

Ekonomická
fakulta
Faculty
of Economics

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Ekonomická fakulta
Katedra aplikované matematiky a informatiky

Bakalářská práce

Numerické metody v ekonomické praxi

Vypracoval: Pavel Hrnčír
Vedoucí práce: Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

České Budějovice 2024

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

Ekonomická fakulta

Akademický rok: 2022/2023

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: Pavel HRNČÍŘ
Osobní číslo: E21132
Studijní program: B0688A140010 Podniková informatika
Téma práce: Numerické metody v ekonomické praxi
Zadávající katedra: ***Katedra aplikované matematiky a informatiky

Zásady pro vypracování

Bakalářská práce bude obsahovat zpracování ekonomických jevů, ukazatelů a veličin pomocí numerických metod. Student v teoretické části popíše podstatu interpolace a definuje různé typy interpolačních polynomů (Newtonův interpolační polynom, Lagrangeův interpolační polynom) a dalších interpolačních metod (regrese, splajny). Dále pak vybere vhodnou ekonomickou veličinu (příp. veličiny), které v průběhu času mění svou hodnotu. Pomocí vybraných interpolací experimentálně ověří, že na základě předchozích známých hodnot veličiny lze predikovat její hodnotu v čase budoucím. Navrhne vhodnou strategii, pomocí níž provede praktický odhad této veličiny pro nejbližší období (měsíce, roky...). K tomu účelu vhodným způsobem použije dostupný software (se kterým se student seznámí v teoretické části práce) a porovná objektivitu a vhodnost jednotlivých interpolačních postupů. Případně student zkusí samostatně naprogramovat aplikaci k výpočtu interpolačních polynomů ze zadáných dat.

Metodický postup:

1. Seznámení se základy numerických metod a používanými početními algoritmy.
2. Seznámení s podstatou interpolace a regrese.
3. Vyhledání matematicko-ekonomických problémů vhodných pro numerická řešení.
4. Popis vybraných problémů a zvolených metod řešení, včetně použití matematického software.
5. Srovnání výsledků v ekonomických souvislostech, diskuse a formulace závěrů.

Rozsah pracovní zprávy: 40 – 50 stran
Rozsah grafických prací: dle potřeby
Forma zpracování bakalářské práce: tištěná

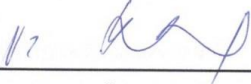
Seznam doporučené literatury:

1. Baaquie, B.E. (2020). *Mathematical methods and quantum mathematics for economics and finance*. Singapore: Springer Verlag.
2. Beu, T. A. (2017). *Introduction to numerical programming*. Boca Raton: CRC Press.
3. Burden, R.L., & Faires J.D. (2011). *Numerical analysis*. 9th edition. Boston: Brooks/Cole.
4. Čermák, L., & Hlavička, R. (2016). *Numerické metody*. Brno: CERM.
5. Horová, I., & Zelinka, J. (2008). *Numerické metody*. 2. vydání. Brno: Masarykova univerzita.
6. Organisation for economic co-operation and development [online]. [cit. 3.2.2023]. Dostupné z: <<http://stats.oecd.org/>>

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Chládek, Ph.D.
***Katedra aplikované matematiky a informatiky

Datum zadání bakalářské práce: 20. ledna 2023

Termín odevzdání bakalářské práce: 12. dubna 2024


doc. Dr. Ing. Dagmar Škodová Parmová
děkanka


doc. RNDr. Jana Klícnarová, Ph.D.
vedoucí katedry

JI: **UNIVERZITA**
V ČESKÝCH BUDEJOVICÍCH
FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Studentská 13 (26)
370 05 České Budějovice

V Českých Budějovicích dne 6. února 2023

Prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

.....

Datum

.....

Podpis studenta

Poděkování

Touto cestou bych chtěl poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce panu Mgr. Petru Chládkovi, Ph.D., za jeho ochotu, čas, trpělivost, odbornou pomoc a za veškeré cenné rady a připomínky, které mi pomohly s vypracováním této práce.

Obsah

1	Úvod	3
1.1	Cíle práce	3
2	Aproximace funkcí	4
3	Interpolace	5
3.1	Interpoláční polynomy	6
3.1.1	Lagrangeův interpoláčn� polynom	8
3.1.2	Newtonův interpoláčn� polynom	10
3.2	Splajny.....	12
3.2.1	Lineární splajn	13
3.2.2	Kvadratick� splajn	14
3.2.3	Kubick� splajn	15
4	Regrese	17
4.1	Lineární regrese.....	18
4.2	Nelineární regrese	19
5	Ekonomick� veličiny	20
5.1	Pr�m�rn� roční míra inflace	20
5.2	Pr�m�rn� hrub� měsíční mzda	23
6	Základní popis softwaru	24
6.1	Desmos Graphing Calculator	24
6.2	Microsoft Excel.....	24
6.3	Vlastní konzolov� aplikace	25
7	Metodika.....	26
7.1	Vysvětlení metodiky.....	27
8	Testování – pr�m�rn� roční míra inflace	29
8.1	Pr�m�rn� roční míra inflace v letech 2000-2005	29
8.2	Pr�m�rn� roční míra inflace v letech 2006-2011	32

8.3	Průměrná roční míra inflace v letech 2012-2017	35
8.4	Průměrná roční míra inflace v letech 2017-2022	38
8.5	Vyhodnocení.....	43
8.5.1	Vhodnost interpolace interpolačním polynomem mezi známými body .	43
8.5.2	Predikce interpolačním polynomem	43
8.5.3	Predikce lineární regresí	43
9	Testování – průměrná hrubá měsíční mzda	44
9.1	Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2000-2005	44
9.2	Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2006-2011	47
9.3	Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2012-2017	50
9.4	Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2017-2022	54
9.5	Vyhodnocení.....	57
9.5.1	Vhodnost interpolace interpolačním polynomem mezi známými body .	57
9.5.2	Predikce interpolačním polynomem	57
9.5.3	Predikce lineární regresí	57
10	Závěr.....	59
11	Summary and keywords	61
12	Seznam použitých zdrojů	62
13	Seznam grafů.....	63
14	Seznam tabulek.....	65
15	Seznam obrázků.....	66
16	Seznam příloh.....	67

1 Úvod

V ekonomii se velmi často pracuje s daty ekonomických veličin, kterých existuje velké množství. V této práci se zabýváme konkrétně dvěma ekonomickými veličinami a těmi jsou průměrná roční míra inflace a průměrná hrubá měsíční mzda. Tyto zmíněné ekonomické veličiny v průběhu času mění svou hodnotu. Někdy se může stát, že nám některé hodnoty chybí a je potřeba je odhadnout, anebo můžeme chtít na základě historických hodnot predikovat budoucí hodnoty ekonomických veličin. S těmito požadavky nám může pomoci oblast matematiky, jež úzce souvisí s ekonomikou. Čtenář se seznámí s numerickými metodami, konkrétně s metodami týkajícími se aproximace funkce. V této práci se rozlišují dva typy aproximace funkce, a to na aproximaci interpolací a na aproximaci regresí.

V teoretické části je popsána podstata interpolace a regrese a jsou zde představeny interpolační polynomy (Lagrangeův interpolační polynom a Newtonův interpolační polynom), splajny a regrese. Následně jsou popsány ekonomické veličiny a software, který byl použit při vypracování této práce.

V praktické části se testuje vhodnost použití numerických metod na data ekonomických veličin. Praktická část je více popsána v kapitole 1.1 Cíle práce.

1.1 Cíle práce

Cílem práce je vyhodnotit vhodnost použití interpolačního polynomu pro odhad chybějící hodnoty pro jednotlivé ekonomické veličiny (průměrná roční míra inflace a průměrná hrubá měsíční mzda).

Zároveň je cílem vyhodnotit, zda je vhodné použít interpolační polynom nebo lineární regresi pro predikci budoucích hodnot zmíněných ekonomických veličin v následujících letech na základě historických dat.

Doplňkem k této bakalářské práci je naprogramovat konzolovou aplikaci pro výpočet interpolačních polynomů ze zadaných dat.

2 Aproximace funkcí

Aproximace funkce spočívá v nalezení "zjednodušené" funkce, která se chová podobně jako originální funkce f . To znamená, že nabývá přibližně stejných hodnot a je snazší s ní pracovat. (Fajmon & Růžicková, 2003)

V této práci se zabýváme dvěma základními typy aproximace:

1. Interpolace

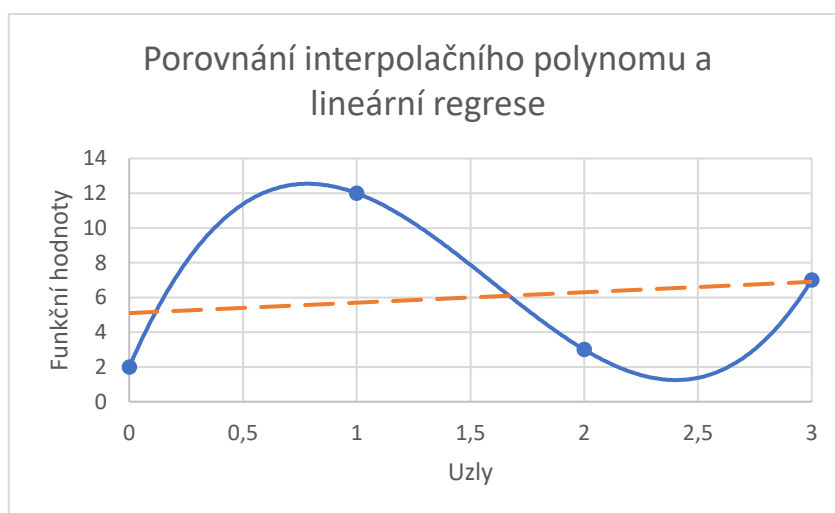
„Hledáme funkci, která **má** s f společné funkční hodnoty v tzv. uzlových bodech $x_0, x_1, \dots, x_n$.“ (Fajmon & Růžicková, 2003, s. 81)

2. Regrese

Hledáme funkci, která obvykle **nemá** s f společné funkční hodnoty ve všech tzv. uzlových bodech $x_0, x_1, \dots, x_n$.

„Regrese se používá především v případě, kdy máme hodnoty $[x_i, y_i], i = 0, 1, \dots, n$, získané nějakým měřením (tj. zatížené chybami) a máme určitou představu o povaze funkční závislosti y na x .“ (Fajmon & Růžicková, 2003, s. 81)

Graf 1: Porovnání interpolačního polynomu a lineární regrese



Zdroj: Autor

V grafu 1 je znázorněn graficky rozdíl mezi interpolací a regresí. Přesněji mezi interpolačním polynomem (modrá plná čára) a lineární regresí (oranžová čárkovaná čára). Z grafu 1 je vidět, že interpolační polynom prochází skrz všechny uzlové body, ale lineární regrese přes všechny uzlové body neprochází.

3 Interpolace

Jednou z metod používaných k odhadu nebo aproximaci hodnot mezi známými datovými body je matematická technika zvaná interpolace. Jejím základním cílem je vytvořit funkci nebo křivku, která prochází předem určenými body (uzlovými body) $[x_i, y_i]$, $i = 0, 1, \dots, n$. Cílem je nalezení spojitě, hladké reprezentace, která umožňuje odhad hodnot nebo interpolaci mezi uzlovými body. Existují různé formy interpolace, například polynomická interpolace (interpolační polynomy), interpolace křivek (splajny) a lineární interpolace. Rozdíly spočívají v matematickém modelu a přesnosti aproximace. Interpolace se používá pro vědecký výzkum, numerické techniky, analýzu dat a mnoho dalších oborů, kde je třeba odhadnout nebo aproximovat hodnoty mezi existujícími body v souboru dat. (Fajmon & Růžicková, 2003)

Aproximace interpolací:

- 1) **Interpolační polynom** (kapitola 3.1) – polynom, na celém intervalu je stejný. Obvyklé použití, jestliže bodů $[x_i, y_i]$ je malý počet a měření je přesné. Cílem je sestavit aproximační funkci, která prochází uzlovými body. (Fajmon, n.d.)
- 2) **Splajn** (kapitola 3.2) – po částech polynom, na každém intervalu může být jiný. Obvyklé použití, jestliže bodů $[x_i, y_i]$ je větší počet a měření je přesné. Cílem je sestavit aproximační funkci, která prochází uzlovými body. (Fajmon, n.d.)

V této práci se setkáváme i s pojmem regrese, která už nemá za úkol sestavit aproximační funkci, která by procházela všemi zadanými body a není tedy ani interpolační metoda. Pro porovnání s bodem 1) a 2) je zde regrese zmíněna:

Aproximace regresí (aproximace metodou nejmenších čtverců):

- 3) **Lineární regrese** (kapitola 4.1). Obvyklé použití, jestliže bodů $[x_i, y_i]$ je libovolný počet, dokonce v tomto případě na rozdíl od interpolačních metod může být více hodnot y pro jednu hodnotu x , měření může být zatíženo chybou (šumem). Cílem je sestavit aproximační funkci. V tomto případě regresní přímku, u které minimalizujeme součet druhých mocnin vzdáleností naměřených hodnot od navrhované regresní přímky. Je zřejmé, že tato přímka nemusí a ani obvykle neprochází všemi naměřenými hodnotami. (Fajmon, n.d.)
- 4) **Nelineární regrese** (kapitola 4.2). U nelineární regrese platí to samé jako u lineární regrese jen s tím rozdílem, že u nelineární regrese nehledáme regresní

přímku, ale hledáme nelineární aproximační funkci, v tomto případě polynom. Občas je nelineární regrese též označována jako polynomiální nebo polynomická regrese.

3.1 Interpolační polynomy

„Nejjednodušší úlohu lineární interpolace lze formulovat takto: Jsou dány body x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, $x_i \neq x_k$ pro $i \neq k$ a hodnoty funkce f v těchto bodech jsou $f(x_i) = f_i$ pro $i = 0, 1, \dots, n$. Je třeba najít algebraický polynom P_n stupně nejvýše n takový, že:

$$P_n(x_i) = f_i, i = 0, 1, \dots, n$$

“ (Horová & Zelinka, 2008, s. 158)

„**Úmluva:** Body x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, $x_i \neq x_k$ pro $i \neq k$, budeme nazývat jako uzly, polynom P_n budeme nazývat jako interpolační polynom. Symbolem Π_n budeme označovat množinu všech reálných polynomů stupně nejvýše n tvaru:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Věta: Pro $(n + 1)$ daných dvojic čísel:

$$(x_i, f_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad x_i \neq x_k \text{ pro } i \neq k$$

existuje právě jeden polynom $P_n \in \Pi_n$ takový, že:

$$P_n(x_i) = f_i, i = 0, 1, \dots, n \tag{1}$$

Důkaz:

Jednoznačnost: Předpokládejme, že existují dva interpolační polynomy P_n a $Q_n \in \Pi_n$ splňující podmínku (1), tj.

$$P_n(x_i) = Q_n(x_i) = f_i, i = 0, 1, \dots, n$$

Položme $R_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$. Je zřejmé, že $R_n \in \Pi_n$ a dále $R_n(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, tzn. R_n má alespoň $n + 1$ různých kořenů. To je ale **spor** s předpokladem, že R_n je polynom stupně nejvýše n . Odtud plyne, že polynomy P_n a Q_n musí být totožné.

Existence: Existenci dokážeme tak, že příslušný polynom sestojíme. “ (Horová & Zelinka, 2008, s. 158)

Dokončení důkazu **existence** se nachází v kapitole 3.1.1 Lagrangeův interpolační polynom.

Ukázka interpolačního polynomu

Pro představu co je to interpolační polynom si ukážeme jednoduchý příklad:

Mějme dány uzly: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

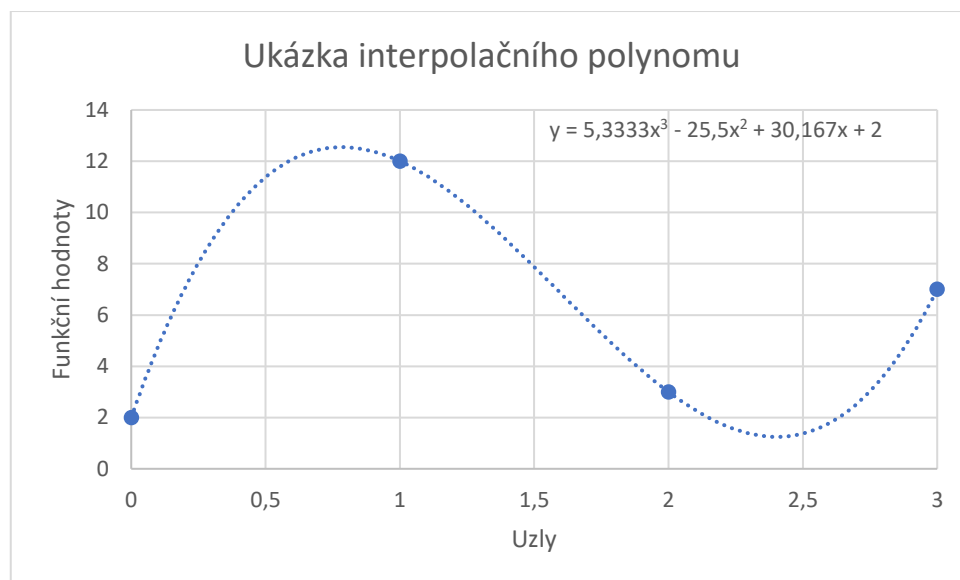
a jejich funkční hodnoty: $f_0 = 2, f_1 = 12, f_2 = 3, f_3 = 7$

Máme 4 rozdílné uzly a 4 funkční hodnoty, takže je možné interpolační polynom sestavit. Už před sestavením interpolačního polynomu víme, že to bude polynom nejvýše 3. stupně.

Hledaný interpolační polynom bude mít obecný tvar:

$$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Graf 2: Ukázka interpolačního polynomu



Zdroj: Autor

Rovnice pro interpolační polynom je:

$$P_3(x) = 5,333x^3 - 25,5x^2 + 30,167x + 2$$

V dalších dvou podkapitolách si představíme dvě metody výpočtu interpolačního polynomu. Nejdříve **Lagrangeův interpolační polynom** a v následující kapitole **Newtonův interpolační polynom**.

3.1.1 Lagrangeův interpolační polynom

Pokračování důkazu *existence* z kapitoly 3.1 Interpolační polynomy:

„Nejdříve sestrojíme polynomy l_i , $i = 0, 1, \dots, n$ s těmito vlastnostmi:

(a) l_i je polynom stupně n

(b) $l_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$

Je zřejmé, že

$$l_i(x) = A_i(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

Konstantu A_i určíme tak, aby byla splněná podmínka $l_i(x_i) = 1$, tedy

$$A_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

a odtud

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (2)$$

Poznámka: polynomy l_i , $i = 0, 1, \dots, n$, nazýváme fundamentálními polynomy

Definujeme nyní polynom P_n vztahem:

$$P_n(x) = l_0(x)f_0 + l_1(x)f_1 + \dots + l_n(x)f_n = \sum_{i=0}^n l_i(x)f_i \quad (3)$$

Snadno se ověří, že tento polynom splňuje interpolační podmínky (1), a protože je lineární kombinací polynomů stupně n , je polynomem stupně nejvýše n . Zde je důkaz existence dokončen.“ (Horová & Zelinka, 2008, s. 159)

„Interpolační polynom tvaru (3) nazýváme **Lagrangeovým interpolačním polynomem** nebo přesněji **Lagrangeovým tvarem interpolačního polynomu**.“ (Horová & Zelinka, 2008, s. 159)

Ukázka výpočtu Lagrangeova interpolačního polynomu

Jedná se o stejné zadání jako v kapitole 3.1 Interpolační polynomy:

Mějme dány uzly: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

a jejich funkční hodnoty: $f_0 = 2, f_1 = 12, f_2 = 3, f_3 = 7$

Nejprve použijeme rovnici (2):

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = -\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{6}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{2}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} = -\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{2}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6}$$

Poté použijeme rovnici (3):

$$P_3(x) = \left(-\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{6}\right)2 + \left(\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{2}\right)12 + \left(-\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{2}\right)3 + \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6}\right)7$$

$$P_3(x) = \frac{16}{3}x^3 - \frac{51}{2}x^2 - \frac{181}{6}x + 2$$

Tento výsledek se shoduje s výsledkem, který nám poskytl Microsoft Excel v *Graf 2*:

Ukázka interpolačního polynomu v kapitole 3.1.

3.1.2 Newtonův interpolační polynom

Jak jsme si mohli všimnout, tak Lagrangeův interpolační polynom má tu nevýhodu, že pokud chceme přidat další uzel (uzlový bod), tak musíme celý polynom přepočítat znovu (konkrétněji musíme přepočítat všechny fundamentální polynomy), což je velmi pracné, pokud k přepočtení nepoužijeme nějaký k tomu určený matematický software (Fajmon & Růžicková, 2003.). Této nevýhody nás zbavuje druhý typ výpočtu interpolačního polynomu, který je v této práci zmiňován a tím je Newtonův interpolační polynom.

„Pro danou funkci f a uzlové body $x_i, i = 0, 1, \dots, n$, nazveme podíly

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i},$$

$$i = 0, 1, \dots, n - 1$$

poměrnými diferencemi prvního řádu.

