Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Determinanty k-třídiagonálních matic

Diplomová práce

Autor: Bc. Kateřina Novotná

Studijní program: N1101 Matematika

Studijní obor: 7504T Učitelství pro střední školy - společný základ
Učitelství matematiky pro střední školy
Učitelství pro střední školy - výtvarná výchova

Vedoucí práce : doc. RNDr. PaedDr. Pavel Trojovský, Ph.D.

Oponent: RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Hradec Králové květen 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne 11. 5. 2020 Kateřina Novotná

Poděkování

Děkuji svému vedoucímu diplomové práce, doc. RNDr. PaedDr. Pavlu Trojovskému, Ph.D., za pomoc, odborné konzultace a trpělivost. Poděkování patří i mému rodinnému zázemí, za podporu a pochopení.

Anotace

NOVOTNÁ Kateřina. *Determinanty k-třídiagonálních matic*. Hradec Králové, 2020. Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí diplomové práce doc. RNDr. PaedDr. Pavel Trojovský, Ph.D. 60 s.

Diplomová práce se zabývá souvislostmi mezi determinanty a permanenty speciálních typů pásových matic. Důraz je kladen na k-třídiagonální matice a v praktické části jsou odvozeny rekurentní rovnice pro permanenty konkrétních případů k-třídiagonálních Toeplitzových matic. Cílem je zprostředkovat danou problematiku komplexně a poskytnou nové souvislosti při studiu těchto speciálních matic a jejich vlastností. Práce je rozdělena na čtyři hlavní kapitoly. První se zabývá teorií matic a souhrnně zpracovává podstatné znalosti determinantů a permanentů. Ve druhé jsou představeny pásové matice a jejich nejrůznější vlastnosti, kam řadíme i k-třídiagonální matice. Třetí kapitola je věnovaná metodě vytvořující funkce. A v závěrečné, praktické části, jsou uvedeny původní odvození pro permanenty 3-třídiagonálních a 4-třídiagonálních matic.

Klíčová slova

Pásové matice, determinanty, permanenty, k-třídiagonální matice, Toeplitzovy matice, vytvořující funkce.

Annotation

NOVOTNÁ Kateřina. *Determinants of k-tridiagonal matrices.* Hradec Králové, 2020. Diploma Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Diploma Supervisor doc. RNDr. PaedDr. Pavel Trojovský, Ph.D. 60 s.

The diploma thesis deals with the connections between determinants and permanents of special types of band matrices. The emphasis is placed on k-tridiagonal matrices and, in the practical part, recurrence equations for specific cases of k - tridiagonal Toeplitz matrices are derived. The goal is to mediate the given problem in a complex way and to provide new connections during studying these special matrices and their properties. The thesis is divided into four main chapters. The first one deals with matrix theory and elaborates on important knowledge of determinants and permanents. In the second chapter, band matrices and their various properties are introduced, along with k-tridiagonal matrices. The third chapter is dedicated to generating function. In the final practical part, original derivation for permanents of 3-tridiagonal and 4-tridiagonal matrices are introduced.

Keywords

Band matrices, Determinants, Permanents, k-tridiagonal matrices, Toeplitz matrices, Generating function.

Obsah

Úvod

Tématem diplomové práce je hledání a předkládání souvislostí a vazeb mezi determinanty a permanenty speciálních typů pásových matic. Pozornost je směřována zejména na vlastnosti k-třídiagonálních matic.

Zjednodušování a urychlování výpočtů pro libovolně velké matice je předmětem zájmu většiny těch, kteří se zabývají problémy maticové algebry. Znalosti z oblasti maticového počtu se využívají v mnoha oborech, například ve fyzice, počítačové grafice, biologii, statistice a dalších.

Tématika k-třídiagonálních matic je velmi aktuální a věnují se jí matematikové z celého světa, i když je na tomto poli stále ještě dost nezodpovězených otázek. Česká literatura se pásovým maticím a jejich vlastnostem příliš nevěnuje.

Teoretická část obsahuje přehledně zpracované základní znalosti maticové algebry, se zaměřením na determinanty a nepříliš známé permanenty, které jsou jistým způsobem determinantům podobné.

V další kapitole se pak odkrývají zajímavé vlastnosti související s pásovými maticemi, zejména pak, již zmíněnými, k-třídiagonálními. Na některé věty, předložené v teoretické části práce, je nahlíženo jiným způsobem, než jak byly publikovány v odborných článcích. Snaha je o nalezení efektivnějších postupů, případně nových souvislostí. Hlavní zájem je popsat a předložit rekurentní rovnice pro determinanty a permanenty vybraných k-třídiagonálních matic, jejichž přínos je zejména v zefektivnění výpočtů pro libovolně n rozměrné matice.

V praktické části jsou odvozeny rekurentní rovnice pro permanenty speciálních typů k-třídiagonálních matic, kde $k \geq 3$.

Kapitola 1

Obecný úvod

1.1 Matice

V této části diplomové práce věnované maticím si představíme základní definice a věty, které jsou pro nás stěžejní. Matice jsou velice účinným nástrojem pro velkou část matematických disciplín. Pomáhají nám vypořádat se s těžkými výpočty v mnoha vědních oborech. Literatury, která se věnuje maticím a jejich vlastnostem je hodně, v práci jsem čerpala zejména z publikací od Fiedlera [1], Krajníka [3], Bečváře [2] a publikace *Introduction to Linear Algebra* od Ptáka [9].

Definice 1.1. Nechť T je neprázdná množina a $n, m \in \mathbb{N}$. **Maticí** typu $n \times m$ nad množinou T budeme rozumět schéma

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

kde $a_{ij} \in T$, pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ a každé $j = 1, 2, \ldots, m$, nazýváme prvkem matice, který leží v i-tém řádku a j-tém sloupci.

Poznámka.

1. Pokud $m \neq n$, pak mluvíme o matici obdélníkové.
2. Pokud $m = n$, pak mluvíme o matici čtvercové řádu (stupně) n, označujeme A_n.

Příklad. Uveďme příklad libovolné čtvercové matici řádu 3.

$$B_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 8 & 1,5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Poznámka. **Důležité diagonály.**

1. **Hlavní diagonálu** matice A typu $n \times m$, kde $k = min\{m, n\}$ tvoří prvky $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk}$. (Neboli prvky a_{ij}, kde $i = j$.)

2. **Vedlejší diagonálu** matice A typu $n \times m$, kde $k = min\{m, n\}$ tvoří prvky $a_{n,1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1,k}$ (Neboli prvky a_{ij}, kde $j = (n - i) + 1$.)

3. **Superdiagonálou** se označuje diagonála hned nad hlavní diagonálou.

4. **Subdiagonálou** se označuje diagonála hned pod hlavní diagonálou.

Poznámka. Každou diagonálu ve směru hlavní diagonály (zleva shora doprava dolů) můžeme označovat celým číslem. Hlavní diagonálu označujeme číslem 0. Diagonály nad a pod hlavní diagonálou popisujeme postupně celými čísly a to tak, že diagonály nad hlavní diagonálou jsou čísla kladná od 1 po $m - 1$ a čísla pod hlavní diagonálou jsou záporná od -1 po $-(n - 1)$.

Uveďme schéma matice, kde čísla stojící na jednotlivých prvcích matice A typu 4×5, určují číslo dané diagonály. Uvědomme si, že 0 označuje hlavní diagonálu, -1 subdiagonálu a 1 superdiagonálu.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice 1.2. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $n \times m$. Transponovanou maticí k matici A rozumíme matici $A^T = (b_{ji})$ typu $m \times n$, kde pro každé $i = 1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, m$ je $b_{ji} = a_{ij}$.

Příklad. Uveďme příklad matice a matice k ní transponované.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice 1.3. Maticové sčítání.

Nechť $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ jsou dvě matice typu $n \times m$. Pak součtem matic A a B budeme rozumět matici

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Poznámka. Zdůrazněme, že můžeme pouze sčítat matice, které jsou stejného typu. Snadno lze dokázat, že sčítání matic je asociativní a komutativní operace (viz. [3]).

Definice 1.4. Maticové násobení.

Nechť $A = (a_{ik})$ je matice typu $n \times l$ a $B = (b_{kj})$ je matice typu $l \times m$. Pak součinem matic A a B, v tomto pořadí, budeme rozumět matici

$$C = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj},$$

kde matice C je typu $n \times m$.

Poznámka. Zdůrazněme, že součin matic $A \cdot B$ je definován jen tehdy, je-li počet sloupců matice A stejný jako počet řádků matice B. Proto násobení matic sice je asociativní operace, ale není komutativní.
I když je násobení matic na první pohled definováno uměle, má zásadní význam při skládání lineárních zobrazení.

Definice 1.5. Elementární řádkové operace v matici A jsou následující operace:

1. V matici A prohodíme dva řádky.
2. K libovolnému řádku matice A přičteme jakýkoliv násobek řádku jiného.
3. Jakýkoliv řádek matice A vynásobíme číslem různým od nuly.

Matici B nazveme řádkově ekvivalentní s maticí A, jestliže vznikla z matice A užitím řádkových elementárních operací.

Poznámka. Stejně jako v Definici 1.5 můžeme definovat i sloupcové elementární operace. Zásadní význam pro řešení soustav lineárních rovnic a hledání dalších vlastností matic mají však hlavně řádkové elementární úpravy.

Definice 1.6. Speciální typy matic.

Uvažujme matici $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$, pak

1. **Nulová matice** je matice A, kde pro všechny prvky platí $a_{ij} = 0$. Značíme O.

2. **Opačnou matice** k matici A značíme $-A$, a pro všechny její prvky platí $-A = (-a_{ij})$.

3. **Jednotková matice** je čtvercová matice A, kde platí, že $a_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. Značíme E.

4. **Dolní trojúhelníková matice** je čtvercová matice A, kde $a_{ij} = 0$ pro $i < j$, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$.

5. **Horní trojúhelníková matice** je čtvercová matice A, kde $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$.

Poznámka. Každou čtvercovou matici lze pomocí elementárních řádkových operací převést na horní, resp. dolní trojúhelníkovou matici.

Definice 1.7. Nechť A je matice řádu n. Matice A^{-1} se nazývá inverzní matice k matici A, jestliže platí

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Definice 1.8. LU-rozklad.

Nechť A je regulární matice řádu n, LU-rozkladem matice A rozumíme vztah

$$A = L \cdot U,$$

kde matice L je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na hlavní diagonále a matice U je horní trojúhelníková matice s nenulovými prvky na hlavní diagonále.

Poznámka. Máme-li řešit soustavu $Ax = b$ a nahradíme matici A součinem matic $L \cdot U$ a označíme-li $Ux = y$, poté získáváme rovnost $LUx = b$ právě tehdy, když $Ly = b$ a $Ux = y$. Což je užitečné, když řešíme sérii výpočtů, kde se pravá strana soustavy b v jednotlivých případech mění, ale levá zůstává stejná.

1.2 Determinanty

Determinanty patří mezi základní nástroje pro řešení soustav rovnic. Jejich využití, je stejně jako u matic, velmi mnoho. Znalosti determinantů se využívají ve fyzice, inženýrství, grafice a v množství dalších oborů. Je důležité si uvědomit, že determinant je číslo, které je přiřazeno čtvercové matici, odkrývá její vlastnosti a pomáhá při výpočtech. Teorií determinantů se zabývají například již zmíněné publikace věnující se lineární algebře [3], [2], [1], [9]. Z dalších zahraničních zdrojů můžeme zmínit například publikaci od Namboodiriho [14].

