

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
SPOLEČNÁ LABORATOŘ OPTIKY UP A FZÚ AV ČR

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Optická sestava pro simulaci libovolné
jednoqubitové transformace



Vypracoval:	Jiří Hůsek
Studijní program:	N0533A110002 Aplikovaná fyzika
Studijní obor:	1702T001 Aplikovaná fyzika
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí diplomové práce:	Mgr. Antonín Černocho, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	květen 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Antonína Černocho, Ph.D. a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 19. května 2022

.....
Jiří Hůsek

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Jiří Hůsek
Název práce	Optická sestava pro simulaci libovolné jednoqubitové transformace
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Společná laboratoř optiky UP a FZÚ AV ČR
Vedoucí práce	Mgr. Antonín Černocho, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2022
Abstrakt	Tato práce se věnuje základům kvantové informace a nehermitovských operátorů se zaměřením na \mathcal{PT} -symetrii. Teoretická část je shrnutím poznatků z oblasti \mathcal{PT} -symetrické teorie s porovnáním s již konvenčně používanou nehermitovskou teorií. Praktická část se věnuje simulaci unitární a neunitární transformace qubitů zakódovaného do polarizace na softwarově ovládané optické soustavě. Virtuální simulace obecné dvouqubitové unitární transformace na navržené optické soustavě proběhla s jistými odchylkami od požadované přesnosti. Experimentální demonstrace jednoqubitové transformace optickou soustavou, která představovala subsystém z dvouqubitové aparatury, byla úspěšně provedena pouze pro unitární proces. Výsledky získané experimentální demonstrací neunitární procesu nesouhlasí s výsledky virtuální simulace.
Klíčová slova	\mathcal{PT} -symetrie, hamiltonián, lineární optika
Počet stran	80
Počet příloh	0
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Jiří Hůsek
Title	Optical setup for simulation of any one-qubit transformation
Type of thesis	Master
Department	Joint Laboratory of Optics
Supervisor	Mgr. Antonín Černoš, Ph.D.
The year of presentation	2022
Abstract	<p>This thesis deals with the basics of quantum information and non-Hermitian operators with a focus on \mathcal{PT}-symmetry. The theoretical part is a summary of knowledge from the field of \mathcal{PT}-symmetric theory with a comparison with the already conventionally used non-Hermitian theory. The practical part is devoted to the simulation of unitary and non-unitary transformation of a qubit encoded into polarization on a software-controlled optical system. Virtual simulation of a general two-qubit unitary transformation on the proposed optical system was carried out with certain deviations from the required accuracy. The experimental demonstration of single-qubit transformation by an optical system, which represented a subsystem from a two-qubit apparatus, was successfully performed only for a unitary process. The results obtained by the experimental demonstration of the non-unitary process do not agree with the results of the virtual simulation.</p>
Keywords	\mathcal{PT} -symmetry, Hamiltonian, linear optics
Number of pages	80
Number of appendices	0
Language	czech

V první řadě bych rád poděkoval svému vedoucímu Mgr. Antonínu Černochovi, Ph.D., který se mi věnoval v průběhu tvorby celé této práce a naučil mne trpělivosti při práci v optické laboratoři.

Dále bych rád poděkoval doc. Mgr. Karlovi Lemrovi, Ph.D. a doc. Mgr. Janovi Soubustovi, Ph.D. za vysvětlení, někdy opakovanému, a pomoc správného uchopení nezbytné teorie pro tuto práci.

Děkuji také Mgr. Janovi Tomáščíkovi, Ph.D. a knihovně Přírodovědecké fakulty UP za poskytnutí technických nástrojů pro tvorbu této práce.

Rád bych vyjádřil své díky mé rodině za podporu a trpělivost, a v neposlední řadě bych chtěl poděkovat své přítelkyni Ivaně Hnízdové, která mi udává směr.

Práce byla vytvořena s podporou projektu IGA_PrF_2021_004 Univerzity Palackého.

Obsah

Úvod	8
1 Teoretická část	9
1.1 Konvenční kvantová mechanika	9
1.1.1 Kvantové stavy a skalární součin	9
1.1.2 Operátory v kvantové mechanice	11
1.1.3 Měření v kvantové mechanice	13
1.1.4 Hamiltonián a Schödingerova rovnice	14
1.2 \mathcal{PT} -symetrie a nehermitovská kvantová mechanika	15
1.2.1 Operátory $\hat{\mathcal{P}}$ a $\hat{\mathcal{T}}$	16
1.2.2 Skalární součin a časový vývoj v \mathcal{PT} -symetrii	19
1.2.3 Nehermitovská kvantová mechanika	23
1.2.4 Ukázka výpočtů pro \mathcal{PT} -symetrickou, pseudo a quasi-hermitovskou teorii	27
2 Experimentální část	34
2.1 Teoretická část k experimentu	34
2.1.1 Kvantový stav světla	34
2.1.2 Vybrané optické prvky pro manipulaci světla	35
2.1.3 Kvantová tomografie stavu	38
2.1.4 Kvantová tomografie procesu	42
2.2 Přístrojové vybavení	44
2.2.1 Zdroj záření	44
2.2.2 Polarizační kontrolér	44
2.2.3 Optické prvky	45
2.2.4 Interferometr	45
2.2.5 Detektor	46
2.3 Experimentální úlohy	46
2.3.1 Schéma lineární optické soustavy a její simulace	46
2.3.2 Měření optických os fázových destiček	55
2.3.3 Měření příčného profilu svazku	56
2.3.4 Měření transmise šedého filtru	57
2.3.5 Realizace obecné unitární a neunitární transformace optickou soustavou	58
2.4 Výsledky a diskuze	60
2.4.1 Simulace lineární optické soustavy	60
2.4.2 Měření optických os fázových destiček	60
2.4.3 Měření příčného profilu svazku	63
2.4.4 Měření transmise šedého filtru	64

2.4.5	Realizace unitární a neunitární transformace	66
Závěr		75

Úvod

Studium kvantových systémů je v posledních letech jeden z nejrozsáhlejších vědeckých oborů, jelikož jejich řešení slibuje značný technologický pokrok. Pro první seznámení s kvantovými systémy jsou použity idealizované modely, které předpokládají uzavřenost kvantového systému před okolním světem. Tento přístup je ovšem nedostatečný při popisu reálného kvantového systému. Zde je nutné připojit ke zkoumanému systému i jeho okolí, se kterým interaguje. Příkladem mohou být kvantové počítače, u kterých je informace zakódována do kvantových stavů, které se vyznačují unikátními vlastnostmi jako kvantová provázanost a princip superpozice. Tyto jevy jsou citlivé na interakci s okolním prostředím a důsledkem této interakce je ztráta informace uchované v kvantovém počítači. Jako opozit tomuto technologickému příkladu lze zmínit modelování biologických systémů, mezi kterými dochází k přesunu energie a hmoty.

Pro fyzikálně správný popis je do hamiltoniánu systému, což je matematický objekt, který je spjat s energií a časovou evolucí zkoumaného systému, vložena interakce s okolím. Protože tato interakce může být příliš složitá, analytické řešení příslušných rovnic s tímto hamiltoniánem není možné provést bez řady aproximací, které omezují správnost výsledků. Je tedy vynaloženo úsilí pro nalezení nových způsobů pro popis otevřených kvantových systémů. Jeden z těchto způsobů byl přibližně před dvaceti lety představen Benderem a Boettchrem. Byl nalezen nový druh hamiltoniánu, který svými vlastnostmi je v rozporu s konvenčně používanými hamiltoniány, ovšem se zdá být vhodným kandidátem pro popis otevřených systémů. Tento nový druh hamiltoniánu byl pojmenován \mathcal{PT} -symetrický, dle symetrie, kterou se tento hamiltonián vyznačuje.

Tato práce se skládá z teoretické a experimentální části. V teoretické části této práce je nejdříve poskytnut úvod do konvenční hermitovské kvantové mechaniky. Dále je vytvořen ucelený přehled formalismu \mathcal{PT} -symetrické teorie, která je následně porovnána s pseudo-hermitovskou a quasi-hermitovskou kvantovou mechanikou. Zakončením této části je ukázka příkladu pro \mathcal{PT} -symetrickou, pseudo a quasi-hermitovskou kvantovou mechanikou.

V experimentální části této práce je popsáno experimentální zařízení, které provádí obecnou neunitární transformaci a lze jím některé nehermitovské procesy simulovat. Nejdříve je představen základní matematický popis s ohledem na námi použitou platformu lineární optiky a kódování informace do polarizačního stavu jednotlivých fotonů. Následuje simulace neunitárních transformací virtuální optickou soustavou. Před experimentální demonstrací neunitární transformace byly prověřeny vybrané optické prvky, které byly součástí optické soustavy a byla realizována obecná unitární transformace.

Kapitola 1

Teoretická část

1.1 Konvenční kvantová mechanika

V této sekci bude zaveden formalismus, se kterým se pracuje v hermitovské kvantové mechanice. Budou uvedeny základní druhy operátorů, následně bude formulován proces měření v kvantové mechanice a zakončením této kapitoly bude zaveden pojem unitární evoluce systému.

1.1.1 Kvantové stavy a skalární součin

V kvantové mechanice je každý stav fyzikálního systému, např. poloha či hybnost elektronu obíhajícího kolem jádra atomu, popsán jeho stavovým vektorem $|\psi\rangle$, nazýván taktéž jako ket vektor nebo zkráceně stav. Ket vektor lze geometricky reprezentovat jako vektor v komplexním matematickém prostoru, který se nazývá Hilbertův prostor \mathcal{H} . Jsou-li stavy $|v_1\rangle$ a $|v_2\rangle$ součástí prostoru \mathcal{H} , tak i stav

$$|\psi\rangle = c_1|v_1\rangle + c_2|v_2\rangle \quad (1.1)$$

se nachází ve stejném prostoru \mathcal{H} , kde koeficienty $c_{1,2}$ jsou obecně komplexní čísla. Jedná se tedy o lineární systém a stav $|\psi\rangle$ je superpozicí stavů $|v_1\rangle$ a $|v_2\rangle$ s váhami c_1 a c_2 . Stav $|\psi\rangle$ se v této formě nazývá čistý [1].

Hilbertův prostor je definován skalárním součinem, který je obecně komplexní. V hermitovské kvantové mechanice se skalární součin nazývá hermitovský a zapisuje se v tzv. Dirakovské notaci

$$[|\phi\rangle]^\dagger|\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle, \quad (1.2)$$

kde „ \dagger “ značí hermitovské sdružení (operace komplexní sdružení „ $*$ “ s transpozicí „ T “) a $\langle\phi|$ značí bra vektor.

Vlastnosti skalárního součinu jsou sepsány v následujících bodech [1]:

- hermitovská symetrie

$$\langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle, \quad (1.3)$$

- linearita stavového vektoru ket

$$\langle\phi|c_1v_1 + c_2v_2\rangle = c_1\langle\phi|v_1\rangle + c_2\langle\phi|v_2\rangle, \quad (1.4)$$

- antilinearita stavového vektoru bra

$$\langle c_1w_1 + c_2w_2|\psi\rangle = c_1^*\langle w_1|\psi\rangle + c_2^*\langle w_2|\psi\rangle, \quad (1.5)$$

- pozitivně definitní skalární součin

$$\langle \psi | \psi \rangle \geq 0; \text{ rovno nule právě, když } |\psi\rangle = 0. \quad (1.6)$$

Pro vyjádření libovolného čistého stavu $|\psi\rangle$ v prostoru \mathcal{H} je nutné splnit tzv. relaci úplnosti [1]

$$\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = \mathbb{1}, \quad (1.7)$$

kde tvar zápisu braketů $|\cdot\rangle\langle\cdot|$ značí vnější součin, $\mathbb{1}$ je operátorová jednička, kterou lze maticově reprezentovat jako identitu a $\{|u_i\rangle\}$ je diskrétní množina bázových vektorů, která na prostoru \mathcal{H} tvoří ortonormální bázi

$$\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad (1.8)$$

kde $\delta_{i,j}$ je Kroneckerovo delta. Libovolný čistý stav $|\psi\rangle$ lze potom vyjádřit v bázi těchto vektorů

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle. \quad (1.9)$$

Kvantový systém ovšem může být tvořen statistickým souborem $\{p_k, |\psi_k\rangle\}$ čistých stavů. Takový kvantový systém může být v čistém stavu $|\psi_1\rangle$ s pravděpodobností p_1 , nebo v čistém stavu $|\psi_2\rangle$ s pravděpodobností p_2 atd, kde pro pravděpodobnosti musí platit

$$\sum_k p_k = 1. \quad (1.10)$$

Tento stav systému se nazývá smíšený. Pro popis smíšeného stavu již nestačí zápis stavu ve tvaru (1.9), ale je nutné zavést tzv. operátor hustoty [2]

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \sum_k p_k \hat{\rho}_k, \quad (1.11)$$

kde $\hat{\rho}_k$ je operátor hustoty čistého stavu $|\psi_k\rangle$. Operátor hustoty $\hat{\rho}$ reprezentuje smíšený stav neboli je směsí různých čistých stavů, jestliže alespoň dvě různé pravděpodobnosti p_k jsou nenulové. Pokud platí $p_k = 1$, potom operátor hustoty $\hat{\rho} = \hat{\rho}_k$ popisuje pouze jeden čistý stav. Operátor hustoty $\hat{\rho}$ lze v bázi $\{|u_i\rangle\}$ reprezentovat maticí, která se nazývá matice hustoty a jednotlivé elementy matice hustoty pro čistý stav $\hat{\rho}_k$ jsou dány následující relací

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{k(i,j)} &= \langle u_{k(i)} | \hat{\rho}_k | u_{k(j)} \rangle = \langle u_{k(i)} | \psi_k \rangle \langle \psi_k | u_{k(j)} \rangle \\ &= \sum_{m,n} c_{k(m)} c_{k(n)}^* \langle u_{k(i)} | u_{k(m)} \rangle \langle u_{k(n)} | u_{k(j)} \rangle = c_{k(i)} c_{k(j)}^*. \end{aligned} \quad (1.12)$$

V hermitovské kvantové mechanice obecný operátor hustoty splňuje následující předpoklady [2]:

- operátor hustoty je hermitovský

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger, \quad (1.13)$$

- součet diagonálních elementů matice hustoty je roven jedné

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}\} = 1, \quad (1.14)$$

- operátor hustoty je pozitivní

$$\langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle \geq 1, \text{ pro všechny stavy } |\psi\rangle, \quad (1.15)$$

kde „Tr“ značí stopu matice. Zavedení hermitovských operátorů bude provedeno v následující kapitole.

Dále jsou doplněny dodatečné vlastnosti pro operátor hustoty. Operátor hustoty $\hat{\rho}$, který reprezentuje smíšený stav, má následující vlastnosti:

- není idempotentní

$$\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}, \quad (1.16)$$

- čistota operátoru je menší než jedna

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}^2\} < 1. \quad (1.17)$$

Operátor hustoty čistého stavu $\hat{\rho}_k$ má následující vlastnosti:

- idempotence

$$\hat{\rho}_k^2 = \hat{\rho}_k, \quad (1.18)$$

- čistota operátoru je rovna jedné

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}_k^2\} = 1. \quad (1.19)$$

Kvantový systém popsaný statistickým souborem (1.11) nesmí být zaměňován se systémem, který lze reprezentovat čistým stavem (1.9). Zásadní rozdíly jsou, že báze vektory $|u_i\rangle$ jsou ortonormální, což obecně neplatí pro stavy $|\psi_k\rangle$, a koeficienty c_i jsou obecně komplexní, kdežto pravděpodobnosti p_k jsou pouze reálná čísla. Důsledky těchto rozdílů budou popsány níže.

1.1.2 Operátory v kvantové mechanice

V kvantové mechanice se využívají zobecněné funkce zvané operátory. Operátor lze zapsat ve formě matice, která se aplikuje na vektorovou formu stavu. Operátory lze rozdělit na lineární a nelineární.

Lineární operátor \hat{L} se vyznačuje tím, že komutuje s obecným komplexním číslem k [3]

$$[\hat{L}, k] = \hat{L}k - k\hat{L} = 0. \quad (1.20)$$

Působením operátoru \hat{L} na stav $|\psi\rangle$

$$\hat{L}|\psi\rangle = |\chi\rangle, \quad (1.21)$$

je vytvořen nový obecný stav $|\chi\rangle$. Bra vektor stavu $|\chi\rangle$ je získán jeho hermitovským sdružením

$$|\chi\rangle^\dagger = \langle \chi | = \langle \psi | \hat{L}^\dagger, \quad (1.22)$$

kde \hat{L}^\dagger je hermitovsky sdružený operátor \hat{L} . Vložením operátoru \hat{L} do skalárního součinu lze nalézt identity, pod kterými se výsledek skalárního součinu s operátorem nezmění

$$\begin{aligned} [|\phi\rangle]^\dagger[\hat{L}|\psi\rangle] &= [\hat{L}^\dagger|\phi\rangle]^\dagger|\psi\rangle = [\langle\phi|\hat{L}]|\psi\rangle \\ &= \langle\phi|\hat{L}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{L}^\dagger|\phi\rangle^*. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Závorky $[\hat{L}\cdot]$, $[\cdot\hat{L}]$ znázorňují směr působení operátoru. Dle (1.23) je irelevantní, zdali operátor \hat{L} zapůsobí nejdříve na stav $|\psi\rangle$ a následně se provede skalární součin, nebo operátor \hat{L} zapůsobí na stav $\langle\phi|$ a pak se provede skalární součin. Je nutné si pouze uvědomit, že pokud platí relace (1.21) a (1.22), pak platí relace $\langle\psi|\hat{L} = \langle\xi|$, kde $\langle\xi|$ je nový obecný stav, pro který obecně platí $\langle\xi| \neq \langle\chi|$.

Antilineární operátor \hat{A} nekomutuje s obecným komplexním číslem k [3]

$$\hat{A}k = k^*\hat{A}. \quad (1.24)$$

Operátor \hat{A} lze formálně rozložit na lineární a antilineární část

$$\hat{A} = \hat{L}\hat{K}, \quad (1.25)$$

kde \hat{K} je antilineární část operátoru \hat{A} . Antilineární část \hat{K} musí provádět komplexní sdružení. Působení operátoru \hat{A} na ket vektor a následně získání bra vektoru se provádí identicky jako v případě lineárního operátoru

$$\hat{A}|\psi\rangle = |\zeta\rangle \quad \rightarrow \quad |\zeta\rangle^\dagger = \langle\zeta| = \langle\psi|\hat{A}^\dagger. \quad (1.26)$$

Změna oproti lineárnímu operátoru nastává v případě, když operátor \hat{A} je součástí skalárního součinu

$$\langle\phi|[\hat{A}|\psi\rangle] = [\langle\phi|\hat{A}]|\psi\rangle^* = \langle\psi|[\hat{A}^\dagger|\phi\rangle]. \quad (1.27)$$

Změna směru působení operátoru \hat{A} je doprovázena komplexním sdružením skalárního součinu, protože komplexní sdružení prováděné antilineární částí \hat{K} musí být kompenzováno. Dirakova notace není úplně názorná pro práci s antilineárními operátory. Je taktéž namístě zmínit, že výsledek součinu dvou antilineárních operátorů je operátor lineární a výsledkem součinu lineárního s antilineárním je antilineární operátor [4].

Dále v kvantové mechanice existují alespoň dva velmi důležité druhy operátorů, které se objevují skrz celou kvantovou teorii. Prvním druhem je unitární operátor \hat{U} . Unitární operátor splňuje relaci [1]

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{1}. \quad (1.28)$$

Operátor, který tuto relaci nespĺňuje, se nazývá neunitární. Operátor \hat{U} úzce souvisí se skalárním součinem. Působí-li operátor \hat{U} na obecné stavy $|\psi_1\rangle$ a $|\psi_2\rangle$, vytvoří nové obecné stavy $|\tilde{\psi}_1\rangle$ a $|\tilde{\psi}_2\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{U}|\psi_1\rangle &= |\tilde{\psi}_1\rangle, \\ \hat{U}|\psi_2\rangle &= |\tilde{\psi}_2\rangle, \end{aligned} \quad (1.29)$$

pro které je výsledek skalárního součinu zachován

$$\langle\tilde{\psi}_1|\tilde{\psi}_2\rangle = \langle\psi_1|U^\dagger U|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle, \quad (1.30)$$

Unitární operátor tzv. zachovává skalární součin.

Dalším operátorem je operátor hermitovský \hat{O} , který splňuje vztah [1]

$$[|\psi\rangle]^\dagger[\hat{O}|\phi\rangle] = [\hat{O}|\psi\rangle]^\dagger|\phi\rangle. \quad (1.31)$$

Z této relace vyplývá podmínka pro hermitovský operátor

$$\hat{O} = \hat{O}^\dagger. \quad (1.32)$$

Pokud operátor tuto podmínku nesplňuje, nazývá se nehermitovský. Působení hermitovského operátoru \hat{O} na stav $|\psi\rangle$ je dáno následující relací

$$[\hat{O}|\psi\rangle]^\dagger = \langle\psi|\hat{O}. \quad (1.33)$$

Hermitovskými operátory jsou vyjádřeny měřící procesy u kvantově mechanických jevů, které budou popsány v následující kapitole.

1.1.3 Měření v kvantové mechanice

K pozorování fyzikálního systému, měření, v kvantové mechanice slouží hermitovské operátory. Každé měření fyzikální veličiny \mathcal{O} odpovídá jedné z vlastních hodnot operátoru \hat{O}

$$\hat{O}|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle, \quad (1.34)$$

kde a_n je diskrétní vlastní hodnota operátoru \hat{O} , $|u_n\rangle$ se nazývá vlastní vektor neboli vlastní stav operátoru \hat{O} a diskrétní množina vlastních vektorů $\{|u_n\rangle\}$ tvoří ortonormální bázi v prostoru \mathcal{H} , z čehož plyne, že splňuje relaci uzavřenosti (1.7).

Od každého měření se očekává výsledek v oboru reálných čísel. Podmínkou tedy je, aby a_n bylo reálné. Tato podmínka je okamžitě splněna, pokud \hat{O} je hermitovský (1.32).

Pokud je maticová forma hermitovského operátoru \hat{O} vyjádřena v bázi vlastních stavů $\{|u_n\rangle\}$, potom každé buňce matice $\hat{O}_{m,n}$ je přiřazena hodnota

$$\langle u_m|\hat{O}|u_n\rangle. \quad (1.35)$$

Jelikož množina vektorů $\{|u_n\rangle\}$ tvoří ortonormální bázi, maticová forma hermitovského operátoru \hat{O} bude mít diagonální formu.

Hermitovský operátor \hat{O} lze vyjádřit jako váženou sumu projektorů [2]

$$\hat{O} = \sum_n a_n \hat{P}_n = \sum_n a_n |u_n\rangle\langle u_n|, \quad (1.36)$$

kde operátor \hat{P}_n je projektor, který projektuje do báze $|u_n\rangle\langle u_n|$ operátoru \hat{O} s vlastní hodnotou a_n .

Při působení projekčního operátoru \hat{P}_m na obecný stav rozepsaný do superpozice bázevých vektorů $|o\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle$ dochází k tzv. kolapsu stavu do projektovaného stavu

$$\hat{P}_m|o\rangle = c_m|u_m\rangle. \quad (1.37)$$

Projekcí dochází ke ztrátě informace, protože po jejím provedení se již nelze dozvědět více o superpozici stavu $|o\rangle$, který přešel do stavu $|u_m\rangle$. Superpozice stavu $|o\rangle$ je projekcí nenávratně zničena.

Pravděpodobnost nalezení stavu $|o\rangle$ ve stavu $|u_n\rangle$, a tedy naměření hodnoty a_n , je dána vztahem

$$\mathbf{P}(a_n) = \langle o|\hat{P}_n|o\rangle = \langle o|u_n\rangle\langle u_n|o\rangle = \sum_{i,j} c_i^* c_j \langle u_i|u_n\rangle\langle u_n|u_j\rangle = |c_n|^2. \quad (1.38)$$

Jako amplituda pravděpodobnosti se označuje $\langle u_n|o\rangle = c_n$.

Pro zachování fyzikální interpretace je požadováno, aby platila relace

$$\langle o|o\rangle = \sum_n c_n^* c_n \langle u_n|u_n\rangle = \sum_n |c_n|^2 = \sum_n \mathbf{P}(a_n) = 1. \quad (1.39)$$

Stav $|o\rangle$ může popisovat otevřený kvantový systém, to je systém, který interaguje se svým okolím. Stav $|o\rangle$ potom nemusí splňovat relaci (1.39), a proto se zavádí tzv. normalizace stavu

$$|\bar{o}\rangle = \frac{|o\rangle}{\sqrt{\langle o|o\rangle}}, \quad (1.40)$$

kde $\sqrt{\langle o|o\rangle}$ je norma stavu $|o\rangle$. Pokud stav $|\bar{o}\rangle$ opět nesplňuje relaci (1.39), stav $|o\rangle$ nelze normalizovat. Takový stav nemá fyzikální interpretaci a nepopisuje tedy žádný reálný fyzikální systém.

Transformace stavu v uzavřených kvantových systémech je prováděna právě unitárními operátory. V případě, že stav $|\bar{o}\rangle$ splňuje relaci (1.39), bude ji splňovat i po transformaci obecným unitárním operátorem \hat{U} . Unitární operátor tzv. zachovává normu stavu. To neplatí pro transformaci stavu projekčním operátorem, jelikož měřicí proces nutně interaguje s kvantovým systémem. Tato interakce procesu měření s měřeným systémem je unikátní jev v kvantové mechanice. Výše popsany princip se nazývá projekční nebo von Neumannovo měření [2].

Je-li kvantový stav popsán statistickou směsí čistých stavů $\{p_k, |o_k\rangle\}$, matematický popis měřicího procesu je nutné zobecnit použitím matice hustoty $\hat{\rho}$ z relace (1.11). Pro vyjádření pravděpodobnosti naměření hodnoty a_n maticí hustoty $\hat{\rho}$ jsou dány dva vztahy, které na sebe navazují. První vztah popisuje pravděpodobnost naměření hodnoty a_n , pokud je systém ve stavu $|o_k\rangle$

$$\mathbf{P}_k(a_n) = \langle o_k|\hat{P}_n|o_k\rangle = \text{Tr}\{\hat{P}_n\hat{\rho}_k\} = |c_{k(n)}|^2, \quad (1.41)$$

kde $\hat{\rho}_k = |o_k\rangle\langle o_k|$. Druhý vztah zahrnuje pravděpodobnost p_k a určuje tedy celkovou pravděpodobnost naměření hodnoty a_n ve smíšeném systému

$$\mathbf{P}(a_n) = \sum_k p_k \text{Tr}\{\hat{P}_n\hat{\rho}_k\} = \text{Tr}\left\{\sum_k p_k \hat{P}_n\hat{\rho}_k\right\} = \text{Tr}\{\hat{P}_n\hat{\rho}\}. \quad (1.42)$$

Ve vztahu (1.41) je pravděpodobnost vyjádřena členem $|c_{k(n)}|^2$. Tento člen je diagonálním elementem matice hustoty $\hat{\rho}_k$ (1.12). Mimodiagonální element, $c_{k(m)}c_{k(n)}^*$, matice hustoty $\hat{\rho}_k$ je tzv. interferenční člen a vyjadřuje koherenci systému, což je vzájemná souvislost mezi fází a amplitudou jednotlivých stavů. Pro pravděpodobnost p_k v relaci (1.42) interferenci nelze získat.

1.1.4 Hamiltonián a Schödingerova rovnice

Jeden z postulátů kvantové mechaniky uvádí, že časový vývoj uzavřeného systému je řízen časově závislou Schödingerovou rovnicí [1]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (1.43)$$

kde $\hat{H}(t)$ je časově závislý Hamiltonův operátor, nazýván taktéž hamiltonián, který popisuje celkovou energii systému, $|\psi(t)\rangle$ je čistý stav systému v čase t a \hbar je redukovaná Plankova konstanta ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$, kde h je Planckovou konstanta).

