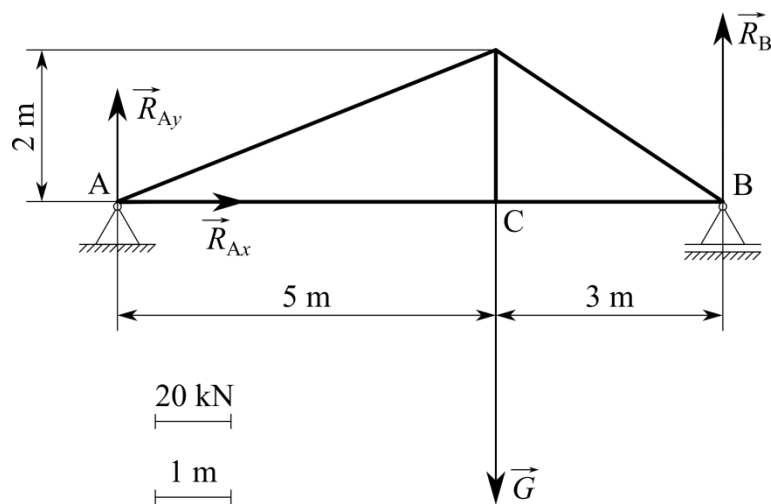
Nakonec označíme znaménky u čísel prutů a šipkami jednotlivých osových sil jejich skutečné směry (viz obr. 3).



Obr. 3: Výsledek příkladu 1 (osové síly nejsou z důvodu přehlednosti zakresleny v měřítku)

**Příklad 2:**

U prutové soustavy podle obr. 4 určete všechny neznámé síly, tj. reakce v podporách a osové síly jednotlivých prutů, je-li hmotnost zátěže nosníku 8 t.



Obr. 4: Zadání příkladu 2

**Početní řešení:**

Řešení provedeme metodou styčnickovou. Nejdříve provedeme kontrolu statické určitosti dle rovnice (11)

$$z = 2k - 3,$$

kde  $k = 4$  je počet styčníků (kloubů) a  $z = 5$  je počet prutů (vzpěr).



$$5 = 2 \cdot 4 - 3,$$

$$5 = 5.$$

tzn. soustava je staticky určitá.

Z hmotnosti zátěže 8 t určíme tíhu  $G$  zatěžující nosník

$$G = m \cdot g = 8000 \cdot 10 = 80\,000 \text{ N} = 80 \text{ kN}.$$

Dále určíme reakce v podporách na základě rovnice momentové rovnováhy (10) rozepsané do složek.

Vzhledem k bodu A (viz obr. 4) platí

$$M = x \cdot F_y - y \cdot F_x,$$

$$(0 \cdot R_{Ay} - 0 \cdot R_{Ax}) + (8 \cdot R_B - 0 \cdot 0) + (5 \cdot G - 0 \cdot 0) = 0,$$

$$8 \cdot R_B - 5 \cdot G = 0,$$

$$R_B = \frac{5}{8} G = 50 \text{ kN}.$$

Vzhledem k bodu B (viz obr. 4) platí

$$M = x \cdot F_y - y \cdot F_x,$$

$$(0 \cdot R_B - 0 \cdot 0) + (-8 \cdot R_{Ay} - 0 \cdot R_{Ax}) + (-3 \cdot G - 0 \cdot 0) = 0,$$

$$-8 \cdot R_{Ay} - 3 \cdot G = 0,$$

$$R_{Ay} = \frac{3}{8} G = 30 \text{ kN}.$$

Po dosazení do silové rovnováhy (9) rozepsané do složek ve směru  $x$  a  $y$  dostaneme po úpravě

$$F_x: F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = R_{Ax} = 0,$$

$$R_{Ax} = 0 \text{ kN}.$$

$$F_y: F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = R_{Ay} + R_B + G = 0,$$

$$30 + 50 - 80 = 0,$$

$$0 = 0,$$

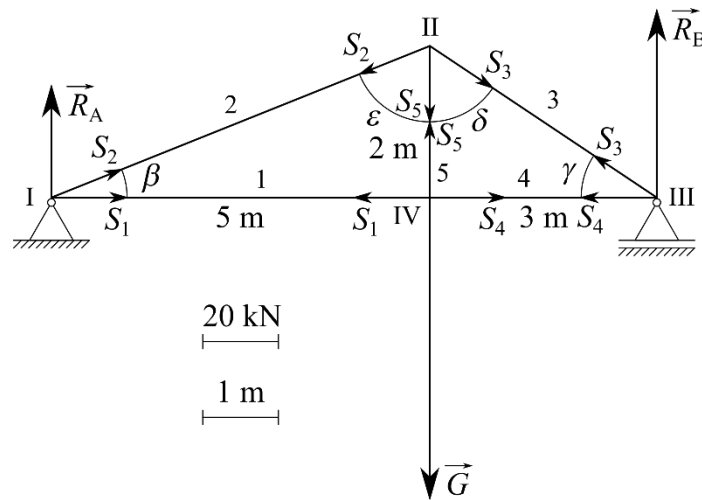
čímž jsme si ověřili správnost vypočtených veličin.

Pro reakci v podpoře A dostaneme dle vztahu (3)

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{0^2 + 30^2} = \sqrt{900} = 30 \text{ kN}.$$

Označíme jednotlivé pruty, styčníky a osové síly ve styčnicích (viz obr. 5). Jako styčník I označíme dvojný styčník se známou reakční silou  $R_A$  (stejně tak bychom mohli začít i u dvojného styčníku s reakční silou  $R_B$ ). Další styčníky v pořadí volíme opět po směru chodu hodinových ručiček. Směrové úhly jednotlivých osových sil (měřené v kladném

smyslu od kladné poloosy  $x$ ) označíme  $\alpha_i$ . Dále označíme vnitřní úhly v trojúhelníkových polích u styčniců I, II a III. Nyní budeme řešit silovou rovnováhu (9) jednotlivých styčniců rozepsáním na složky  $x$  a  $y$ .



Obr. 5: Označení jednotlivých prutů, styčniců a osových sil z příkladu 2

*Styčnic I*

$$\begin{aligned}
 F_x: S_1 \cdot \cos \alpha_1 + S_2 \cdot \cos \alpha_2 + R_A \cdot \cos \alpha_3 &= 0, \\
 S_1 \cdot \cos 0^\circ + S_2 \cdot \cos \beta + R_A \cdot \cos 90^\circ &= 0, \\
 S_1 + S_2 \cdot \cos \beta &= 0. \\
 F_y: S_1 \cdot \sin \alpha_1 + S_2 \cdot \sin \alpha_2 + R_A \cdot \sin \alpha_3 &= 0, \\
 S_1 \cdot \sin 0^\circ + S_2 \cdot \sin \beta + R_A \cdot \sin 90^\circ &= 0, \\
 S_2 \cdot \sin \beta + R_A &= 0.
 \end{aligned}$$

Vypočítáme vybrané goniometrické funkce úhlu  $\beta$  z geometrie zadání (viz obr. 5)

$$\begin{aligned}
 \cot \beta &= \frac{5}{2}, \\
 \sin \beta &= \frac{2}{\sqrt{2^2+5^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}}.
 \end{aligned}$$

Po dosazení za reakční sílu  $R_A$  a za směrový úhel  $\sin \beta$  dopočítáme sílu  $S_2$

$$\begin{aligned}
 S_2 \cdot \sin \beta &= -30, \\
 S_2 &= \frac{-30}{\sin \beta}, \\
 S_2 &= \frac{-30}{\frac{2}{\sqrt{29}}} = -30 \cdot \frac{\sqrt{29}}{2} = -15 \cdot \sqrt{29} \text{ kN}.
 \end{aligned}$$

Dále dopočítáme sílu  $S_1$

$$\begin{aligned}
 S_1 + \frac{-30}{\sin \beta} \cdot \cos \beta &= 0, \\
 S_1 &= 30 \cdot \cot \beta,
 \end{aligned}$$

$$S_1 = 30 \cdot \frac{5}{2} = 75 \text{ kN.}$$

*Styčnick II*

$$F_x: S_2 \cdot \cos \alpha_2 + S_3 \cdot \cos \alpha_3 + S_5 \cdot \cos \alpha_5 = 0,$$

$$S_2 \cdot \cos(180^\circ + \beta) + S_3 \cdot \cos(360^\circ - \gamma) + S_5 \cdot \cos 270^\circ = 0.$$

$$F_y: S_2 \cdot \sin \alpha_2 + S_3 \cdot \sin \alpha_3 + S_5 \cdot \sin \alpha_5 = 0,$$

$$S_2 \cdot \sin(180^\circ + \beta) + S_3 \cdot \sin(360^\circ - \gamma) + S_5 \cdot \sin 270^\circ = 0.$$

K výpočtu goniometrických funkcí některých úhlů použijeme součtové vzorce

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b,$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b.$$

Po dosazení dostaneme

$$F_x: S_2 \cdot (-\cos \beta) + S_3 \cdot \cos \gamma = 0,$$

$$F_y: S_2 \cdot (-\sin \beta) - S_3 \cdot \sin \gamma - S_5 = 0.$$

Vypočítáme další goniometrické funkce úhlů  $\beta$  a  $\gamma$  z geometrie zadání (viz obr. 5)

$$\cos \beta = \frac{5}{\sqrt{29}},$$

$$\sin \gamma = \frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$\tan \gamma = \frac{2}{3}.$$

Po dosazení s využitím výsledku styčnicku I dopočítáme sílu  $S_3$

$$S_3 \cdot \cos \gamma = S_2 \cdot \cos \beta,$$

$$S_3 = \frac{S_2 \cdot \cos \beta}{\cos \gamma} = \frac{-15 \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}}}{\frac{3}{\sqrt{13}}} = -25\sqrt{13} \text{ kN}$$

a sílu  $S_5$

$$-S_2 \cdot \sin \beta - \frac{S_2 \cdot \cos \beta}{\cos \gamma} \cdot \sin \gamma = S_5,$$

$$-S_2(\sin \beta + \cos \beta \cdot \tan \gamma) = S_5,$$

$$15\sqrt{29} \left( \frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \frac{2}{3} \right) = S_5,$$

$$S_5 = 80 \text{ kN.}$$

*Styčnick III*

$$F_x: S_3 \cdot \cos \alpha_3 + S_4 \cdot \cos \alpha_4 + R_B \cdot \cos \alpha_5 = 0,$$

$$S_3 \cdot \cos(180^\circ - \gamma) + S_4 \cdot \cos 180^\circ + R_B \cdot \cos 90^\circ = 0,$$

$$-S_3 \cdot \cos \gamma - S_4 = 0,$$

$$S_4 = -S_3 \cdot \cos \gamma,$$

$$S_4 = 25\sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 75 \text{ kN}.$$

$$F_y: S_3 \cdot \sin \alpha_3 + S_4 \cdot \sin \alpha_4 + R_B \cdot \sin \alpha_5 = 0,$$

$$S_3 \cdot \sin(180^\circ - \gamma) + S_4 \cdot \sin 180^\circ + R_B \cdot \sin 90^\circ = 0,$$

$$S_3 \cdot \sin \gamma + R_B = 0,$$

$$-25\sqrt{13} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + 50 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Složka  $F_y$  je jen pro kontrolu, všechny osově síly jsou známé již z předchozích rovnic.

#### *Styčnick IV*

Pro kontrolu správnosti ověříme ještě styčnick IV.

$$F_x: S_1 \cdot \cos \alpha_1 + S_4 \cdot \cos \alpha_4 + G \cdot \cos \alpha_6 + S_5 \cdot \cos \alpha_5 = 0,$$

$$S_1 \cdot \cos 180^\circ + S_4 \cdot \cos 0^\circ + G \cdot \cos 270^\circ + S_5 \cdot \cos 90^\circ = 0,$$

$$-S_1 + S_4 = 0,$$

$$-75 + 75 = 0,$$

$$0 = 0.$$

$$F_y: S_1 \cdot \sin \alpha_1 + S_4 \cdot \sin \alpha_4 + G \cdot \sin \alpha_6 + S_5 \cdot \sin \alpha_5 = 0,$$

$$S_1 \cdot \sin 180^\circ + S_4 \cdot \sin 0^\circ + G \cdot \sin 270^\circ + S_5 \cdot \sin 90^\circ = 0,$$

$$-G + S_5 = 0,$$

$$-80 + 80 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Shrneme výsledné vypočtené síly a dle jejich znamének určíme, zda se jedná o tahové či tlakové síly, tedy

$$S_1 = 75 \text{ kN (tah)},$$

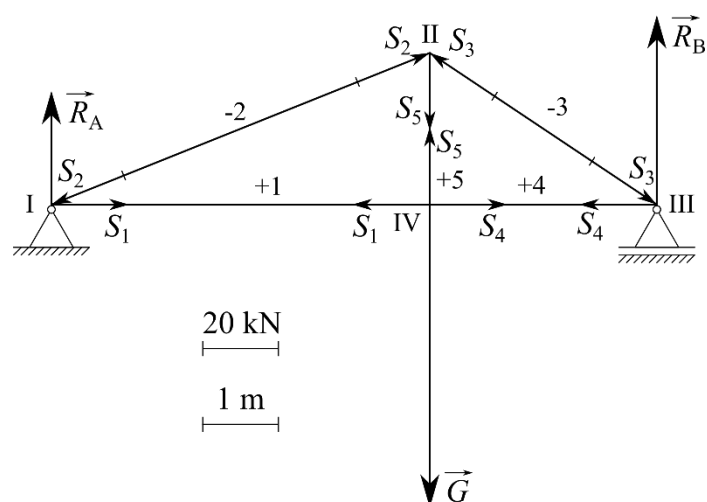
$$S_2 = -15 \cdot \sqrt{29} \text{ kN (tlak)},$$

$$S_3 = -25\sqrt{13} \text{ kN (tlak)},$$

$$S_4 = 75 \text{ kN (tah)},$$

$$S_5 = 80 \text{ kN (tah)}.$$

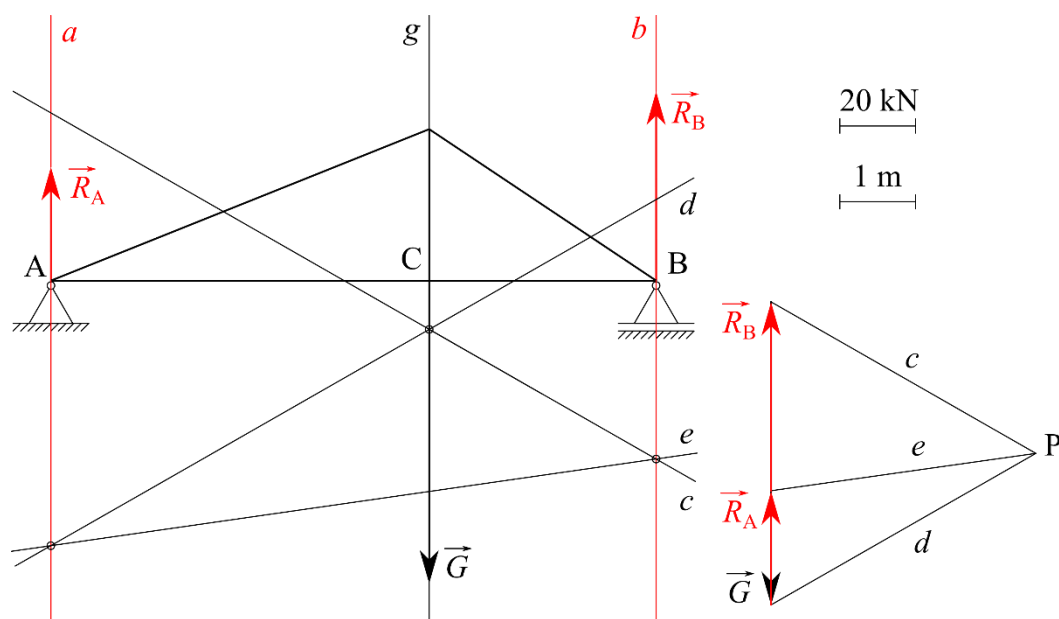
Nakonec označíme znaménky u čísel prutů a šipkami jednotlivých osových sil jejich skutečné směry (viz obr. 6).