Uvažujme množinu M o prvcích $\{1, 2, ..., n\}$. Pokud prvky množiny M zapíšeme v libovolném pořadí, získáme jednu z možných permutací prvků z množiny M. Počet všech takových permutací pro pevně zvolené n je právě

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Pro další úvahy zvolme libovolnou permutaci prvků z množiny $M = \{1, 2, ..., n\}$ jako uspořádanou n-tici $(i_1, i_2, ..., i_n)$ (n-tice určuje pořadí prvků množiny M). Dvojice i_j, i_k v permutaci $(i_1, i_2, ..., i_n)$ se nazývá inverze v permutaci, jestliže $j < k$ a $i_j > i_k$. Pokud je p počet všech inverzí v permutaci $(i_1, i_2, ..., i_n)$, pak číslo $(-1)^p$ označujeme jako znaménko permutace. Píšeme $sgn(i_1, i_2, ..., i_n)$.

Definice 1.9. Determinantem čtvercové matice $A = (a_{ij})_n$ řádu n je číslo, které odpovídá rovnosti

$$\det A = \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n) \in \Sigma} sgn(i_1, i_2, ..., i_n) \cdot a_{1,i_1} \cdot a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n}, \qquad (2)$$

kde Σ je množina všech permutací množiny $\{i_1, i_2, ..., i_n\}$.

Determinant můžeme zapsat také takto,

$$\det(a_{ij}) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Důsledek. Určení determinantu pro matice řádu $n = 1, 2, 3$ dle Definice 1.9.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Pro výpočet determinantu řádu $n = 3$ se využívá tzv. **Sarrusovo pravidlo**, viz [3].

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Pro určení determinantů řádu $n > 3$ nelze efektivně využít analogie Sarrusova pravidla.

Definice 1.10. Nechť $A = (a_{ij})_n$ je čtvercová matice řádu $n \geq 2$. **Subdeterminantem** A_{ij} nazýváme determinant matice, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Definice 1.11. Nechť $A = (a_{ij})_n$ je čtvercová matice řádu $n \geq 2$. **Doplňkem prvku** a_{ij} matice A rozumíme číslo D_{ij}, pro které platí

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A_{ij}.$$

Věta 1.1. ***Laplaceova věta o rozvoji determinantu.***
Nechť $A = (a_{ij})_n$ je matice řádu $n > 2$. Pak pro každé $j = 1, \ldots, n$ je

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_{ij},$$
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} D_{ji}\ .$$

Důkaz. Viz [2].

Poznámka. Laplaceův rozvoj nám umožňuje vypočítat determinant matice libovolného řádu n tak, že postupně snižujeme řády determinantů až k determinantům řádu $n \leq 3$, které umíme snadno spočítat.

Věta 1.2. ***Vlastnosti determinantů.***
Nechť $A = (a_{ij})_n$ je čtvercová matice řádu n pak platí

(a) $\det A^T = \det A$.

(b) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, *kde B je čtvercová matice řádu n.*

(c) $\det A' = -\det A$, *kde A' je matice, která vznikla z matice A výměnnou i-tého a j-tého řádku, kde $i \neq j$.*

(d) $\det A' = \det A$, *kde A' je matice, která vznikla z matice A přičtením c-násobku jejího k-tého řádku (sloupce) k i-tému kde $k \neq i$.*

(e) $\det A = 0$, *má-li matice A dva stejné řádky. Matici, jejíž determinant se rovná nule, říkáme singulární. V opačném případě je regulární.*

(f) $\det A' = c \cdot \det A$, *kde A' je matice, která vznikla z matice A vynásobením i-tého řádku (sloupce) číslem c.*

Důkaz. Viz. [3].

Věta 1.3. *Nechť je $A = (a_{ij})$ trojúhelníková matice řádu n, pak pro její determinant platí*

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Důkaz. Viz [3].

Poznámka. Determinant matice lze pro determinanty řádu $1 - 3$ spočítat podle Definice 1.9. Pro determinanty vyšších řádů můžeme účinně využít vlastností ve Větě 1.2, kdy pomocí úprav přejdeme od dané matice k matici trojúhelníkové.

Příklad. Vypočítejte pomocí vlastností ve Větě 1.2 a Větě 1.3 determinant následující matice.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Nejprve přehodíme druhý řádek se čtvrtým a ihned potom třetí s druhým, abychom nemuseli měnit znaménko determinantu.

2. K třetímu řádku přičteme (-1)-krát první řádek a ke čtvrtému řádku přičteme (-2)-krát první řádek.

3. K čtvrtému řádku přičteme $(-\frac{7}{2})$-krát druhý řádek a následně čtvrtý řádek vynásobíme číslem 2.

4. Od čtvrtého řádku odečteme 3-krát třetí řádek.

5. Využijeme Větu 1.3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \overset{1.}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{2.}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & -7 & 3 & -4 \end{vmatrix} \overset{3.}{=} \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{4.}{=} \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \overset{5.}{=} \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot 10) = -20 \,.$$

1.3 Permanenty

Permanent je číslo podobné determinantu, které přísluší dané matici. Na rozdíl od něho se při výpočtu permanentu nezohledňuje znaménková změna. V následujícím textu budeme chápat permanent jako číslo příslušící výhradně čtvercové matici. Lze však definovat i permanenty pro obdélníkové matice tvaru $m \times n$, kterým se věnovat nebudeme.

Znalost permanentů je prospěšná při studiu lineární algebry, kombinatoriky, kvantové fyziky, nebo třeba teorie pravděpodobnosti. [20]

Česká literatura se permanentům příliš nevěnuje, ze zahraničních zdrojů si můžeme jmenovat například publikaci od Mince [10], případně články od Agrawala [7], Glynna [11], Feigeho [15].

Definice 1.12. Permanentem čtvercové matice $A = (a_{ij})_n$ je číslo, které odpovídá rovnosti

$$\mathrm{per} A = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{1,i_1} \cdot a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n} \,. \tag{3}$$

Permanent můžeme zapsat také jako $\mathrm{per}(a_{ij})$.

Poznámka. Uvědomme si nyní, jaké budou platit pravidla pro úpravy permantů.

1. Nechť A je čtvercová matice řádu n. Matice A' vznikne z matice A výměnou i-tého a j-tého řádku, kde $i \neq j$. Pak pro permanenty platí $\mathrm{per}(A') = \mathrm{per}(A)$.

2. Nechť A je čtvercová matice řádu n, pak platí $\mathrm{per}(A^T) = \mathrm{per}(A)$.

3. Nechť A je čtvercová matice řádu n. Matice A' vznikne z matice A přičtením α-násobku jejího k-tého řádku k i-tému, kde $k \neq i$. Pak pro permanenty platí $\mathrm{per}(A') \neq \mathrm{per}(A)$.

V důsledku těchto vztahů je jasné, že výpočet permanentu bude složitější a obsáhlejší, než výpočet determinantu.

Definice 1.13. Nechť $A = (a_{ij})_n$ je čtvercová matice řádu $n \geq 2$. **Subpermanentem** A_{ij} nazýváme permanent matice, který vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Věta 1.4. ***Laplaceova věta o rozvoji permanentu.***
Nechť $A = (a_{ij})_n$ je matice řádu $n > 2$. Pak pro každé $j = 1, \ldots, n$ je

$$\mathrm{per}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathrm{per}(A_{ij}),$$
$$\mathrm{per}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot \mathrm{per}(A_{ji}).$$

Důkaz. Viz [10].

Výpočet permantů je složitější zejména proto, že nemůžeme permanenty upravovat přičítáním libovolných násobků řádků. Při výpočtu permanentu přes definici jsme nuceni počítat přes $n!$ prvků. Z toho důvodu je dobré využít některé algoritmy pro usnadnění výpočtů, jako je například Ryserova formule, kde pro výpočet sčítáme $2^n - 1$ prvků.
Toto výrazné výpočetní zjednodušení je zřejmé z následující Tabulky 1.1.

n	$2^n - 1$	$n!$
2	3	2
5	31	120
10	1023	3628800
20	1048575	2432902008176640000
30	1073741823	265252859812191058636308480000000

Tabulka 1.1: Porovnání růstu posloupností $2^n - 1$ a $n!$.

Věta 1.5. ***Ryserova formule pro výpočet permanentu.***

Nechť $A = (a_{ij})_n$ *je čtvercová matice řádu* n *a* S *je neprázdná množina sloupců matice* A*. Pak pro permanent platí*

$$\mathrm{per}A = \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{n-|S|} \cdot \prod_{i=1}^{n} \sum_{j \in S} a_{ij}, \tag{4}$$

kde sčítáme přes všechny podmnožiny $S \subseteq \{1,\ldots,n\}$ *a* $|S|$ *je počet prvků množiny* S*.*

Důkaz. Viz [10].

Příklad. Vypočítejte užitím Ryserovy formule (4) permanent následující matice řádu $n = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nejprve si určíme neprázdné podmnožiny množiny S, kterých je 7:

$$S_1 = \{1\}; \qquad S_2 = \{2\}; \qquad S_3 = \{3\}; \qquad S_4 = \{1,2\}; \qquad S_5 = \{2,3\}$$
$$S_6 = \{1,3\}; \qquad S_7 = \{1,2,3\}.$$

Nyní dosadíme do vztahu (4) a dopočítáme permanent matice A:

$\mathrm{per}A = (-1)^{3-1} \cdot a_{11}a_{21}a_{31} + (-1)^{3-1} \cdot a_{12}a_{22}a_{32} + (-1)^{3-1} \cdot a_{13}a_{23}a_{33} + (-1)^{3-2} \cdot$

$\cdot (a_{11} + a_{12}) \cdot (a_{21} + a_{22}) \cdot (a_{31} + a_{32}) + (-1)^{3-2} \cdot (a_{11} + a_{13}) \cdot (a_{21} + a_{23}) \cdot (a_{31} + a_{33}) +$

$+ (-1)^{3-2} \cdot (a_{12} + a_{13}) \cdot (a_{22} + a_{23}) \cdot (a_{32} + a_{33}) + (-1)^{3-3} \cdot (a_{11} + a_{12} + a_{13}) \cdot$

$\cdot (a_{21} + a_{22} + a_{23}) \cdot (a_{31} + a_{32} + a_{33}),$

kde po dosazení získáváme

$$\mathrm{per}A = 3 + 4 + 0 - 3 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 5 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \cdot (-1) = -2.$$

Poznámka. Další vhodnou formulí pro výpočet permanentů vyšších řádů, může být například Balasumbramanianova-Baxova-Franklinova-Glynnova věta (viz. [11]).

Kapitola 2

Pásové matice

Pásové matice mají svoje využití v numerické matematice při řešení obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic diskretizačními metodami a při hledání vlastních čísel. Teorií pásových matic se věnují například autoři Fiedler [1], Borowska, Łacińska a Rychlewska [4], [5] , El-Mikkawy a Atlan [6].

Definice 2.1. Uvažujme čtvercovou matici $A = (a_{ij})_n$ řádu n. Dále uvažujme čísla p a q, která definujeme jako maximální vzdálenosti od hlavní diagonály, kde se ještě vyskytují nenulové prvky

$$\begin{aligned} p &= max(p_0, 0), \quad p_0 = max\{j - i; a_{ij} \neq 0\}, \\ q &= max(q_0, 0), \quad q_0 = -min\{j - i; a_{ij} \neq 0\}. \end{aligned} \tag{5}$$

O matici A řekneme že je **(p,q)-pásová.**

Poznámka. Šířkou pásu matice A budeme rozumět počet diagonál s nenulovými prvky, tedy číslo $p + q + 1$. [1]

Poznámka. **Speciální typy pásových matic.**

1. Horní trojúhelníková matice má $q = 0$.
2. Dolní trojúhelníková matice má $p = 0$.
3. Diagonální matice je (0,0)-pásová.
4. Matice v *Hessenbergově tvaru* má $q = 1$ (někdy $q \leq 1$).
5. Dále označujeme matice řádu n, které jsou (k, k)-pásové, kde $k < n$ takto,

- (1,1)-pásová se nazývá třídiagonální,
- (2,2)-pásová se nazývá pentagonální,

- (3,3)-pásová se nazývá heptagonální atd.

