

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Dagmar Štěbrová

Kombinatorika ve škole

Obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání a přírodopis
se zaměřením na vzdělávání

Olomouc 2015

vedoucí práce: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a uvedla veškerou použitou literaturu a zdroje.

V Olomouci dne

.....

Dagmar Štěbrová

Poděkování

Děkuji paní doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc. za odborné vedení bakalářské práce, poskytování rad a materiálových podkladů k práci.

Obsah

Úvod	6
1. Historie kombinatoriky	8
2. Kombinatorická pravidla	12
2.1 Kombinatorické pravidlo součtu.....	12
2.2 Kombinatorické pravidlo součinu.....	13
3. Základní pojmy kombinatoriky	14
3.1 Kombinatorické pojmy bez opakování	14
3.1.1 Variace	14
3.1.2 Permutace	15
3.1.3 Kombinace	16
3.2 Kombinatorické pojmy s opakováním	18
3.2.1 Variace s opakováním	18
3.2.2 Permutace s opakováním.....	19
3.2.3 Kombinace s opakováním	19
4. Vlastnosti kombinačních čísel	21
5. Binomická věta.....	23
6. Sbírka řešených příkladů.....	24
6.1 Příklady na základní kombinatorická pravidla	24
6.2 Příklady na kombinatoriku bez opakování	26
6.2.1 Příklady na variace	26
6.2.2 Příklady na permutace	28
6.2.3 Příklady na kombinace	31
6.3 Příklady na kombinatoriku s opakováním	34
6.3.1 Příklady na variace s opakováním.....	34
6.3.2 Příklady na permutace s opakováním.....	36
6.3.3 Příklady na kombinace s opakováním.....	39
6.4 Příklady na vlastnosti kombinačních čísel	42
6.5 Příklady na binomickou větu	44
7. Zajímavé příklady kombinatoriky	46
Závěr	49
Seznam použité literatury	50
Použité obrázky	52

Seznam obrázků.....	53
Internetové odkazy	54
Seznam matematických symbolů	56

Úvod

Pojem kombinatorika ne zcela každému něco řekne. V kombinatorice jde o výběr z určité množiny nebo různé možnosti výběru „čehokoli z čehokoliv“. Aniž bychom si to uvědomovali, s kombinatorikou se setkáváme často i v běžném životě. Rozmýšlíme se, jak se oblečeme do nového dne, co si objednáme v restauraci z přeplněného jídelního menu, jak uspořádáme knihy do police, zda si zařadíme nové telefonní číslo do mobilního seznamu podle příjmení nebo jména, zkrátka neustále hledáme a rozhodujeme se pro nejlepší řešení daného problému.

Již děti v útlém věku se s ní setkávají doma nebo v mateřských školách při rovnání hraček, stavění komínů z barevných kostek, výběru barvy pro kresbu slunce, květiny, mraku atd. Dále ji využívají při nejrůznějších hrách, při nichž podporují rozvoj kombinatorického myšlení. Plynule na „kombinatorické začátky“ navazuje 1. stupeň základní školy, například když žáci hledají možné cesty z bludišť a labyrintů, seřazují pastelky podle barev, volí možné kombinace oblečků u panenek atd. Na 2. stupni základní školy žáci využívají kombinatoriku formou obrázků, grafů, rodokmenů, výpisů možností a logických úvah. Na klasických základních školách se s ní setkávají podstatně méně. Více pozornosti je jí věnováno na základních školách s rozšířenou výukou matematiky, olympiádách a dalších soutěžích. Teprve na středních školách se žáci seznamují s pravým pojmem kombinatorika, kdy při řešení různých matematických úloh využívají logických úvah a vzorců, probírají pojem variace, permutace a kombinace. Kombinatorika je tedy hlavně učivem středních škol. Žáci kombinatorické poznatky využívají v mnoha dalších předmětech, jako například v biologii (genetika), informatice (programování), fyzice (Brownův pohyb), chemii (spojení molekul).

Kombinatorika podporuje rozvoj matematického a logického myšlení, tvořivost, klíčové kompetence, rozumové usuzování a věcnou argumentaci. Většina kombinatorických úloh má více řešení, která mají motivační hodnotu. Kombinatorika se snaží přiblížit matematiku k životu, kde se mnohdy využívá forma hry, což zajišťuje a obohacuje jejich vnitřní svět a zlepšuje vztah k matematice.

I dospělí lidé ji využívají při různých pracovních pozicích, například ve škole zástupce ředitele vytváří rozvrh vyučovacích hodin, ve výrobě kontrolor zjišťuje jakost produktů, dopravní podnik sestavuje jízdní řád a jiné.

Kombinatorika je jednou z oblastí Diskrétní matematiky, která se zabývá konečnými množinami. Do diskrétní matematiky dále patří konečné množiny a grafy, konečná pravděpodobnost, teorie grafů, teorie čísel aj.

V bakalářské práci jsem se zabývala stručnou teorií kombinatoriky a sadou řešených příkladů, které navazují na předchozí teoretické kapitoly. Po seznámení se s teoretickou částí si lze ověřit své poznatky a znalosti na prakticky řešených příkladech.

1. Historie kombinatoriky

Kombinatorika je matematickou disciplínou, kterou nelze zcela přesně zařadit do určitého historického období. První kombinatorické poznatky pocházejí ze starověké Indie a Číny. Pravá kombinatorika se začala utvářet v 16. — 17. století ve spojitosti s problematikou hazardních her. Kombinatorickým poznatkům se začal věnovat *Blaise Pascal*, *Pierre Fermat*, *Jakob I. Bernoulli*, *Gottfried Wilhelm von Leibniz* a *Leonhard Euler*. Souhrn poznatků se projevil až v průběhu 20. století v teorii grafů, teorii čísel, teorii her, matematické analýze, algebře – teorie grup, moderní výpočetní techniky, kombinatorických algoritmů atd. Při rozvoji ve 20. století se začal používat název kombinatorická analýza. (Herman, Kučera, Šimša 2004, str. 3)

První náznaky jsou ve starém dochovaném textu, v posvátné knize *I-t'ing* (tj. *Kniha proměn*), která pochází z roku 2200 př. n. l. V knize lze nalézt definici „konfigurace“. „Konfigurace je pojem, který bychom mohli charakterizovat jako zobrazení nějaké množiny objektů do konečné abstraktní množiny se zadanou strukturou – za elementární konfigurace můžeme považovat rozklad přirozených čísel na sčítance, rozdělování předmětů do přihrádek či např. latinského čtverce.“ (Příhonská 2013, str. 9)

Latinský (magický) čtverec

Starý čínský legendární příběh o *Lo Shu* vypráví, že za doby obrovské potopy císař Yu objevil želvu, která měla na zádech magický čtverec. (Fuchs 2011)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Obr. č. 1: magický čtverec

Součet u tohoto magického čtverce ve všech sloupcích, řádcích a obou úhlopříčkách je roven číslu 15.

Definice: Magický čtverec je čtvercová tabulka o n sloupcích a řádcích, kterou je potřeba vyplnit čísly po sobě jdoucími od 1 do n^2 tak, aby součty v řádcích a sloupcích a na obou diagonálách byly stejné. (Mareš 2008)

Další náznaky kombinatoriky byly objeveny v lékařském spise *Susruta*, kde bylo řečeno, že z 6 základních příchutí se dá utvořit celkem 63 příchutí. Další předpoklad byl

nalezen u *Varhamihira*, který uvažoval, že při smíchání 4 parfémů z 16 ingrediencí získá 1820 parfémů. (Příhonská 2013)

Blaise Pascal (1623 – 1662), francouzský matematik, fyzik a filozof



Obr. č. 2: Blaise Pascal

Pascal se od svých 16 let účastnil kroužků svého otce *E'tienne Pascal*, který byl matematikem-amatérem. Jako inspiraci ve své rodině podlehl studii matematiky, ba dokonce v ní vynikal. Velkou zálibu našel v geometrii. V roce 1640 Pascal uveřejnil první práci o kuželosečkách, v níž je obsažena jedna ze základních vět projektivní geometrie, tzv. velká Pascalova věta. V mnoha pracech se věnoval studiím binomických vět a číselným řadám.

Ve své významné knize *Traté du triangle arithmétique* (tj. *Traktát o aritmetickém trojúhelníku*) pojednává o známém Pascalovu trojúhelníku kombinačních čísel. (MuDisMat)

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & \\
 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cccccc}
 & & & & 1 & \\
 & & & & 1 & 1 \\
 & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
 \end{array}$$

obecně: $\binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \binom{n}{3} \binom{n}{4} \dots \binom{n}{n-2} \binom{n}{n-1} \binom{n}{n}$

Obr. č. 3: FARSKÁ, Jana. Pascalův trojúhelník [obrázek] 388 x 255

Schéma udává kombinační čísla, jako koeficienty v binomickém rozvoji $[(a + b)^n]$ pro různá n . (Příhonská 2013)

Vlastnost kombinačních čísel v *Pascalově trojúhelníku*: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Pierre Fermat (1601 – 1665), francouzský matematik a právník

Vystudoval práva a celý život se živil jako právník. Matematice se věnoval pouze



Obr. č. 4: Pierre Fermat

ve volném čase. Fermatovi se podařil rozvoj matematiky hlavně v oblasti teorie čísel, kde získal spoustu poznatků – tzv. Velká Fermatova věta, dále se zabýval algebrou, geometrií a teorií pravděpodobnosti. *Pierre Fermat* spolu s *Blaisem Pascalem* jsou v teorii pravděpodobnosti považováni za zakladatele s úvahami v hazardních hrách. „*Fermat za svého života téměř nic nepublikoval, většina jeho výsledků je známa z korespondence s Pascalem, Descartem, Cavalierim, Torricellim, Huygensem aj.*“

(Příhonská 2013, str. 11)

Jakob I. Bernoulli (1654 – 1705), švýcarský matematik a fyzik



Obr. č. 5: Jakob I. Bernoulli

I proti vůli jeho otce se věnoval matematice, fyzice a astronomii. Přispěl k rozvoji pravděpodobnosti, vyřešil kombinační úlohy, dokázal divergenci harmonické řady, také se zajímal o zákonitosti křivek či mocninných řad. Dokázal tzv. *Bernoulliovu větu* a jsou po něm nazvána *Bernoulliiova čísla*. (Příhonská 2013, str. 12)

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716), německý matematik, fyzik, filozof, zakladatel moderní matematické analýzy,....



Obr. č. 6: Gottfried Wilhelm von Leibniz

Po studiích práva a filozofie studoval v Jeně matematiku, kde napsal v roce 1666 svou práci *Rozprava o umění kombinatoriky* (*Dissertatio de arte combinatoria*). Nezávisle ve stejné době jako Isaac Newton objevil integrální kalkulus, který se používá dodnes. Jeho nejvýznamnější práce jsou díla v diferenciálního a integrálního počtu, který objevil roku 1676 současně s Newtonem. (Mareš 2008, str. 176)

Leonhard Euler (1707 – 1783), švýcarský matematik, který je nejvýznamnějším matematikem všech dob, dále fyzik a filozof



Obr. č. 7: Leonhard Euler

V matematice vynikal od dětství. Zabýval se diferenciální geometrií a diskrétní matematikou (kombinatorika a teorie grafů). V teorii grafů se dá považovat za jejich zakladatele, protože v roce 1736 vyřešil úlohu – sedmi mostů. Ve své knize *Algebra roku 1770* jako první použil výraz *imaginární číslo* pro druhou odmocninu záporného čísla. Dále v roce 1769 zavedl dvojrozměrný integrál a použil označení $f(x)$. Leonhard Euler, i když byl slepý, tak dokázal diktovat matematické práce nejvyšší obtížnosti i s výpočty.

(Příhonská 2013, str.12), (Mareš 2008, str. 148)

Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), francouzský matematik, fyzik a astronom



Obr. č. 8: Pierre Simon Laplace

K největším jeho úspěchům patří teorie o vzniku sluneční soustavy. Ve vojenské škole se projevil nadání v matematice, proto byl přijat na univerzitu. Zabýval se matematickou analýzou, především teorií diferenciálních a parciálních rovnic, a také pravděpodobností. Teorii pravděpodobnosti vyzdvihl na takovou úroveň, která nebyla po století překročena. Dále pokračoval v rozvíjení výsledků *Pascala, Fermata a Bernoulliho*. (Příhonská 2013, str. 12)

Za nejzákladnější kombinatorická pravidla jsou považována pravidla součtu a součinu. Dále k základním pravidlům patří ještě *Dirichletův princip*, *princip inkluze a exkluze*, jimiž se však zabývat nebudu.