Pomocí poměrných diferencí prvního řádu definujeme **poměrné difference druhého řádu** jako

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i},$$

$$i = 0, 1, \dots, n - 2$$

a obecně **poměrné difference k-tého řádu** pro $k \leq n$, definujeme takto:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i},$$

$$i = 0, 1, \dots, n - k$$

“ (Fajmon & Růžicková, 2003., s. 64)

„Interpolační polynom $P_n \in \Pi_n$ pro body (x_i, f_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, může být zapsán ve tvaru:

$$P_n(x) = f_0 + (x - x_0) f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) f[x_0, \dots, x_n] \quad (4)$$

“ (Horová & Zelinka, 2008, s. 163)

Ukázka výpočtu Newtonova interpolačního polynomu

Jedná se o stejné zadání jako v kapitole 3.1 Interpolační polynomy:

Mějme dány uzly: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

a jejich funkční hodnoty: $f_0 = 2, f_1 = 12, f_2 = 3, f_3 = 7$

Nejprve si vypočítáme poměrné difference všech řádů (v našem případě prvního, druhého a třetího řádu) a poté je dosadíme do rovnice (4).

Tabulka 1: Výpočet poměrných diferencí

x_i	f_i	Diference 1. řádu	Diference 2. řádu	Diference 3. řádu
$x_0 = 0$	$f_0 = 2$	$\frac{12 - 2}{1 - 0} = \mathbf{10}$	$\frac{-9 - 10}{2 - 0} = \mathbf{-9,5}$	$\frac{6,5 + 9,5}{3 - 0} = \mathbf{\frac{16}{3}}$
$x_1 = 1$	$f_1 = 12$	$\frac{3 - 12}{2 - 1} = -9$	$\frac{4 + 9}{3 - 1} = 6,5$	-
$x_2 = 2$	$f_2 = 3$	$\frac{7 - 3}{3 - 2} = 4$	-	-
$x_3 = 3$	$f_3 = 7$	-	-	-

Zdroj: Autor

Hodnoty $f[x_0, x_1], f[x_0, x_1, x_2], f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ nám vyšly v prvním řádku (označeno tučně).

Nyní dosadíme do rovnice (4):

$$P_3(x) = 2 + (x - 0)10 + (x - 0)(x - 1)(-9,5) + (x - 0)(x - 1)(x - 2)\frac{16}{3}$$

$$P_3(x) = \frac{16}{3}x^3 - \frac{51}{2}x^2 + \frac{181}{6}x + 2$$

Tento výsledek se shoduje s výsledkem, který nám poskytl Microsoft Excel v *Graf 2*:

Ukázka interpolačního polynomu v kapitole 3.1

Jednou z výhod Newtonova interpolačního polynomu je, že pokud přidáme další uzlový bod, tak nemusíme celý interpolační polynom přepočítávat, jako je tomu třeba u Lagrangeova interpolačního polynomu. Pokud bychom chtěli přidat další bod, tak by stačilo již existující tabulku poměrných diferencí doplnit o nový řádek.

3.2 Splajny

Splajn (interpolace pomocí křivek), někdy též označován jako spline, prochází zadanými body stejně jako interpolační polynom. Pokud bychom chtěli provést interpolaci pomocí interpolačního polynomu například u příkladu o 500 bodech, tak bychom dostali polynom až 499. stupně. To by vedlo k velké fluktuaci funkce a tím pádem i k nesprávné interpretaci chování původní funkce. Tento nedostatek interpolačního polynomu se řeší tím, že se interval rozdělí na větší počet podintervalů s menším počtem bodů. Jak bylo popsáno v kapitole 3.1 Interpolace, tak obvyklé použití interpolačního polynomu je pro menší počet bodů.

Alternativou k použití interpolačního polynomu je použití splajnu, který je po částech polynomiální. To znamená, že je tvořen polynomy nízkého stupně na jednotlivých intervalech (mezi body) a tím pádem je vhodnější pro interpolaci většího počtu bodů, než již zmíněný interpolační polynom. Zjednodušeně řečeno, interpolační polynom je pouze jeden polynom na celém intervalu, zatímco splajn je složen z více polynomů nižšího řádu. (Burden & Faires, 2011)

Splajnová interpolace je obecně přesnější pro větší počet bodů než interpolace pomocí interpolačního polynomu.

Nyní si splajn definujeme:

„Základní myšlenka interpolace pomocí splajnů je obdobná jako u Lagrangeova interpolace. Máme zadány uzlové body $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ a funkční hodnoty v nich, které označíme $f_0, f_1, \dots, f_n$. Stejně jako předtím hledáme funkci $S(x)$ takovou, že platí $S(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, ale tentokrát je funkce $S(x)$ po částech polynom (obecně na každém intervalu $< x_i, x_{i+1} >$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, jiný) a splňuje požadavky hladkosti (tj. spojitosti derivací).

Konkrétně **splajnem řádu k** pro uzly $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ rozumíme funkci, která je v každém intervalu $< x_i, x_{i+1} >$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, polynom stupně k a která má v celém intervalu $< x_0, x_n >$ spojitě derivace až do řádu $k - 1$ včetně.“ (Fajmon & Růžicková, 2003., s. 69)

- Polynomy 1. stupně se používají k sestavení **lineárního splajnu ($k = 1$)**
- Polynomy 2. stupně se používají k sestavení **kvadratického splajnu ($k = 2$)**

- Polynomy 3. stupně se používají k sestavení **kubického splajnu ($k = 3$)** (nejčastěji používaný typ splajnu) (Fajmon & Růžicková, 2003)

3.2.1 Lineární splajn

Nejjednodušším typem splajnu je lineární splajn, někdy též označován jako lomená čára. Lineární splajn tvoří polynomy 1. stupně, křivka se skládá z úseček, které na sebe v uzlových bodech navazují ve funkčních hodnotách. V uzlových bodech není definována derivace. (Fajmon, n.d.)

„Pro znázornění jednotlivých částí lineárního splajnu lze použít Lagrangeův polynom ve tvaru:

$$S_i(x) = f_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad x_i \neq x_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

Ekvivalentní výraz lze získat pokud pro úsečku použijeme tento vzorec:

$$S_i(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i), \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad x_i \neq x_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

Připomenutí: zlomek $\frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$ lze zapsat jako $f[x_i, x_{i+1}]$.

Výsledný lineární splajn může být zapsán v této podobě:

$$S(x) = \begin{cases} f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) & \text{pro } x \in < x_0, x_1 > \\ f_1 + f[x_1, x_2](x - x_1) & \text{pro } x \in < x_1, x_2 > \\ \dots & \dots \\ f_i + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) & \text{pro } x \in < x_i, x_{i+1} > \\ \dots & \dots \\ f_{n-1} + f[x_{n-1}, x_n](x - x_{n-1}) & \text{pro } x \in < x_{n-1}, x_n > \end{cases}$$

“ (Mathews & Fink, 1999, 281)

Dalším velmi jednoduchým způsobem jak vypočítat úsečku mezi dvěma body je sestavením a vyřešením dvou rovnic o dvou neznámých, které jsou ve tvaru:

$$f_i = ax_i + b$$

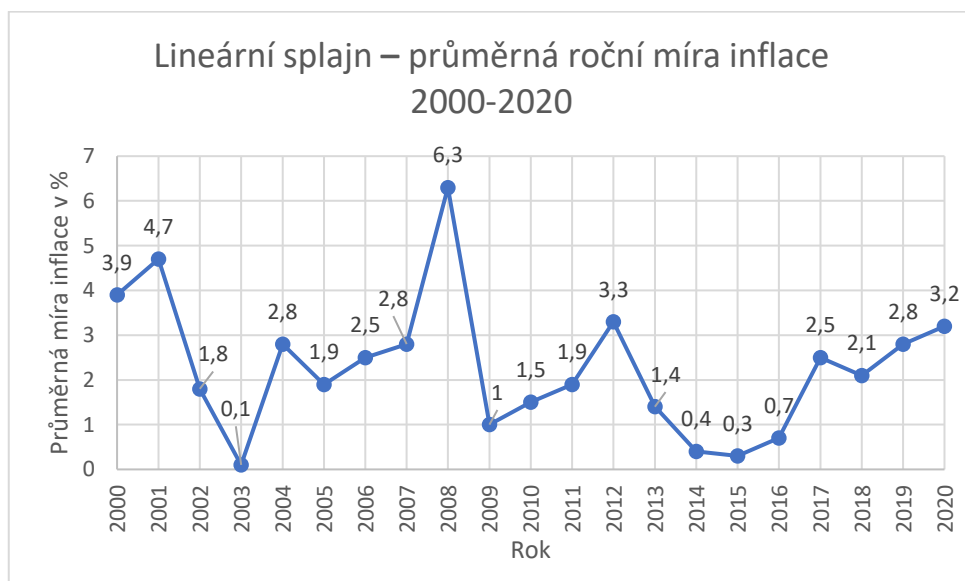
$$f_{i+1} = ax_{i+1} + b$$

kde a a b jsou hledané neznámé.

A následným dosazením a a b do této rovnice:

$$f = ax + b \quad \text{pro } x \in < x_i, x_{i+1} >$$

Graf 3: Lineární splajn – průměrná roční míra inflace 2000-2020



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Pokud bychom sledovali nějaký jev, tak čím více dat bychom měli, tak tím více přesněji by lineární splajn aproximoval originální funkci. Budeme-li mít data jednou ročně, tak v grafu s velkou pravděpodobností budou ostré hrany, ale pokud bychom měli data každý měsíc, týden, den, hodinu nebo dokonce sekundu, tak by se z ostrých hran stávala opticky hladší a hladší funkce a tím pádem by se zlepšovala i schopnost aproximace.

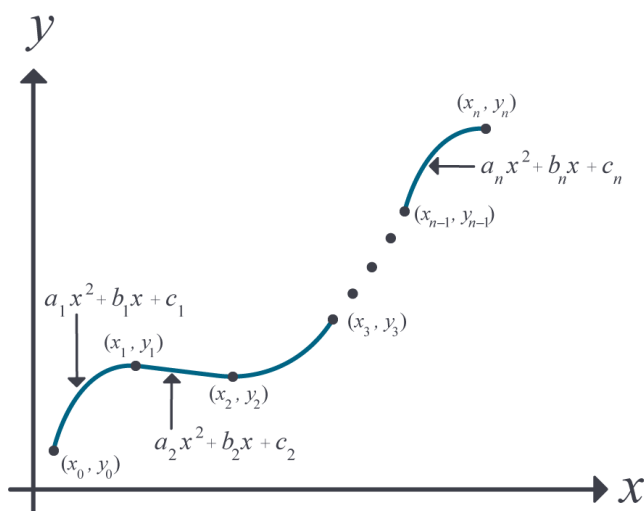
3.2.2 Kvadratický splajn

Kvadratický splajn tvoří polynomy 2. stupně. Křivka se skládá z kvadratických rovnic, které na sebe v uzlových bodech navazují ve funkčních hodnotách a i v prvních derivacích. Oproti lineárnímu splajnu má kvadratický splajn v uzlových bodech první derivaci. (Fajmon, n.d.)

Výsledný kvadratický splajn může být zapsán v této podobě:

$$S(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1, & \text{pro } x \in < x_0, x_1 > \\ a_2x^2 + b_2x + c_2, & \text{pro } x \in < x_1, x_2 > \\ \dots & \dots \\ a_ix^2 + b_ix + c_i, & \text{pro } x \in < x_i, x_{i+1} > \\ \dots & \dots \\ a_nx^2 + b_nx + c_n, & \text{pro } x \in < x_{n-1}, x_n > \end{cases}$$

Graf 4: Kvadratický splajn



Zdroj: (Kaw, Kalu, & Nguyen, 2011)

Nevýhodou kvadratického splajnu je schopnost aproximace (je horší než u kubického splajnu) a složitost řešení. Proto se k výpočtu kvadratického splajnu používá k tomu určený matematický software, který umí kvadratický splajn sestavit v krátkém čase. Kvadratický splajn se téměř nepoužívá.

3.2.3 Kubický splajn

Kubický splajn tvoří polynomy 3. stupně. Křivka se skládá z kubických rovnic, které na sebe v uzlových bodech navazují ve funkčních hodnotách a i v první a druhé derivaci. Je přesnější k aproximaci než lineární a kvadratický splajn. Jedná se o nejpoužívanější typ splajnu. (Fajmon, n.d.)

Výsledný kubický splajn může být zapsán v této podobě:

$$S(x) = \begin{cases} a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1, & \text{pro } x \in < x_0, x_1 > \\ a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2, & \text{pro } x \in < x_1, x_2 > \\ \dots & \\ a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, & \text{pro } x \in < x_i, x_{i+1} > \\ \dots & \\ a_n x^3 + b_n x^2 + c_n x + d_n, & \text{pro } x \in < x_{n-1}, x_n > \end{cases}$$

„Musí být splněné následující podmínky:

- I. $S(x) = S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i,$
pro $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$.
- II. $S(x_i) = f_i$ a $S(x_{i+1}) = f_{i+1}$, pro $i = 0, 1, \dots, n - 1$.
- III. $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$, pro $i = 0, 1, \dots, n - 2$.
- IV. $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$, pro $i = 0, 1, \dots, n - 2$.
- V. $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$, pro $i = 0, 1, \dots, n - 2$.

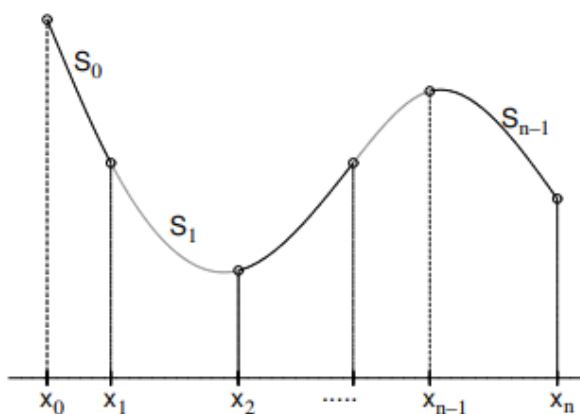
“ (Burden & Faires, 2011, s. 146)

„Jelikož při této konstrukci existují dva volné parametry, je možné požadovat, aby byly splněny jedny z následujících podmínek:

- a) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$,
- b) $S'(x_0) = f'(x_0)$ a $S'(x_n) = f'(x_n)$

Splňuje-li kubický interpolační splajn S podmínku a) nazývá se *přirozený splajn*, v případě podmínky b) jde o *úplný splajn*.“ (Horová & Zelinka, 2008, s. 193-194)

Graf 5: Přirozený kubický splajn



Zdroj: (Fajmon & Růžicková, 2003)

Existuje více druhů kubických splajnů, ale jejich výpočet je značně náročný. Pro výpočet se doporučuje použít matematický software.

4 Regrese

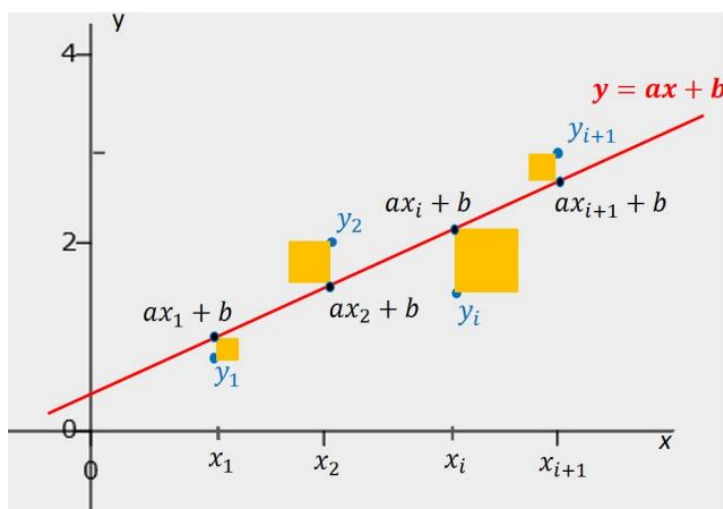
Druhou aproximační metodou, která bude v této práci zmíněná je regrese. Účel regrese byl již stručně popsán v kapitole 2 Aproximace funkcí a v kapitole 3 Interpolace, kde byla regrese porovnána s interpolačními metodami.

V předchozí kapitole, která byla věnována interpolaci jsme chtěli, aby interpolační polynom nebo splajn dosahoval stejných funkčních hodnot v uzlových bodech jako originální funkce f . V praxi se můžeme setkat i s případy, kdy nelze použít interpolační polynom nebo splajn a to například u měření, které je zatíženo chybou. To znamená, že pro hodnotu x může existovat více hodnot y . Anebo když chceme zjistit určitý trend (lineární/nelineární závislost dvou jevů) v datech, tak se také nehodí použít interpolační metody, které z definice musí procházet uzlovými body. (Fajmon & Růžicková, 2003)

Regrese je statistická metoda, která se používá k analýze a modelování vztahů mezi proměnnými. Hlavním cílem regrese je předpovědět nebo odhadnout hodnotu závislé proměnné na základě hodnot nezávislých proměnných. (Burden & Faires, 2011)

Regrese je někdy též označována jako metoda nejmenších čtverců. Cílem metody nejmenších čtverců je minimalizovat součet čtverců/reziduí, tj. rozdílů mezi skutečnými hodnotami dat a predikovanými hodnotami modelu (viz oranžové plochy v grafu 6). Reziduum můžeme chápat jako velikost chyby, kterou uděláme při odhadu v daném bodu. Protože chceme minimalizovat tyto rezidua, používáme čtvercové hodnoty, což vede k termínu "metoda nejmenších čtverců". (Burden & Faires, 2011)

Graf 6: Metoda nejmenších čtverců



Zdroj: (E-learning JČU, Kurz: Matematika 2 (M2 - 2021 - LS), 2021)

4.1 Lineární regrese

Nejznámějším druhem regrese je tzv. lineární regrese neboli regresní přímka. Lineární regresi je dobré použít pro hodnoty, které mají lineární nebo téměř lineární průběh $y = ax + b$. Kdybychom měli například 10 bodů, které jsou téměř lineární, tak by bylo vhodné použít lineární regresi. Použitím interpolačního polynomu bychom dostali polynom až 9. stupně a funkce by mohla mezi body nepřírozeně fluktuovat (na grafu 7 mezi body 9 a 10). (Burden & Faires, 2011)

„Z grafu 6 je patrné, že musí platit:

$$\sum_{i=1}^m (y_i - (ax_i + b))^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - ax_i - b)^2 \rightarrow \text{minimální}$$

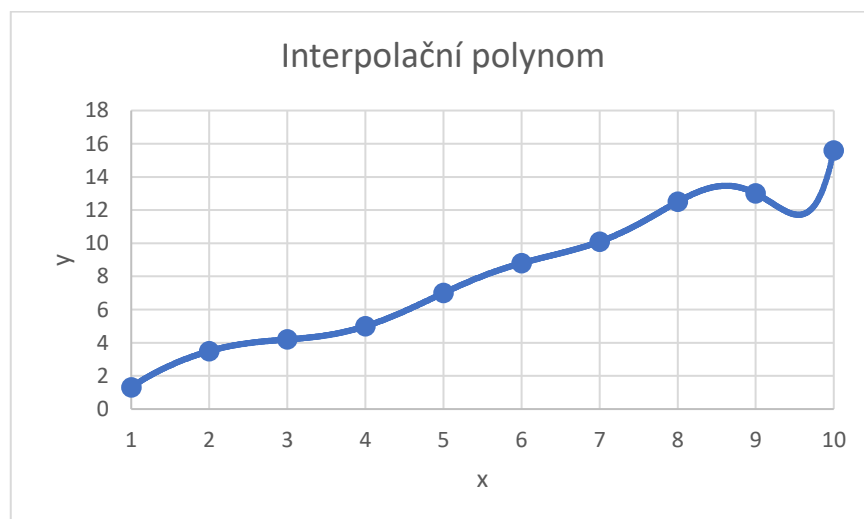
Jestliže $y = ax + b$ je přímka proložená metodou nejmenších čtverců souborem bodů $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_m, y_m]$, pak pro koeficienty a, b platí:

$$a \sum_{i=1}^m x_i + bm = \sum_{i=1}^m y_i$$

$$a \sum_{i=1}^m x_i^2 + b \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m x_i y_i$$

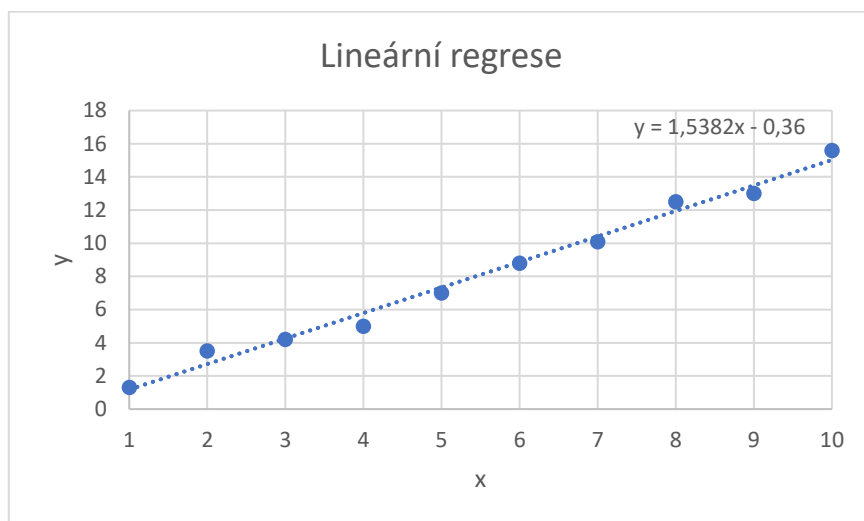
“ (E-learning JČU, Kurz: Matematika 2 (M2 - 2021 - LS), 2021)

Graf 7: Interpolační polynom



Zdroj: (Burden & Faires, 2011), zpracování autor

Graf 8: Lineární regrese



Zdroj: (Burden & Faires, 2011), zpracování autor

4.2 Nelineární regrese

Nelineární regrese, též známá jako polynomiální nebo polynomická regrese se používá k modelování nelineárních závislostí mezi proměnnými.