Obr. 6: Výsledek příkladu 2 (osové síly nejsou z důvodu přehlednosti zakresleny v měřítku)

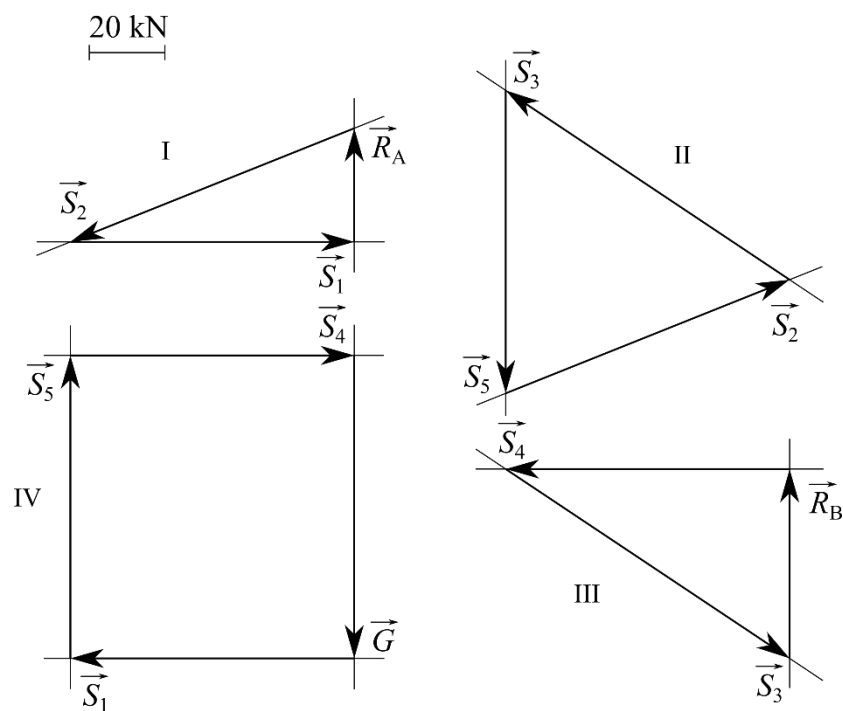
### Grafické řešení:

Ke zjištění velikostí a směrů reakčních sil slouží pomocný silový obrazec a vláknový obrazec (viz obr. 7). Nositelka  $g$  tíhy  $G$  a nositelka  $b$  reakce v podpoře B musí být svislé, protože podpora B zachycuje pouze reakce kolmé na její stupeň volnosti. Zadané zatížení tíhou  $G$  je vytnuté vlákny  $c$  a  $d$ , a proto se tato vlákna musí protnout na její nositelce  $g$ . Ze silového obrazce je zřejmé, že i reakce  $R_A$  v pevné podpoře A musí být svislá, tedy její nositelka  $a$  bude rovnoběžná s nositelkou  $b$  reakce  $R_B$  v podpoře B. Průsečík nositelky  $a$  s vláknem  $d$  a průsečík nositelky  $b$  s vláknem  $c$  pak musí být hledaným vláknem  $e$  vyřezávajícím obě reakce. Přenesením jeho směru do silového obrazce tak určíme velikosti obou reakcí, jejich orientace bude stanovena tak, aby zatěžující tíha  $G$  a obě reakce  $R_A$  a  $R_B$  byly ve stejném sledu. Nakonec přeneseme obě určené reakce do jejich působišť v podporách.

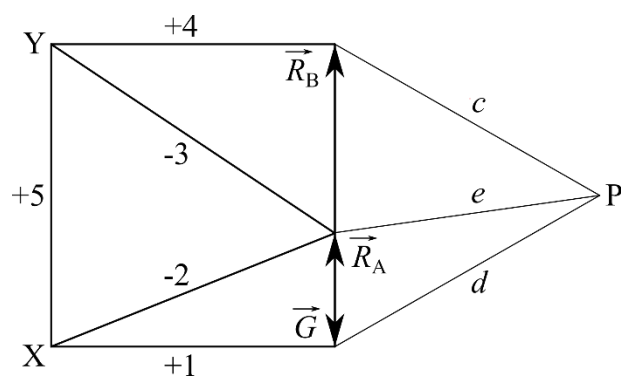


Obr. 7: Grafické řešení reakcí v podporách u prutové soustavy z příkladu 2

Ke zjištění osových sil slouží pomocné silové obrazce pro jednotlivé styčníky (viz obr. 8). Podobně jako u početní styčníkové metody musíme začít ve styčníku se známou vnější silou (je jedno, jestli zatěžující nebo reakční) a pouze dvěma neznámými osovými silami. Nejprve musíme rozhodnout o smyslu obcházení prutové soustavy i každého styčníku a vše kreslit ve stejném měřítku (včetně vnějších sil). Postupně řešíme rovnováhu jednotlivých styčníků, tzn. zakreslené síly musí jít v jednom sledu. Pořadí sil, které tvoří uzavřený obrazec, vždy zakreslujeme podle zvoleného smyslu obcházení styčníku (zde ve směru chodu hodinových ručiček, tj. v záporném smyslu). Zjištěné orientace osových sil zakreslíme do nákresu soustavy ke styčníkům, čímž určíme, zda se jedná o tah či tlak. Podle toho pak přidáme znaménko k číselnému označení daného prutu (+ pro tah, – pro tlak). Takto musíme vyřešit postupně všechny styčníky. Tím dostaneme stejný výsledek jako u početní styčníkové metody (viz obr. 6). Zjištěné silové obrazce pro jednotlivé styčníky přeneseme k silovému obrazci, přičemž nebudeme zakreslovat šipky udávající směr osových sil, pouze označíme u daného směru číslo prutu včetně znaménka pro tah či tlak. Tímto způsobem k sobě poskládané silové obrazce jednotlivých styčníků tvoří Cremonův diagram (viz obr. 9), který slouží jako kontrola správnosti celého grafického řešení. Pro kontrolu správnosti vytvoření Cremonova diagramu lze ještě ověřit, že pruty číslo 1, 2 a 5 (v obr. 5 tvoří trojúhelník) se v diagramu sbíhají v bodě označeném X (viz obr. 9) a obdobně pruty 3, 4 a 5 (viz obr. 5) se sbíhají v bodě označeném Y (viz obr. 9).



Obr. 8: Silová rovnováha jednotlivých styčnicků prutové soustavy z příkladu 2



Obr. 9: Cremonův diagram pro prutovou soustavu z příkladu 2.

### 3.2 Metoda průsečná

Metodu průsečnou neboli metodu postupného uvolňování styčnicků můžeme použít tehdy, pokud lze rovinnou prutovou soustavu protnout myšleným řezem v nejvýše třech prutech a tyto pruty neprocházejí jedním bodem (styčnickem) – z jednoho styčnicku mohou vycházet nejvýše dva z těchto prutů. Tímto protnutím rozdělíme soustavu na dvě části. Při rovnováze celé soustavy je v rovnováze i každá z jednotlivých částí soustavy a působí na ni vnější síly a také síly prořatých prutů. Tyto síly budeme považovat za síly vnější působící na danou část. Z podmínek rovnováhy

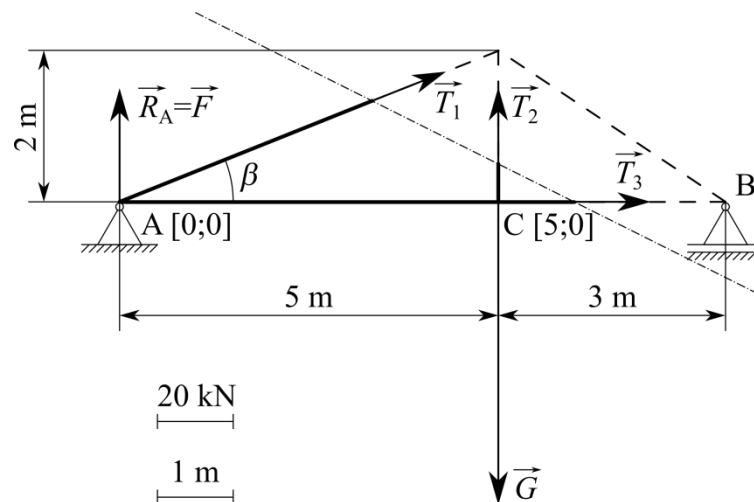
vnějších sil (9, 10) lze vypočítat tři osové síly v přerušovaných prutech [6]. Tato metoda je velmi výhodná, potřebujeme-li počítat osové síly pouze v některých prutech.

### Příklad 3:

Průsečnou metodou určete osové síly v prutech č. 2, 4 a 5 prutové soustavy z příkladu 2 (viz obr. 5).

### Řešení:

Vyjdeme z obr. 5 a povedeme myšlený řez tak, aby protínal pruty číslo 2, 4 a 5 (viz obr. 10). Pro účely výpočtu lze použít kteroukoliv část rozdělené prutové soustavy, zvolíme si levou část obsahující podporu A. V přerušovaných prutech označíme neznámé osové síly  $T_1, T_2, T_3$  a budeme je považovat za tahové. V průsečné metodě se i tyto síly považují za síly vnější a využijeme je společně s reakcí  $R_A = F = 30 \text{ kN}$  v podpoře A (viz příklad 2) a s vnějším zatížením  $G$  pro dosazení do silové (9) a momentové rovnováhy (10).



Obr. 10: Průsečná metoda řešení příkladu 3

Z geometrie zadání si určíme vybrané goniometrické funkce úhlu  $\beta$

$$\cos \beta = \frac{5}{\sqrt{29}}, \tan \beta = \frac{2}{5}, \sin \beta = \frac{2}{\sqrt{29}}.$$

Momentová rovnováha (10) zapsaná ve složkách, tedy vzhledem k bodu A, který jsme zvolili za počátek soustavy souřadnic, dává s využitím rovnice (7)

$$M = x \cdot F_y - y \cdot F_x,$$

$$\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_G + \vec{M}_{T_1} + \vec{M}_{T_2} + \vec{M}_{T_3} = 0,$$



$$M = (0 \cdot R_{Ay} - 0 \cdot R_{Ax}) + (5 \cdot G_y - 0 \cdot G_x) + (0 \cdot T_{1y} - 0 \cdot T_{1x}) + \\ (5 \cdot T_{2y} - 0 \cdot T_{2x}) + (5 \cdot T_{3y} - 0 \cdot T_{3x}) = 0,$$

$$M = 5 \cdot G_y + 5 \cdot T_{2y} + 5 \cdot T_{3y} = 0,$$

$$5 \cdot G \cdot \sin 270^\circ + 5 \cdot T_2 \cdot \sin 90^\circ + 5 \cdot T_3 \cdot \sin 0^\circ = 0,$$

$$-5 \cdot G + 5 \cdot T_2 = 0 \Rightarrow 5 \cdot T_2 = 5 \cdot G \Rightarrow T_2 = G \Rightarrow T_2 = 80 \text{ kN}.$$

Silovou rovnováhu (9) rozepíšeme do složek (čísla u úhlů  $\beta$  odpovídají číslování osových sil, index 4 je pro směrový úhel reakce v podpoře A, a index 5 je pro směrový úhel zatížení  $G$ )

$$F_x: T_3 \cdot \cos \beta_3 + T_2 \cdot \cos \beta_2 + T_1 \cdot \cos \beta_1 + F \cdot \cos \beta_4 + G \cdot \cos \beta_5 = 0,$$

$$T_3 \cdot \cos 0^\circ + T_2 \cdot \cos 90^\circ + T_1 \cdot \cos \beta + F \cdot \cos 90^\circ + G \cdot \cos 270^\circ = 0,$$

$$T_3 + T_1 \cdot \cos \beta = 0,$$

$$T_3 + T_1 \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} = 0,$$

$$T_1 = -T_3 \cdot \frac{\sqrt{29}}{5}.$$

$$F_y: T_3 \cdot \sin \beta_3 + T_2 \cdot \sin \beta_2 + T_1 \cdot \sin \beta_1 + F \cdot \sin \beta_4 + G \cdot \sin \beta_5 = 0,$$

$$T_3 \cdot \sin 0^\circ + T_2 \cdot \sin 90^\circ + T_1 \cdot \sin \beta + F \cdot \sin 90^\circ + G \cdot \sin 270^\circ = 0,$$

$$T_2 + T_1 \cdot \sin \beta + F - G = 0,$$

$$T_2 + T_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} + F - G = 0.$$

Po dosazení za  $F$ ,  $G$  a  $T_1$  ze složky  $F_x$  dostaneme

$$T_2 - T_3 \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} + 30 - 80 = 0,$$

$$T_2 - \frac{2}{5} \cdot T_3 = 50.$$

Po dosazení  $T_2$  z momentové rovnováhy dostaneme ze složky  $F_y$

$$80 - \frac{2}{5} T_3 = 50,$$

$$-\frac{2}{5} T_3 = -30,$$

$$T_3 = 75 \text{ kN}$$

a ze složky  $F_x$

$$T_1 = -T_3 \cdot \frac{\sqrt{29}}{5},$$

$$T_1 = -75 \cdot \frac{\sqrt{29}}{5},$$

$$T_1 = -15\sqrt{29} \text{ kN}.$$

Síla  $T_1$  bude ve skutečnosti mít opačný směr, než jsme předpokládali, protože vyšla záporná. Bude tedy tlaková. Síly  $T_2$  a  $T_3$  budou v souladu s předpokládaným směrem tahové. Porovnáním výsledků příkladů 2 a 3 vidíme, že

$$T_1 = S_2; T_2 = S_5; T_3 = S_4.$$

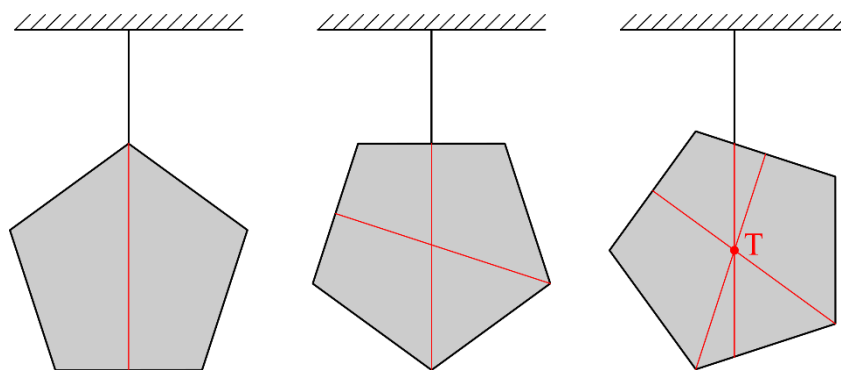
---

## 4. TĚŽIŠTĚ

Každé těleso je složeno z velkého počtu částic, které nazýváme hmotnými body. Tyto částice mají určitou hmotnost, která se projevuje jejich tíhou. Na každou částici působí tíhová síla směrem svisle dolů bez ohledu na okamžitou polohu tělesa. Výslednice všech těchto rovnoběžných tíhových sil dává celkovou tíhovou sílu působící na těleso. Nositelka celkové tíhové síly se nazývá těžnice. Otočením tělesa dojde ke změně polohy těžnice, ale tíhová síla se nezmění. Leží-li působiště tíhové síly na těžnici bez ohledu na polohu tělesa, musí být toto působiště v průsečíku všech těžnic. Takový bod nazýváme těžištěm tělesa. Lze tedy říci, že těžiště je bod tělesa, kterým prochází ve všech jeho polohách v prostoru tíha ( $G$ ). Vůči těžišti je výsledný moment působících tíhových sil nulový [6, 7].

Ve zjednodušení určujeme těžiště jako působiště výslednice prostorové soustavy rovnoběžných sil. Jeho poloha je dána rozložením látky v tělese. Pokud mají stejnorodá (homogenní) tělesa střed souměrnosti, leží těžiště v tomto středu. U stejnorodých těles, která mají osu nebo rovinu souměrnosti, najdeme těžiště vždy na této ose nebo v této rovině. Těžiště může ležet i mimo látku daného tělesa. Takovými tělesy jsou např. váza, podkova, hrnec, ohnutý drát, různá dutá tělesa apod. [8].

Určování polohy těžiště můžeme provádět experimentálně nebo pomocí výpočtu. Při experimentálním hledání těžiště postupně zavěšujeme těleso v jeho různých bodech a při každém zavěšení si zaznamenáme svislou těžnici. Těžiště pak leží na průsečíku zaznamenaných těžnic (viz obr. 11).