Ve speciálních případech, kdy hamiltonián není časově závislý, $\hat{H}(t) = \hat{H}$, např. hamiltonián kvantového harmonického oscilátoru, se kterým se lze setkat u kvantování elektromagnetického pole, řešení časově závislé Schrödingerovy rovnice lze hledat separací proměnných. Stav $|\psi(t)\rangle$ se rozloží na složky jednotlivých bázových vektorů

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|u_n\rangle, \quad \sum_n |c_n(t)|^2 = 1, \quad (1.44)$$

kde časově závislá je pouze amplituda pravděpodobnosti $c_n(t)$. Řešení časově nezávislé části vyústí v nalezení tzv. časově nezávislé Schrödingerovy rovnice, která je rovnicí pro vlastní čísla hamiltoniánu \hat{H}

$$\hat{H}|u_n\rangle = E_n|u_n\rangle, \quad (1.45)$$

kde E_n je vlastní číslo hamiltoniánu \hat{H} , které odpovídá energii systému ve stavu $|u_n\rangle$. Dosazením řešení časově nezávislé Schrödingerovy rovnice (1.45) do časově závislé Schrödingerovy rovnice (1.43) a následným vyřešením lze získat časový vývoj stavu

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-iE_n t/\hbar} c_n(0)|u_n\rangle. \quad (1.46)$$

Časový vývoj systému je dán změnou komplexní fáze. Obecně se tato transformace nazývá evoluce systému a je dána evolučním operátorem $\hat{U}(t, t_0)$, který transformuje stav systém v čase t_0 do jakéhokoliv budoucího stavu systému v čase t

$$\hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}|\psi(t_0)\rangle = |\psi(t)\rangle. \quad (1.47)$$

Časový vývoj systému je tedy perfektně znám a vývoj systému je deterministický, tedy platí princip kauzality.

Jelikož vlastní čísla hamiltoniánu \hat{H} odpovídají energii systému, očekává se, že tyto vlastní čísla patří do množiny čísel reálných. Tato podmínka je okamžitě splněna, pokud hamiltonián je hermitovský (1.32). Podmínka hermiticity hamiltoniánu taktéž zajistí, že evoluční operátor je unitární (1.28)

$$\hat{U}(t, t_0)^\dagger \hat{U}(t, t_0) = e^{i\hat{H}^\dagger(t-t_0/\hbar)} e^{-i\hat{H}(t-t_0/\hbar)} = \mathbb{1}, \quad (1.48)$$

tedy evoluce uzavřeného kvantového systému je dána unitárním operátorem. O takovém systému se říká, že jeho časový vývoj je unitární. Při unitární evoluci systému nedochází ke ztrátě informace o stavu, a tedy pravděpodobnosti v tomto systému jsou zachovány.

1.2 \mathcal{PT} -symetrie a nehermitovská kvantová mechanika

V roce 1998 Bender a Boettcher zveřejnili klíčovou práci, ve které popisují novou symetrii pro kvantověmechanický Hamiltonův operátor, jehož vlastní čísla jsou reálná, ale nespĺňuje podmínku hermiticity [5]. Tuto symetrii nazvali \mathcal{PT} -symetrie, anglicky

parity-time symmetry. Nalezením této nové symetrie poukazují na skutečnost, že hermiticity je podmínkou dostačující, nikoliv nutnou pro reálnost vlastních čísel hamiltoniánu. Motivací pro porozumění \mathcal{PT} -symetrické teorie je získání nového nástroje pro řešení otevřených systémů.

Na otevřený systém lze nahlížet jako na vybraný subsystém z mnoha systémů, které jsou vzájemně spřáhány. Protože řešený subsystém je propojen s velkým množstvím systémů, které se jednotlivě nazývají rezervoár, dochází k přesunu energie mezi subsystémem a rezervoárem, tedy v subsystém dochází ke ztrátám nebo k zisku. Tato nerovnováha je vyjádřena disipačním členem, který obecně způsobí neunitární evoluci systému. Při řešení dynamiky otevřených systémů je nutné se uchýlit k aproximacím, např. podmínka slabé interakce mezi subsystémem a rezervoárem nebo požadavek, aby evoluce stavu subsystému závisela pouze na současném stavu, nikoliv na minulosti. Je tedy vytvořena řada požadavků pro subsystém a rezervoár, které omezují přesnost modelů. Z tohoto důvodu se hledají nové cesty, které by minimalizovali počet těchto požadavků. Zde přichází výše zmíněná \mathcal{PT} -symetrie.

Název *parity-time symmetry* vystihuje dva fyzikální procesy. Operace *parity* provede zrcadlení. Souřadnicím každého bodu systému bude zaměněno znaménko. Další operace je *time*, která souvisí s časem systém, a to konkrétně tak, že „obrací“ směr toku času. \mathcal{PT} -symetrický systém si lze představit jako dva zrcadlově promítnuté subsystémy, kdy v jednom dochází k zisku a v druhém ke ztrátám. Tyto dva subsystémy jsou propojeny určitou „silou“, která definuje oblast, ve kterém se nachází \mathcal{PT} -symetrický systém. Tato oblast může být porušená, neporušená nebo kritický bod.

V případě, že v řešeném subsystému dochází ke ztrátám, tak dle \mathcal{PT} -symetrického modelu je požadavkem pouze kopie řešeného subsystému, ve které dochází k zisku a následné propojení obou subsystémů pro dosažení rovnováhy. Je tedy irelevantní, jestli v systému dochází ke ztrátám nebo k zisku, jelikož popis bude obdobný. Z této intuitivní předlohy \mathcal{PT} -symetrické teorie se lze domnívat, že tato teorie je vhodným nástrojem pro popis otevřených systémů.

V následující sekci bude zavedena matematická terminologie pro \mathcal{PT} -symetrii a popsány její základní vlastnosti. Dále bude popsána nehermitovská teorie, a to konkrétně pseudo-hermiticity a quasi-hermiticity a jejich spojitost s \mathcal{PT} -symetrií. Bude taktéž uveden vzorový příklad pro \mathcal{PT} -symetrickou, pseudo-hermitovskou a quasi-hermitovskou teorii.

1.2.1 Operátory $\hat{\mathcal{P}}$ a $\hat{\mathcal{T}}$

Operátor parity $\hat{\mathcal{P}}$ invertuje prostorové souřadnice. Aplikací operátoru $\hat{\mathcal{P}}$ se změni znaménka u prostorových veličin: u operátoru polohy $\hat{\mathcal{P}}\hat{x}\hat{\mathcal{P}}^{-1} = -\hat{x}$ a u operátoru hybnosti $\hat{\mathcal{P}}\hat{p}\hat{\mathcal{P}}^{-1} = -\hat{p}$. Operátor $\hat{\mathcal{P}}$ je lineární operátor.

Operátor $\hat{\mathcal{T}}$ „převrací“ tok času. Aplikací operátoru $\hat{\mathcal{T}}$ na operátory prostorových veličin provádí transformaci: u operátoru polohy $\hat{\mathcal{T}}\hat{x}\hat{\mathcal{T}}^{-1} = \hat{x}$, u operátoru hybnosti $\hat{\mathcal{T}}\hat{p}\hat{\mathcal{T}}^{-1} = -\hat{p}$. Operátor $\hat{\mathcal{T}}$ dodečně provádí komplexní sdružení $\hat{\mathcal{T}}i\hat{\mathcal{T}}^{-1} = -i$. Změnu znaménka u imaginární části lze taktéž chápat jako převrácení směru vývoje systému, který je dán evolučním operátorem (1.47). Jelikož operátor $\hat{\mathcal{T}}$ provádí komplexní sdružení, jedná se o operátor antilineární. Bender a jeho kolegové ve většině pracích [5], [6], [7], [8] zvolili operátor $\hat{\mathcal{T}}$ jako jednoduché komplexní sdružení „*“.

Tyto operátory v \mathcal{PT} -symetrii musí splnit následující podmínky:

- operátory komutují

$$\left[\hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{T}} \right] = 0 \Rightarrow \hat{\mathcal{P}} \text{ je reálný,} \quad (1.49)$$

- operátory jsou involuční neboli sami sobě inverzní

$$\hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{P}}^{-1}, \hat{\mathcal{T}} = \hat{\mathcal{T}}^{-1} \Rightarrow (\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}})^2 = \mathbb{1}, \quad (1.50)$$

- operátor $\hat{\mathcal{P}}$ je invariantní vůči operaci transpozice

$$\hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{P}}^T, \quad (1.51)$$

- vlastní čísla součinu operátorů $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$ mají formu $e^{i\tau}$, kde τ je reálné číslo.

Tato definice operátorů umožňuje zachovat kanonickou komutační relaci $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ [5]. Invariance operátoru $\hat{\mathcal{P}}$ pod operací transpozice bude odůvodněna v následující kapitole. Důkaz pro vlastní čísla součinu operátorů $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$ je následující

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\psi &= \lambda|\psi\rangle, \\ (\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}})^2\psi &= \lambda^*\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}|\psi\rangle, \\ (\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}})^2\psi &= |\lambda|^2|\psi\rangle, \\ (\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}})^2\psi &= \mathbb{1}|\psi\rangle \Rightarrow \lambda = e^{i\tau}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

kde byla využita vlastnost antilineárního operátoru (1.24) a definovaných vlastností pro operátory $\hat{\mathcal{P}}$ a $\hat{\mathcal{T}}$. Vlastní čísla reálného involučního operátoru $\hat{\mathcal{P}}$ jsou rovny ± 1 [9]. Komplexní fáze, která je vlastním číslem součinu operátorů $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$, musí proto vycházet z operátoru $\hat{\mathcal{T}}$.

Podmínku involuce pro operátor $\hat{\mathcal{T}}$ lze zobecnit, a to na $\hat{\mathcal{T}}^2 = \pm \mathbb{1}$. Operátor $\hat{\mathcal{T}}$ se nazývá sudý, platí-li $\hat{\mathcal{T}}^2 = \mathbb{1}$, nebo lichý, pokud $\hat{\mathcal{T}}^2 = -\mathbb{1}$. Znaménko souvisí se systémem, ve kterém operátor $\hat{\mathcal{T}}$ působí. Pokud operátor $\hat{\mathcal{T}}$ působí v bosonovém systému, takový systém obsahuje částice s celočíselným spinem, operátor $\hat{\mathcal{T}}$ je sudý, pokud působí ve fermionovém systému, systém obsahující částice s poločíselným spinem, operátor $\hat{\mathcal{T}}$ je lichý [10]. Bender a jeho kolegové použili v definici \mathcal{PT} -symetrie pouze sudý operátor, $\hat{\mathcal{T}}^2 = \mathbb{1}$. V této práci se bude pracovat pouze se sudým operátorem $\hat{\mathcal{T}}$. Zobecnění \mathcal{PT} -symetrie s lichým operátorem $\hat{\mathcal{T}}$ lze nalézt v [10].

Bender definoval \mathcal{PT} -symetrický hamiltonián \hat{H}_{pt} jako operátor, který je invariantní vůči součinu operátorů $\hat{\mathcal{P}}$ a $\hat{\mathcal{T}}$ [11], tedy

$$\begin{aligned} \hat{H}_{pt}^{\mathcal{PT}} &= \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\hat{H}_{pt}\left(\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\right)^{-1} = \hat{H}_{pt}, \\ \hat{H}_{pt}^{\mathcal{PT}} &= \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\hat{H}_{pt}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}} = \hat{H}_{pt}, \end{aligned} \quad (1.53)$$

kde „ \mathcal{PT} “ značí \mathcal{PT} sdružení. Hamiltonián \hat{H}_{pt} ovšem nekomutuje s operátory $\hat{\mathcal{P}}$ a $\hat{\mathcal{T}}$ zvlášť

$$\left[\hat{H}_{pt}, \hat{\mathcal{P}} \right] \neq 0, \quad \left[\hat{H}_{pt}, \hat{\mathcal{T}} \right] \neq 0, \quad (1.54)$$

ale pouze jako celek

$$\left[\hat{H}_{pt}, \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}} \right] = 0. \quad (1.55)$$

Je známo, že pokud dva lineární operátory komutují, mají společné vlastní stavy. Jelikož hamiltonián \hat{H}_{pt} komutuje se součinem lineárního a antilineárního operátoru $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$, který se jako celek chová jako antilineární operátor, souvislost mezi komutujícími operátory a jejich vlastními stavy již není tak přímá. Může nastat situace, že i když tyto operátory komutují, nemají společné vlastní stavy [12].

Nyní za předpokladu, že stav $|\psi\rangle$ je vlastním stavem operátorů \hat{H}_{pt} a $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$ lze napsat rovnice pro vlastní hodnoty těchto operátorů

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}|\psi\rangle &= e^{i\tau}|\psi\rangle, \\ \hat{H}_{pt}|\psi\rangle &= E_{pt}|\psi\rangle,\end{aligned}\tag{1.56}$$

kde E_{pt} je vlastní číslo hamiltoniánu H_{pt} . Znalost komutační relace (1.55) dovoluje napsat

$$\hat{H}_{pt}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}|\psi\rangle = \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\hat{H}_{pt}|\psi\rangle.\tag{1.57}$$

Nyní lze využít rovnice pro vlastní hodnoty operátorů (1.56) a následně antilinearity operátoru $\hat{\mathcal{T}}$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{pt}e^{i\tau}|\psi\rangle &= \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}E_{pt}|\psi\rangle, \\ e^{i\tau}\hat{H}_{pt}|\psi\rangle &= E_{pt}^*\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}|\psi\rangle, \\ e^{i\tau}E_{pt}|\psi\rangle &= E_{pt}^*e^{i\tau}|\psi\rangle.\end{aligned}\tag{1.58}$$

Z poslední relace plyne

$$E_{pt} = E_{pt}^* \Rightarrow E_{pt} \text{ je reálné.}\tag{1.59}$$

Protože ale může nastat situace, že stav $|\psi\rangle$ nebude vlastním stavem součinu operátorů $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$, tedy $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}|\psi\rangle \neq e^{i\tau}|\psi\rangle$, ale bude pouze vlastním stavem hamiltoniánu \hat{H}_{pt} , komutační relace (1.55) není dostatečnou podmínkou, aby vlastní čísla hamiltoniánu \hat{H}_{pt} byla reálná. \mathcal{PT} -symetrie je přesto dostatečně silnou podmínkou, jelikož charakteristický polynom pro hamiltonián \hat{H}_{pt} reálný je [13]

$$\begin{aligned}\det(\hat{H}_{pt} - E_{pt}\mathbb{1}) &= 0, \\ \det(\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\hat{H}_{pt}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}} - E_{pt}\mathbb{1}) &= 0, \\ \det(\hat{\mathcal{T}}\hat{H}_{pt}\hat{\mathcal{T}} - E_{pt}\mathbb{1}) &= 0, \\ \det(\hat{H}_{pt}^* - E_{pt}\mathbb{1}) &= 0,\end{aligned}\tag{1.60}$$

kde „det“ značí determinant. V charakteristickém polynomu (1.60) bylo využito vlastnosti determinantu

$$\det(\hat{X}\hat{Y}) = \det(\hat{Y}\hat{X}), \quad [\hat{X}, \hat{Y}] \neq 0,\tag{1.61}$$

kde \hat{X} a \hat{Y} jsou obecné operátory. Hamiltoniány \hat{H}_{pt} a \hat{H}_{pt}^* mají stejná vlastní čísla. Tato vlastní čísla mohou být reálná nebo tvořit komplexně sdružené páry [14].

Pro nahlédnutí do výsledku (1.60) lze využít příklad matice \hat{X} a její komplexně sdružené formy \hat{X}^*

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} i & x \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad \hat{X}^* = \begin{pmatrix} -i & x^* \\ 1 & i \end{pmatrix},\tag{1.62}$$

kde parametr x je obecně komplexní číslo. Vlastní čísla těchto matic jsou

$$\lambda_{X\pm} = \pm\sqrt{x-1}, \quad \lambda_{X^*\pm} = \pm\sqrt{x^*-1}, \quad (1.63)$$

kde $\lambda_{X\pm}$ a $\lambda_{X^*\pm}$ jsou vlastní čísla pro matice \hat{X} a \hat{X}^* . Vlastní čísla $\lambda_{X\pm}$ a $\lambda_{X^*\pm}$ jsou si rovny pouze v případě, pokud parametr x reálný. Dále pokud platí $x \geq 1$, vlastní čísla jsou pouze reálná, jinak tvoří komplexně sdružené páry.

Pokud vlastní čísla hamiltoniánu \hat{H}_{pt} jsou reálná, jeho vlastní stavy jsou taktéž vlastními stavy součinu operátorů $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$. \mathcal{PT} -symetrický kvantový systém se nachází v oblasti tzv. neporušené \mathcal{PT} -symetrie. Pokud vlastní čísla hamiltoniánu \hat{H}_{pt} tvoří komplexně sdružené páry, jeho vlastní stavy nejsou vlastními stavy součinu operátorů $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$. \mathcal{PT} -symetrický systém se potom nachází v oblasti porušené \mathcal{PT} -symetrie. Oblast mezi těmito dvěma stavy se nazývá kritický bod [14].

1.2.2 Skalární součin a časový vývoj v \mathcal{PT} -symetrii

Jak již bylo zmíněno, vývoj uzavřeného systému lze získat řešením časové Schrödingery rovnice (1.43). Pro časově nezávislý hermitovský hamiltonián \hat{H} je získán unitární evoluční operátor $\hat{U}(t, t_0)$ ve tvaru (1.47).

Hamiltonián \hat{H}_{pt} v \mathcal{PT} -symetrii obecně nesplňuje podmínku hermiticity (1.32), ale jeho symetrie je dána vztahem (1.53). Jelikož hamiltonián je úzce spjat s evolučním operátorem, nehermitičita hamiltoniánu způsobí, že časový vývoj systému přestane být unitární. I když není splněna podmínka unitarity (1.28), lze provést úpravy, kterými se zajistí, aby se systém vyvíjel unitárně. V případě \mathcal{PT} -symetrie počátek této úpravy spočívá v přepisu hermitovského skalárního součinu (1.2) na \mathcal{PT} -symetrický [11]

$$[|\phi\rangle]^{\mathcal{PT}} |\psi\rangle = [\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}|\phi\rangle]^T |\psi\rangle = (\phi|\psi), \quad (1.64)$$

kde $|\cdot\rangle$ a $(\cdot|$ je nově definovaná notace pro ket a bra vektor. Normalizace stavu v \mathcal{PT} -symetrii má stejnou formu jako v hermitovské hermitovské mechanice

$$|\bar{\psi}\rangle = \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{(\psi|\psi)}}, \quad (1.65)$$

kde $|\bar{\psi}\rangle$ je normalizovaný stav $|\psi\rangle$.

V porovnání s hermitovským skalárním součinem (1.2) lze říci, že bylo explicitně vyjádřeno komplexní sdružení stavového vektoru bra ve formě operátoru $\hat{\mathcal{T}}$ a dále byl přidán operátor $\hat{\mathcal{P}}$, aby byla zachována komutační relace (1.55). Fáze součinu operátorů $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$, $e^{i\tau}$, není uvedena, protože se jedná o globální fázi a správnou volbou stavu, na který součin operátorů $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$ působí, ji lze zvolit jednotkovou.

Jelikož vlastní čísla součinu operátorů $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$ mohou nabývat záporných čísel, \mathcal{PT} skalární součin může být negativní. Negativní skalární součin patří do třídy indefinitních skalárních součinů [11]. Tato vlastnost je v přímém rozporu s podmínkou pozitivní definitivity pro skalární součin, viz kapitola 1.1.1. Problém negativního skalárního součinu lze ihned upozorovat při snaze splnit podmínku zachování celkové pravděpodobnosti (1.39). Negativní skalární součin musí být z důvodu fyzikální interpretace odmítnut. Z tohoto důvodu se k operátorům $\hat{\mathcal{P}}$ a $\hat{\mathcal{T}}$ připojuje další operátor, zvaný $\hat{\mathcal{C}}$, který negativní skalární součin vrací zpět na pozitivní a tím navrácí fyzikální interpretaci skalárnímu součinu [11].

Operátor $\hat{\mathcal{C}}$ lze vyjádřit jako sumu projektorů vlastních stavů $|v_i\rangle$ hamiltoniánu \hat{H}_{pt} [11]

$$\hat{\mathcal{C}} = \sum_i |v_i\rangle\langle v_i|. \quad (1.66)$$

Operátory $\hat{\mathcal{C}}$ a $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$ mají stejná vlastní čísla, jelikož stav $(v_i|$ je vytvořen právě působením součinem operátorů $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$ na $|v_i\rangle$. Je-li vlastní číslo součinu operátorů $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$ záporné, bude záporné i vlastní číslo operátoru $\hat{\mathcal{C}}$. \mathcal{PT} skalární součin přechází na obecnější tzv. \mathcal{CPT} skalární součin

$$[|\phi\rangle]^{\mathcal{CPT}}|\psi\rangle = [\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}|\phi\rangle]^T|\psi\rangle = (\phi|\psi), \quad (1.67)$$

kde „ \mathcal{CPT} “ značí \mathcal{CPT} sdružení. Takto definovaný skalární součin bude již pozitivně definitní. Pro operátor $\hat{\mathcal{C}}$ se předpokládá splnění následujících podmínek [11]:

- komutační relace

$$[\hat{\mathcal{C}}, \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}] = 0, \quad [\hat{\mathcal{C}}, \hat{H}_{pt}] = 0, \quad (1.68)$$

- obecně platí

$$\hat{\mathcal{C}} \neq \hat{\mathcal{P}}, \quad [\hat{\mathcal{C}}, \hat{\mathcal{P}}] \neq 0, \quad (1.69)$$

- operátor $\hat{\mathcal{C}}$ je obecně komplexní

$$[\hat{\mathcal{C}}, \hat{\mathcal{T}}] \neq 0, \quad (1.70)$$

- ekvivalence

$$\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{C}}^*, \quad (1.71)$$

- involuce

$$\hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{C}}^{-1}. \quad (1.72)$$

Následně dochází k rozšíření podmínky pro \mathcal{PT} -symetrický hamiltonián z relace (1.53) na

$$\begin{aligned} \hat{H}_{cpt}^{\mathcal{CPT}} &= \hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\hat{H}_{cpt} \left(\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\right)^{-1} = \hat{H}_{cpt}, \\ \hat{H}_{cpt}^{\mathcal{CPT}} &= \hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\hat{H}_{cpt}\hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{C}} = \hat{H}_{cpt}, \end{aligned} \quad (1.73)$$

kde \hat{H}_{cpt} je \mathcal{CPT} -symetrický hamiltonián. Výpočet operátoru $\hat{\mathcal{C}}$ v prostorových souřadnicích pro konkrétní druhy hamiltoniánů byl proveden např. poruchovou metodou [15], [16].

V [11] a [17] je uvedeno, že tato modifikace skalárního součinu a zavedení \mathcal{CPT} -symetrického hamiltoniánu může být komplexním rozšířením, nikoliv zobecněním hermitovské kvantové mechaniky. Je taktéž rozšířen název *parity-time symmetry* na *charge-parity-time symmetry* [17]. Název *charge* vychází z názvu pro operátor v částicové fyzice, který v matematické teorii zaměňuje částici za antičástici. Tento operátor je zde spojován i s operátory převrácení času a paritou, které jsou taktéž součástí \mathcal{PT} -symetrie. Propojení mezi operátorem $\hat{\mathcal{C}}$ v \mathcal{CPT} -symetrické kvantové mechanice a

stejnomeným operátorem v částicové fyzice není ovšem ještě zcela jasné [17] a na toto téma byly vzneseny námitky [18].

Působení \mathcal{CPT} -symetrického hamiltoniánu na stav v \mathcal{CPT} -symetrii, $\hat{H}_{cpt}|\psi\rangle$, probíhá identicky jako v hermitovské mechanice. Zajímavé je se ovšem podívat na \mathcal{CPT} sdruženou formu této relace

$$[\hat{H}_{cpt}|\psi\rangle]^{\mathcal{CPT}}. \quad (1.74)$$

V příkladu pro hermitovskou mechaniku je hermitovské sdružení identické pro stav i operátor, resp. hamiltonián, tedy je provedena operace komplexní sdružení a transpozice v obou případech, kdežto definice \mathcal{CPT} -symetrického hamiltoniánu (1.73) a \mathcal{CPT} sdružení stavu (1.67) se liší. \mathcal{CPT} sdružení stavu je definováno s dodatečnou operací transpozice. Intuitivně, operace transpozice slouží pro správné násobení operátorů v maticové formě a stavů ve vektorové. Pro transpozici dvou operátorů v maticové formě platí relace $(\hat{X}\hat{Y})^T = \hat{Y}^T\hat{X}^T$. Z tohoto důvodu bude provedeno \mathcal{CPT} sdružení stavu a hamiltoniánu dle definice pro stav (1.67), tedy s operací transpozice

$$[\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}|\psi\rangle]^{\mathcal{CPT}} \hat{H}_{cpt}^{\mathcal{CPT}} = (\psi|\hat{H}_{cpt}^T. \quad (1.75)$$

Zde si lze všimnout jisté neekvivalence s hermitovskou kvantovou mechanikou. V případě hermitovské mechaniky je hermitovský operátor invariantní vůči hermitovskému sdružení, kdežto v \mathcal{CPT} -symetrii, bude-li \mathcal{CPT} -symetrický hamiltonián \mathcal{CPT} sdružen dle relace (1.67), potom z výše definovaných podmínek platí $\hat{H}_{cpt}^{\mathcal{CPT}} = \hat{H}_{cpt}^T \neq \hat{H}_{cpt}$. Toto je důsledek definice \mathcal{CPT} -symetrického hamiltoniánu dle relace (1.53), protože tato definice neobsahuje operaci transpozice. I když \mathcal{CPT} -symetrická, resp. \mathcal{PT} -symetrická teorie by neměla být slučována s hermitovskou, je zde určité podezření, že v definici \mathcal{CPT} -symetrického hamiltoniánu (1.73) chybí právě tato operace transpozice. Toto pořízení je správné a např. v [19] Bender uvádí, že pokud by \mathcal{CPT} -symetrický hamiltonián nebyl invariantní pod operací transpozice, jeho normalizované vlastní stavy nebudou ortonormální. Dále je symetrie pod operací transpozice obecného \mathcal{CPT} -symetrického operátoru požadována ve vývoji \mathcal{PT} -symetrické operátoru v Heisenbergově obraze [18], který bude následně krátce zmíněn.

Časový vývoj systému v hermitovské mechanice byl doposud převážně umístěn v jeho stavech $|\psi(t)\rangle$. Tomuto zápisu se říká Schrödingerův obraz, kdy časový vývoj systému řeší časově závislá Schrödingerova rovnice. Časový vývoj systému lze ale přesunout ze stavu do operátoru \hat{O} , kterým slouží pro měření fyzikální veličiny \mathcal{O} . Stav je následně konstantní v čase, $|\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi\rangle$, a časovou závislost získává operátor, $\hat{O} \rightarrow \hat{O}(t)$. Tomuto zápisu se říká Heisenbergův obraz. Schrödingerův a Heisenbergův obraz jsou fyzikálně ekvivalentní, liší se pouze Hilbertův prostor, ve kterém se tyto systémy popisují. Vývoj systému v Heisenbergově obraze se řídí Heisenbergovou rovnicí

$$\frac{d}{dt}\hat{O}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{O}(t), \hat{H}], \quad (1.76)$$

jejímž řešením je

$$\hat{O}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{O}(0)e^{-i\hat{H}t/\hbar}. \quad (1.77)$$

V hermitovské mechanice je operátoru \hat{O} hermitovský (1.32). Vzhledem k řešení (1.77), podmínka hermiticity je zachována pro čas $t > 0$. V případě \mathcal{CPT} -symetrie je obecný operátor \hat{O}_{cpt} \mathcal{CPT} -symetrický a ekvivalentní podmínka je vystižena vztahem

$$[\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\hat{O}_{cpt}\hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{C}}]^T = \hat{O}_{cpt}. \quad (1.78)$$

Je-li tato podmínka dodržena pro čas $t = 0$, potom je dodržena i pro všechny následující časy $t > 0$. Tuto podmínku musí splňovat i \mathcal{CPT} -symetrický hamiltonián, jelikož i hamiltonián je operátor, který slouží pro pozorování fyzikální veličiny, kterou je celková energie systému [18], [19], [12].