„Pokud máme body: $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_m, y_m]$ a polynom stupně n , kde $n < m - 1$:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Tak chceme aby:

$$\sum_{i=1}^m (y_i - P_n(x_i))^2 \rightarrow \text{minimální}$$

A pro koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$, platí:

$$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=1}^m x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^m x_i^j y_i, \text{ pro každé } j = 0, 1, \dots, n.$$

Získáme tak $n + 1$ rovnic pro $n + 1$ neznámých (koeficienty indexujeme od nuly do n).

Pokud bychom rovnice rozepsali, dostaneme tento tvar:

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^m x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^1 + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \dots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^n &= \sum_{i=1}^m x_i^0 y_i \\ &\dots \\ a_0 \sum_{i=1}^m x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^{n+2} + \dots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^{2n} &= \sum_{i=1}^m x_i^n y_i \end{aligned}$$

“ (Burden & Faires, 2011, s. 502)

5 Ekonomické veličiny

Ekonomické veličiny, se kterými se v rámci této práce setkáváme, jsou průměrná roční míra inflace a průměrná hrubá měsíční mzda. Ve dvou následujících podkapitolách budou tyto ekonomické veličiny popsány. Tyto vybrané ekonomické veličiny v průběhu času mění svou hodnotu.

5.1 Průměrná roční míra inflace

V této kapitole, která se zaměřuje na průměrnou roční míru inflace, je přímo i nepřímo citován Český statistický úřad (ČSÚ) a Česká národní banka (ČNB). Tyto dvě instituce jsou z hlediska inflace velmi důležité. ČNB se stará o měnovou politiku a ČSÚ měří inflaci v České republice.

Inflace označuje všeobecný růst cen výrobků a služeb v ekonomice během určitého období. Obvykle je vyjádřena jako procentuální změna cenové hladiny. Inflace charakterizuje míru znehodnocování měny, to znamená, že za stejnou částku peněz si lze koupit méně výrobků a služeb, než tomu bylo dříve (peníze mají nižší kupní sílu, než měly v minulosti). (Český statistický úřad [ČSÚ], 2022)

„Statistické vyjadřování inflace vychází z měření čistých cenových změn pomocí indexů spotřebitelských cen. Cenové indexy poměřují úroveň cen vybraného spotřebního koše reprezentativních výrobků a služeb (cca 700) ve dvou srovnávaných obdobích, přičemž je zohledňován jejich význam a podíl na celkové spotřebě domácností.“ (ČSÚ, 2022)

Česká národní banka si dala od roku 2010 inflační cíl, aby meziroční přírůstek indexu spotřebitelských cen byl 2 %. Inflace často přirozeně kolísá, proto je u inflačního cíle stanoveno i toleranční pásmo, které je ve výši jednoho procentního bodu oběma směry od inflačního cíle (toleranční pásmo by se dalo zapsat jako interval: <1 %, 3 %>). (Česká národní banka [ČNB], n.d.)

„Průměrná roční míra inflace vyjádřená přírůstkem průměrného ročního indexu spotřebitelských cen vyjadřuje procentní změnu průměrné cenové hladiny za 12 posledních měsíců proti průměru 12 předchozích měsíců.“ (ČSÚ, 2022)

„Tato míra inflace je vhodná při úpravách nebo posuzování průměrných veličin. Bere se v úvahu zejména při propočtech reálných mezd, důchodů apod.“ (ČSÚ, 2022)

Výpočet průměrné roční míry inflace

Průměrná roční míra inflace se vyjadřuje podílem aritmetického průměru vybraného roku a aritmetického průměru předcházejícího roku, nebo podílem součtu bazických indexů v posledních 12 měsících a součtu bazických indexů v předcházejících 12 měsících.

$$M_t = \left(\frac{\sum_{j=t-11}^t I_j}{\sum_{j=t-23}^{t-12} I_j} - 1 \right) * 100$$

I_j jsou bazické indexy spotřebitelských cen a t je měsíc, ve kterém se průměrná roční inflace počítá. (Hindls, Seger & Hronová, 2002)

Bazické indexy spotřebitelských cen představují míru inflace, která je znázorněna změnou indexu spotřebitelských cen vzhledem k základnímu období. Tato změna reflektuje změnu cenové hladiny sledovaného měsíce příslušného roku proti průměru roku základního období. (ČSÚ, 2023a)

Základním obdobím se myslí aktuálně průměr roku 2015, který má hodnotu 100 (lze vidět v tabulce 2). Z této hodnoty se aktuálně vychází při výpočtech bazických indexů. Ceny výrobků a služeb v roce 2015 se berou jako základní. Změny cen se sledují v porovnání se základním obdobím, což umožňuje sledovat a vyhodnocovat změny cenové hladiny v průběhu času. (ČSÚ, 2023a)

Tabulka 2: Bazické indexy spotřebitelských cen

Rok	Měsíc												Průměr roku
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
2014	99,5	99,6	99,6	99,6	99,7	99,7	100,0	99,9	99,6	99,8	99,5	99,5	99,7
2015	99,5	99,7	99,8	100,1	100,4	100,5	100,4	100,2	100,0	100,0	99,6	99,5	100,0
2016	100,1	100,2	100,1	100,7	100,5	100,6	100,9	100,8	100,5	100,8	101,2	101,5	100,7
2017	102,3	102,7	102,7	102,7	102,9	102,9	103,4	103,3	103,2	103,7	103,8	103,9	103,1
2018	104,5	104,5	104,4	104,7	105,2	105,6	105,8	105,9	105,6	106,0	105,9	106,0	105,3
2019	107,1	107,3	107,5	107,6	108,3	108,5	108,9	109,0	108,4	108,9	109,2	109,4	108,3
2020	111,0	111,3	111,2	111,0	111,4	112,1	112,6	112,6	111,9	112,1	112,1	111,9	111,8
2021	113,4	113,6	113,8	114,4	114,6	115,2	116,4	117,2	117,4	118,6	118,8	119,3	116,1
2022	124,6	126,2	128,3	130,6	132,9	135,0	136,8	137,4	138,5	136,5	138,1	138,1	133,6

Zdroj: (ČSÚ, 2023a), úprava autor

Pokud bychom chtěli například vypočítat s pomocí bazických indexů průměrnou roční míru inflace v roce 2022, tak ji vypočteme podle uvedeného vzorce na začátku této stránky. Aplikace vzorce a výpočet:

$$M_t = \left(\frac{124,6 + 126,2 + 128,3 + \dots + 136,5 + 138,1 + 138,1}{113,4 + 113,6 + 113,8 + \dots + 118,6 + 118,8 + 119,3} - 1 \right) * 100 = 15,1 \%$$

Z jednotlivých bazických indexů ve 12 měsících téhož roku lze vypočítat aritmetický průměr roku jako součet bazických indexů děleno počtem měsíců, tedy číslem 12:

$$\text{prům. r. 2022} = \left(\frac{124,6 + 126,2 + 128,3 + \dots + 136,5 + 138,1 + 138,1}{12} \right) = 133,6 \%$$

$$\text{prům. r. 2021} = \left(\frac{113,4 + 113,6 + 113,8 + \dots + 118,6 + 118,8 + 119,3}{12} \right) = 116,1 \%$$

Pokud vypočteme hodnoty průměrů v jednotlivých letech, tak lze výpočet udělat velmi jednoduše z podílu aritmetického průměru roku 2022 a aritmetického průměru roku 2021:

$$M_t = \left(\frac{133,6}{116,1} - 1 \right) * 100 = 15,1 \%$$

Takto můžeme provádět výpočet opakovaně, dokud nevypočteme všechny hodnoty průměrné roční míry inflace.

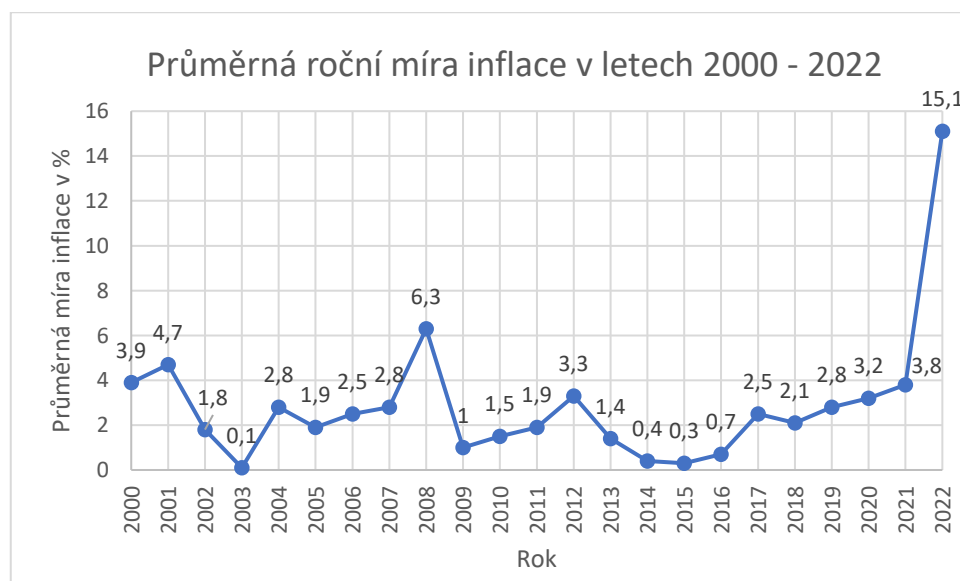
Tabulka 3: Průměrná roční míra inflace v letech 2000-2022

ROK	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
MÍRA INFLACE [%]	3,9	4,7	1,8	0,1	2,8	1,9	2,5	2,8	6,3	1	1,5
ROK	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
MÍRA INFLACE [%]	1,9	3,3	1,4	0,4	0,3	0,7	2,5	2,1	2,8	3,2	3,8
ROK	2022										
MÍRA INFLACE [%]	15,1										

Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Vizualizace tabulky 3:

Graf 9: Průměrná roční míra inflace v letech 2000-2022



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

5.2 Průměrná hrubá měsíční mzda

Hrubá mzda představuje částku, kterou si pracovník dohodne se zaměstnavatelem v pracovní smlouvě a zahrnuje všechny mzdové prostředky, které pracovník obdrží za svou práci. Například se jedná o příplatky za přesčasy, odměny, náhrady mezd nebo další příspěvky. Pokud se od hrubé mzdy odečtou povinné odvody na zdravotní a sociální pojištění a záloha na daň z příjmů, tak se jedná o čistou mzdu. Hrubá mzda slouží jako důležitý ukazatel při porovnávání mezd napříč různými odvětvími a regiony. (Peníze, 2023)

„Průměrná hrubá měsíční mzda je podíl mzdových prostředků připadající na jednoho zaměstnance za měsíc.“ (ČSÚ, 2023b)

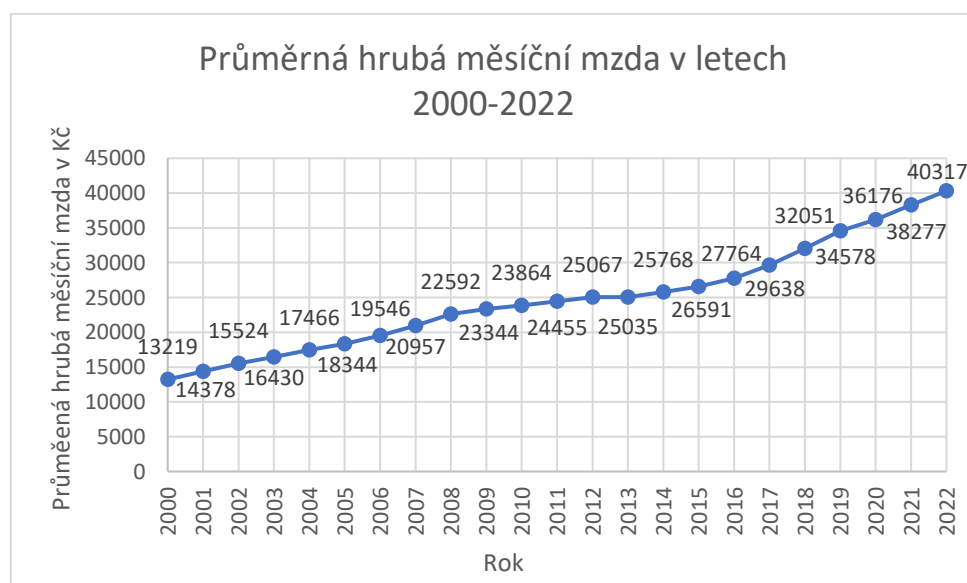
Tabulka 4: Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2000-2022

ROK	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
PRŮM. HR. MĚS. MZDA [KČ]	13219	14378	15524	16430	17466	18344	19546	20957	22592
ROK	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
PRŮM. HR. MĚS. MZDA [KČ]	23344	23864	24455	25067	25035	25768	26591	27764	29638
ROK	2018	2019	2020	2021	2022				
PRŮM. HR. MĚS. MZDA [KČ]	32051	34578	36176	38277	40317				

Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Graf 10 vychází z tabulky 4. Zobrazení hodnot u jednotlivých bodů, jako tomu je například v grafu 9 průměrné roční míry inflace v letech 2000–2022, při zachování přehlednosti grafu je téměř nemožné. Mezery mezi body jsou malé a čísla jenž by tam byla potřeba vložit jsou pěticiferná. V grafu sudé roky mají číselnou hodnotu nad bodem a liché roky mají číselnou hodnotu pod bodem.

Graf 10: Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2000-2022



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

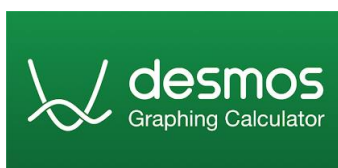
6 Základní popis softwaru

V této práci jsou používány dva matematické softwary + vlastní konzolová aplikace.

6.1 Desmos Graphing Calculator

Desmos Graphing Calculator je pokročilá interaktivní grafická kalkulačka, je online volně dostupná, buď jako webová aplikace na stránkách www.desmos.com/calculator, anebo jako mobilní aplikace.

Obrázek 1: Logo Desmos Graphing Calculator



Zdroj: Google Play – Desmos Inc

6.2 Microsoft Excel

Microsoft Excel je víceúčelový tabulkový procesor, který má v sobě implementováno velké množství funkcí. Je velmi intuitivní a slouží k mnoha činnostem, jako například k organizaci, výpočtu, analýze a vizualizaci dat. Microsoft Excel je možné používat jako webovou, desktopovou i mobilní aplikaci. Jedná se o jednu z nejpoužívanějších aplikací pro práci s daty na světě.

Microsoft Excel jak název napovídá je součástí aplikací od společnosti Microsoft, konkrétně je součástí balíčku s názvem Microsoft Office. Není zdarma, ale existuje například alternativa od firmy Google, která se nazývá Google Sheets, která vypadá velmi podobně a má spoustu stejných funkcí a je zdarma.

Obrázek 2: Logo Microsoft Excel



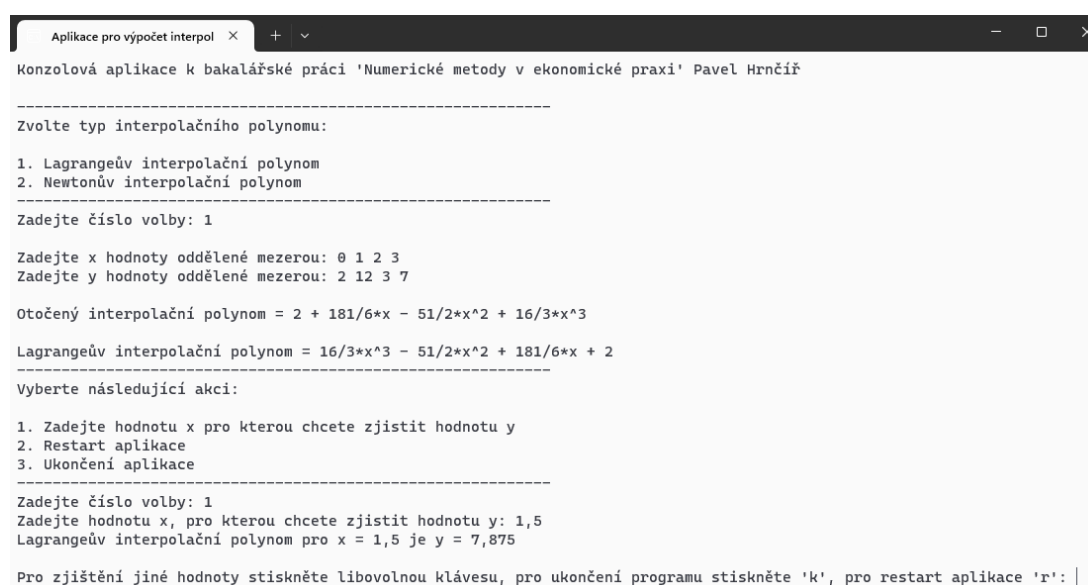
Zdroj: Google Play – Microsoft Excel: Spreadsheets

6.3 Vlastní konzolová aplikace

K této bakalářské práci je vytvořena i konzolová aplikace, která je schopna vypočítat interpolační polynom ze zadaných dat a umožňuje jednoduše dosadit hodnotu x do interpolačního polynomu a tím zjistit hodnotu y v daném bodu. Jak již bylo ukázáno v kapitolách 3.1, 3.1.1 a 3.1.2, tak Lagrangeův i Newtonův interpolační polynom vedou na stejný interpolační polynom. Přesto dává konzolová aplikace na výběr z těchto dvou polynomů z důvodu rozdílné implementace v kódu. Aplikace byla naprogramována ve vývojovém prostředí Visual Studio 2022 v jazyce C#.

Aplikace funguje na frameworku .NET 6.0, který je v případě potřeby (pokud nejde aplikaci spustit) ke stažení na stránkách: <https://dotnet.microsoft.com/en-us/download/dotnet/6.0>

Obrázek 3: Vlastní konzolová aplikace pro výpočet interpolačního polynomu ze zadaných dat



```
Aplikace pro výpočet interpol x + - □ x
Konzolová aplikace k bakalářské práci 'Numerické metody v ekonomické praxi' Pavel Hrnčíř

-----
Zvolte typ interpolačního polynomu:

1. Lagrangeův interpolační polynom
2. Newtonův interpolační polynom
-----
Zadejte číslo volby: 1

Zadejte x hodnoty oddělené mezerou: 0 1 2 3
Zadejte y hodnoty oddělené mezerou: 2 12 3 7

Otočený interpolační polynom = 2 + 181/6*x - 51/2*x^2 + 16/3*x^3
Lagrangeův interpolační polynom = 16/3*x^3 - 51/2*x^2 + 181/6*x + 2
-----
Vyberte následující akci:

1. Zadejte hodnotu x pro kterou chcete zjistit hodnotu y
2. Restart aplikace
3. Ukončení aplikace
-----
Zadejte číslo volby: 1
Zadejte hodnotu x, pro kterou chcete zjistit hodnotu y: 1,5
Lagrangeův interpolační polynom pro x = 1,5 je y = 7,875

Pro zjištění jiné hodnoty stiskněte libovolnou klávesu, pro ukončení programu stiskněte 'k', pro restart aplikace 'r': |
```

Zdroj: Autor

Výstup – interpolační polynom z konzolové aplikace lze použít jako vstup pro Desmos Graphing Calculator a lze si tak vypočtenou rovnici jednoduše graficky zobrazit. Původně měla konzolová aplikace sloužit jen pro výpočet interpolačního polynomu ze zadaných dat. Později se výstup upravil, aby byl možný použít snadno v Desmos Graphing Calculatoru. Také je možné do interpolačního polynomu jednoduše dosadit hledanou hodnotu x , jak je znázorněno na obrázku 3 ve spodní části.

Tato konzolová aplikace je jako příloha volně vložena k této práci na CD-R. Zároveň je možné si tuto konzolovou aplikaci stáhnout ze STAGU v příloze této práce.

7 Metodika

Tabulky, grafy a rovnice jsou vytvářeny pomocí programu Microsoft Excel. Hodnoty v určitých bodech jsou počítány pomocí programu Desmos Graphing Calculator. Zjištěné rovnice pomocí Microsoft Excelu jsou zaokrouhlené. Při výpočtech se často stává, že jednotlivá čísla mají i okolo 13 desetinných míst, ale hodnoty v určitých bodech jsou díky Desmos Graphing Calculatoru počítány přesně z originální rovnice.

Metodický postup je následující:

Jako první je vybrána ekonomická veličina (průměrná roční míra inflace anebo průměrná hrubá měsíční mzda) v časovém rozmezí 22 let (2000-2022), které je rozděleno na dílčí úseky, skládající se z 6 dat z po sobě následujících let, v nichž jsou data zkoumána. Data jsou získána z Českého statistického úřadu (ČSÚ).