Obr. 11: Experimentální určování těžiště tělesa

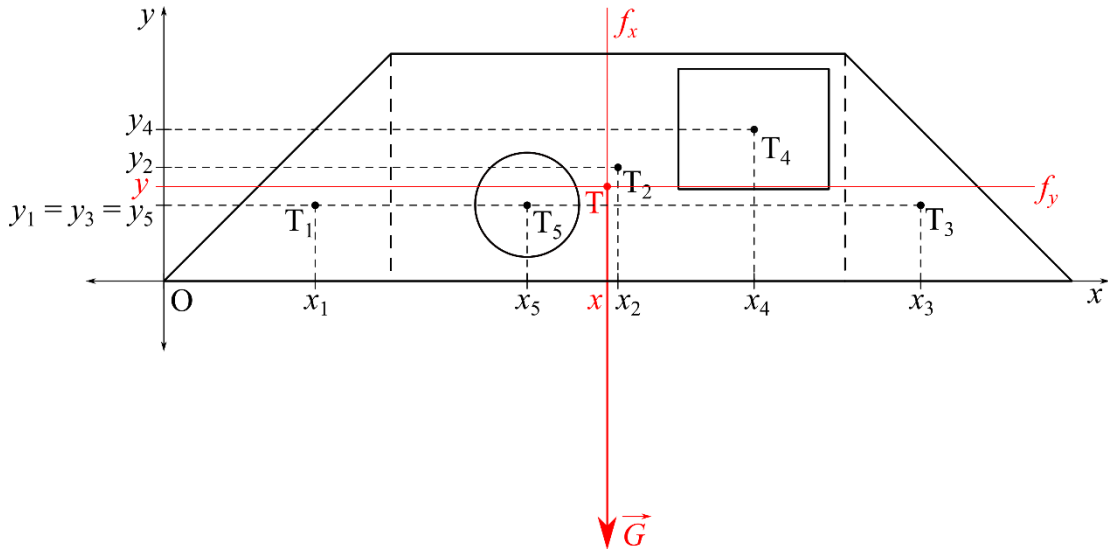
Při početním hledání těžiště je důležité si uvědomit, že celkový moment sil působících na dané těleso vzhledem k těžišti musí být roven nule. Polohu těžiště soustavy hmotných bodů lze určit na základě souřadnic jednotlivých bodů tělesa a jejich hmotností z následujícího vztahu

$$x_T = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \dots + x_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (12)$$

U souřadnic  $y_T$  a  $z_T$  postupujeme analogicky.

#### Příklad 4:

Vyjádřete v obecném tvaru polohu těžiště homogenního tělesa stálé tloušťky, lichoběžníkového průřezu s vyříznutými dvěma otvory – kruhovým a obdélníkovým (viz obr. 12).



Obr. 12: Zadání příkladu 4

#### Řešení:

Zvolíme souřadný systém  $Oxy$  dle obr. 12. Protože těleso má rovinu symetrie rovnoběžnou s rovinou  $xy$ , musí těžiště ležet v této rovině souměrnosti v polovině tloušťky tělesa. Zbývá tedy určit souřadnice  $x$  a  $y$  těžiště. Protože se jedná o homogenní těleso stálé tloušťky, můžeme úkol převést na rovinný problém – určení polohy těžiště v řezu tělesa.

Složitý tvar je třeba si rozložit na nám známé geometrické útvary, u kterých se dobře hledá těžiště. Plochu rozdělíme na dva trojúhelníky a plný obdélník, ve kterém je následně vyříznutý kruh a obdélník (viz obr. 12). Těžiště každého trojúhelníka ( $T_1$ ,  $T_3$ ) je v jedné třetině vzdálenosti mezi středem libovolné strany trojúhelníka a protilehlým vrcholem. Těžiště kruhu ( $T_5$ ) a obdélníků ( $T_2$ ,  $T_4$ ) je v jejich středu, protože se jedná o symetrické obrazce.

Vyjdeme z momentové věty, kdy výsledný moment se rovná algebraickému součtu momentů jednotlivých sil. Ramena tíhových sil jsou rovna vzdálenosti příslušného

těžiště od osy  $y$ , tedy odpovídají souřadnici  $x$  tohoto těžiště. Momenty tíhových sil působících na vyříznuté útvary budou mít opačné znaménko, jejich moment má opačný směr než v případě nevyříznutých plných těles. S využitím rovnice (6) dostaneme

$$G \cdot x = G_1 \cdot x_1 + G_2 \cdot x_2 - G_3 \cdot x_3 - G_4 \cdot x_4 + G_5 \cdot x_5.$$

Tíhu vypočítáme pomocí vzorce

$$G = m \cdot g.$$

Dosazením dostaneme

$$m \cdot g \cdot x = m_1 \cdot g \cdot x_1 + m_2 \cdot g \cdot x_2 - m_3 \cdot g \cdot x_3 - m_4 \cdot g \cdot x_4 + m_5 \cdot g \cdot x_5.$$

Po zkrácení tíhového zrychlení a s využitím definice hustoty dostaneme

$$\rho \cdot V \cdot x = \rho \cdot V_1 \cdot x_1 + \rho \cdot V_2 \cdot x_2 - \rho \cdot V_3 \cdot x_3 - \rho \cdot V_4 \cdot x_4 + \rho \cdot V_5 \cdot x_5.$$

Objem jednotlivých částí tělesa vyjádříme z obecného vzorce  $V = S \cdot v$ , kde  $S$  je obsah podstavy a  $v$  je výška daného tělesa. Protože se jedná o homogenní těleso stálé tloušťky, je hustota i výška všech částí stejná, a proto je můžeme také zkrátit. Po úpravě a vyjádření  $x$  dostaneme vzorec pro  $x$ -ovou souřadnici těžiště tělesa, tedy

$$x = \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 - S_3 \cdot x_3 - S_4 \cdot x_4 + S_5 \cdot x_5}{S}.$$

Kdybychom soustavu souřadnic otočili tak, že by tíha směřovala ve směru osy  $x$ , pak by momentová věta přešla do tvaru

$$G \cdot y = G_1 \cdot y_1 + G_2 \cdot y_2 - G_3 \cdot y_3 - G_4 \cdot y_4 + G_5 \cdot y_5.$$

Analogickými úpravami dostaneme  $y$ -ovou souřadnici ve tvaru

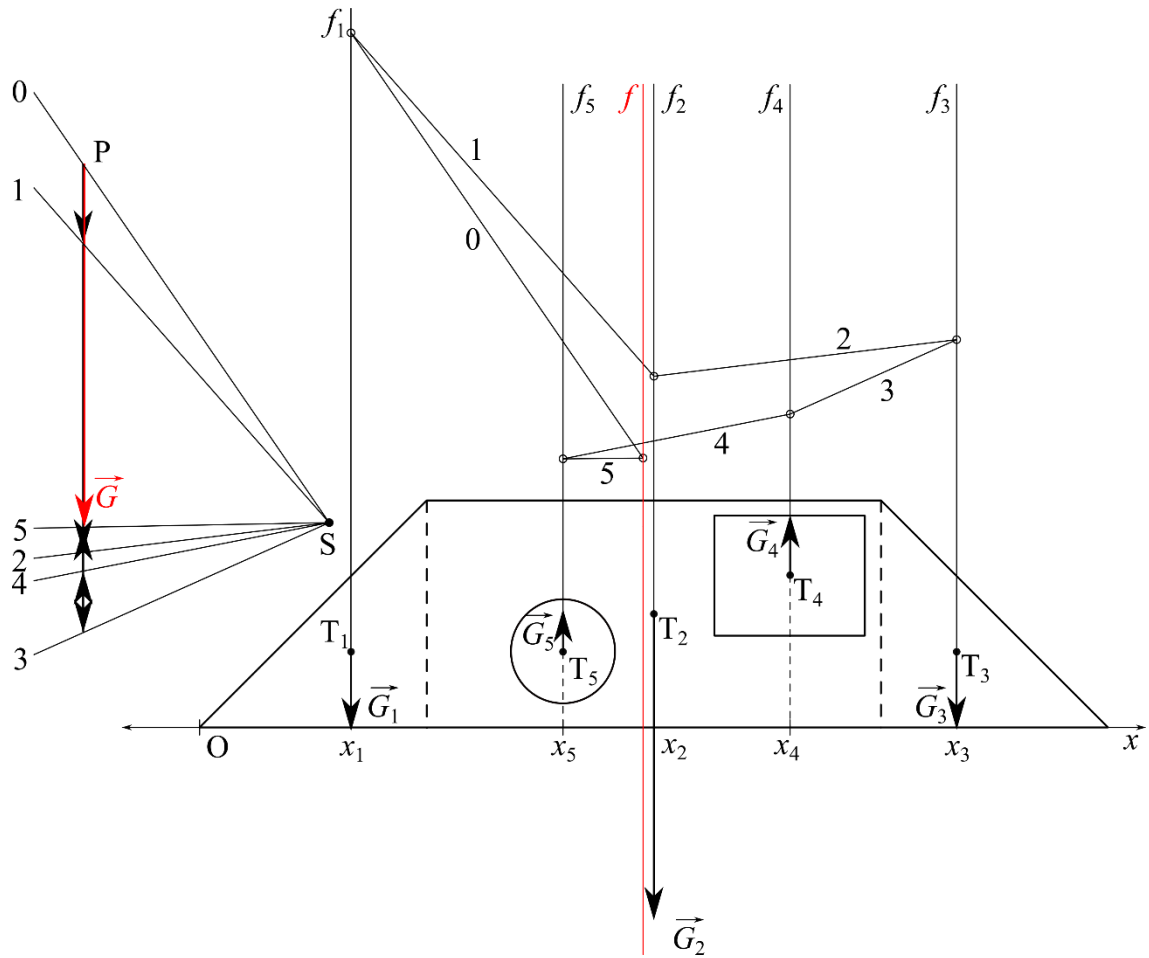
$$y = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 - S_3 \cdot y_3 - S_4 \cdot y_4 + S_5 \cdot y_5}{S}.$$

### Grafické řešení

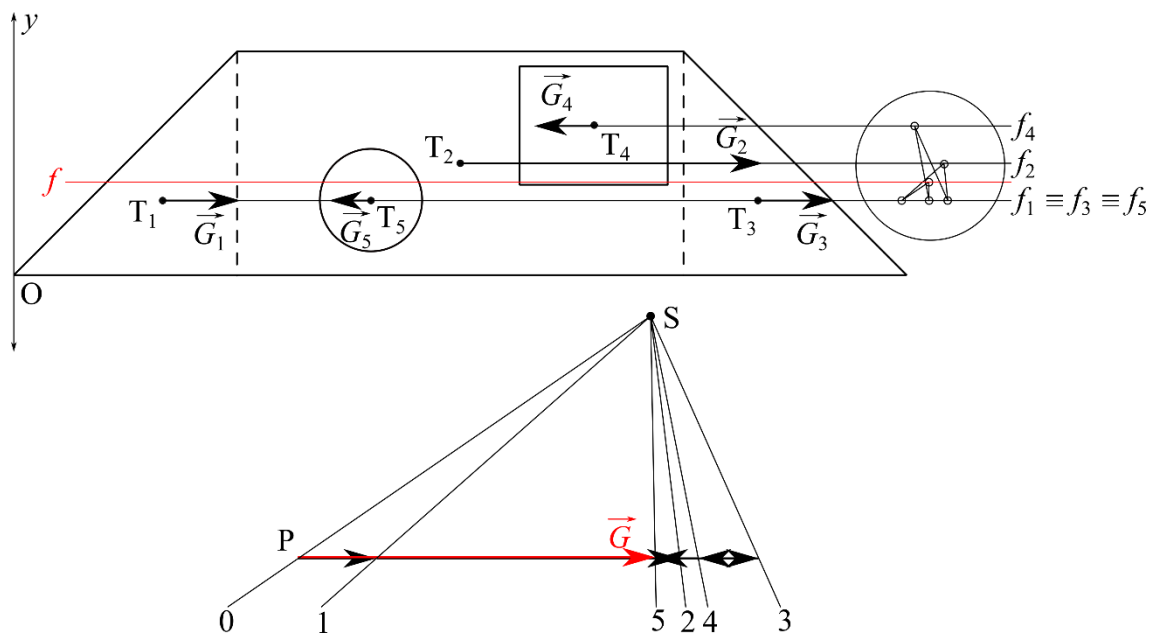
Grafické řešení je znázorněno na obr. 13, 14 a 15, výsledná poloha těžiště včetně obou určených těžnic je pak zanesena přímo do obr. 12 v zadání příkladu. Pro větší přehlednost nejsou v silových obrazcích v obr. 13 a 14 popsány jednotlivé síly, ale pouze výsledná tíha  $\vec{G}$ . Tyto síly jsou vynášeny v obou silových obrazcích v pořadí  $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3, \vec{G}_4, \vec{G}_5$ . Velikosti těchto vektorů jsou úměrné velikostem ploch jednotlivých částí.

Nejprve zvolíme souřadný systém tak, aby jednotlivé tíhy měly směr rovnoběžný s osou  $y$ . Na základě postupů grafického řešení výslednice soustavy rovinných sil s využitím silového a vláknového obrazce určíme polohu nositelky výslednice – těžnice  $f$  (viz obr. 13). Tíhy  $\vec{G}_4$  a  $\vec{G}_5$  mají směr vzhůru, což vyjadřuje jejich opačný moment z důvodu

vyřiznutých částí. Poté pootočíme souřadný systém tak, aby měly tíhy směr osy  $x$  a analogicky určíme graficky druhou těžnici  $f$  (viz obr. 14).

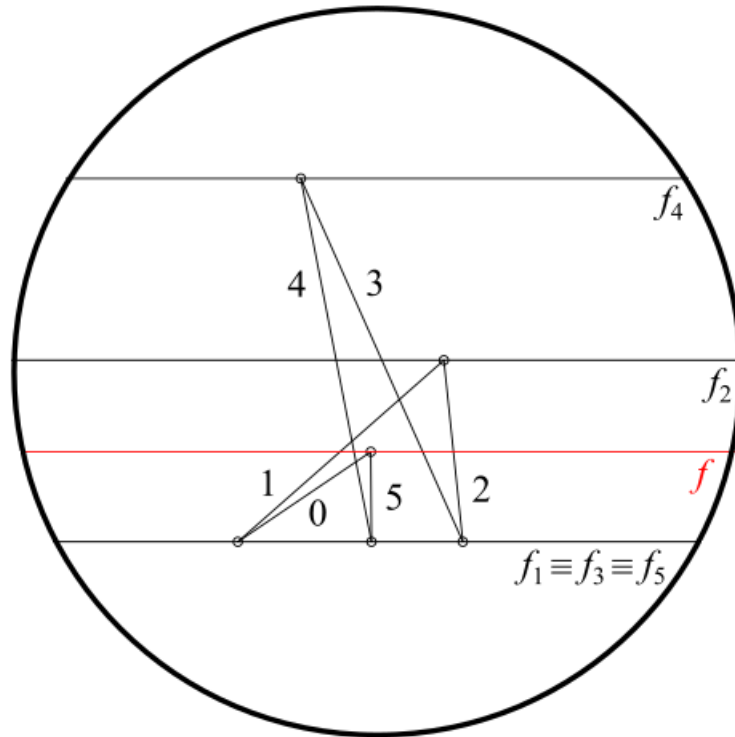


Obr. 13: Hledání souřadnice  $x$  těžiště



Obr. 14: Hledání souřadnice  $y$  těžiště

V obr. 14 nejsou z důvodu přehlednosti ve vláknovém obrazci označována jednotlivá vlákna jejich čísly. Oblast vláknového obrazce vyznačena kruhem je znázorněna na následujícím obr. č. 15 ve čtyřnásobném zvětšení i s popisky vláken.



Obr. 15: Vláknoový obrazec z obr. 14 ve čtyřnásobném zvětšení

Na závěr přeneseme obě získané těžnice (tedy výslednice soustav rovnoběžných sil) do jednoho obrázku tělesa, označíme je  $f_x$  a  $f_y$ , a v jejich průsečíku bude hledané těžiště T útvaru (viz obr. 12). Do těžiště pak umístíme vektor celkové tíhy  $\vec{G}$  tělesa určený silovým obrazcem na obr. 13, resp. 14.