2. Kombinatorická pravidla

2.1 Kombinatorické pravidlo součtu

Nechť $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ jsou podmnožiny konečné množiny A , které jsou po dvou disjunktní (tedy pro každé $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ platí $A_i \cap A_j = \{\}$, kdykoliv $i \neq j$) a jejichž sjednocením je celá množina A ($A = \bigcup_{i=1}^n A_i$). Pak platí

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

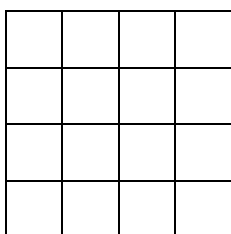
Důkaz: každý prvek $a \in A$ patří dle předpokladu do jedné z podmnožin A_i ($i = 1, 2, \dots, n$), proto se na každé straně rovnosti vyskytuje právě jednou. (Herman, Kučera, Šimša 2004, str. 6)

2.1.1 Příklad:

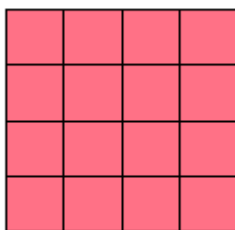
Čtverec o straně 4 je rozdělen rovnoběžkami se stranami na 16 jednotlivých čtverců.

Určíme, kolik je v daném obrazci čtverců: rozdělíme všechny čtverce do čtyř skupin A_1, A_2, A_3, A_4 tak, že ve skupině A_i jsou všechny čtverce o straně i ($i = 1, 2, 3, 4$).

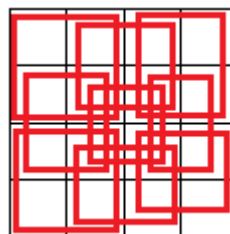
Řešení:



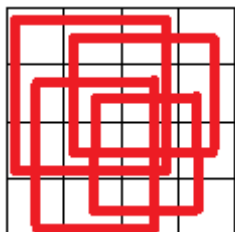
Obr. o straně 4



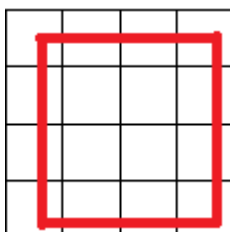
$|A_1| = 16$



$|A_2| = 9$



$|A_3| = 4$



$|A_4| = 1$

$$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 16 + 9 + 4 + 1 = 30$$

(Herman, Kučera, Šimša 2004, str. 6)

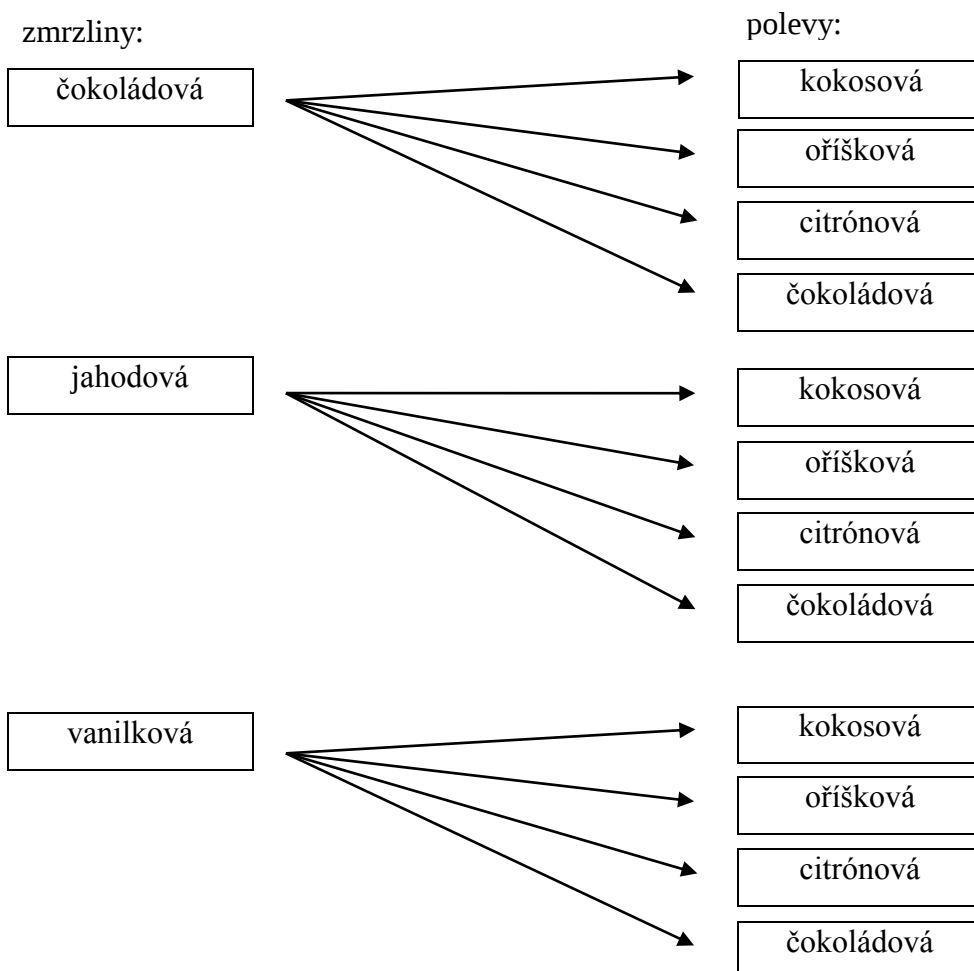
2.2 Kombinatorické pravidlo součinu

Počet všech uspořádaných k -tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby,.... až k -tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$. (Calda, Dupač 1993, str. 9)

2.2.1 Příklad:

Na náměstí je stánek se zmrzlinou, kde se prodávají 3 druhy zmrzlin se 3 druhy polev. Kolik lze vytvořit různých zmrzlin s polevou, když chceme mít na kornoutku právě jeden kopeček zmrzliny s jednou polevou.

Řešení:



Celkem je možné vytvořit: 3 druhy zmrzlin $\cdot$ 4 druhy polev = $3 \cdot 4 = 12$ různých zmrzlin s polevou.

(Farská 2009, diplomová práce)

3. Základní pojmy kombinatoriky

3.1 Kombinatorické pojmy bez opakování

3.1.1 Variace

Definice: Necht' $k \leq n$ a necht' A je konečná n -prvková množina. Libovolné pořadí z některé k -prvkové podmnožiny množiny A nazveme *k-prvkovou variací z prvků n -prvkové množiny A* (stručně *k-prvkovou variací z n prvků*). Je to tedy uspořádaná k -tice $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ prvků z A , kde se každý prvek množiny A vyskytuje nejvýše jednou. (Herman, Kučera, Šimča 2004, str. 11)

Požaduje se, aby bylo $k \leq n$, ale není to naprosto nutné. Když se podíváme na případ, že $k > n$, tak chceme sestavit k -tici různých prvků a přitom n je menší než k , což nelze. Nemůžeme vytvořit například ze čtyř číslic osmiciferné číslo tak, aby se žádná cifra neopakovala. (Příhonská 2013, str 27)

V případě $k \leq n$ máme dáno n různých prvků a přirozené číslo k . Chceme určit počet všech k -členných variací z n prvků, které budeme značit symbolem $V(k, n)$. Pro výběr prvního členu máme n možností. Pro druhý člen jsme už omezení výběrem prvního členu, protože nemůžeme použít prvek, který jsme použili pro první výběr (variace bez opakování je charakteristická tím, že se každý prvek vyskytuje nejvýše jednou), tudíž už jen $(n - 1)$ možností, atd., až po výběr k -tého členu, kde máme po výběru předcházejících členů $n - (k - 1)$ možností. (Calda, Dupač 1993, str. 13)

Schématické znázornění:

uspořádaná k -tice	1. člen	2. člen	...	$(k-1)$ – ní člen	k -tý člen
možnosti výběru z n prvků	n	$n - 1$	...	$n - (k - 2)$	$n - (k - 1)$

(Calda, Dupač 1993, str. 9)

Nyní podle kombinatorického pravidla součinu:

$$V(k, n) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot [n - (k - 1)] = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(Příhonská 2013, str. 28)

Mezi typické variace například patří - obsazení medailových příček finalistů při sportovních hrách, výběr osob pro vytvoření funkcionářských pozic, vytvoření ciferných čísel z určitých číslic bez opakování a tak dále.

3.1.1.1 Příklad: V deváté třídě je 22 žáků. Kolika způsoby z nich lze vybrat pokladníka, předsedu a jednatele?

Řešení: Při výběru některé trojice z 22 žáků je důležité, jakou funkci kdo z nich dostane, přičemž každý z vybraných bude mít právě jednu funkci. Jde tedy o tříčlennou variaci z 22 prvků.

$$V(3, 22) = \frac{22!}{(22-3)!} = \frac{22!}{19!} = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19!}{19!} = 22 \cdot 21 \cdot 20 = 9240$$

Celkový počet všech možností výběru žáků pro určité funkce je 9240.

(příklad vymyšlen autorkou BP)

3.1.2 Permutace

Permutace bez opakování, neboli pořadí, je uspořádání n -tic sestavených z daných n prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje právě jednou. Tedy permutace je zvláštní případ variace, kde $k = n$. Proto při odvozování vzorce permutací budeme vycházet z n -členné variace z n prvků.

$$V(k, n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

$$\text{Pro } k = n: V(n, n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-n+1) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$$

Tedy vzorec pro permutace, které se označují symbolem $P(n)$ je:

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Pro tento počet se zavádí ještě další symbol – „vykřičník“, který se nazývá **faktoriál** a platí $P(n) = n!$

Faktoriál čísla n je definován: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^n k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Speciální případ je faktoriál nuly $0! = 1$. Protože permutace je speciální případ variace:

$$V(n, n) = P(n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

Několik prvních faktoriálů: $0! = 1$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Typickými příklady permutací jsou například pořadí funkcionářů, jakými způsoby si lze stoupnout do řady, rozesazení žáků, atd.

(Příhodová 2013, str. 20), (Caldá, Dupač 1993, str. 18)

3.1.2.1 Příklad: Na dětském táboře probíhají každý den odpolední aktivity. Protože je dětí hodně, byly rozděleny do skupinek po 9. Kolika způsoby může 9 dětí nastoupit do řady?

Řešení: Jedná se o permutaci z 9 dětí, které se neopakují.

$$P(9) = 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$$

Počet způsobů, při kterých děti mohou nastoupit do řady, je 362 880.

(příklad vymyšlen autorkou BP)

3.1.3 Kombinace

Definice: k -členná kombinace bez opakování z n prvků je každá neuspořádaná k -tice (množina k prvků) vybraná z daných n prvků, v nichž se každý prvek vyskytuje nejvýše jednou a nezáleží na pořadí prvků.

Tudíž kombinace se výrazně liší od variací a permutací tím, že nezáleží na pořadí prvků. Počet kombinací znamená, kolik různých k -tic lze vytvořit z n prvků:

$$k \leq n, \quad C(k, n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ se nazývá kombinační číslo. Pro každé $n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$ platí: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$

Typické příklady kombinací:

- sportka, kde máme 49 čísel a z nich taháme 6 čísel, přičemž je jedno v jakém pořadí
- výběr žáků, kteří pojedou na soutěž
- počet zápasů, hraje-li určitý počet týmů systémem každý s každým
- trojboje, čtyřboje,...

(Caldá, Dupač 1993, str. 23 -26), (Příhonská 2013, str.33 – 34), (Herman, Kučera, Šimša 2004, str. 13)

3.1.3.1 Příklad: Turnaje v tenise se zúčastnilo 8 hráčů. Kolik zápasů se odehraje, jestliže bude hrát každý s každým jedenkrát?

Řešení: Počet prvků n je 8 a při zápase neuspořádaná k -tice je 2, protože musí hrát dva hráči proti sobě.

$$C(2, 8) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2!} = 28$$

Na turnaji bude odehráno 28 zápasů.

(Hut'ka, Cirjak, Drobná, Švidroňová 1986, str. 61)

3.2 Kombinatorické pojmy s opakováním

3.2.1 Variace s opakováním

Skupiny s opakováním znamenají, že se v každé k -tice vybrané z daných n prvků může jednotlivý prvek opakovat až k -krát. Pokud v těchto k -ticích záleží na uspořádání, pak hovoříme o k -členných variacích s opakováním z n prvků.