Po výběru dat následuje výpis interpolačního polynomu, který je sestaven pomocí programu Microsoft Excel a ověřen pomocí vlastní konzolové aplikace, ta byla pro účely této práce naprogramována (ověřuje se tím, zda konzolová aplikace vytvořená autorem funguje správně, jestli vypočtené interpolační polynomy a hodnoty v dosazených bodech jsou totožné s výstupy z Microsoft Excelu a Desmos Graphing Calculatoru), protože výpočty interpolačních polynomů se dají jednoduše algoritmizovat.

Výpočty interpolačních polynomů jsou počítány od $x_0 = 1$, takže například pokud pracujeme s roky 2016-2021, tak rok 2016 je pro nás 1. bod a při výpočtu budeme počítat s hodnotou $x_0 = 1$ a rok 2021 je pro nás 6. bod, takže do rovnice se bude dosazovat jako $x_5 = 6$.

Po zjištění interpolačního polynomu pro původní data dochází k testování interpolačního polynomu na dané časové řadě a to tak, že se vynechá bod a následně je sestaven nový interpolační polynom, který již neobsahuje vynechaný bod a je výpočetně porovnán ve vynechaném bodu s originální hodnotou. Poté následuje zjištění odchylky, zobrazení do grafu a hodnocení, zda je daná interpolační hodnota přijatelná v porovnání s originální hodnotou.

Nakonec je původní interpolační rovnice (složená z originálních dat, kde žádná data nechybí) testována, zda je schopna predikovat hodnoty v 1, 2, 3, 5 a 10 budoucích letech a následně probíhá vyhodnocení, zda jsou hodnoty v budoucích letech reálné. Pokud je to

možné, tak jsou predikované hodnoty porovnány s hodnotami, které v té době doopravdy byly.

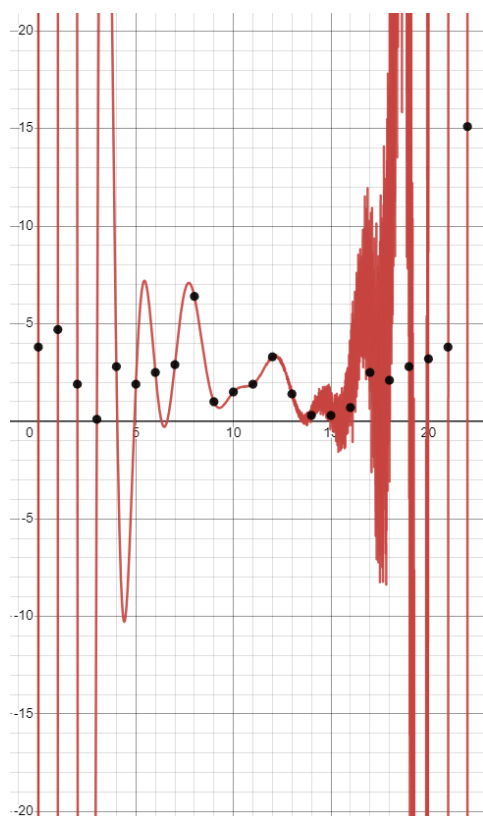
Dále se u dat testuje, zda je možné predikovat hodnoty v budoucnu na základě lineární regrese, kde roky se dosazují za x .

7.1 Vysvětlení metodiky

Proč se vybírají hodnoty 6 let a nevybírají se hodnoty rovnou 23 let?

Hodnoty 6 let jsou vybrány z důvodu, že interpolační polynom se hodí pro interpolaci menšího počtu dat jak již bylo zmíněno v kapitole 3 Interpolace. Když budeme počítat s 6 hodnotami, tak budeme počítat s polynomem stupně nejvýše 5. Ale pokud bychom vzali například 23 hodnot, tak bychom počítali s polynomem až 22. stupně a jak je znázorněno na grafu 11, tak taková funkce určitě není vhodná pro predikci budoucích hodnot ani k interpolaci hodnot mezi známými body, protože velmi fluktuuje.

Graf 11: Nevhodný interpolační polynom 22. stupně pro hodnoty průměrné roční míry inflace v letech 2000–2022



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Proč interpolační polynom má hodnoty od $x_0 = 1$ a nemá je například od $x_0 = 2016$?

Důvod tohoto postupu je, že nezáleží na tom, jestli hodnoty osy x budeme zadávat jako 2016, 2017, ..., 2020, 2021, anebo jestli je budeme zadávat jako 1, 2, ..., 5, 6. Jak je znázorněno níže, tak použití $x_i = 1, 2, \dots, 5, 6$, kde $i = 0, \dots, 5$ je lepší na interpretaci, dosazení do vzorce a pro zápis.

Pracujeme-li s $f_i = 27\,764, 29\,638, 32\,051, 34\,578, 36\,176, 38\,277$, pak pro $x_i = 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021$ je interpolační polynom následující:

$$P(x) = 25,775x^5 - 260\,095x^4 + 1\,049\,849\,113,7916x^3 - 2\,118\,804\,222\,358x^2 + 2\,138\,083\,537\,817\,019,933x - 863\,015\,096\,585\,304\,556$$

a hodnota v bodě $x = 2022$ je $P(2022) = 47\,881$.

Pro $x_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ je interpolační polynom následující:

$$P(x) = 25,775x^5 - 412,37x^4 + 2\,377,5x^3 - 6\,006,1x^2 + 8\,636,2x + 23\,143$$

a hodnota v bodě $x = 7$ je $P(7) = 47\,881$.

Proč jsou rovnice v této práci zaokrouhlené a hodnoty v bodech jsou počítány přesně?

Důvod tohoto postupu je, že rovnice mají často velký počet desetinných míst. Když bychom vzali například rovnici lineární regrese z kapitoly 9.1, která má pouze dva koeficienty (interpolační polynomy mají v této práci 5 a 6 koeficientů), tak zaokrouhlená má podobu:

$$y = 1\,022,71x - 2\,032\,091,86$$

a nezaokrouhlená má podobu:

$$y = 1\,022,71428571429x - 2\,032\,091,85714286.$$

Pro zobrazení v této bakalářské práci postačuje zaokrouhlená verze, protože je přehlednější. Výsledky v jednotlivých bodech jsou počítány pomocí matematického softwaru, který počítá s originální rovnicí bez zaokrouhlení, což vede k co nejpřesnějším výsledkům. Je možné dosazovat i do zaokrouhlené rovnice, ale výsledky se budou mírně lišit.

8 Testování – průměrná roční míra inflace

8.1 Průměrná roční míra inflace v letech 2000-2005

Tabulka 5: Průměrná roční míra inflace v letech 2000-2005

ROK	2000	2001	2002	2003	2004	2005
MÍRA INFLACE [%]	3,9	4,7	1,8	0,1	2,8	1,9

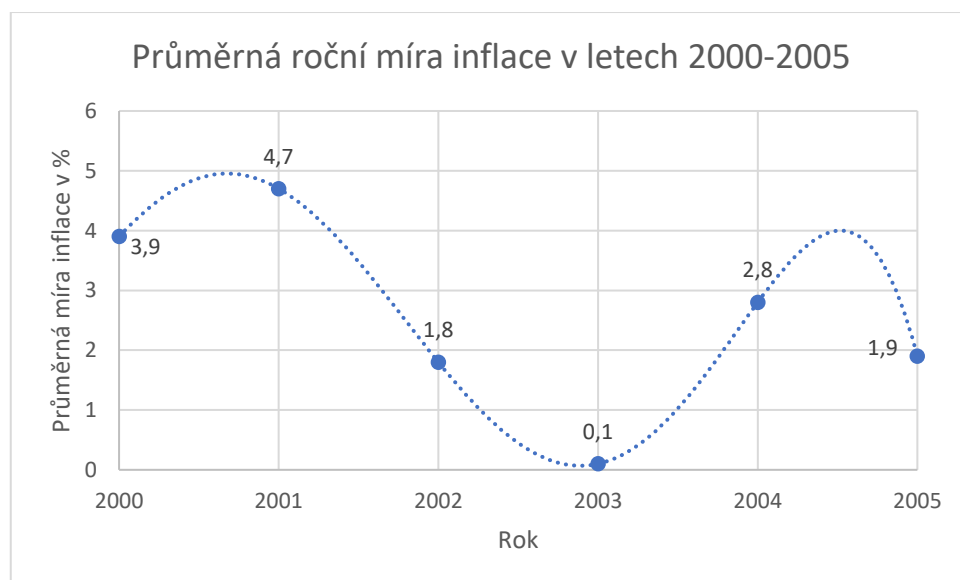
Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Sestavený interpolační polynom pro hodnoty průměrné roční míry inflace v letech 2000-2005 má tvar:

$$P(x) = -0,08x^5 + 1,12x^4 - 5,20x^3 + 8,58x^2 - 2,82x + 2,30$$

Znázorníme si body v grafu a zobrazíme interpolační polynom:

Graf 12: Interpolační polynom – průměrná roční míra inflace v letech 2000-2005



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Podíváme-li se blíže na graf můžeme si všimnout, že interpolační polynom se mezi body chová poměrně očekávaně a nejspíše i přibližně podle reálného vývoje. Jen mezi roky 2004 a 2005 vykazuje známky výraznější fluktuace.

Pokud vynecháme rok 2001 (2. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = -0,3875x^4 + 5,6417x^3 - 27,912x^2 + 52,758x - 26,2$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2001 (2. bod) hodnotu: **6,6 %**

Odchylka od originální hodnoty se vypočítá takto:

$$|\text{interpolační hodnota} - \text{originální hodnota}| = |6,6 - 4,7| = 1,9 \%$$

Pokud vynecháme rok 2002 (3. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = -0,3083x^4 + 4,375x^3 - 20,867x^2 + 37,4x - 16,7$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2002 (3. bod) hodnotu: **0,85 %**

Odchylka od originální hodnoty: $|0,85 - 1,8| = 0,95 \%$

Pokud vynecháme rok 2003 (4. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = -0,2292x^4 + 3,2667x^3 - 15,721x^2 + 28,533x - 11,95$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2003 (4. bod) hodnotu: **1,05 %**

Odchylka od originální hodnoty: $|1,05 - 0,1| = 0,95 \%$

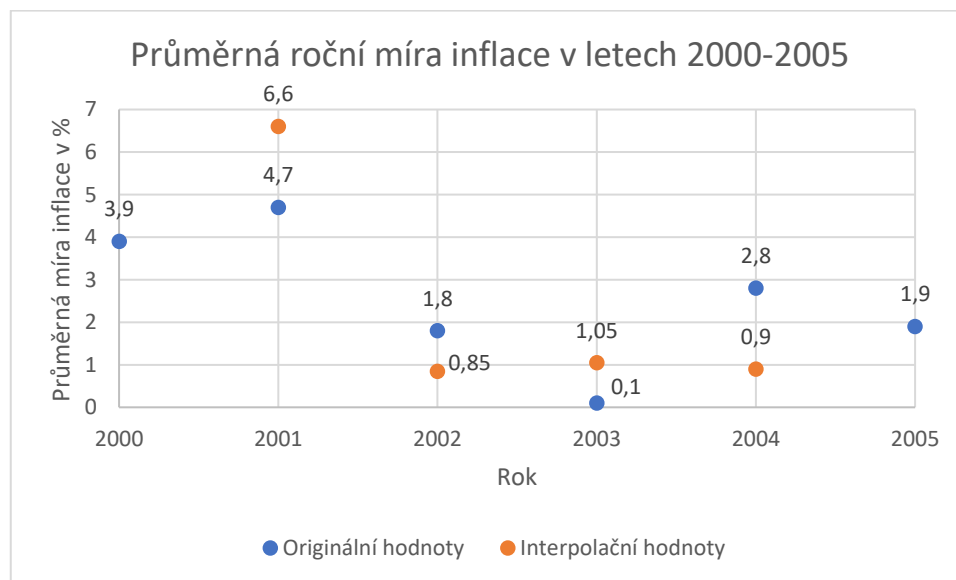
Pokud vynecháme rok 2004 (5. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = -0,15x^4 + 2,3167x^3 - 12x^2 + 22,833x - 9,1$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2004 (pro 5. bod) hodnotu: **0,9 %**

Odchylka od originální hodnoty: $|0,9 - 2,8| = 1,9 \%$

Graf 13: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou roční míru inflace 2000-2005



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování a vlastní výpočty autor

Z grafu je vidět, že interpolační hodnoty se liší od originálních hodnot, maximálně o 1,9 procentního bodu, proto je spíše nevhodné používat interpolační polynom pro odhad chybějících hodnot, na této časové řadě, mezi známými body.

Jak by vycházely hodnoty v budoucích letech pro původní interpolační polynom?

$$P(x) = -0,08x^5 + 1,12x^4 - 5,20x^3 + 8,58x^2 - 2,82x + 2,30$$

Po 1 roce, v roce 2006 (7. bod), by hodnota byla: **-31,3 %**, ve skutečnosti: **2,5 %**

Po 2 letech, v roce 2007 (8. bod), by hodnota byla: **-155,7 %**, ve skutečnosti: **2,9 %**

Po 3 letech, v roce 2008 (9. bod), by hodnota byla: **-469,9 %**, ve skutečnosti: **6,4 %**

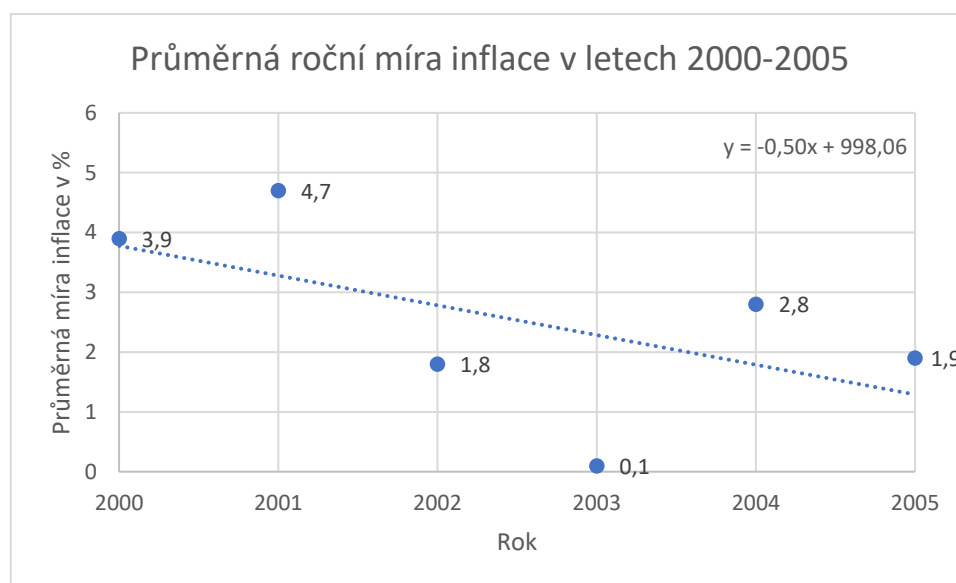
Po 5 letech, v roce 2010 (11. bod), by hodnota byla: **-2 317,6 %**, ve skutečnosti: **1,5 %**

Po 10 letech, v roce 2015 (16. bod), by hodnota byla: **-28 992,1 %**, ve skutečnosti: **0,7 %**

Tyto predikované hodnoty nedávají žádný smysl z krátkodobého ani dlouhodobého hlediska. Použití interpolačního polynomu na tuto časovou řadu pro predikci budoucích hodnot není vůbec vhodné.

Vyzkoušíme použití lineární regrese pro predikci hodnot v budoucnu.

Graf 14: Lineární regrese – průměrná roční míra inflace v letech 2000-2005



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Jak by vycházely hodnoty v budoucích letech za použití lineární regrese?

Rovnice lineární regrese v tomto případě vychází: $y = -0,50x + 998,06$

Po 1 roce, v roce 2006, by hodnota byla: **0,79 %**, ve skutečnosti: **2,5 %**

Po 2 letech, v roce 2007, by hodnota byla: **0,30 %**, ve skutečnosti: **2,9 %**

Po 3 letech, v roce 2008, by hodnota byla: **-0,20 %**, ve skutečnosti: **6,4 %**

Po 5 letech, v roce 2010, by hodnota byla: **-1,20 %**, ve skutečnosti: **1,5 %**

Po 10 letech, v roce 2015, by hodnota byla: **-3,68 %**, ve skutečnosti: **0,7 %**

Výsledky predikovaných hodnot prostřednictvím lineární regrese na této časové řadě jsou rozhodně lepší, než při použití interpolačního polynomu. Z krátkodobého hlediska jsou predikované hodnoty poměrně vzdálené od hodnot, které v té době doopravdy byly. Z dlouhodobého hlediska tato metoda nedává smysl, protože u x se nachází záporný koeficient a to znamená, že inflace by konstantně klesala až do minus nekonečna.

8.2 Průměrná roční míra inflace v letech 2006-2011

Tabulka 6: Průměrná roční míra inflace v letech 2006-2011

ROK	2006	2007	2008	2009	2010	2011
MÍRA INFLACE [%]	2,5	2,8	6,3	1	1,5	1,9

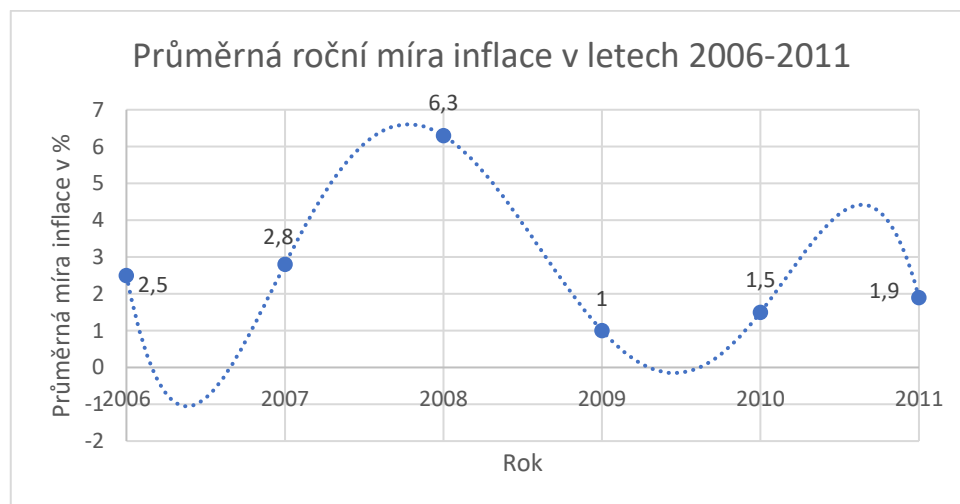
Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Sestavený interpolační polynom pro hodnoty průměrné roční míry inflace v letech 2006-2011 má tvar:

$$P(x) = -0,3925x^5 + 6,9958x^4 - 46,446x^3 + 140,7x^2 - 189,46x + 91,1$$

Znázorníme si body v grafu a zobrazíme interpolační polynom:

Graf 15: Interpolační polynom – průměrná roční míra inflace v letech 2006-2011



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

V grafu je vidět rychlé klesání a rychlé stoupání mezi lety 2006 a 2007, mezi lety 2007 až 2009 se interpolační polynom projevuje poměrně dobře, ale mezi lety 2009 až 2011 dochází opět k většímu kolísání, než by bylo žádoucí.

Pokud vynecháme rok 2007 (2. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = -0,4617x^4 + 7,3267x^3 - 40,238x^2 + 86,073x - 50,2$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2007 (2. bod) hodnotu: **12,22 %**

Odchylka od originální hodnoty: $|12,22 - 2,8| = 9,42 \%$

Pokud vynecháme rok 2008 (3. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = -0,0692x^4 + 1,0467x^3 - 5,3058x^2 + 9,9283x - 3,1$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2008 (3. bod) hodnotu: **1,59 %**

Odchylka od originální hodnoty: $|1,59 - 6,3| = 4,71 \%$

Pokud vynecháme rok 2009 (4. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 0,3233x^4 - 4,4483x^3 + 20,207x^2 - 34,032x + 20,45$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2009 (4. bod) hodnotu: **5,71 %**

Odchylka od originální hodnoty: $|5,71 - 1| = 4,71 \%$

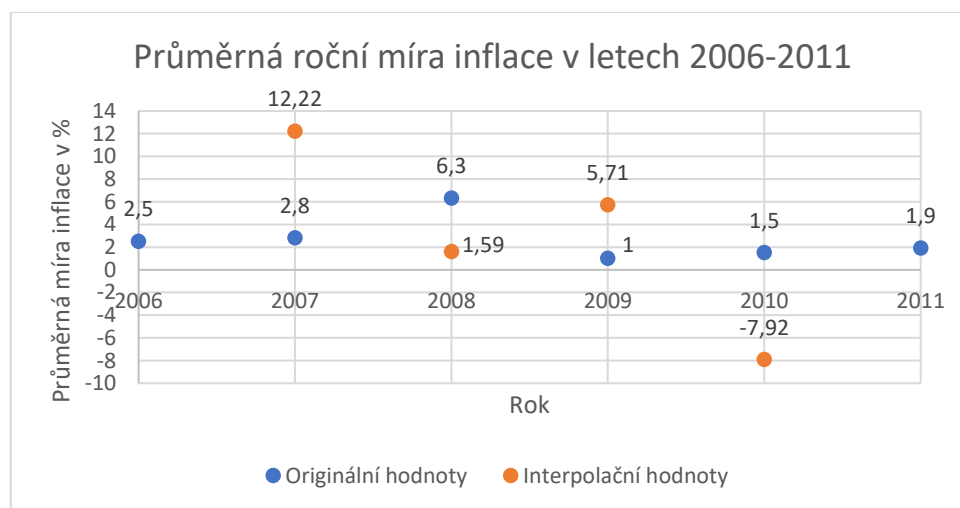
Pokud vynecháme rok 2010 (5. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 0,7158x^4 - 9,1583x^3 + 38,654x^2 - 62,292x + 34,58$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2010 (5. bod) hodnotu: **-7,92 %**

Odchylka od originální hodnoty: $|-7,92 - 1,5| = 9,42\%$

Graf 16: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou roční míru inflace 2006-2011



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování a vlastní výpočty autor

V grafu je znázorněno, že interpolační hodnoty se liší od originálních hodnot značně, dokonce se liší výrazně více než v předchozím případě, proto určitě není vhodné používat

interpolační polynom pro odhad chybějících hodnot, na této časové řadě, mezi známými body.