Je nutné tedy rozšířit podmínku invariance \mathcal{CPT} -symetrického hamiltoniánu z relace (1.73) na

$$\begin{aligned}\hat{H}_{cpt}^{\mathcal{CPT}} &= [\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\hat{H}_{cpt}(\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}})^{-1}]^T = \hat{H}_{cpt}, \\ \hat{H}_{cpt}^{\mathcal{CPT}} &= [\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\hat{H}_{cpt}\hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{C}}]^T = \hat{H}_{cpt}, \\ \hat{H}_{cpt}^{\mathcal{CPT}} &= \hat{\mathcal{C}}^T\hat{\mathcal{P}}^T\hat{\mathcal{T}}^T\hat{H}_{cpt}^T\hat{\mathcal{T}}^T\hat{\mathcal{P}}^T\hat{\mathcal{C}}^T = \hat{H}_{cpt}, \\ \hat{H}_{cpt}^{\mathcal{CPT}} &= \hat{H}_{cpt}^T = \hat{H}_{cpt}.\end{aligned}\tag{1.79}$$

Hamiltonián v \mathcal{CPT} -symetrii se tak stává invariantní pod operací transpozice. S dodatečným doplněním operace transpozice do definice \mathcal{CPT} -symetrického hamiltoniánu, se musí rozšířit i podmínky kladené na $\hat{\mathcal{P}}$, $\hat{\mathcal{T}}$ a $\hat{\mathcal{C}}$, které jsou sepsány kapitolách 1.2.1 a 1.2.2. Tyto operátory musí pod operací transpozice $\hat{\mathcal{P}}^T$, $\hat{\mathcal{T}}^T$ a $\hat{\mathcal{C}}^T$ opět komutovat s hamiltoniánem H_{cpt} . Tato podmínka je automaticky splněna, pokud:

- operátory $\hat{\mathcal{P}}$, $\hat{\mathcal{T}}$ a $\hat{\mathcal{C}}$ jsou invariantní pod operací transpozice

$$\hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{P}}^T, \hat{\mathcal{T}} = \hat{\mathcal{T}}^T, \hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{C}}^T.\tag{1.80}$$

Dále v referenci [6] je upozorněno, že pokud by operátor nesplňoval podmínku $\hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{P}}^T$, potom by operátor $\hat{\mathcal{C}}$ taktéž nebyl invariantní pod operací transpozice, a to by způsobilo, že operátor $\hat{\mathcal{C}}$ by nekomutoval s hamiltoniánem \hat{H}_{cpt} , pro který platí $\hat{H}_{cpt} = \hat{H}_{cpt}^T$. Z tohoto důvodu taktéž nemá smysl zobecnit operátor $\hat{\mathcal{T}}$, provádějící komplexní sdružení, na operaci hermitovského sdružení, jelikož všechny význačné operátory v \mathcal{PT} -symetrii jsou invariantní vůči operaci transpozice [6]. S využitím těchto dodatečných podmínek již platí relace

$$[\hat{H}_{cpt}|\psi]^{\mathcal{CPT}} = (\psi|\hat{H}_{cpt}.\tag{1.81}$$

Do podmínky invariance \mathcal{PT} (1.53), resp. \mathcal{CPT} -symetrického hamiltoniánu (1.73) není zvykem vkládat operaci transpozice. Jelikož invariance pod operací transpozice je nucena na \mathcal{CPT} -symetrický hamiltonián z výše uvedených důvodů, je zde tato operace vložena do podmínky pro \mathcal{CPT} -symetrický hamiltonián (1.79).

Ze vztahu (1.67) lze usoudit, že operátory $\hat{\mathcal{P}}$, $\hat{\mathcal{T}}$ a $\hat{\mathcal{C}}$ není nutné aplikovat na stav jako jeden balík, ale lze je aplikovat rozděleně. Identity pro \mathcal{CPT} skalární součin jsou

$$\begin{aligned}[[\phi]]^{\mathcal{CPT}}|\psi) &= [\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}|\phi])^T|\psi) \\ &= [\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}|\phi])^T[\hat{\mathcal{C}}|\psi)] = [\hat{\mathcal{T}}|\phi])^T[\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{C}}|\psi)] \\ &= \{[[\phi]]^T[\hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{C}}|\psi)]\}^* = \{[[\phi]]^T[\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{P}}|\psi)]\}^*,\end{aligned}\tag{1.82}$$

kde bylo využito stanovených podmínek pro $\hat{\mathcal{P}}$, $\hat{\mathcal{T}}$, $\hat{\mathcal{C}}$ a vlastností antilineárního operátoru ve skalárním součinu (1.27). Doplněním skalárního součinu o \mathcal{CPT} -symetrický hamiltonián \hat{H}_{cpt} lze získat následující identity

$$\begin{aligned}[\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}|\psi])^T[\hat{H}_{cpt}|\psi)] &= [\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}|\psi])^T[\hat{\mathcal{C}}\hat{H}_{cpt}|\psi)] \\ &= [\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}|\psi])^T[\hat{H}_{cpt}\hat{\mathcal{C}}|\psi)] = \{[\hat{\mathcal{P}}|\psi])^T[\hat{\mathcal{T}}\hat{H}_{cpt}\hat{\mathcal{C}}|\psi)]\}^* \\ &= \{[\hat{\mathcal{P}}|\psi])^T[\hat{H}_{cpt}^*\hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{C}}|\psi)]\}^* = \{[[\psi]]^T[\hat{H}_{cpt}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{C}}|\psi)]\}^*.\end{aligned}\tag{1.83}$$

Závěrem této kapitoly bude proveden důkaz, že \mathcal{CPT} -symetrický hamiltonián \hat{H}_{cpt} je opět generátor unitární evoluce systému. V \mathcal{CPT} -symetrii je časový vývoj opět dán evolučním operátorem $\hat{U}_{cpt}(t) = e^{-i\hat{H}_{cpt}t/\hbar}$. \mathcal{CPT} sdružením unitárního operátoru \hat{U}_{cpt} lze získat následující ekvivalence

$$\begin{aligned}\hat{U}_{cpt}(t)^{\mathcal{CPT}} &= [\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\hat{U}_{cpt}\hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{C}}]^T \\ &= \hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}e^{-i\hat{H}_{cpt}t/\hbar}\hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{C}} \\ &= \hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}e^{i\hat{H}_{cpt}^*t/\hbar}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{C}} \\ &= e^{i\hat{H}_{cpt}t/\hbar} = \hat{U}_{cpt}(t)^{-1},\end{aligned}\tag{1.84}$$

kde $\hat{U}_{cpt}(t)^{-1}$ je inverzní forma operátor $\hat{U}_{cpt}(t)$. Působením operátoru $\hat{U}_{cpt}(t)$ na stav $|\psi(0)\rangle$, $\hat{U}_{cpt}(t)|\psi(0)\rangle$, je získán stav $|\psi(t)\rangle$ a následným provedením \mathcal{CPT} -symetrického skalárního součinu

$$\begin{aligned}(\psi(t)|\psi(t)) &= (\psi(0)|\hat{U}(t)^{\mathcal{CPT}}\hat{U}(t)|\psi(0)) \\ &= (\psi(0)|e^{i\hat{H}_{cpt}t/\hbar}e^{-i\hat{H}_{cpt}t/\hbar}|\psi(0)) = (\psi(0)|\psi(0)),\end{aligned}\tag{1.85}$$

lze ověřit, že skalární součin je v čase zachován.

1.2.3 Nehermitovská kvantová mechanika

\mathcal{PT} -symetrie se vyznačuje možností indefinitního skalárního součinu a nehermiticity hamiltoniánu, kdy hermiticita je nahrazena invariancí pod operátory $\hat{\mathcal{P}}$, $\hat{\mathcal{T}}$ a popř. $\hat{\mathcal{C}}$. Studium nehermitovských hamiltoniánů a indefinitních skalárních součinů bylo provedeno již v předchozích letech [18], [20]. Objev \mathcal{PT} -symetrie inicioval ve vědecké společnosti velký zájem o tyto matematické objekty.

Po uvedení \mathcal{PT} -symetrické teorie byla rychle nalezena podobnost s již známou třídou nehermitovských hamiltoniánů, které se nazývají pseudo-hermitovské a jejich podtřída quasi-hermitovské [21], [22]. Tyto nehermitovské hamiltoniány se vyznačují shodnými vlastnostmi s \mathcal{PT} -symetrickými, jejich zavedení je ovšem odlišné. V následujícím textu bude zaveden pojem pseudo a quasi-hermiticita a bude vystižena podobnost mezi těmito teoriemi s \mathcal{PT} -symetrií.

Předpokládá se, že hamiltonián \hat{H}_V nesplňuje podmínku hermiticity (1.32), evoluční operátor \hat{U}_V , který je indukován hamiltoniánem \hat{H}_V je tedy neunitární a z toho plyne, že hermitovský skalární součin (1.2) nebude invariantní vůči evoluci generované hamiltoniánem \hat{H}_V . Unitární evoluce systému lze dosáhnout ale i v případě zdánlivě neunitárního evolučního operátoru. Novou podmínku pro unitární operátor lze zapsat ve tvaru

$$\hat{U}_V^\dagger(t) = \hat{V}\hat{U}_V^{-1}(t)\hat{V}^{-1},\tag{1.86}$$

kde operátor \hat{V} slouží jako pomocná transformace, která zajistí podmínku unitarity [23]. Nyní stačí pouze do relace (1.86) dosadit za operátor \hat{U}_V^{-1} inverzní exponenciální tvar unitárního operátoru z relace (1.47) s hamiltoniánem \hat{H}_V a tím získat vztah mezi operátory \hat{H}_V a \hat{V}

$$\hat{U}_V^\dagger(t) = \hat{V}e^{i\hat{H}_V t/\hbar}\hat{V}^{-1} = e^{i\hat{V}\hat{H}_V\hat{V}^{-1}t/\hbar} = e^{i\hat{H}_V^\dagger t/\hbar}.\tag{1.87}$$

Vsunutí operátorů \hat{V} a \hat{V}^{-1} do operátorové funkce $e^{i\hat{H}_V t/\hbar}$ bylo možné provést, jelikož k operátoru \hat{V} existuje inverzní tvar, což je předpoklad z relace (1.86). Zde je již zřejmé,

že hamiltonián \hat{H}_V nemusí být hermitovský ve smyslu (1.32), a přesto může generovat časový vývoj systému. Pokud operátor \hat{V} degraduje na jednotkový operátor, $\hat{V} = \mathbb{1}$, nebo komutuje s nehermitovským hamiltoniánem, $[\hat{H}_V, \hat{V}] = 0$, evoluční operátor \hat{U}_V se stává opět unitárním ve smyslu (1.28) [23]. Nehermitovský hamiltonián \hat{H}_V získává novou, obecnější podmínku hermiticity, která je dána vztahem

$$\hat{H}_V^\ddagger = \hat{H}_V = \hat{V}^{-1} \hat{H}_V^\dagger \hat{V}, \quad (1.88)$$

kde „ \ddagger “ značí nový druh sdružení, které se liší od konvenčního hermitovského sdružení tím, že jeho součástí je operátor \hat{V} . Dále, pokud \hat{V} splňuje následující podmínky:

- hermiticita

$$\hat{V}^\dagger = \hat{V}, \quad (1.89)$$

- regularita

$$\hat{V} \hat{V}^{-1} = \mathbb{1}, \quad (1.90)$$

- linearita

$$\hat{V} k \hat{V}^{-1} = k, \quad (1.91)$$

potom se hamiltonián \hat{H}_V nazývá V -pseudo hermitovský [24].

Nyní se lze podívat, jak se \hat{H}_V bude chovat na skalárním součinu. Jak bylo zmíněno v kapitole 1.1.3, normalizované vlastní vektory hermitovské hamiltoniánu (1.32) tvoří ortonormální bázi na hermitovském skalárním součinu (1.8) a hermitovská matice má v této bázi diagonální formu. Hermiticita hamiltoniánu taktéž dovozovala „volný pohyb“ hamiltoniánu v hermitovském skalárním součinu (1.31). Pokud hamiltonián přestane být hermitovský, ale bude raději V -pseudo hermitovský (1.88), tak jeho vlastní vektory obecně nebudou ortonormální na hermitovském skalárním součinu. Na základě pseudo-hermitovské teorie lze ale vytvořit nový skalární součin, na kterém již ortonormální budou [18].

Nová notace pro skalární součin je

$$\langle \phi' | \psi' \rangle_V = \langle \phi' | \hat{V} | \psi' \rangle, \quad (1.92)$$

kdy tento skalární součin se nazývá V -pseudo. Operátor \hat{V} modifikuje skalární součin a tím upravuje metriku systému, resp. Hilbertův prostor, a proto je nazýván metrickým operátorem. Samotné V -pseudo bra a ket vektory budou definovány následujícím způsobem [25]

$$|\psi'\rangle_V^\ddagger = [\hat{V} |\psi'\rangle]^\dagger = \langle \psi' |_V, \quad |\psi'\rangle_V = |\psi'\rangle. \quad (1.93)$$

Normalizace stavu na V -pseudo skalárním součinu má stejnou formu jako v hermitovské mechanice [25]

$$|\bar{\psi}'\rangle_V = \frac{|\psi'\rangle_V}{\sqrt{\langle \psi' | \psi' \rangle_V}} = \frac{|\psi'\rangle}{\sqrt{\langle \psi' | \hat{V} | \psi' \rangle}}, \quad (1.94)$$

kde $|\bar{\psi}'\rangle_V$ je normalizovaný stav $|\psi'\rangle_V$. Identity pro V -pseudo skalární součin lze zapsat jako

$$\begin{aligned} \langle \phi' | \psi' \rangle_V &= [|\phi'\rangle]^\ddagger |\psi'\rangle_V \\ &= [\hat{V} |\phi'\rangle]^\dagger |\psi'\rangle = [|\phi'\rangle]^\dagger \hat{V}^\dagger |\psi'\rangle \\ &= \langle \phi' | \hat{V} | \psi' \rangle. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Chování hamiltoniánu \hat{H}_V na V -pseudo skalárním součinu je dáno následujícími identitami

$$\begin{aligned}
\langle \phi | [\hat{H}_V | \psi' \rangle]_V &= [\hat{H}_V^\dagger | \phi' \rangle]^\dagger | \psi' \rangle_V \\
&= [\hat{V} \hat{H}_V^\dagger | \phi' \rangle]^\dagger | \psi' \rangle = [\hat{V} \hat{V}^{-1} \hat{H}_V^\dagger \hat{V} | \phi' \rangle]^\dagger | \psi' \rangle \\
&= [\hat{H}_V^\dagger \hat{V} | \phi' \rangle]^\dagger | \psi' \rangle = [\hat{V} \hat{H}_V | \phi' \rangle]^\dagger | \psi' \rangle \\
&= [\hat{H}_V | \phi' \rangle]^\dagger | \psi' \rangle
\end{aligned} \tag{1.96}$$

Lze tedy říct, že hamiltonián \hat{H}_V je hermitovský na V -pseudo skalárním součinu, kdy jeho hermiticity je dána vztahem (1.88). Maticová forma hamiltoniánu \hat{H}_V bude mít v bázi svých vlastních vektorů opět diagonální formu. Z toho plyne, že o hermiticitě hamiltoniánů a všeobecně operátorů se lze bavit pouze ve spojení se skalárním součinem [25].

Nehermitovská kvantová teorie, konkrétně pseudo-hermitovská umožňuje definovat nový nehermitovský skalární součin s metrickým operátorem a tento skalární součin doplnit o soubor hamiltoniánů, které jsou hermitovské na pseudo skalárním součinu. Taktéž lze jít cestou opačnou, a to vytvořením pseudo-hermitovského hamiltoniánu a skalární součin doplnit o metrický operátor. Nevýhodou ovšem je, že pseudo skalární součin je obecně indefinitní, tedy jeho norma může být záporná a tím se stává nefyzikálním [18].

Při porovnání pseudo-hermitovské a \mathcal{PT} , resp. \mathcal{CPT} -symetrické teorie si lze povšimnout podobností mezi těmito teoriemi. Jak v pseudo-hermiticitě, tak v \mathcal{CPT} -symetrii je požadavkem modifikace skalárního součinu operátorem, který zajišťuje hermiticitu hamiltoniánu na daném skalárním součinu. Rozpor ale přichází v definici těchto teorií. Pro \mathcal{CPT} -symetrii se hamiltonián řídí vztahem (1.79), kde hamiltonián přechází v sám sebe bez použití konvenčního hermitovského sdružení, kdežto v případě definice pseudo-hermiticity (1.88) je toto hermitovské sdružení přítomné. Taktéž operátor \hat{V} obecně nekomutuje s hamiltoniánem. Operátory $\hat{\mathcal{P}}$, $\hat{\mathcal{T}}$ a $\hat{\mathcal{C}}$ by tedy neměly být ztožňovány s metrickým operátorem \hat{V} . \mathcal{CPT} -symetrie má taktéž pozitivně definitní skalární součin, kdežto podmínky pro sestavení metrického operátoru nezaručují pozitivní definitu V -pseudo skalárního součinu, a tedy V -pseudo skalární součinu je obecně indefinitní [25]. Výhodou u pseudo-hermitovské teorie ovšem může být, že jelikož metrický operátor je definován značně obecně, existuje jich nekonečné množství, ze kterých si lze vybrat. Existují tedy metrické operátory, pod kterými je skalární součin pouze kladný [18].

Nechť existuje operátor \hat{V}_+ , který splňuje výše uvedené podmínky pro metrický operátor v pseudo-hermitovské teorii a současně je pozitivně definitní, tedy jeho vlastní čísla jsou kladná a jsou nulová pouze pro nulové stavy. Hamiltonián \hat{H}_{V_+} se nazývá V -quasi-hermitovský, jestliže s operátorem \hat{V}_+ splňuje relaci (1.88). Následně lze ukázat izomorfismus mezi V -quasi-hermitovským hamiltoniánem a jeho hermitovskou formou [25], [18].

Pro provedení tohoto důkazu je nejdříve nutné nalézt odmocninou formu metrického operátoru

$$\hat{V}_+^{\frac{1}{2}} = \hat{\eta}, \quad \hat{V}_+ = \hat{\eta}^\dagger \hat{\eta} = \hat{\eta} \hat{\eta}, \tag{1.97}$$

která je dobře definovaná, jelikož \hat{V}_+ pozitivně definitní [25]. Z pozitivní definity a hermiticity operátoru \hat{V}_+ plyne, že jeho odmocniná forma $\hat{\eta}$ bude taktéž pozitivně definitní a hermitovská. Odmocninné vyjádření metrického operátoru \hat{V}_+ spolu s hamiltoniánem

\hat{H}_{V_+} dovoluje přepsat vztah (1.88) do tvaru

$$\hat{\eta}^{-1} \hat{H}_{V_+}^\dagger \hat{\eta} = \hat{\eta} \hat{H}_{V_+} \hat{\eta}^{-1}, \quad (1.98)$$

kde

$$\hat{\eta} \hat{H}_{V_+} \hat{\eta}^{-1} = \hat{H} \quad (1.99)$$

je transformace hamiltoniánu \hat{H}_{V_+} na hamiltonián \hat{H} , který je hermitovský na hermitovském skalárním součinu (1.31). To, že hamiltonián \hat{H} je opravdu hermitovský, se lze přesvědčit následujícím důkazem [25]

$$\begin{aligned} \hat{H}^\dagger &= (\hat{\eta}^{-1})^\dagger \hat{H}_{V_+}^\dagger \hat{\eta}^\dagger, \\ \hat{H}^\dagger &= (\hat{\eta}^{-1})^\dagger \hat{V}_+ \hat{H}_{V_+} \hat{V}_+^{-1} \hat{\eta}^\dagger, \\ \hat{H}^\dagger &= (\hat{\eta}^{-1})^\dagger \hat{\eta}^\dagger \hat{\eta} \hat{H}_{V_+} (\hat{\eta}^\dagger \hat{\eta})^{-1} \hat{\eta}^\dagger, \\ \hat{H}^\dagger &= \hat{\eta} \hat{H}_{V_+} \hat{\eta}^{-1}, \\ \hat{H}^\dagger &= \hat{H}, \end{aligned} \quad (1.100)$$

kde byly využity vztahy (1.88), (1.97).

Skalární součin s operátory \hat{V}_+ a \hat{H}_{V_+} bude mít následující tvar

$$\begin{aligned} \langle \phi' | \hat{H}_{V_+} | \psi' \rangle_{V_+} &= \langle \phi' | \hat{V}_+ \hat{H}_{V_+} | \psi' \rangle \\ &= \langle \phi' | \hat{\eta}^\dagger \hat{\eta} (\hat{\eta}^{-1} \hat{H} \hat{\eta}) | \psi' \rangle = \langle \phi' | \hat{\eta}^\dagger \hat{H} \hat{\eta} | \psi' \rangle \\ &= \langle \phi | \hat{H} | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (1.101)$$

kde byly definovány nové stavy

$$\hat{\eta} | \psi' \rangle = | \psi \rangle, \quad \langle \phi' | \hat{\eta} = \langle \phi |. \quad (1.102)$$

Zde je nutné upozornit, že stav $| \psi' \rangle_{V_+}$, resp. $\langle \phi |_{V_+}$ je normalizován dle relace (1.94), kdežto stav $| \psi \rangle$, resp. $\langle \phi |$ je normalizován na konvenčním hermitovském skalárním součinu (1.40).

Dále lze ukázat, že vlastní stavy $| n'_i \rangle_{V_+}$ a $| n_i \rangle$ operátorů \hat{H}_{V_+} a \hat{H} mají stejná vlastní čísla n_i [25]

$$\begin{aligned} \hat{H}_{V_+} | n'_i \rangle_{V_+} &= (\hat{\eta}^{-1} \hat{h} \hat{\eta}) \hat{\eta}^{-1} | n_i \rangle \\ &= \hat{\eta}^{-1} \hat{h} | n_i \rangle = n_i \hat{\eta}^{-1} | n_i \rangle \\ &= n_i | n'_i \rangle_{V_+}. \end{aligned} \quad (1.103)$$

Nabízí se tedy otázka, lze \mathcal{CPT} -symetrickou teorii napasovat na pseudo-hermitovskou, popřípadě quasi-hermitovskou teorii? Ukazuje se, že ano. V referencích [21], [26], [27] je dokázáno, že každý \mathcal{PT} -symetrický diagonalizovatelný hamiltonián je pseudo-hermitovský. Tento důkaz byl rozšířen v referenci [28] na \mathcal{PT} -symetrický nedagonalizovatelný hamiltonián s konečnou dimenzí. Dále v referenci [22] je ukázáno, že jestliže \mathcal{PT} -symetrický hamiltonián se nachází v neporušené oblasti, tak tento hamiltonián je quasi-hermitovský. Současně quasi-hermitovská teorie není rozšířením konvenční hermitovské kvantové mechaniky [29]. V následující kapitole bude provedena ukázka \mathcal{PT} -symetrického hamiltoniánu a následně bude nalezena jeho pseudo a quasi-hermiticita.

1.2.4 Ukázka výpočtů pro \mathcal{PT} -symetrickou, pseudo a quasi-hermitovskou teorii

Pro ukázkou \mathcal{PT} -symetrického hamiltoniánu bude využit příklad, který Bender a jeho kolegové uvádí v referenci [17]. \mathcal{PT} -symetrický hamiltonián je vyjádřen ve formě matice s dimenzí 2×2 a jeho rozbor bude proveden pro neporušenou oblast dle kapitol 1.2.1 a 1.2.2. Práce s \mathcal{PT} -symetrickým hamiltoniánem bude rozšířena o transformaci na pseudo a následně quasi-hermitovskou formu dle teorie uvedené v kapitole 1.2.3.

Pro nalezení 2×2 \mathcal{PT} -symetrické matice je nutné si nejdříve definovat operátor parity $\hat{\mathcal{P}}$ a operátor převrácení času $\hat{\mathcal{T}}$. Jelikož $\hat{\mathcal{T}}$ je antilineární, jeho nejjednodušší forma je komplexní sdružení

$$\hat{\mathcal{T}} \equiv *. \quad (1.104)$$

Operátor $\hat{\mathcal{P}}$, vzhledem ke stanoveným podmínkám v kapitole 1.2, odpovídá reálné involuční matici, která je současně invariantní pod operací transpozice. Matice operátoru $\hat{\mathcal{P}}$ lze zapsat ve tvaru

$$\hat{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.105)$$

kde θ je reálné číslo. V následující ukázce postačí jednodušší forma $\hat{\mathcal{P}}$, proto se zvolí $\theta = \pi/2$. Operátor $\hat{\mathcal{P}}$ potom bude vyjádřen jako

$$\hat{\mathcal{P}}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.106)$$

Pro odvození \mathcal{PT} -symetrického hamiltoniánu se bude vycházet z matice s osmi volnými parametry

$$\hat{H}_k = \begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & be^{i\beta} \\ ce^{i\gamma} & de^{i\delta} \end{pmatrix}, \quad (1.107)$$

kde $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou reálná čísla. Matice (1.107), spolu se vztahy (1.106) a (1.104) se vloží do definice \mathcal{PT} -symetrického hamiltoniánu (1.53)

$$\begin{aligned} \hat{H}_k &= \hat{\mathcal{P}}_0 \hat{\mathcal{T}} \hat{H}_k \hat{\mathcal{T}} \hat{\mathcal{P}}_0, \\ \hat{H}_k &= \hat{\mathcal{P}}_0 \hat{H}_k^* \hat{\mathcal{P}}_0, \\ \begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & be^{i\beta} \\ ce^{i\gamma} & de^{i\delta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{-i\alpha} & be^{-i\beta} \\ ce^{-i\gamma} & de^{-i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & be^{i\beta} \\ ce^{i\gamma} & de^{i\delta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} de^{-i\delta} & ce^{-i\gamma} \\ be^{-i\beta} & ae^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Položením $a = d, b = c, \alpha = -\delta, \beta = -\gamma$ je získán hamiltonián, který je invariantní pod operátory $\hat{\mathcal{P}}_0$ a $\hat{\mathcal{T}}$

$$\hat{H}_k = \begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & be^{i\beta} \\ be^{-i\beta} & ae^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \quad (1.109)$$

Pro \mathcal{PT} -symetrický hamiltonián bylo taktéž požadováno, aby byl invariantní pod operací transpozice (1.79), proto tato podmínka bude pro hamiltonián \hat{H}_k doplněna

$$\begin{aligned} \hat{H}_k &= \hat{H}_k^T \\ \begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & be^{i\beta} \\ be^{-i\beta} & ae^{-i\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & be^{-i\beta} \\ be^{i\beta} & ae^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.110)$$

Položením $\beta = 0$ je získána finální maticová forma \mathcal{PT} -symetrického hamiltoniánu

$$\hat{H}_{pt} = \begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & b \\ b & ae^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \quad (1.111)$$

Výpočet vlastních hodnot a vlastních vektorů pro hamiltonián \hat{H}_{pt} se provede dle charakteristické rovnice

$$\begin{aligned} \det(\hat{H}_{pt} - \lambda \mathbb{1}) &= 0, \\ \det \begin{pmatrix} ae^{i\alpha} - \lambda & b \\ b & ae^{-i\alpha} - \lambda \end{pmatrix} &= 0, \\ \lambda^2 - 2a\lambda \cos \alpha + a^2 - b^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Řešení kvadratické rovnice pro vlastní čísla λ lze zapsat ve tvaru

$$\lambda_{H_{pt\pm}} = a \cos \alpha \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \alpha}. \quad (1.113)$$

V řešení pro vlastní čísla $\lambda_{H_{pt\pm}}$ vystupuje člen pod odmocninou, který za určitých podmínek může být záporný. Platí-li $b^2 < a^2 \sin^2 \alpha$, potom vlastní čísla $\lambda_{H_{pt\pm}}$ mají komplexní část a jelikož kvadratická rovnice má dvě řešení, vlastní čísla se vyskytují v komplexně sdružených párech. Pro tento případ se hamiltonián \hat{H}_{pt} nachází v oblasti porušené \mathcal{PT} -symetrie. V této oblasti vlastní vektory hamiltoniánu \hat{H}_{pt} nebudou vlastními vektory součinu operátorů $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$. Při splnění podmínky $b^2 > a^2 \sin^2 \alpha$ se hamiltonián \hat{H}_{pt} přesouvá do oblasti neporušené \mathcal{PT} -symetrie. Zde jsou vlastní čísla $\lambda_{H_{pt\pm}}$ pouze reálné a vlastní vektory hamiltoniánu \hat{H}_{pt} jsou vlastními vektory součinu operátorů $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$. Při splnění podmínky $b^2 = a^2 \sin^2 \alpha$ dochází k degeneraci vlastních čísel ze dvou pouze na jedno. Tato oblast se nazývá kritický bod.