Příklad. Uveďme libovolnou pentagonální matici řádu 6.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 5 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Jako příklad speciálních typů pásových matic v Hessenbergově tvaru si zde uvedeme následující větu, která vyšla v článku od Cahilla, D'Errica a Narayana [21].

Věta 2.1. *Nechť* $A = (a_{ij})_n$ *je pásová matice v Hessenbergově tvaru*

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ddots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

pro všechna $n \geq 1$. *Potom pro její determinant platí*

$$\det A_n = a_{n,n} \cdot \det A_{n-1} + \sum_{r=1}^{n-1} \left((-1)^{n-r} \cdot a_{n,r} \prod_{j=r}^{n-1} a_{j,j+1} \cdot \det A_{r-1} \right), \ n \geq 2 \ , \tag{6}$$

s počátečními podmínkami $\det A_0 = 1$ *a* $\det A_1 = a_{1,1}$.

Důkaz. Viz. [21].

Následující věta je z článku od Borowska, Łacińska a Rychlewska [4]. Tyto autorky se ve své práci zabývají nejrůznějšími souvislostmi mezi k-třídiagonálními maticemi. Zde uvádíme rekurentní rovnici pro determinanty třídiagonálních matic včetně důkazu, který je výchozím pro další úvahy.

Věta 2.2. *Nechť* A *je třídiagonální matice řádu* n

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n, \end{pmatrix}, \tag{7}$$

pak pro $n > 2$ platí

$$\det A_n = a_n \cdot \det A_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1} \cdot \det A_{n-2}, \tag{8}$$

s počátečními podmínkami

$$\det A_1 = a_1, \qquad \det A_2 = a_1 a_2 - b_1 c_1.$$

Důkaz. Využijeme na matici A Laplaceův rozvoj podle posledního řádku, abychom získali

$$\det A_n = a_n \det A_{n-1} - b_{n-1} \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & \ddots & c_{n-3} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & c_{n-1} \end{pmatrix},$$

opětovným užitím Laplacova rozvoje podle posledního sloupce získáváme

$$\det A = a_n \cdot \det A_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1} \cdot \det A_{n-2}.$$

□

Poznámka. Jestliže je matice A_n ve Větě 2.2 Toeplitzova matice (viz. Definice 2.3 z následující kapitoly) pak platí

$$\det A_n = a \cdot \det A_{n-1} - bc \cdot \det A_{n-2}.$$

Příklad. Vypočítejte užitím rekurence (8) determinant následující třídiagonální matice.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \left(3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \right) - 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot [3 \cdot (-3 + 1 - 4) - 4 \cdot 3 \cdot (3 + 4)] - 2 \cdot 1 \cdot (-3 - 4 + 1) =$$

$$= 1 \cdot (-18 - 84) - 2 \cdot (-6) = -102 + 12 = -90.$$

Definice 2.2. Nechť k je libovolné přirozené číslo. Matice $B^{(k)} = (b_{ij})_n$ je k-**třídiagonální** matice pokud je ve tvaru,

$$B^{(k)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & c_{n-k} \\ b_1 & 0 & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-k} & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \tag{9}$$

kde $n \geq 2$ a pro všechna, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$b_{ij} = \begin{cases} a_i, & pro \quad i - j = 0; \\ b_i, & pro \quad i - j = k; \\ c_i, & pro \quad i - j = -k; \\ 0, & jinak, \end{cases} \tag{10}$$

kde $k \in \{1, 2, \ldots n - 1\}$.

Poznámka. Pro $k \geq n$ je (9) matice s prvky pouze na hlavní diagonále.

Následující věta je uvedena v článku od Borowska a Łacińska [8]. Větu i důkaz jsme se pokusili fomulovat efektněji, než uvedly autorky v článku. Myšlenka důkazu je inspirativní, proto je zde uveden celý.

Věta 2.3. *Uvažujme 2-třídiagonální matici řádu n*

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & & & & & & \\ 0 & a_2 & 0 & c_2 & & & & & \\ b_3 & 0 & a_3 & 0 & c_3 & & & & \\ & b_4 & 0 & a_4 & 0 & c_4 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & b_{n-3} & 0 & a_{n-3} & 0 & c_{n-3} & \\ & & & & b_{n-2} & 0 & a_{n-2} & 0 & c_{n-2} \\ & & & & & b_{n-1} & 0 & a_{n-1} & 0 \\ & & & & & & b_n & 0 & a_n \end{pmatrix}, \tag{11}$$

a dvě pomocné třídiagonální matice řádu k:

$$A_k^* = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_3 & a_3 & c_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{2k-3} & a_{2k-3} & c_{2k-3} \\ & & & b_{2k-1} & a_{2k-1} \end{pmatrix}, A_k^{**} = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 & & & \\ b_4 & a_4 & c_4 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{2k-2} & a_{2k-4} & c_{2k-4} \\ & & & b_{2k} & a_{2k} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Determinanty matic A_n, A_k^*, A_k^{**} můžeme zapsat pomocí rekurentních rovnic takto

- *Rekurentní rovnice pro A_n :*

$$\det A_{n+4} = a_{n+4} \cdot \det A_{n+3} - a_{n+3}b_{n+4}c_{n+2} \cdot \det A_{n+1} + b_{n+3}b_{n+4}c_{n+1}c_{n+2} \cdot \det A_n, \tag{13}$$

s počátečními podmínkami

$$\det A_1 = a_1, \qquad \det A_2 = a_1a_2, \qquad \det A_3 = a_3 \cdot \det A_2 - a_2b_3c_1,$$
$$\det A_4 = a_4 \cdot \det A_3 + b_4c_2(b_3c_1 - a_1a_3). \tag{14}$$

- *Rekurentní rovnice pro A_k* :*

$$\det A_{k+2}^* = a_{2k+3} \cdot \det A_{k+1}^* - b_{2k+3}c_{2k+1} \cdot \det A_k^*, \tag{15}$$

s počátečními podmínkami

$$\det A_1^* = a_1, \qquad \det A_2^* = a_1a_3 - b_3c_1. \tag{16}$$

- *Rekuretní rovnice pro* A_k^{**} :

$$\det A_{k+2}^{**} = a_{2k+4} \cdot \det A_{k+1}^{**} - b_{2k+4}c_{2k+2} \cdot \det A_k^{**}, \tag{17}$$

s počátečními podmínkami

$$\det A_1^{**} = a_2, \qquad \det A_2^{**} = a_2a_4 - b_4c_2 \ . \tag{18}$$

Pokud navíc dodefinujeme $\det A_0^{**} = 1$, *pak pro* $n \geq 1$ *platí*

$$\det A_n = \det A^{**}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \det A^{*}_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \ . \tag{19}$$

Poznámka. Závorkami $\lfloor x \rfloor$ označujeme tzv. *dolní celou část*, pro kterou platí $\lfloor x \rfloor = n$, právě když $n \leq x < n+1$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$.

Poznámka. Důkaz pro determinant pentadiagonální matice popisuje Borowska, Łacińska a Rychlewska [4] a rekurentní rovnice pro determinanty třídiagonálních matic jsme odvodili v textu Věta 2.2.

Důkaz. Budeme dokazovat, že každý determinant $\det A_n$, kde n je přirozené číslo, daný vztahem (19) vyhovuje rekurentní rovnici (13) s danými počátečními podmínkami (14).

Nejdříve dokážeme, že počáteční podmínky (14) lze získat z rovnice (19).

Pokud budeme postupně do vztahů (19), dosazovat přirozená čísla $n \geq 1$, potom získáme:

$$\begin{aligned}
n = 1 \ldots \det A_1 &= \det A^{**}_{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} \cdot \det A^{*}_{\lfloor 1 \rfloor} = \det A_0^{**} \cdot \det A_1^{*};\\
n = 2 \ldots \det A_2 &= \det A^{**}_{\lfloor 1 \rfloor} \cdot \det A^{*}_{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor} = \det A_1^{**} \cdot \det A_1^{*};\\
n = 3 \ldots \det A_3 &= \det A^{**}_{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor} \cdot \det A^{*}_{\lfloor 2 \rfloor} = \det A_1^{**} \cdot \det A_2^{*};\\
n = 4 \ldots \det A_4 &= \det A^{**}_{\lfloor 2 \rfloor} \cdot \det A^{*}_{\lfloor \frac{5}{2} \rfloor} = \det A_2^{**} \cdot \det A_2^{*};
\end{aligned}$$

současně z (14), (16) a (18) za předpokladu, že $\det A_0^{**} = 1$ získáme:

$\det A_1 = a_1 = 1 \cdot a_1 = \det A_0^{**} \cdot \det A_1^{*}$;

$\det A_2 = a_1 \cdot a_2 = \det A_1^{*} \cdot \det A_1^{**}$;

$\det A_3 = a_3 \cdot \det A_2 - a_2b_3c_1 = a_1a_2a_3 - a_2b_3c_1 = a_2(a_1a_3 - b_3c_1) = \det A_1^{**} \cdot \det A_2^{*}$;

$$\begin{aligned}
\det A_4 &= a_4 \cdot \det A_3 + b_4c_2(b_3c_1 - a_1a_3) = a_2a_4(a_1a_3 - b_3c_1) - b_4c_2(a_1a_3 - b_3c_1) =\\
&= (a_2a_4 - b_4c_2) \cdot (a_1a_3 - b_3c_1) = \det A_2^{**} \cdot \det A_2^{*} \ .
\end{aligned}$$

Tím jsme prokázali, že počáteční podmínky (14) můžeme získat z (19).

Nyní ukážeme, že každý determinant $\det A_n,\ n > 4$, který získáme z rovnosti (19) splňuje rekurentní rovnici (13).

V další části důkazu budeme zvlášť uvažovat n sudé a n liché. Nejprve uvažujme n sudé, tedy označme $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$.

Dosadíme $n = 2k$ do rovnice (13)

$$\det A_{2k+4} = a_{2k+4}\cdot\det A_{2k+3} - a_{2k+3}b_{2k+4}c_{2k+2}\cdot\det A_{2k+1} + b_{2k+3}b_{2k+4}c_{2k+2}c_{2k+1}\cdot\det A_{2k}\ ,$$

z (19) získáme:

$$\begin{aligned}
\det A_{2k+4} &= \det A^{**}_{\lfloor\frac{2k+4}{2}\rfloor}\cdot\det A^{*}_{\lfloor\frac{2k+5}{2}\rfloor} = \det A^{**}_{k+2}\cdot\det A^{*}_{k+2};\\
\det A_{2k+3} &= \det A^{**}_{\lfloor\frac{2k+3}{2}\rfloor}\cdot\det A^{*}_{\lfloor\frac{2k+4}{2}\rfloor} = \det A^{**}_{k+1}\cdot\det A^{*}_{k+2};\\
\det A_{2k+1} &= \det A^{**}_{\lfloor\frac{2k+1}{2}\rfloor}\cdot\det A^{*}_{\lfloor\frac{2k+2}{2}\rfloor} = \det A^{**}_{k}\cdot\det A^{*}_{k+1};\\
\det A_{2k} &= \det A^{**}_{\lfloor\frac{2k}{2}\rfloor}\cdot\det A^{*}_{\lfloor\frac{2k+1}{2}\rfloor} = \det A^{**}_{k}\cdot\det A^{*}_{k}\ .
\end{aligned} \tag{20}$$