Jak by vycházely hodnoty v budoucích letech pro původní interpolační polynom?

$$P(x) = -0,3925x^5 + 6,9958x^4 - 46,446x^3 + 140,7x^2 - 189,46x + 91,1$$

Po 1 roce, v roce 2012 (7. bod), by hodnota byla: **-71,3 %**, ve skutečnosti: **3,3 %**

Po 2 letech, v roce 2013 (8. bod), by hodnota byla: **-406,3 %**, ve skutečnosti: **1,4 %**

Po 3 letech, v roce 2014 (9. bod), by hodnota byla: **-1 353,1 %**, ve skutečnosti: **0,3 %**

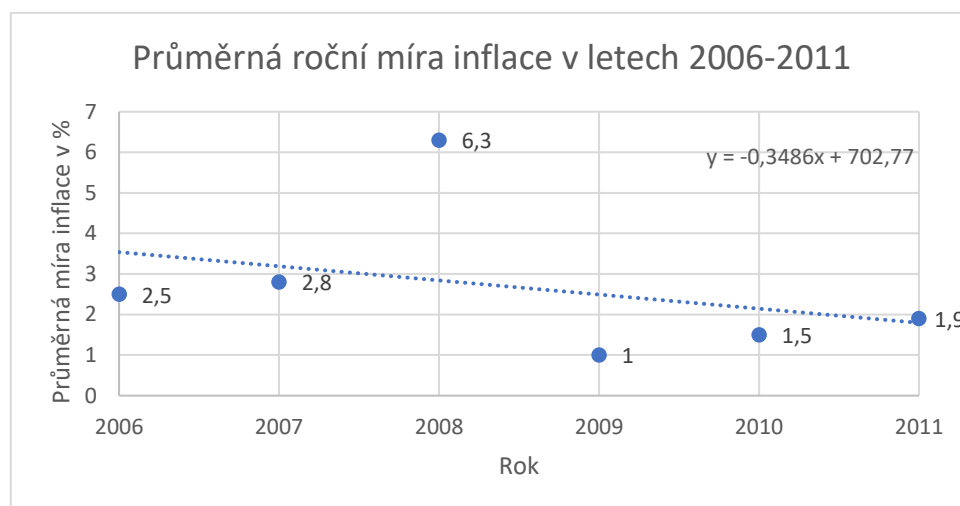
Po 5 letech, v roce 2016 (11. bod), by hodnota byla: **-7 573,7 %**, ve skutečnosti: **0,7 %**

Po 10 letech, v roce 2021 (16. bod), by hodnota byla: **-110 249,3 %**, ve skutečnosti: **3,8 %**

Tyto predikované hodnoty nedávají žádný smysl z krátkodobého ani dlouhodobého hlediska. Použití interpolačního polynomu na tuto časovou řadu pro predikci budoucích hodnot není vůbec vhodné.

Vyzkoušíme použití lineární regrese pro predikci hodnot v budoucnu.

Graf 17: Lineární regrese – průměrná roční míra inflace v letech 2006-2011



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Jak by vycházely hodnoty v budoucích letech za použití lineární regrese?

Rovnice lineární regrese v tomto případě vychází: $y = -0,3486x + 702,77$

Po 1 roce, v roce 2012, by hodnota byla: **1,45 %**, ve skutečnosti: **3,3 %**

Po 2 letech, v roce 2013, by hodnota byla: **1,1 %**, ve skutečnosti: **1,4 %**

Po 3 letech, v roce 2014, by hodnota byla: **0,75 %**, ve skutečnosti: **0,3 %**

Po 5 letech, v roce 2016, by hodnota byla: **0,05 %**, ve skutečnosti: **0,7 %**

Po 10 letech, v roce 2021, by hodnota byla: **-1,69 %**, ve skutečnosti: **3,8 %**

V tomto období jsou predikované hodnoty blízko skutečným hodnotám v letech 2013, 2014 a 2016. V krátkodobém horizontu by tedy bylo možné v tomto případě použít lineární regresi pro predikci budoucích hodnot (pomineme-li větší odchylku v roce 2012). V dlouhodobém horizontu by však lineární regrese vhodná nebyla, protože směrnice regresní přímky má v tomto případě záporný koeficient a to znamená, že by inflace konstantně klesala každým rokem o stejnou hodnotu. To není vhodné pro predikci inflace, protože inflace v závislosti na čase konstantně neklesá k minus nekonečno.

8.3 Průměrná roční míra inflace v letech 2012-2017

Tabulka 7: Průměrná roční míra inflace v letech 2012-2017

ROK	2012	2013	2014	2015	2016	2017
MÍRA INFLACE [%]	3,3	1,4	0,4	0,3	0,7	2,5

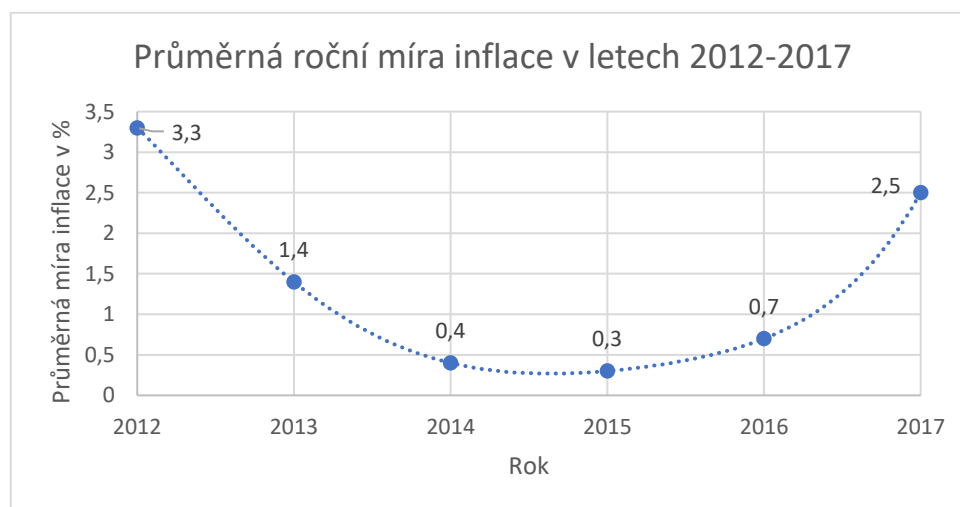
Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Sestavený interpolační polynom pro hodnoty průměrné roční míry inflace v letech 2012-2017 má tvar:

$$P(x) = 0,0142x^5 - 0,2292x^4 + 1,3708x^3 - 3,3208x^2 + 1,465x + 4$$

Znáznorníme si body v grafu a zobrazíme interpolační polynom:

Graf 18: Interpolační polynom – průměrná roční míra inflace v letech 2012-2017



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Tento graf vypadá jinak než předchozí dva grafy (v kapitolách 8.1 a 8.2), které se “více vlnily“. Graf na tomto intervalu připomíná s trochou představivosti parabolu. Tento interpolační polynom prochází daty, pravděpodobně tak, jako tomu bylo přibližně ve skutečnosti.

Pokud vynecháme rok 2013 (2. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 0,04x^4 - 0,57x^3 + 3,21x^2 - 8,48x + 9,1$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2013 (2. bod) hodnotu: **1,06 %**

Odchylka od originální hodnoty: $|1,06 - 1,4| = 0,34 \%$

Pokud vynecháme rok 2014 (3. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 0,0258x^4 - 0,3433x^3 + 1,9492x^2 - 5,7317x + 7,4$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2014 (3. bod) hodnotu: **0,57 %**

Odchylka od originální hodnoty: $|0,57 - 0,4| = 0,17 \%$

Pokud vynecháme rok 2015 (4. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 0,0117x^4 - 0,145x^3 + 1,0283x^2 - 4,145x + 6,55$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2015 (4. bod) hodnotu: **0,13 %**

Odchylka od originální hodnoty: $|0,13 - 0,3| = 0,17 \%$

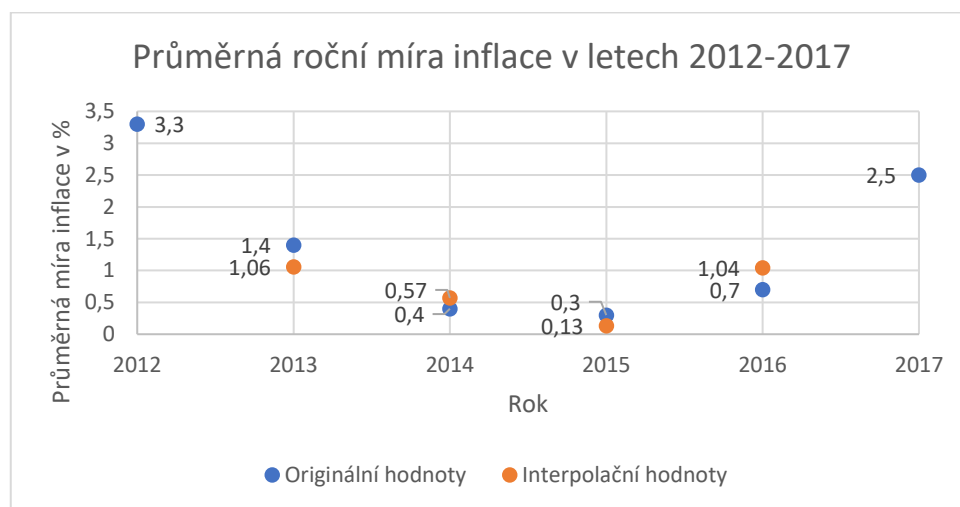
Pokud vynecháme rok 2016 (5. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = -0,0025x^4 + 0,025x^3 + 0,3625x^2 - 3,125x + 6,04$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2016 (5. bod) hodnotu: **1,04 %**

Odchylka od originální hodnoty: $|1,04 - 0,7| = 0,34 \%$

Graf 19: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou roční míru inflace 2012-2017



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování a vlastní výpočty autor

Z grafu je vidět, že interpolační hodnoty se liší od originálních hodnot méně než v předchozích dvou případech. Pravděpodobně by na tuto časovou řadu bylo vhodné použít interpolační polynom pro přibližný odhad chybějících hodnot mezi známými body (obzvlášť pro roky 2014 a 2015).

Jak by vycházely hodnoty v budoucích letech pro původní interpolační polynom?

$$P(x) = 0,0142x^5 - 0,2292x^4 + 1,3708x^3 - 3,3208x^2 + 1,465x + 4$$

Po 1 roce, v roce 2018 (7. bod), by hodnota byla: **9,6 %**, ve skutečnosti: **2,1 %**

Po 2 letech, v roce 2019 (8. bod), by hodnota byla: **30,6 %**, ve skutečnosti: **2,8 %**

Po 3 letech, v roce 2020 (9. bod), by hodnota byla: **80,5 %**, ve skutečnosti: **3,2 %**

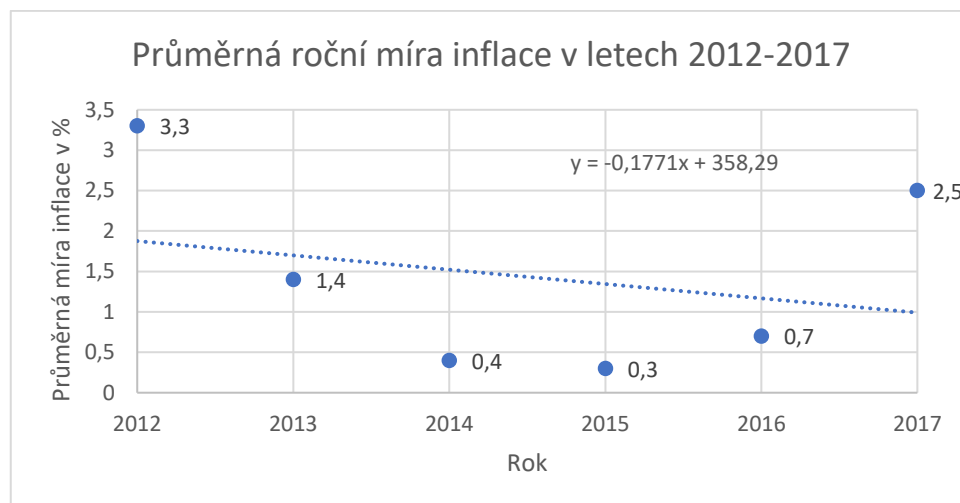
Po 5 letech, v roce 2022 (11. bod), by hodnota byla: **369,2 %**, ve skutečnosti: **15,1 %**

Po 10 letech, v roce 2027 (16. bod), by hodnota byla: **4628,4 %**

Tyto predikované hodnoty nedávají žádný smysl z krátkodobého ani dlouhodobého hlediska. Použití interpolačního polynomu na tuto časovou řadu pro predikci budoucích hodnot není vůbec vhodné.

Vyzkoušíme použití lineární regrese pro predikci hodnot v budoucnu.

Graf 20: Lineární regrese – průměrná roční míra inflace v letech 2012-2017



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Jak by vycházely hodnoty v budoucích letech za použití lineární regrese?

Rovnice lineární regrese v tomto případě vychází: $y = -0,1771x + 358,29$

Po 1 roce, v roce 2018, by hodnota byla: **0,81 %**, ve skutečnosti: **2,1 %**

Po 2 letech, v roce 2019, by hodnota byla: **0,64 %**, ve skutečnosti: **2,8 %**

Po 3 letech, v roce 2020, by hodnota byla: **0,46 %**, ve skutečnosti: **3,2 %**

Po 5 letech, v roce 2022, by hodnota byla: **0,11 %**, ve skutečnosti: **15,1 %**

Po 10 letech, v roce 2027, by hodnota byla: **-0,78 %**

Výsledky predikovaných hodnot prostřednictvím lineární regrese na této časové řadě jsou rozhodně lepší, než při použití interpolačního polynomu. Z krátkodobého hlediska jsou predikované hodnoty poměrně vzdálené od hodnot, které v té době doopravdy byly. Z dlouhodobého hlediska tato metoda nedává smysl, protože u x se nachází záporný koeficient a to znamená, že inflace by konstantně klesala až do minus nekonečna (v tomto případě pomaleji než v předchozích dvou případech).

8.4 Průměrná roční míra inflace v letech 2017-2022

Tento interval je poněkud jiný než předchozí 3 intervaly, protože rok 2022 byl z hlediska průměrné roční míry inflace výjimečný. Průměrná roční míra inflace tento rok dosáhla 15,1 %, což je poměrně daleko od ostatních hodnot, které byly v předchozích letech. Když

bychom chtěli dělat analýzu dat, tak bychom nejspíše rok 2022 vynechali, ale my s rokem 2022 pracovat budeme, abychom si ukázali co se v tomto případě stane.

Tabulka 8: Průměrná roční míra inflace v letech 2017–2022

ROK	2017	2018	2019	2020	2021	2022
MÍRA INFLACE [%]	2,5	2,1	2,8	3,2	3,8	15,1

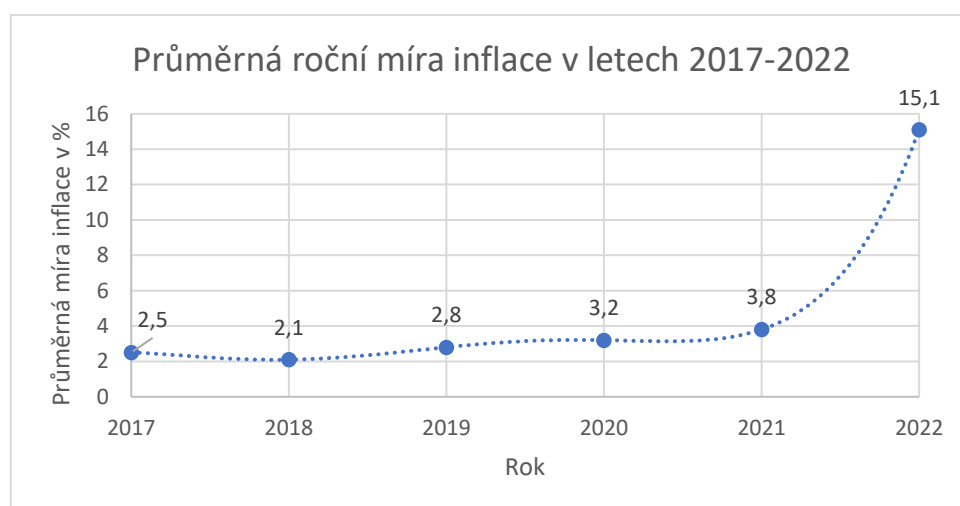
Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Sestavený interpolační polynom pro hodnoty průměrné roční míry inflace v letech 2017–2022 má tvar:

$$P(x) = 0,0675x^5 - 0,9333x^4 + 4,7125x^3 - 10,467x^2 + 9,92x - 0,8$$

Znáznorníme si body v grafu a zobrazíme interpolační polynom:

Graf 21: Interpolační polynom – průměrná roční míra inflace v letech 2017–2022



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Opět jako v předchozím případě (8.3) máme graf, který vypadá poměrně dobře a nefluktuje tolik jako v prvních dvou případech (8.1 a 8.2). Tento interpolační polynom prochází daty, pravděpodobně tak, jako tomu bylo přibližně ve skutečnosti.

Pokud vynecháme rok 2018 (2. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 0,3492x^4 - 4,535x^3 + 20,651x^2 - 37,465x + 23,5$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2018 (2. bod) hodnotu: **0,48 %**

Odchylka od originální hodnoty: $|0,48 - 2,1| = 1,62 \%$

Pokud vynecháme rok 2019 (3. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 0,2817x^4 - 3,455x^3 + 14,643x^2 - 24,37x + 15,4$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2019 (3. bod) hodnotu: **3,61 %**

Odchylka od originální hodnoty: $|3,61 - 2,8| = 0,81 \%$

Pokud vynecháme rok 2020 (4. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 0,2142x^4 - 2,51x^3 + 10,256x^2 - 16,81x + 11,35$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2020 (4. bod) hodnotu: **2,39 %**

Odchylka od originální hodnoty: $|2,39 - 3,2| = 0,81 \%$

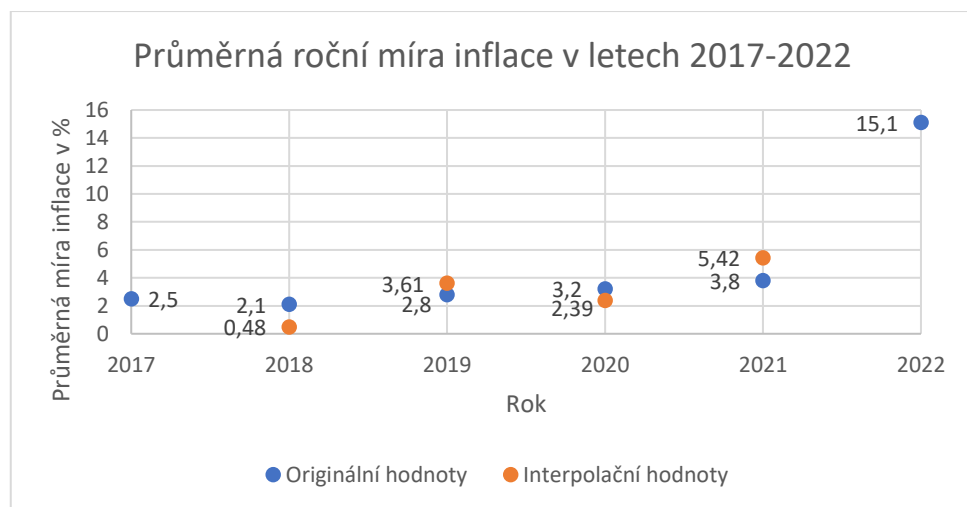
Pokud vynecháme rok 2021 (5. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 0,1467x^4 - 1,7x^3 + 7,0833x^2 - 11,95x + 8,92$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2021 (5. bod) hodnotu: **5,42 %**

Odchylka od originální hodnoty: $|5,42 - 3,8| = 1,62 \%$

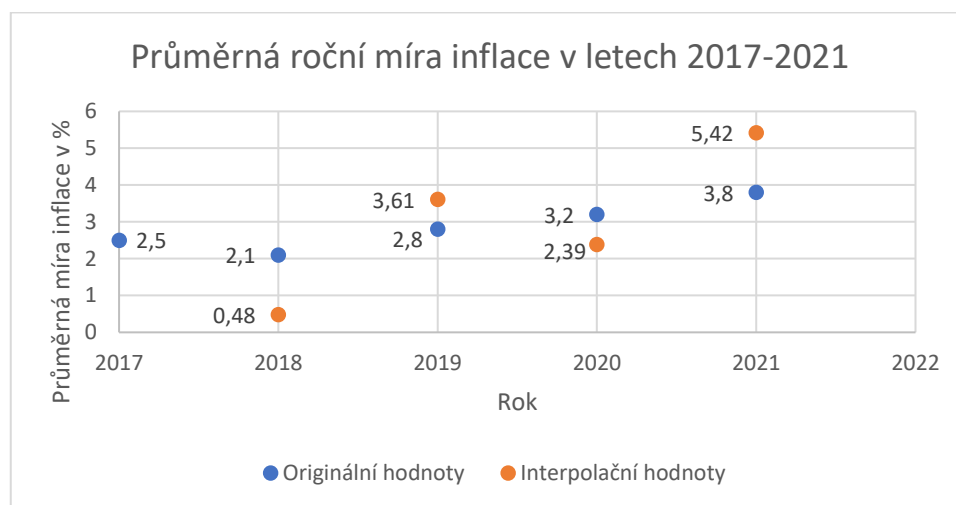
Graf 22: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou roční míru inflace 2017-2022



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování a vlastní výpočty autor

Z grafu se může vizuálně zdát, že rozdíly mezi interpolačními hodnotami a originálními hodnotami nejsou tak velké, protože zde rok 2022 zkresluje pohled na graf. Když bychom rok 2022 vynechali, vizuálně bychom viděli větší mezery mezi těmito hodnotami.