Je dáno navzájem různých n prvků a přirozené číslo k . Pro vytvoření uspořádané k -tice, ve které se daný prvek může opakovat, máme k výběru neomezený počet prvků.

Schématické znázornění:

uspořádaná k -tice	1. člen	2. člen	...	$(k-1)$ – ní člen	k -tý člen
možnosti výběru z n prvků s neomezeným počtem	n	n	...	n	n

K -členné variace s opakováním se značí $V'(k, n)$ a pro odvození vzorce se použije kombinatorické pravidlo součinu.

$$V'(k, n) = n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$$

Počet $V'(k, n)$ všech k -členných variací s opakováním z n prvků je $V'(k, n) = n^k$

(Calda, Dupač 1993, str. 34 – 35)

Typické příklady variací s opakováním se využívají při hledání kódu na zámku, vytváření čísel s opakováním číslic, hledání Morseovy abecedy, vytváření státních poznávacích značek, atd.

3.2.1.1 **Příklad:** Kolik různých pěticiferných čísel lze vytvořit z číslic 4 a 7?

(Jirásek, Braniš, Horák a Vacek 1989, str. 63)

Řešení: Máme k dispozici čísla 4 a 7. Tudíž jsou k dispozici 2 možná čísla, která se budou opakovat. A těmi můžeme obsadit 5 pozic, protože chceme vytvořit pěticiferné číslo.

— — — — —
4 nebo 2 4 nebo 2 4 nebo 2 4 nebo 2 4 nebo 2

Počet prvků jsou dva a počet míst, které obsazuje, je 5.

$$V'(5, 2) = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Z číslic 4 a 7 lze sestavit 32 různých čísel.

3.2.2 Permutace s opakováním

Definice: Permutace s opakováním z n prvků je každá uspořádaná n -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou.

Počet permutací s opakováním z n prvků, v nichž se prvky opakují k_1 -krát, k_2 -krát, ..., k_n -krát, se označují $P'(k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Vzorec pro permutace s opakováním:

$$P'_{k_1, k_2, \dots, k_n}(n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \text{ nebo-li } \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$$

(Caldá, Dupač 1993, str. 40)

Permutace s opakováním se využívají v příkladech typu, kde se hledají anagramy slov, v nichž se opakují daná písmena, dále při hledání čísel a jiné.

3.2.2.1 Příklad: Kolik různých pěticiferných čísel je možné utvořit z čísel 2 a 4, jestliže se číslice 2 vyskytuje třikrát a číslice 4 dvakrát?

Řešení: Chceme utvořit pěticiferné číslo, takže máme pět míst na obsazení. Číslice, které se mohou opakovat, máme k dispozici 2. Číslice 2 se vyskytuje třikrát a číslice 4 dvakrát.

možnosti uspořádání:

$$\begin{array}{ccccc} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{array}$$

$$P'_{3,2}(5) = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Lze sestavit 10 různých pěticiferných čísel.

(příklad střední škola)

3.2.3 Kombinace s opakováním

Definice: k -členná kombinace s opakováním z n prvků ($k, n \in \mathbb{N}$) je každá neuspořádaná k -tice (množina k prvků) sestavená z těchto n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k -krát.

Počet všech k -člených kombinací s opakováním se značí $C'(k, n)$.

Vzorec:
$$C'(k, n) = \binom{n+k-1}{k}$$

(Caldá, Dupač 1993, str. 46)

Příklady na kombinaci s opakováním mohou být při platbě penězi, kdy vybíráme z peněženky bankovky či mince, dále při výběru dětí na soutěž z určitého počtu a podobně.

3.2.3.1 Příklad: V sadě 32 karet je každá z následujících karet čtyřikrát: sedmička, osmička, devítka, desítka, spodek, svršek, král, eso. Karty téže hodnoty jsou přitom rozlišeny těmito „barvami“: červená, zelená, žaludy, kule. Určete, kolika způsoby je možno vybrat čtyři karty, jestliže se:

- a) rozlišují pouze „barvy“ jednotlivých karet
- b) rozlišují pouze hodnoty jednotlivých karet.

(Caldá, Dupač 1993, str. 50)

Řešení: a) Možností pro výběr čtyř karet z karet o čtyřech různých „barvách“ (červená, zelená, žaludy, kule) je $C'(4,4)$. Na pořadí při výběru karet nezáleží a karty jedné barvy se mohou opakovat.

$$C'(4,4) = \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4}.$$

b) Možností pro výběr čtyř karet z karet o osmi různých hodnot (sedmička, osmička, devítka, desítka, spodek, svršek, král, eso) je $C'(4, 8)$. Na pořadí při výběru karet nezáleží a karty jedné hodnoty se mohou opakovat.

$$C'(4, 8) = \binom{8+4-1}{4} = \binom{11}{4}$$

4. Vlastnosti kombinačních čísel

1. Kombinační čísla $\binom{n}{k}$ jsou definována pro všechna nezáporná čísla $n, k, k \leq n$ a platí:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- podle definice, když dosadíme $k = 0$, dostaneme: $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$

$$k = n \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$k = 1 \qquad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

- podle definice, když dosadíme $k = 0, n = 0$, dostaneme:

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1$$

2. Pro všechna celá nezáporná čísla $n, k, k \leq n$ platí:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Důkaz vychází přímo z definice kombinačních čísel:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

3. Pro všechna celá nezáporná čísla $n, k, k \leq n$ platí:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Důkaz podobně vychází přímo z definice kombinačních čísel:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]!} = \frac{n!}{k![n-(k+1)]!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) = \frac{n!}{k![n-(k+1)]!}$$

$$* \frac{n+1}{(n-k)(k+1)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Na *Pascalově trojúhelníku*, který popsal *Blaise Pascal*, jsou názorně předvedena kombinační čísla.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & \\
 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
 \hline
 & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & 1 \\
 & & 1 & 2 & 1 & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
 \end{array}$$

obecně: $\binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \binom{n}{3} \binom{n}{4} \dots \binom{n}{n-2} \binom{n}{n-1} \binom{n}{n}$

Obr. č. 9: FARSKÁ, Jana. Pascalův trojúhelník [obrázek] 388 x 255

Když kombinační čísla na levé straně obrázku *Pascalova trojúhelníku* vypočítáme podle vlastností kombinačních čísel, dostaneme čísla pravé strany obrázku. Zajímavou vlastností *Pascalova trojúhelníku* je skutečnost, že rozmístění čísel je podle osy souměrnosti symetrické. Další zajímavostí je, že součet dvou čísel vedle sebe v libovolném řádku je roven číslu, které se nachází pod součtem těchto čísel v následujícím řádku, což je dáno vztahem

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Například ve čtvrtém řádku jsou čísla 1, 3, 3, 1. Vytvoříme součet sousedních čísel 1 + 3, 3 + 3, 3 + 1; schéma začíná a končí vždy jedničkou, dostáváme na následujícím řádku 1, 4, 6, 4, 1. (Caldá, Dupač 1993, str. 55 – 61)

4.1 Příklad: Vyjádřete jedním kombinačním číslem a poté ho vypočítejte:

$$\binom{9}{3} + \binom{9}{6}$$

Řešení: $\binom{9}{3} + \binom{9}{3} = \binom{9}{3} + \binom{9}{9-3}$ [dle vzorce $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$] =

$$= \binom{9}{3} + \binom{9}{3} = 2 \cdot \left(\frac{9!}{3!(9-3)!} \right) = 2 \cdot \left(\frac{9!}{3!6!} \right) = 2 \cdot \left(\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} \right) = 2 \cdot 84 = 168$$

(Huťka, Cirjak, Drobná, Švidroňová 1986, str. 69)

5. Binomická věta

Již ze základní školy je znám vzorec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, který se odvodil:
 $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Nyní si vypočítáme mocniny $(a + b)^n$ pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ a porovnáme s Pascalovým trojúhelníkem.

$(a + b)^0 = 1$	1
$(a + b)^1 = a + b$	1 1
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1

Lze vidět, že jednotlivé řádky v *Pascalově trojúhelníku* odpovídají numerickým koeficientům v mnohočlenu, který vznikne umocněním dvojčlenu $a + b$ na n -tou, kde $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Pro všechna reálná čísla a, b a celá nezáporná čísla n platí:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

(Calda, Dupač 1993, str. 64 – 65), (Smída, Lukátšová, Šedivý, Vocolka 1984, str. 63 – 64)

5.1 Příklad: Umocněte a vypočítejte $(a + 2)^5$

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } (a + 2)^5 &= \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^{5-1} \cdot 2 + \binom{5}{2}a^{5-2} \cdot 2^2 + \binom{5}{3}a^{5-3} \cdot 2^3 + \\ &\quad \binom{5}{4}a^{5-4} \cdot 2^4 + \binom{5}{5}a^{5-5} \cdot 2^5 = 1 \cdot a^5 + \left(\frac{5!}{1! 4!}\right)a^4 \cdot 2 + \left(\frac{5!}{2! 3!}\right)a^3 \cdot 4 + \left(\frac{5!}{3! 2!}\right)a^2 \cdot 8 + \\ &\quad \left(\frac{5!}{4! 1!}\right)a \cdot 16 + 1 \cdot 1 \cdot 32 = a^5 + 5a^4 \cdot 2 + 10a^3 \cdot 4 + 10a^2 \cdot 8 + 5a \cdot 16 + 32 = \\ &= a^5 + 10a^4 + 40a^3 + 80a^2 + 80a + 32 \end{aligned}$$

(Smída, Lukátšová, Šedivý, Vocolka 1984, str. 65)

6. Sbírka řešených příkladů

Při tvorbě sbírky řešených příkladů jsem čerpala z literatury nejen pro gymnázia, ale i pro odborné střední školy, aby má bakalářská práce mohla sloužit pro všechny typy středních škol. Vždy se jednalo o neřešené příklady, které jsem sama dle svým možností vypočítala.

6.1 Příklady na základní kombinatorická pravidla

6.1.1 Příklad: Do tanečního kroužku chodí 20 chlapců a 17 děvčat. Kolik dvojic je možno utvořit, aby tvořil taneční pár dívka a chlapec.

Řešení: $20 \text{ chlapců} \cdot 17 \text{ děvčat} = 340$

Lze utvořit 340 tanečních párů.

(příklad vymyšlen autorkou BP)

6.1.2 Příklad: Určete počet všech trojčiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou. (Caldá, Dupač

1993, str. 11)

Řešení: Máme utvořit trojčiferné číslo a k dispozici jsou čísla: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Na stovkovém místě mohou být všechny číslice kromě 0, protože to už by nebylo trojčiferné číslo, nýbrž dvojčiferné. Proto na první post máme 9 možností. Na druhé desítkové místo máme opět 9 možností, protože tam už číslice 0 být může, ale nesmí tam být ta číslice, která už je obsažena na stovkovém místě. A na posledním jednotkové místo máme 8 možností, protože tam nesmí být číslice, která je obsažena už na desítkovém a stovkovém místě.

— — —

$$9 \cdot 9 \cdot 8$$

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$$

Počet všech trojčiferných přirozených čísel je 648.

6.1.3 Příklad: Z místa A do místa B vedou čtyři turistické cesty, z místa B do C tři. Určete počet způsobů, jimiž lze vybrat trasu

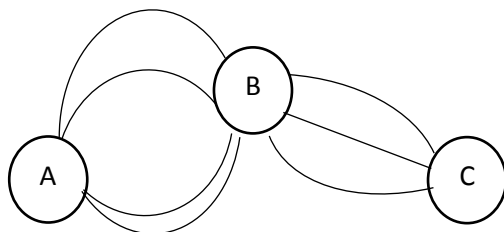
a) z A do C a zpět

b) z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest není žádná použita dvakrát

c) z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest jsou právě dvě použity dvakrát.