Nyní musíme dokázat, že rovnice

$$\begin{aligned}
&\det A^{**}_{k+2}\cdot\det A^{*}_{k+2} = a_{2k+4}\cdot\det A^{**}_{k+1}\cdot\det A^{*}_{k+2} - a_{2k+3}b_{2k+4}c_{2k+2}\cdot\det A^{**}_{k}\cdot\det A^{*}_{k+1}+\\
&+ b_{2k+3}b_{2k+4}c_{2k+2}c_{2k+1}\cdot\det A^{**}_{k}\cdot\det A^{*}_{k},
\end{aligned} \tag{21}$$

platí pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

Začneme úpravou levé strany rovnice (32). S ohledem na rovnice (31) a (17)

$$\begin{aligned}
&\det A^{**}_{k+2}\cdot\det A^{*}_{k+2} =\\
&\quad=(a_{2k+4}\cdot\det A^{**}_{k+1} - b_{2k+4}c_{2k+2}\cdot\det A^{**}_{k})(a_{2k+3}\cdot\det A^{*}_{k+1} - b_{2k+3}c_{2k+1}\cdot\det A^{*}_{k}) =\\
&\quad=a_{2k+3}a_{2k+4}\cdot\det A^{**}_{k+1}\cdot\det A^{*}_{k+1} - a_{2k+4}b_{2k+3}c_{2k+1}\cdot\det A^{**}_{k+1}\cdot\det A^{*}_{k}-\\
&\qquad- a_{2k+3}b_{2k+4}c_{2k+2}\cdot\det A^{**}_{k}\cdot\det A^{*}_{k+1} + b_{2k+3}b_{2k+4}c_{2k+1}c_{2k+2}\cdot\det A^{**}_{k}\cdot\det A^{*}_{k} =\\
&\quad=a_{2k+4}(a_{2k+3}\cdot\det A^{*}_{k+1} - b_{2k+3}c_{2k+1}\cdot\det A^{*}_{k})\cdot\det A^{**}_{k+1}-\\
&\qquad- a_{2k+3}b_{2k+4}c_{2k+2}\cdot\det A^{**}_{k}\cdot\det A^{*}_{k+1} + b_{2k+3}b_{2k+4}c_{2k+1}c_{2k+2}\cdot\det A^{**}_{k}\cdot\det A^{*}_{k} =\\
&\quad=a_{2k+4}\cdot\det A^{*}_{k+2}\cdot\det A^{**}_{k+1} - a_{2k+3}b_{2k+4}c_{2k+2}\cdot\det A^{**}_{k}\cdot\det A^{*}_{k+1}+\\
&\qquad+ b_{2k+3}b_{2k+4}c_{2k+1}c_{2k+2}\cdot\det A^{**}_{k}\cdot\det A^{*}_{k}\ .
\end{aligned}$$

Po konečném počtu úprav jsme získali pravou strany rovnice (32).

Pro n liché, tedy bychom uvažovali $n = 2k - 1$, pro $k \in \mathbb{N}$, je postup analogický. □

Věta 2.4. *Mějme dán vektor $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, kterým vzhledem k matici (9) rozumíme vektor*

$$d_i = \begin{cases} a_i\ , & i = 1, 2, \ldots, k \\ a_i - \frac{b_{i-k} \cdot c_{i-k}}{d_{i-k}}, & i = k+1, k+2, \ldots n \end{cases} \tag{22}$$

Determinant matice $B_n^{(k)}$, kde platí, že $d_i \neq 0$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$, lze určit pomocí LU- faktorizace takto

$$B_n^{(k)} = L_n^{(k)} \cdot U_n^{(k)},$$

kde

$$L_n^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \frac{b_1}{d_1} & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \frac{b_2}{d_2} & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{b_{n-k}}{d_{n-k}} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_n^{(k)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & c_{n-k} \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix},$$

a

$$\det B_n^{(k)} = \prod_{i=1}^{n} d_i\ . \tag{23}$$

Důkaz. Viz. [6].

Příklad. Vypočítejte užitím Věty 2.4 determinant následující 2-třídiagonální matice.

$$M_4^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

1. Určíme vektor d:

$d_1 = 1; d_2 = 4;$

$d_3 = a_3 - \frac{b_1 c_1}{d_1} = 2 - \frac{2 \cdot 2}{1} = -2;$

$d_4 = a_4 - \frac{b_2 \cdot c_2}{d_2} = -4 - \frac{-1 \cdot 1}{4} = -\frac{3}{4};$

$d = (1; 4; -2; -\frac{3}{4})$.

2. Aplikujeme vzorec:

$$\det M_4^{(2)} = \prod_{i=1}^{4} d_i = 1 \cdot 4 \cdot (-2) \cdot (-\frac{3}{4}) = 6 \ .$$

2.1 Toeplitzovy matice

Toeplitzovy matice se užívají v různých vědeckých disciplínách. Například pro řešení obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic v aplikované matematice, ve statistice, fyzice, bezdrátových a senzorových síťových aplikacích atd. Literaturou zabývající se Toeplitzovými maticemi jsou například články od Küçüka a Düze [17], Borowské, Łacińské a Rychlewské [16].

Definice 2.3. Nechť je matice T čtvercová matice řádu n. Matice T se nazývá **Toeplitzova matice** pokud má konstantní prvky na diagonálách.

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ b_1 & a_0 & c_1 & \ddots & \vdots \\ b_2 & b_1 & a_0 & \ddots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_1 \\ b_n & \cdots & b_2 & b_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Příklad. Následující matice představuje Toeplitzovu matici řádu 4.

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -4 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Faktorizací pentagonální matice na 2-třídiagonální matice, tvaru (7) se zabývají autoři Diele a Lopez ve svém článku [22]. Věta předkládá zajímavé souvislosti mezi pásovými a třídiagonálními maticemi.

Věta 2.5. *Nechť matice A je $(2,2)$-pásová matice řádu n, mající tvar*

$$A = \begin{pmatrix} x-\alpha & y & v & 0 & \cdots & 0 \\ z & x & y & v & \ddots & \vdots \\ w & z & x & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & v \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x & y \\ 0 & \cdots & 0 & w & z & x-\beta \end{pmatrix}.$$

Uvažujeme-li dvě třídiagonální matice T_1 a T_2 ve tvaru

$$T_1 = \begin{pmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} a' & c' & 0 & \cdots & 0 \\ b' & a' & c' & \ddots & \vdots \\ 0 & b' & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a' & c' \\ 0 & \cdots & 0 & b' & a' \end{pmatrix} \tag{24}$$

pak můžeme matici A vyjádřit jako $A = T_1T_2$, pokud platí

$$x = aa' + cb' + bc', \qquad y = ac' + ca', \qquad z = b' + ba',$$
$$v = cc', \qquad w = bb', \qquad \alpha = bc', \qquad \beta = cb'\ .$$

Důkaz. Viz. [22].

Poznámka. Rozklad uveden ve Větě 2.5 se využívá pro řešení soustav lineárních rovnic, stejně jako klasická LU-faktorizace. Řešení přes výše uvedený T_1T_2-rozklad je ovšem rychlejší pro $(2,2)$- pásové matice, než užití klasické LU-faktorizace. Pro LU-faktorizaci musíme provést $19n-29$ operací a pro T_1T_2-rozklad $16n-14$ operací, kde n je řád matice A. [22]

Poznámka. Je zajímavé si uvědomit, že matice A nemůže být také Toeplitzova, protože když ji vytvoříme faktorizací dvou třídiagonálních Toepliztových matic získáme na prvním a posledním prvku hlavní diagonály odlišné hodnoty.

Věta 2.6. *Nechť A je 2-třídiagonální Toeplitzova matice řádu n, kde $n \geq 4$.*

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ b & \ddots & a & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & c \\ \vdots & & b & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Pak pro její determinant platí

$$\det(A_n) = a \cdot \det(A_{n-1}) - abc \cdot \det(A_{n-3}) + b^2c^2 \cdot \det(A_{n-4}),$$

s počátečními podmínkami,

$$\det(A_1) = a, \qquad \det(A_2) = a^2, \qquad \det(A_3) = a^3 - abc, \qquad \det(A_4) = a^3 - 2a^2bc + b^2c^2.$$

Důkaz. Důkaz lze provést přímo podle Laplaceova rozvoje dle posledního řádku a sloupce. Podobně jako ve Větě 2.7 s ohledem na Definici determinantu (2).

Následující věty představující rekurentní rovnice pro permanent 2-třídiagonální matice a determinanty 3-třídiagonálních a 4-třídiagonálních matic odvodila ve své diplomové práci Iva Zvoníková [13]. Vzhledem k souvislostem s praktickou částí práce zde jejich znění uvádíme.

Věta 2.7. *Nechť A je 2-třídiagonální Toeplitzova matice řádu n, kde $n \geq 4$.*

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ b & \ddots & a & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & c \\ \vdots & & b & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Pak pro její permanent platí

$$\operatorname{per}(A_n) = a \cdot \operatorname{per}(A_{n-1}) + abc \cdot \operatorname{per}(A_{n-3}) + b^2c^2 \cdot \operatorname{per}(A_{n-4}),$$

s počátečními podmínkami

$$\operatorname{per}(A_0) = 1, \qquad \operatorname{per}(A_1) = a, \qquad \operatorname{per}(A_2) = a^2, \qquad \operatorname{per}(A_3) = a^3 + abc\ .$$

Důkaz. Důkaz provedeme přímo. Permanent matice A_n upravíme pomocí Laplaceova rozvoje dle posledních řádků a sloupců.

$$\mathrm{per}A_n = \mathrm{per}\begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ b & \ddots & a & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & c \\ \vdots & & b & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}_n =$$

$$= a \cdot \mathrm{per}(A_{n-1}) + b \cdot \mathrm{per}\begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ b & \ddots & a & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & b & 0 & a & c & 0 \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b & a & 0 \end{pmatrix}_{n-1} =$$

$$= a \cdot \mathrm{per}(A_{n-1}) + bc \cdot \mathrm{per}\begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ b & \ddots & a & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & b & 0 & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}_{n-2} =$$

$$= a \cdot \mathrm{per}(A_{n-1}) + abc \cdot \mathrm{per}(A_{n-3}) + b^2c \cdot \mathrm{per}\begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ b & \ddots & a & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & b & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b & 0 & c \end{pmatrix}_{n-3} =$$

$$= a \cdot \mathrm{per}(A_{n-1}) + abc \cdot \mathrm{per}(A_{n-3}) + b^2c \cdot \mathrm{per}(A_{n-4}) \ .$$

□

Věta 2.8. *Nechť A je 3-třídiagonální Toeplitzova matice řádu n*

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c \\ \vdots & & b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \tag{25}$$

označme $\det A_n$ *jako* D_n*, pak pro* $n > 4$ *platí*

$$D_n = a \cdot D_{n-1} - bc \cdot D_{n-2} + abc \cdot D_{n-3} - a^2bc \cdot D_{n-4} + ab^2c^2 \cdot D_{n-5} - b^3c^3 \cdot D_{n-6} +$$
$$+ ab^3c^3 \cdot D_{n-7} - b^4c^4 \cdot D_{n-8},$$

splňující počáteční podmínky,

$$D_1 = a, \qquad D_2 = a^2, \qquad D_3 = a^3, \qquad D_4 = a^4 - a^2bc, \qquad D_5 = a^5 - 2a^3bc + ab^2c^2$$
$$D_6 = a^6 - 3a^4bc + 3a^2b^2c^2 - b^3c^3, \qquad D_7 = a^7 - 4a^5bc + 5a^3b^2c^2 - 2ab^3c^3,$$
$$D_8 = a^8 - 5a^6bc + 8a^4b^2c^2 - 4a^2b^3c^3.$$

Důkaz. Viz. [13].