Nyní se bude pokračovat s maticovou formou hamiltoniánu \hat{H}_{pt} z relace (1.111), a to v oblasti neporušené \mathcal{PT} -symetrie. Pro tento případ je výhodné zavést substituci

$$\sin \Omega = \frac{a}{b} \sin \alpha, \quad (1.114)$$

kde Ω je reálné číslo. Tato substituce vyjadřuje, že při splnění podmínky $|b| \geq |a|$ lze vždy zvolit takové Ω , aby se funkční hodnota $\sin \Omega$ nacházela v intervalu funkčních hodnot $a/b \sin \alpha$. Vložení substituce do vlastních čísel $\lambda_{H_{pt\pm}}$ lze získat

$$\begin{aligned} \lambda_{H_{pt\pm}} &= a \cos \alpha \pm \sqrt{b^2} \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \alpha}, \\ \lambda_{H_{pt\pm}} &= a \cos \alpha \pm \sqrt{b^2} \sqrt{\cos^2 \Omega}. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Tak, aby bylo možné provést odmocnění z předchozí rovnice bez použití absolutní hodnoty, bude předpokládáno pro argumenty $b > 0$ a $\cos \Omega > 0$, tedy $-\pi/2 < \Omega < \pi/2$. S tímto vědomím pro vlastní čísla $\lambda_{H_{pt\pm}}$ platí

$$\lambda_{H_{pt\pm}} = a \cos \alpha \pm b \cos \Omega. \quad (1.116)$$

Vlastní vektory $|v_{\pm}\rangle$ pro \hat{H}_{pt} lze získat řešením rovnice

$$\left(\hat{H}_{pt} - \lambda_{H_{pt\pm}} \mathbb{1} \right) |v_{\pm}\rangle = 0. \quad (1.117)$$

Vložení vlastních čísel $\lambda_{H_{pt}\pm}$, využitím Eulerova vzorce $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ a substituce (1.114) lze rovnice (1.117) přepsat do tvaru

$$\begin{pmatrix} ib \sin \Omega \mp b \cos \Omega & b \\ b & -ib \sin \Omega \mp b \cos \Omega \end{pmatrix} |v_{\pm}\rangle = 0. \quad (1.118)$$

Řešením soustavy rovnic jsou získány vektory $|v_{\pm}\rangle$ a jejich následnou normalizací dle (1.65) je lze zapsat ve tvaru

$$|v_{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 \cos \Omega}} \begin{pmatrix} e^{i\Omega} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |v_{-}\rangle = \frac{i}{\sqrt{2 \cos \Omega}} \begin{pmatrix} e^{-i\Omega} \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (1.119)$$

Každému ket vektoru $|v_{\pm}\rangle$ lze přiřadit bra vektor $\langle v_{\pm}|$ dle (1.64)

$$\langle v_{+}| = \frac{1}{\sqrt{2 \cos \Omega}} (1 \quad e^{-i\Omega}), \quad \langle v_{-}| = \frac{1}{i\sqrt{2 \cos \Omega}} (-1 \quad e^{i\Omega}). \quad (1.120)$$

Skalárním součinem lze ověřit ortonormálnost vlastních vektorů

$$\langle v_{\pm}|v_{\pm}\rangle = \pm 1, \quad \langle v_{\pm}|v_{\mp}\rangle = 0. \quad (1.121)$$

Jak bylo řečeno v kapitole 1.2, skalární součin v \mathcal{PT} -symetrii může nabývat záporných hodnot.

Přesné tvary vektorů $|v_{\pm}\rangle$ se v různých pracích liší. Například v referenci [17] je vyjádřen vlastní vektor jako $|v_{+}\rangle = 1/\sqrt{2 \cos \Omega} (e^{i\Omega/2} \quad e^{-i\Omega/2})^T$. Stejně vyjádření lze získat i pro $|v_{+}\rangle$ ve vztahu (1.119). Stačí vyjádřit z $|v_{+}\rangle$ ve vztahu (1.119) fázi $e^{i\Omega/2}$, která může být následně zanedbána, jelikož se jedná o globální fázi, a tedy stav $|v_{+}\rangle$ je fyzikálně identický stavu $e^{i\Omega/2}|v_{+}\rangle$.

V kapitole 1.2 bylo představeno řešení pro navrácení \mathcal{PT} skalárního součinu do oboru kladných čísel, a to zavedením operátoru $\hat{\mathcal{C}}$ podle vztahu (1.66), jehož maticové vyjádření s použitím stavů $|v_{\pm}\rangle$ z relací (1.119) a (1.120) je následující

$$\hat{\mathcal{C}} = \frac{1}{\cos \Omega} \begin{pmatrix} i \sin \Omega & 1 \\ 1 & -i \sin \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \tan \Omega & \sec \Omega \\ \sec \Omega & -i \tan \Omega \end{pmatrix}. \quad (1.122)$$

Lze potom jednoduše ověřit, že platí

$$\hat{\mathcal{C}}|v_{\pm}\rangle = \pm |v_{\pm}\rangle, \quad [\hat{\mathcal{C}}, \hat{H}_f] = 0. \quad (1.123)$$

\mathcal{CPT} skalární součin bude již pozitivně definitní

$$[\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}_0\hat{\mathcal{T}}|v_{\pm}\rangle]^T |v_{\pm}\rangle = \langle v_{\pm}|v_{\pm}\rangle = 1. \quad (1.124)$$

Tyto stavy taktéž splňují relaci úplnosti

$$\sum_{i=+,-} |v_i\rangle [\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}_0\hat{\mathcal{T}}|v_i\rangle]^T = |v_i\rangle \langle v_i| = \mathbb{1}. \quad (1.125)$$

S pozitivně definitním skalárním součinem a \mathcal{CPT} -symetrickým hamiltoniánem \hat{H}_{pt} je již zřejmé, že lze dosáhnout unitární evoluce systému, kde \mathcal{CPT} -symetrický evoluční operátor je dán vztahem (1.84). Nyní se nabízí přesunout se z \mathcal{PT} , resp. \mathcal{CPT} -symetrické teorie do pseudo-hermitovské a pokud možno do quasi-hermitovské teorie,

kteřé byly popsány v kapitole 1.2.3. Pro tento přesun bude využita maticová forma hamiltoniánu \hat{H}_{pt} z relace (1.111).

Aby hamiltonián \hat{H}_{pt} byl pseudo-hermitovský, musí splňovat relaci (1.88). Metrický operátor \hat{V} je hermitovská matice, ke které lze nalézt inverzní formu. Matice operátoru \hat{V} s dimenzí 2×2 lze vyjádřit jako

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} m & ke^{i\kappa} \\ k e^{-i\kappa} & n \end{pmatrix}, \quad \hat{V}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} n & -ke^{i\kappa} \\ -ke^{-i\kappa} & m \end{pmatrix}, \quad (1.126)$$

kde m, n, k, κ jsou reálná čísla a $\Delta = mn - k^2$, přitom $\Delta \neq 0$. Dosazením operátorů \hat{H}_{pt} a \hat{V} do podmínky pro pseudo-hermitovský operátor (1.88) je získána relace

$$\begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & b \\ b & ae^{-i\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} n & -ke^{i\kappa} \\ -ke^{-i\kappa} & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{-i\alpha} & b \\ b & ae^{i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & ke^{i\kappa} \\ k^{-i\kappa} & n \end{pmatrix}, \quad (1.127)$$

$$\begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & b \\ b & ae^{-i\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix},$$

kde pro členy w_{ij} platí

$$\begin{aligned} w_{11} &= ae^{i\alpha}(k^2 - mne^{-i2\alpha}) + bke^{i\kappa}(m - ne^{-i2\kappa}), \\ w_{12} &= b(-n^2 + k^2e^{2i\kappa}) + akn(-1 + e^{i2\alpha})e^{-i(\alpha-\kappa)}, \\ w_{21} &= akm(1 - e^{i2\alpha}e^{-i(\alpha+\kappa)}) - b(m^2 - k^2e^{-i2\kappa}), \\ w_{22} &= ae^{-i\alpha}(k^2 - mne^{i2\alpha}) + bk e^{-i\kappa}(m - ne^{i2\kappa}). \end{aligned} \quad (1.128)$$

Řešení této soustavy rovnic je například $m = n = 0, k = 1, \kappa = 0$. Operátor \hat{V} pro tento případ nabude formy

$$\hat{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.129)$$

Hamiltonián \hat{H}_{pt} je tedy V_0 -pseudo-hermitický. Vlastní čísla operátoru \hat{V}_0 jsou ovšem $\lambda_{V_0} = \pm 1$. Skalární součin s operátorem \hat{V}_0 by byl indefinitní a dle teorie v kapitole (1.2.3) nelze hamiltonián \hat{H}_{pt} transformovat pomocí operátoru \hat{V}_0 do hermitovské formy. Protože ale řešení soustavy rovnic (1.127) není unikátní, je stále možné pokračovat s hledáním řádného metrického operátoru. Lze si ale povšimnout, že metrický operátor \hat{V}_0 je roven operátoru parity \hat{P}_0 z relace (1.106). S touto znalostí lze využít postupu, který byl proveden v \mathcal{PT} -symetrické části tohoto příkladu, tentokrát se ovšem bude pracovat v Dirakově notaci.

Nejdříve budou nalezeny vlastní vektory hamiltoniánu \hat{H}_{pt} . Vlastní čísla hamiltoniánu \hat{H}_{pt} budou opět ve tvaru (1.113). S použitím substituce (1.114) budou tyto vlastní čísla zapsány opět ve tvaru (1.116). Normalizace stavů bude provedena dle relace (1.94), kde jako metrický operátor je zvolen \hat{V}_0 . Výsledkem jsou normalizované tvary vlastních vektorů ket

$$\begin{aligned} |v'_+\rangle_{V_0} &= |v'_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 \cos \Omega}} \begin{pmatrix} e^{i\Omega} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ |v'_-\rangle_{V_0} &= |v'_-\rangle = \frac{i}{\sqrt{2 \cos \Omega}} \begin{pmatrix} e^{-i\Omega} \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.130)$$

a vlastních vektorů bra

$$\begin{aligned} \langle v'_+|_{V_0} &= \langle v'_+|\hat{V}_0 = \frac{1}{\sqrt{2 \cos \Omega}} (1 \quad e^{-i\Omega}), \\ \langle v'_-|_{V_0} &= \langle v'_-|\hat{V}_0 = \frac{-i}{\sqrt{2 \cos \Omega}} (-1 \quad e^{i\Omega}). \end{aligned} \quad (1.131)$$

Tyto vektory jsou ekvivalentní s vektory v \mathcal{PT} -symetrické části příkladu (1.119), (1.120)

$$|v'_{\pm}\rangle_{V_0} = |v'_{\pm}\rangle = |v_{\pm}\rangle, \quad \langle v'_{\pm}|_{V_0} = \langle v'_{\pm}|\hat{V}_0 = \langle v_{\pm}|. \quad (1.132)$$

Skalární součin je tedy ortonormální, ale indefinitní

$$\langle v'_{\pm}|v'_{\pm}\rangle_{V_0} = \langle v'_{\pm}|\hat{V}_0|v'_{\pm}\rangle = \pm 1, \quad \langle v'_{\pm}|v'_{\mp}\rangle_{V_0} = \langle v'_{\pm}|\hat{V}_0|v'_{\mp}\rangle = 0. \quad (1.133)$$

Vytvoření pozitivně definitního skalárního součinu lze provést zavedením nového operátoru \hat{D} , který je vytvořen dle předlohy operátoru \hat{C} z relace (1.66), kdežto nyní zapsáno v Dirakově notaci

$$\hat{D} = \sum_i |v'_i\rangle\langle v'_i|\hat{V}_0. \quad (1.134)$$

Po dosazení $|v'_{\pm}\rangle$ a \hat{V}_0 do vztahu pro \hat{D} je získána matice

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} i \tan \Omega & \sec \Omega \\ \sec \Omega & -i \tan \Omega \end{pmatrix}. \quad (1.135)$$

Maticové vyjádření pro \hat{D} je rovno maticovému vyjádření operátoru \hat{C} v relaci (1.122). Finální forma metrického operátoru bude dána relací

$$\begin{aligned} \hat{V}_f &= \hat{V}_0 \hat{D}, \\ \hat{V}_f &= \begin{pmatrix} \sec \Omega & -i \tan \Omega \\ i \tan \Omega & \sec \Omega \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.136)$$

Posloupnost operátorů \hat{V}_0 a \hat{D} vychází z identit pro $\mathcal{CP}\mathcal{T}$ skalární součin (1.82), kde lze vyčíst stejné identity jako v následující relaci

$$\begin{aligned} \langle v'_{\pm}|\hat{V}_f|v'_{\pm}\rangle &= \langle v'_{\pm}|\hat{V}_0 \hat{D}|v'_{\pm}\rangle = \langle v'_{\pm}|\hat{D}^* \hat{V}_0|v'_{\pm}\rangle \\ &= [\hat{V}_0 \hat{D}^* |v'_{\pm}\rangle]^T |v'_{\pm}\rangle = [\hat{D} \hat{V}_0 |v'_{\pm}\rangle]^T |v'_{\pm}\rangle. \end{aligned} \quad (1.137)$$

Nyní je nutné ověřit, že metrický operátor \hat{V}_f splňuje podmínku pro pseudo-hermitovský hamiltonián \hat{H}_{pt} . Pro toto ověření je nutné navrátit operátor \hat{V}_f ze substituce (1.114)

$$\hat{V}_f = \begin{pmatrix} \frac{b}{a} \sec \alpha & -i \tan \alpha \\ i \tan \alpha & \frac{b}{a} \sec \alpha \end{pmatrix}. \quad (1.138)$$

Ověření proběhne dosazením parametrů $m = n = b/a \cos \alpha$, $k = \tan \alpha$ a $\kappa = -\pi/2$ do rovnic (1.128). Po provedení potřebných úprav je potvrzeno, že metrický operátor \hat{V}_f splňuje podmínky pseudo-hermiticity s hamiltoniánem \hat{H}_{pt} .

Vlastní čísla operátoru \hat{V}_f jsou dány vztahem

$$\lambda_{\hat{V}_f \pm} = \frac{b \sec \alpha \pm a \tan \alpha}{a}. \quad (1.139)$$

Správnou volbou parametrů lze docílit, aby vlastní čísla $\lambda_{\hat{V}_f \pm}$ byla pouze kladná. Jedno z možných řešení je zvolit $a > 0$, $b > a$ a $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Při dodržení těchto podmínek lze dle kapitoly 1.2.3 přepsat hamiltonián \hat{H}_{pt} na hermitovský. Tento přepis bude nyní proveden.

Nejdříve je nutné nalézt odmocinnou formu metrického operátoru \hat{V}_f vyjádřeného v relaci (1.138). To se provede tak, že operátor \hat{V}_f se rozpíše do trojice členů

$$\hat{V}_f = \hat{Q} \hat{\Lambda} \hat{Q}^{-1}, \quad (1.140)$$

kde \hat{Q} je matice složená ze sloupcových vektorů, kterými jsou vlastní vektory \hat{V}_f , \hat{Q}^{-1} je inverzní forma \hat{Q} a $\hat{\Lambda}$ je diagonální matice, jejíž buňky jsou vlastní čísla \hat{V}_f . Důvodem rozkladu \hat{V}_f na tyto členy je jednoduché nalezení odmocninné formy

$$\hat{V}_f^{\frac{1}{2}} = \eta = \hat{Q}\hat{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\hat{Q}^{-1}, \quad (1.141)$$

kde operátor η a jeho inverzní forma η^{-1} transformuje, dle vztahu (1.99), quasi-hermitovský hamiltonián do jeho hermitovské podoby. Dosazením příslušných parametrů do relace (1.140) je získáno vyjádření

$$\hat{V}_f = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\hat{V}_f+} & 0 \\ 0 & \lambda_{\hat{V}_f-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/2 & 1 \\ i/2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.142)$$

Maticové vyjádření operátoru η dle relace (1.141) je

$$\begin{aligned} \eta &= \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f+}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f-}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i/2 & 1 \\ -i/2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f-}} + \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f+}} & -i \left[\sqrt{\lambda_{\hat{V}_f+}} - \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f-}} \right] \\ i \left[\sqrt{\lambda_{\hat{V}_f+}} - \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f-}} \right] & \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f-}} + \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f+}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.143)$$

a jeho inverzní formy

$$\eta^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{\hat{V}_f+}}\sqrt{\lambda_{\hat{V}_f-}}} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f-}} + \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f+}} & -i \left[\sqrt{\lambda_{\hat{V}_f-}} - \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f+}} \right] \\ i \left[\sqrt{\lambda_{\hat{V}_f-}} - \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f+}} \right] & \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f-}} + \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f+}} \end{pmatrix}. \quad (1.144)$$

Hermitovský tvar hamiltoniánu \hat{H}_{pt} je dán následující relací

$$\hat{H} = \eta\hat{H}_{pt}\eta^{-1} = a \cos \alpha \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f+}}\sqrt{\lambda_{\hat{V}_f-}} \\ \sqrt{\lambda_{\hat{V}_f+}}\sqrt{\lambda_{\hat{V}_f-}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.145)$$

Pokud jsou vlastní čísla $\lambda_{\hat{V}_f\pm}$ kladná, hamiltonián \hat{H} je reálná matice invariantní pod operací transpozice, tedy je i hermitovská. Podmínka kladných vlastních čísel $\lambda_{\hat{V}_f\pm}$ je splnitelná, jak bylo popsáno výše. Lze si ještě všimnout, že uvedená řešení pro kladná vlastní čísla $\lambda_{\hat{V}_f\pm}$, viz relace (1.139), se prolínají se stanovenými podmínkami pro neporušený \mathcal{PT} -symetrický systém, viz relace (1.114). Pro vlastní čísla hamiltoniánu \hat{H} platí relace

$$\lambda_{H\pm} = a \cos \alpha \pm \sqrt{b^2} \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \alpha}. \quad (1.146)$$

Tato vlastní čísla jsou ekvivalentní vlastním číslům $\lambda_{H_{pt}\pm}$ z relace (1.115), a to odpovídá výsledkům z kapitoly 1.2.3.

Navzdory vyplývající ekvivalenci \mathcal{PT} -symetrické teorie s již zavedenou nehermitovskou kvantovou mechanikou, v průběhu několika let proběhlo mnoho aplikací \mathcal{PT} -symetrické teorie v experimentální oblasti [30], [31], [32], [33], [34], [35], kde velká

pozornost byla věnována kritickému bodu \mathcal{PT} -symetrického systému. Lze tedy předpokládat rostoucí zájem pro studium této nově představené \mathcal{PT} -symetrické kvantové teorie.

V následující kapitole bude po úvodu do teorie kvantové informatiky a základní formulace lineární optiky provedena simulace a experimentální demonstrace obecné neunitární transformace qubitu zakódovaného do polarizace. Tento experiment byl motivován objevem \mathcal{PT} -symetrických hamiltoniánů, které patří do třídy nehermitovských hamiltoniánů. Jelikož nehermitovské hamiltoniány obecně indukují neunitární evoluci, lze proto očekávat, že experimentální realizace obecné neunitární transformace bude v budoucnu žádaným procesem.

Kapitola 2

Experimentální část

2.1 Teoretická část k experimentu

2.1.1 Kvantový stav světla

V číslicové technice pro reprezentaci informace, kterou nese zpráva, se používá binární číslice zvaná bit. Bit může nabývat dvou hodnot, kdy tyto hodnoty jsou konvenčně značeny symboly „0“ a „1“. Bity jsou následně uspořádány do posloupností, kdy těmto posloupnostem je přiřazen význam. Fyzikální implementace bitů je prováděna např. na pevných discích změnou magnetického pole magneticky aktivní vrstvy, domény, pomocí cívky, kterou prochází proud. Na základě orientace domény je místu přiřazen symbol binární číslice „0“ nebo „1“.

Informaci lze zakódovat i do kvantově mechanických objektů a v případě binárních číslic, které určují minimálně dva stavy, lze použít jakýkoliv dvoustatový kvantově mechanický systém. Kvantovými objekty jsou např. fotony a zakódování informace se provádí např. do dvou ortogonálních polarizací fotonu, kterými jsou např. stavy horizontální $|H\rangle$ a vertikální $|V\rangle$. Polarizaci $|H\rangle$ je přiřazen symbol binární číslice „0“ a polarizaci $|V\rangle$ symbol „1“. Diskrétní stav lze potom zapsat jako superpozici těchto stavů [2]

$$|\psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle, \quad (2.1)$$

kde stavy $|H\rangle$ a $|V\rangle$ společně tvoří bázi a parametry α a β jsou amplitudy pravděpodobnosti, pro které platí $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. V porovnání s klasickými bity, kde měřením je získána vždy stejná naměřená hodnota měřené veličiny (s ohledem na nejistoty měření), a tedy stejná hodnota bitu, kvantový objekt vykazuje jistou pravděpodobnost naměření daného výsledku. Tato pravděpodobnost je dána schopností superpozice stavů kvantového objektu, viz kapitola 1.1.3, kterou klasická informace neumožňuje. Stav $|\psi\rangle$ představuje základní jednotku informace, která se v kvantové informatice nazývá qubit, kvantový bit.

Stavy $|H\rangle$ a $|V\rangle$ lze vektorově reprezentovat formou

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

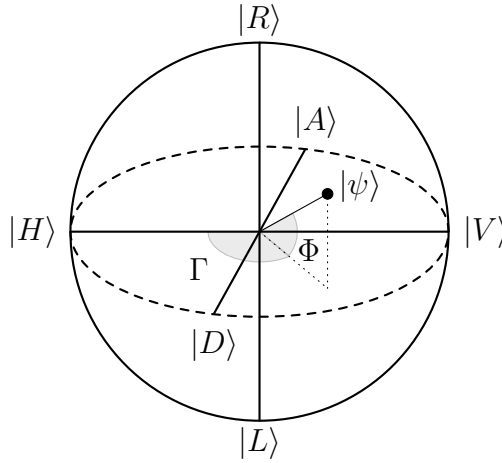
Stav $|\psi\rangle$ lze přepsat do tvaru [2]

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\Gamma}{2} |H\rangle + e^{i\Phi} \sin \frac{\Gamma}{2} |V\rangle \right), \quad (2.3)$$

kde úhel $0 \leq \Gamma \leq \pi$ kvantitativně určuje podíl $|H\rangle$ a $|V\rangle$ ve stavu $|\psi\rangle$, úhel $0 \leq \Phi < 2\pi$ je fáze mezi stavy $|H\rangle$ a $|V\rangle$ a úhel $0 \leq \gamma < 2\pi$ je globální fáze. Stav $|\psi\rangle$ lze zobrazit v tzv. Poincarého sféře, viz obr. 2.1, kde protilehlé body na osách odpovídají vzájemně ortonormálním stavům, které mohou spolu tvořit bázi. Globální fáze $e^{i\gamma}$ odpovídá pootočení Poincarého sféry. Ostatní význačné stavy na Poincarého sféře lze vyjádřit jako superpozici bázových stavů $|H\rangle$ a $|V\rangle$:

$$\begin{aligned} |D\rangle &= (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}, \\ |A\rangle &= (|H\rangle - |V\rangle)/\sqrt{2}, \\ |R\rangle &= (|H\rangle + i|V\rangle)/\sqrt{2}, \\ |L\rangle &= (|H\rangle - i|V\rangle)/\sqrt{2}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

kde $|D\rangle$, $|A\rangle$, $|R\rangle$ a $|L\rangle$ představuje diagonální, antidiagonální, pravotočnou a levotočnou polarizaci.



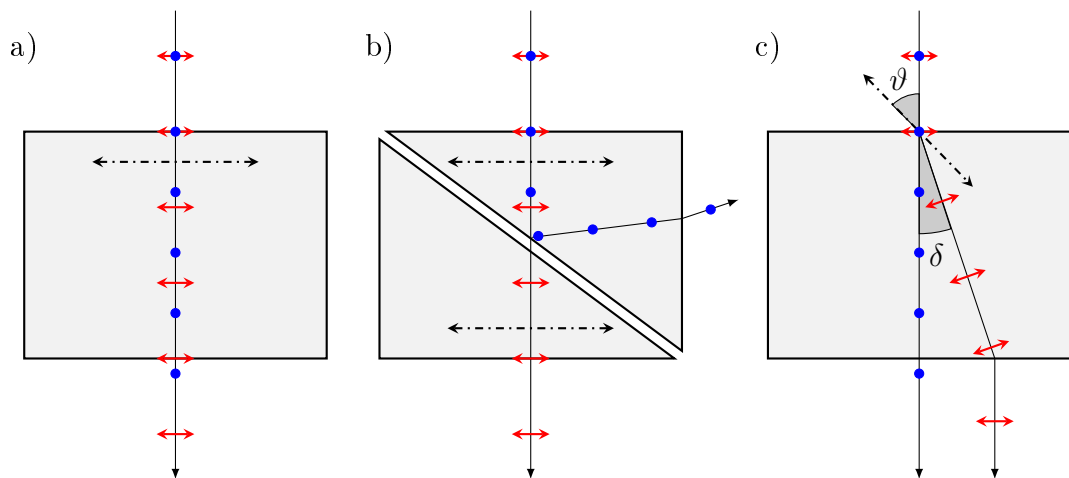
Obr. 2.1. Vyobrazení stavu $|\psi\rangle$ v Poincarého sféře s polarizačními bázemi $\{|R\rangle, |L\rangle\}$, $\{|D\rangle, |A\rangle\}$ a $\{|H\rangle, |V\rangle\}$. Tečkované čáry jsou projekce stavu $|\psi\rangle$ do osy z a roviny xy . Stav $|\psi\rangle$ je definovaný úhlem Φ mezi rovinou xy a vektorem $|\psi\rangle$ a dále úhlem Γ mezi osou horizontální polarizace $|H\rangle$ a projekcí vektoru $|\psi\rangle$ do roviny xy .

2.1.2 Vybrané optické prvky pro manipulaci světla

Pro manipulaci elektromagnetického záření, světla, se používají optické prvky zvané fázové destičky (FD), polarizátory (PL) a rozposouvače svazku (anglicky *beam displacer*, BD). Fázové destičky jsou optické prvky, které mění polarizaci světla, polarizátory jsou optické prvky, které propouští pouze vybranou polarizaci světla a BD slouží pro rozdělení svazku na dvě polarizační složky. Běžná fázová destička, BD a některé druhy polarizátorů jsou zkonstruovány z jednoosých anizotropních krystalů.