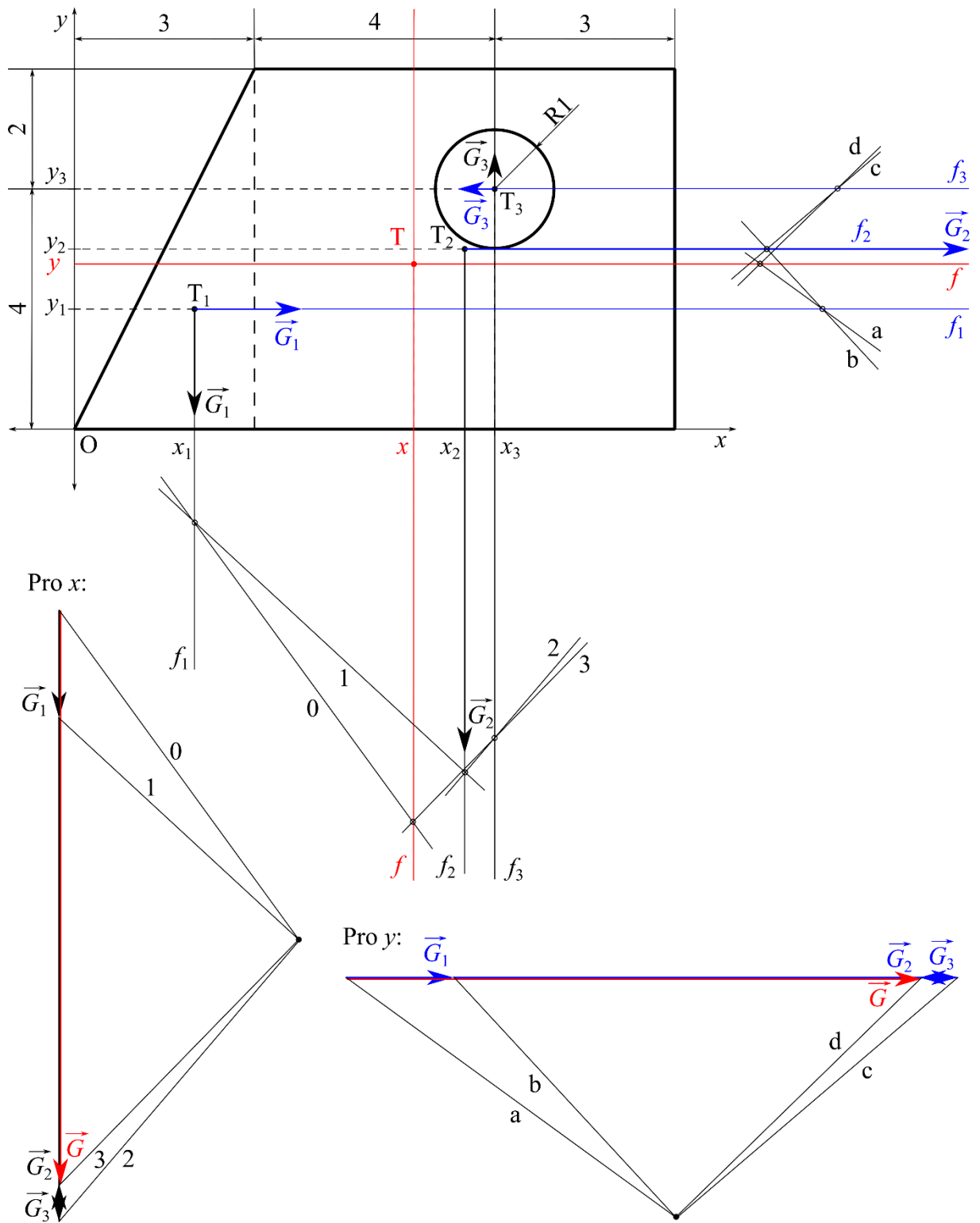
### Příklad 5:

Určete polohu těžiště desky z homogenního materiálu stálé tloušťky s vyříznutým otvorem (viz obr. 16). Rozměry jsou uvedeny v libovolných jednotkách.

### Grafické řešení:

Při tvorbě grafického řešení použijeme zcela analogický postup jako v příkladu 4. Celé řešení je nyní uvedeno v jediném obrázku (viz obr. 16). Měřítko vektorů sil může být libovolné, neznáme totiž hmotnosti, ale velikosti těchto vektorů musí být úměrné plochám obrazců, jak plyne z postupu řešení příkladu 4. Jednotlivé tíhy a jejich

nositelky mají v obr. 16 v případě svislé polohy osy  $y$  černou barvu, vlákna v příslušném obrazci jsou označena čísly. Při svislé poloze osy  $x$  mají tíhy a jejich nositelky barvu modrou, vlákna jsou pak označena malými písmeny.



Obr. 16: Zadání a grafické řešení příkladu 5



### Počtení řešení:

Opět se jedná o homogenní materiál. Musíme si tedy těleso obdobně jako v příkladu 4 rozdělit na vhodné geometrické útvary, kterými jsou trojúhelník, obdélník a kruh. Jejich těžiště jsou označena postupně  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  (viz obr. 16). Abychom mohli použít vzorec na výpočet souřadnic těžiště (12) upravený v souladu s řešením příkladu 4, je potřeba vypočítat plochy jednotlivých částí desky, celkovou plochu desky a souřadnice  $x$  a  $y$  jednotlivých těžišť.

Pro trojúhelník platí

$$S_1 = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9,$$

pro obdélník

$$S_2 = a \cdot b = 7 \cdot 6 = 42$$

a pro kruh

$$S_3 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1^2 = 3,14.$$

Celkový obsah pak bude

$$S = S_1 + S_2 - S_3 = 9 + 42 - 3,14 = 47,86.$$

Souřadnice jednotlivých těžišť určíme z geometrie zadání, tedy

$$x_1 = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2; \quad y_1 = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2;$$

$$x_2 = 3 + 3,5 = 6,5; \quad y_2 = 6 - 3 = 3;$$

$$x_3 = 10 - 3 = 7; \quad y_3 = 6 - 2 = 4.$$

Po získání všech potřebných údajů můžeme použít vzorec (12) a analogicky s postupem v příkladu 4 vypočítat souřadnice těžiště celého tělesa

$$x = \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 - S_3 \cdot x_3}{S} = \frac{9 \cdot 2 + 42 \cdot 6,5 - 3,14 \cdot 7}{47,86} = 5,62;$$

$$y = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 - S_3 \cdot y_3}{S} = \frac{9 \cdot 2 + 42 \cdot 3 - 3,14 \cdot 4}{47,86} = 2,75.$$

---

### 4.1 Guldinovy věty

Guldinovy věty, někdy označovány Guldin – Pappovy věty [9] lze použít nejen k určení polohy těžiště, ale umožňují také počítat objem a povrch těles vzniklých rotací rovinných útvarů kolem přímky. Lze je použít i obráceně, tzn. rovinnému obrazci, jehož rotací vzniklo těleso, je možné ze známého povrchu nebo objemu tělesa určit polohu jeho těžiště.

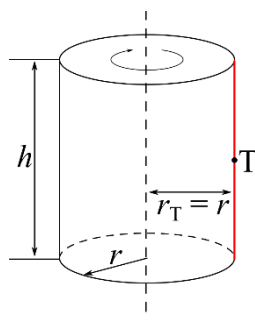
### První Guldinova věta – věta o površích rotačních těles:

Povrch rotačního tělesa vznikne rotací obvodové čáry a je roven součinu délky rotační čáry a dráhy, kterou opíše její těžiště při rotaci o úhel  $2\pi$ .

$$S = 2\pi r_T l, \quad (13)$$

kde  $S$  je plocha povrchu tělesa,  $l$  je délka tvořící obvodové čáry  $r_T$  je souřadnice těžiště tvořící čáry [9].

Využití první Guldinovy věty si vysvětlíme na následujícím obr. 17. Povrch pláště válce vznikne rotací povrchové úsečky. Délka úsečky ( $l$ ) tvořící útvar je výška válce ( $h$ ) a poloha těžiště této úsečky je v jejím středu. To znamená, že vzdálenost těžiště od osy otáčení je stejná jako poloměr podstavy ( $r$ ) vzniklého válce [10]. Je potřeba dát pozor na to, že úsečka při rotaci vytvoří pouze plášť válce, nikoli celý jeho povrch včetně podstav.



Obr. 17: Povrch rotačního tělesa

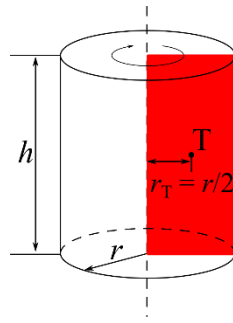
### Druhá Guldinova věta – věta o objemech rotačních těles:

Objem rotačního tělesa vznikne rotací plochy a je roven součinu tvořící plochy a dráhy, kterou opíše její těžiště při rotaci o úhel  $2\pi$ .

$$V = 2\pi r_T S, \quad (14)$$

kde  $V$  je objem vzniklého tělesa,  $S$  je obsah tvořící plochy a  $r_T$  je souřadnice těžiště tvořící plochy [9].

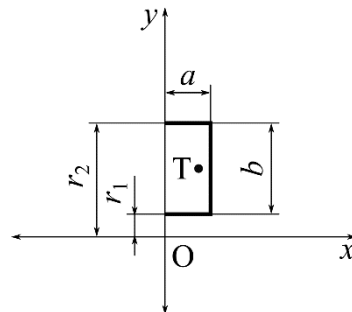
Využití druhé Guldinovy věty si vysvětlíme na následujícím obr. 18. Objem válce vznikne rotací obdélníka, jehož strany tvoří vzdálenost povrchové úsečky od osy otáčení (poloměr  $r$ ) a její délka (výška válce  $h$ ). Poloha těžiště je v geometrickém středu obdélníka a jeho vzdálenost od osy otáčení je rovna polovině poloměru podstavy vzniklého válce, tj.  $r_T = \frac{r}{2}$  [10].



Obr. 18: Objem rotačního tělesa

### Příklad 6:

Vypočítejte těžiště sponky do sešívačky s rozměry  $a = 6$  mm,  $b = 12$  mm (viz obr. 19) pomocí Guldinovy věty. Výpočet (výsledek) těžiště ověřte rozdělením na symetrické části, u kterých znáte těžiště. Tloušťku drátku zanedbejte.



Obr. 19: Zadání příkladu 6

### Řešení:

Budeme předpokládat dle zadání, že příčný rozměr drátku sponky je zanedbatelný vůči podélnému rozměru, čímž lze sponku považovat za čáru. Pro výpočet použijeme první Guldinovu větu (13). Zvolíme soustavu souřadnic tak, jak ukazuje obr. 19. Nejprve necháme rotovat sponku okolo osy  $y$ . Rotací vznikne válec, o poloměru podstavy  $a$  a výšce  $b$ , jehož povrch je

$$S = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot (a + b).$$

Pozn.: Musíme si uvědomit, že sponka při rotaci vytvoří celý povrch válce včetně podstav, nikoli pouze jeho plášť.

Délka rotační čáry je dle obr. 19

$$l = 2 \cdot a + b.$$

Dosazením do první Guldinovy věty (13) dostaneme

$$2 \cdot \pi \cdot a \cdot (a + b) = 2 \cdot \pi \cdot r_T \cdot (2 \cdot a + b).$$

Dosazením a po úpravě dostaneme

$$6 \cdot (6 + 12) = r_T \cdot 24,$$

$$\frac{108}{24} = r_T,$$

$$r_T = 4,5 \text{ mm (souřadnice } x \text{ těžiště)}.$$

Druhou souřadnici těžiště vypočítáme tak, že necháme sponku rotovat okolo osy  $x$ . Pro využití Guldinovy věty je potřeba, aby celý objekt ležel v jedné polorovině s hraniční přímkou  $x$ . Dle obr. 19 zvolíme  $r_1 = 3 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 15 \text{ mm}$ . Rotací vznikne prstavec s vnějším poloměrem  $r_2$  a vnitřním poloměrem  $r_1$ . Sestavíme si rovnici pro povrch a dosadíme do první Guldinovy věty (13), přičemž je potřeba si uvědomit, že rotační těleso bude mít pouze jednu podstavu tvaru mezikruží.

$$(\pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2) \cdot a + 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot a + 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot a = 2 \cdot \pi \cdot r_T \cdot l.$$

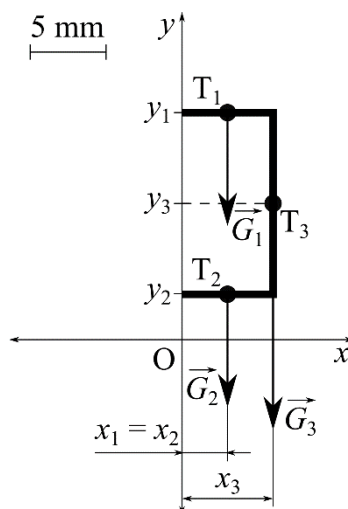
Po dosazení hodnot do vzorce a vykrácení  $\pi$  vypočítáme polohu těžiště

$$(225 - 9) + 2 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 15 \cdot 6 = 2 \cdot r_T \cdot 24,$$

$$2 \cdot 216 = 2 \cdot r_T \cdot 24,$$

$$r_T = 9 \text{ mm (souřadnice } y \text{ těžiště)}.$$

Výpočet ověříme rozdělením sponky na symetrické obrazce (viz obr. 20).



Obr. 20: Rozdělení sponky na symetrické obrazce

Celá sponka má délku  $l = 24 \text{ mm}$  a její hmotnost označíme  $m$ . Hmotnost libovolné části sponky je přímo úměrná její délce. Po rozdělení sponky na symetrické části snadno vyjádříme jednotlivým částem jejich hmotnosti

$$m_1 = \frac{m}{l} \cdot 6 = \frac{m}{24} \cdot 6 = \frac{m}{4},$$

$$m_2 = \frac{m}{l} \cdot 6 = \frac{m}{24} \cdot 6 = \frac{m}{4},$$

$$m_3 = \frac{m}{l} \cdot 12 = \frac{m}{24} \cdot 12 = \frac{m}{2}.$$

Sponku lze považovat za homogenní těleso, proto její jednotlivé části nahradíme hmotným bodem umístěným do jejich těžišť, které bude středem symetrie dané části sponky (viz obr. 20). Nyní určíme souřadnice jednotlivých těžišť, tedy

$$\begin{aligned}x_1 &= 3 \text{ mm}, & y_1 &= 15 \text{ mm}, \\x_2 &= 3 \text{ mm}, & y_2 &= 3 \text{ mm}, \\x_3 &= 6 \text{ mm}, & y_3 &= 9 \text{ mm}.\end{aligned}$$

Dosazením do rovnice (12) dostaneme souřadnice těžiště sponky

$$\begin{aligned}x_T &= \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m}, & y_T &= \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3}{m}, \\x_T &= \frac{\frac{m}{4} \cdot 3 + \frac{m}{4} \cdot 3 + \frac{m}{2} \cdot 6}{m}, & y_T &= \frac{\frac{m}{4} \cdot 15 + \frac{m}{4} \cdot 3 + \frac{m}{2} \cdot 9}{m}, \\x_T &= \frac{6 \cdot m + 12 \cdot m}{4} \cdot \frac{1}{m}, & y_T &= \frac{15 \cdot m + 3 \cdot m + 18 \cdot m}{4} \cdot \frac{1}{m}, \\x_T &= \frac{9}{2} = 4,5 \text{ mm}, & y_T &= 9 \text{ mm},\end{aligned}$$

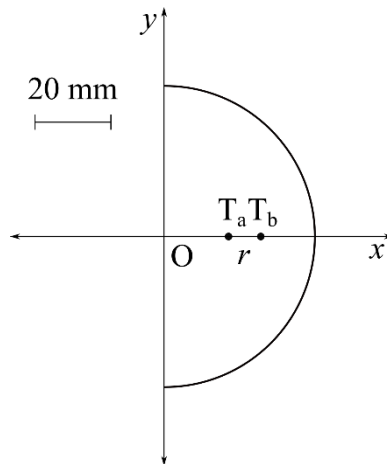
což jsou stejné hodnoty s hodnotami vypočtenými pomocí první Guldinovy věty.

### Příklad 7:

Vypočítejte těžiště a) půlkruhu a b) půlkružnice o poloměru 4 cm.

### Řešení:

Objekt umístíme do soustavy souřadnic (viz obr. 21).



Obr. 21: Nákres k příkladu 7

a) Použijeme druhou Guldinovu větu (14), kde  $r_T$  odpovídá dle obr. 21  $x$ -ové souřadnici hledaného těžiště. Rotací půlkruhu vznikne koule, jejíž objem je  $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$ . Obsah půlkruhu je  $S = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$ . Dosazením do Guldinovy věty dostaneme

$$\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = 2 \cdot \pi \cdot r_T \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2},$$

$$\frac{4}{3} \cdot r = r_T \cdot \pi,$$

$$\frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} = r_T \text{ (tento vztah lze ověřit i v tabulkách),}$$

$$r_{T_a} = 1,70 \text{ cm.}$$

b) Rotací půlkružnice vznikne povrch koule, tedy  $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ . Délka půlkružnice je  $l = \pi \cdot r$ . Tím, že je půlkružnice čára, použijeme první Guldinovu větu (13), kde  $r_T$  má analogický význam jako v části a). Tedy po dosazení

$$4 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot r_T \cdot \pi \cdot r,$$

$$2 \cdot r = \pi \cdot r_T,$$

$$\frac{2 \cdot r}{\pi} = r_T \text{ (tento vztah lze opět ověřit v tabulkách),}$$

$$r_{T_b} = 2,55 \text{ cm.}$$

## 5. PASIVNÍ ODPORY, TŘENÍ

Pasivním odporem (třením) nazýváme odpor (reakce) proti směru pohybu (síle). Podle situace, při které odpor vzniká, můžeme rozeznávat různé druhy tření. Nejčastěji se vyskytuje tření smykové, vláknové (pásové), valivé, čepové a tuhost (neohebnost) lana [2, 5, 6]. Tření může mít různý charakter. Je to například tření ve stykových plochách, vnitřní tření (př. pásy, lana) či deformace (př. při valení). Práce, která je potřebná k překonání pasivního odporu se mění v přírůstek vnitřní energie, a to se nejčastěji projeví zvýšením teploty. Třecí síla je proto silou disipativní (dochází k nevratné změně) [11].