Věta 2.9. *Nechť A je 4-třídiagonální Toeplitzova matice řádu n*

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & & c & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & c \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \tag{26}$$

označme $detA_n$ jako D_n, pak pro $n > 5$ platí

$$
\begin{aligned}
D_n =& a \cdot D_{n-1} - bc \cdot (a^2 - bc) \cdot D_{n-4} - abc \cdot (a^2 - bc) D_{n-5} + b^2c^2 \cdot (a^2 - bc) \cdot D_{n-6} - \\
&- b^3c^3 \cdot (a^2 - bc) \cdot D_{n-8} + ab^3c^3 \cdot (a^2 - bc) \cdot D_{n-9} - b^4c^4 \cdot (a^2 - bc) \cdot D_{n-10} + \\
&+ b^6c^6 \cdot D_{n-11} - ab^6c^6 \cdot D_{n-12} + b^7c^7 \cdot D_{n-13},
\end{aligned}
$$

splňující počáteční podmínky

$$
\begin{aligned}
&D_0 = 1 \qquad D_1 = a, \qquad D_2 = a^2, \qquad D_3 = a^3, \qquad D_4 = a^4, \qquad D_5 = a^3(a^2 - bc), \\
&D_6 = a^2(a^2 - bc)^2, \qquad D_7 = a(a^2 - bc)^3, \qquad D_8 = (a^2 - bc)^4 \\
&D_9 = a(a^2 - 2bc)(a^2 - bc)^3, \qquad D_{10} = a^2(a^2 - 2bc)^2(a^2 - bc)^2, \\
&D_{11} = a^3(a^2 - 2bc)^3(a^2 - bc), \qquad D_{12} = a^4(a^2 - 2bc)^4, \\
&D_{13} = a^3(a^2 - 2bc)(a^4 - 3a^2bc + b^2c^2).
\end{aligned}
$$

Důkaz. Viz. [13].

Zjednodušením určení determinantu libovolné k-třídiagonální matice se věnuje například El-Mikkawy a Atlan v článku [6]. Uvádím zde celý důkaz, protože dané myšlenky v textu dále využíváme.

Věta 2.10. *Nechť $A_n^{(k)}$ je k-třídiagonální Toeplitzova matice řádu n,*

$$
A_n^{(k)} = \begin{pmatrix}
a & 0 & \cdots & 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a & 0 & \cdots & 0 & c & \ddots & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & c \\
b & 0 & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\
0 & b & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 & a & 0 \\
0 & \cdots & 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a
\end{pmatrix}
$$

Jestliže $n = mk + r$, kde $r = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, pak platí

$$
\det(A_n^{(k)}) = [\det(A_{m+1})]^r \cdot [\det(A_m)]^{k-r}, \tag{27}
$$

kde A_{m+1} a A_m jsou třídiagonální matice typu (24) řádu $m+1$ a m.

Důkaz. Nejprve využijeme Větu 2.4, abychom získali,

$$\det(A_n^{(k)}) = \prod_{p=1}^{n} d_p \ , \tag{28}$$

kde

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_k = a, \qquad\qquad d_i = a - \frac{bc}{d_{i-k}}, i = k+1, k+2, \ldots, n \ .$$

Nyní využijeme Větu 2.2, kde danou lineární homogenní rovnici přepíšeme pro snažší výpočet na tvar

$$u_i = a \cdot u_{i-1} - bc \cdot u_{i-2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ , \tag{29}$$

s počátečními podmínkami $u_{-1} = 0$ a $u_0 = 1$.

Protože $n = mk + r$; $r = 0, 1, \ldots, k-1$ jsou hodnoty $d_1, d_2, \ldots, d_n$ určeny užitím lineární homogenní rovnice (29) takto:

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_k = \frac{a}{1} = \frac{u_1}{u_0},$$
$$d_{k+1} = d_{k+2} = \cdots = d_{2k} = a - \frac{bc}{d_1} = a - \frac{bc}{\frac{u_1}{u_0}} = \frac{a \cdot u_1 - bc \cdot u_0}{u_1} = \frac{u_2}{u_1},$$
$$d_{2k+1} = d_{2k+2} = \cdots = d_{3k} = a - \frac{bc}{d_{k+1}} = a - \frac{bc}{\frac{u_2}{u_1}} = \frac{a \cdot u_2 - bc \cdot u_1}{u_2} = \frac{u_3}{u_2},$$
$$\vdots$$
$$d_{(m-1)k+1} = \cdots = d_{mk} = a - \frac{bc}{d_{(m-2)k+1}} = a - \frac{bc}{\frac{u_{m-1}}{u_{m-2}}} = \frac{a \cdot u_{m-1} - bc \cdot u_{m-2}}{u_{m-1}} = \frac{u_m}{u_{m-1}},$$
$$d_{mk+1} = \cdots = d_{mk+r} = a - \frac{bc}{d_{(m-1)k+1}} = a - \frac{bc}{\frac{u_m}{u_{m-1}}} = \frac{a \cdot u_m - bc \cdot u_{m-1}}{u_m} = \frac{u_{m+1}}{u_m} \ .$$

V dalším kroku provedeme dosazení vzorců do rovnice (28) a zjednodušíme:

$$\det(A_n^{(k)}) = \prod_{p=1}^{n} d_p = \prod_{p=1}^{mk+r} d_p =$$
$$= [d_1 d_2 \cdots d_k] \cdot [d_{k+1} d_{k+2} \cdots d_{2k}] \cdots [d_{(m-1)k+1} d_{(m-1)k+2} \cdots d_{mk}] \cdot [d_{mk+1} \cdots d_{mk+r}] =$$
$$= \left[\frac{u_1}{u_0}\right]^k \cdot \left[\frac{u_2}{u_1}\right]^k \cdots \left[\frac{u_m}{u_{m-1}}\right]^k \cdot \left[\frac{u_{m+1}}{u_m}\right]^r =$$
$$= \left[\left(\frac{u_1}{u_0}\right) \cdot \left(\frac{u_2}{u_1}\right) \cdots \left(\frac{u_m}{u_{m-1}}\right) \cdot \left(\frac{u_{m+1}}{u_m}\right)\right]^r \cdot \left[\left(\frac{u_1}{u_0}\right) \cdot \left(\frac{u_2}{u_1}\right) \cdot \left(\frac{u_m}{u_{m-1}}\right)\right]^{k-r} =$$
$$= (u_{m+1})^r \cdot (u_m)^{k-r}.$$

Čímž jsme získali rovnost

$$\det(A_n^{(k)}) = [\det(A_{m+1})]^r \cdot [\det(A_m)]^{k-r}.$$

$\square$

Poznámka. Pokud ve Větě 2.10 platí, že $k \mid n$, pak $r = 0$ a rovnost (27) lze upravit na tvar

$$\det(A_n^{(k)}) = [\det(A_{\frac{n}{k}})]^k.$$

Příklad. Vypočítejte determinant 2-třídiagonální matice A řádu 4 s využitím rovnosti (27).

Nejprve si určíme proměnné m a r:

Pro daný vztah $n = mk + r$, kde $r = 0, 1, 2, \cdots, k-1$, nám po dosazení za $n = 4$ vychází $m = 2,\ r = 0$.

Nyní přejděme k samotnému výpočtu:

$$\det A_4^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [\det(A_{m+1})]^r \cdot [\det(A_m)]^{k-r} = [\det(A_3)]^0 \cdot [\det(A_2)]^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}^0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 = 1 \cdot (1-6)^2 = 25.$$

Následující Věty 2.11 a 2.12 odvodila Iva Zvoníková ve své diplomové práci [13]. Uvádím je zde včetně důkazů. Při důkazu obou vět jsem zvolila jiný přístup se snahou odkrýt nové souvisloti.

Věta 2.11. *Nechť $A_n^{(n-1)}$ je $(n-1)$-třidiagonální Toeplitzova matice řádu n, kde $n \geq 2$,*

$$A_n^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & c \\ 0 & a & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a, \end{pmatrix}, \tag{30}$$

pak platí

$$\det A_n^{(n-1)} = a^{n-2}(a^2 - bc),$$

$$\mathrm{per} A_n^{(n-1)} = a^{n-2}(a^2 + bc).$$

Důkaz. Nejprve uvedeme důkaz pro determinant. Využijeme na matici $A_n^{(n-1)}$ Větu 2.10, tedy získáme rovnost,

$$\det(A_n^{(n-1)}) = [\det(A_{m+1})]^r \cdot [\det(A_m)]^{n-1-r}. \tag{31}$$

Nyní potřebujeme určit hodnoty m a r. Vyjdeme z rovnosti $n = mk + r$, kde $r = \ 0, 1, \ldots, k-1$ kde $k = n - 1$ a upravíme:

$$\begin{aligned} n &= m \cdot (n-1) + r \\ n &= mn - m + r \\ r &= n - mn + m \\ r &= n \cdot (1-m) + m; \qquad r = 0, 1 \ldots, n-2 \ . \end{aligned} \tag{32}$$

Odtud plyne, že $m \in \{0, 1\}$. Tudíž uvažujeme:

1. Pokud je $m = 0$, pak z rovnice (32) vyplývá, že $r = n$, což je ve sporu s podmínkami pro r.

2. Pokud je $m = 1$, pak z rovnice (32) vyplývá, že $r = 1$.

Dosaďmě nyní $m = 1, r = 1$ do rovnice (31):

$$\det(A_n^{(n-1)}) = [\det(A_2)]^1 \cdot [\det(A_1)]^{n-1-1} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & c \end{vmatrix}^1 \cdot [a]^{n-2} = (a^2 - bc) \cdot a^{n-2} \ .$$

Důkaz pro permanent Viz. [13].

□

Věta 2.12. *Nechť $A_n^{(n-1)}$ je $(n-1)$-třídiagonální Toeplitzova matice řádu n, viz matice (30). Pak platí,*

$$\det A_n^{(n-1)} = a \cdot \det A_{n-1}^{(n-2)},$$

kde $n \geq 3$.

Důkaz. Důkaz provedeme přímo. Determinant matice $A_n^{(n-1)}$ upravíme pomocí Laplaceova rozvoje dle druhého řádku.

$$\det A_n^{(n-1)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & c \\ 0 & a & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_n = (-1)^{2+2}\, a \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & c \\ 0 & a & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1} =$$

$$= a \cdot \det A_{n-1}^{(n-2)} \ .$$

□

Kapitola 3

Vytvořující funkce

Následující kapitola se zabývá metodou vytvořující funkce a popisuje všechny nutné definice a věty, které budeme potřebovat v praktické části práce.
Metoda vytvořující funkce je matematický nástroj vhodný například k zjednodušování rovnic a rekurencí. Příkladem literatury, která se zabývá metodou vytvořující funkce, jsou například publikace od Zítka [18] nebo *Generatingfunctionology* od Wilfa [19].

Definice 3.1. Homogenní lineární rekurencí (rekurentní rovnicí) řádu s rozumíme rovnici

$$c_0 a_{n+s} + c_1 a_{n+s-1} + c_2 a_{n+s-2} + \cdots + c_{s-1} a_{n+1} + c_s a_n = 0, \tag{33}$$

kde $c_0, c_1, \ldots, c_s;\ c_0, c_s \neq 0$ jsou konstantními koeficienty a čísla a_i pro $i \in \{n, n+1, \ldots, n+s\}$ jsou členy posloupnosti reálných čísel $(a_n)_{n \geq 0}$.

Definice 3.2. Charakteristickým polynomem lineární rekurentní rovnice (33) je

$$c_0 x^s + c_1 x^{s-1} + c_2 x^{s-2} + \cdots + c_{s-1} x + c_s = c_0 (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_l)^{m_l},$$

kde λ_j jsou navzájem různá a nazýváme je kořeny lineární rekurentní rovnice (33).

Poznámka. **Počáteční podmínky.**

Abychom zajistily, že má rekurentní rovnice (33) jednoznačné řešení, musíme stanovit konkrétní hodnoty všech s počátečních členů

$$a_0 = \alpha_0,\ a_1 = \alpha_1, \ldots, a_{s-1} = \alpha_{s-1}, \tag{34}$$

kde $\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1} \in \mathbb{C}$.

Definice 3.3. Nechť $(a_n)_{n\geq 0}$ je posloupnost reálných čísel. Vytvořující funkcí této posloupnosti chápeme mocninnou řadu $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$.