Jednoosý krystal se vyznačuje jedním směrem, ve kterém světelný svazek bez závislosti na polarizaci cítí jeden index lomu. Tento směr se nazývá optická osa. Směr šíření svazku svírá s optickou osou obecný úhel ϑ a spolu tvoří tzv. hlavní rovinu. Světelný svazek, jehož polarizace je kolmá na hlavní rovinu, se nazývá řádný (ordinární) a svazek, který má polarizaci kolmou na polarizaci řádného svazku, se nazývá mimořádný (extraordinární). Řádný svazek cítí index lomu n_o a mimořádný svazek cítí index lomu

$n_e(\vartheta)$, který je závislý na úhlu ϑ a tato závislost má tvar elipsy s poloosami délky n_o a n_e . Lom svazku na rozhraní se řeší Snellovým zákonem. V této práci se ovšem pracuje pouze s kolmým dopadem svazku na rovinu krystalu, nedochází proto k lomu. Podrobnější popis této problematiky lze nalézt v referenci [36].



Obr. 2.2. a) Zobrazení krystalu fázové destičky, kde směr šíření svazku svírá s optickou osou (čerchovaná čára uzavřena šipkami) úhel $\vartheta = 90^\circ$, hlavní rovina je shodná s rovinou nákresu, úhel dvojlomu $\delta = 0^\circ$ a mimořádný svazek (červené čárky) předhání řádný svazek (modré body), pokud $n_o > n_e$. b) Zobrazení Glan-Taylorova hranolu, kde směr šíření svazku svírá s optickou osou úhel $\vartheta = 90^\circ$ pro oba hranoly, hlavní rovina je shodná s rovinou nákresu, nedochází k dvojlomu, $\delta = 0^\circ$ a při splnění podmínky $n_o > n_e$ se řádný svazek dle principu totální odrazu odráží na rozhraní prvního hranolu s vzduchovou mezerou a mimořádný svazek prochází skrz vzduchovou mezeru do druhého hranolu, podmínka. c) Zobrazení BD, kde směr šíření svazku svírá s optickou osou úhel ϑ typicky 45° , hlavní rovina je shodná s rovinou nákresu a úhel dvojlomu δ je zde maximální.

Fázové destičky

Příklad fázové destičky je zobrazen na obr. 2.2 a). Krystal fázové destičky je orientován tak, aby směr šíření světla byl kolmý na optickou osu, tedy $\vartheta = 90^\circ$. Tím se zajistí, že řádný svazek se šíří s indexem lomu n_o a mimořádný s indexem lomu $n_e(90^\circ) = n_e$, jehož hodnota v tomto směru je maximální. Pro tento případ nedochází k dvojlomu, ale protože řádný a mimořádný svazek cítí obecně různé indexy lomu, rychlost šíření bude pro tyto svazky různá, a proto vznikne mezi řádným a mimořádným svazkem fázové zpoždění, které je dáno následující relací

$$\Delta\phi = \frac{2\pi L\Delta n}{\lambda_0}, \quad (2.5)$$

kde L je délka dráhy svazku v krystalu, Δn je rozdíl dvou uvažovaných indexů lomů a λ_0 je vlnová délka světla ve vakuu. U fázových destiček se namísto řádná a mimořádná polarizace využívá značení rychlá a pomalá polarizace dle vzájemné velikosti indexů lomu těchto polarizací. Výsledkem bude změna polarizačního stavu světla závislá na natočení fázové destičky.

V praxi se převážně používají dva typy fázových destiček. Prvním typem je tzv. půlvlnná destička, značena \hat{R}_{HWP} , která zavádí relativní fázové zpoždění $\Delta\phi = \pi$.

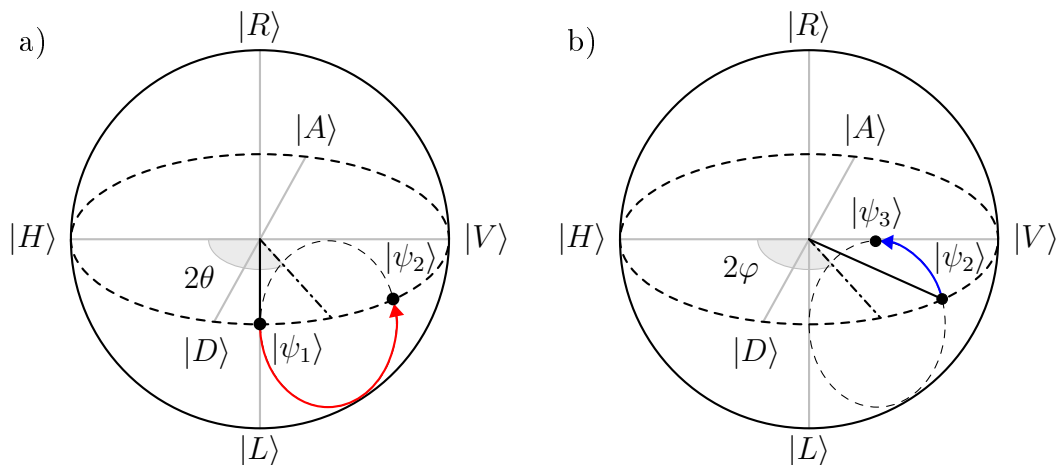
Operátor půlvlnné destičky, jejíž optická osa svírá s horizontální rovinou obecný úhel θ , má následující maticové vyjádření

$$\begin{aligned}\hat{R}_{HWP}(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Druhým typem je tzv. čtvrtvlnná destička, značena \hat{R}_{QWP} , která zavádí relativní fázové zpoždění $\Delta\phi = \pi/2$. Operátor čtvrtvlnné destičky, jejíž optická osa svírá s horizontální rovinou obecný úhel φ , má následující maticové vyjádření

$$\begin{aligned}\hat{R}_{QWP}(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi + i \sin^2 \varphi & (1 - i) \cos \varphi \sin \varphi \\ (1 - i) \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi + i \cos^2 \varphi \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Transformace obecného stavu půlvlnnou a čtvrtvlnnou destičkou je vyobrazena na obr. 2.3. Manipulace stavu půlvlnnou destičkou je vyobrazena na obr. 2.3 a), kde červený vektor znázorňuje pootočení Poincarého sféry o 180° kolem osy, která je umístěna v rovině bázi $\{|H\rangle, |V\rangle\}$, $\{|D\rangle, |A\rangle\}$ a svírá úhel 2θ s osou horizontální polarizace $|H\rangle$. Transformací přejde stav $|\psi_1\rangle$ na stav $|\psi_2\rangle$. Dále na obr. 2.3 b) je modrým vektorem znázorněno pootočení Poincarého sféry o 90° kolem osy, která je umístěna v rovině bázi $\{|H\rangle, |V\rangle\}$, $\{|D\rangle, |A\rangle\}$ a svírá úhel 2φ s osou horizontální polarizace $|H\rangle$. Transformací přejde stav $|\psi_2\rangle$ na stav $|\psi_3\rangle$. Směr pootočení v obou případech je dán maticovou formou operátorů pro fázové destičky z relací (2.6) a (2.7).



Obr. 2.3. a) Transformace stavu $|\psi\rangle$ v Poincarého sféře pomocí půlvlnné destičky, kde červený vektor naznačuje rotaci stavu $|\psi_1\rangle$ do $|\psi_2\rangle$ kolem osy otočené o úhel 2θ od stavu $|H\rangle$. b) Transformace stavu čtvrtvlnnou destičkou, kde modrý vektor naznačuje rotaci stavu $|\psi_2\rangle$ do $|\psi_3\rangle$ kolem osy otočené o úhel 2φ od stavu $|H\rangle$. Převzato a upraveno z reference [37].

Polarizátory

Dalším zmíněným optickým prvkem je polarizátor, značen \hat{R}_{PL} . Pro polarizaci světla se využívají různé fyzikální principy, kterými jsou např. absorpce pro vybranou polarizaci, totální odraz, dopad svazku pod Brewsterovým úhlem nebo i kombinace

těchto principů. Zde bude uveden jako příklad polarizátor nazývaný jako Glan-Taylorův hranol, viz obr. 2.2 c), který byl použit v experimentální části této práce. Tento polarizátor je zkonstruován ze dvou jednoosých krystalů ve tvaru hranolu, pro jejichž indexy lomu platí $n_o > n_e$. Hranoly jsou umístěny tak, aby mezi nimi byla malá vzduchová mezera. Směr šíření svazku svírá s optickou osou krystalu úhel $\vartheta = 90^\circ$. Pro geometrické oddělení řádného a mimořádného svazku se využívá princip totálního odrazu na rozhraní prvního hranu se vzduchovou mezerou. Hranoly jsou orientovány tak, aby totální odraz nastal pouze pro řádný svazek, čehož je možné dosáhnout, jelikož platí $n_o > n_e$. Dále úhel totálního odrazu může být zvolen blízko Brewsterovu úhlu, což je úhel, při kterém dochází ke zvýšení propustnosti pro polarizaci rovnoběžnou s rovinou dopadu, kterou je v daném uspořádání polarizace mimořádného svazku. Tímto se sníží odraz mimořádného svazku na rozhraní krystalu se vzduchovou mezerou.

Je-li uvažován ideální polarizátor, který propouští pouze horizontální složku polarizace a jeho optická osa je pootočená o obecný úhel χ vůči horizontální ose, maticová forma jeho operátoru je následující

$$\begin{aligned}\hat{R}_{PL}(\chi) &= \begin{pmatrix} \cos \chi & -\sin \chi \\ \sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi & \sin \chi \\ -\sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \chi & \cos \chi \sin \chi \\ \cos \chi \sin \chi & \sin^2 \chi \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Rozposouvače svazku

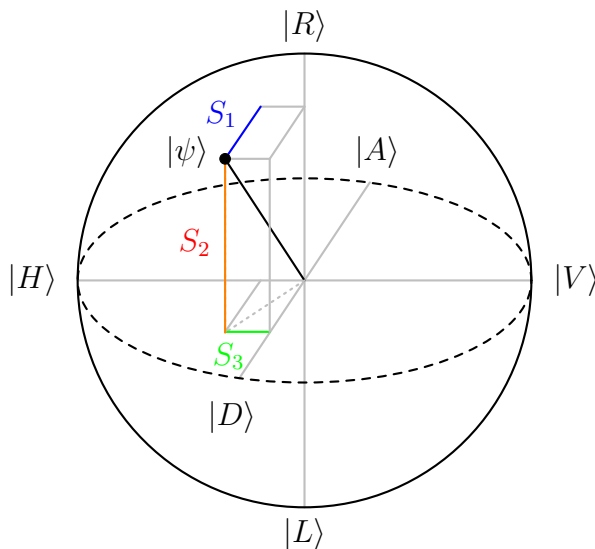
Posledním zmíněným optickým elementem je BD, viz obr. c). Směr světelného svazku svírá úhel ϑ s optickou osou, který bývá 45° , kde dvojlom je největší. Na rozhraní krystalu dochází k odklonu směru mimořádného svazku od řádného o úhel δ , který se nazývá úhlem dvojlomu. Směr šíření mimořádného svazku, který cítí index lomu $n_e(\vartheta)$, lze získat výpočtem jeho Poyntingova vektoru. Rozposunuté svazky budou z krystalu vystupovat paralelně ve směru normály. Vzdálenost rozposunutí je lineárně úměrná délce krystalu.

2.1.3 Kvantová tomografie stavu

Jak bylo popsáno v kapitole 2.1.1, dvouhladinový kvantový stav lze zobrazit Poicarého sféře. Otázkou ovšem zůstává, jak přesně určit tento kvantový stav. Odpověď lze hledat v analogii s fotografováním. Fotografie je proces, který převede trojrozměrnou scénu na dvojrozměrný snímek. Při tomto procesu se ztrácí informace o hloubce scény. Rekonstrukcí trojrozměrného objektu ze snímků se zabývá věda zvaná fotogrammetrie. Pro tuto rekonstrukci je nutné pořídít alespoň dva snímky rekonstruované scény s přesně známou polohou fotogrammetrické komory při záznamu snímků a je nutné znát parametry této fotogrammetrické komory [38]. Tento klasický měřicí proces lze napodobit v kvantové mechanice.

Poincarého sféra je analogií sféry v kartézských souřadnicích. Každý bod sféry je přesně určen třemi souřadnicemi. Tyto souřadnice se nazývají Stokesovy parametry, které jsou běžně používány pro popis polarizace světla, kdy každému parametru S_1 , S_2 , S_3 je přiřazena jedna dvojice polarizačních bázevých stavů $\{|D\rangle, |A\rangle\}$, $\{|R\rangle, |L\rangle\}$, $\{|H\rangle, |V\rangle\}$, viz obr. 2.4, a dále se zavádí normalizační parametr S_0 , který bývá roven jedné. Stokesovy parametry lze získat projekcí na dvojice bázevých stavů. Obecněji lze provádět měření v neortogonální bázi [39], které zde nebude uvažováno. Projekcí

je způsoben kolaps měřeného stavu, viz kapitola 1.1.3. Je nutné tedy připravit mnoho, ideálně nekonečno, identických kvantových systémů, na kterých je možno provádět měření. Na naměřená data je následně použit matematický algoritmus, kterým se získá matice hustoty měřeného stavu. První, nejvíce intuitivní metodou je vyjádření operátoru hustoty ze Stokesových parametrů. Tato metoda se nazývá lineární inverze. Druhá, sofistikovanější metoda je konstrukce operátoru hustoty metodou maximální věrohodnosti. Existuje více metod pro konstrukci matice hustoty, např. metoda Bayesian a estimace maximální entropie [40]. Zde ovšem budou krátce popsány pouze první dvě výše zmíněné. Experimentální proces nalezení neznámé matice hustoty se nazývá kvantová tomografie stavu [1].



Obr. 2.4. Vyobrazení stavu $|\psi\rangle$ v Poincarého sféře s přiřazenými Stokesovými parametry S_1 , S_2 a S_3 .

Metoda lineární inverze

Jak bylo výše řečeno, Stokesovy parametry se dají vyjádřit jako projekce do bází [41]

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \text{Tr}\{\hat{P}_{|H\rangle}\hat{\rho}\} + \text{Tr}\{\hat{P}_{|V\rangle}\hat{\rho}\} = \text{Tr}\{\hat{\sigma}_0\hat{\rho}\} = \mathbf{P}_{|H\rangle} + \mathbf{P}_{|V\rangle}, \\
 S_1 &= \text{Tr}\{\hat{P}_{|D\rangle}\hat{\rho}\} - \text{Tr}\{\hat{P}_{|A\rangle}\hat{\rho}\} = \text{Tr}\{\hat{\sigma}_1\hat{\rho}\} = \mathbf{P}_{|D\rangle} - \mathbf{P}_{|A\rangle}, \\
 S_2 &= \text{Tr}\{\hat{P}_{|R\rangle}\hat{\rho}\} - \text{Tr}\{\hat{P}_{|L\rangle}\hat{\rho}\} = \text{Tr}\{\hat{\sigma}_2\hat{\rho}\} = \mathbf{P}_{|R\rangle} - \mathbf{P}_{|L\rangle}, \\
 S_3 &= \text{Tr}\{\hat{P}_{|H\rangle}\hat{\rho}\} - \text{Tr}\{\hat{P}_{|V\rangle}\hat{\rho}\} = \text{Tr}\{\hat{\sigma}_3\hat{\rho}\} = \mathbf{P}_{|H\rangle} - \mathbf{P}_{|V\rangle},
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

kde $\mathbf{P}_{|\phi\rangle}$ představuje pravděpodobnost, že stav $\hat{\rho}$ projde testem na přítomnost stavu $|\phi\rangle$, $\hat{P}_{|\phi\rangle}$ je projektor na stav $|\phi\rangle$, kdy tento stav je vlastním stavem třech Pauliho matic $\hat{\sigma}_{1,2,3}$, jejichž explicitní vyjádření s doplněním čtvrté matice $\hat{\sigma}_0$ je následující

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Stokesovy parametry definují matici hustoty $\hat{\rho}$ následující relací [41]

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \frac{S_i}{S_0} \hat{\sigma}_i. \tag{2.11}$$

Pro čisté normalizované stavy platí $\sum_{i=1}^3 S_i^2 = 1$, pro smíšené stavy platí $\sum_{i=1}^3 S_i^2 < 1$ a pro maximálně smíšené stavy $\sum_{i=1}^3 S_i^2 = 0$. Čisté stavy, v případě kódování qubitu do polarizace, leží na povrchu sféry a odpovídají úplně polarizovanému záření, smíšené stavy leží vně a odpovídají částečně polarizovanému záření a maximálně smíšené leží uprostřed a odpovídají nepolarizovanému záření. Matice hustoty $\hat{\rho}$ má v bázi $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ následující formu

$$\hat{\rho} = \begin{array}{c} |H\rangle \\ |V\rangle \end{array} \begin{pmatrix} |H\rangle & |V\rangle \\ \hat{\rho}_{(1,1)} & \hat{\rho}_{(1,2)} \\ \hat{\rho}_{(2,1)} & \hat{\rho}_{(2,2)} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

kde $\hat{\rho}_{(i,j)}$ je element matice hustoty. Jedná se o matici hustoty jednoqubitového stavu.

Konstrukce matice hustoty lineární metodou ovšem může dát nefyzikální matici hustoty, např. $\text{Tr}\{\hat{\rho}^2\} > 1$, jelikož její odolnost vůči experimentálním chybám je nízká [42]. Vhodnější metodou pro konstrukci matice hustoty je metoda maximální věrohodnosti.

Metoda maximální věrohodnosti

Metoda maximální věrohodnosti se snaží zkonstruovat matici hustoty tak, aby tato matice co nejpravděpodobněji generovala naměřená data. Tato zkonstruovaná matice hustoty je co nejvěrohodnější maticí hustoty měřeného stavu [37].

Hledání operátoru hustoty je prováděno skrz maximalizaci funkce věrohodnosti [43]

$$L(\hat{\rho}) = \prod_i \text{Tr}\{\hat{P}_{|\phi\rangle}\hat{\rho}\}^{n_{|\phi\rangle}}, \quad (2.13)$$

kde $n_{|\phi\rangle}$ je naměřená hodnota (např. klasická intenzita nebo počet detekcí fotonů) pro projektor $\hat{P}_{|\phi\rangle}$ a $\hat{\rho}$ je konstruovaná matice hustoty. Hledaná matice hustoty $\hat{\rho}_{\text{ML}}$ maximalizuje funkci věrohodnosti.

Jelikož funkce věrohodnosti je pozitivní a hledá se její maximum, je využito funkce logaritmu, u kterého je zajištěno, že je funkcí rostoucí [43]

$$\log L(\hat{\rho}) = \sum_{|\phi\rangle} n_{|\phi\rangle} \log(\text{Tr}\{\hat{P}_{|\phi\rangle}\hat{\rho}\}). \quad (2.14)$$

Matice hustoty $\hat{\rho}_{\text{ML}}$ je získána iteračním algoritmem

$$\hat{\rho}_{k+1} = \frac{\hat{W}(\hat{\rho}_k)\hat{\rho}_k\hat{W}(\hat{\rho}_k)}{\text{Tr}\{\hat{W}(\hat{\rho}_k)\hat{\rho}_k\hat{W}(\hat{\rho}_k)\}}, \quad (2.15)$$

kde \hat{W} je pozitivní operátor, pro který platí následující relace

$$\hat{W} \approx \sum_{|\phi\rangle} n_{|\phi\rangle} \frac{\partial \log(\text{Tr}\{\hat{P}_{|\phi\rangle}\hat{\rho}\})}{\partial \text{Tr}\{\hat{P}_{|\phi\rangle}\hat{\rho}\}} \hat{P}_{|\phi\rangle} = \frac{1}{M} \sum_{|\phi\rangle} \frac{n_{|\phi\rangle}}{\text{Tr}\{\hat{P}_{|\phi\rangle}\hat{\rho}\}} \hat{P}_{|\phi\rangle}, \quad (2.16)$$

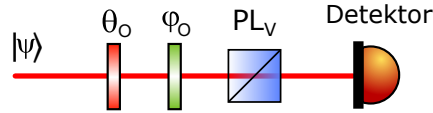
kde M je normalizační konstanta. Operátor \hat{W} je směrovou derivací relace (2.14), kde směr derivace je dán projektorem $\hat{P}_{|\phi\rangle}$. Počátek iteračního procesu lze začít libovolnou maticí hustoty, která není nulová.

Optická soustava pro provedení jednoqubitové tomografie stavu

Jako příklad jednoqubitové kvantové tomografie stavu lze použít optickou soustavu na obr. 2.5. Matematické vyjádření optické soustavy je dáno operátory pro optické prvky v soustavě, viz kapitola 2.1.2, v následujícím uspořádání

$$\hat{R}_P(90^\circ, \varphi_O, \theta_O) = PL_V \hat{R}_{QWP}(\varphi_O) \hat{R}_{HWP}(\theta_O), \quad (2.17)$$

kde bylo definováno $PL_V = \hat{R}_{PL}(90^\circ)$. Polarizátor tedy propouští pouze vertikální složku polarizace.



Obr. 2.5. Schéma optické soustavy pro provedení projekce obecné stavu do polarizačních bází. Parametr θ_O je úhel natočení půlvlnné destičky $\hat{R}_{HWP}(\theta_O)$, φ_O je úhel natočení čtvrtvlnné destičky $\hat{R}_{QWP}(\varphi_O)$ a PL_V je označení pro polarizátor propouštějící pouze vertikální složku polarizace.

Je-li požadována projekce do obecné báze $|\psi\rangle\langle\psi|$, potom transformace vyobrazenou optickou soustavou musí splňovat relaci

$$\hat{R}_P(\varphi_O, \theta_O) = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (2.18)$$

Parametry soustavy jsou nastaveny tak, aby qubit ve stavu $|\phi\rangle$ prošel touto soustavou s maximální pravděpodobností, která je dána relací

$$\mathbf{P}_{|\psi\rangle} = \langle\psi|\hat{R}_P(\varphi_O, \theta_O)|\psi\rangle = |\langle\psi|\psi\rangle|^2 = 1, \quad (2.19)$$

tedy pravděpodobnost průchodu je rovna jedné. Přejde-li na vstup optické soustavy stav $|\psi_\perp\rangle$, $\langle\psi|\psi_\perp\rangle = 0$, jeho transformace soustavou je dána relací

$$\hat{R}_P(\varphi_O, \theta_O)|\psi_\perp\rangle = 0, \quad (2.20)$$

tedy pravděpodobnost průchodu bude rovna nule.

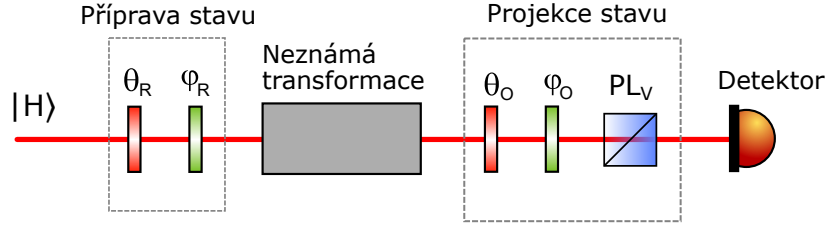
Pro provedení úplného projektivního měření je požadována projekce do všech polarizačních bází $\{|D\rangle, |A\rangle\}$, $\{|R\rangle, |L\rangle\}$, $\{|H\rangle, |V\rangle\}$. Nahrazení báze $|\psi\rangle\langle\psi|$ jednotlivými polarizačními bázemi lze nalézt hodnoty úhlů φ_O a θ_O fázových destiček v relaci (2.17), viz tabulka 2.1.

Tabulka 2.1: Nastavení fázových destiček v optické soustavě na obr. 2.5 pro projekci obecného stavu do polarizačních bází.

Báze	$\hat{R}_{HWP}(\theta_O)[^\circ]$	$\hat{R}_{QWP}(\varphi_O)[^\circ]$
$ H\rangle\langle H $	45	0
$ V\rangle\langle V $	0	0
$ D\rangle\langle D $	-22,5	0
$ A\rangle\langle A $	22,5	0
$ R\rangle\langle R $	0	45
$ L\rangle\langle L $	0	-45

2.1.4 Kvantová tomografie procesu

V předcházející kapitole byl popsán proces jednoqubitové kvantové tomografie stavu. Tímto procesem byl získán operátor hustoty stavu. Optická soustava na obr. 2.5 lze rozšířit o obecnou, neznámou, transformaci, která předchází projekční části před detektorem a o člen přípravy stavu, který je složen z jedné půlvlnné a jedné čtvrtvlnné destičky. Současně se uvažuje, že na vstupu optické soustavy jsou qubity ve stavu $|H\rangle$. Toto rozšíření je zobrazeno na obr. 2.6.



Obr. 2.6. Schéma optické soustavy pro provedení přípravy stavu $|H\rangle$ a projekce obecné stavu do polarizačních bází. Parametry θ_R a θ_O jsou úhly natočení půlvlnných destiček $\hat{R}_{HWP}(\theta_R)$ a $\hat{R}_{HWP}(\theta_O)$, φ_R a φ_O jsou úhly natočení čtvrtvlnných destiček $\hat{R}_{QWP}(\varphi_R)$ a $\hat{R}_{QWP}(\varphi_O)$, PL_V je označení pro polarizátor propouštějící vertikální složku polarizace.

Vstupu neznámé transformace předchází dvojice fázových destiček s následujícím operátorovým vyjádřením

$$\hat{R}_R(\varphi_R, \theta_R) = \hat{R}_{QWP}(\varphi_R) \hat{R}_{HWP}(\theta_R). \quad (2.21)$$

Tato kombinace fázových destiček dovolí transformovat vstupní qubit ze stavu $|H\rangle$ na libovolný jiný stav, který leží na povrchu Poincarého sféry. Sada optických komponent za neznámou transformací slouží k projekci do polarizačních bází, která byla popsána v kapitole 2.1.3.

Neznámá transformace qubitu obsahuje libovolné množství optických komponent, ale vyznačuje se pouze jedním qubitem na vstupu a jedním na výstupu. Jedná se o transformaci $\hat{\rho} \rightarrow \mathcal{L}(\hat{\rho})$, kterou lze formálně vyjádřit pomocí lineární mapy [44]

$$\mathcal{L}(\hat{\rho}) = \sum_i^N p_i \hat{K}_i \hat{\rho} \hat{K}_i^\dagger, \quad (2.22)$$

kde p_i jsou pravděpodobnosti, pro kterou platí $\sum_i^N p_i = 1$ a \hat{K}_i jsou Krausovy operátory, které obecně splňují podmínku

$$\sum_i^N \hat{K}_i \hat{K}_i^\dagger = 1. \quad (2.23)$$

Lineární mapa \mathcal{L} popisuje neznámou transformaci jako kvantový kanál, kdy tento kanál s pravděpodobnostmi p_i provádí transformaci stavu $\hat{\rho}$ vyjádřenou operátorem \hat{K}_i . Operátor \hat{K}_i lze pro jednoqubitový případ vyjádřit ve formě matice s dimenzí 2×2 a ve speciálním případě, kdy $N = 1$, lze lineární mapu nahradit popisem pomocí jednoho operátoru $\hat{K}_i = \hat{K}$ s $p_i = p = 1$.