(Caldá, Dupač 1993, str. 11)

Řešení:



a) při cestě z bodu A do B vedou 4 možnosti, kterou cestu si vybrat. Z bodu B do C vedou 3 možnosti cesty, které si lze vybrat. A při zpáteční cestě opět existují stejné cesty, z bodu C do B 3 cesty a z bodu B do bodu A 4 cesty. Možnosti cest mezi sebou jen vynásobíme

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 144$$

Počet způsobů, jimiž lze vybrat trasu z A do C, je 144.

b) při cestě z místa A do B jsou 4 možnosti cest a z B do C 3. Při zpáteční cestě musíme odečíst možnost cesty, po které jsme šli už cestu mezi C a B, a také mezi B a A. A opět možnosti cest mezi sebou vynásobíme.

$$4 \cdot 3 \cdot (3 - 1) \cdot (4 - 1) = 72$$

Počet způsobů, jimiž lze vybrat trasu, je 72.

c) při cestě z bodu A do B jsou 4 možnosti a z bodu B do C 3 možnosti. Při zpáteční cestě z bodu C do B a také z bodu B do A máme pouze jednu možnost, protože musíme jít stejnou cestou, již jsme šli tam, aby byly právě dvě cesty použity dvakrát.

$$4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 12$$

Počet způsobů, jimiž lze vybrat trasu, je 12.

6.2 Příklady na kombinatoriku **bez opakování**

6.2.1 Příklady na variace

6.2.1.1 Příklad: Máme prvky a, b, c. Utvořte všechny variace:

a) druhé třídy

b) třetí třídy

(Klodner 2005, str. 126)

Řešení: a) prvky jsou 3, $n = 3$ a máme vytvořit k -tici $= 2$.

$$\text{Podle vzorce: } V(2, 3) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Nebo příklad lze vyřešit vypsáním možných případů:

(a, b); (a, c); (b, a); (b, c); (c, a); (c, b)...kterých je také 6

Variací druhé třídy z prvků a, b, c je 6.

b) máme 3 prvky; $n = 3$ a vytvořit máme třetí třídu; $k = 3$

$$\text{Podle vzorce: } V(3, 3) = \frac{3!}{(3-3)!} = 6$$

Vypsáním možných případů:

(a, b, c); (a, c, b); (b, a, c); (b, c, a); (c, a, b); (c, b, a)....je jich 6

Variací třetí třídy z prvků a, b, c je 6.

6.2.1.2 Příklad: Kolik uspořádaných čtveřic lze utvořit z osmi různých prvků, jestliže se v nich žádný prvek neopakuje? (Jirásek, Braniš, Horák, Vacek 1989, str. 52)

Řešení: Máme vytvořit uspořádanou čtveřici $k = 4$; z osmi prvků $n = 8$.

$$V(4, 8) = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 1\,680$$

Lze utvořit 1 680 uspořádaných čtveřic.

6.2.1.3 Příklad: V prvním ročníku obchodní akademie se vyučuje 12 předmětů. Každý předmět se učí nejvýše jednu hodinu denně. Kolika způsoby se dá sestavit rozvrh hodin na jeden den, je-li v tomtéž dni 6 různých předmětů? (Klodner 2005, str. 126)

Řešení: Celkem se vyučuje 12 předmětů $n = 12$ a máme vytvořit rozvrh pro jeden den, v němž je 6 předmětů $k = 6$.

$$V(6, 12) = \frac{12!}{(12-6)!} = \frac{12!}{6!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 665\,280$$

Rozvrh se dá sestavit 665 280 způsoby.

6.2.1.4 Příklad: Kolik jednociferných až čtyřciferných přirozených čísel s různými číslicemi je možné sestavit z číslic 1, 2, 3, 5, 6, 7?

(Huťka, Cirjak, Drobná, Švidroňová 1986, str. 51)

Řešení: Máme 6 možných číslic a vybírám: a) jednociferná, b) dvojciferná, c) trojciferná, d) čtyřciferná.

a) vybíráme jednu číslici z 6 možných: $V(1, 6) = \frac{6!}{(6-1)!} = \frac{6!}{5!} = 6$

b) vybíráme 2 číslice z 6 možných: $V(2, 6) = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 30$

c) vybíráme 3 číslice z 6 možných: $V(3, 6) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 120$

d) vybíráme 4 číslice z 6 možných: $V(4, 6) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$

$$\text{celkem} = 6 + 30 + 120 + 360 = 516$$

Celkem lze jednociferných až čtyřciferných přirozených čísel sestavit 516.

6.2.1.5 Příklad: Z kolika prvků je možné utvořit 210 variací druhé třídy bez opakování?

(Huťka, Cirjak, Drobná, Švidroňová 1986, str. 51)

Řešení: $V(2, n) = 210$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 210$$

podmínka: $n \geq 0 \wedge n - 2 \geq 0$

$$\underline{n \in \langle 2, \infty \rangle \wedge n \in \mathbb{Z}}$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = 210$$

$$n \cdot (n-1) = 210$$

$$n^2 - n - 210 = 0$$

$$D = 841$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm 29}{2} = \begin{array}{l} \text{---} 15 \dots n \in \langle 2, \infty \rangle \wedge n \in \mathbb{Z} \\ \text{---} 14 \dots n \notin \langle 2, \infty \rangle \wedge n \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Prvků musí být 15.

6.2.1.6 Příklad: Zvětšíme-li počet prvků o jeden, zvětší se počet variací druhé třídy bez opakování o 16. Určete původní počet prvků.

(Jirásek, Braniš, Horák a Vacek 1989, str. 51)

Řešení: $16 + V(2, n) = V(2, n + 1)$

$$16 + \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-2)!}$$

$$16 + \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$$

podmínka: $n \geq 2 \wedge n \geq 1 \wedge n \geq 0 \wedge n \geq -1$

$$16 + \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!}$$

$$\underline{n \in \langle 2, \infty \rangle \wedge n \in \mathbb{Z}}$$

$$16 + n^2 - n = n^2 + n$$

$$- 2n = - 16$$

$$n = 8$$

Původní počet prvků je 8.

6.2.2 Příklady na permutace

6.2.2.1 Příklad: Kolik permutací lze vytvořit z osmi prvků?

(Klodner 2005, str. 127)

Řešení: Máme osm prvků, tedy $n = 8$.

$$P(8) = 8! = 40\,320$$

Lze vytvořit 40 320 permutací.

6.2.2.2 Příklad: Kolik různých šesticiferných přirozených čísel lze napsat pomocí číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, jestliže v zápisu každého čísla se může každá z číslic vyskytnout jen jednou?

(Odvárko, Božek, Ryšánková, Smida 1985, str. 35)

Řešení: Máme vytvořit šesticiferné číslo a máme k dispozici 6 čísel.

$$P(6) = 6! = 720$$

Šesticiferných přirozených čísel lze vytvořit 720.

6.2.2.3 Příklad: Určete, kolika způsoby se v šestimístné lavici může posadit šest hochů, jestliže:

a) dva chtějí sedět vedle sebe

b) dva chtějí sedět vedle sebe a třetí chce sedět na kraji.

(Caldá, Dupač 1993, str. 22)

Řešení: a) máme šestimístnou lavici 

Dva hoši chtějí sedět vedle sebe, proto je počítáme za jeden prvek a jde tedy o permutaci 5 prvků, přičemž musíme rozlišit 2 možnosti posazení hochů (vpravo nebo vlevo).

$$2 \cdot P(5) = 2 \cdot 5! = 2 \cdot 120 = 240$$

Na lavici lze posadit 6 hochů 240 způsoby.

b) Dva hochy, kteří chtějí sedět vedle sebe, budeme opět počítat za jeden prvek a máme 2 možnosti, jak budou sedět (vpravo nebo vlevo). Dále jeden hoch chce sedět na kraji, opět jsou 2 možnosti (pravý kraj lavice, levý kraj lavice). Z celkových 6 míst už jsou 2 obsazena a zbývá obsadit 4.

$$2 \cdot 2 \cdot P(4) = 2 \cdot 2 \cdot 4! = 96$$

Na lavici lze posadit 6 hochů 96 způsoby.

6.2.2.4 Příklad: Kolik pěticiferných přirozených čísel lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 4, 5.

a) jestliže se žádná číslice neopakuje

b) kolik z těchto čísel je dělitelných čtyřmi?

(Hut'ka, Cirjak, Drobná, Švidroňová 1986, str. 55)

Řešení: a) K dispozici je 5 číslic a z nich máme vytvořit pěticiferné přirozené číslo. Jedná se o permutaci z 5 prvků.

$$P(5) = 5! = 120$$

Celkem lze sestavit 120 přirozených čísel.

b) Aby bylo číslo dělitelné 4, tak musí končit: 12 nebo 24 nebo 32 nebo 52

—	—	—	—	—
		1	2	
		2	4	
		3	2	
		5	2	

Z pěti míst jsou již dvě obsazena, zbývá nám tedy obsadit 3 místa.

$$P(3) = 3! = 6$$

$$x = 6 \cdot 4 \text{ (4 možnosti, aby bylo číslo dělitelné 4)} = 24$$

Celkem je 24 přirozených čísel dělitelných čtyřmi.

6.2.2.5 Příklad: Kolika způsoby lze postavit do fronty:

a) čtyři dívky a 5 chlapců?

b) čtyři dívky a 5 chlapců, pokud musí dívky i chlapci stát za sebou?

(Dvě postavení považujte za různá, pokud alespoň jedna osoba stojí na jiném místě.)

(Binterová, Tlustý 2013, str. 177)

Řešení: a) Záleží na pořadí, což nám napovídá, že se jedná o permutaci. Celkem máme 9 osob.

$$P(9) = 9! = 362\,880$$

Dívky a chlapce lze postavit do fronty 362 880 způsoby.

b) Máme možnosti postavení čtyř dívek za sebou a možnost různého postavení pěti chlapců. Dále mohou nastat dvě situace: jako první budou stát dívky a pak chlapci, či naopak.

- možnosti postavení dívek $P(4) = 4! = 24$
- možnosti postavení chlapců ... $P(5) = 5! = 120$

$$\text{Celkem} = 24 \cdot 120 \cdot 2 \text{ [možnosti postavení]} = 5\,760$$

Do fronty lze dívky a chlapce postavit 5 760 způsoby.

6.2.2.6 Příklad: Určete počet prvků tak, aby při zvětšení jejich počtu o dva se počet permutací zvětšil 56krát.

(Caldá, Dupač 1993, str. 22)

Řešení: Vytvoříme si rovnici s údaji, které známe, a pak následně počítáme.

$$(n + 2)! = 56n!$$

$$(n + 2) \cdot (n + 1)n! = 56n! \text{ } /: (n!) \quad \text{podmínka: } n \geq 0$$

$$(n + 2) \cdot (n + 1) = 56$$

$$\underline{n \in \langle 0, \infty \rangle \wedge n \in \mathbb{Z}}$$

$$n^2 + n + 2n + 2 = 56$$

$$n^2 + 3n - 54 = 0$$

$$D = 3^2 - [4 \cdot (-54)] = 9 + 216 = 225$$

$$n_{1,2} = \frac{-3 \pm 15}{2} = \begin{cases} 6 \dots n \in \langle 0, \infty \rangle \wedge n \in \mathbb{Z} \\ -9 \dots n \notin \langle 0, \infty \rangle \wedge n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Počet prvků je 6.

6.2.3 Příklady na kombinace

6.2.3.1 Příklad: Kolik kombinací čtvrté třídy je možno utvořit:

a) z 10 prvků

b) z 20 prvků

(Klodner 2005, str. 128)

Řešení: a) Chceme utvořit kombinace čtvrté třídy, tedy $k = 4$, a máme 10 prvků, $n = 10$.

$$C(4, 10) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!6!} = 210$$

Je možno utvořit 210 kombinací.

b) Chceme utvořit kombinace čtvrté třídy, tedy $k = 4$, a máme 20 prvků, $n = 20$.

$$C(4, 20) = \binom{20}{4} = \frac{20!}{4!(20-4)!} = \frac{20!}{4!16!} = 4\,845$$

Je možno utvořit 4 845 kombinací.

6.2.3.2 Příklad: Ve třídě je 22 dívek a 9 chlapců. Kolikerym způsobem je možno utvořit delegaci, aby v ní byli:

a) dvě dívky a dva chlapci

b) tři dívky a jeden chlapec

(Klodner 2005, str. 128)

Řešení: a) Pro utvoření delegace máme na výběr 2 dívky z 22 a 2 chlapce z 9.