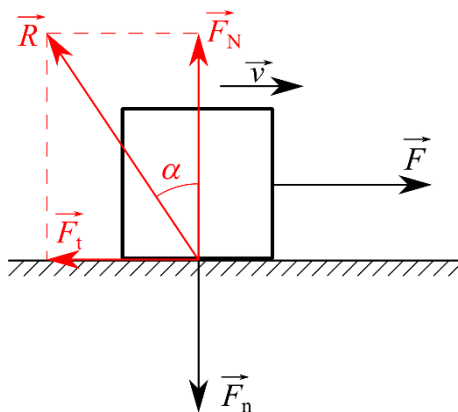
### 5.1 Smykové tření

Smykové tření vzniká na styčných plochách, když se těleso posouvá po podložce nebo po povrchu jiného tělesa. Ani podložka, ani těleso nemusí být dokonale hladké. Tyto nerovnosti brání tělesu v pohybu a vzniká odpor, který působí vždy ve styčné ploše a vždy proti smyslu pohybu. Protože se těleso smýká po podložce, říkáme, že se jedná o smykové tření. Je závislé na drsnosti povrchu třecích ploch, na materiálu třecích ploch, na přítlaku, mazání, rychlosti nebo na teplotě. Takové tření může vznikat na libovolném povrchu bez ohledu na jeho směr v prostoru, tedy na vodorovné rovině, nakloněné rovině, ale i na svislé rovině.

Velikost smykového tření lze vyjádřit rovnicí

$$F_t = f \cdot F_n, \quad (15)$$

kde  $F_t$  je síla smykového tření,  $F_n$  je normálová složka síly (vyjadřující normálový vzájemný účinek obou ploch), která vzniká nejčastěji tíhovou silou působící na těleso,  $f = \tan \alpha$  je tzv. součinitel smykového tření, přičemž  $\alpha$  je úhel mezi normálovou složkou  $F_N$  celkové reakce podložky a touto celkovou reakcí  $R$  (viz obr. 22). Těleso nemusí být k podložce přitlačováno jen tíhovou silou, ale také například pružinou nebo plynem. Součinitel smykového tření je konstanta, která představuje poměr velikosti síly potřebné k udržení rovnoměrně přímočarého pohybu tělesa na vodorovné rovině a tíhy tělesa [6]. Tento součinitel je také závislý na drsnosti stykových ploch, na materiálu a také na mazání. Velikosti součinitele smykového tření různých povrchů jsou uvedeny v tabulkách, např. [12].



Obr. 22: Smykové tření

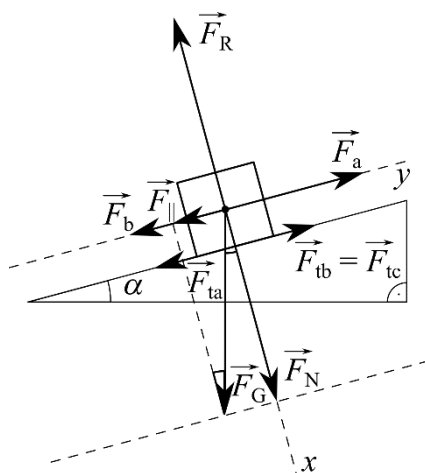
### Příklad 8:

Po nakloněné rovině táhneme rovnoměrným pohybem bednu o hmotnosti 20 kg. Proti pohybu bedny působí třecí síla. Součinitel smykového tření mezi bednou a povrchem nakloněné roviny je 0,4. Úhel nakloněné roviny je  $15^\circ$ .

- Jakou silou musíme táhnout bednu vzhůru po nakloněné rovině?
- Jakou silou musíme táhnout bednu dolů po nakloněné rovině?
- Co se stane, když necháme bednu bez tahové síly?

### Řešení:

Nejdříve zavedeme soustavu souřadnou s počátkem v těžišti tělesa, osou  $x$  kolmou a osou  $y$  rovnoběžnou s nakloněnou rovinou. Do náčrtku zakreslíme všechny síly působící na těleso (viz obr. 23)



Obr. 23: Náčrt k příkladu 8

V náčrtu nalezneme tři podobné pravoúhlé trojúhelníky s vnitřním úhlem  $\alpha$  (na obr. 23 není z důvodu přehlednosti ve dvou z nich popsán, pouze naznačen obloučkem).



Z definice goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku dostaneme po dosazení z definice  $F_G = m \cdot g$  pro složky  $F_{\parallel}$  a  $F_N$  tíhové síly  $F_G$

$$F_{\parallel} = F_G \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot \sin \alpha = 20 \cdot 10 \cdot \sin 15^\circ = 51,76 \text{ N},$$

$$F_N = F_G \cdot \cos \alpha = m \cdot g \cdot \cos \alpha = 20 \cdot 10 \cdot \cos 15^\circ = 193,19 \text{ N}.$$

Dosazením do rovnice třecí síly smykového tření (15) bude

$$F_t = f \cdot F_N = 0,4 \cdot 193,19 = 77,28 \text{ N}.$$

Toto je maximální možná velikost třecí síly, která bude na těleso působit bez ohledu na řešenou situaci, tj.  $F_t = F_{ta} = F_{tb} = F_{tc}$ .

a) Označíme  $F_a$  hledanou sílu (viz obr. 23) a sestavíme rovnice silové rovnováhy (9)

$$F_x: F_N - F_R = 0,$$

$$F_y: F_a - F_{\parallel} - F_{ta} = 0.$$

Po dosazení jednotlivých sil do druhé z rovnic dostaneme

$$F_a - 51,76 - 77,28 = 0,$$

$$F_a = 129,04 \text{ N}.$$

b) Označíme  $F_b$  hledanou sílu (viz obr. 23) a sestavíme rovnice silové rovnováhy (9)

$$F_x: F_N - F_R = 0,$$

$$F_y: F_{tb} - F_{\parallel} - F_b = 0.$$

Po dosazení jednotlivých sil do druhé z rovnic dostaneme

$$77,28 - 51,76 - F_b = 0,$$

$$F_b = 25,52 \text{ N}.$$

c) Dle obr. 23 sestavíme rovnice silové rovnováhy (9)

$$F_x: F_N - F_R = 0,$$

$$F_y: F_{tc} - F_{\parallel} = 0.$$

Po dosazení do druhé z rovnic zjistíme, že

$$77,28 - 51,76 \neq 0,$$

$$25,53 \text{ N} > 0.$$

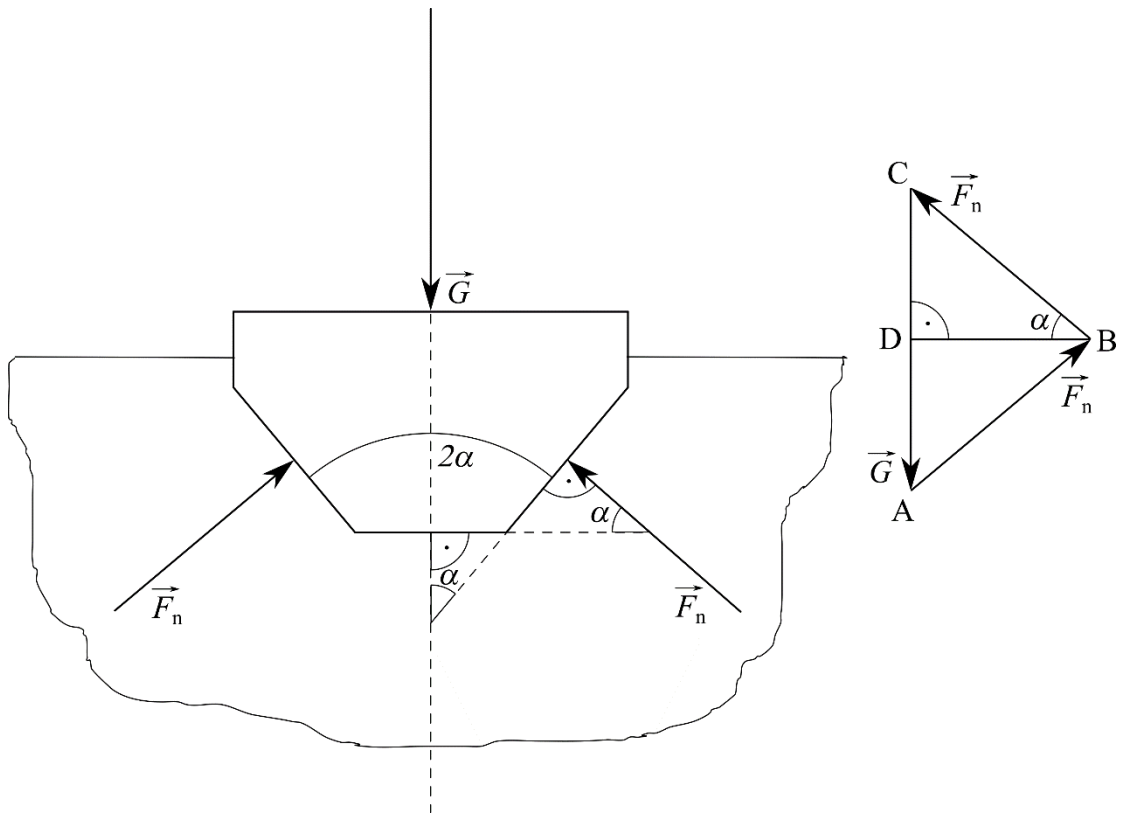
Protože třecí síla převažuje, bedna zůstane stát na svém místě. Sama o sobě totiž pohyb pouze ovlivňuje, ale nezpůsobuje. Uplatní se tedy pouze do výše 51,76 N, aby byla ustavena rovnováha tělesa. Pokud by nerovnost vyšla obráceně (záporná výslednice  $F_y$ ), bedna by se rozjela dolů po nakloněné rovině.

### Příklad 9:

V klínové drážce s vrcholovým úhlem  $80^\circ$  je veden stůl hoblovky s obrobkem o celkové hmotnosti 160 kg. Součinitel smykového tření je 0,1. Jakou silou je zapotřebí působit na stůl, abychom ho posunuli?

### Řešení:

Situaci zachycuje náčrtek na obr. 24. Na stůl působí kromě tíhové síly ještě dvě reakce klínové drážky. Pomocí silového obrazce určíme jejich velikosti. Z podobnosti trojúhelníků plyne, že reakce obou stěn drážky svírají s vodorovnou rovinou úhel  $\alpha$ . Přenesením směrů obou reakcí do silového obrazce dostaneme dva trojúhelníky, ABD a CBD, které jsou shodné dle věty *usu*. Odsud plyne, že i obě reakce stěn klínové drážky budou stejně velké a označíme je proto jednotně  $F_n$ .



Obr. 24: Náčrtek k příkladu 9 a silový obrazec

Ze shodnosti trojúhelníků a definice funkce sinus v pravoúhlém trojúhelníku dostaneme

$$\sin \alpha = \frac{\frac{G}{2}}{F_n}.$$

Odsud po úpravě bude

$$F_n = \frac{\frac{G}{2}}{\sin \alpha} = \frac{G}{2 \cdot \sin \alpha}.$$

Z definice určíme tíhu stolu

$$G = m \cdot g = 160 \cdot 10 = 1600 \text{ N.}$$

Vypočítáme celkovou třecí sílu (ke tření bude docházet na obou stranách klínové drážky)

$$F_t = (F_n + F_n) \cdot f = 2 \cdot F_n \cdot f = 2 \cdot \frac{G}{2 \cdot \sin \alpha} \cdot f = \frac{G \cdot f}{\sin \alpha}.$$

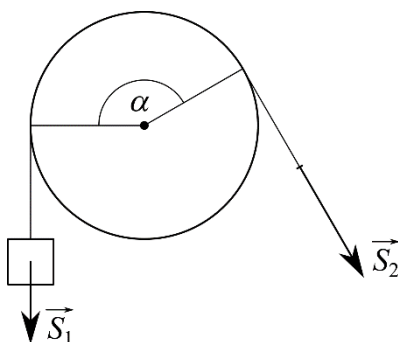
Po dosazení číselných hodnot

$$F_t = \frac{1600 \cdot 0,1}{\sin 40^\circ} = \frac{160}{0,643} = 248,83 \text{ N.}$$

K tomu, abychom uvedli stůl do pohybu, musíme působit minimálně silou, která bude stejně velká jako síla smykového tření, tedy alespoň silou 248,83 N.

## 5.2 Tření vláknové (pásové)

Toto tření vzniká, když se napjaté vlákno, lano, provaz, ocelový pás či řemen pohybuje po nehybné válcové ploše (viz obr. 25).



Obr. 25: Vláknové tření

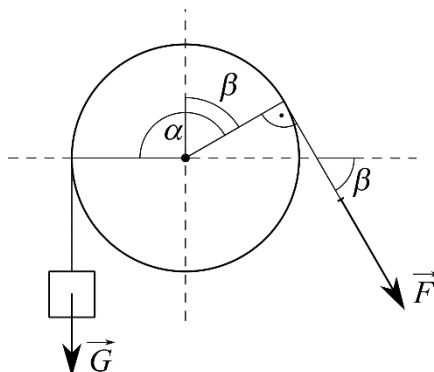
Na té straně, kde lano opouští válcovou plochu, je vždy síla větší. Např. na obr. 25 při zvedání břemene o tíze  $\vec{S}_1$  by touto větší silou byla síla  $\vec{S}_2$ , v případě spouštění břemene by větší silou byla síla  $\vec{S}_1$ . Velikost zvětšení této síly závisí na úhlu opásání  $\alpha$  (středový úhel příslušný kruhovému oblouku uvedený v obloukové míře), na použitém nosném prvku a na drsnosti válcové plochy. Vláknové tření vyjadřuje tzv. Eulerův vztah [5]

$$S_2 = S_1 \cdot e^{f \cdot \alpha}, \quad (16)$$

kde  $e$  je základ přirozeného logaritmu (tzv. Eulerovo číslo) a  $f$  je součinitel smykového tření po povrchu válcové plochy. Hodnoty  $e^{f \cdot \alpha}$  jsou uvedeny např. ve Strojnických tabulkách [12]. Z rovnice je patrné, že odpor tření není závislý na poloměru válcové plochy.

**Příklad 10:**

Jakou silou je potřeba zvedat nádobu se zeminou o hmotnosti 20 kg, pokud je lano vedeno přes kulatinu a druhý konec lana svírá s vodorovnou rovinou úhel  $50^\circ$  (viz obr. 26)? Součinitel smykového tření mezi kulatinou a lanem je 0,23.



Obr. 26: Zadání příkladu 10

**Řešení:**

Nejprve určíme úhel opásání lana, který musíme převést ze stupňů na radiány. Na základě geometrie (viz obr. 26) platí

$$\alpha^\circ = \beta + 90^\circ = 50^\circ + 90^\circ = 140^\circ,$$

$$\alpha = \frac{2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ = \frac{2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot 140^\circ = 2,442 \text{ rad.}$$

Zvedáme nádobu se zeminou o hmotnosti  $m = 20 \text{ kg}$ , čemuž odpovídá tíha

$$G = m \cdot g = 200 \text{ N.}$$

Neznámou sílu pro zvednutí nádoby určíme z rovnice pro vláknové tření (16). Po dosazení sil podle značení v obr. 26 bude

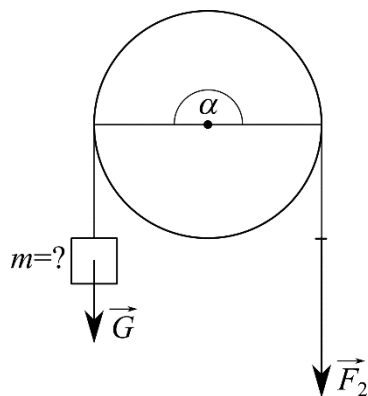
$$F = G \cdot e^{f \cdot \alpha} = 200 \cdot e^{0,23 \cdot 2,442} = 200 \cdot e^{0,56166} = 350,716 \text{ N.}$$

**Příklad 11:**

Lano je napůl přehozeno přes kulatinu. Na jeden konec lana zavěšíme břemeno. Kolikrát těžší (maximálně) může být břemeno než celé lano, aby nesklouzlo dolů? Součinitel smykového tření mezi lanem a kulatinou je 0,5.

**Řešení:**

Budeme předpokládat, že lano je dokonale ohebné, a tudíž při přehození bude úhel opásání  $\alpha = 180^\circ = 3,14 \text{ rad}$ . Lano je přehozeno přesně napůl, a proto na každé straně kulatiny bude působit tíha poloviny lana, tedy  $\frac{G_l}{2}$ . Na levé straně (viz obr. 27) bude navíc působit i tíha břemene  $G$ .



Obr. 27: Nákres k příkladu 11

Celkové síly na obou stranách kulatiny budou

$$F_1 = G + \frac{G_l}{2}, F_2 = \frac{G_l}{2}.$$

Bude se jednat opět o vláknové tření, ale v tomto případě bude mít těleso tendenci se spouštět dolů, tedy na levé straně kulatiny bude síla větší ( $F_1$ ) a na pravé menší ( $F_2$ ).