Lineární mapu \mathcal{L} lze vyjádřit jako matici hustoty skrz Choi–Jamiołkowski izomorfismus, který pro jednoqubitovou transformaci má následující vyjádření [45]

$$\hat{\Pi} = \sum_i p_i (\mathbb{1}^{(2 \times 2)} \otimes_{\text{Kron}} \hat{K}_i) |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+| (\mathbb{1}^{(2 \times 2)} \otimes_{\text{Kron}} \hat{K}_i^\dagger), \quad (2.24)$$

kde „ \otimes_{Kron} “ značí Kroneckerův součin, $\mathbb{1}^{(2 \times 2)}$ je matice identity s dimenzí 2×2 , $\hat{\Pi}$ je matice hustoty procesu, která popisuje lineární mapu \mathcal{L} jako sumu operátorů ($\mathbb{1}^{(2 \times 2)} \otimes_{\text{Kron}} \hat{K}_i$), kterým jsou jednotlivě přiřazeny pravděpodobnosti p_i a $|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$ je maximálně kvantově provázaný dvouqubitový stav, zvaný Bellův stav, jehož explicitní vyjádření je následovné

$$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| = \frac{1}{2}(|H\rangle_A|H\rangle_B + |V\rangle_A|V\rangle_B)(\langle H|_A\langle H|_B + \langle V|_A\langle V|_B), \quad (2.25)$$

kde $|\cdot\rangle_A|\cdot\rangle_B$ je zkrácený zápis pro $|\cdot\rangle_A \otimes_{\text{Kron}} |\cdot\rangle_B$.

Izomorfní zobrazení mezi lineární mapou \mathcal{L} a maticí hustoty procesu $\hat{\Pi}$ lze zapsat taktéž jako [46]

$$\text{Tr}_A\{\hat{\Pi}(\hat{\rho}_A \otimes \mathbb{1}_B^{(2 \times 2)})\} = \mathcal{L}(\hat{\rho}_A) = \hat{\rho}_B, \quad (2.26)$$

kde $\hat{\rho}_A$ je stav na vstupu neznámé transformace, $\hat{\rho}_B$ je stav na výstupu neznámé transformace a „ Tr_A “ značí částečnou stopu přes subsystém A . Obecné vyjádření pravděpodobnosti naměření hodnoty je dáno relací (1.42), která pro předložený dvouqubitový případ bude mít následující formu

$$\text{Tr}\{|\cdot\rangle_A|\cdot\rangle_B\langle\cdot|_A\langle\cdot|_B\hat{\Pi}\}, \quad (2.27)$$

kde stav $|\cdot\rangle_B$ vyjadřuje bázi, do které se promítá, jelikož operátor \hat{K}_i v relaci (2.24) působí na subsystém B a stav $|\cdot\rangle_A$ potom vyjadřuje připravený stav qubitu na vstupu neznámé transformace.

Matice hustoty $\hat{\Pi}$ má stejné vlastnosti jako operátor hustoty, resp. matice hustoty z kapitoly 1.1.1, zde ovšem mají jinou interpretaci. Pokud platí $\text{Tr}\{\hat{\Pi}^2\} < 1$, tak existují alespoň dvě nenulové pravděpodobnosti p_i neboli neznámá transformace je popsána alespoň dvěma operátory \hat{K}_i . Matice hustoty $\hat{\Pi}$ má v bázi $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ následující formu

$$\hat{\Pi} = \begin{matrix} & |H\rangle_A|H\rangle_B & |H\rangle_A|V\rangle_B & |V\rangle_A|H\rangle_B & |V\rangle_A|V\rangle_B \\ \begin{matrix} \langle H|_A\langle H|_B \\ \langle H|_A\langle V|_B \\ \langle V|_A\langle H|_B \\ \langle V|_A\langle V|_B \end{matrix} & \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_{(1,1)} & \hat{\Pi}_{(1,2)} & \dots & \dots \\ \hat{\Pi}_{(2,1)} & \hat{\Pi}_{(2,2)} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} & \end{matrix}, \quad (2.28)$$

kde $\hat{\Pi}_{i,j}$ je element matice hustoty $\hat{\Pi}$. Jedná se o matici hustoty dvouqubitového stavu. Explicitní vyjádření matice hustoty $\hat{\Pi}$ pro tuto neznámou transformaci je úkolem kvantové tomografie procesu.

Pro nalezení matice hustoty $\hat{\Pi}$ se použije optická soustava na obr. 2.6, kdy vstupní qubit ve stavu $|H\rangle$ je členem přípravy stavu postupně pootočen do ostatních polarizačních bázevých stavů $|H\rangle, |V\rangle, |D\rangle, |A\rangle, |R\rangle, |L\rangle$ a pro každý takto připravený stav je provedena úplná tomografie stavu, tedy je provedena projekce do všech polarizačních bází $\{|D\rangle, |A\rangle\}, \{|R\rangle, |L\rangle\}, \{|H\rangle, |V\rangle\}$. Tímto způsobem je získáno celkem 36 naměřených hodnot. Nastavení fázových destiček pro člen přípravy stavu je sepsáno v tabulce 2.2.

Protože soustava na obr. 2.6 představuje jednoqubitovou transformaci, ale je popsána dvouqubitovou maticí hustoty $\hat{\Pi}$, je nutné provést dodatečnou matematickou operaci. Pokud je připraven na vstupu neznámé transformace qubit ve stavu $|R\rangle_A$ nebo $|L\rangle_A$, provede se komplexní sdružení tohoto qubitu v projektorech

$$\begin{aligned} |R\rangle_A|\cdot\rangle_B\langle R|_A\langle\cdot|_B &\rightarrow [|R\rangle_A]^*|\cdot\rangle_B\langle R|_A\langle\cdot|_B = |L\rangle_A|\cdot\rangle_B\langle L|_A\langle\cdot|_B, \\ |L\rangle_A|\cdot\rangle_B\langle L|_A\langle\cdot|_B &\rightarrow [|L\rangle_A]^*|\cdot\rangle_B\langle L|_A\langle\cdot|_B = |R\rangle_A|\cdot\rangle_B\langle R|_A\langle\cdot|_B, \end{aligned} \quad (2.29)$$

neboli naměřené hodnoty pro projektor $|R\rangle_A|\cdot\rangle_B\langle R|_A\langle\cdot|_B$, resp. $|L\rangle_A|\cdot\rangle_B\langle L|_A\langle\cdot|_B$ budou uloženy pod projektořem $|L\rangle_A|\cdot\rangle_B\langle L|_A\langle\cdot|_B$, resp. $|R\rangle_A|\cdot\rangle_B\langle R|_A\langle\cdot|_B$. Tato matematická operace je odůvodněna tím, že pokud by neznámá transformace na obr. 2.6 byla vyjádřena skřz Choi–Jamiołkowski izomorfismus dle relace (2.24) s operátorem $\hat{K}_i = \hat{K} = \mathbb{1}^{(2\times 2)}$ a na jejím vstupu by byl připraven qubit ve stavu $|R\rangle_A$, potom dle relace 2.26 bude získán následující výsledek

$$\text{Tr}_A\{\hat{\Pi}(|R\rangle_A\langle R|_A \otimes \mathbb{1}_B^{(2\times 2)})\} = |L\rangle_A\langle L|_A. \quad (2.30)$$

Tento výsledek ovšem není správný, jelikož operátor popisující transformaci je identita, $\mathbb{1}^{(2\times 2)}$, přesto byla provedena transformace vstupního stavu $|R\rangle$ na stav $|L\rangle$. Tato skutečnost lze napravit výše popsáným komplexním sdružením.

Naměřené a výše popsáným postupem upravené hodnoty se vloží do iteračního algoritmu (2.16), jehož výsledkem je matice hustoty $\hat{\Pi}$. Nalezení operátorů \hat{K}_i je možné provést dosazením matice hustoty $\hat{\Pi}$ do relace (2.24) a následně provést numerickou optimalizaci.

Tabulka 2.2: Nastavení fázových destiček v optické soustavě na obr. 2.6 pro pootočení vstupního stavu $|H\rangle$ na ostatní polarizační bázové stavy.

Stav	$\hat{R}_{HWP}(\theta_R)[^\circ]$	$\hat{R}_{QWP}(\varphi_R)[^\circ]$
$ H\rangle$	0	0
$ V\rangle$	45	0
$ D\rangle$	22,5	45
$ A\rangle$	-22,5	45
$ R\rangle$	-45	45
$ L\rangle$	-45	-45

2.2 Přístrojové vybavení

2.2.1 Zdroj záření

Jako zdroj záření byla použita laserová dioda LP705-SF15, firmy Thorlabs, Inc., na jejímž katalogovém listu, který byl dodán výrobcem [47], je uvedeno, že vyzářuje na vlnové délce 698,6 nm s napájecím proudem od 30 mA do 80 mA, kdy 55 mA je typický napájecí proud a s optickým výkonem od 15 mW do 20 mW. Laserová dioda byla čerpána ovladačem pro laserové diody KLD101 K-Cube, firmy Thorlabs, Inc., který slouží pro regulaci napájení laserových a LED diod. Regulace proudu probíhala skřz kontrolní panel a indikátory ovladače. Laserový svazek diody je výrobcem navázán do optické vlákna SM600, firmy Thorlabs, Inc., pro které výrobce udává [48], že je jednomodové pro delší vlnové délky než 633 nm a nad vlnovou délkou 780 nm rostou ztráty, šířka přenášeného optického svazku uvnitř vlákna (MFD parametr, anglicky *Mode Field Diameter*) je od 3,6 μm do 6,3 μm při vlnové délce světla 633 nm, kdy s rostoucí vlnovou délkou roste i šířka svazku. Optické vlákno má koncovku FC/PC.

2.2.2 Polarizační kontrolér

Při provádění experimentu bylo nutné nastavit požadovanou polarizaci záření, které vstupovalo do optické soustavy z optického vlákna. Pro tento účel byl použit polarizační

kontrolér FPC030, firmy Thorlabs, Inc., který byl pevně umístěn ihned před vstupem do optické soustavy. Polarizace záření byla nastavena rotací třech pádel v rozsahu 235° , kdy v jednotlivých pádlech byly upevněny 1-2-1 smyčky optického vlákna o průměru 27 mm tak, aby jednotlivá pádla vykonávala funkci čtvrtvlnné (1 smyčka) a půlvlnné (2 smyčky) fázové destičky, viz reference [49].

2.2.3 Optické prvky

Jak na vstupu, tak výstupu experimentální optické soustavy byla v xy posuvu umístěna asférická čočka C260TMD-B, firmy Thorlabs, Inc., která má dle výrobce [50] průměr apertury 5,00 mm, ohniskovou vzdálenost $15,29 \text{ mm} \pm 1\%$ a je určena pro vlnovou délku záření 780 nm s antireflexní povrstvením pro vlnovou délku od 600 nm do 1050 nm (-B povrstvení). Posuv čočky v rovině xy upravoval dráhu svazku a posuv. Konec optické vlákna od laserové diody byl umístěn před čočkou v z posuvu, který sloužil pro úpravu vzájemné vzdálenosti konce optického vlákna a čočky, čímž se upravovala pozice pasu svazku doprostřed aparatury.

Pro změnu polarizace záření v experimentální optické soustavě byly použity tzv. zero order čtvrtvlnné a půlvlnné fázové destičky. Destičky jsou optimalizovány tak, aby fázový rozdíl π , resp. $\pi/2$ nastal přesně pro 710 nm, navíc mají na tuto vlnovou délku antireflexní vrstvy minimalizující ztráty při odraze. Tyto fázové destičky byly vyrobeny na zakázku od firmy EK SMA Optics. Fázové destičky byly umístěny v motorizovaných rotacích PR50CC a SR50CC, firmy Newport Corporation. Pohyb rotací byl zajištěn stejnosměrným motorem. Podrobnější popis lze nalézt v referenci [51]. Každá z rotací byla ovládána skrz ovladač pro stejnosměrné a krokové motory SMC100CC, firmy Newport Corporation. Možnost propojení více ovladačů se provádí skrz rozhraní RS485, ale pouze jeden z ovladačů je propojen s počítačem skrz rozhraní RS232. Toto zapojení se nazývá Daisy Chain. Ovladačům jsou zaslány ASCII příkazy na jim přiřazené adresy. Více podrobností lze nalézt v referenci [52].

V experimentální optické soustavě byl umístěn polarizátor DGL10 - dvojitý Glan-Taylor, firmy Thorlabs, Inc., který dle výrobce [53] má poměr intenzit polarizovaného světla v ose polarizátoru vůči polarizovanému světlu kolmo na osu polarizátoru 100 000 : 1 pro vlnovou délku světla v rozsahu od 350 nm do 2,3 μm .

2.2.4 Interferometr

V experimentální optické soustavě byl sestaven Mach-Zehnderův interferometr, který se skládal ze dvou rozposouvačů svazků BD40, firmy Thorlabs, Inc., který dle výrobce [54] rozdělí svazek na dvě polarizační složky do prostorové vzdálenosti 4,25 mm pro námi používanou spektrální oblast. Vstupní a výstupní rozposouvač svazků byl nastaven tak, aby odklonil horizontální polarizaci světla paralelně s horizontální rovinou optického stolu. Pro nastavení fázového rozdílu mezi jednotlivými dráhami svazku byl vstupní BD vykláněn paralelně s rovinou optického stolu piezoelektrickým aktuátorem, firmy Thorlabs, Inc., který dle výrobce [55] umožňuje šroubem hrubý zdvih do 4 mm a piezoelektrickým elementem jemné doladění do 15 μm . Pro ovládání piezoelektrického elementu je z piezoelektrického aktuátoru vyveden kabel s BNC koncovkou, která byla připojena do D/A převodníku EPCD-300/400, který vyrobila Společná laboratoř optiky UP a FZÚ AV ČR.

Za vstupním děličem svazku byl umístěn obdélníkový šedý filtr NDL-25C-4, firmy Thorlabs, Inc., jehož funkce transmise se plynule mění. Výrobce v referenci [56] uvádí,

že tento filtr je vyroben z křemenného skla a jeho aktivní plocha je vytvořena povrstvením jedné strany kovovou slitinou Inconel (NiCrFe). Rozměr filtru je 10 mm × 100 mm s absorbcí v intervalu od 0,04 do 4,0.

Šedý filtr byl upevněn v mechanické gilotince 840-0170, firmy Eksma Optics a umístěn na motorizovaném lineárním posuvu MFA-CC, firmy Newport Corporation, který je dle výrobce [57] vybaven stejnosměrným motorem a jeho základní mechanické parametry jsou rozsah posuvu 25 mm, minimální posuv 0,1 μm a typická přesnost posuvu ± 3,0 μm. Ovládání lineárního posuvu bylo prováděno s použitím ovladače SMC100CC. Jelikož šedý filtr prodlužuje dráhu svazku v jednom rameni interferometru, pro vykompenzování dráhy v druhém rameni byly v mechanické gilotince 840-0170 umístěny dvě laboratorní sklíčka, která společně měla tloušťku šedého filtru.

Před výstupním děličem svazku byla umístěna půlvlnná destička, která byla pootočená vůči horizontální ose o 45°. Došlo tedy k záměně polarizace z horizontální na vertikální v jednom rameni interferometru a opačně ve druhém. Tím se docílí stavu, že část svazku, která na vstupu interferometru nebyla odkloněna, nyní na výstupu odkloněna bude. Touto metodou bude dosažena velká přesnost překrytí obou svazků na výstupu interferometru. Tento model Mach-Zehnderova interferometru se nazývá polarizační, jelikož oba polarizační módy jsou vyvedeny na jeden výstup.

2.2.5 Detektor

Výstupní signál z optické soustavy byl navázán do jednomódového vlákna SM600, aby bylo dosaženo maximálního překryvu polarizačních módů z interferometru. Jako senzor byla použita křemíková fotodioda S120VC, firmy Thorlabs, Inc., která je dle výrobce [58] vhodná pro použití v rozsahu vlnových délek světla od 200 nm do 1100 nm pro optický výkon v rozsahu od 50 nW do 50 mW s maximální přípustnou energií pulzu 20 μJ, nejistotou měření ±3% pro vlnové délky od 440 nm do 980 nm a průměrem apertury 9,5 mm. Fotodioda byla připojena ke kompaktní měřicí konzoli PM100D, firmy Thorlabs, Inc., přes rozhraní DB9. Konzole umožňuje automatickou změnu rozsahu měřeného výkonu a korekci pro měřenou vlnovou délku.

2.3 Experimentální úlohy

Cílem experimentu byl návrh lineárně-optické soustavy, kterou by bylo možné realizovat obecnou neunitární transformaci qubitu zakódovaného do polarizace. Požadovaná soustava byla nejdříve schématicky navržena, následně byly provedeny simulace v programovacím jazyku Python verze 3.8 a po provedení úspěšných simulací byla tato soustava sestavena na optickém stole. Realizaci obecné neunitární transformace předcházela řada měřících procesů jako nalezení optických os fázových destiček, měření příčného profilu svazku, funkce transmise šedého filtru a realizace obecné unitární transformace.

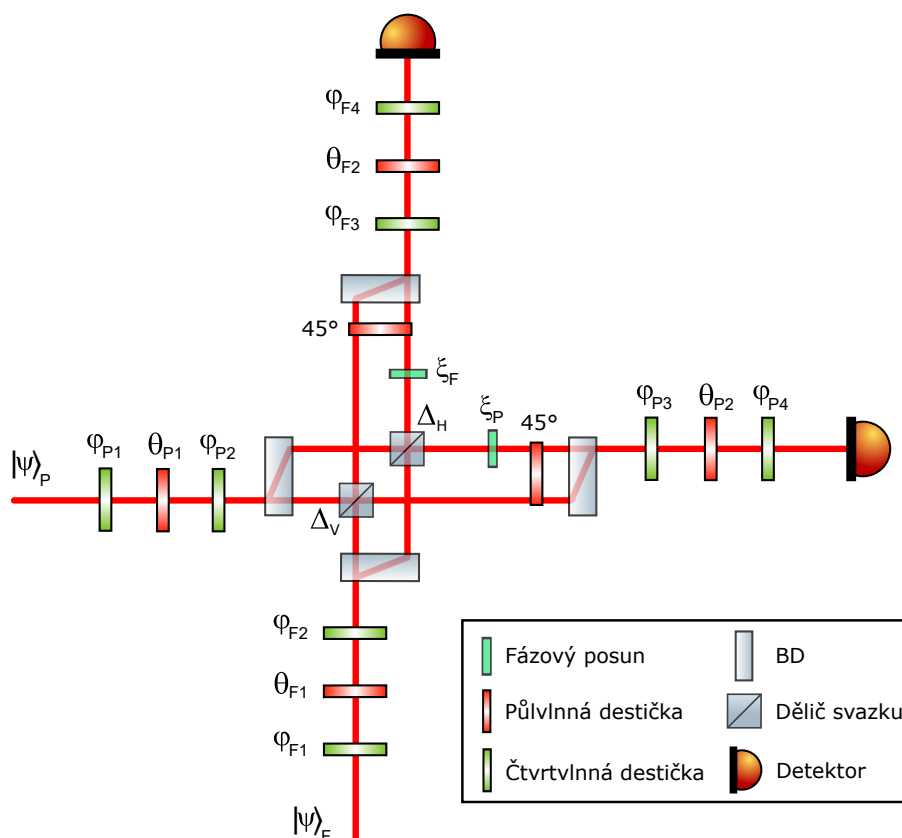
2.3.1 Schéma lineární optické soustavy a její simulace

Jednou z metod, jak vytvořit neunitární transformaci, je vyjmout subsystém z unitárního systému, který je nějakým mechanismem spřažen s ostatními částmi systému. Toto propojení způsobí v subsystémů ztráty, zisk nebo kombinaci obou. Evoluce subsystému potom bude obecně vyjádřena neunitárním procesem. Pro lineárně-optickou soustavu lze spřažení systémů provést pomocí děličů svazku. Bude-li pozorován pouze

vybraný optický mód a ostatní budou zanedbány, výsledný proces bude obecně popsán neunitární transformací.

Na začátek je nutné poznamenat, že všechny schématicky nakreslené optické soustavy, které se nachází v kapitole 2.3, jsou zakresleny pohledem shora, tedy optický stůl, na kterém byly sestaveny, je rovina nákresu a pro jejich vytvoření byla využita volně dostupná knihovna optický prvků z reference [59].

Schéma optické soustavy pro realizaci obecné unitární transformace je vyobrazeno na obr. 2.7. Tato soustava je složena ze dvou polarizačních Mach-Zehnderových interferometrů, kdy každému interferometru je přiřazen jeden optický mód a jeden detektor. Interferometry jsou spřaženy dvěma regulovatelnými bezztrátovými děliči svazku. Před výstupním BD u obou interferometrů je vložena do ramene s horizontální polarizací kontrolovatelná fáze, za kterou následuje půlvlnná destička s fixním úhel 45° . Před vstupem a za výstupem obou interferometrů je umístěna trojice fázových destiček. Matematický popis sestavy je následující.



Obr. 2.7. Schéma virtuální optické soustavy, která provádí obecnou dvouqubitovou unitární transformaci. Popis použitých prvků v soustavě je uveden v legendě obrázku. Podrobnější popis soustavy je uveden v textu.

Na vstupu optické soustavy jsou přivedeny dva qubity ve stavu

$$|\psi_P\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{P(1)} \\ \psi_{P(2)} \end{pmatrix}, \quad |\psi_F\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{F(1)} \\ \psi_{F(2)} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

kde $\psi_{P(1)}$ a $\psi_{F(1)}$, resp. $\psi_{P(2)}$ a $\psi_{F(2)}$ jsou horizontální, resp. vertikální složky stavů $|\psi_P\rangle$ a $|\psi_F\rangle$. Stavů dvou qubitů jsou uspořádány do jednotlivých módů následujícím způsobem

$$\begin{pmatrix} |\psi_P\rangle \\ |\psi_F\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

BD jsou nastaveny tak, aby odklonily horizontální složku polarizace a operátory děličů svazku mají následující maticové vyjádření

$$\begin{aligned}\hat{B}S_H(\Delta_H) &= \begin{pmatrix} \cos \Delta_H & -\sin \Delta_H \\ \sin \Delta_H & \cos \Delta_H \end{pmatrix}, \\ \hat{B}S_V(\Delta_V) &= \begin{pmatrix} \cos \Delta_V & -\sin \Delta_V \\ \sin \Delta_V & \cos \Delta_V \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.33}$$

kde parametr $0 \leq \Delta_{H,V} < 2\pi$, členy $\cos \Delta_{H,V}$ a $\sin \Delta_{H,V}$ vyjadřují transmisi a reflexi. Tato optická soustava provádí dvouqubitovou transformaci a její operátorové vyjádření je následující

$$\begin{aligned}\hat{U}_S &= \hat{R}_V(\varphi_{F4}, \varphi_{P4}, \theta_{F2}, \theta_{P2}, \varphi_{F3}, \varphi_{P3}) \hat{R}_S(45^\circ, 45^\circ) \hat{E}(\xi_F, \xi_P) \\ &\hat{B}S(\Delta_H, \Delta_V) \hat{R}_I(\varphi_{F2}, \varphi_{P2}, \theta_{F1}, \theta_{P1}, \varphi_{F1}, \varphi_{P1}),\end{aligned}\tag{2.34}$$

kde první trojice fázových destiček pro oba módy má následující vyjádření

$$\begin{aligned}\hat{R}_I(\varphi_{F2}, \varphi_{P2}, \theta_{F1}, \theta_{P1}, \varphi_{F1}, \varphi_{P1}) &= \begin{pmatrix} \hat{R}_{QWP}(\varphi_{P2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{R}_{QWP}(\varphi_{F2}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{R}_{HWP}(\theta_{P1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{R}_{HWP}(\theta_{F1}) \end{pmatrix} &\begin{pmatrix} \hat{R}_{QWP}(\varphi_{P1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{R}_{QWP}(\varphi_{F1}) \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.35}$$

regulovatelné děliče svazku, které jsou umístěny mezi BD a slouží pro propojení dvou částí systému, mají následující maticové vyjádření

$$\hat{B}S(\Delta_H, \Delta_V) = \begin{pmatrix} \cos \Delta_H & 0 & -\sin \Delta_H & 0 \\ 0 & \cos \Delta_V & 0 & -\sin \Delta_V \\ \sin \Delta_H & 0 & \cos \Delta_H & 0 \\ 0 & \sin \Delta_V & 0 & \cos \Delta_V \end{pmatrix},\tag{2.36}$$

fázové členy, které jsou umístěny v ramenech s horizontální polarizací, mají následující vyjádření

$$\hat{E}(\xi_F, \xi_P) = \begin{pmatrix} e^{i\xi_P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\xi_F} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\tag{2.37}$$

půlvlnné destičky, které jsou umístěny před výstupními BD, jsou fixně pootočený o úhel 45°

$$\hat{R}_S(45^\circ, 45^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\tag{2.38}$$

poslední trojice fázových destiček, umístěné před detektory jednotlivých módů, mají

následující maticové vyjádření

$$\hat{R}_I(\varphi_{F4}, \varphi_{P4}, \theta_{F2}, \theta_{P2}, \varphi_{F3}, \varphi_{P3}) = \begin{pmatrix} \hat{R}_{QWP}(\varphi_{P4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{R}_{QWP}(\varphi_{F4}) \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{R}_{HWP}(\theta_{P2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{R}_{HWP}(\theta_{F2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{R}_{QWP}(\varphi_{P3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{R}_{QWP}(\varphi_{F3}) \end{pmatrix}.$$

Jelikož optická soustava na obr. 2.7 je uzavřená, libovolným nastavením optických komponent bude provedena dvouqubitová unitární transformace. Pro realizaci obecné neunitární transformace musí být nejdříve vygenerována tato obecná a náhodná unitární transformace dvouqubitového stavu. Postup generace této transformace je popsán v následujících bodech:

(i) Sestavení obecné unitární matice

$$\hat{U}_u = e^{i\omega} \begin{pmatrix} e^{i\omega_1} \cos \epsilon & e^{i\omega_2} \sin \epsilon \\ -e^{-i\omega_2} \sin \epsilon & e^{-i\omega_1} \cos \epsilon \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

kde ω , ω_1 , ω_2 a ϵ jsou reálné parametry.

(ii) Reálné parametry ω , ω_1 a ω_2 byly generovány náhodným generátorem s rovnoměrným rozdělením v intervalu od $-\pi$ do π a pro parametr ϵ platí relace $\epsilon = \arcsin \sqrt{\epsilon_0}$, kde parametr ϵ_0 byl generován funkcí s rovnoměrnou hodnotou pravděpodobnosti v intervalu od 0 do 1.