Jelikož tam musejí být dvě dívky a (současně) dva chlapci, tyto kombinace proto mezi sebou vynásobíme.

$$C(2, 22) \cdot C(2, 9) = \binom{22}{2} \cdot \binom{9}{2} = \frac{22!}{20!2!} \cdot \frac{9!}{7!2!} = 231 \cdot 36 = 8\,316$$

Pro utvoření delegace je 8 316 způsobů.

b) Pro utvoření delegace máme na výběr 3 dívky z celkového počtu 22. Dále vybíráme 1 chlapce z 9.

$$C(3, 22) \cdot C(1, 9) = \binom{22}{3} \cdot \binom{9}{1} = \frac{22!}{19!3!} \cdot \frac{9!}{8!1!} = 1540 \cdot 9 = 13\,860$$

Delegaci je možné utvořit 13 860 způsoby.

6.2.3.3 Příklad: Jízdenky dopravního podniku v Praze mají devět očíslovaných okének. Kolika způsoby lze nastavit kód označovacího strojku, jestliže se děrují tři nebo čtyři okénka?

(Odvárko, Božek, Ryšánková, Smida 1985, str. 38)

Řešení: Označovací strojek děruje 3 nebo 4 okénka, proto utvoříme kombinaci 3 z 9 prvků a 4 z 9 prvků. Protože jsou tam tři nebo čtyři, kombinace mezi sebou sečteme.

$$C(3, 9) + C(4, 9) = \binom{9}{3} + \binom{9}{4} = \frac{9!}{6!3!} + \frac{9!}{5!4!} = 84 + 126 = 210$$

Kód lze nastavit 210 způsoby.

6.2.3.4 Příklad: Petr má sedm knih, o které se zajímá Ivana, Ivana má deset knih, o které se zajímá Petr. Určete, kolika způsoby si Petr může vyměnit dvě své knihy za dvě knihy Ivaniny.

(Caldá, Dupač 1993, str. 30)

Řešení: Petr si od Ivany může vypůjčit 2 z 10, o které se zajímá. $C(2, 10)$

A Ivana si může půjčit 2 ze 7, o které se zajímá. $C(2, 7)$

Víme, že vyměnit si mohou vždy jen dvě knihy, za dvě knihy, takže s kombinacemi uděláme součin.

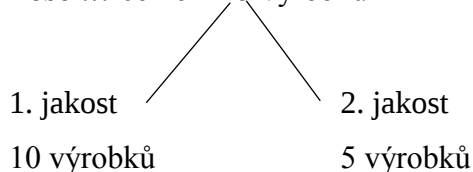
$$C(2, 10) \cdot C(2, 7) = \binom{10}{2} \cdot \binom{7}{2} = \frac{10!}{8!2!} \cdot \frac{7!}{5!2!} = 45 \cdot 21 = 945$$

Petr s Ivanou si mohou vyměnit knihy 945 způsoby.

6.2.3.5 Příklad: Na skladě je 15 výrobků. Z toho je 10 výrobků 1. jakosti a 5 výrobků 2. jakosti. Kolika způsoby je možné vybrat 5 výrobků tak, aby mezi nimi byly alespoň 4 výrobky první jakosti?

(Huťka, Cirjak, Drobná, Švidroňová 1986, str. 63)

Řešení: celkem 15 výrobků



Výběr pěti výrobků: 4 výrobky budou 1. jakosti a 1 výrobek 2. jakosti nebo všech 5 výrobků bude 1. jakosti.

$$C(4, 10) \cdot C(1, 5) + C(5, 10) \cdot C(0, 5) = \binom{10}{4} \cdot \binom{5}{1} + \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{0} = \frac{10!}{6!4!} \cdot 5 \text{ [vlastnost kombinačních čísel]} + \frac{10!}{5!5!} \cdot 1 \text{ [vlastnost kombinačních čísel]} = 210 \cdot 5 + 252 \cdot 1 = 1\,050 + 252 = 1\,302$$

Je možné vybrat 1 302 způsoby.

6.2.3.6 Příklad: Určete, kolika způsoby se kolem kulatého stolu může posadit pět mužů a pět žen tak, aby žádné dvě ženy neseděly vedle sebe. (Návod: Očíslujeme-li jednotlivá místa, mohou muži sedět buď na místech 1, 3, 5, 7, 9, nebo na místech 2, 4, 6, 8, 10).

(Calda, Dupač 1993, str. 33)

Řešení: Ženy nesmí sedět vedle sebe, z toho plyne, že musejí sedět ob jedno místo. Mohou nastat dvě možnosti - ženy budou sedět na lichých nebo na sudých místech. Možností pro posazení mužů je $5!$. A možností pro posazení žen je $5!$. A jsou 2 možnosti, zda na sudých místech budou sedět muži nebo ženy.

$$2 \cdot 5! \cdot 5! = 28\,800$$

U kulatého stolu se jde posadit 28 800 způsoby.

6.3 Příklady na kombinatoriku s opakováním

6.3.1 Příklady na variace s opakováním

6.3.1.1 Příklad: Určete, kolik značek Morseovy abecedy lze utvořit sestavením teček a čárek do skupin o jednom až čtyřech prvcích. (Calda, Dupač 1993, str. 38)

Řešení: U značky Morseovy abecedy záleží na pořadí znaků, protože například tečka a čárka není totéž jako čárka a tečka. Skládáme dva druhy značek o čtyřech prvcích, ale protože záleží na pořadí, tak po předcházejícím výběru nám počet prvků bude ubývat.
 $V'(4, 2) + V'(3, 2) + V'(2, 2) + V'(1, 2) = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 16 + 8 + 4 + 2 = 30$
Celkem lze utvořit 30 značek Morseovy abecedy.

6.3.1.2 Příklad: Kufřík má heslový zámek, který se otevře, když na každém z pěti kotoučů nastavíme správnou číslici. Těchto číslic je na každém kotouči devět. Určete největší možný počet pokusů, které je nutno provést, chceme-li kufřík otevřít, jestliže jsme zapomněli heslo. (Calda, Dupač 1993, str. 39)

Řešení: Vybíráme pětimístné heslo správných číslic z 9 možných. Číslice se mohou opakovat.

$$V'(5, 9) = 9^5 = 59\,049$$

Největší možný počet pokusů je 59 049.

6.3.1.3 Příklad: Poměr počtu variací třetí třídy z n prvků bez opakování k počtu variací třetí třídy z n prvků s opakováním je $21 : 32$. Jaké je n ?

(Huťka, Cirjak, Drobná, Švidroňová 1986, str. 60)

Řešení: $V(3, n) : V'(3, n) = 21 : 32$

$$\frac{V(3, n)}{V'(3, n)} = \frac{21}{32}$$

$$\frac{\frac{n!}{(n-3)!}}{n^3} = \frac{21}{32}$$

$$\text{podmínka: } n \geq 0 \wedge n - 3 \geq 0 \wedge n \neq 0$$

$$\frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}}{n^3} = \frac{21}{32} \quad \Bigg/ \cdot 32 n^3$$

$$n \geq 0 \wedge n \geq 3 \wedge n \neq 0$$

$$32n(n-1)(n-2) = 21n^3$$

$$\underline{n \in \langle 3, \infty \rangle \wedge n \in \mathbb{Z}}$$

$$32n(n^2 - 2n - n + 2) - 21n^3 = 0$$

$$n \cdot [32(n^2 - 3n + 2) - 21n^2] = 0$$

$$n \cdot (32n^2 - 96n + 64 - 21n^2) = 0$$

$$n \cdot (11n^2 - 96n + 64) = 0$$

$$n_1 = 0.. \quad n \notin \langle 3, \infty \rangle \wedge n \in \mathbb{Z}$$

$$n_{2,3} = \frac{96 \pm 80}{22} = \begin{cases} 8... & n \in \langle 3, \infty \rangle \wedge n \in \mathbb{Z} \\ \frac{16}{22}... & n \notin \langle 3, \infty \rangle \wedge n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$D = (-96)^2 - 4 \cdot 11 \cdot 64 = 6\,400$$

Prvků bylo 8.

6.3.1.4 Příklad: Kolik státních poznávacích značek je možno utvořit tak, že za dvěma písmeny (dohromady je jich 27) následují čtyři číslice?

(Huťka, Cirjak, Drobná, Švidroňová 1986, str. 60)

Řešení: vybíráme 2 písmena z 27 možných a zároveň 4 číslice z číslic 0 – 9.

$$\text{písmena: } V'(2, 27) = 27^2 = 729$$

$$\text{čísllice: } V'(4, 10) = 10^4 = 10\,000$$

$$729 \cdot 10\,000 = 7\,290\,000$$

Státních poznávacích značek je možno utvořit 7 290 000.

6.3.1.5 Příklad: Kolik různých pěticiferných čísel lze vytvořit z číslic 4 a 7?

(Jirásek, Braniš, Horák a Vacek 1989, str. 63)

Řešení: Číslice se budou opakovat, protože máme utvořit pěticiferné číslo, ale na výběr máme jen 2 číslice.

$$V'(5, 2) = 2^5 = 32$$

Lze sestavit 32 čísel.

6.3.1.6 Příklad: Z kolika prvků vznikne:

a) 729 variací třetí třídy s opakováním

b) 1 024 variací páté třídy s opakováním

(Schramm, Nimrichter, Topinka 1970, str. 294)

Řešení: a) $V'(3, n) = 729$

$$n^3 = 729$$

$$n = \sqrt[3]{729}$$

$$n = 9$$

Variace s opakováním vznikne z 9 prvků.

b) $V'(5, n) = 1\,024$

$$n^5 = 1\,024$$

$$n = \sqrt[5]{1\,024}$$

$$n = 4$$

Variace s opakováním vznikne ze 4 prvků.

6.3.2 Příklady na permutace s opakováním

6.3.2.1 Příklad: Určete počet všech pěticeforných přirozených čísel, jež lze sestavit z číslic 5 a 7, má-li v každém z nich být číslice 5:

- a) právě třikrát
- b) nejvýše třikrát
- c) alespoň třikrát

(Caldá, Dupač 1993, str. 45)

Řešení:

a) Máme utvořit pěticeforné přirozené číslo, k dispozici máme dvě číslice. Číslice 5 se může opakovat právě třikrát a do utvoření pěticeforného čísla chybí 2 číslice, které budou obsaženy dvakrát číslicí 7. Vytvoříme si permutaci s opakováním:

$$P'_{3,2}(5) = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{12} = 10$$

Počet všech pěticeforných přirozených čísel, v nichž se vyskytuje číslice 5 právě třikrát, je 10.

b) Číslice 5 se má vyskytovat nejvýše třikrát, znamená to, že může být obsažena 3x nebo 2x nebo 1x nebo taky nemusí být obsažena vůbec. Proto si spočítáme permutace s opakováním pro všechny možnosti a poté je sečteme.

$$P'_{3,2}(5) = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{12} = 10$$

$$P'_{2,3}(5) = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

$$P'_{1,4}(5) = \frac{5!}{1!4!} = \frac{120}{24} = 5$$

$$P'_{0,5}(5) = \frac{5!}{0!5!} = \frac{120}{1 \cdot 120} = 1$$

$$x = 10 + 10 + 5 + 1 = 26$$

Počet všech pěticefných přirozených čísel, v nichž se vyskytuje číslice 5 nejvýše třikrát, je 26.

c) Číslice 5 se má vyskytovat alespoň třikrát, tím se rozumí, že číslice 5 musí být obsažena minimálně třikrát. Může být obsažena 3x nebo 4x nebo také 5x. Proto si spočítáme permutace s opakováním pro všechny možnosti a poté je sečteme.

$$P'_{3,2}(5) = 10$$

$$P'_{4,1}(5) = 5$$

$$P'_{5,0}(5) = 1$$

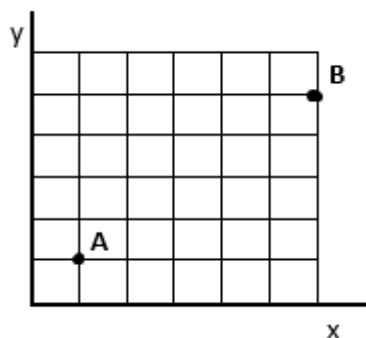
$$x = 10 + 5 + 1 = 16$$

Počet všech pěticefných přirozených čísel, v nichž se vyskytuje číslice 5 alespoň třikrát, je 16.