Graf 23: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou roční míru inflace 2017-2021



Zdroj: Data z ČŠÚ, zpracování a vlastní výpočty autor

Zde jsme již údaj z roku 2022 vynechali a můžeme si všimnout vizuálně větších mezer mezi originálními a interpolačními hodnotami. Použití interpolačního polynomu je spíše nevhodné pro odhad chybějících hodnot, na této časové řadě, mezi známými body.

Jak by vycházely hodnoty v budoucích letech pro původní interpolační polynom?

$$P(x) = 0,0675x^5 - 0,9333x^4 + 4,7125x^3 - 10,467x^2 + 9,92x - 0,8$$

Po 1 roce, v roce 2023 (7. bod), by hodnota byla: **65,7 %**

Po 2 letech, v roce 2024 (8. bod), by hodnota byla: **210 %**

Po 3 letech, v roce 2025 (9. bod), by hodnota byla: **538,3 %**

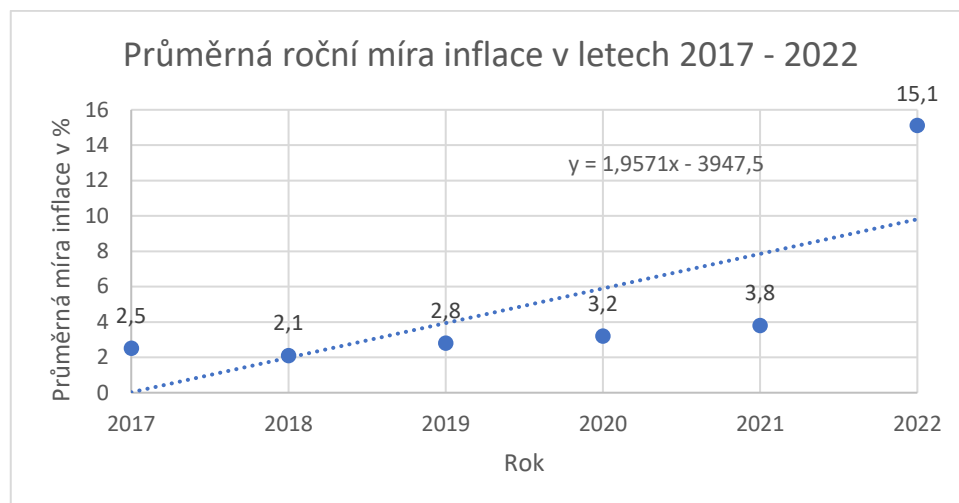
Po 5 letech, v roce 2027 (11. bod), by hodnota byla: **2320,2 %**

Po 10 letech, v roce 2032 (16. bod), by hodnota byla: **26392,8 %**

Tyto predikované hodnoty nedávají žádný smysl z krátkodobého ani dlouhodobého hlediska. Použití interpolačního polynomu na tuto časovou řadu pro predikci budoucích hodnot není vůbec vhodné.

Vyzkoušíme použití lineární regrese pro predikci hodnot v budoucnu.

Graf 24: Lineární regrese – průměrná roční míra inflace v letech 2017-2022



Zdroj: Data z ČŠÚ, zpracování autor

Jak by vycházely hodnoty v budoucích letech za použití lineární regrese?

Rovnice lineární regrese v tomto případě vychází: $y = 1,9571x - 3947,5$

Po 1 roce, v roce 2023, by hodnota byla: **11,77 %**

Po 2 letech, v roce 2024, by hodnota byla: **13,72 %**

Po 3 letech, v roce 2025, by hodnota byla: **15,68 %**

Po 5 letech, v roce 2027, by hodnota byla: **19,6 %**

Po 10 letech, v roce 2032, by hodnota byla: **29,38 %**

Výsledky predikovaných hodnot prostřednictvím lineární regrese na této časové řadě jsou rozhodně lepší, než při použití interpolačního polynomu. Z krátkodobého hlediska by lineární regrese dávala smysl maximálně pro první predikovaný rok, protože se dá očekávat, že inflace v budoucím roce bude klesat k inflačnímu cíli ČNB. Z dlouhodobého hlediska tato metoda nedává smysl, protože u x se nachází kladný koeficient a to znamená, že inflace by konstantně rostla až do plus nekonečna. Kvůli hodnotě z roku 2022 lineární regrese roste rychleji, než by tomu bylo bez zahrnutí roku 2022.

8.5 Vyhodnocení

8.5.1 Vhodnost interpolace interpolačním polynomem mezi známými body

V období 2012-2017 se ukázalo, že použití interpolačního polynomu pro odhad chybějících hodnot je vhodné. Naopak v období 2006-2011 se ukázalo, že vhodné není. V obdobích 2000-2005 a 2017-2022 záleží na preferencích jak moc velká odchylka od originální hodnoty je pro nás přijatelná, ale spíše se domnívám, že použití interpolačního polynomu u těchto dvou období vhodné není. Aritmetický průměr všech 16 odchylek je 2,49procentního bodu. Aritmetický průměr 12 odchylek (bez období 2016-2011) je 0,97procentního bodu.

8.5.2 Predikce interpolačním polynomem

Predikce interpolačním polynomem vyšla, že je zcela nevhodná z krátkodobého i dlouhodobého hlediska, protože hodnoty mimo interval se známými hodnotami velmi rychle rostly nebo klesaly k plus nebo minus nekonečnu.

8.5.3 Predikce lineární regrese

Použití lineární regrese pro predikci budoucích hodnot průměrné roční míry inflace je taktéž nevhodné. Z krátkodobého hlediska byla lineární regrese přijatelná pro predikci budoucích hodnot pouze jednou. Z dlouhodobého hlediska lineární regrese nebyla vhodná ani jednou, protože když je kladná směrnice přímky – funkce konstantně roste, když je záporná směrnice přímky – funkce konstantně klesá, což není vhodné pro popis chování inflace. Hodnota inflace není lineárně závislá na čase a ani se lineárně nevyvíjí. Optimálně by se inflace měla pohybovat v dlouhodobém horizontu kolem cíle ČNB ($2 \% \pm 1 \%$), realita je ovšem často jiná.

9 Testování – průměrná hrubá měsíční mzda

9.1 Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2000-2005

Tabulka 9: Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2000-2005

ROK	2000	2001	2002	2003	2004	2005
PRŮM. HR. MĚS. MZDA [Kč]	13219	14378	15524	16430	17466	18344

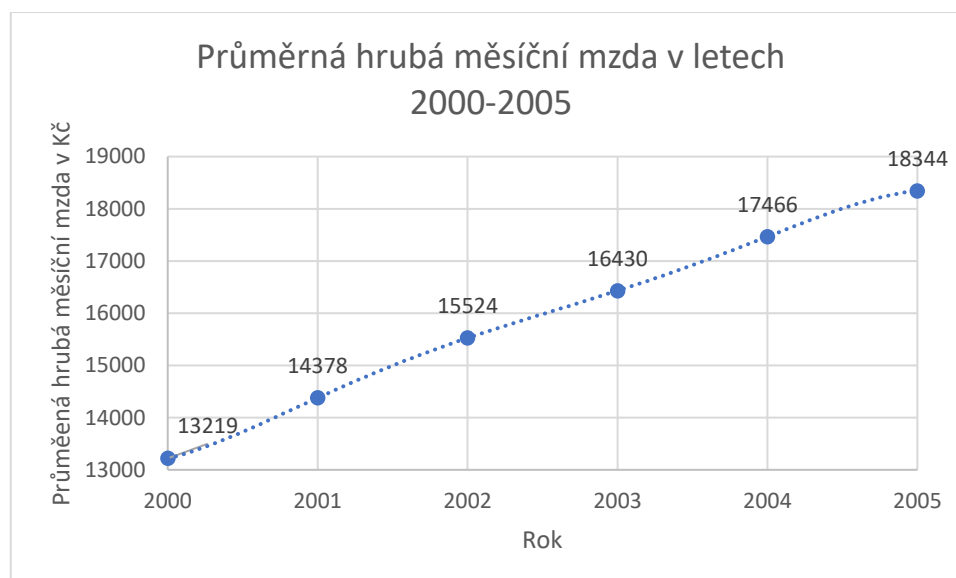
Zdroj: Data z ČŠÚ, zpracování autor

Sestavený interpolační polynom pro hodnoty průměrné hrubé měsíční mzdy v letech 2000-2005 má tvar:

$$P(x) = -10,458x^5 + 181,75x^4 - 1175,5x^3 + 3444,3x^2 - 3347x + 14126$$

Znáznorníme si body v grafu a zobrazíme interpolační polynom:

Graf 25: Interpolační polynom – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2000-2005



Zdroj: Data z ČŠÚ, zpracování autor

Na tomto grafu není vidět žádné výrazné kolísání funkce. Tento interpolační polynom prochází daty, pravděpodobně tak, jako tomu bylo přibližně ve skutečnosti.

Pokud vynecháme rok 2001 (2. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = -16,958x^4 + 257,25x^3 - 1377x^2 + 3994,7x + 10361$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2001 (2. bod) hodnotu: **14629 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|14629 - 14378| = 251$ Kč

Pokud vynecháme rok 2002 (3. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = -6,5x^4 + 89,917x^3 - 446,25x^2 + 1965,8x + 11616$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2002 (3. bod) hodnotu: **15398 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|15398 - 15524| = 126$ Kč

Pokud vynecháme rok 2003 (4. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 3,9583x^4 - 56,5x^3 + 233,54x^2 + 794,5x + 12244$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2003 (4. bod) hodnotu: **16556 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|16556 - 16430| = 126$ Kč

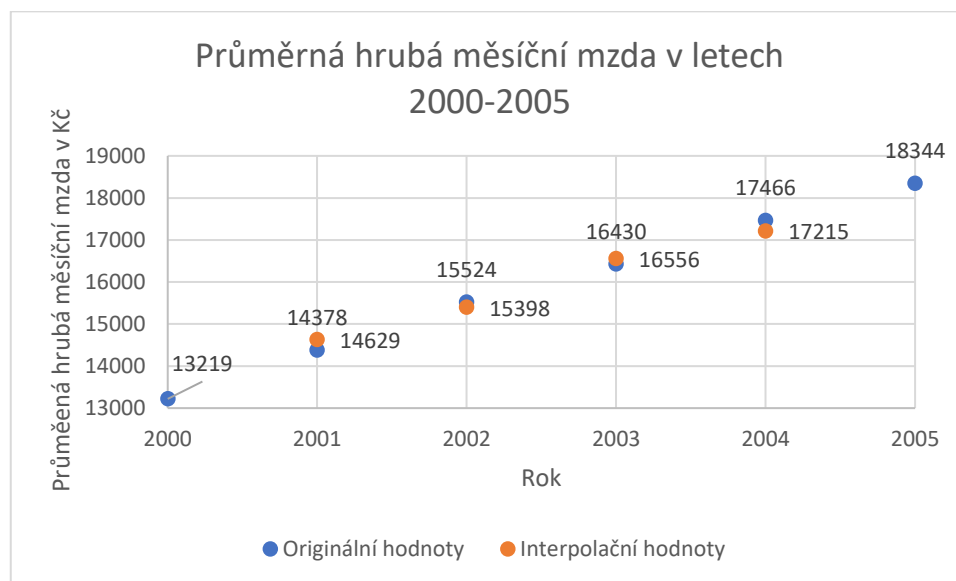
Pokud vynecháme rok 2004 (5. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 14,417x^4 - 182x^3 + 725,08x^2 + 41,5x + 12620$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2004 (5. bod) hodnotu: **17215 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|17215 - 17466| = 251$ Kč

Graf 26: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou hrubou měsíční mzdou 2000-2005



Zdroj: Data z ČŠÚ, zpracování a vlastní výpočty autor

Odchylky jsou v tomto případě zanedbatelné. Pravděpodobně by na tuto časovou řadu bylo vhodné použít interpolační polynom pro přibližný odhad chybějících hodnot mezi známými body.

Jak by vycházely hodnoty v budoucích letech pro původní interpolační polynom?

$$P(x) = -10,458x^5 + 181,75x^4 - 1175,5x^3 + 3444,3x^2 - 3347x + 14126$$

Po 1 roce, v roce 2006 (7. bod), by hodnota byla: **16863 Kč**, ve skutečnosti: **19546 Kč**

Po 2 letech, v roce 2007 (8. bod), by hodnota byla: **7654 Kč**, ve skutečnosti: **20957 Kč**

Po 3 letech, v roce 2008 (9. bod), by hodnota byla: **-19074 Kč**, ve skutečnosti: **22592 Kč**

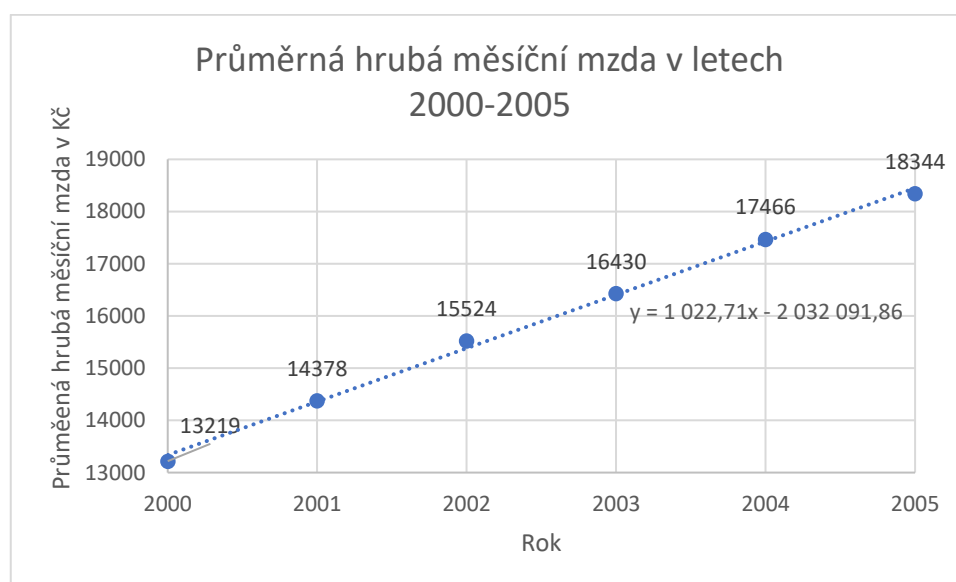
Po 5 letech, v roce 2010 (11. bod), by hodnota byla: **-193905 Kč**, ve skutečnosti: **23864 Kč**

Po 10 letech, v roce 2015 (16. bod), by hodnota byla: **-3027906 Kč**, ve skutečnosti: **27764 Kč**

Hodnota v prvním predikovaném roce je poměrně vzdálená od hodnoty, která byla ve skutečnosti. Od druhého predikovaného roku nedávají predikované hodnoty žádný smysl. Použití interpolačního polynomu na tuto časovou řadu pro predikci budoucích hodnot není vůbec vhodné.

Vyzkoušíme použití lineární regrese pro predikci hodnot v budoucnu.

Graf 27: Lineární regrese – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2000-2005



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Jak by vycházely hodnoty v budoucích letech za použití lineární regrese?

Rovnice lineární regrese v tomto případě vychází: $y = 1022,71x - 2032091,86$

Po 1 roce, v roce 2006, by hodnota byla: **19473 Kč**, ve skutečnosti: **19546 Kč**

Po 2 letech, v roce 2007, by hodnota byla: **20496 Kč**, ve skutečnosti: **20957 Kč**

Po 3 letech, v roce 2008, by hodnota byla: **21518 Kč**, ve skutečnosti: **22592 Kč**

Po 5 letech, v roce 2010, by hodnota byla: **23564 Kč**, ve skutečnosti: **23864 Kč**

Po 10 letech, v roce 2015, by hodnota byla: **28677 Kč**, ve skutečnosti: **27764 Kč**

Lineární regrese se v tomto případě jeví jako vhodná pro predikci budoucích hodnot.

9.2 Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2006-2011

Tabulka 10: Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2006-2011

ROK	2006	2007	2008	2009	2010	2011
PRŮM. HR. MĚS. MZDA [Kč]	19546	20957	22592	23344	23864	24455

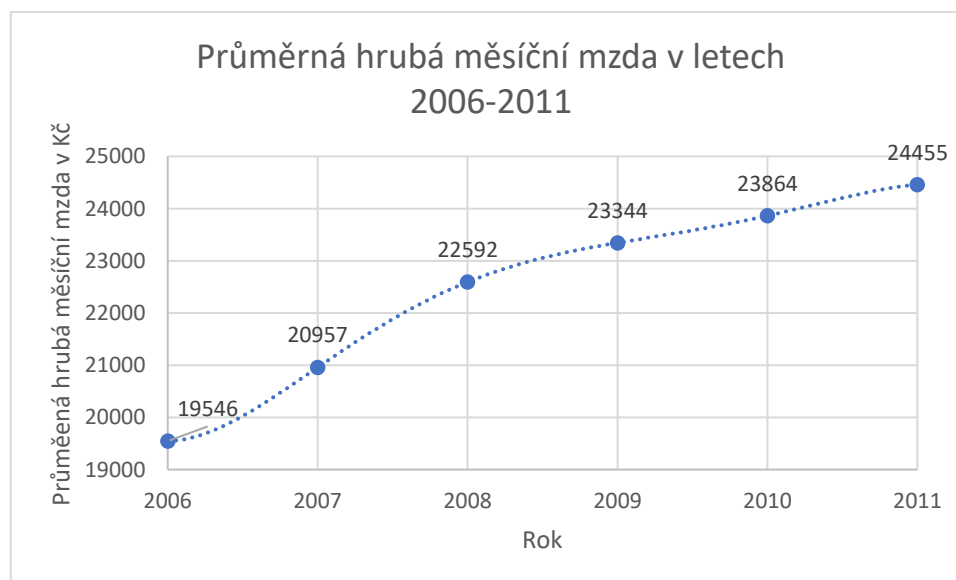
Zdroj: Data z ČŠÚ, zpracování autor

Sestavený interpolační polynom pro hodnoty průměrné hrubé měsíční mzdy v letech 2006-2011 má tvar:

$$P(x) = -17,55x^5 + 336,5x^4 - 2408,8x^3 + 7731,5x^2 - 9425,7x + 23330$$

Znázorníme si body v grafu a zobrazíme interpolační polynom:

Graf 28: Interpolační polynom – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2006-2011



Zdroj: Data z ČŠÚ, zpracování autor

V grafu se opět nenachází žádné výrazné změny v chování funkce. Tento interpolační polynom prochází daty, pravděpodobně tak, jako tomu bylo přibližně ve skutečnosti.

Pokud vynecháme rok 2007 (2. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 3,05x^4 - 4,4x^3 - 359,05x^2 + 2894,4x + 17012$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2007 (2. bod) hodnotu: **21378 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|21378 - 20957| = 421$ Kč

Pokud vynecháme rok 2008 (3. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 20,6x^4 - 285,2x^3 + 1202,9x^2 - 510,3x + 19118$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2008 (3. bod) hodnotu: **22381 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|22381 - 22592| = 211$ Kč

Pokud vynecháme rok 2009 (4. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 38,15x^4 - 530,9x^3 + 2343,6x^2 - 2475,9x + 20171$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2009 (4. bod) hodnotu: **23555 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|23555 - 23344| = 211$ Kč

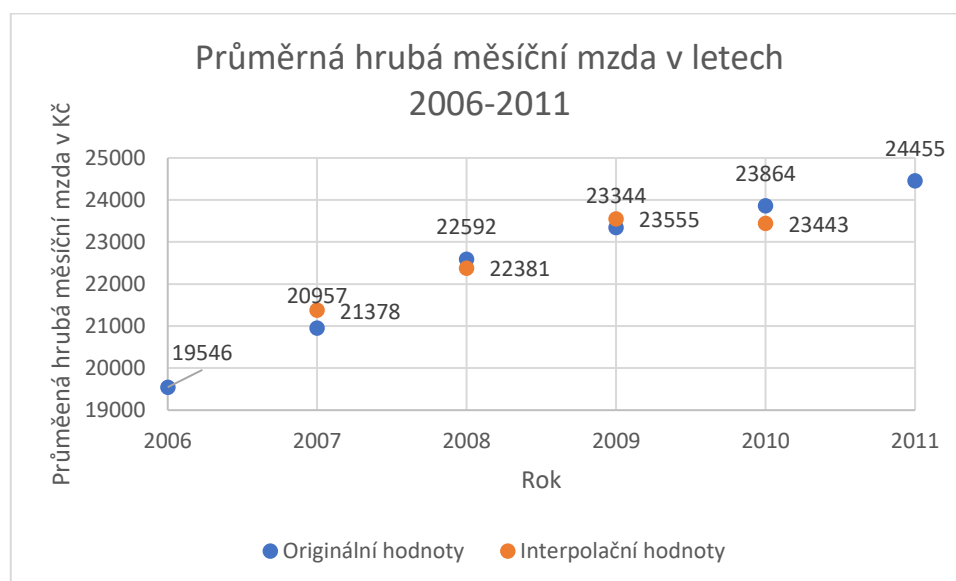
Pokud vynecháme rok 2010 (5. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 55,7x^4 - 741,5x^3 + 3168,5x^2 - 3739,5x + 20803$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2010 (5. bod) hodnotu: **23443 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|23443 - 23864| = 421$ Kč

Graf 29: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou hrubou měsíční mzdou 2006-2011



Zdroj: Data z ČŠÚ, zpracování a vlastní výpočty autor

Odchyly jsou v tomto případě zanedbatelné. Pravděpodobně by na tuto časovou řadu bylo vhodné použít interpolační polynom pro přibližný odhad chybějících hodnot mezi známými body.