Poznámka. Jestliže můžeme zapsat vytvořující funkci pro posloupnost $(a_n)_{n\geq 0}$ v uzavřeném tvaru, pak $A(x)$ popisuje všechny členy posloupnosti jedním výrazem.

Věta 3.1. *Vytvořující funkci $A(x)$ posloupnosti $(a_n)_{n\geq 0}$, která je řešením rekurentní rovnice (33) s počátečními podmínkami (34) lze vyjádřit*

$$A(x) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{s-1} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} a_j \cdot c_{i-j} \right) x^i}{\sum\limits_{i=0}^{s} c_i \cdot x^i} .$$

Důkaz. Věta 3.1 se dá snadno dokázat pomocí rovnice (33) a podmínek (34).

Pro efektivní kombinování podmínek a výrazů si nyní zadefinujeme *Iversonovu notaci*, která je pojmenovaná podle stejnojmenného matematika Kennetha Iversona.

Definice 3.4. Iversonova notace nám přiřazuje k danému výroku V pravdivostní hodnotu podle toho, zda platí, nebo ne. Výrok píšeme do hranatých závorek.

$$[\mathtt{V}] = \begin{cases} 1, & \texttt{jestliže výrok platí;} \\ 0, & \texttt{jinak.} \end{cases}$$

Kapitola 4

Nové poznatky

Následující kapitola předkládá zejména odvození rekurentních rovnic pro permanenty 3-třídiagonálních a 4-třídiagonálních Toeplitzových matic. (V celé následující kapitole bude uvažováno pouze nad Toeplitzovými maticemi, tuto skutečnost již nebudeme dále připomínat).

Na úvod zmíníme závěry z článku od Küçüka, Özena a Ince [20]. Zde autoři uvádějí rekurentní rovnice pro permanenty třídiagonální a 2-třídiagonální matice. Navazují Větou o souvislostech mezi permanenty 3-třídiagonálních matic s permanenty třídiagonálních a 2-třídiagonálních matic, kterou výsledně zobecňují pro případ k - třídiagonálních matic. Autoři tedy nepokračovali v úvahách nad rekurentními rovnicemi pro permanenty k-třídiagonálních matic, kde $k \geq 3$. Proto se v další části práce těmito maticemi zabýváme a odvozujeme příslušné rekurence.

Pro zajímavost uvádíme zmíněnou Větu z článku [20] o vlastnosti permanentu obecné k-třídiagonální matice.

Věta 4.1. *Nechť $A = (a_{ij})_n$ je k-třídiagonální matice n-tého řádu, kde $n \geq k+1$. Pak platí*

$$P_n^{(k)} = aP_{n-1}^{(k)} + bcP_{\lceil \frac{n}{k} \rceil - 2}^{(1)} \cdot P_{n-\lceil \frac{n}{k} \rceil}^{(k-1)},$$

kde $P_s^{(k)} = a^s$ pro $0 \leq s \leq k$ a prvky $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Poznámka. Závorkami $\lceil x \rceil$ označujeme tzv. *horní celou část* pro kterou platí $\lceil x \rceil = n+1$, právě když $n \leq x < n+1$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Viz. [20].

4.1 Permanent 3-třídiagonální Toeplitzovy matice

Matice $X = (a_{ij})_n$ je 3-třídiagonální matice n-tého řádu, kde pro její prvky platí

$$a_{ij} = \begin{cases} a, & pro \quad i-j=0; \\ b, & pro \quad i-j=3; \\ c, & pro \quad i-j=-3; \\ 0, & jinak. \end{cases}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c \\ \vdots & & b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}_n$$

Pro přehlednější zápis budeme označovat perX_n jako x_n.

Pro výpočet x_n budeme užívat Laplaceův rozvoj podle posledního řádku a sloupce.

Po třetím provedení nám vyjde permanent, který si prozatím označíme jako y_n.

$$x_n = \text{per}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c \\ \vdots & & b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}_n = a \cdot x_{n-1} +$$

$$+\,b\cdot\operatorname{per}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & b & 0 & 0 & a & 0 & c & 0 \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ \vdots & & 0 & 0 & b & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b & 0 & a & 0 \end{pmatrix}_{n-1} = a\cdot x_{n-1}+$$

$$+\,bc\cdot\operatorname{per}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & b & 0 & 0 & a & 0 & c \\ \vdots & & 0 & 0 & b & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}_{n-2} =$$

$$= a\cdot x_{n-1} + bc\cdot\left\{ a\cdot\operatorname{per}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & c & 0 \\ b & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & c \\ \vdots & & b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}_{n-3} \right. +$$

$$
\left. + b \cdot \operatorname{per} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & b & 0 & 0 & a & c & 0 \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b & a & 0 \end{pmatrix}_{n-3} \right\} =
$$

$$
= a \cdot x_{n-1} + bc \cdot \left\{ a \cdot y_{n-3} + bc \cdot \operatorname{per} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & c & 0 \\ b & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & b & 0 & 0 & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}_{n-4} \right\} =
$$

$$
= a \cdot x_{n-1} + abc \cdot y_{n-3} + b^2c^2 \cdot \left\{ a \cdot x_{n-5} + b \cdot \operatorname{per} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & c & 0 \\ b & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & & 0 & b & 0 & 0 & c \end{pmatrix}_{n-5} \right\} =
$$

$$
= a \cdot x_{n-1} + abc \cdot y_{n-3} + ab^2c^2 \cdot x_{n-5} + b^3c^3 x_{n-6}
$$

Nyní jsme získali rekurentní rovnici

$$
x_n = a \cdot x_{n-1} + abc \cdot y_{n-3} + ab^2c^2 \cdot x_{n-5} + b^3c^3 x_{n-6}.
$$

Vraťme se zpět k permanentu y_n. Označmě čtvercovou matici $Y = (y_{ij})_n$, kde pro její prvky platí

$$
y_{ij} = \begin{cases} b, & \textit{pro} \quad (i = n) \wedge (j = n-2); \\ c, & \textit{pro} \quad (i = n-2) \wedge (j = n); \\ 0, & \textit{pro} \quad (i = n) \wedge (j = n-3); (i = n-3) \wedge (j = n); \\ a_{ij}, & \textit{jinak.} \end{cases}
$$

Pro přehlednější zápis budeme označovat perY_n jako y_n.

Pro výpočet y_n budeme užívat Laplaceův rozvoj podle posledního řádku a sloupce.

$$y_n = \operatorname{per}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & b & 0 & 0 & a & 0 & c \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}_n = a \cdot x_{n-1} +$$

$$+ b \cdot \operatorname{per}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & c & 0 \\ \vdots & \ddots & b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b & 0 & a & 0 \end{pmatrix}_{n-1} =$$

$$= a \cdot x_{n-1} + bc \cdot \operatorname{per}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & c & 0 \\ b & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & c \\ \vdots & & b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}_{n-2} = a \cdot x_{n-1} + bc \cdot y_{n-2}.$$

Nyní jsme získali rekurentní rovnici

$$y_n = a \cdot x_{n-1} + bc \cdot y_{n-2}.$$

Z předchozích úvah máme soustavu 2 rekurentních rovnic

$$x_n = a \cdot x_{n-1} + abc \cdot y_{n-3} + ab^2c^2 \cdot x_{n-5} + b^3c^3 \cdot x_{n-6}, \tag{35}$$

$$y_n = a \cdot x_{n-1} + bc \cdot y_{n-2}. \tag{36}$$

Z rovnice (35) vyjádříme y_{n-3}:

$$y_{n-3} = \frac{1}{abc} \cdot (x_n - a \cdot x_{n-1} - ab^2c^2 \cdot x_{n-5} - b^3c^3 \cdot x_{n-6}) \tag{37}$$

Na základě změny indexů si rovnost (37) upravíme na následující dva tvary:

$$y_n = \frac{1}{abc} \cdot (x_{n+3} - a \cdot x_{n+2} - ab^2c^2 \cdot x_{n-2} - b^3c^3 \cdot x_{n-3}) \tag{38}$$

$$y_{n-2} = \frac{1}{abc} \cdot (x_{n+1} - a \cdot x_n - ab^2c^2 \cdot x_{n-4} - b^3c^3 \cdot x_{n-5}) \tag{39}$$

Tvary (38) a (39) dosadíme do rovnice (36) a vyjádříme x_{n+3}:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{abc} \cdot (x_{n+3} - a \cdot x_{n+2} - ab^2c^2 \cdot x_{n-2} - b^3c^3 \cdot x_{n-3}) = \\
&\qquad = a \cdot x_{n-1} + bc \cdot \frac{1}{abc} \cdot (x_{n+1} - a \cdot x_n - ab^2c^2 \cdot x_{n-4} - b^3c^3 \cdot x_{n-5}) \\
&x_{n+3} - a \cdot x_{n+2} - ab^2c^2 \cdot x_{n-2} - b^3c^3 \cdot x_{n-3} = \\
&\qquad = a^2bc \cdot x_{n-1} + bc \cdot x_{n+1} - abc \cdot x_n - ab^3c^3 \cdot x_{n-4} - b^4c^4 \cdot x_{n-5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_{n+3} = a \cdot x_{n+2} + ab^2c^2 \cdot x_{n-2} + b^3c^3 \cdot x_{n-3} + a^2bc \cdot x_{n-1} + bc \cdot x_{n+1} - \\
&-abc \cdot x_n - ab^3c^3 \cdot x_{n-4} - b^4c^4 \cdot x_{n-5}
\end{aligned}$$

Upravením indexů získáme rovnici pro x_n

$$\begin{aligned}
&x_n = a \cdot x_{n-1} + bc \cdot x_{n-2} - abc \cdot x_{n-3} + a^2bc \cdot x_{n-4} + ab^2c^2 \cdot x_{n-5} + b^3c^3 \cdot x_{n-6} - \\
&- ab^3c^3 \cdot x_{n-7} - b^4c^4 \cdot x_{n-8},
\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned}
&x_1 = a, \qquad x_2 = a^2, \qquad x_3 = a^3, \qquad x_4 = a^4 + a^2bc, \\
&x_5 = a^5 + 2a^3bc + ab^2c^2 \qquad x_6 = a^6 + 3a^4bc + 3a^2b^2c^2 + b^3c^3, \\
&x_7 = a^7 + 4a^5bc + 5a^3b^2c^2 + 2ab^3c^3, \qquad x_8 = a^8 + 5a^6bc + 8a^4b^2c^2 + 4a^2b^3c^3 \ .
\end{aligned}$$

4.2 Permanent 4-třídiagonální Toepliztovy matice

Matice $X = (a_{ij})_n$ je 4-třídiagonální matice n-tého řádu, kde pro její prvky platí

$$a_{ij} = \begin{cases} a, & pro \quad i-j=0; \\ b, & pro \quad i-j=4; \\ c, & pro \quad i-j=-4; \\ 0, & jinak. \end{cases}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}_n$$

Před samotným odvozením si nadefinujeme pomocné matice Y, Z, U, V, kde $n \geq 2$, které budeme využívat při výpočtech.