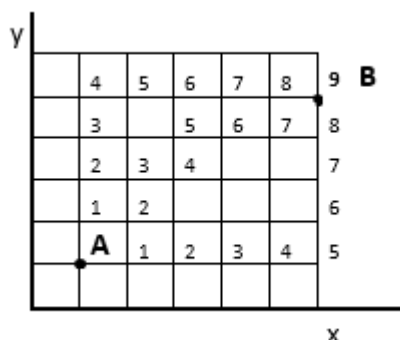
6.3.2.2 Příklad: Je dána soustava souřadnic v rovině s mřížovými body, jejichž souřadnice jsou přirozená čísla. Zjistěte počet všech nejkratších cest z bodu A [1; 1] do bodu B [6; 5], jestliže se pohyb může konat jen ve směru osy x nebo osy y a směr pohybu se může změnit jen v mřížových bodech.

(Bušek 1985, str. 455)

Řešení: Pro lepší představivost si nakreslíme obrázek.



Počet všech cest z bodu A do bodu B je v soustavě souřadnic je 9, ať to zkusíme jakoukoliv cestou.



Ve směru osy y z bodu A do bodu B jsou 4 pohyby a ve směru osy x je 5 pohybů.

$$P'_{4,5}(9) = \frac{9!}{4!5!} = 126$$

Počet všech nejkratších cest z bodu A do bodu B je 126.

6.3.2.3 Příklad: Kolika způsoby lze ubytovat 10 hostů:

- do jednoho čtyřlůžkového pokoje a dvou třílůžkových pokojů
- do dvou třílůžkových a dvou dvoulůžkových pokojů

(Bušek 1985, str. 455)

Řešení:

- Máme ubytovat 10 hostů, $n = 10$. K dispozici máme 1 čtyřlůžkový pokoj a 2 třílůžkové. Utvoříme permutaci s opakováním, protože se nám třílůžkové pokoje opakují.

$$P'_{4,3,3}(10) = \frac{10!}{4!3!3!} = 4\,200$$

Hosty lze ubytovat 4 200 způsoby.

- K dispozici máme 2 třílůžkové pokoje a 2 dvoulůžkové pokoje. Opět si utvoříme permutaci s opakováním:

$$P'_{3,3,2,2}(10) = \frac{10!}{3!3!2!2!} = 25\,200$$

Hosty lze ubytovat 25 200 způsoby.

6.3.2.4 Příklad: Aranžér má umístit do výkladu vedle sebe tři stejné kabáty béžové, dva stejné zelené a jeden modrý. Kolika způsoby to může provést?

(Jirásek, Braniš, Horák a Vacek 1989, str. 61)

Řešení: Vytvoříme si permutaci, kde máme 3 stejné béžové, 2 stejné zelené a 1 modrý. Celkem chceme umístit do výkladu 6 kabátů, $n = 6$.

$$P'_{3,2,1}(6) = \frac{6!}{3!2!1!} = \frac{720}{12} = 60$$

Aranžér může umístit kabáty do výkladu 60 způsoby.

6.3.2.5 Příklad: Jistě jste poznali, že v anagramech AABIKKMNOORT, respektive MINIKABAROTOK, je zašifrováno slovo KOMBINATORIKA. Určete počet všech anagramů, jež lze ze slova KOMBINATORIKA utvořit.

(Calda, Dupač 1993, str. 45)

Řešení: Celkem slovo KOMBINATORIKA tvoří 13 písmen, $n = 13$. Z toho se ale 4 písmena opakují, jsou to písmena K, O, I a A. Opakující se písmena mohou mezi sebou vyměnit např. O za O, A za A..., protože se všechna ze čtyř opakujících se písmen, opakují 2x.

$$P'_{2,2,2,2}(13) = \frac{13!}{2!2!2!2!} = 389\,188\,800$$

Počet všech anagramů ze slova KOMBINATORIKA je 389 188 800.

6.3.2.6 Příklad: Kolik signálů je možné vyslat současným vytažením tří červených, dvou bílých a dvou zelených vlajek na stěžeň lodi?

(Huťka, Cirjak, Drobná, Švidroňová 1986, str. 60)

Řešení: Celkem vlajek je 7, $n = 7$. Červená vlajka je obsažena 3x, bílá 2x a zelená 2x.

$$P'_{3,2,2}(7) = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

Současným vytažením všech vlajek je možné vyslat 210 signálů.

6.3.3 Příklady na kombinace s opakováním

6.3.3.1 Příklad: Ze všech bílých šachových figurek bez krále a dámy (tj. z osmi pěšců, dvou věží, dvou jezdců a dvou střelců) vybereme: a) trojici, b) dvojici.

Jaký je počet možností pro jejich složení?

(Calda, Dupač 1993, str. 50)

Řešení: Možností pro výběr trojice ze čtyř druhů by bylo $C'(3, 4)$, kdyby všech druhů figurek byl dostatek. Ale věže, jezci a střelci jsou pouze po dvou kusech.

Proto utvoříme kombinaci s opakováním pro výběr trojice ze čtyř druhů, ale musíme odečíst možnosti výběru tří věží, tří jezdců a tří střelců:

$$C'(3, 4) - 3 = \binom{3+4-1}{3} - 3 = \binom{6}{3} - 3 = \left(\frac{6!}{3!3!}\right) - 3 = 20 - 3 = 17$$

Počet možností pro jejich složení je 17.

b) Nyní chceme skládat dvojici a již víme, že máme dostatečný počet figurek ve všech druzích. Proto utvoříme kombinaci s opakováním pro dvojici ze čtyř druhů:

$$C'(2, 4) = \binom{2+4-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Počet možností pro jejich složení je 10.

6.3.3.2 Příklad: Určete, kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit osm stejných jablek. (Návod: Každé rozdělení osmi jablek mezi tři osoby A, B, C lze zašifrovat pomocí neuspořádané osmice z těchto písmen, např. AAABBBBC značí přiděl tří jablek osobě A, čtyř jablek osobě B a jednoho jablka osobě C.) (Calda, Dupač 1993, str. 52)

Řešení: Máme rozdělit osm jablek mezi tři osoby. Utvoříme kombinaci s opakováním:

$$C'(8, 3) = \binom{8+3-1}{8} = \binom{10}{8} = \frac{10!}{2!8!} = 45$$

Tři osoby si mohou rozdělit mezi sebe osm jablek 45 způsoby.

6.3.3.3 Příklad: Určete, kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit čtyři stejná jablka a šest stejných hrušek. (Návod: Rozdělení jablek a hrušek jsou na sobě nezávislá, dále pak viz předchozí příklad.)

(Calda, Dupač 19993, str. 52)

Řešení: Možnosti pro rozdělení čtyř stejných jablek třem osobám je $C'(4, 3)$. Možnosti pro rozdělení šesti stejných hrušek třem osobám je $C'(6, 3)$. Vypočítané kombinace s opakováním mezi sebou vynásobíme, protože osoby dostávají jablka i hrušky zároveň.

$$C'(4, 3) \cdot C'(6, 3) = \binom{4+3-1}{4} \cdot \binom{6+3-1}{6} = \binom{6}{4} \cdot \binom{8}{6} = \frac{6!}{2!4!} \cdot \frac{8!}{2!6!} = 15 \cdot 28 = 420$$

Tři osoby si mohou mezi sebe rozdělit ovoce 420 způsoby.

6.3.3.4 Příklad: V krabici jsou zelené, žluté a černé kuličky. Kuličky téže barvy nejsou rozlišeny. Určete, kolika způsoby lze vybrat 8 kuliček, jestliže v krabici je aspoň 8 kuliček od každé barvy. (příklad vymyšlen autorkou BP)

Řešení: Při výběru 8 kuliček nezáleží na pořadí a barvy se mohou opakovat.

Jde tedy o osmičlennou kombinaci s opakováním ze tří prvků (zelené, žluté a černé).

$$C'(8, 3) = \binom{8+3-1}{3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 45$$

Z krabice lze 8 kuliček vybrat 45 způsoby.

6.3.3.5 Příklad: V papírnictví mají na výběr ze 17 různých psacích per. Určete, kolika způsoby si z nich lze vybrat 4 pera. (příklad vymyšlen autorkou BP)

Řešení: Jde o kombinace s opakováním ze 17 prvků. Můžeme si koupit 4 různá pera nebo i některá stejná.

$$C'(4, 17) = \binom{4+17-1}{4} = \binom{20}{4} = \frac{20!}{4!16!} = 4\,845$$

V papírnictví si lze pera vybrat 4 845 způsoby.

6.3.3.6 Příklad: V akvaristice mají v dostatečném množství celkem čtyři různé druhy akvariálních rybek v ceně 10 Kč za jednu rybku. Kolika způsoby můžete tyto rybky zakoupit:

a) zaplatíte-li právě 60 Kč

b) zaplatíte-li právě 60 Kč a přitom nakupujete rybky zásadně po párech?

(Bušek 1985, str. 462)

Řešení: Nejprve si vypočítáme, kolik rybek si můžeme koupit za 60 Kč:

- 60 Kč/10 Kč za jednu rybku = 6 rybek

Můžeme si tedy koupit 6 ryb. Přitom máme na výběr ze čtyř druhů, a těch je neomezený počet. Rybky ze stejného druhu se tedy mohou opakovat.

$$C'(6, 4) = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

Při koupi za 60 Kč je možné si koupit rybky 84 způsoby.

b) Nejprve si vypočítáme, kolik párů ryb si můžeme koupit za 60 Kč:

- 60 Kč/20 Kč (cena za dvě rybky = 1 pár) = 3 rybky

Můžeme si koupit 3 ryby. Přitom máme na výběr ze čtyř druhů, a těch je neomezený počet. Rybky ze stejného druhu se tedy mohou opakovat.

$$C'(3, 4) = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

Při koupi za 60 Kč a přitom zásadně po páru je možné si koupit rybky 20 způsoby.

6.4 Příklady na vlastnosti kombinačních čísel

6.4.1 Příklad: Zjednodušte a vypočítejte: $\binom{5}{2} + \binom{5}{3}$

(Jirásek, Braniš, Horák a Vacek 1989, str. 69)

Řešení: $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$ [podle vzorce $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$]

6.4.2 Příklad: Vyjádřete jediným kombinačním číslem součet $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3}$

(Calda, Dupač 1993, str. 63)

Řešení: $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} =$

- nejdříve si upravíme $\binom{3}{3}$ na $\binom{4}{4}$, tím se nic nezmění, protože $\binom{n}{n} = 1$

- dále pokračujeme již podle zmíněných vlastností kombinačních čísel

$$\begin{aligned} &= [\binom{4}{4} + \binom{4}{3}] + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} = [\binom{5}{4} + \binom{5}{3}] + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} = [\binom{6}{4} + \binom{6}{3}] + \binom{7}{3} = \\ &= \binom{7}{4} + \binom{7}{3} = \binom{8}{4} \end{aligned}$$

6.4.3 Příklad: Vyjádřete jediným kombinačním číslem a poté ho vypočítejte:

$$\binom{10}{3} + 2 \cdot \binom{10}{4} + \binom{10}{5} \quad (\text{Huťka, Cirjak, Drobná, Švidroňová 1986, str. 69})$$

Řešení: $\binom{10}{3} + 2 \cdot \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = [\binom{10}{3} + \binom{10}{4}] + [\binom{10}{4} + \binom{10}{5}] = [\binom{11}{4}] + [\binom{11}{5}] =$

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{7!5!} = 792$$

6.4.4 Příklad: Vyjádřete pomocí kombinací ze dvou prvků: $\binom{5}{2} + \binom{5}{3}$

(Huťka, Cirjak, Drobná, Švidroňová 1986, str. 69)

Řešení: $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{2}$ [podle vzorce $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$] $= 2 \cdot \binom{5}{2} = 2 \cdot [\binom{4}{1} + \binom{4}{2}]$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \binom{4}{1} + 2 \cdot \binom{4}{2} = 2 \cdot [\binom{3}{0} + \binom{3}{1}] + 2 \cdot [\binom{3}{1} + \binom{3}{2}] = 2 \cdot \binom{3}{0} + 2 \cdot \binom{3}{1} + 2 \cdot \binom{3}{1} + 2 \cdot \binom{3}{2} \\ &= 2 \cdot \binom{3}{0} + 2 \cdot \binom{3}{1} + 2 \cdot \binom{3}{1} + 2 \cdot \binom{3}{2} = 6 \cdot \binom{3}{1} + 2 \cdot \binom{3}{0} = 6 \cdot [\binom{2}{1} + \binom{2}{0}] + 2 \cdot \binom{2}{0} \\ &= 6 \cdot \binom{2}{1} + 6 \cdot \binom{2}{0} + 2 \cdot \binom{2}{0} = 6 \cdot \binom{2}{1} + 8 \cdot \binom{2}{0} \end{aligned}$$