Jak by vycházely hodnoty v budoucích letech pro původní interpolační polynom?

$$P(x) = -17,55x^5 + 336,5x^4 - 2408,8x^3 + 7731,5x^2 - 9425,7x + 23330$$

Po 1 roce, v roce 2012 (7. bod), by hodnota byla: **22966 Kč**, ve skutečnosti: **25067 Kč**

Po 2 letech, v roce 2013 (8. bod), by hodnota byla: **12686 Kč**, ve skutečnosti: **25035 Kč**

Po 3 letech, v roce 2014 (9. bod), by hodnota byla: **-19762 Kč**, ve skutečnosti: **25768 Kč**

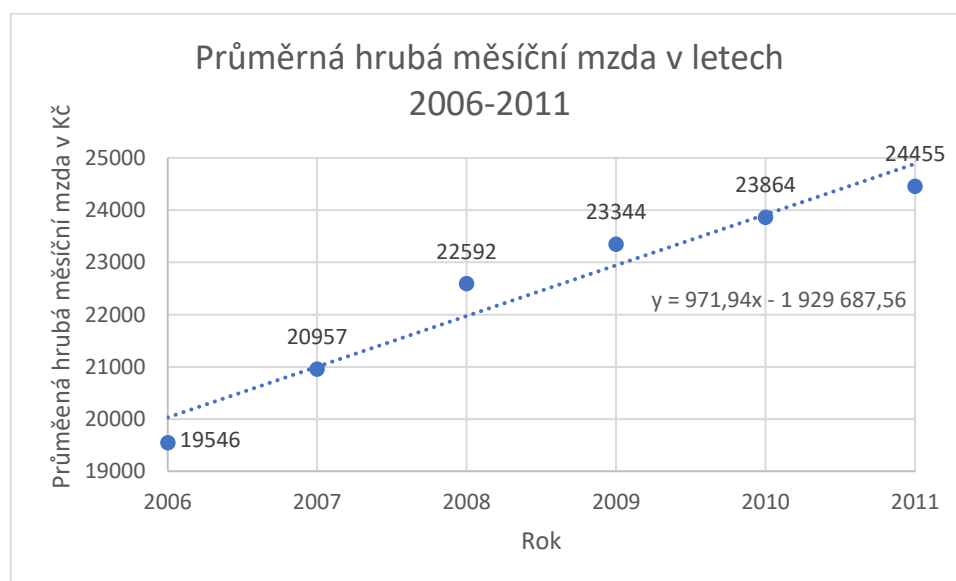
Po 5 letech, v roce 2016 (11. bod), by hodnota byla: **-250636 Kč**, ve skutečnosti: **27764 Kč**

Po 10 letech, v roce 2021 (16. bod), by hodnota byla: **-4364102 Kč**, ve skutečnosti: **38277 Kč**

Hodnota v prvním predikovaném roce je poměrně vzdálená od hodnoty, která byla ve skutečnosti. Od druhého predikovaného roku nedávají hodnoty žádný smysl. Použití interpolačního polynomu na tuto časovou řadu pro predikci budoucích hodnot není vůbec vhodné.

Vyzkoušíme použití lineární regrese pro predikci hodnot v budoucnu.

Graf 30: Lineární regrese – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2006-2011



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Jak by vycházely hodnoty v budoucích letech za použití lineární regrese?

Rovnice lineární regrese v tomto případě vychází: $y = 971,94x - 1929687,56$

Po 1 roce, v roce 2012, by hodnota byla: **25861 Kč**, ve skutečnosti: **25067 Kč**

Po 2 letech, v roce 2013, by hodnota byla: **26833 Kč**, ve skutečnosti: **25035 Kč**

Po 3 letech, v roce 2014, by hodnota byla: **27805 Kč**, ve skutečnosti: **25768 Kč**

Po 5 letech, v roce 2016, by hodnota byla: **29749 Kč**, ve skutečnosti: **27764 Kč**

Po 10 letech, v roce 2021, by hodnota byla: **34608 Kč**, ve skutečnosti: **38277 Kč**

V tomto případě odhadovaná hodnota prvních tří a pěti let je nad hodnotou skutečnou, ale po deseti letech je odhadovaná hodnota pod skutečnou hodnotou. V kapitole 5.2 Průměrná hrubá měsíční mzda je zobrazen graf, ve kterém je vidět vývoj průměrné hrubé měsíční mzdy. Mezi lety 2000-2008 byl nárůst rychlejší, mezi lety 2008-2015 byl nárůst pomalejší a od roku 2015 až do roku 2022 byl nárůst opět rychlejší. Lineární regrese je spíše nevhodná (pouze pro 1. predikovaný rok by byla ještě poměrně přijatelná odchylka), na této časové řadě, pro predikci budoucích hodnot.

9.3 Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2012-2017

Tabulka 11: Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2012-2017

ROK	2012	2013	2014	2015	2016	2017
PRŮM. HR. MĚS. MZDA [Kč]	25067	25035	25768	26591	27764	29638

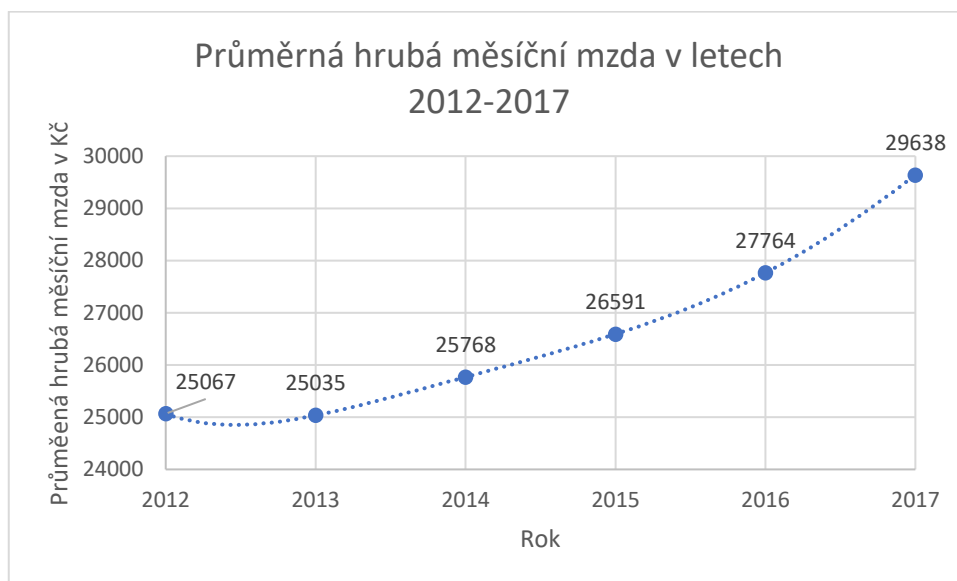
Zdroj: Data z ČŠÚ, zpracování autor

Sestavený interpolační polynom pro hodnoty průměrné hrubé měsíční mzdy v letech 2012-2017 má tvar:

$$P(x) = -7,0333x^5 + 144,46x^4 - 1099,9x^3 + 4003,5x^2 - 6292,1x + 28318$$

Znázorníme si body v grafu a zobrazíme interpolační polynom:

Graf 31: Interpolační polynom – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2012-2017



Zdroj: Data z ČŠÚ, zpracování autor

Na grafu vypadá interpolační polynom dobře, není zde opět vidět žádné výraznější kolísání mezi body. Tento interpolační polynom prochází daty, pravděpodobně tak, jako tomu bylo přibližně ve skutečnosti. Mezi roky 2012 a 2013 dochází k mírnému poklesu a růstu funkce, ale není to výrazné a navíc průměrná hrubá měsíční mzda v roce 2013 byla nižší než v roce 2012.

Pokud vynecháme rok 2013 (2. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 10,825x^4 - 136,35x^3 + 761,18x^2 - 1354,7x + 25786$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2013 (2. bod) hodnotu: **25203 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|25203 - 25035| = 168$ Kč

Pokud vynecháme rok 2014 (tedy 3. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 17,858x^4 - 248,88x^3 + 1387,1x^2 - 2719,1x + 26630$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2014 (3. bod) hodnotu: **25684 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|25684 - 25768| = 84$ Kč

Pokud vynecháme rok 2015 (tedy 4. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 24,892x^4 - 347,35x^3 + 1844,3x^2 - 3506,8x + 27052$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2015 (4. bod) hodnotu: **26675 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|26675 - 26591| = 84$ Kč

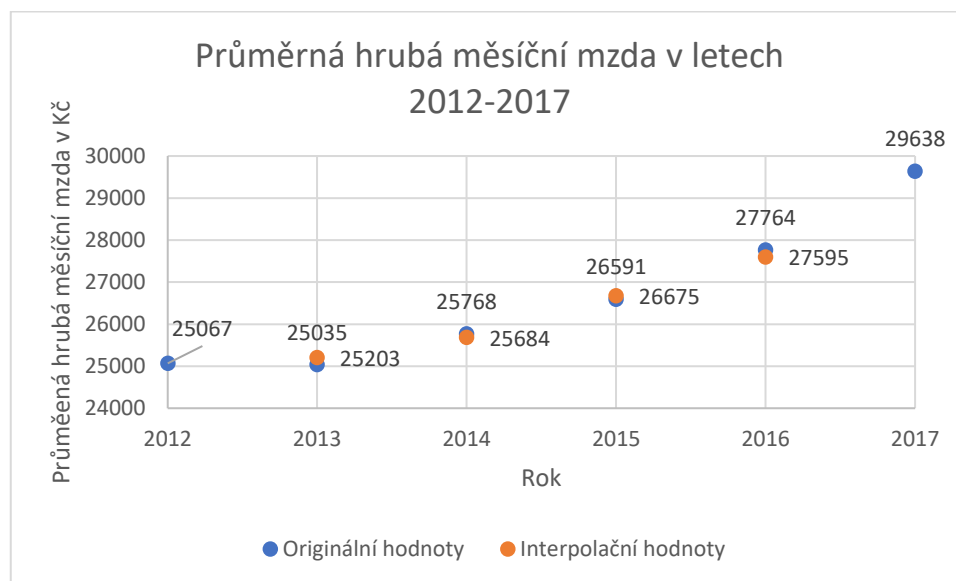
Pokud vynecháme rok 2016 (tedy 5. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 31,925x^4 - 431,75x^3 + 2174,9x^2 - 4013,3x + 27305$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2016 (5. bod) hodnotu: **27595 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|27595 - 27764| = 169$ Kč

Graf 32: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou hrubou měsíční mzdou 2012-2017



Zdroj: Data z ČŠÚ, zpracování a vlastní výpočty autor

Odchylky jsou v tomto případě zanedbatelné. Pravděpodobně by na tuto časovou řadu bylo vhodné použít interpolační polynom pro přibližný odhad chybějících hodnot mezi známými body.

Jak by vycházely hodnoty v budoucích letech pro původní interpolační polynom?

$$P(x) = -7,0333x^5 + 144,46x^4 - 1099,9x^3 + 4003,5x^2 - 6292,1x + 28318$$

Po 1 roce, v roce 2018 (7. bod), by hodnota byla: **31811 Kč**, ve skutečnosti: **32051 Kč**

Po 2 letech, v roce 2019 (8. bod), by hodnota byla: **32284 Kč**, ve skutečnosti: **34578 Kč**

Po 3 letech, v roce 2020 (9. bod), by hodnota byla: **26617 Kč**, ve skutečnosti: **36176 Kč**

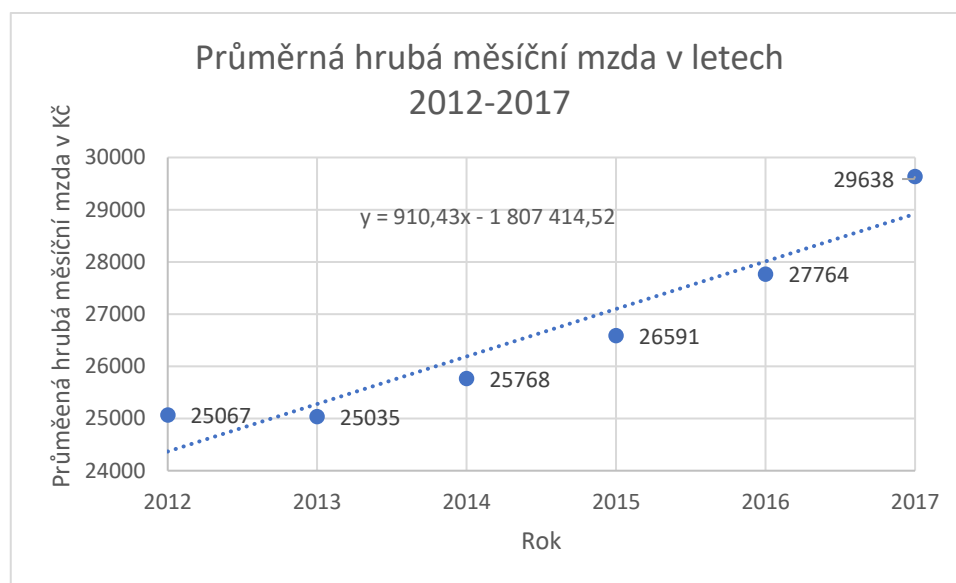
Po 5 letech, v roce 2022 (11. bod), by hodnota byla: **-38166 Kč**, ve skutečnosti: **40317 Kč**

Po 10 letech, v roce 2027 (16. bod), by hodnota byla: **-1460470 Kč**

Hodnota v prvním predikovaném roce je velmi blízko hodnotě, která byla ve skutečnosti. V druhém predikovaném roce je predikovaná hodnota už poměrně vzdálená od hodnoty, která byla ve skutečnosti. Z dlouhodobého hlediska predikované hodnoty nedávají žádný smysl. Použití interpolačního polynomu na tuto časovou řadu pro predikci budoucích hodnot by bylo vhodné jen pro první predikovaný rok.

Vyzkoušíme použití lineární regrese pro predikci hodnot v budoucnu.

Graf 33: Lineární regrese – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2012-2017



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Rovnice lineární regrese v tomto případě vychází: $y = 910,43x - 1807414,52$

Po 1 roce, v roce 2018, by hodnota byla: **29830 Kč**, ve skutečnosti: **32051 Kč**

Po 2 letech, v roce 2019, by hodnota byla: **30741 Kč**, ve skutečnosti: **34578 Kč**

Po 3 letech, v roce 2020, by hodnota byla: **31651 Kč**, ve skutečnosti: **36176 Kč**

Po 5 letech, v roce 2022, by hodnota byla: **33472 Kč**, ve skutečnosti: **40317 Kč**

Po 10 letech, v roce 2027, by hodnota byla: **38024 Kč**

Průměrné hrubé měsíční mzdy mezi lety 2012 až 2014 rostly pomaleji (v roce 2013 dokonce hodnota klesla) než mezi lety 2014 až 2022. Důsledkem je, že rovnice lineární regrese má pomalejší nárůst, než tomu bylo po této časové řadě. V roce 2027 je predikovaná hodnota o 2346 Kč menší, než jaká byla hodnota ve skutečnosti v roce 2022. Lineární regresi by tedy nebylo vhodné použít pro predikci budoucích hodnot na této časové řadě.

9.4 Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2017-2022

Tabulka 12: Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2017-2022

ROK	2017	2018	2019	2020	2021	2022
PRŮM. HR. MĚS. MZDA [Kč]	29638	32051	34578	36176	38277	40317

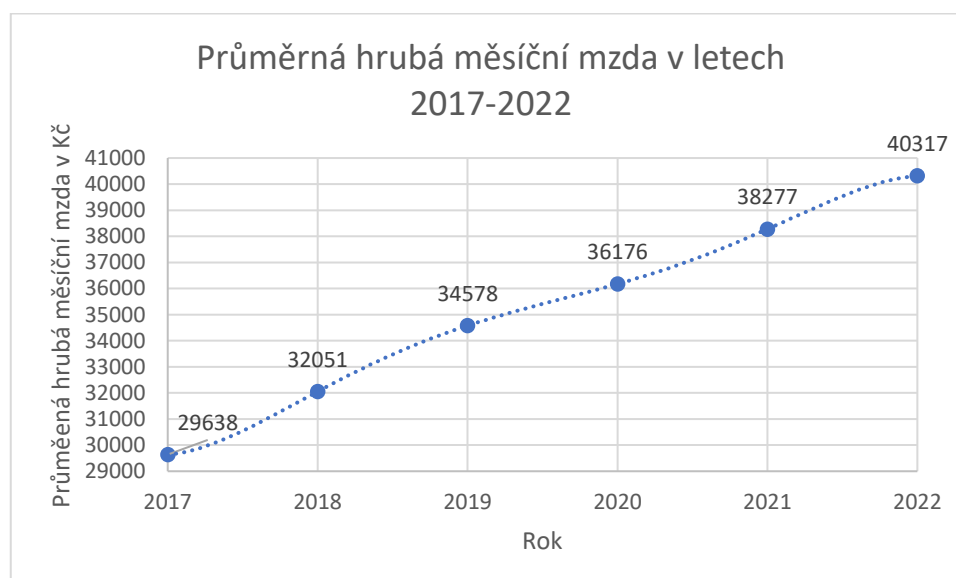
Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Sestavený interpolační polynom pro hodnoty průměrné hrubé měsíční mzdy v letech 2017-2022 má tvar:

$$P(x) = -37,258x^5 + 662x^4 - 4372x^3 + 13093x^2 - 15035x + 35328$$

Znáznorníme si body v grafu a zobrazíme interpolační polynom:

Graf 34: Interpolační polynom – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2017-2022



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování autor

Na tomto grafu není vidět žádné výrazné kolísání funkce. Tento interpolační polynom prochází daty, pravděpodobně tak, jako tomu bylo přibližně ve skutečnosti.

Pokud vynecháme rok 2018 (2. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = -45,908x^4 + 732,35x^3 - 4083,6x^2 + 11120x + 21915$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2018 (2. bod) hodnotu: **32945 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|32945 - 32051| = 894$ Kč

Pokud vynecháme rok 2019 (tedy 3. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = -8,65x^4 + 136,22x^3 - 767,6x^2 + 3892x + 26386$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2019 (3. bod) hodnotu: **34130 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|34130 - 34578| = 448$ Kč

Pokud vynecháme rok 2020 (tedy 4. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 28,608x^4 - 385,4x^3 + 1654,2x^2 - 280,9x + 28622$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2020 (4. bod) hodnotu: **36623 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|36623 - 36176| = 447$ Kč

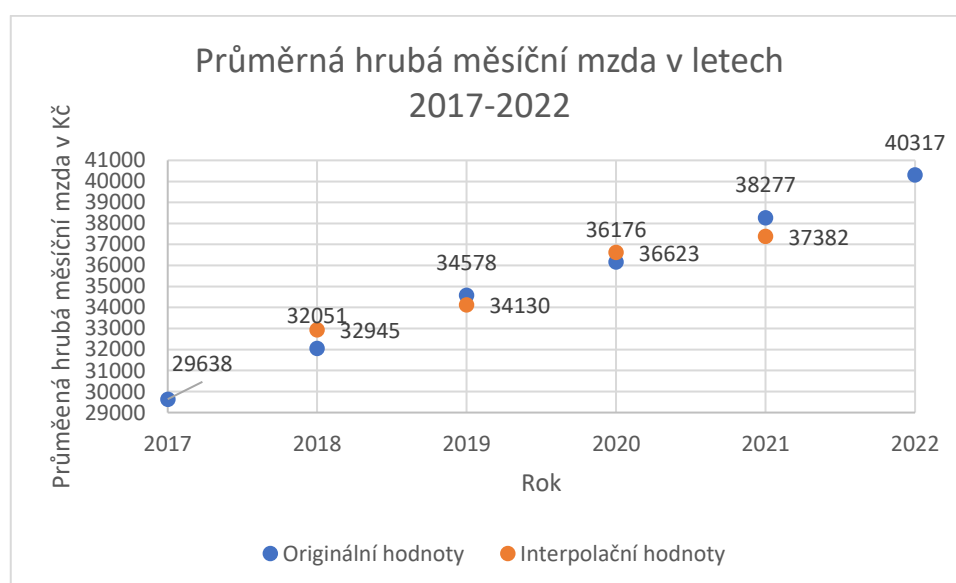
Pokud vynecháme rok 2021 (tedy 5. bod) dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P(x) = 65,867x^4 - 832,5x^3 + 3405,3x^2 - 2963,5x + 29963$$

Po dosazení dostáváme pro rok 2021 (5. bod) hodnotu: **37382 Kč**

Odchylka od originální hodnoty: $|37382 - 38277| = 895$ Kč

Graf 35: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou hrubou měsíční mzdou 2017-2022



Zdroj: Data z ČSÚ, zpracování a vlastní výpočty autor

Odchylky jsou větší než u předchozích případů, ale nejedná se ani v tomto případě o příliš velké odchylky. Pravděpodobně by na tuto časovou řadu bylo vhodné použít interpolační polynom pro přibližný odhad chybějících hodnot mezi známými body.