(iii) Vytvoření šesticte jednotkových matic s dimenzí 4×4 , ve kterých jsou obsaženy náhodně generované unitární matice \hat{U}_{ua} , \hat{U}_{ub} , \hat{U}_{uc} , \hat{U}_{ud} , \hat{U}_{ue} a \hat{U}_{uf} z výše uvedeného postupu

$$\hat{U}_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{U}_{ua} & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{U}_{ub} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_{uc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{U}_{ud} & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{U}_{ue} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{U}_{uf} & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}.$$

Po úspěšném vytvoření náhodné unitární transformace \hat{U}_T bylo nutné nastavit optické komponenty v optické soustavě na obr. 2.7 tak, aby tato transformace byla provedena. Nastavení optické soustavy bylo získáno pomocí numerické analýzy, která byla provedena funkcí `scipy.optimize.minimize` v programovacím jazyku Python v. 3.8. Vygenerovaná matice unitární transformace \hat{U}_T byla spolu s maticí operátoru optické soustavy \hat{U}_S vložena do uživatelem vytvořené funkce `mat_dot_product`, kde tyto matice byly normalizovány Frobeniusovou normou

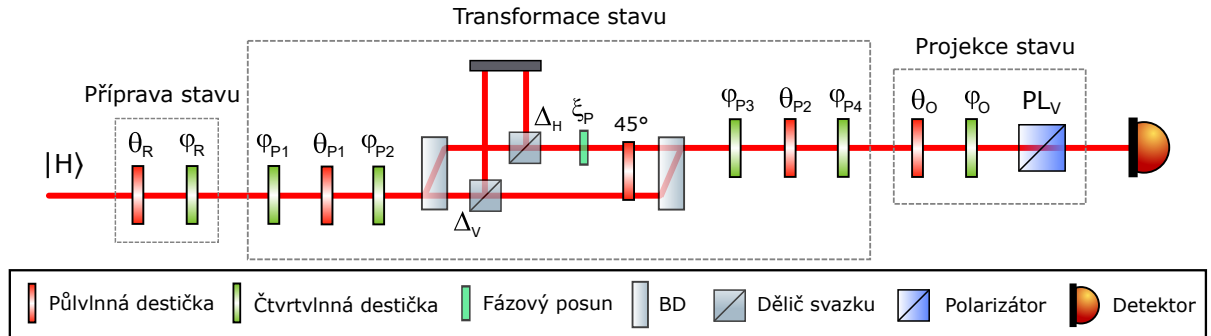
$$\|\hat{X}\| = \sqrt{\sum_{i,j} |x_{i,j}|^2}, \quad (2.42)$$

kde \hat{X} je obecná matice s obecně komplexními elementy $x_{i,j}$. Matice byly následně převedeny na dimenzi 16×1 následujícím způsobem

$$\begin{pmatrix} x_{(1,1)} & x_{(1,2)} & \cdots & \cdots \\ x_{(2,1)} & x_{(2,2)} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & x_{(4,4)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{(1,1)} \\ x_{(1,2)} \\ \vdots \\ x_{(4,3)} \\ x_{(4,4)} \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

a byl vypočten komplexní skalární součin, resp. hermitovský skalární součin (1.2) mezi vektorovými formami matice unitární transformace \hat{U}_T a matice operátoru optické soustavy \hat{U}_S . Výsledek skalárního součinu byl výstupem funkce `mat_dot_product`. Funkce `mat_dot_product` byla následně vložena do funkce `scipy.optimize.minimize`, která metodou SLSQP (Sekvenční programování metodou nejmenších čtverců, anglicky *Sequential Least Squares Programming*) hledala maximální hodnotu funkce `mat_dot_product`. Jestliže je skalární součin dvou normalizovaných vektorů roven jedné, tak tyto dva vektory jsou stejné. Jejich matice si budou tedy rovný. Výstupními hodnotami byl skalární součin a volné parametry operátoru \hat{U}_S .

Nyní je vhodné představit postup pro provedení obecné neunitární transformace. Pro realizaci obecné neunitární transformace byla navržena optická soustava, která je zobrazena na obr. 2.8. Tato soustava je analogií soustavy pro provedení kvantové tomografie procesu, viz obr. 2.6, kdy neznámá transformace je nahrazena členem transformace stavu, která provádí neunitární transformaci qubitu. V porovnání s optickou soustavou na obr. 2.7, člen transformace stavu představuje subsystémem, který byl vyjmut z plného unitárního systému. Byl ponechán pouze optický mód se stavem $|\psi_P\rangle$, který je nyní fixně zvolen jako stav $|H\rangle$. Na výstupu optické soustavy je měřen pouze jeden signál, druhý je zanedbán.



Obr. 2.8. Schéma virtuální optické soustavy, kde člen transformace provádí obecnou jednoqubitovou neunitární transformaci. Členy příprava stavu a projekce stavu slouží pro provedení kvantové tomografie procesu. Popis použitých prvků v soustavě je uveden v legendě obrázku. Podrobnější popis soustavy je uveden v textu.

Působení operátoru \hat{U}_S z relace (2.34) na dvouqubitový stav z relace (2.32), kde druhý optický mód na vstupu a na výstupu je zanedbán, lze zapsat jako

$$\hat{U}_S \begin{pmatrix} |\psi_P\rangle \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\psi_{PV}\rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

a explicitní vyjádření jednotlivých elementů

$$\begin{pmatrix} u_{S(1,1)} & u_{S(1,2)} & \cdots & \cdots \\ u_{S(2,1)} & u_{S(2,2)} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{P(1)} \\ \psi_{P(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{PV(1)} \\ \psi_{PV(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

kde $\psi_{PV(1)}$ a $\psi_{PV(2)}$ jsou složky stavu $|\psi_{P(V)}\rangle$ transformovaného operátorem \hat{U}_S a $u_{S(i,j)}$ jsou elementy matice operátoru \hat{U}_S . Stav $|\psi_P\rangle$ je efektivně ovlivněn pouze čtyřmi elementy matice, $u_{S(1,1)}$, $u_{S(1,2)}$, $u_{S(2,1)}$ a $u_{S(2,2)}$. Z tohoto zjednodušení plyne, že operátor soustavy na obr. 2.8 lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \hat{U}_{SP} &= \hat{R}_O(90^\circ, \varphi_O, \theta_O) \hat{R}_{VP}(\varphi_{P4}, \theta_{P2}, \varphi_{P3}) \hat{R}_{SP}(45^\circ) \hat{E}_P(\xi_P) \\ &\quad \hat{B}S_P(\Delta_H, \Delta_V) \hat{R}_{IP}(\varphi_{P2}, \theta_{P1}, \varphi_{P1}) \hat{R}_R(\varphi_R, \theta_R), \end{aligned} \quad (2.46)$$

kde operátory členů přípravy stavu $\hat{R}_R(\varphi_R, \theta_R)$ a projekce stavu $\hat{R}_O(90^\circ, \varphi_O, \theta_O)$ jsou dány relacemi (2.21) a (2.17), operátor pro první trojici fázových destiček členu transformace má následující vyjádření

$$\hat{R}_{IP}(\varphi_{P2}, \theta_{P1}, \varphi_{P1}) = \hat{R}_{QWP}(\varphi_{P2}) \hat{R}_{HWP}(\theta_{P1}) \hat{R}_{QWP}(\varphi_{P1}), \quad (2.47)$$

součin operátorů prvků Mach-Zehnderova interferometru lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned} &\hat{R}_{SP}(45^\circ) \hat{E}_P(\xi_P) \hat{B}S_P(\Delta_H, \Delta_V) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\xi_P} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Delta_H & 0 \\ 0 & \cos \Delta_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos \Delta_V \\ e^{i\xi} \cos \Delta_H & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

kde operátor děliče svazku $\hat{B}S_P(\Delta_H, \Delta_V)$ zavádí neunitaritu do systému. Operátor poslední trojice fázových destiček členu transformace má následující vyjádření

$$\hat{R}_{VP}(\varphi_{P4}, \theta_{P2}, \varphi_{P3}) = \hat{R}_{QWP}(\varphi_{P4}) \hat{R}_{HWP}(\theta_{P2}) \hat{R}_{QWP}(\varphi_{P3}). \quad (2.49)$$

Pro provedení kvantové tomografie procesu je nutné na vstupu členu transformace stavu připravit postupně všechny báze polarizační stavy, viz kapitola 2.1.4. V tabulce 2.2 je sepsáno nastavení úhlů fázových destiček v členu přípravy stavu $\hat{R}_R(\varphi_R, \theta_R)$ pro pootočení stavu $|H\rangle$ na ostatní polarizační báze stavy. Nastavení fázových destiček v členu projekce stavu $\hat{R}_O(90^\circ, \varphi_O, \theta_O)$ pro projekci do jednotlivých polarizačních bází je uvedeno v tabulce 2.1.

Pro realizaci obecné unitární transformace lze využít operátoru \hat{U}_u z relace (2.40), jelikož stejně jako operátor \hat{U}_T z relace (2.41) je obecným vyjádřením unitární transformace pro dvouqubitový stav, tak operátor \hat{U}_u je obecným vyjádřením unitární transformace pro jednoqubitový stav. Pro provedení transformace popsané operátorem \hat{U}_u bude použit člen transformace stavu v optické soustavě na obr. 2.8. Numerickou analýzou, která je provedena stejným způsobem jako v případě obecné dvouqubitové unitární transformace, je nalezeno nastavení členu transformace.

Jak bylo v kapitole 2.1.4 zmíněno, qubit ve stavu $|H\rangle$ lze kombinací půlvlnné a čtvrtvlnné destičky pootočit na jakýkoliv obecný stav na Poincarého sféře. V soustavě na obr. 2.8 jsou tedy dvojice půlvlnných a trojice čtvrtvlnných destiček na jejím vstupu redundantní a tudíž může být tato levá část optické soustavy sloučena. Totéž platí pro

výstupní pravou část optické soustavy, jelikož je prováděna projekce pouze do báze $|V\rangle\langle V|$, což je stejná situace jako v předchozím případě. Sloučení pro levou vstupní část lze provést následujícím způsobem

$$\begin{aligned} & \hat{R}_{QWP}(\varphi_{P2})\hat{R}_{HWP}(\theta_{P1})\hat{R}_{QWP}(\varphi_{P1})\hat{R}_{QWP}(\varphi_R)\hat{R}_{HWP}(\theta_R) \\ & \rightarrow \hat{R}_{QWP}(\varphi_{M1})\hat{R}_{HWP}(\theta_{M1}). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Hledání parametrů θ_{M1} a φ_{M1} lze provést analyticky, ale z důvodu většího objemu dat, který bude generován, se zde opět použije numerická analýza funkcí `scipy.optimize.minimize`. Jelikož hodnoty θ_R , φ_R , θ_{P1} , φ_{P1} , a φ_{P2} jsou známé z předešlé numerické analýzy, hledané hodnoty θ_{M1} a φ_{M1} jsou získány následujícím postupem:

- (i) Aplikace operátorů destiček vstupní části nesloučené optické soustavy na stav $|H\rangle$

$$|r_C\rangle = \hat{R}_{QWP}(\varphi_{P2})\hat{R}_{HWP}(\theta_{P1})\hat{R}_{QWP}(\varphi_{P1})\hat{R}_{QWP}(\varphi_R)\hat{R}_{HWP}(\theta_R)|H\rangle. \quad (2.51)$$

- (ii) Aplikace operátorů destiček vstupní části sloučené optické soustavy na stav $|H\rangle$

$$|r_M\rangle = \hat{R}_{QWP}(\varphi_{M1})\hat{R}_{HWP}(\theta_{M1})|H\rangle. \quad (2.52)$$

- (iii) Hledání maxima skalárního součinu $\langle r_C|r_M\rangle$ funkcí `scipy.optimize.minimize` metodou SLSQP.

Normalizace výsledných vektorů není nutná, jelikož operátory fázových destiček jsou unitární, a tedy norma stavu je zachována. Výstupem opět bude hodnota skalárního součinu v intervalu hodnot od 0 do 1 a hledané parametry θ_{M1} a φ_{M1} .

Postup sloučení na výstupní pravé straně optické soustavy z obr. 2.8 je provedeno následujícím způsobem

$$\begin{aligned} & \hat{R}_{QWP}(\varphi_4)\hat{R}_{HWP}(\theta_4)\hat{R}_{QWP}(\varphi_3)\hat{R}_{HWP}(\theta_3) \\ & \rightarrow \hat{R}_{QWP}(\varphi_{M2})\hat{R}_{HWP}(\theta_{M2}). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Výpočet sjednocení se mírně liší oproti předchozímu:

- (i) Vytvoření matice z poslední šestice členů optické soustavy

$$\hat{X}_C = PL_V\hat{R}_{QWP}(\varphi_O)\hat{R}_{HWP}(\theta_O)\hat{R}_{QWP}(\varphi_{P4})\hat{R}_{HWP}(\theta_{P2})\hat{R}_{QWP}(\varphi_{P3}). \quad (2.54)$$

- (ii) Vytvoření matice z operátorů pro půlvlnnou a čtvrtvlnnou destičku s připojením operátoru pro polarizátor PL_V

$$\hat{X}_M = PL_V\hat{R}_{QWP}(\varphi_{M2})\hat{R}_{HWP}(\theta_{M2}). \quad (2.55)$$

- (iii) Matice \hat{X}_C a \hat{X}_M mají dimenzi 2×2 . Nejdříve jsou normalizovány dle relace (2.42) a následně převedeny na vektory dle relace (2.43). Hledání maxima jejich hermitovského skalárního součinu je provedeno funkcí `scipy.optimize.minimize` metodou SLSQP.

V soustavě na obr. 2.8 lze provést ještě další zjednodušení a tím je sloučení dvou děličů svazků. Matice pro děliče svazku lze vyjádřit jako

$$\hat{B}S_P(\Delta_V, \Delta_H) = \begin{pmatrix} \cos \Delta_H & 0 \\ 0 & \cos \Delta_V \end{pmatrix} = \cos \Delta_V \begin{pmatrix} \cos \Delta_H / \cos \Delta_V & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Člen $1/\cos \Delta_V$, který je vyjádřen před maticí, lze zanedbat, jelikož normalizací bude zrušen. Obecně platí, že transformace popsaná operátorem \hat{U}_X je fyzikálně ekvivalentní s transformací \hat{U}_Y , jestliže mezi nimi existuje následující rovnost

$$\hat{U}_X = q\hat{U}_Y, \quad (2.57)$$

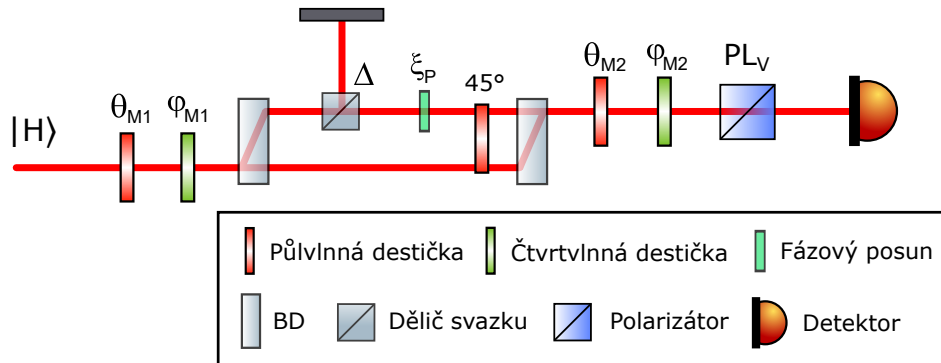
kde q je obecné číslo. Číslo q je obdobou globální fáze u stavu v relaci (2.3). Výsledné sloučení optické soustavy z obr. 2.8 je zobrazeno na obr. 2.9. Operátorové vyjádření této sloučené soustavy lze zapsat jako

$$\begin{aligned} & \hat{P}L_V \hat{R}_{QWP}(\varphi_{M2}) \hat{R}_{HWP}(\theta_{M2}) \hat{R}_{SP}(45^\circ) \\ & \hat{E}_P(\xi_P) \hat{B}S_P(\Delta_V, \Delta_H) \hat{R}_{QWP}(\varphi_{M1}) \hat{R}_{HWP}(\theta_{M1}), \end{aligned} \quad (2.58)$$

kde explicitní vyjádření operátoru pro ztrátový dělič svazku je následující

$$\hat{B}S_P(\Delta_V, \Delta_H) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

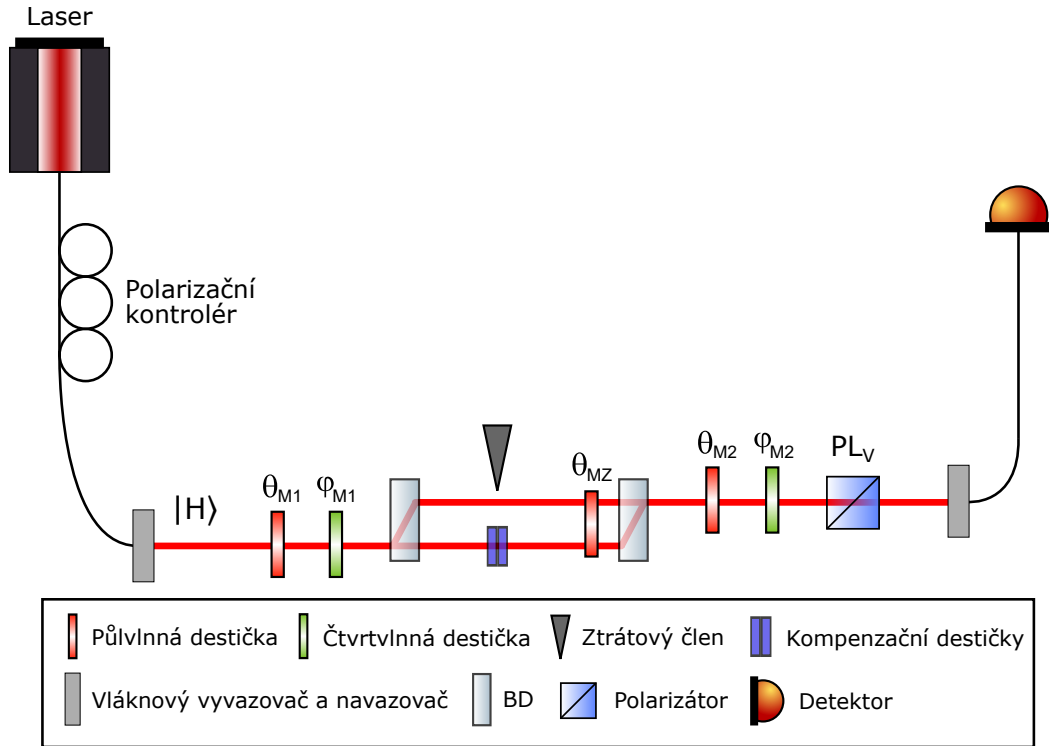
kde parametr $z = \cos \Delta_H / \cos \Delta_V$ a člen $1/\cos \Delta_V$ z relace (2.56) byl zanedbán.



Obr. 2.9. Schéma virtuální optické soustavy, která vznikla sloučením fázových destiček a děličů svazku u optické soustavy na obr. 2.8. Popis použitých prvků v soustavě je uveden v legendě obrázku. Podrobnější popis soustavy je uveden v textu.

Doposud byly popsány virtuálně namodelované optické soustavy. Pro experimentální demonstraci obecné unitární a neunitární transformace byla použita optická soustava na obr. 2.10. Tato soustava je analogií soustavy na obr. 2.9. Na vstupní straně optické soustavy je opět uvažován qubit ve stavu $|H\rangle$, který byl nastaven polarizačním kontrolérem za laserovým zdrojem. Laser je zdroj klasického světla, nejedná se tedy o jednofotonový zdroj. Na vstupu optické soustavy je laserový svazek vyvázan z optického vlákna na asférickou čočku. Pro zavedení ztrát byl namísto regulovatelného děliče svazku použit šedý filtr, který je v optické soustavě na obr. 2.10 označen jako ztrátový člen. Šedý filtr byl umístěn tak, aby jeho posun byl vertikální vůči optickému stolu a tím nezasáhl do druhého ramene interferometru.

Jelikož ztrátový člen představuje sklíčko, které v jednom ramenu prodlouží dráhu svazku o svou tloušťku, je nutné prodloužit dráhu svazku o stejnou délku ve druhém ramenu. K tomuto procesu slouží dvě laboratorní sklíčka, značené jako kompenzační destičky. Fáze $e^{i\xi}$, která je umístěna v optické soustavě na obr. 2.9 v ramenu s horizontální polarizací, byla experimentálně realizována náklonem vstupního BD. Na výstupní straně optické soustavy byl laserový svazek asférickou čočkou navázán do optického vlákna a konec optického vlákna byl přiveden na detektor. Matematické vyjádření této optické soustavy je dáno relací (2.58), kde šedému filtru je přiřazen operátor $\hat{B}S_P(\Delta_V, \Delta_H)$.

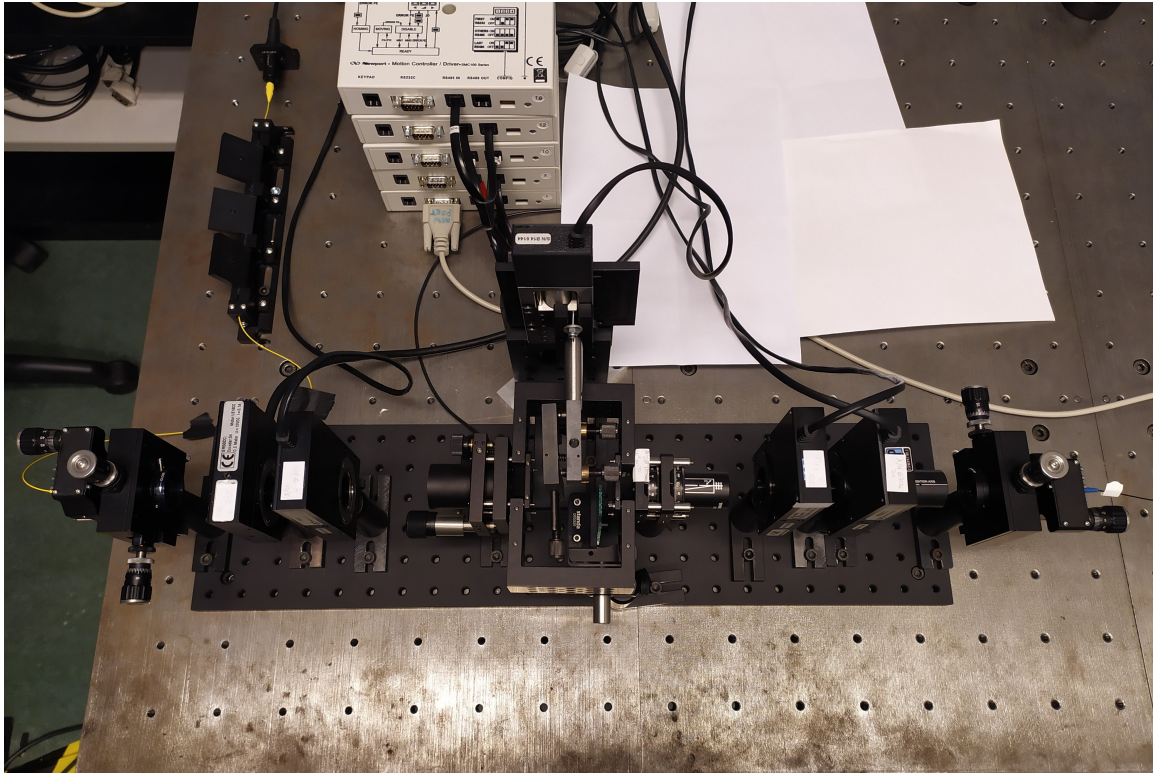


Obr. 2.10. Schéma zkonstruované optické soustavy, která byla použita pro provedení obecné jednoqubitové unitární a neunitární transformace. Popis použitých prvků v soustavě je uveden v legendě obrázku. Podrobnější popis soustavy je uveden v textu.

Předlohou maticové formy ztrátového členu, který je složen z děliče svazku $\hat{B}S_P(\Delta_V, \Delta_H)$ a fázového členu $\hat{E}_P(\xi_P)$, viz kapitola 2.3.1, byla experimentální práce zabývající se informačním tokem mezi \mathcal{PT} -symetrickým systémem a jeho okolím [34], jednalo tedy o otevřený systém. Experimentální realizace ztrátového členu byla ovšem odlišná, kdy zde byl použit šedý filtr, ale v práci [34] byly ztráty provedeny odklonem svazku mimo detektor pomocí fázových destiček umístěných v Mach-Zehnderově interferometru.

Shrnutí této kapitoly je následující. Byla vygenerována náhodná unitární transformace dle relace (2.41). Následně bylo numerickou analýzou nalezeno nastavení optické soustavy na obr. 2.7 tak, aby tuto unitární transformaci provedla. Získané parametry soustavy byly vloženy do optické soustavy na obr. 2.8. Tato optická soustava již slouží pro provedení kvantové tomografie procesu, kde člen transformace stavu provádí obecně neunitární transformaci qubitů. Bylo provedeno zjednodušení dané optické soustavy dle relací (2.50) a (2.53). Výsledkem byla optická soustava na obr. 2.9. Tento postup byl zopakován pro soubor náhodně generovaných transformací. Výsledky skalárních součinů numerické analýzy pro nastavení parametrů optické soustavy na obr.

2.7 a skalárních součinnů pro sloučení fázových destiček byly zaznamenány. Po úspěšném provedení těchto kroků byla sestavena optická soustava na obr. 2.10, která slouží pro experimentální demonstraci obecné unitární a neunitární transformace. Fotografie sestavené optické soustavy z obr. 2.10 je zobrazena na obr. 2.11.



Obr. 2.11. Optická soustava, jejíž schéma je na obr. 2.10, pro realizaci obecné jednoqubitové unitární a neunitární transformace.

2.3.2 Měření optických os fázových destiček

Jelikož na fázových destičkách, které byly umístěny v motorizovaných rotacích, není vyznačena jejich optická osa, bylo nutné měřícím procesem nalézt její směr. Pro měření os půlvlnných destiček byla použita optická soustava na obr. 2.12 a) a pro čtvrtvlnné destičky byla použita optická soustava na obr. 2.12 b). Při měření optických os čtvrtvlnných destiček bylo na vstupu soustavy světlo ve stavu $|H\rangle$, aby měřený optický výkon na detektoru klesal k nulové hodnotě. Relativní nulová hodnota natočení optické osy se potom hledala v minimu naměřené funkce. Použití světla ve stavu $|V\rangle$ při měření optických os půlvlnných destiček znamenalo pouze to, že jako relativní nulová hodnota natočení optické osy se hledala v maximu naměřené funkce. Měření optického výkonu se provádělo po rotaci fázové destičky o 2° , a to až do provedení celé otočky (360°).

Při každém záznamu signálu na detektoru bylo provedeno 20 opakovaných měření a byla vypočtena směrodatná odchylka, anglicky *standard deviation* (STD) dle relace

$$\text{STD} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (n_i - \bar{n})^2}, \quad (2.60)$$

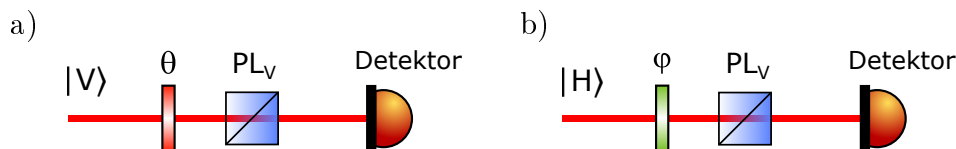
kde $N = 20$ je počet opakovaných měření, n_i je i -tá naměřená hodnota z jedné série měření a \bar{n} je průměrná hodnota naměřeného signálu. Výsledky byly normalizovány dle

nejvyšší naměřené hodnoty intenzity. Tento způsob měření signálu a výpočet nejistot byl proveden pro všechny následující úkoly.

Naměřená data byla normalizována a následně nafitována sinusovou funkcí

$$f_s(x_s) = a_s \sin(x_s b_s + c_s) + d_s, \quad (2.61)$$

kde x_s je volný parametr a a_s , b_s , c_s a d_s jsou hledané parametry fitovacího procesu. Pro každou fázovou destičku byla nafitovaná křivka spolu s normalizovanými naměřenými hodnotami a nejistotami měření vynesena do grafu.



Obr. 2.12. Schéma optické soustavy pro nalezení směru optické osy a) půlvlnné destičky $R_{HWP}(\theta)$ s úhlem natočení θ a b) čtvrtvlnné destičky $R_{QWP}(\varphi)$ s úhlem natočení φ . Pro oba případy je použit polarizátor PL_V propouštějící pouze vertikální složku polarizace.

2.3.3 Měření příčného profilu svazku

Příčný profil svazku byl měřen v optické soustavě, která je vyobrazena na obr. 2.10, kde namísto šedého filtru, který způsoboval ztráty pro celou plochu svazku současně, byl zvolen kovový břit, který úplně zastíní pouze požadovanou část svazku. Svazek byl postupně stíněn v horizontálním směru vzhledem k optickému stolu, na kterém byla umístěna optická soustava. Krok posunu motoru byl zvolen $5\ \mu\text{m}$. Po provedení měření byla naměřená data normalizována dle nejvyšší naměřené hodnoty intenzity a následně byla provedena jejich numerická derivace, která se provedla dle vztahu

$$d(n_i, x_i) = \frac{n_i - n_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}; \quad \text{kde } i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.62)$$

kde x_i je pozice motoru pro hodnotu i -tou naměřenou hodnotu intenzity n_i . Výsledná data byla normalizována dle nejvyšší hodnoty derivace a nafitována Gaussovou funkcí

$$f(x_g) = a_g e^{-\frac{(x_g - b_g)^2}{2c_g^2}}, \quad (2.63)$$

kde x_g je volný parametr, a_g , b_g a c_g jsou parametry fitace a $e = 2,71828..$ je Eulerovo číslo. Pro fitovanou funkci byla vypočtena plná šířka v polovině maxima, anglicky *full width at half maximum* (FWHM) dle následující relace

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{2 \ln 2} c_g, \quad (2.64)$$

což je šířka svazku, kde intenzita světla klesla na polovinu maximální hodnoty. Závěrem byly naměřená data, nejistoty měření, které byly získány dle relace (2.60), nafitovaná křivka a hodnota FWHM vyneseny do grafů.