6.4.5 Příklad: Užitím Pascalova trojúhelníku vyjádřete součet pomocí kombinací ze dvou prvků:

$$\binom{4}{2} + 2 \cdot \binom{4}{3} \quad (\text{Huťka, Cirjak, Drobná, Švidroňová 1986, str. 68})$$

$$\begin{aligned}
 \text{Řešení: } & \binom{4}{2} + 2 \cdot \binom{4}{3} = \\
 & = \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{2} + 2 \cdot [\binom{3}{2} + \binom{3}{3}] = \quad \text{podle vzorce } \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \\
 & = \binom{3}{2} [\text{podle vzorce } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}; \binom{3}{1} = \binom{3}{2}] + \binom{3}{2} + 2 \cdot \binom{3}{2} + 2 \cdot \binom{3}{3} = \\
 & = 4 \cdot \binom{3}{2} + 2 \cdot \binom{3}{3} = [\text{podle vzorce } \binom{n}{n} = 1; \binom{3}{3} = \binom{2}{2} = 1] \\
 & = 4 \cdot \binom{2}{1} + \binom{2}{2} + 2 \cdot \binom{2}{2} = 4 \cdot \binom{2}{1} + 4 \cdot \binom{2}{2} + 2 \cdot \binom{2}{2} = 4 \cdot \binom{2}{1} + 6 \cdot \binom{2}{2}
 \end{aligned}$$

6.4.6 Příklad: Řešte rovnici: $\binom{x-2}{x-4} + \binom{x-3}{x-5} = 16$

(Jirásek, Braniš, Horák, Vacek 1989, str. 71)

$$\text{Řešení: } \binom{x-2}{x-4} + \binom{x-3}{x-5} = 16$$

$$\frac{(x-2)!}{[(x-2)-(x-4)]!(x-4)!} + \frac{(x-3)!}{[(x-3)-(x-5)]!(x-5)!} = 16 \quad \text{podmínka: } x-4 \geq 0 \wedge x-5 \geq 0$$

$$\frac{(x-2)!}{2!(x-4)!} + \frac{(x-3)!}{2!(x-5)!} = 16 \quad x \geq 4 \wedge x \geq 5$$

$$\frac{(x-2)(x-3)(x-4)!}{2!(x-4)!} + \frac{(x-3)(x-4)(x-5)!}{2!(x-5)!} = 16 \quad \underline{x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 5}$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{2 \cdot 1} + \frac{(x-3)(x-4)}{2 \cdot 1} = 16$$

$$\frac{x^2-3x-2x+6}{2} + \frac{x^2-4x-3x+12}{2} = 16 \cdot 2$$

$$x^2 - 5x + 6 + x^2 - 7x + 12 = 32$$

$$2x^2 - 12x + 18 = 32$$

$$2x^2 - 12x - 14 = 0$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} = \frac{14}{2} = 7 \dots x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 5$$

$$-\frac{2}{2} = -1 \dots x \notin \mathbb{N} \wedge x \leq 5$$

Řešením rovnice je $x=7$

6.5 Příklady na binomickou větu

6.5.1 Příklad: Podle binomické věty rozved'te $(x + y)^5$

(Klodner 2005, str. 131)

$$\begin{aligned}\text{Řešení: } (x + y)^5 &= \binom{5}{0} \cdot x^5 \cdot y^0 + \binom{5}{1} \cdot x^4 \cdot y^1 + \binom{5}{2} \cdot x^3 \cdot y^2 + \binom{5}{3} \cdot x^2 \cdot y^3 + \binom{5}{4} \cdot x^1 \cdot y^4 + \\ &\binom{5}{5} \cdot x^0 \cdot y^5 = 1 \cdot x^5 \cdot 1 + 5 \cdot x^4 \cdot y + \frac{5!}{3!2!} \cdot x^3 \cdot y^2 + \frac{5!}{2!3!} \cdot x^2 \cdot y^3 + \frac{5!}{1!4!} \cdot x^1 \cdot y^4 + 1 \cdot 1 \cdot y^5 = x^5 \\ &+ 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5\end{aligned}$$

6.5.2 Příklad: Vypočtete: $\left(\frac{1}{x} + 2x\right)^3$

(Klodner 2005, str. 132)

$$\begin{aligned}\text{Řešení: } \left(\frac{1}{x} + 2x\right)^3 &= \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 \cdot (2x)^0 + \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot 2x + \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^1 \cdot (2x)^2 + \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^0 \\ &\cdot (2x)^3 = 1 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x + 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot 4x^2 + 1 \cdot 1 \cdot 8x^3 = \frac{1}{x^3} + \frac{6x}{x^2} + \frac{12x^2}{x} + 8x^3 = \frac{1}{x^3} + \frac{6}{x} + \\ &12x + 8x^3\end{aligned}$$

6.5.3 Příklad: Vypočtete: $(-4 - 3\sqrt{2})^3$

(Smida, Lukátšová, Šedivý, Vocolka 1984, str. 66)

$$\begin{aligned}\text{Řešení: } (-4 - 3\sqrt{2})^3 &= [-1 \cdot (4 + 3\sqrt{2})]^3 = -1 \cdot \left[\binom{3}{0} \cdot 4^3 \cdot (3\sqrt{2})^0 + \binom{3}{1} \cdot 4^2 \cdot (3\sqrt{2})^1 + \binom{3}{2} \cdot 4^1 \cdot (3\sqrt{2})^2 + \binom{3}{3} \cdot 4^0 \cdot (3\sqrt{2})^3\right] = \\ &-1 \cdot [1 \cdot 64 \cdot 1 + 3 \cdot 16 \cdot 3\sqrt{2} + 3 \cdot 4 \cdot 18 + 1 \cdot 1 \cdot 27 \cdot 2\sqrt{2}] = - \\ &1 \cdot [64 + 144\sqrt{2} + 216 + 54\sqrt{2}] = -64 - 144\sqrt{2} - 216 - 54\sqrt{2} = -280 - 198\sqrt{2}\end{aligned}$$

6.5.4 Příklad: Určete třetí člen binomického rozvoje výrazu $(x - 10)^9$

(Smida, Lukátšová, Šedivý, Vocolka 1984, str. 66)

Řešení: Protože víme, že platí: v případě $(a - b)^n$ je první člen kladný a znaménka se pak pravidelně střídají.

$$\begin{aligned}(x - 10)^9 &= + \binom{9}{2} [\text{protože hledáme třetí člen; první} = \binom{9}{0}, \text{druhý} = \binom{9}{1}, \text{třetí} = \binom{9}{2}] \cdot x^{(9-2)} \\ &\cdot 10^2 = \binom{9}{2} \cdot x^7 \cdot 10^2 = \frac{9!}{7!2!} \cdot x^7 \cdot 10^2 = 36x^7 \cdot 100 = 3600x^7\end{aligned}$$

6.5.5 Příklad: Pro jaké x je třetí člen binomického rozvoje $(x - \sqrt{2})^7$ roven -42 ?

(Bušek 1985, str. 470)

Řešení: Protože víme, že platí: v případě $(a - b)^n$ je první člen kladný a znaménka se pak pravidelně střídají.

3. člen: $+ \binom{7}{2}$ [protože hledáme třetí člen; první $= \binom{7}{0}$, druhý $= \binom{7}{1}$, třetí $= \binom{7}{2}$].

$$\cdot x^{(7-2)} \cdot (\sqrt{2})^2$$

$$+ \binom{7}{2} * x^{(7-2)} * (\sqrt{2})^2 = -42$$

$$\frac{7!}{5!2!} * x^5 * 2 = -42$$

$$21 * x^5 * 2 = -42$$

$$42x^5 = -42 \quad /: (42)$$

$$x^5 = -1/5$$

$$x = (-1)^5$$

$$x = -1$$

Třetí člen binomického rozvoje je pro $x = -1$.

7. Zajímavé příklady kombinatoriky

7.1 Příklad: V urně jsou 3 černé a 2 červené koule. Vytáhneme 2 koule (tažené koule nevracíme do urny):

- Petr (P) vyhrává, jsou-li obě tažené koule stejné barvy.
- Milan (M) vyhrává, jsou-li obě tažené koule různé barvy.

Který z hochů má větší šanci vyhrát?

Řešení:

a) Výběr dvou koulí stejné barvy:

- červené koule: $\binom{2}{2} = 1$

- černé koule: $\binom{3}{2} = 3$

Užitím kombinatorického pravidla součtu získáme počet možností pro výběr dvou koulí stejné barvy: $1 + 3 = 4$.

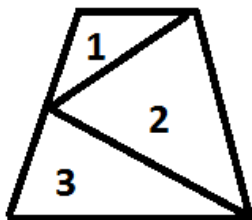
b) Výběr dvou koulí různé barvy:

- užitím kombinatorického pravidla součinu získáme počet možností pro výběr dvou koulí různé barvy: $\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 6$

Větší šanci na výhru má Milan.

(Příhonská 2013, str. 74)

7.2 Příklad: Lenka si chtěla ušít sukni ze tří barevných dílů a to z červeného, žlutého a oranžového. Přemýšlela, jak trojúhelníky na sukni poskládat. Kolik má Lenka možností?



Obr. č. 10: Sukně

Řešení:

Vypíšeme všechny možnosti uspořádání barev na sukni. Můžeme vypisovat jen začáteční písmena barev: Oranžová, Červená, Žlutá.

Po první trojúhelník zvolíme oranžovou barvu, pro druhý červenou a pro poslední žlutou. Barvy systematicky prohazujeme a jednotlivé možnosti zaznamenejme do schématu:

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 1. O, Č, Ž | 3. Č, Ž, O | 5. Ž, Č, O |
| 2. O, Ž, Č | 4. Č, O, Ž | 6. Ž, O, Č |

2. řešení: kombinatorické pravidlo součinu

První trojúhelník můžeme vybírat ze tří barev (oranžové, žluté, červené), na druhý trojúhelník už jen ze dvou zbývajících barev (červená, oranžová; červená, žlutá; žlutá, oranžová) a na poslední trojúhelník zůstane poslední jedna barva. To znamená

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

3. řešení: permutace bez opakování

Tvoříme všechna pořadí tří různých prvků bez opakování:

$$P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Pro různou kombinaci barev má Lenka 6 možností.

(Příhonská 2013, str. 80)

7.3 Příklad: Ve společnosti šesti osob si přitukl sklenkou každý s každým. Kolik cinknutí se celkem ozvalo? (Při každém přituknutí se ozvalo cinknutí a žádná dvě cinknutí nesplynula).

Řešení:

Jedná se o kombinace bez opakování:

Hledáme počet všech dvojic vytvořených ze šesti prvků, na pořadí prvků nezáleží a žádný prvek se ve dvojici neopakuje:

$$K(2,6) = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

Celkem bylo slyšet 15 cinknutí.

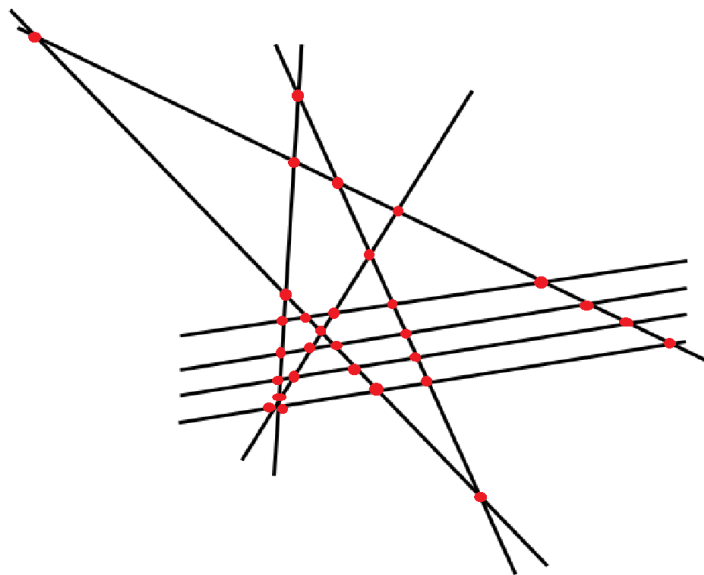
(Příhonská 2013, str. 94)

7.4 Příklad: Určete, v kolika bodech se protíná 9 přímek v rovině, jestliže čtyři jsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem.