Matice $Y_n = (y_{i,j})$, kde

$$y_{ij} = \begin{cases} b, & pro \quad (i=n) \wedge (j=n-2); \\ c, & pro \quad (i=n-2) \wedge (j=n); \\ 0, & pro \quad (i=n \wedge j=n-4) \vee (i=n-4)=n); \\ a_{ij}, & jinak. \end{cases}$$

$$Y_n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & c \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Matice $Z_n = (z_{i,j})$, kde pro $n = 2, 3$ je matice $Z_n = X_n$ a pro $n \geq 4$ platí

$$z_{ij} = \begin{cases} b, & pro \quad (i = n) \wedge (j = n-3); \\ c, & pro \quad (i = n-3) \wedge (j = n); \\ 0, & pro \quad (i = n \wedge j = n-4) \vee (i = n-4 \wedge j = n); \\ a_{ij}, & jinak. \end{cases}$$

$$Z_n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c \\ \vdots & & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Matice $U_n = (u_{i,j})$, kde

$$u_{ij} = \begin{cases} b, & pro \quad (i = n \wedge j = n-2) \vee (i = n-1 \wedge j = n-4); \\ c, & pro \quad (i = n-2 \wedge j = n) \vee (i = n-4 \wedge j = n-1); \\ 0, & pro \quad (i = n \wedge j = n-4) \vee (i = n-4 \wedge j = n) \vee \\ & \vee (i = n-1 \wedge j = n-5) \vee (i = n-5 \wedge j = n-1); \\ a_{ij}, & jinak. \end{cases}$$

$$U_n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & c \\ \vdots & & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Matice $V_n = (v_{i,j})$, kde

$$v_{ij} = \begin{cases} b, & pro \quad (i = n \wedge j = n-3) \vee (i = n-1 \wedge j = n-4); \\ c, & pro \quad (i = n-3 \wedge j = n) \vee (i = n-4 \wedge j = n-1); \\ 0, & pro \quad (i = n \wedge j = n-4) \vee (i = n-4 \wedge j = n) \vee \\ & \vee (i = n-1 \wedge j = n-5) \vee (i = n-5 \wedge j = n-1); \\ a_{ij}, & jinak. \end{cases}$$

$$V_n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c \\ \vdots & & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Nyní budeme rekurentní rovnici pro permanent matice X_n odvozovat pomocí Laplaceova rozvoje dle posledního řádku či sloupce. S ohledem na pomocné matice Y, Z, U, V. Permanenty si pro větší přehlednost označíme následnovně:

$$\mathrm{per} X_n = x_n, \ \mathrm{per} Y_n = y_n, \ \mathrm{per} Z_n = z_n, \ \mathrm{per} U_n = u_n, \ \mathrm{per} V_n = v_n.$$

$$x_n = \operatorname{per}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}_n = a \cdot x_{n-1} +$$

$$+\, b \cdot \operatorname{per}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & c & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}_{n-1} = a \cdot x_{n-1} +$$

$$+\, bc \cdot \operatorname{per}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c \\ \vdots & & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}_{n-2} =$$

$$= a \cdot x_{n-1} + bc \cdot \left\{ a \cdot v_{n-3} + b \cdot \mathrm{per} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & c & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ \vdots & & 0 & 0 & 0 & b & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & a & 0 \end{pmatrix}_{n-3} \right\} =$$

$$= a \cdot x_{n-1} + bc \cdot \left\{ a \cdot v_{n-3} + bc \cdot \mathrm{per} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & c \\ \vdots & & 0 & 0 & 0 & b & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}_{n-4} \right\} =$$

$$= a \cdot x_{n-1} + bc \cdot \left\{ a \cdot v_{n-3} + bc \cdot \left[a \cdot y_{n-5} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \, b \cdot \mathrm{per} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & b & 0 & 0 & 0 & a & c & 0 \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & b & a & 0 \end{pmatrix}_{n-5} \right] \right\} =$$

$$= a \cdot x_{n-1} + bc \cdot \Bigg\{ a \cdot v_{n-3} + bc \cdot \Bigg[a \cdot y_{n-5} +$$

$$+ bc \cdot \mathrm{per} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & b & 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}_{n-6} \Bigg] \Bigg\} =$$

$$= a \cdot x_{n-1} + bc \cdot \Bigg\{ a \cdot v_{n-3} + bc \cdot \Bigg[a \cdot y_{n-5} + bc \cdot \Bigg(a \cdot x_{n-7} +$$

$$+ b \cdot \mathrm{per} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}_{n-7} \Bigg) \Bigg] \Bigg\} =$$

$$= a \cdot x_{n-1} + bc \cdot \Bigg\{ a \cdot v_{n-3} + bc \cdot \Bigg[a \cdot y_{n-5} + bc \cdot \Bigg(a \cdot x_{n-7} + bc \cdot x_{n-8} \Bigg) \Bigg] \Bigg\}.$$

Nyní jsme získali rekurentní rovnici:

$$x_n = a \cdot x_{n-1} + abc \cdot v_{n-3} + ab^2c^2 \cdot y_{n-5} + ab^3c^3 \cdot x_{n-7} + b^4c^4 \cdot x_{n-8}.$$

Vraťme se zpět k maticím Y, Z, U, V a vyjádřeme jejich permanenty:

$$y_n = \operatorname{per} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & c \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}_n = a \cdot x_{n-1} +$$

$$+b \cdot \operatorname{per} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}_{n-1} = a \cdot x_{n-1} + bc \cdot z_{n-2}.$$

Získaná rekurence je

$$y_n = a \cdot x_{n-1} + bc \cdot z_{n-2} \ .$$

$$z_n = \operatorname{per} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c \\ \vdots & & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}_n = a \cdot x_{n-1} +$$

$$
+b\cdot\operatorname{per}\begin{pmatrix}
a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots\\
0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0\\
0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c & 0 & 0\\
0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c & 0\\
0 & \ddots & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0\\
\vdots & & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c\\
\vdots & & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 & 0\\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0
\end{pmatrix}_{n-1} = a\cdot x_{n-1} + bc\cdot v_{n-2}.
$$

Získaná rekurence je

$$
z_n = a\cdot x_{n-1} + bc\cdot v_{n-2}.
$$

$$
u_n = \operatorname{per}\begin{pmatrix}
a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots\\
0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0\\
0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c & 0\\
0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0\\
\vdots & & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & c\\
\vdots & & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0\\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & a
\end{pmatrix}_{n} = a\cdot z_{n-1} +
$$

$$
+\, b\cdot\operatorname{per}\begin{pmatrix}
a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots\\
0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0\\
0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & c & 0\\
\vdots & & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0\\
\vdots & & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & c\\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b & 0 & a & 0
\end{pmatrix}_{n-1} = a\cdot z_{n-1} + bc\cdot y_{n-2}.
$$

Získaná rekurence je

$$
u_n = a\cdot z_{n-1} + bc\cdot y_{n-2}.
$$

$$
v_n = \operatorname{per}\begin{pmatrix}
a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\
0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c & 0 \\
0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c \\
\vdots & & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\
\vdots & & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a
\end{pmatrix}_n = a \cdot z_{n-1} +
$$

$$
+\, b \cdot \operatorname{per}\begin{pmatrix}
a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
0 & \ddots & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\
0 & \ddots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b & \ddots & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\
0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \ddots & b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & c & 0 \\
\vdots & & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\
\vdots & & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & a & 0
\end{pmatrix}_{n-1} =
$$

$$
= a \cdot z_{n-1} + bc \cdot u_{n-2}.
$$

Získaná rekurence je

$$
v_n = a \cdot z_{n-1} + bc \cdot u_{n-2}.
$$

Z úprav permanentů pro matice X, Y, Z, U a V máme celkem 5 rekurentních rovnic

$$
\begin{aligned}
x_n &= a \cdot x_{n-1} + abc \cdot v_{n-3} + ab^2c^2 \cdot y_{n-5} + ab^3c^3 \cdot x_{n-7} + b^4c^4 \cdot x_{n-8}, \\
y_n &= a \cdot x_{n-1} + bc \cdot z_{n-2}, \\
z_n &= a \cdot x_{n-1} + bc \cdot v_{n-2}, \\
u_n &= a \cdot z_{n-1} + bc \cdot y_{n-2}, \\
v_n &= a \cdot z_{n-1} + bc \cdot u_{n-2}.
\end{aligned}
$$

S počátečními podmínkami, které získáme z definovaných matic X, Y, Z, U, V.

Z rekurentních rovnic je zřejmé, že budeme potřebovat celkem 9 podmínek pro všechny proměnné x, y, z, v, u. Pro další výpočty budeme chtít i podmínky pro $n = 0$ a $n = 1$. Takové permanenty nemáme definované, proto je dopočítáme z daných rekurencí zpětným chodem.

- $x_0 = 1, \quad x_1 = a, \quad x_2 = a^2, \quad x_3 = a^3, \quad x_4 = a^4,$
  $x_5 = a^3\left(a^2+bc\right), \quad x_6 = a^2\left(a^2+bc\right)^2, \quad x_7 = a\left(a^2+bc\right)^3,$
  $x_8 = \left(a^2+bc\right)^4,$

- $y_0 = 0, \quad y_1 = a, \quad y_2 = a^2, \quad y_3 = a\left(a^2+bc\right), \quad y_4 = a^2\left(a^2+bc\right),$
  $y_5 = a^3\left(a^2+bc\right), \quad y_6 = a^2\left(a^2+bc\right)^2, \quad y_7 = a^3\left(a^2+bc\right)\left(a^2+2bc\right),$
  $y_8 = a^2\left(a^2+bc\right)^2\left(a^2+2bc\right),$

- $z_0 = 0, \quad z_1 = a, \quad z_2 = a^2, \quad z_3 = a^3, \quad z_4 = a^2\left(a^2+bc\right),$
  $z_5 = a^3\left(a^2+bc\right), \quad z_6 = a^2\left(a^2+bc\right)^2, \quad z_7 = a\left(a^2+bc\right)^3,$
  $z_8 = a^2\left(a^2+bc\right)^2\left(a^2+2bc\right)$

- $u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = a^2, \quad u_3 = a\left(a^2+bc\right), \quad u_4 = a^2\left(a^2+bc\right),$
  $u_5 = a\left(a^2+bc\right)^2, \quad u_6 = a^2\left(a^2+bc\right)^2, \quad u_7 = a^3\left(a^2+bc\right)\left(a^2+2bc\right),$
  $u_8 = a^2\left(a^2+bc\right)^2\left(a^2+2bc\right),$

- $v_0 = 0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = a^2, \quad v_3 = a^3, \quad v_4 = a^2\left(a^2+bc\right),$
  $u_5 = a\left(a^2+bc\right)^2, \quad u_6 = a^2\left(a^2+bc\right)^2, \quad u_7 = a\left(a^2+bc\right)^3,$
  $u_8 = a^2\left(a^2+bc\right)^2\left(a^2+2bc\right)\ .$

Pro další úpravy je pro nás výhodné přenést soustavu 5 rekurencí a 36 podmínek - tedy soustavu 41 rovnic na soustavu o 5 rovnicích.
Proto si nyní dodefinujeme, že pro $n < 0$ platí $x_n = y_n = z_n = v_n = u_n = 0$.
Když chceme převést rovnice pouze na 5 rekurencí, nastane problém s $n = 0$. Pokud totiž dosadíme hned do první rovnice $n = 0$, získáme $x_0 = 0$, což nevyhovuje daným podmínkám. Proto využijeme tzv. *Iversonovu notaci* viz. Definice 3.4 a upravíme následovně:

$$x_n = a \cdot x_{n-1} + ab^3c^3 \cdot x_{n-7} + b^4c^4 \cdot x_{n-8} + abc \cdot v_{n-3} + ab^2c^2 \cdot y_{n-5} + [n = 0]\ .$$

Matematickými výpočty v programu *Wolfram Matematica* jsme ověřili, že všechny ostatní podmínky již logicky vyplývají z daných rovnic. Není tedy třeba dalších úprav a můžeme nyní uvažovat už pouze soustavu těchto 5 rekurencí:

$$\begin{aligned} x_n &= a \cdot x_{n-1} + ab^3c^3 \cdot x_{n-7} + b^4c^4 \cdot x_{n-8} + abc \cdot v_{n-3} + ab^2c^2 \cdot y_{n-5} + [n=0], \\ y_n &= a \cdot x_{n-1} + bc \cdot z_{n-2}, \\ z_n &= a \cdot x_{n-1} + bc \cdot v_{n-2}, \\ u_n &= a \cdot z_{n-1} + bc \cdot y_{n-2}, \\ v_n &= a \cdot z_{n-1} + bc \cdot u_{n-2}\ . \end{aligned} \tag{40}$$

Abychom soustavu pěti rekurencí převedli na rekurenci jedinou, použijeme metodu vytvořující funkce. Označíme si f_x, f_y, f_z, f_u, f_v vytvořující funkce k posloupnostem $(x_n), (y_n), (z_n), (u_n), (v_n)$, pak soustavu rekurencí (40) převedeme na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} f_x(x) &= ax\, f_x(x) + ab^3c^3x^7 f_x(x) + b^4c^4x^8 f_x(x) + abcx^3 f_v(x) + ab^2c^2x^5 f_y(x) + 1, \\ f_y(x) &= ax\, f_x(x) + bcx^2 f_z(x), \\ f_z(x) &= ax\, f_x(x) + bcx^2 f_v(x), \\ f_u(x) &= ax\, f_z(x) + bcx^2 f_y(x), \\ f_v(x) &= ax\, f_z(x) + bcx^2 f_u(x)\ . \end{aligned}$$

Nyní řešením soustavy získáváme vytvořující funkce. Pro přehlednost zápisu využíváme substituci za jmenovatele zlomků.