V porovnání s rovnicí (16), která platí pro rovnováhu, dostaneme

$$F_1 \leq S_2 = S_1 \cdot e^{f \cdot \alpha},$$

kde  $F_2 = S_1$ . Tedy řešíme nerovnici

$$F_1 \leq F_2 \cdot e^{f \cdot \alpha}.$$

Po dosazení za síly  $F_1$  a  $F_2$  bude

$$G + \frac{G_l}{2} < \frac{G_l}{2} \cdot e^{f \cdot \alpha}.$$

Z této nerovnice musíme určit poměr  $\frac{G}{G_l}$ , tedy

$$G < \frac{G_l}{2} \cdot e^{f \cdot \alpha} - \frac{G_l}{2},$$

$$G < \frac{G_l}{2} \cdot (e^{f \cdot \alpha} - 1),$$

$$\frac{G}{G_l} < \frac{1}{2} \cdot (e^{f \cdot \alpha} - 1),$$

$$\frac{G}{G_l} < \frac{1}{2} \cdot (e^{0,5 \cdot 3,14} - 1),$$

$$\frac{G}{G_l} < \frac{1}{2} \cdot (4,807 - 1),$$

$$\frac{G}{G_l} < \frac{1}{2} \cdot 3,807,$$

$$\frac{G}{G_l} < 1,9035.$$

Aby břemeno s lanem nesklouzlo dolů, muselo by být břemeno maximálně 1,9x těžší než lano.

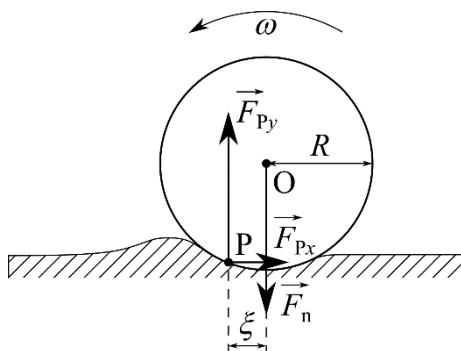
### 5.3 Valivý odpor

Dalším typem pasivního odporu je odpor, který působí na těleso kruhového průřezu při jeho valivém pohybu po pevné podložce. Podle toho nazýváme tento odpor valivým. Při valení tvrdého tělesa po podložce dochází působením normálové tlakové síly ( $F_n$ ) k deformaci podložky. Valivý odpor je za stejných podmínek (stejná hmotnost tělesa, stejný materiál) výrazně menší než smykové tření.

Při valení tělesa po podložce (viz obr. 28) nemá z důvodu její deformace reakce podložky opačný směr oproti normálové síle  $\vec{F}_n$ , která přitlačuje těleso k podložce. Bod dotyku P tělesa a podložky neleží na nositelce této síly. Složka reakce  $\vec{F}_{Py}$  rovnoběžná se silou  $\vec{F}_n$  uvádí do rovnováhy svislý směr, složka  $\vec{F}_{Px}$  kolmá k  $\vec{F}_n$  směřuje proti směru pohybu a způsobuje tak valivý odpor. Velikost síly valivého odporu vypočítáme pomocí rovnice

$$F_v = \xi \cdot \frac{F_n}{R}, \quad (17)$$

kde  $F_v$  je valivý odpor,  $\xi$  tzv. rameno valivého odporu,  $F_n$  normálová tlaková síla a  $R$  je poloměr tělesa. Rameno valivého odporu závisí především na tvrdosti materiálu, z něhož jsou podložka a těleso vyrobeny.



Obr. 28: Valivý odpor

#### Příklad 12:

Dělníci chtějí při stěhování posunout po dřevěné podlaze piano. Kolikrát menší síla bude potřeba k posunutí pianu, pokud ho položí na vozíček s dřevěnými kolečky o průměru 8 cm, než kdyby ho posouvali bez něj? Rameno valivého odporu dřeva po dřevě je 0,0015 a koeficient smykového tření dřeva po dřevě je 0,3. Hmotnost vozíčku je oproti hmotnosti pianu zanedbatelná.

### Řešení:

Předpokládejme, že vozíček má celkem  $k$  stejných dřevěných koleček. Tíha piana  $\vec{G}$  se nějakým způsobem rozloží na  $k$  normálových tlakových sil  $\vec{F}_{ni}$ , kde  $i = 1 \dots k$ , přičemž platí  $\vec{G} = \sum_{i=1}^k \vec{F}_{ni}$ . Schématická situace působení odporu na jedno kolečko je na obr. 28. Síla valivého odporu na  $i$ -té kolečko bude dle rovnice (17)

$$F_{vi} = \xi \cdot \frac{F_{ni}}{R}.$$

Všechny tyto odporové síly budou rovnoběžné a souhlasně orientované, proto velikost celkové síly valivého odporu bude

$$F_v = \sum_{i=1}^k F_{vi} = \sum_{i=1}^k \xi \cdot \frac{F_{ni}}{R} = \frac{\xi}{R} \cdot \sum_{i=1}^k F_{ni} = \xi \cdot \frac{G}{R}.$$

Odsud vyplývá, že celková velikost síly valivého odporu je nezávislá na počtu koleček vozíčku, na kterém je piano položeno, a vychází úplně stejně jako v rovnici (17), tj. jako kdyby měl vozíček pouze jediné kolečko.

Protože se ptáme, kolikrát menší síla bude potřeba, dáme třecí síly smykového a valivého tření do poměru, který označíme  $p$ . Tedy

$$p = \frac{F_t}{F_v}.$$

Dosažením z rovnic (15) a (17) dostaneme po úpravě

$$p = \frac{f \cdot F_n}{\xi \cdot \frac{F_n}{R}} = \frac{f \cdot F_n \cdot R}{\xi \cdot F_n} = \frac{f \cdot R}{\xi} = \frac{f \cdot d}{2 \cdot \xi} = \frac{0,3 \cdot 0,08}{2 \cdot 0,0015} = 8,$$

kde jsme použili rovnosti  $R = \frac{d}{2}$ . Při položení na vozíček tedy bude potřeba 8x menší síla než při posouvání bez vozíčku.

---

### Příklad 13:

K udržení saní o hmotnosti 250 kg v rovnoměrném pohybu po vodorovné zasněžené cestě je potřeba síly 50 N. Jaký náklad dřeva utáhne kůň na těchto saních, je-li jeho tažná síla 750 N? Utáhne kůň stejný náklad i na voze (valníku) o hmotnosti 1200 kg, pokud není nasněženo? Rameno valivého odporu je 0,015 a průměr pneumatik vozu je 90 cm.

### Řešení:

Při rovnoměrném pohybu musí být síly v rovnováze, tzn. tažná síla  $F_T$  musí být rovna třecí síle  $F_t$ , tudíž  $F_T = F_t$ . Síla přitlačující sáně ke sněhu odpovídá tíze prázdných saní, tedy

$$F_n = G = m \cdot g.$$

Z rovnice smykového tření (15) můžeme určit součinitel smykového tření saní po sněhu

$$f = \frac{F_t}{F_n} = \frac{F_T}{m \cdot g}.$$

Při naložení saní dřevem se zvětší normálová tlaková síla o  $F'_n$ , což bude odpovídat tíze samotného nákladu. Aby kůň utáhl plně naložené sáně, musí jeho tažná síla  $F'_T$  být minimálně stejně velká jako síla smykového tření  $F'_t$  naložených saní. S využitím rovnice (15) dostaneme po úpravách

$$F'_T = F'_t = f \cdot (F_n + F'_n) = \frac{F_T}{m \cdot g} \cdot (F_n + F'_n).$$

Po dosazení dostaneme rovnici

$$750 = \frac{50}{250 \cdot 10} \cdot (250 \cdot 10 + F'_n),$$

jejímž řešením je

$$F'_n = 35000 \text{ N}.$$

Z definice tíhy pak dostaneme hledanou hmotnost  $m_1$  nákladu

$$m_1 = \frac{F'_n}{g} = \frac{35000}{10} = 3500 \text{ kg} = 3,5 \text{ t}.$$

Abychom zjistili, zda kůň utáhne stejný náklad i na voze po nezasněžené cestě, musíme vypočítat valivý odpor kol vozu. Jak plyne z řešení příkladu 12, je celková třecí síla valivého tření  $F_v$  nezávislá na počtu kol vozu, určíme ji tedy z rovnice (17), kde normálovou silou  $F''_n$  bude tíha vozu i s nákladem, tedy

$$F''_n = (m_2 + m_1) \cdot g = (1200 + 3500) \cdot 10 = 47000 \text{ N},$$

$$F_v = \xi \cdot \frac{F''_n}{R} = 0,015 \cdot \frac{47000}{0,9} = 783,3 \text{ N}.$$

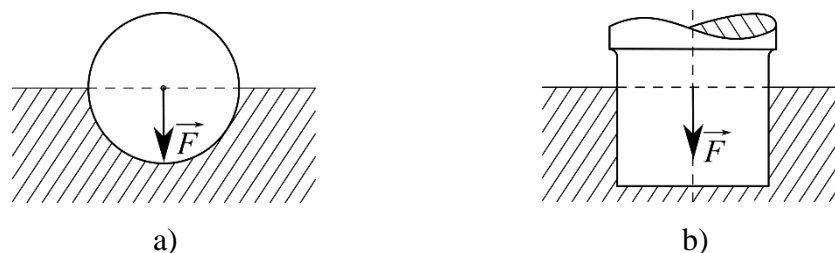
Protože tažná síla koně  $F'_T$  je v tomto případě menší než celková třecí síla  $F_v$ , kůň na valníku stejný náklad po nezasněžené cestě neutáhne.

---

## 5.4 Tření čepové

Pokud potřebujeme v jakémkoli mechanismu otočně spojit jednotlivé členy, provádíme to čepem, který může být uložený v ložisku. Mezi čepem a ložiskem vzniká tření, které působí proti smyslu pohybu – čepové tření. Čepy lze dělit podle způsobu jejich zatížení na čepy radiální, axiální a kombinované [2]. Pokud má zatěžující síla směr kolmý k ose otáčení čepu, hovoříme o radiálním čepu (viz obr. 29 a), pokud působí síla v ose otáčení, hovoříme o axiálním čepu (viz obr. 29 b). U kombinovaného čepu má zatěžující síla jak radiální, tak axiální složku.





Obr. 29: Druhy čepů – a) radiální čep, b) axiální čep

Rozbor sil působících na radiální čep je znázorněn na obr. 30. Při otáčení čepu musíme překonávat moment čepového tření  $\vec{M}_\xi$ . Jedná se o moment silové dvojice, kterou tvoří výslednice vzájemného působení  $\vec{F}_p$  čepu a ložiska a zatížení  $\vec{F}$ . Velikost momentu čepového tření vypočítáme podle rovnice

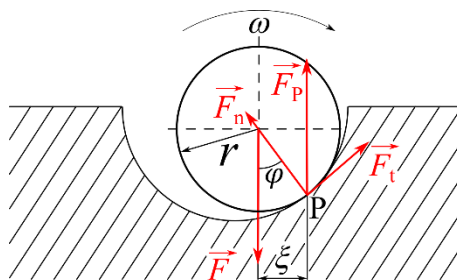
$$M_\xi = F \cdot f_\xi \cdot r, \quad (18)$$

kde  $r$  je poloměr čepu a  $f_\xi = \sin \varphi$  je součinitel čepového tření. Vzdálenost  $\xi$  je rameno silové dvojice. Čepové tření  $F_t$  pak vypočítáme podle rovnice

$$F_t = F \cdot f_\xi. \quad (19)$$

Součinitel čepového tření  $f_\xi$  lze vyjádřit pomocí součinitele smykového tření  $f$  podle následujících rovností [2]:

$$\begin{aligned} \text{nezaběhané čepy:} \quad f_\xi &= \frac{\pi}{2} \cdot f \doteq 1,57 \cdot f, \\ \text{zaběhané čepy:} \quad f_\xi &= \frac{4}{\pi} \cdot f \doteq 1,27 \cdot f. \end{aligned} \quad (20)$$



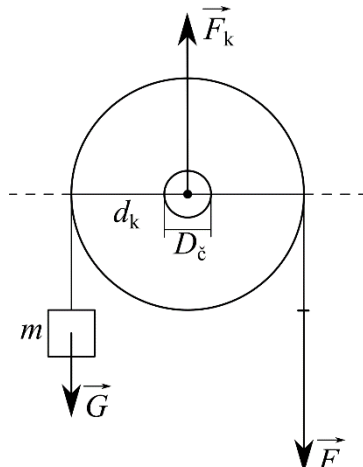
Obr. 30: Čepové tření

#### Příklad 14:

Jakou silou zvedá zedník rovnoměrným pohybem nádobu s maltou o hmotnosti 40 kg pomocí kladky o průměru 20 cm se zaběhaným čepem o průměru 2 cm? Součinitel smykového tření čepu v ložisku je 0,1. Porovnejte potřebnou sílu ke zvednutí nádoby s maltou, pokud se místo kladky použije kulatina o stejném průměru. Součinitel smykového tření mezi konopným lanem a dřevem je 0,5 (viz např. [2], str. 177).

### Řešení:

Zavedeme značení jednotlivých veličin dle obr. 31.



Obr. 31: Nákres k příkladu 14

Vyjdeme z podmínek silové (9) a momentové rovnováhy (10), tj.

$$F_k = F + G,$$

$$M_F = M_G + M_{\check{c}}.$$

Vyjádríme momenty obou sil z rovnice (6) a moment čepového tření z rovnice (18). Po dosazení dostaneme

$$F \cdot r_k = G \cdot r_k + F_t \cdot R_{\check{c}}.$$

Po dosazení z rovnice čepového tření (19) a ze silové rovnováhy

$$F \cdot r_k = G \cdot r_k + f_{\check{c}} \cdot (F + G) \cdot R_{\check{c}}.$$

Po úpravách dostaneme pro hledanou sílu vztah

$$F = G \cdot \frac{(r_k + f_{\check{c}} \cdot R_{\check{c}})}{(r_k - f_{\check{c}} \cdot R_{\check{c}})}$$

a s využitím vztahů  $r_k = \frac{d_k}{2}$  a  $R_{\check{c}} = \frac{D_{\check{c}}}{2}$

$$F = G \cdot \frac{(d_k + f_{\check{c}} \cdot D_{\check{c}})}{(d_k - f_{\check{c}} \cdot D_{\check{c}})}.$$

Použijeme-li vztah pro zaběhaný čep (20) a vztah  $G = m \cdot g$ , bude

$$F = m \cdot g \cdot \frac{(d_k + 1,27 \cdot f \cdot D_{\check{c}})}{(d_k - 1,27 \cdot f \cdot D_{\check{c}})}.$$

Po dosazení

$$F = 40 \cdot 10 \cdot \frac{(20 + 1,27 \cdot 0,1 \cdot 2)}{(20 - 1,27 \cdot 0,1 \cdot 2)} = 400 \cdot \frac{20,254}{19,746} = 400 \cdot 1,0257 = 410,28 \text{ N}.$$

Nyní určíme sílu potřebnou pro zvednutí nádoby s maltou pomocí kulatiny. Vycházet budeme ze stejné situace, ale kladku s čepem nahradíme kulatinou. V takovém případě

bude posunu lana po kulatině bránit vláknové tření. Abychom mohli užít rovnice (16), musíme určit úhel opásání, který bude

$$\alpha = \frac{2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ = \frac{2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot 180^\circ = 3,14 \text{ rad.}$$

Podle rovnice (16) v souladu s obr. 31 dostaneme

$$F = G \cdot e^{f \cdot \alpha} = m \cdot g \cdot e^{f \cdot \alpha}.$$

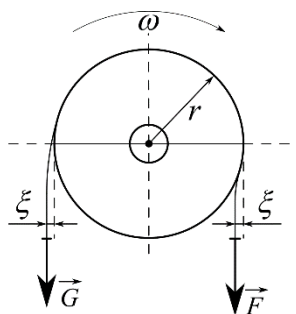
kde  $f$  je součinitel smykového tření mezi kulatinou a lanem. Po dosazení

$$F = 40 \cdot 10 \cdot e^{0,5 \cdot 3,14} = 400 \cdot e^{1,57} = 400 \cdot 4,807 = 1922,8 \text{ N.}$$

Porovnáme-li obě vypočtené síly, zjistíme, že při použití kladky bude síla potřebná k vytažení nádoby s maltou více než 4,5x menší než při použití hrubé dřevěné kulatiny. Navíc by zedník nebyl schopen zvednout tuto nádobu jen silou svých svalů, protože jeho hmotnost by musela dosahovat téměř 200 kg, aby mohl pro vytažení použít veškerou svou tíhu. Při použití hlazené dřevěné kulatiny ( $f=0,33$ ) je zapotřebí zhruba síly 1127 N, což už by bylo reálně uskutečnitelné v případě velmi statného zedníka.