Jak by vycházely hodnoty v budoucích letech pro původní interpolační polynom?

$$P(x) = -37,258x^5 + 662x^4 - 4372x^3 + 13093x^2 - 15035x + 35328$$

Po 1 roce, v roce 2023 (7. bod), by hodnota byla: **35265 Kč**

Po 2 letech, v roce 2024 (8. bod), by hodnota byla: **5152 Kč**

Po 3 letech, v roce 2025 (9. bod), by hodnota byla: **-83400 Kč**

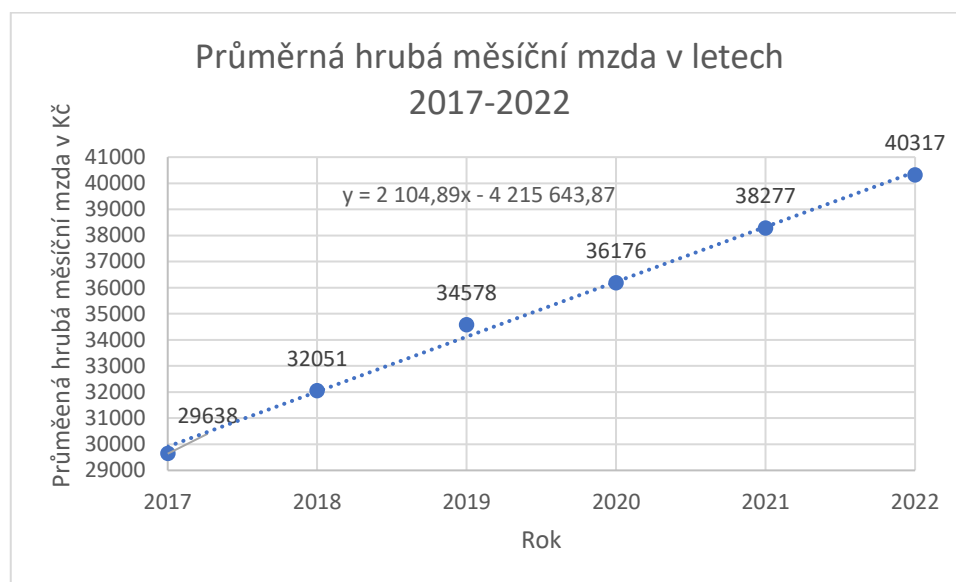
Po 5 letech, v roce 2027 (11. bod), by hodnota byla: **-673204 Kč**

Po 10 letech, v roce 2032 (16. bod), by hodnota byla: **-10444800 Kč**

Predikovaná hodnota v prvním roce bude nejspíše poměrně vzdálená od hodnoty, která bude ve skutečnosti. V roce 2022 byla hodnota 40 317 Kč, tudíž se domnívám, že hodnota v roce 2023 nebude nižší o 5 025 Kč než v roce 2022. Predikované hodnoty v dalších letech nedávají žádný smysl. Použití interpolačního polynomu na tuto časovou řadu pro predikci budoucích hodnot není vůbec vhodné.

Vyzkoušíme použití lineární regrese pro predikci hodnot v budoucnu.

Graf 36: Lineární regrese – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2017-2022



Zdroj: Data z ČŠÚ, zpracování autor

Rovnice lineární regrese v tomto případě vychází: $y = 2104,89x - 4215643,87$

Po 1 roce, v roce 2023, by hodnota byla: **42540 Kč**

Po 2 letech, v roce 2024, by hodnota byla: **44645 Kč**

Po 3 letech, v roce 2025, by hodnota byla: **46750 Kč**

Po 5 letech, v roce 2027, by hodnota byla: **50959 Kč**

Po 10 letech, v roce 2032, by hodnota byla: **61484 Kč**

Lineární regrese se jeví jako vhodná pro predikci budoucích hodnot, protože prochází velmi blízko většině bodů v zadaných letech. Ale dá se očekávat, že z krátkodobého

hlediska porostou průměrné hrubé měsíční mzdy rychleji v reakci na vysokou průměrnou roční míru inflace z roku 2022.

9.5 Vyhodnocení

9.5.1 Vhodnost interpolace interpolačním polynomem mezi známými body

Pro průměrnou hrubou měsíční mzdu se jeví, že je vhodné použít interpolační polynom pro odhad chybějících hodnot mezi známými body. Odchylky interpolačních hodnot od originálních hodnot nebyly v žádném případě příliš velké. Největších odchylek bylo dosaženo v období 2017-2022 a nejmenších odchylek bylo dosaženo v období 2012-2017. Aritmetický průměr všech 16 odchylek je 325,48 Kč, což je přijatelná odchylka.

9.5.2 Predikce interpolačním polynomem

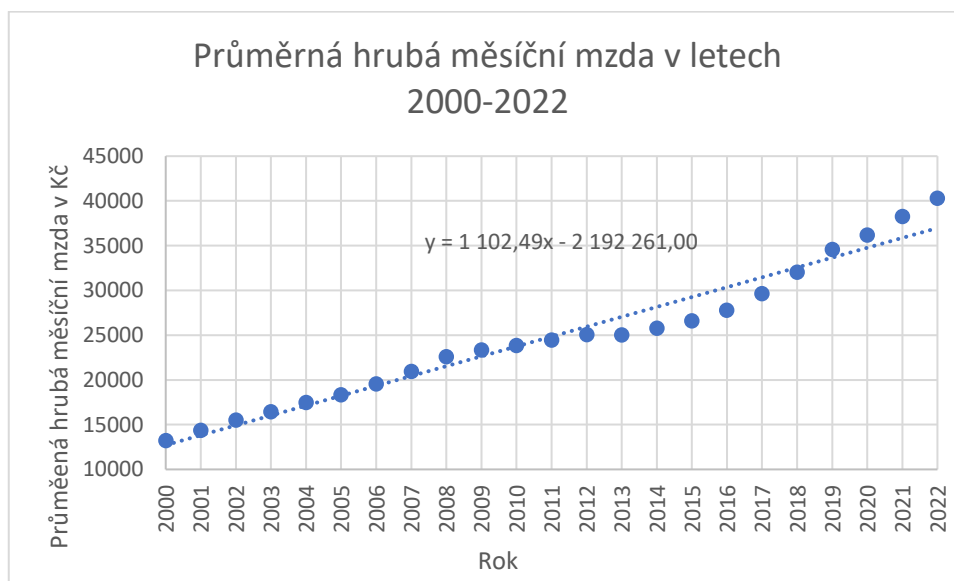
Z krátkodobého hlediska (pro 1. predikovaný rok) byla predikce interpolačním polynomem vhodná pouze v jednom případě, a to pro interpolační polynom sestavený pro období 2012-2017.

Z dlouhodobého hlediska vyšla predikce interpolačním polynomem, že je zcela nevhodná. Hodnoty mimo interval se známými hodnotami postupně klesaly k minus nekonečnu, což není v případě hrubé měsíční mzdy reálné, aby hrubá mzda šla do minusu.

9.5.3 Predikce lineární regrese

Použití lineární regrese pro predikci budoucích hodnot průměrné hrubé měsíční mzdy se zdá vhodné, i když pro některé zkoumané časové řady lineární regrese vhodná úplně nebyla. Nevhodnost byla zapříčiněná tím, že se na časové řadě skládající se z 6 let vyskytl větší nebo naopak menší nárůst než v ostatních letech. Na takto krátké časové řadě to může snadno ovlivnit výsledek. Lineární regrese na jednotlivých časových řadách procházela poměrně blízko uzlových bodů. Obzvláště v letech 2000-2005 a 2017-2022 byla lineární regrese velmi blízko všem uzlovým bodům. Jak již bylo zmíněno v teoretické části práce, tak lineární regrese se používá pro libovolný počet bodů. Proto je možné sestavit lineární regresi i pro celé období 2000-2022.

Graf 37: Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2000-2022



Zdroj: Data z ČŠÚ, zpracování autor

Graf 37 znázorňuje pro období 2000-2022 hodnoty průměrné hrubé měsíční mzdy, které rostly téměř lineárně v závislosti na čase. Zvyšování průměrných hrubých měsíčních mezd v jednotlivých letech nebylo však zcela dokonale lineární. Z grafu lze vypožorovat, že regresní přímka pro období 2000-2022 je velmi blízko hodnotám mezi lety 2000-2012. Dále mezi lety 2012-2018 se hodnoty nachází pod regresní přímkou a mezi lety 2019-2022 se hodnoty nachází nad regresní přímkou. V roce 2013 dokonce došlo ke snížení průměrné hrubé měsíční mzdy oproti roku 2012 o 32 Kč.

Pro predikci budoucích hodnot z krátkodobého hlediska, například pro roky 2023 a 2024 by bylo spíše vhodné použít regresní přímkou sestavenou pro období 2017-2022 z kapitoly 9.4. Aktuálně se průměrná hrubá měsíční mzda v posledních letech zvyšuje rychleji než v minulých letech. S průměrnou roční mírou inflace v roce 2022 s hodnotou 15,1 % se dá očekávat, že průměrná hrubá měsíční mzda ještě v reakci na inflaci v budoucích letech poroste rychleji.

Z dlouhodobého hlediska by bylo spíše vhodné zvolit regresní přímkou z grafu 37 (Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2000-2022). V budoucnu se může stát, stejně jako se stalo v minulosti, že průměrné hrubé měsíční mzdy v budoucích letech můžou zase zpomalit.

Celkově by se dalo říct, že použití lineární regrese pro predikci budoucích hodnot je pro tuto ekonomickou veličinu vhodné.

10 Závěr

Numerické metody (aproximace funkcí) mohou dobře posloužit při práci s ekonomickými veličinami. Může se ale stát, že pro některé ekonomické veličiny nejsou některé numerické metody vhodné a tím pádem mohou vycházet při jejich použití nesmyslné výsledky. Proto je vždy vhodné, než se pustíme do používání numerických metod, zamyslet se nad tím, jak vůbec se námi zkoumaná veličina vyvíjí a tím pádem můžeme použití některých metod dopředu zavrhnout.

Interpolace interpolačním polynomem mezi známými body vyšla u průměrné roční míry inflace, že je spíše nevhodná, ale naopak pro hodnoty průměrných hrubých měsíčních mezd vyšla, že je vhodná. Když srovnáme tyto ekonomické veličiny, tak lepších výsledků dosahovaly hrubé mzdy, které se nepohybují nepředvídatelně nahoru a dolu v čase, jako například právě míra inflace.

Predikce interpolačním polynomem vyšla, že je nevhodná pro průměrnou roční míru inflace. Pro průměrnou hrubou měsíční mzdu vyšla predikce interpolačním polynomem v jednom případě (pro 1. predikovaný rok) velmi blízko skutečné hodnotě, ale převážně predikce interpolačním polynomem ani v tomto případě vhodná nebyla. Domnívám se, že je to z důvodu, že interpolační polynomy jsou určeny k interpolaci, tedy k odhadu hodnot a popisu chování funkce mezi známými body. V případě predikce se dostáváme za hranici známých bodů, kde interpolační polynomy velmi často směřují velmi rychle k plus nebo minus nekonečnu.

Predikce lineární regrese je vhodná pro ekonomické veličiny, které se určitým způsobem lineárně vyvíjí vzhledem k času nebo jiné veličině. Predikovat pomocí lineární regrese míru inflace je značně nevhodné, protože míra inflace se lineárně nevyvíjí. Naopak predikovat hrubé mzdy pomocí lineární regrese se jeví, že je vhodné, protože hrubé mzdy se téměř lineárně vyvíjí.

Zajímavostí v této práci je, že při zjišťování odchylek (interpolačním polynomem) interpolačních hodnot od originálních hodnot jsem zjistil, že odchylky v 2. a 5. (3. a 4.) vynechaném a následně dosazeném bodě jsou v absolutní hodnotě totožné. Pokud by se nepoužívaly absolutní hodnoty, tak interpolační hodnoty vycházely stejně daleko od originálních hodnot, akorát s tím rozdílem, že každá byla s opačným znaménkem. A dokonce vynechané body uprostřed (3. a 4.) měly dvakrát menší odchylku, než body vynechané u kraje (2. a 5.). O této vlastnosti interpolačního polynomu jsem dříve nevěděl.

Závěrem bych zmínil, že všechny interpolační polynomy a dosazené hodnoty v určitých bodech v interpolačních polynomech byly navíc ověřovány vlastní konzolovou aplikací a ve všech případech se výsledky shodovaly s Microsoft Excelem a Desmos Graphing Calculatorem.

11 Summary and keywords

This bachelor thesis focuses on evaluating numerical methods for predicting future values and estimating the missing values of economic variables, specifically inflation and gross wage. These methods, including interpolation polynomial (Lagrange interpolation polynomial, Newton interpolation polynomial), spline and regression, are described. Within the study, Interpolation polynomial and linear regression are applied. This thesis works with selected economic variables that exhibit dynamic changes over time and subjects them to an experimental verification of predictability using selected numerical methods. This work seeks to determine whether these methods are appropriate. The methodology involves selecting six data points from consecutive years where one data point is deliberately omitted. Interpolation polynomials are tested to determine the omitted point and the interpolated value is compared with the original value. Future years are plugged into the equations for the interpolation polynomial and linear regression. The conclusion of the thesis shows that the use of interpolation polynomials to estimate missing values is only appropriate in some cases. The use of interpolation polynomials is not suitable for estimating values in the future and regression can only be used in specific cases.

Keywords: numerical methods, interpolation, regression, inflation, gross wage

12 Seznam použitých zdrojů

- Burden, R.L., & Faires J.D. (2011). *Numerical analysis* (9th ed.). Boston: Brooks/Cole.
- Česká národní banka [ČNB]. (n.d.). *Inflační cíl*. Retrieved March 26, 2024, from website: <https://www.cnb.cz/cs/menova-politika/inflacni-cil/>
- Český statistický úřad [ČSÚ]. (2022). *Průměrná roční míra inflace v ČR v roce 2021 byla 3,8 %*. Retrieved November 11, 2023, from website: <https://www.czso.cz/csu/xe/prumerna-rocni-mira-inflace-v-cr-v-roce-2021-byla-38->
- Český statistický úřad [ČSÚ]. (2023a). *Inflace – druhy, definice, tabulky* [data – průměrná roční míra inflace]. Retrieved November 11, 2023, from website: https://www.czso.cz/csu/czso/mira_inflace
- Český statistický úřad [ČSÚ]. (2023b). *Průměrné mzdy - 1. čtvrtletí 2023*. Retrieved November 12, 2023, from website: <https://www.czso.cz/csu/czso/cri/prumerne-mzdy-1-ctvrtleti-2023>
- Český statistický úřad [ČSÚ]. (2023c). *Průměrná hrubá měsíční mzda* [data – průměrná hrubá měsíční mzda]. Retrieved November 12, 2023, from website: <https://www.czso.cz/csu/czso/prumerna-hruba-mesicni-mzda-graf>
- E-learning JČU, Kurz: Matematika 2 (M2 - 2021 - LS). (2021). *Regrese, interpolace*. Retrieved February 7, 2024, from website: https://elearning.jcu.cz/pluginfile.php/499206/mod_resource/content/4/regrese_interp_Marika.pdf
- Fajmon, B. (n.d.). *2 Interpolační polynom a splajn*. Retrieved November 28, 2023, from website: <http://www.rozhovor.cz/ma+fy/02interpolace.pdf>
- Fajmon, B., & Růžičková, I. (2003). *Matematika 3*. Retrieved November 28, 2023, from website: <http://www.rozhovor.cz/souvislosti/matematika3.pdf>
- Google Play. (n.d.) *Microsoft Excel: Spreadsheets*. Retrieved February 9, 2024, from website: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.microsoft.office.excel&hl=cs>
- Google Play. (n.d.). *Desmos Inc*. Retrieved February 9, 2024, from website: <https://play.google.com/store/apps/developer?id=Desmos+Inc&hl=cs&gl=US>
- Hindls, R., Seger, J., & Hronová, S. (2002). *Statistika pro ekonomy*. Praha: Professional Publishing.
- Horová, I., & Zelinka, J. (2008). *Numerické metody* (2nd ed.). Brno: Masarykova univerzita.
- John H. Mathews, & Kurtis D. Fink. (1999). *Numerical methods using MATLAB* (3rd ed.). New York: Prentice Hall.
- Kaw, A. K., Kalu, E. K., & Nguyen, D. (2011). *Numerical Methods with Applications* (2nd ed.). Florida: University of South Florida
- Peníze. (2023). *Výpočet čisté mzdy 2023*. Retrieved November 12, 2023, from website: <https://www.penize.cz/kalkulacky/vypocet-ciste-mzdy>

13 Seznam grafů

Graf 1: Porovnání interpolačního polynomu a lineární regrese	4
Graf 2: Ukázka interpolačního polynomu	7
Graf 3: Lineární splajn – průměrná roční míra inflace 2000-2020	14
Graf 4: Kvadratický splajn	15
Graf 5: Přirozený kubický splajn	16
Graf 6: Metoda nejmenších čtverců	17
Graf 7: Interpolační polynom	18
Graf 8: Lineární regrese	19
Graf 9: Průměrná roční míra inflace v letech 2000-2022	22
Graf 10: Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2000-2022	23
Graf 11: Nevhodný interpolační polynom 22. stupně pro hodnoty průměrné roční míry inflace v letech 2000–2022	27
Graf 12: Interpolační polynom – průměrná roční míra inflace v letech 2000-2005.....	29
Graf 13: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou roční míru inflace 2000-2005	30
Graf 14: Lineární regrese – průměrná roční míra inflace v letech 2000-2005	31
Graf 15: Interpolační polynom – průměrná roční míra inflace v letech 2006-2011	32
Graf 16: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou roční míru inflace 2006-2011	33
Graf 17: Lineární regrese – průměrná roční míra inflace v letech 2006-2011.....	34
Graf 18: Interpolační polynom – průměrná roční míra inflace v letech 2012-2017.....	35
Graf 19: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou roční míru inflace 2012-2017	37
Graf 20: Lineární regrese – průměrná roční míra inflace v letech 2012-2017	38
Graf 21: Interpolační polynom – průměrná roční míra inflace v letech 2017-2022.....	39
Graf 22: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou roční míru inflace 2017-2022	40
Graf 23: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou roční míru inflace 2017-2021	41
Graf 24: Lineární regrese – průměrná roční míra inflace v letech 2017-2022	42
Graf 25: Interpolační polynom – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2000-2005	44
Graf 26: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou hrubou měsíční mzdu 2000-2005	45
Graf 27: Lineární regrese – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2000-2005	46
Graf 28: Interpolační polynom – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2006-2011.....	47
Graf 29: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou hrubou měsíční mzdu 2006-2011	48
Graf 30: Lineární regrese – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2006-2011	49

Graf 31: Interpolační polynom – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2012-2017	51
Graf 32: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou hrubou měsíční mzdu 2012-2017	52
Graf 33: Lineární regrese – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2012-2017	53
Graf 34: Interpolační polynom – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2017-2022	54
Graf 35: Porovnání interpolačních a originálních hodnot pro průměrnou hrubou měsíční mzdu 2017-2022	55
Graf 36: Lineární regrese – průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2017-2022	56
Graf 37: Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2000-2022	58

14 Seznam tabulek

Tabulka 1: Výpočet poměrných diferencí	11
Tabulka 2: Bazické indexy spotřebitelských cen	21
Tabulka 3: Průměrná roční míra inflace v letech 2000-2022	22
Tabulka 4: Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2000-2022	23
Tabulka 5: Průměrná roční míra inflace v letech 2000-2005	29
Tabulka 6: Průměrná roční míra inflace v letech 2006-2011	32
Tabulka 7: Průměrná roční míra inflace v letech 2012-2017	35
Tabulka 8: Průměrná roční míra inflace v letech 2017-2022.....	39
Tabulka 9: Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2000-2005	44
Tabulka 10: Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2006-2011	47
Tabulka 11: Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2012-2017	50
Tabulka 12: Průměrná hrubá měsíční mzda v letech 2017-2022	54

15 Seznam obrázků

Obrázek 1: Logo Desmos Graphing Calculator	24
Obrázek 2: Logo Microsoft Excel.....	24
Obrázek 3: Vlastní konzolová aplikace pro výpočet interpolačního polynomu ze zadaných dat	25

16 Seznam příloh

Příloha 1: CD-R obsahující konzolovou aplikaci se zdrojovým kódem a stručným popisem