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \frac{-bcx^2(ax+1) - b^3c^3x^6 + b^2c^2x^4 + 1}{j}, \\ f_y(x) &= -\frac{ax\,(abcx^3 - 1)}{j}, \\ f_z(x) &= \frac{ax\,(b^2c^2x^4 - bcx^2 + 1)}{j}, \\ f_u(x) &= \frac{ax^2\,(-abcx^2 + a + bcx)}{j}, \\ f_v(x) &= \frac{ax^2\,(a + b^2c^2x^3)}{j}, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} j =& (bcx^2 - 1)(bcx^2 + 1)[a^3bcx^5 + a^2bcx^4(bcx^2 - 1) + ax(b^2c^2x^4 + 1)^2 + \\ &+ (bcx^2 - 1)(b^2c^2x^4 + 1)^2]\ . \end{aligned}$$

Po roznásobení získáváme:

$$\begin{aligned} j =& 1 - ax - bcx^2 + a^2bcx^4 + b^2c^2x^4 - ab^2c^2x^5 - a^3bcx^5 - a^2b^2c^2x^6 - b^3c^3x^6 - \\ &- a^2b^3c^3x^8 - b^4c^4x^8 + ab^4c^4x^9 + a^3b^3c^3x^9 + a^2b^4c^4x^{10} + b^5c^5x^{10} - b^6c^6x^{12} + \\ &+ ab^6c^6x^{13} + b^7c^7x^{14} \ . \end{aligned}$$

Na základě Věty 3.1 můžeme z funkce f_x odvodit hledaný rekurentní vztah pro posloupnost $(x_n)_{n\geq 0}$:

$$\begin{aligned} x_n =& ax_{n-1} + bcx_{n-2} - bc(a^2+bc)x_{n-4} + abc(a^2+bc)x_{n-5} + b^2c^2(a^2+bc)x_{n-6} + \\ &+ b^3c^3(a^2+bc)x_{n-8} - ab^3c^3(a^2+bc)x_{n-9} - b^4c^4(a^2+bc)x_{n-10} + \\ &+ b^6c^6x_{n-12} - ab^6c^6x_{n-13} - b^7c^7x_{n-14} \ , \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$x_0 = 1, \quad x_1 = a, \quad x_2 = a^2, \quad x_3 = a^3, \quad x_4 = a^4, \quad x_5 = a^3\left(a^2+bc\right),$

$x_6 = a^2\left(a^2+bc\right)^2, \quad x_7 = a\left(a^2+bc\right)^3, \quad x_8 = \left(a^2+bc\right)^4,$

$x_9 = a\left(a^2+bc\right)^3\left(a^2+2bc\right), \quad x_{10} = \left(3a^3bc+a^5+2ab^2c^2\right)^2,$

$x_{11} = \left(a^2+bc\right)\left(a^3+2abc\right)^3, \quad x_{12} = \left(a^3+2abc\right)^4,$

$x_{13} = \left(a^3+2abc\right)^3\left(3a^2bc+a^4+b^2c^2\right) \ .$

Poznámka. Můžeme si všimnout, že pro všechny vytvořující funkce daných posloupností $(x_n),(y_n),(z_n),(u_n)$ a (v_n) platí stejná rekurence, kterou získáme na základě Věty 3.1. Jediné, co se mění, jsou počáteční podmínky, které odpovídají vždy jiné posloupnosti matic X,Y,Z,U a V.

Závěr

Cílem diplomové práce je předložit zajímavé souvislosti a vlastnosti k-třídiagonálních matic, jejich determinantů a permanentů. Vzájemné provázání obecných pásových matic a speciálních typů k-třídiagonálních a Toeplitzových matic se prokázalo jako inspirativní. V teoretické části jsou v práci předloženy vybrané články a publikace od různých autorů, kteří se touto problematikou zaobírají.

Práce je vysázená pomocí LaTeXu a při matematických výpočtech v praktické části byl použit program *Wolfram Matematica*. Hlavním přínosem diplomové práce jsou některé nové souvislosti objevené při studiu odborných článků a zejména pak praktická část, ve které jsou odvozeny rekurentní rovnice pro permanenty 3-třídiagonálních a 4-třídiagonálních matic.

Pro odvození rekurentních rovnic pro permanenty a determinanty k-třídiagonálních matic, kde $k \geq 5$, je třeba změnit přístup v odvozování, protože s využitím současného postupu bychom se dostávali k soustavám o více jak 10 rekurencí, což by bylo pro výpočet a hledání jediné rekurentní rovnice velmi náročné. Na práci by se tedy dalo navázat hledáním těchto rekurencí jiným způsobem.

Literatura

[1] Fiedler, Miroslav. *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1981, 226 s.

[2] Bečvář, Jindřich. *Lineární algebra.* Praha: Matfyzpress, 2000, 435 s. ISBN 80-85863-61-8.

[3] Krajník, Eduard. *Základy maticového počtu.* Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2006, 165 s. ISBN 80-01-03376-7.

[4] Borowska, Jolanta, Laciňska, Lena, Rychlewska, Jowita. *A system of linear recurrence equations for determinant of pentadiagonal matrix.* In: Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics [online]. 2014, 13(2), s. 5-12. [cit. 20. 2. 2020]. Dostupné z:<http://www.sbc.org.pl/Content/116418/SIMI_2014-2_1-BorowskaLacinska.pdf>

[5] Borowska, Jolanta, Laciňska, Lena, Rychlewska, Jowita. *On determinant of certain pentadiagonal matrix.* In: Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics [online]. 2013, 12(3), s. 21-26. [cit. 20. 2. 2020]. Dostupné z:<http://www.sbc.org.pl/Content/110819/SIMI_2013-3_3-Borowska.pdf>

[6] El-Mikkawy, Moawwad, Atlan, Faiz. *A Fast and Reliable Algorithm for Evaluating n-th Order k-Tridiagonal Daterminants.* In: Malaysian Journal of Mathematical Sciences [online]. 2015, 9(3), s. 349-365. [cit. 20. 2. 2020]. Dostupné z:<https://www.researchgate.net/publication/311672437_A_fast_and_reliable_algorithm_for_evaluating_n-th_order_k-tridiagonal_determinants>

[7] AGRAWAL, M. *Determinant versus permanent*. In: Proceedings of the In-ternational Congress of Mathematicians. Madrid, 2006, s. 985-997. [cit. 20. 2. 2020]. Dostupné z:<https://pdfs.semanticscholar.org/6a05/a4fe63e409ba040b890bbf5da0f3b1ca7085.pdf>

[8] BOROWSKA, Jolanta,LACIŇSKA, Lena. *Relation between determinants of tridiagonal and certain pentadiagonal matrices*. In: Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics [online]. 2014, 13(3), s. 21-28. [cit. 20. 3. 2020]. Dostupné z:<https://www.researchgate.net/publication/266963960_Relation_between_determinants_of_tridiagonal_and_certain_pentadiagonal_matrices|>

[9] PTÁK, Pavel. *Introduction to Linear Algebra*. Vydavatelství ČVUT [online]. Praha, 1997, s.163. [cit. 23. 4. 2020]. Dostupné z:<ftp://math.feld.cvut.cz/pub/krajnik/vyuka/ua/linalgeb.pdf>

[10] MINC, Henryk. *Permanent*. [online]. Cambridge, 1984, s.74. [cit. 23. 4. 2020]. Dostupné z:<https://books.google.cz/books?id=gnT2LCvciqUC&pg=PA14&hl=cs&source=gbs_toc_r&cad=4#v=onepage&q&f=false>

[11] GLYNN, David. *The Permanent of the square matrix*. In: European Journal of Combinatorics [online]. 2010, 31(7) s.1887-1891. [cit. 23. 4. 2020]. Dostupné z:<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669810000211>

[12] BARTO, Libor, TŮMA, Jiří. *Lineární algebra*. Matematicko-fyzikální fakulta [online]. 245.s. [cit. 22. 3. 2020]. Dostupné z:<http://msekce.karlin.mff.cuni.cz/~sir/la/LinAlg/skripta.pdf>

[13] ZVONÍKOVÁ, Iva. *Vlastnosti k-třídiagonálních matic*. Hradec Králové, 2018. Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí diplomové práce doc. RNDr. PeadDr. Pavel Trojovský, Ph.D.,101 s.

[14] NAMBOODIRI, Krishnan. *Matrix Algebra: An Introduction*. USA: Sage Publication, 1984, 99 s. No. 83-051623.

[15] FEIGE, Uri. *The permanent and the determinant.*[online]. 4.s. [cit. 22. 3. 2020]. Dostupné z:<http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~feige/algs/permanent.pdf>

[16] BOROWSKA, Jolanta,LACIŇSKA, Lena. *Application of diference equations to certain tridiagonal matrices.* In: Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics [online]. 2012, 3(11), s. 15-20. [cit. 20. 3. 2020]. Dostupné z:<https://www.researchgate.net/publication/266967341_Application_of_difference_equations_to_certain_tridiagonal_matrices>

[17] KÜÇÜK, Ahmed Zahid,DÜZ, Murat. *Relationships between the permanents of a certain type of k-tridiaginal symmetric Toeplitz matrix and the Chebyshev polynomials.* In: Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics [online]. 2017, 16(1), s. 75-86. [cit. 18. 3. 2020]. Dostupné z:<https://www.researchgate.net/publication/315901536_Relationships_between_the_permanents_of_a_certain_type_of_k-tridiagonal_symmetric_Toeplitz_matrix_and_the_Chebyshev_polynomials>

[18] ZÍTEK, František. *Vytvořující funkce.* Praha: Mladá fronta, 1972, 145 s. Škola mladých matematiků.

[19] WILF, Herbert S. *Generatingfunctionology.* In: University of Pensylvania, Philadelphia, Academic Press [online]. 1994, s. 231. [cit. 5. 5. 2020]. Dostupné z:<https://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>

[20] KÜÇÜK, Ahmet Zahid, ÖZEN, Mehmet, INCE, Halit. *Recursive and Combinational Formulas for Permanents of General k-tridiagonal Toeplitz Matrices.*Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, Serbias [online]. 2019, s.307-317. [cit. 5. 5. 2020]. Dostupné z:<https://www.researchgate.net/publication/332427965_Recursive_and_Combinational_Formulas_for_Permanents_of_General_k-tridiagonal_Toeplitz_Matrices>

[21] Cahill, Nathan, D'Errico, John, Narayan, Darren. *Fibonacci determinants.* Rochester Institute of Technology [online]. 2002, s.6. [cit. 6. 5. 2020]. Dostupné z:<https://scholarworks.rit.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2119&context=article>

[22] Diele, F.,Lopez, L. *The Use of the Factorization of Five-Diagonal Matrices by Tridiagonal Toeplitz Matrices.* In: Appl. Math. Lett. [online]. 1998, 11(3), s. 61-69 [cit. 7. 5. 2020]. Dostupné z:<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965998000342>