Řešení:

1. řešení: grafické řešení

Narýsujeme 4 přímky, které musí být rovnoběžné. Doplníme zbylé různoběžné přímky, tak aby žádné tři neprocházely tímž bodem. Sečteme všechny průsečíky.



Obr. č. 11: Průsečíky přímek

2. řešení: kombinace bez opakování

Počítat budeme 2člennou kombinaci z 9 prvků, od které odečteme 2 člennou kombinaci ze 4 prvků (rovnoběžky se neprotínají, proto nezískáme $\binom{4}{2}$ průsečíky).

$$K(2, 9) - K(2, 4) = \binom{9}{2} - \binom{4}{2} = 36 - 6 = 30$$

9 přímek, z nichž 4 jsou rovnoběžné, se protíná ve 30 bodech.

(Příhonská 2013, str. 103)

Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo sestavit sbírku řešených příkladů. Je rozdělena na dvě části, a to na část teoretickou a část praktickou.

Teoretická část se skládá ze šesti kapitol. V první kapitole je nastíněna historie kombinatoriky, jsou zde uvedeny kombinatorické náznaky a popsány významné osobnosti zabývající se touto matematickou oblastí. V druhé kapitole jsem shrnula kombinatorická pravidla, jakožto kombinatorické pravidlo součtu a součinu. Po jejich teoretickém vysvětlení jsem uvedla jednoduché příklady. V třetí a čtvrté kapitole, které jsou zároveň nejrozsáhlejší, se zabírám základními kombinatorickými pojmy bez a s opakováním, a to variacemi, permutacemi a kombinacemi, jež jsou odborně vysvětleny pomocí definic. Ke každému pojmu je na jeho procvičení doložen příklad. Pátá kapitola zahrnuje vlastnosti kombinačních čísel a vztahy Pascalova trojúhelníku. Šestá kapitola popisuje binomickou větu.

Praktická část obsahuje sadu řešených příkladů. U příkladů jsem se snažila v zadání přiblížit a zdůraznit důležité informace, jež objasňují způsob řešení. Dále jsem určila počet n prvků a k -tici, které pak už jen stačilo dosadit do vzorce. Řešení a postup jsem se snažila vysvětlit slovně, popřípadě vzorci, jež jsou popsány v teoretické části. Praktickou část tedy tvoří celkem 50 řešených příkladů.

Mojí snahou bylo zpracovat bakalářskou práci takovým způsobem, aby mohla sloužit jako studijní materiál pro studenty středních škol, včetně sbírky příkladů.

Seznam použité literatury

1. BINTEROVÁ, Helena a Pavel TLUSTÝ. *Současné trendy ve vyučování matematice*. Plzeň: Fraus, 2013. ISBN 978-80-7238-998-8.
2. BUŠEK, PhDr. Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 2. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 5-42-29/2.
3. CALDA, CSC., Doc. RNDr. Emil a Prof. RNDr. Václav DUPAČ, DRSC. *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. Praha: Prometheus, 1993. ISBN 80-85849-10-0.
4. FUCHS, Eduard. *Diskrétní matematika pro učitele*. 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2011. ISBN 978-80-210-5459-2.
5. HERMAN, Jiří, Radan KUČERA a Jaromír ŠIMŠA. *Metody řešení matematických úloh II*. Třetí, přepracované vydání, 2004. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2004. ISBN 80-210-3528-5.
6. HUŤKA, Doc. RNDr. Vladimír, RNDr. Milan CIRJAK, Ing. RNDr. Olga DROBNÁ a Aurélie ŠVIDROŇOVÁ. *Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU - 7. část*. 2. vydání. ČSR: ČSR, 1986. ISBN 31518/84-210.
7. JIRÁSEK, DRSC., Doc. RNDr. František, Karel BRANIŠ, PhDr. Stanislav HORÁK a VACEK. *Sbírka úloh z matematiky: pro SOŠ a studijní obory SOU 2. část*. 1. vydání. Praha: SPN, 1989. učebnice pro střední školy. ISBN 80-04-21341-3.
8. KLODNER, Jaroslav. *Sbírka úloh z matematiky pro obchodní akademie a střední odborné školy*. Upravené vydání. Sofico, 2005. ISBN nemá.
9. MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: Stručná historie královny věd*. Příbram: Příbram: Pistorius & Olšanská 2008, 2008. ISBN 978-80-87053-16-4.

10. ODVÁRKO, CSC., Doc. dr. Oldřich, Doc. dr. Miloš BOŽEK, CSC., Marta RYŠÁNKOVÁ a Dr. Jozef SMIDA, CSC. *Matematika pro II. ročník gymnázií*. Státní pedagogické nakladatelství. Praha: SPN, 1985. Učebnice pro střední školy. ISBN 17 650/84 - 210.
11. PŘÍHONSKÁ, Jana. *KOMBINATORICKÉ PROBLÉMY: Aplikace a metody řešení*. 2013. vyd. Technická univerzita v Liberci, 2014. ISBN 987-80-7494-017-0.
12. SCHRAMM, CSC., Doc. Ladislav, František NIMRICHTER a Václav TOPINKA. *Sbírka úloh z matematiky pro střední ekonomické školy*. 1. vydání. Slovensko: Slovenské pedagogické nakladatelství, 1970. ISBN 6188/1970.
13. SMÍDA, CSC., Dr. Josef, Dr. Júlia LUKÁTŠOVÁ, Dr. Jaroslav ŠEDIVÝ, CSC. a Dr. Jindřich VOCELKA. *Matematika pro I. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1984. Učebnice pro střední školy. ISBN 16 483/83 - 210.

Použité obrázky

Obr. č. 1: *Magický čtverec*, vytvořen autorkou bakalářské práce

Obr. č. 2: *Blaise Pascal* [fotografie], 213 x 250. Dostupný z: <http://www.guido.cz/osobnosti/pascal.htm>

Obr. č. 3 a č. 9: FARSKÁ, Jana, 2009. *Výuka kombinatoriky na střední škole s využitím webových stránek*. Praha. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Matematicko-fyzikální fakulta. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Dostupné z: <http://carolina.mff.cuni.cz/~jana/kombinatorika/>

Obr. č. 4: MAREŠ, Milan, *Pierre Fermat* [fotografie], 177 x 299, 2008

Obr. č. 5: MAREŠ, Milan, *Jakob I. Bernoulli* [fotografie], 175 x 209, 2008

Obr. č. 6: MAREŠ, Milan, *Gottfried Wilhelm von Leibniz* [fotografie], 168 x 234, 2008

Obr. č. 7: MAREŠ, Milan, *Leonhard Euler* [fotografie], 173 x 213, 2008

Obr. č. 8: PŘÍHONSKÁ, Jana, *Pierre Simon Laplace* [fotografie], 369 x 423. 2013

Obr. č. 10: Sukně, vytvořen autorkou bakalářské práce. Dostupné z: PŘÍHONSKÁ, Jana. *KOMBINATORICKÉ PROBLÉMY: Aplikace a metody řešení*. 2013. vyd. Technická univerzita v Liberci, 2014. ISBN 987-80-7494-017-0.

Obr. č. 11: Průsečíky přímek, vytvořen autorkou bakalářské práce. Dostupné z: PŘÍHONSKÁ, Jana. *KOMBINATORICKÉ PROBLÉMY: Aplikace a metody řešení*. 2013. vyd. Technická univerzita v Liberci, 2014. ISBN 987-80-7494-017-0.

Seznam obrázků

Obrázek č. 1: Magický čtverec.....	8
Obrázek č. 2: Blaise Pascal.....	9
Obrázek č. 3: Pascalův trojúhelník.....	9
Obrázek č. 4: Pierre Fermat.....	10
Obrázek č. 5: Jakob I. Bernoulli.....	10
Obrázek č. 6: Gottfried Wilhelm von Leibniz.....	10
Obrázek č. 7: Leonhard Euler.....	11
Obrázek č. 8: Pierre Simon Laplace.....	11
Obrázek č. 9: Pascalův trojúhelník.....	22
Obrázek č. 10: Sukně.....	48
Obrázek č. 11: Průsečík přímek.....	49

Internetové odkazy

1. MuDisMat, Multimediální Diskrétní Matematika, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita.
Dostupné z:
<http://xzagorov.webzdarma.cz/MuDisMat3/index.php?CisKap=1&Kniha=1&CisZal=3#prvenstvi>
2. Pierre de Fermat. In: Wikipedia: otevřená encyklopedie [online]. St. Petesburg, Florida: Wikimedia Foundation, 2003. [cit. 2015-04-23]. Dostupné z:
http://cs.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat
3. Jacob Bernoulli. In: Wikipedia: otevřená encyklopedie [online]. St. Petesburg, Florida: Wikimedia Foundation, 2003. [cit. 2015-04-23]. Dostupné z:
http://cs.wikipedia.org/wiki/Jacob_Bernoulli
4. Gottfried Wilhelm Leibniz. In: Wikipedia: otevřená encyklopedie [online]. St. Petesburg, Florida: Wikimedia Foundation, 2003. [cit. 2015-04-23]. Dostupné z:
http://cs.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz
5. Leonhard Euler. In: Wikipedia: otevřená encyklopedie [online]. St. Petesburg, Florida: Wikimedia Foundation, 2003.[cit. 2015-04-23]. Dostupné z:
http://cs.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
6. Pierre Simon de Laplace. In: Wikipedia: otevřená encyklopedie [online]. St. Petesburg, Florida: Wikimedia Foundation, 2003.[cit. 2015-04-23]. Dostupné z:
http://cs.wikipedia.org/wiki/Pierre_Simon_de_Laplace
7. Web Matematika.cz, Vydavatelství Nová média, s. r. o.,[online]. . [cit. 2015-04-28]. Dostupné z: <http://www.matematika.cz/kombinatorika>

8. FARSKÁ, Jana, 2009. *Výuka kombinatoriky na střední škole s využitím webových stránek*. Praha. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Matematicko-fyzikální fakulta. RNDr. Jarmila Robová, CSc.[online]. [cit. 2015-03-13]
Dostupné z: <http://carolina.mff.cuni.cz/~jana/kombinatorika/>

Seznam matematických symbolů

$\mathbb{N}$	přirozená čísla tj. 1, 2, 3, 4, ...
$\mathbb{N}_0$	přirozená čísla včetně 0
$\mathbb{Z}$	celá čísla tj. ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,
$ A $	počet prvků libovolné konečné množiny A
$A_i \cap A_j$	průnik dvou množin
$A_i \cup A_j$	sjednocení dvou množin
$\in$	je prvkem
$\notin$	není prvkem
$n!$	faktoriál čísla n
$P(n)$	permutace čísla n
$P' n_1, n_2, \dots, n_k (n)$	permutace s opakováním z n prvků
$V(k, n)$	variace k -třídy z daných n prvků
$V'(k, n)$	variace s opakováním k -třídy z daných n prvků
$C(k, n)$	kombinace k prvků z daných n prvků
$C'(k, n)$	kombinace s opakováním k prvků z daných n prvků
$\binom{n}{k}$	kombinační číslo n nad k
$\sum_{i=1}^k n_i$	součet prvků $n_1, n_2, \dots, n_k$
$\prod_{i=1}^k n_i$	součin prvků $n_1, n_2, \dots, n_k$

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Dagmar Štěbrová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Rok obhajoby:	2015

Název práce:	Kombinatorika ve škole
Název v angličtině:	Combinatorics at school
Anotace práce:	Bakalářská práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. Teoretická část je zaměřena na základní kombinatorickou teorii. Praktická část zahrnuje řešené kombinatorické úlohy. Bakalářská práce může sloužit jako studijní materiál se sbírkou příkladů pro studenty středních škol.
Klíčová slova:	Kombinatorika, variace, permutace, kombinace, s opakováním, kombinační čísla, binomická věta.
Anotace v angličtině:	The primary objective of this thesis is separation into theoretical and practical part. The theoretical part is focused on basic combinatorial theory. The practical part often involves solving combinatorial examples. The thesis can serve as study material with a collection of examples for secondary school students.
Klíčová slova v angličtině:	Combinatorics, variation, permutation, combination, with repetition, combinational numbers, binomial theorem.
Přílohy vázané v práci:	CD-ROM
Rozsah práce:	56
Jazyk práce:	Český jazyk