## 5.5 Tuhost (neohebnost) lana

Při navíjení lana na kotouč je potřeba překonat vzájemné tření vláken lana při jeho změně tvaru. Je tedy zapotřebí vynaložit sílu potřebnou k jeho deformaci. Tuto vlastnost lana nazýváme tuhost (neohebnost) lana [2]. Při navíjení se to projevuje tak, že navíjené lano dosedá na kotouč o něco později, než odpovídá dokonale ohebnému vláknům (viz kapitola 6), a tím se zvětší rameno síly břemene o délku  $\xi$ . Při odvíjení lana se naopak rameno síly o délku  $\xi$  zmenšuje (viz obr. 32). Veličina  $\xi$  se nazývá součinitel tuhosti lana.



Obr. 32: Tuhost (neohebnost) lana

Podle momentové podmínky rovnováhy (10) vzhledem k ose kotouče platí

$$F \cdot (r - \xi) = M_F = M_G = G \cdot (r + \xi), \quad (21)$$

kde  $M_F$  je akční moment (moment tahové síly  $\vec{F}$ ),  $M_G$  je reakční moment (moment tíhy břemene  $\vec{G}$ ),  $r$  je poloměr kotouče a  $\xi$  je součinitel tuhosti lana. Součinitel se určuje na základě empiricky zjištěných koeficientů a je závislý na materiálu a tloušťce lana a na poměru tloušťky lana a poloměru kladky. Lze využít následující vzorce, na jejichž základě po dosazení rozměrů v cm a tíhy v N, vyjde součinitel tuhosti lana  $\xi$  v cm:

$$\text{ocelová lana: } \xi = \left(0,027 + \frac{r}{G}\right) \cdot d^2, \quad (22)$$

kde  $r$  je poloměr kladky,  $d$  je průměr ocelového lana a  $G$  je tíha tělesa,

$$\begin{aligned} \text{konopná lana: } \xi &= 0,09 \cdot d^2 - \text{nová konopná lana,} \\ \xi &= 0,04 \cdot d^2 - \text{starší konopná lana,} \end{aligned} \quad (23)$$

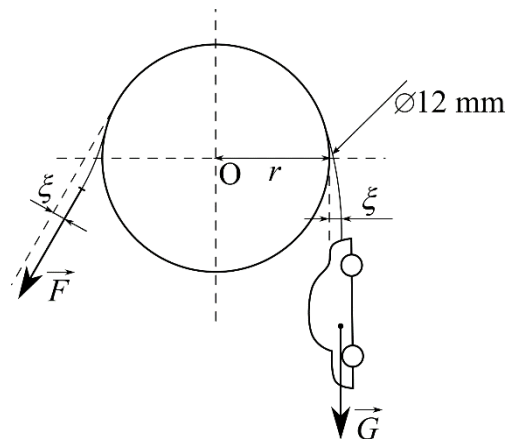
kde  $d$  je průměr konopného lana.

### Příklad 15:

Z rokle je potřeba vytáhnout vrak auta o hmotnosti 1400 kg. Použijeme k tomu naviják s ocelovým lanem o průměru 12 mm vedeným přes kladku o poloměru 6 cm. Jakou minimální silou musí tahat naviják?

### Řešení:

Schématický náčrt situace je na obr. 33.



Obr. 33: Náčrt k příkladu 15

Nejdříve určíme tuhost ocelového lana. Podle vztahu (22) s využitím výpočtu tíhy automobilu ze vztahu  $G = m \cdot g = 14000$  N dostaneme

$$\xi = \left(0,027 + \frac{6}{14000}\right) \cdot 1,2^2 = 0,02743 \cdot 1,44 = 0,0395 \text{ cm.}$$

Při výpočtu potřebné síly budeme vycházet z momentové rovnováhy s uvažováním tuhosti lana (21). Po dosazení poloměru kladky a vypočteného součinitele tuhosti ocelového lana dostaneme rovnici

$$F \cdot (6 - 0,0395) = 14000 \cdot (6 + 0,0395).$$

Její řešení bude hledaná síla  $F$

$$F = 14185,5 \text{ N.}$$

Naviják tedy musí tahat o něco větší silou, než odpovídá tíze automobilu.

---

## 6. KLADKY A KLADKOSTROJE

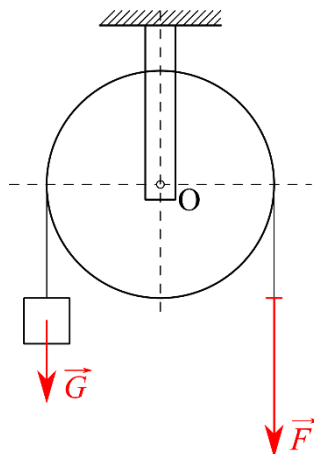
Kladku můžeme definovat jako volně otočné kolo na hřídeli, které má na svém obvodu drážku. Touto drážkou obvykle vede lano nebo řetěz, ale také např. pásy, struny, dráty, které se na jedné straně navíjí a na druhé straně odvíjí. Drážka na obvodu kladky je vytvarována podle průřezu vedeného materiálu. Hlavní funkcí kladky je změna směru tahové síly. Kladka je uložena tak, aby bezpečně přenášela výslednici tahových sil vedeného materiálu [6, 13] Existují různé druhy kladek, kladka pevná, kladka volná nebo kladkostroj.

### 6.1 Pevná kladka

Pevná kladka má rotační osu uloženou pevně v konstrukci zabraňující jejímu posunu, ale umožňující rotaci kolem ní (viz obr. 34). Zanedbáme-li pasivní odpory (čepové tření, neohebnost lana) můžeme z momentové podmínky rovnováhy (10) vyjádřit rovnici

$$F = G. \quad (24)$$

Tato rovnice dokazuje výše zmíněné tvrzení o změně směru tahové síly. Výhoda směru působení této síly svisle dolů je v tom, že člověk může efektivně využívat své tíhy na úkor síly svých svalů.



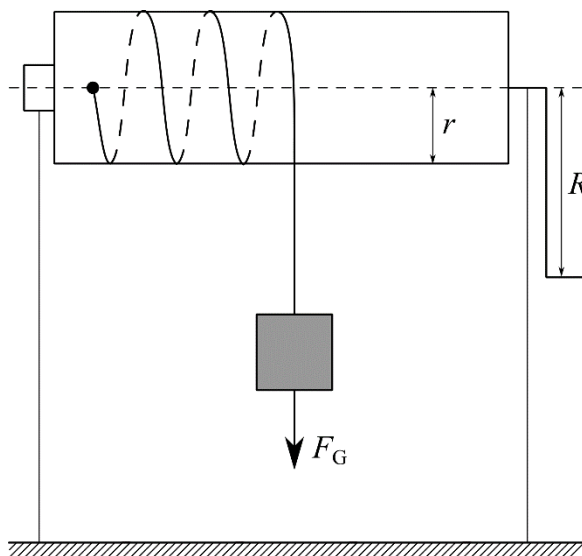
Obr. 34: Kladka pevná

#### Příklad 16:

Rumpál má poloměr navíjecího válce 8 cm. Délka kliky je 40 cm. Jakou silou budeme zvedat při rovnoměrném pohybu těleso, které má hmotnost 100 kg? Vliv čepového tření a neohebnosti lana zanedbejte.

### Řešení:

Schématický náčrt situace je na obr. 35. Navíjecí válec rumpálu můžeme považovat za pevnou kladku, na kterou se navíjí vlákno při otáčení. Klika rumpálu pevně spojená s válcem umožňuje silové působení ve větší vzdálenosti od osy rotace, čímž můžeme k dosažení stejného momentu použít menší síly. S válcem tedy bude otáčet jedním směrem tíha tělesa  $G = F_G$ , rameno této síly bude rovno poloměru válce  $r$ . Druhým směrem bude otáčet hledaná síla  $F$ , jejíž rameno bude rovno délce kliky rumpálu  $R$ .



Obr. 35: Náčrt k příkladu 16

Pro rovnovážnou polohu (kola na hřídeli) platí rovnost momentů působících sil, tedy

$$F_G \cdot r = F \cdot R.$$

Po dosazení  $F_G = m \cdot g$  dostaneme rovnici

$$100 \cdot 10 \cdot 0,08 = F \cdot 0,4,$$

jejímž řešením je

$$F = 200 \text{ N.}$$

---

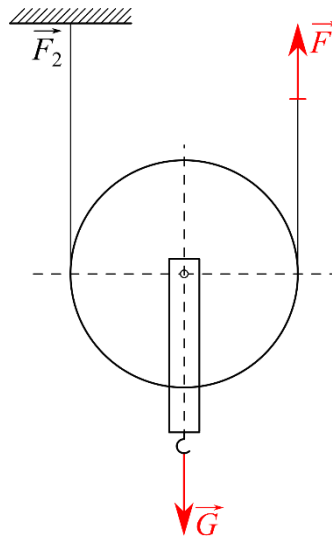
## 6.2 Volná kladka

Volná kladka má osu uloženou ve volném prvku, kterému říkáme kladnice (viz obr. 36). Kladka se vůči konstrukci pohybuje. Na kladnici bývá upevněno závěsné zařízení (např. hák). Volná kladka pracuje jako jednozvrtná páka, jejíž ramena mají velikost  $r$  (rameno tíhy  $\vec{G}$ ) a  $2r$  (rameno působící tahové síly  $\vec{F}_1$ ). Zanedbáme-li opět čepové tření a neohebnost lana, můžeme z podmínky silové rovnováhy (9)

a momentové rovnováhy (10) odvodit základní rovnice popisující vztahy mezi silami působícími na volné kladce

$$F_1 = F_2 = F = \frac{G}{2}. \quad (25)$$

Z uvedené rovnice (25) vyplývá, že volná kladka umožňuje zvedat tělesa poloviční silou, než je tíha tělesa, které jsme na ní zavěsili. Celková práce, kterou musíme vykonat při zvednutí tělesa do požadované výšky, je při zanedbání pasivních odporů stejná jako v případě kladky pevné. Poloviční silové působení je totiž kompenzováno dvojnásobným posunutím konce lana, na které tahová síla působí. Volná kladka má velké využití v kladkostrojích (viz kapitola 6.3).

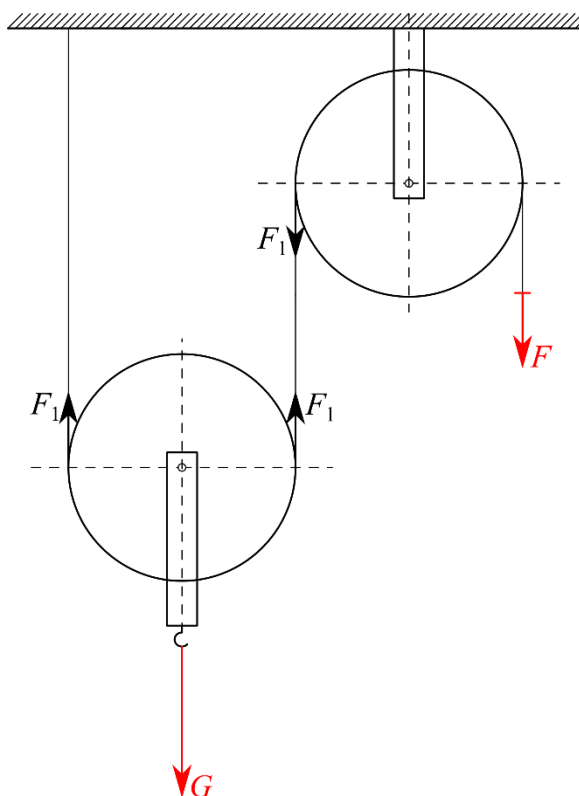


Obr. 36: Kladka volná

### 6.3 Kladkostroj

Nejjednodušší kladkostroj je kombinací jedné pevné a jedné volné kladky (viz obr. 37). Složitější kladkostroj může tvořit i několik kladek (viz např. obr. 40 u příkladu 19). Klady mohou být uloženy nad sebou ve společném třmenu nebo vedle sebe na společné ose. Zařazení volných kladek do kladkostroje umožňuje zmenšit tahovou sílu potřebnou ke zvednutí břemene. Pevné klady v kladkostroji slouží ke změně směru působení tahové síly. Při řešení kladkostroje se pro jednotlivé klady uplatňují rovnice (24) a (25), popř. obecnější silová (9) a momentová rovnováha (10) každé kladky. Např. dle obr. 37 platí po odvození  $F = F_1 = \frac{G}{2}$ .





Obr. 37: Kladkostroj

**Příklad 17:**

Jakou největší hmotnost tělesa udrží člověk o hmotnosti 85 kg v rovnovážné poloze při použití jednoduchého kladkostroje složeného z jedné kladky pevné a jedné kladky volné (viz obr. 38)? Hmotnosti kladek, klidové tření či jiné pasivní odpory zanedbejte.

**Řešení:**

Označíme  $F_2$  sílu, kterou bude působit člověk na volný konec lana kladkostroje. Je zřejmé, že tato síla bude maximálně rovna jeho tíze  $G_2 = m_2 \cdot g$ . Využitím rovnice (24) bude na pravé straně pevné kladky, a tedy i na levé straně volné kladky působit stejně velká síla  $F_2$ . Po dosazení do rovnice (25) musí platit

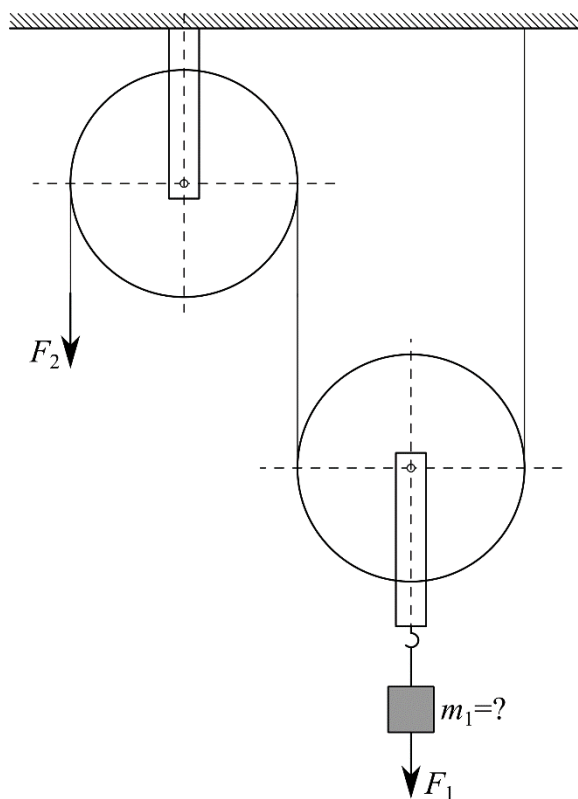
$$F_2 = \frac{F_1}{2},$$

odkud pro tíhu břemene platí

$$G_1 = m_1 \cdot g = F_1 = 2 \cdot F_2 = 2 \cdot m_2 \cdot g.$$

Vyjádříme hledanou hmotnost a dosazením dostaneme

$$m_1 = 2 \cdot m_2 = 170 \text{ kg}.$$

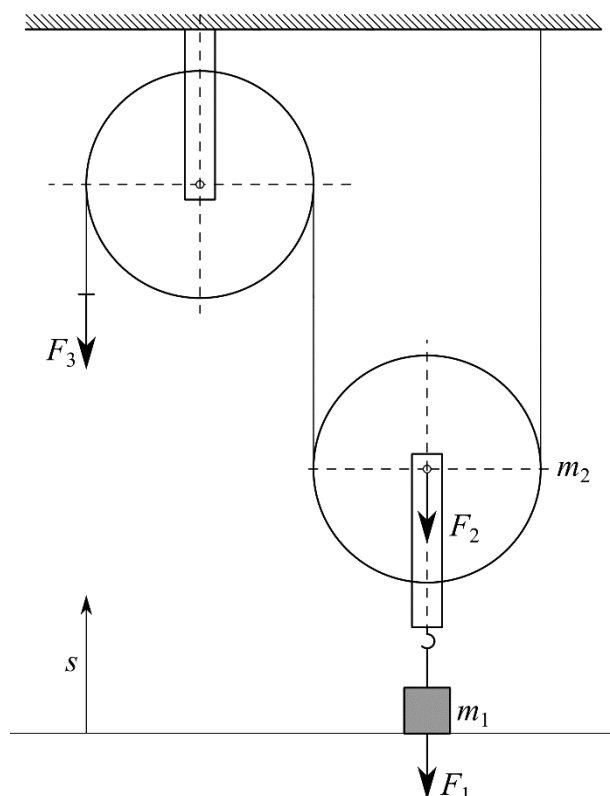


Obr. 38: Zadání příkladu 17

---

**Příklad 18:**

Člověk zvedá těleso o hmotnosti 70 kg rovnoměrným pohybem po svislé dráze, která má délku 6 m. Ke zvedání použije kladkostroj složený z kladky volné a kladky pevné (viz obr. 39). Hmotnost volné kladky je 6 kg. Jakou silou musí člověk působit, aby těleso zvedl? Jakou práci při tom vykoná? Pasivní odpory zanedbejte.

**Řešení:**

Obr. 39: Zadání příkladu 18

Nejdříve je potřeba určit celkovou tíhu zvedaného břemene, která je tvořena vlastní tíhou volné kladky  $F_2 = m_2 \cdot g$  a tíhou zvedaného tělesa  $F_1 = m_1 \cdot g$ . Tedy

$$G = F_1 + F_2 = (m_1 + m_2) \cdot g.$$

S využitím rovnic (24) pro pevnou kladku a (25) pro volnou kladku dostaneme

$$F_3 = \frac{G}{2} = \frac{F_2 + F_1}{2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot g}{2} = \frac{(70 + 6) \cdot 10}{2} = 380 \text{ N}.$$

Abychom zvedli těleso do výšky  $s = 6$  m, musíme silou  $F_3$  posunout konec lana o dvojnásobnou vzdálenost, tedy  $2s$ . Vykonáme tedy práci

$$W = F_3 \cdot 2s = 380 \cdot 2 \cdot 6 = 4560 \text{ J}.$$

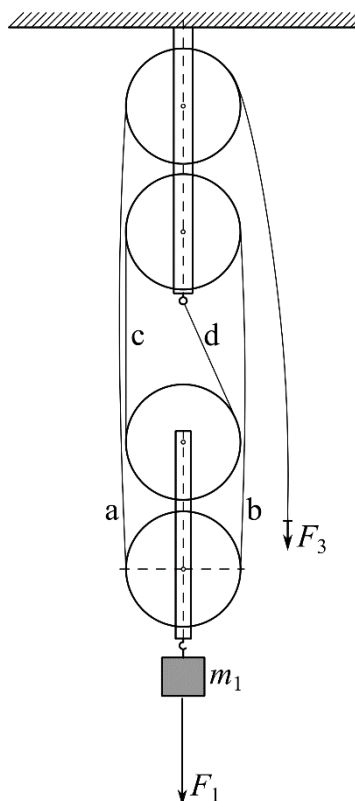
Stejnou práci bychom vykonali i při použití pouze pevné kladky, protože

$$W' = F \cdot s = G \cdot s = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot s = (70 + 6) \cdot 10 \cdot 6 = 4560 \text{ J}.$$

**Příklad 19:**

Jakou silou musíme působit, abychom zvedli těleso o hmotnosti 600 kg rovnoměrným pohybem pomocí kladkostroje složeného ze dvou kladek pevných a ze dvou kladek volných (viz obr. 40)? Hmotnost kladek a tření zanedbejte.

### Řešení:



Obr. 40: Zadání příkladu 19

Společná kladnice obou volných kladek je s oběma kladkami zavěšena celkem na čtyřech vláknech (na obr. 40 označeny a, b, c, d), po dvou na každé z kladek. Ze silové (9) a momentové rovnováhy (10) obou volných kladek a spodní pevné kladky plyne, že tahová síla  $F_2$  všech čtyř vláken je stejná. Z rovnováhy sil pro celou kladnici s kladkami tak platí

$$F_2 = \frac{F_1}{4}.$$

Využijeme-li rovnice (24) pro vrchní pevnou kladku a definice tíhy  $F_1 = m_1 \cdot g$  tělesa, dostaneme

$$F_3 = F_2 = \frac{F_1}{4} = \frac{m_1 \cdot g}{4} = \frac{600 \cdot 10}{4} = 1500 \text{ N}.$$

---

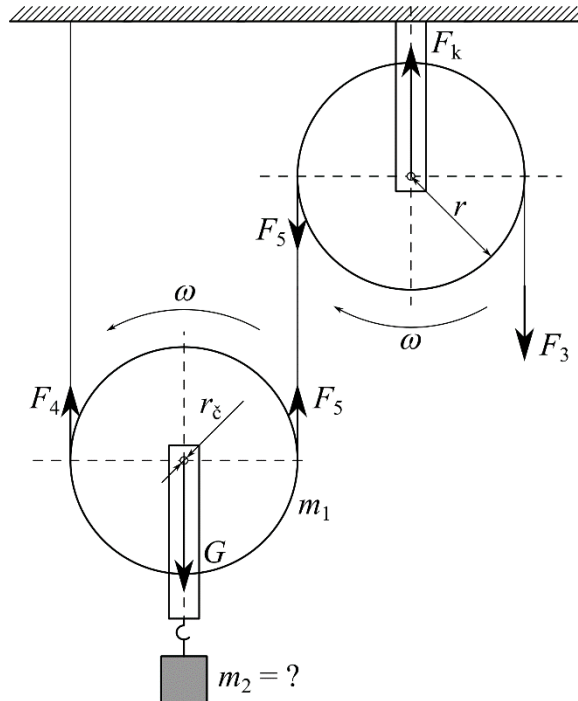
### Příklad 20:

Na kladkostroji složeném z pevné a volné kladky (viz obr. 41) visí těleso. Hmotnost volné kladky včetně kladnice je 3 kg, průměr obou kladek je 10 cm, průměr zaběhaných čepů obou kladek je 2 cm, součinitel smykového tření čepu a ložisek kladky je 0,1.

a) Jakou hmotnost tělesa je možno zvednout silou 270 N?

- b) Jaká by byla vypočtená hmotnost, pokud bychom čepy obou kladek nahradili novými, nezaběhanými?
- c) Jaké chyby bychom se dopustili, kdybychom neuvažovali čepové tření?

**Řešení:**



Obr. 41: Nákres k příkladu 20

a) Označíme síly působící na obě kladky – viz obr. 41. Pokud budeme těleso zvedat, bude docházet k rotaci kladek v naznačených směrech a proti tomuto pohybu bude působit moment čepového tření. Sestavíme rovnice silové (9) a momentové rovnováhy (10) pro obě kladky.

Pevná kladka:  $F_k = F_3 + F_5,$   
 $F_3 \cdot r = F_5 \cdot r + f_{\check{c}} \cdot r_{\check{c}} \cdot F_k.$

Volná kladka:  $F_4 + F_5 = G,$   
 $F_5 \cdot r = F_4 \cdot r + f_{\check{c}} \cdot r_{\check{c}} \cdot G,$

kde jsme pro moment čepového tření využili rovnici (18). Tíha  $G$  zvedaného břemene musí být součtem tíhy  $F_2$  samotného tělesa a tíhy  $F_1$  volné kladky, tedy

$$G = F_1 + F_2.$$

Tím dostaneme uzavřenou soustavu rovnic s pěti neznámými, ze které určíme sílu  $F_2$  působící na samotné těleso. Po matematických úpravách dostaneme

$$F_2 = 2 \cdot F_3 \cdot \frac{1 - f_{\check{c}} \cdot \frac{r_{\check{c}}}{r}}{\left(1 + f_{\check{c}} \cdot \frac{r_{\check{c}}}{r}\right)^2} - F_1.$$

Po dosazení z definice tíhy těles  $F_1 = m_1 \cdot g$  a  $F_2 = m_2 \cdot g$  bude hledaná hmotnost

$$m_2 = 2 \cdot \frac{F_3}{g} \cdot \frac{1 - f_{\xi} \cdot \frac{d_{\xi}}{d}}{\left(1 + f_{\xi} \cdot \frac{d_{\xi}}{d}\right)^2} - m_1,$$

kde jsme využili vztahů  $d = \frac{r}{2}$  a  $d_{\xi} = \frac{r_{\xi}}{2}$ .

Součinitel čepového tření určíme z rovnice (20). V případě zaběhaných čepů pak dostaneme

$$m_2 = 2 \cdot \frac{F_3}{g} \cdot \frac{1 - 1,27 \cdot f \cdot \frac{d_{\xi}}{d}}{\left(1 + 1,27 \cdot f \cdot \frac{d_{\xi}}{d}\right)^2} - m_1.$$

Po dosazení

$$m_2 = 2 \cdot \frac{270}{10} \cdot \frac{1 - 1,27 \cdot 0,1 \cdot \frac{2}{10}}{\left(1 + 1,27 \cdot 0,1 \cdot \frac{2}{10}\right)^2} - 3 = 54 \cdot \frac{0,9746}{1,051445} - 3 = 47,05 \text{ kg.}$$

Tedy silou 270 N budeme zvedat těleso o hmotnosti 47,05 kg.

b) V případě výměny čepů dospějeme analogickým postupem k podobnému výsledku, avšak dosadíme součinitele čepového tření pro nové nezaběhané čepy z rovnice (20), tj.

$$m_2 = 2 \cdot \frac{F_3}{g} \cdot \frac{1 - 1,57 \cdot f \cdot \frac{d_{\xi}}{d}}{\left(1 + 1,57 \cdot f \cdot \frac{d_{\xi}}{d}\right)^2} - m_1.$$

Po dosazení bude hledaná hmotnost

$$m_2 = 2 \cdot \frac{270}{10} \cdot \frac{1 - 1,57 \cdot 0,1 \cdot \frac{2}{10}}{\left(1 + 1,57 \cdot 0,1 \cdot \frac{2}{10}\right)^2} - 3 = 54 \cdot \frac{0,9686}{1,06379} - 3 = 46,17 \text{ kg.}$$

V případě zanedbání čepového tření využijeme pouze rovnic rovnováhy pevné kladky (24) a volné kladky (25) a definic tíhy  $F_1 = m_1 \cdot g$  a  $F_2 = m_2 \cdot g$ , tedy po úpravách

$$m_2 = 2 \cdot \frac{F_3}{g} - m_1 = 2 \cdot \frac{270}{10} - 3 = 51 \text{ kg.}$$

Ke stejnému výsledku bychom dospěli, kdybychom v předchozích výsledcích dosadili koeficient smykového tření ve složeném zlomku jako nulový.

c) Porovnáme-li výsledky se třením a bez tření, zjistíme že zanedbáním tření bychom dostali výsledek o zhruba 8,4 % vyšší oproti výsledku se třením zaběhaných čepů a dokonce o 10,5 % vyšší oproti výsledku se třením nezaběhaných čepů.

## 7. ZÁVĚR

V předložené bakalářské práci jsem navázala na mou předchozí práci s názvem Sbirka řešených příkladů ze statiky, kterou jsem psala v rámci bakalářského studia na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích (PF JU), obor Základy výrobní techniky se zaměřením na vzdělávání.

V práci jsou zahrnuta následující témata: prutové soustavy, těžiště, pasivní odpory (tření), kladky a kladkostroje. Stručně shrnuté teoretické poznatky obsažené v této práci jsou vždy doplněny o příklady obsahující názorné obrázky usnadňující pochopení celé situace či přímo využitě ke grafickému řešení příkladu. U všech příkladů je uvedeno podrobnější komentované řešení, především početní, u některých z nich i grafické. Pro lepší přehlednost jsou příklady řazeny přímo v kapitolách, kam tematicky spadají. Ve velké míře tak odpadá nutnost dohledávat v jiných částech práce příslušnou teorii, která je potřebná k řešení daného příkladu.

V práci jsem ke každému tématu uvedla několik příkladů, přičemž jsem se inspirovala různými sbírkami, popř. jsem si je vymyslela, ale vždy jsem se snažila, aby byly spojeny s realitou. Účelem práce rozhodně nebylo uvádět příklady s vysokou náročností, a to jak z pohledu fyzikálně-technického, tak i matematického, ale naopak bylo potřeba nalézt vhodné příklady pro aplikaci uvedené problematiky, které by jednoduše ilustrovaly prezentovanou teorii i příslušné postupy řešení. Určitě by se daly nalézt náročnější příklady na aplikaci daných témat, ale ty by byly jen kombinací prezentovaných jednoduchých postupů a nepřinášely by tak nový pohled na danou problematiku, pouze by zvyšovaly nároky na matematické znalosti uživatele.

Případný řešitel příkladů z technické mechaniky musí mít specifické znalosti a dovednosti. Musí mít alespoň základní vědomosti z matematiky a fyziky, znát příslušné pojmy a postupy, umět užívat základní matematické operace, mít znalosti z geometrie, goniometrických funkcí či vektorové algebry. Důležité je také mít dostatek logického myšlení a v případě některých příkladů i dostatečnou prostorovou představivost nutnou pro čtení grafických řešení a orientaci v nich. Uživatel musí být také schopen rozebrat zadání z fyzikálně-technického pohledu a sestavit si základní rovnice potřebné k vyřešení příkladu, v čemž mu právě může pomoci komentované řešení příkladů. Předpokládá se však, že uživatel zná základní pojmy a postupy týkající se technické mechaniky, jako je např. řešení silové a momentové rovnováhy, určení

výslednice obecné rovinné soustavy sil apod., což není součástí předložené práce a čtenář se s nimi musí předem seznámit jinde.

Cílem práce bylo vytvořit pokračování Sbírký řešených příkladů ze statiky tak, aby obě práce společně postihovaly celý rozsah předmětu Technická mechanika I – Statika vyučovaného na PF JU. Myslím si, že tento cíl se mi podařilo v rozumné míře splnit a předchozí práci doplnit o chybějící témata a ilustrativní příklady k nim. Všechny obrázky, nákresy k zadání a grafická řešení jsem kreslila ve volně stažitelném softwaru Inkscape. U některých příkladů obsahují obrázky i měřítko, podle kterého si lze ověřit shodnost početního a grafického řešení.

Doufám, že i tato práce bude přínosem pro vyučující na středních odborných školách technického zaměření nebo na vysokých školách, kde se vyučují technické obory. Rovněž práci mohou využít studenti těchto oborů a škol při samostudiu a přípravě na zkoušky.



## SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] ŠIMANOVÁ, Petra. *Sbírka řešených příkladů ze statiky*. České Budějovice, 2021. Bakalářská práce. Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- [2] HAŠEK, Otakar. *Technická mechanika pro elektrotechnické obory I: Mechanika tuhých těles*. 2. vyd. Praha: SNTL, 1965.
- [3] ŠEBEK, Radek. *Mechanika: Statika*. [Http://mech.fd.cvut.cz/](http://mech.fd.cvut.cz/) [online]. Praha, 2012 [cit. 2022-02-13]. Dostupné z:  
[http://mech.fd.cvut.cz/members/falta/18sat/Mechanika\\_statika\\_Sebek%20Radek.pdf](http://mech.fd.cvut.cz/members/falta/18sat/Mechanika_statika_Sebek%20Radek.pdf)
- [4] VIMMR, Jan. *Materiály ke 12. přednášce z předmětu KME/MECHB* [online]. Plzeň [cit. 2022-02-13]. Dostupné z:  
[https://www.kme.zcu.cz/kmet/mechb/download/MECHB\\_p12\\_Prutove\\_soustavy\\_s\\_tycnikova\\_metoda.pdf](https://www.kme.zcu.cz/kmet/mechb/download/MECHB_p12_Prutove_soustavy_s_tycnikova_metoda.pdf)
- [5] JULIŠ, Karel, Otakar TEPŘÍK a Adolf SLAVÍK. *Statika*. Praha: SNTL, 1987.
- [6] SALABA, Stanislav a Antonín MATĚNA. *Mechanika I – Statika pro SPŠ strojnické*. Praha: SNTL, 1977.
- [7] Těžiště. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-02-13]. Dostupné z:  
<https://cs.wikipedia.org/wiki/Těžiště>
- [8] REICHL, Jaroslav. *Těžiště tělesa* [online]. [cit. 2022-02-13]. Dostupné z:  
<http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/101-teziste-telesa>
- [9] TŘETINA, Jaromír. *Úvod do mechaniky* [online]. Vsetín, 2014 [cit. 2022-02-13]. Dostupné z: <https://docplayer.cz/69347258-Projekt-remeslo-tradice-a-budoucnost-cislo-projektu-cz-1-07-1-1-38-predmet-technicka-mechanika.html>
- [10] PODEŠVA, Jiří. *Základy mechaniky - otázky. Základy mechaniky* [online]. Ostrava, 2008 [cit. 2022-02-13]. Dostupné z:  
[http://www.elearn.vsb.cz/archivcd/FS/ZMech/CD\\_Zaklady\\_mechaniky/testy/res\\_6\\_1.htm](http://www.elearn.vsb.cz/archivcd/FS/ZMech/CD_Zaklady_mechaniky/testy/res_6_1.htm)
- [11] Tření. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-02-13]. Dostupné z:  
<https://cs.wikipedia.org/wiki/Tření>

- [12] LEINVEBER, Jan, Jaroslav ŘASA a Pavel VÁVRA. *Strojnické tabulky*. 3., dopl. vyd., Praha: Scientia, 1999. ISBN 80-7183-164-6.
- [13] Kladka. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-02-13]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Kladka>