2.3.4 Měření transmise šedého filtru

Pro měření transmise šedého filtru byla použita optická soustava na obr. 2.10. Měření proběhlo pro plný rozsah lineárního posuvu, tedy 25 mm a krok posuvu byl zvolen 0,5 mm. Jelikož šedý filtr byl umístěn v rameni interferometru, do kterého byla odkloněna horizontální polarizace, projekce na výstupu byla v průběhu měření nastavena do báze $|H\rangle\langle H|$. Druhé rameno interferometru bylo zacloněno, aby nepřispívalo k šumu měření.

Měření transmise proběhlo pro čtyři opakovaná měření, kdy pro jednotlivá měření byly nastaveny fázové destičky na vstupní straně interferometru dle tabulky 2.3. Rotací půlvlnné destičky docházelo k přelévání intenzity z horizontální polarizace do vertikální, tedy v ramenu interferometru, kde byl umístěn šedý filtr, byla snižována intenzita svazku. Toto měření bylo provedeno pro ověření, že šedý filtr způsobuje poměrově stejné ztráty pro nízkou a vysokou intenzitu svazku, jelikož ztráty z a ξ_P v relaci (2.58) jsou považovány za přímo úměrné ztrátám, které způsobuje šedý filtr bez závislosti na intenzitě svazku.

Normalizované naměřené hodnoty spolu s nejistotami jednotlivých měření, viz relace (2.60), byly vyneseny do grafu. Následně byl proveden výpočet průměru hodnot naměřených na jednotlivých pozicích motoru. Zprůměrované hodnoty byly fitovány exponenciální funkcí

$$f_e(x_e) = 10^{a_e(x_e+b_e)} + c_e \quad (2.65)$$

kde x_e je volný parametr a a_e , b_e a c_e jsou parametry fitace, kterou se dle výrobce [56] řídí funkce transmise šedého filtru.

Tabulka 2.3: Nastavení vstupních fázových destiček v soustavě na obr. 2.10 při jednotlivých měřeních transmise šedého filtru.

Č. měření	$\hat{R}_{HWP}(\theta_{M1})[^\circ]$	$\hat{R}_{QWP}(\varphi_{M1})[^\circ]$
1.	0	0
2.	10	0
3.	20	0
4.	30	0

2.3.5 Realizace obecné unitární a neunitární transformace optickou soustavou

Optickou soustavou na obr. 2.10 budou nejdříve realizovány unitární transformace, které budou zadány ve formě matice s dimenzí 2×2 . Maticové vyjádření těchto transformací je následující

$$\begin{aligned}
 \hat{U}_{u1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \hat{U}_{u2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \hat{U}_{u3} &= \begin{pmatrix} 0,75 & -0,66144 \\ 0,66144 & 0,75 \end{pmatrix} \\
 \hat{U}_{u4} &= \begin{pmatrix} 0,6533e^{-0,8859i} & 0,7571e^{1,0130i} \\ 0,7571e^{-0,4761i} & 0,6533e^{-1,7188i} \end{pmatrix}, \\
 \hat{U}_{u5} &= \begin{pmatrix} 0,7876e^{2,4198i} & 0,6161e^{0,2785i} \\ 0,6161e^{0,7095i} & 0,7876e^{1,7098i} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

kde operátory \hat{U}_{u1} až \hat{U}_{u3} jsou uživatelem zadané unitární transformace a operátory \hat{U}_{u4} a \hat{U}_{u5} jsou náhodně generované unitární transformace, viz kapitola 2.3.1. Postup nalezení nastavení optické soustavy pro provedení požadované transformace je uveden v kapitole 2.3.1.

Ověření, že optická soustava provádí danou transformaci, bylo provedeno skrz kvantovou tomografii procesu, viz kapitola 2.1.4. Tedy pro každou transformaci bylo připraveno 6 bázových polarizačních stavů a pro každý připravený bázový polarizační stav bylo provedeno 6 projekcí do bázových polarizačních stavů. Tímto procesem bylo pro každou transformaci získáno 36 naměřených hodnot. Následně byly vytvořeny dvě matice hustoty procesu. První matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{[\text{vir}]}$, zde nazývaná virtuální, byla vytvořena skrz virtuální simulaci měřeného procesu. Tedy byla simulačně vytvořena optická soustava na obr. 2.10 a provedeno 36 virtuálních měření pro vybranou transformaci \hat{U}_{ui} . Postupem dle kapitoly 2.1.4 byla vytvořena matice hustoty procesu, která odpovídá ideální matici hustoty procesu $\hat{\Pi}_{[\text{vir}]}$, ke které se s reálným experimentem je snaha přiblížit. Druhá matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{[\text{exp}]}$, zde nazývaná experimentální, je taktéž vytvořena dle postupu v kapitole 2.1.4, ovšem dosazované hodnoty jsou hodnoty naměřené při provedení reálného experimentu. Po vytvoření matic $\hat{\Pi}_{[\text{vir}]}$ a $\hat{\Pi}_{[\text{exp}]}$ následovalo jejich vzájemné srovnání a jako kvantitativní míru jejich podobnosti byla zvolena fidelita kvantových stavů, která je daná následujícím vztahem

$$F(\hat{\Pi}_{[\text{vir}]}, \hat{\Pi}_{[\text{exp}]}) = \left(\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\hat{\Pi}_{[\text{vir}]}} \hat{\Pi}_{[\text{exp}]} \sqrt{\hat{\Pi}_{[\text{vir}]}}} \right)^2, \tag{2.67}$$

Fidelita vyjadřuje míru podobnosti dvou kvantových stavů a její hodnoty jsou na intervalu od 0 do 1, kdy hodnota 0 vyjadřuje nejnižší možnou podobnost mezi dvěma stavy a 1 vyjadřuje nejvyšší možnou podobnost.

Po realizaci unitárních transformací byly realizovány transformace neunitární, jejichž unitární dvouqubitové maticové vyjádření je následovné

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{n1(2q)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3\sqrt{11}}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{11}}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\hat{U}_{n2(2q)} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\hat{U}_{n3(2q)} &= \begin{pmatrix} 0,4041e^{-0,9463i} & 0,8328e^{-2,2089i} & 0,0618e^{0,3856i} & 0,3733e^{1,9760i} \\ 0,3583e^{1,5061i} & 0,1216e^{-2,3607i} & 0,8954e^{-2,4393i} & 0,2346e^{1,22858i} \\ 0,8218e^{1,1499i} & 0,3468e^{-3,0761i} & 0,4029e^{0,1861i} & 0,205072e^{-0,217839i} \\ 0,181528e^{2,1180i} & 0,4141e^{2,6770i} & 0,1790e^{2,6578i} & 0,8738e^{-2,8002i} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Po redukci unitární dvouqubitové matice na matici subsystému sledovaného qubitu dostaneme obecně neunitární matici dimenze 2×2 . Jednoqubitová verze těchto neunitárních transformací je následující

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{n1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \\
\hat{U}_{n2} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
\hat{U}_{n3} &= \begin{pmatrix} 0,4041e^{-0,9463i} & 0,8328e^{-2,2089i} \\ 0,3583e^{1,5061i} & 0,1216e^{-2,3607i} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Ověření, že optická soustava provádí požadovanou transformaci, proběhlo identicky jako v předchozím případě. Byla provedena kvantová tomografie procesu simulované a experimentálně realizované optické soustavy a výsledné matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{[\text{vir}]}$ a $\hat{\Pi}_{[\text{exp}]}$ byly srovnány mírou danou fidelitou kvantových stavů (2.67).

Pro neunitární transformace bude ovšem proveden ještě dodatečný krok, kterým je zpětné nalezení neunitární matice \hat{U}_{nj} z experimentálně vytvořené matice hustot $\hat{\Pi}_{[\text{exp}]}$. Důvod provedení tohoto kroku bude zřejmý z výsledků z experimentální realizace neunitárních transformací. Zpětné nalezení neunitární matice \hat{U}_{nj} bylo provedeno následujícím postupem. Nejdříve byla uživatelem vytvořena funkce `rev_mat`, ve které byly virtuálně vytvořeny dva členy transformace stavu z optické soustavy na obr. 2.8, které představovali hledané neunitární matice \hat{U}_{nj} . Matice \hat{U}_{nj} byly vloženy do Choiho Jamiolkowského izomorfismu (2.24), kdy každé matici \hat{U}_{nj} byla přiřazena jedna pravděpodobnost p_j . Výsledná matice hustoty procesu, generovaná maticemi \hat{U}_{nj} , byla fidelitou (2.67) srovnána s maticí hustoty procesu $\hat{\Pi}_{[\text{exp}]}$, kdy výsledek fidelity byl výstupem funkce `rev_mat`. Závěrem proběhla numerická analýza funkcí `scipy.optimize.minimize` metodou SLSQP.

2.4 Výsledky a diskuze

2.4.1 Simulace lineární optické soustavy

Pro ověření, že optická soustava na obr. 2.7 je schopna realizovat libovolnou dvouqubitovou unitární transformaci, byla provedena numerická simulace, viz kapitola 2.3.1. Pro toto ověření bylo vygenerováno 500 náhodných dvouqubitových unitárních transformací.

Funkcí `scipy.optimize.minimize` byly hledány parametry nastavení optické soustavy, aby výsledek skalárního součinu požadované a simulované transformace byl maximální. V 435 z 500 (87%) případů bylo dosaženo hodnoty skalárního součinu větší jak 0,99, v ostatních případech byla nejnižší dosažená hodnota 0,96. Pro experimentálně realizované transformace z relací (2.66) a (2.69) byla nalezena shoda vždy větší než 99%.

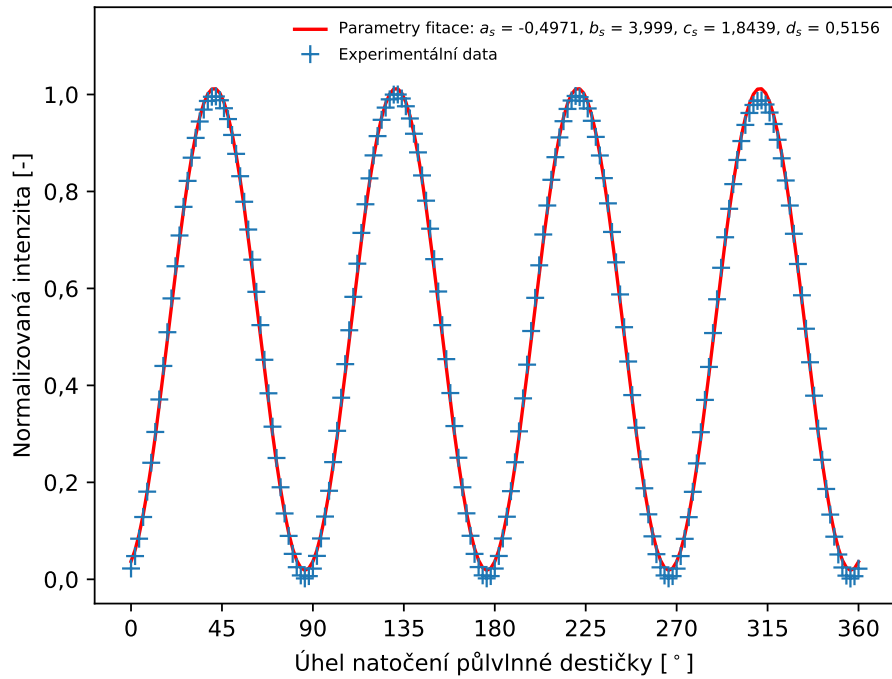
Pro všechny vygenerované transformace bylo prověřeno sloučení fázových destiček dle relací (2.50) a (2.53). Opět se hledala shoda větší než 99%. Tato shoda byla vždy nalezena.

Z výsledků plyne, že optická soustava na obr. 2.7 může provést omezeně velkou množinu dvouqubitových unitárních transformací s přijatelnou přesností. Transformace, které nebyly nalezeny s požadovanou shodou, byly přesto nalezeny dostatečně blízko a lze se domnívat, že vhodnou úpravou numerické analýzy by byly dosaženy požadované výsledky. Sloučení fázových destiček lze simulačně provést s velkou přesností, jelikož shoda pro všechny případy byla nalezena vždy větší než 99%.

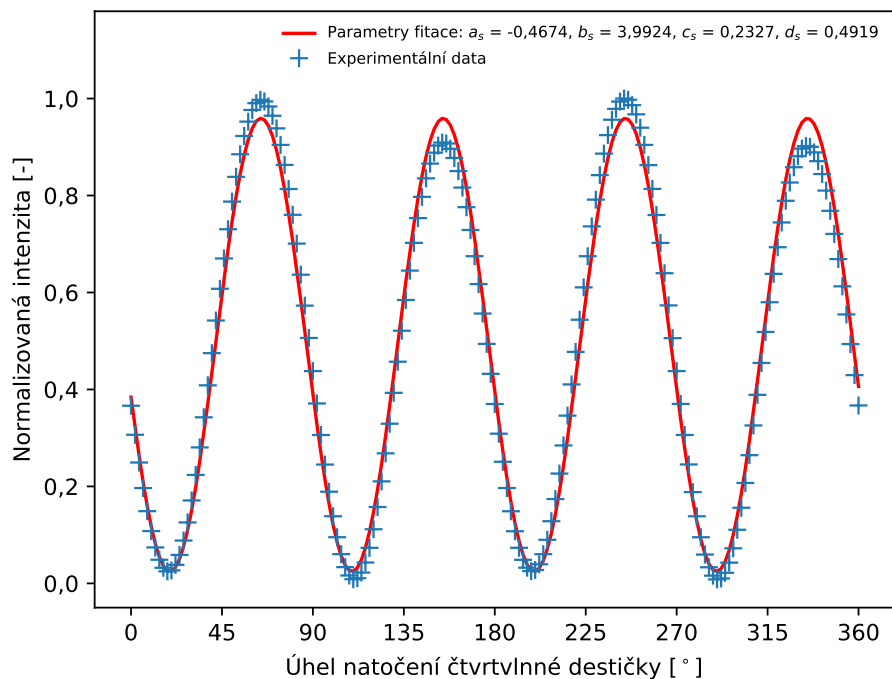
2.4.2 Měření optických os fázových destiček

Před sestavením samotné optické soustavy byly měřicím procesem nalezeny optické osy. Postup měření je uveden v kapitole 2.3.2. Výsledky měření jsou vyobrazeny v grafech na obr. 2.13, 2.14, 2.15 a 2.16 pro $\hat{R}_{HWP}(\theta_{M1})$, $\hat{R}_{QWP}(\varphi_{M1})$, $\hat{R}_{HWP}(\theta_{M2})$ a $\hat{R}_{HWP}(\varphi_{M2})$, kde na horizontální ose je vyneseno úhel rotace fázové destičky a na vertikální ose je normalizovaná intenzita po projekci na vertikální polarizaci. Dále modrými body jsou vyznačeny experimentální data spolu s nejistotami měření a červená křivka vyobrazuje fitaci naměřených dat. Parametry fitace jsou uvedeny v legendě každého grafu.

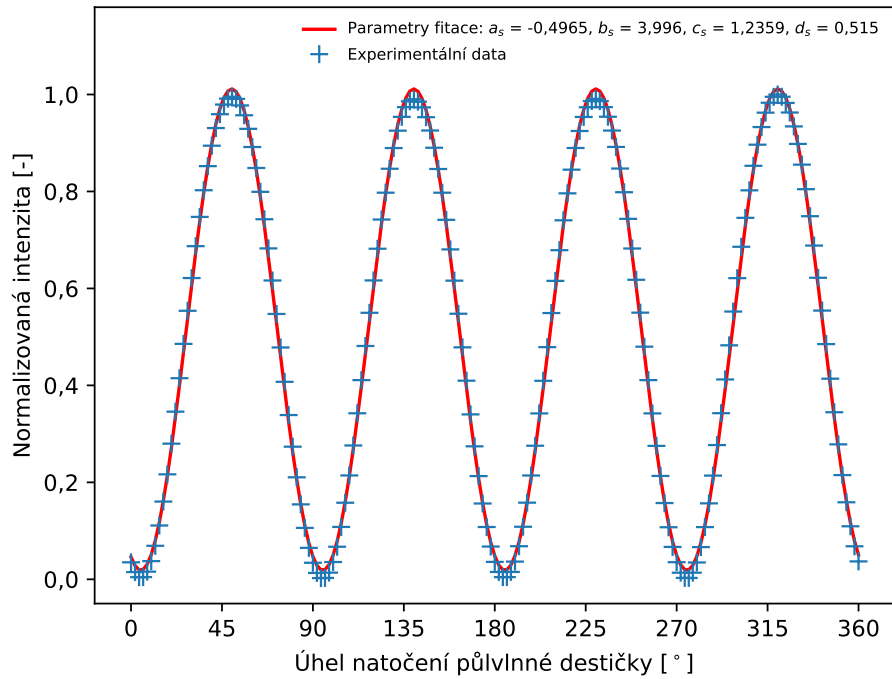
Naměřené hodnoty pro půlvlnné destičky, viz obr. 2.13 a 2.15, vykazují stejná minima a maxima, kdežto pro čtvrtvlnné destičky, viz obr. 2.14 a 2.16, se hodnoty minim a maxim periodicky mění. Tato skutečnost je důsledek použití fázových destiček pro vlnovou délkou 710 nm, kdežto zdroj záření vyzařuje na vlnové délce 698,6 nm. Relativní nulové hodnoty vůči hardwarové nule motorizovaných rotací jednotlivých fázových destiček, které jsou uvedeny v tabulce 2.4, byly zvoleny z nafitované křivky. Nejistota měření byla řádově od 10^{-6} pro minimální hodnoty do 10^{-4} pro maximální hodnoty normalizované intenzity.



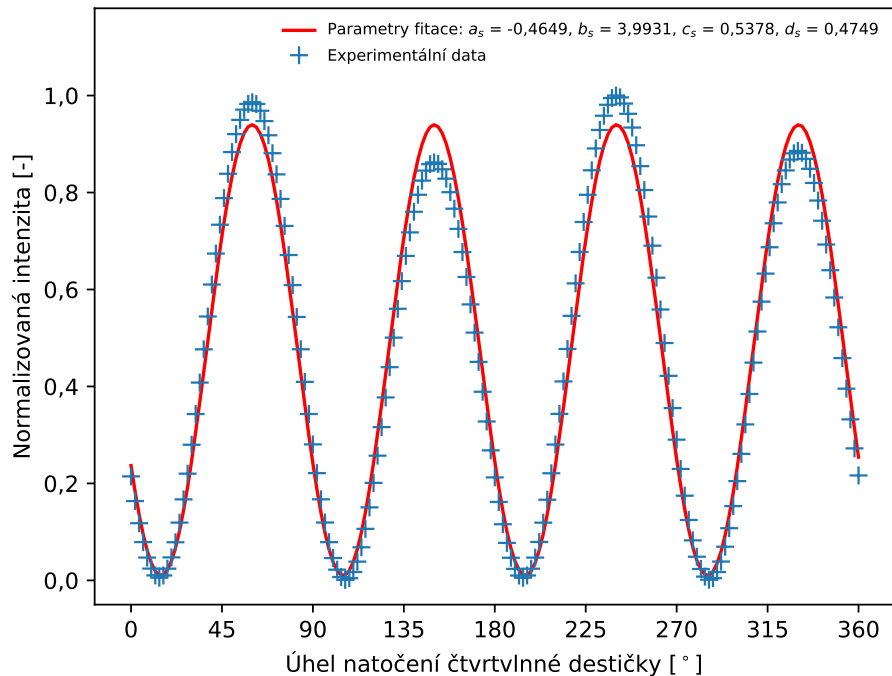
Obr. 2.13. Graf naměřených hodnot normalizované intenzity pro měření optické osy půlvlnné destičky $\hat{R}_{HWP}(\theta_{M1})$, kdy na vstupu půlvlnné destičky bylo světlo ve stavu $|V\rangle$ a byla provedena projekce do báze $|V\rangle\langle V|$. Nejistota měření jednotlivých bodů byla menší než vykreslený symbol, proto není vyznačena.



Obr. 2.14. Graf naměřených hodnot normalizované intenzity pro měření optické osy čtvrtvlnné destičky $\hat{R}_{QWP}(\varphi_{M1})$, kdy na vstupu čtvrtvlnné destičky bylo světlo ve stavu $|H\rangle$ a byla provedena projekce do báze $|V\rangle\langle V|$. Nejistota měření jednotlivých bodů byla menší než vykreslený symbol, proto není vyznačena.



Obr. 2.15. Graf naměřených hodnot normalizované intenzity pro měření optické osy půlvlnné destičky $\hat{R}_{HWP}(\theta_{M2})$, kdy na vstupu půlvlnné destičky bylo světlo ve stavu $|V\rangle$ a byla provedena projekce do báze $|V\rangle\langle V|$. Nejistota měření jednotlivých bodů byla menší než vykreslený symbol, proto není vyznačena.



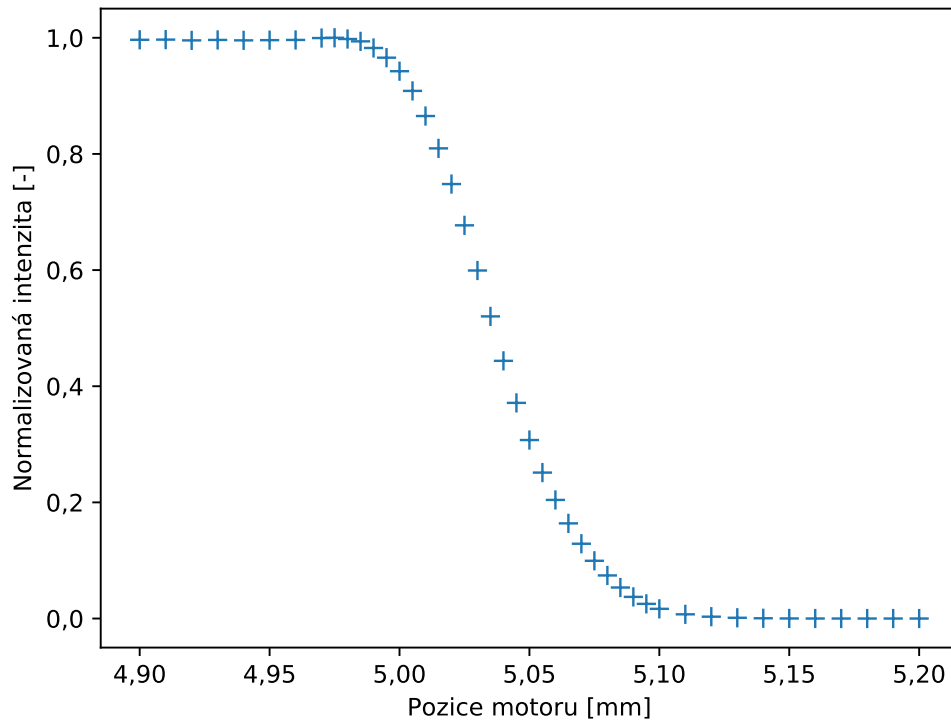
Obr. 2.16. Graf naměřených hodnot normalizované intenzity pro měření optické osy čtvrtvlnné destičky $\hat{R}_{QWP}(\varphi_{M2})$, kdy na vstupu čtvrtvlnné destičky bylo světlo ve stavu $|H\rangle$ a byla provedena projekce do báze $|V\rangle\langle V|$. Nejistota měření jednotlivých bodů byla menší než vykreslený symbol, proto není vyznačena.

Tabulka 2.4: Nastavení relativních nulových hodnot vůči hardwarové nule motorizovaných rotací.

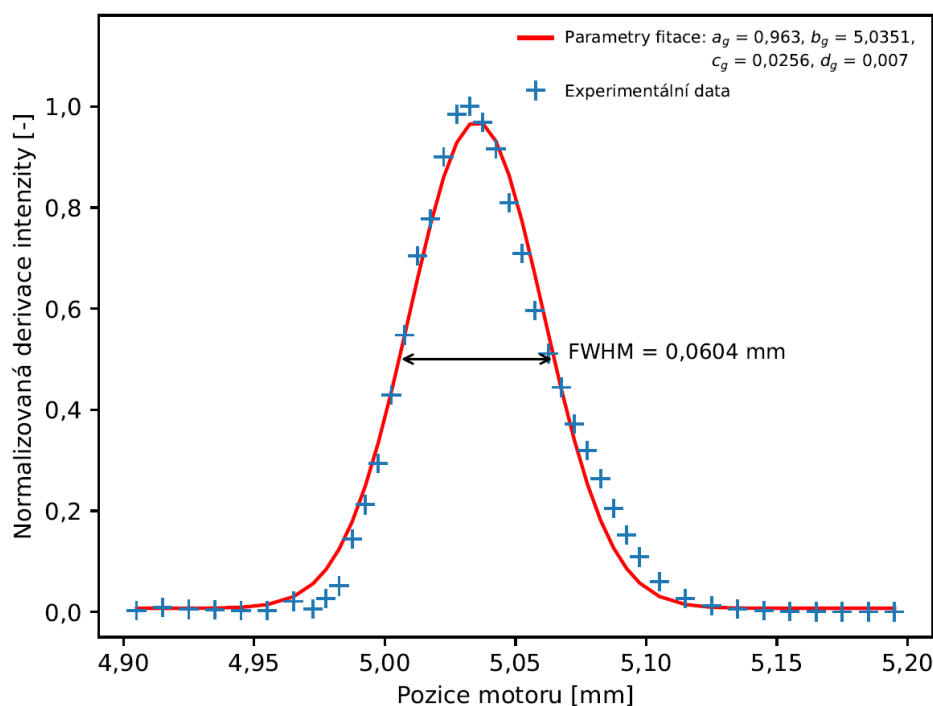
Fázová destička	Nulová pozice[°]
$\hat{R}_{HWP}(\theta_{M2})$	41,099
$\hat{R}_{QWP}(\varphi_{M1})$	109,203
$\hat{R}_{HWP}(\theta_{M2})$	49,801
$\hat{R}_{QWP}(\varphi_{M2})$	104,822

2.4.3 Měření příčného profilu svazku

Dalším měřením bylo měření příčného profilu svazku. Postup měření je uveden v kapitole 2.3.3. Na obr. 2.17 je vyobrazen graf závislosti detekované intenzity na posuvu kovového bříty skrz laserový svazek, kdy na horizontální ose je vynesena pozice motoru a na vertikální ose je uvedena naměřená normalizovaná intenzita záření. Na obr. 2.18 je modrými body vyobrazena numerická derivace naměřených hodnot, která byla provedena dle relace (2.62) a červenou křivkou je vyobrazena fitovaná křivka dle relace (2.63), přičemž na horizontální ose je vynesena pozice motoru a na vertikální ose je normalizovaná velikost derivace. Pro fitovanou křivku je ve výšce poloviny maximální hodnoty intenzity vyobrazena černou dvouhlavou šipkou hodnota FWHM dle relace (2.64).



Obr. 2.17. Graf normalizovaných naměřených hodnot intenzit při postupném zaclánění svazku břítem. Nejistota měření jednotlivých bodů byla menší než vykreslený symbol, proto není vyznačena.



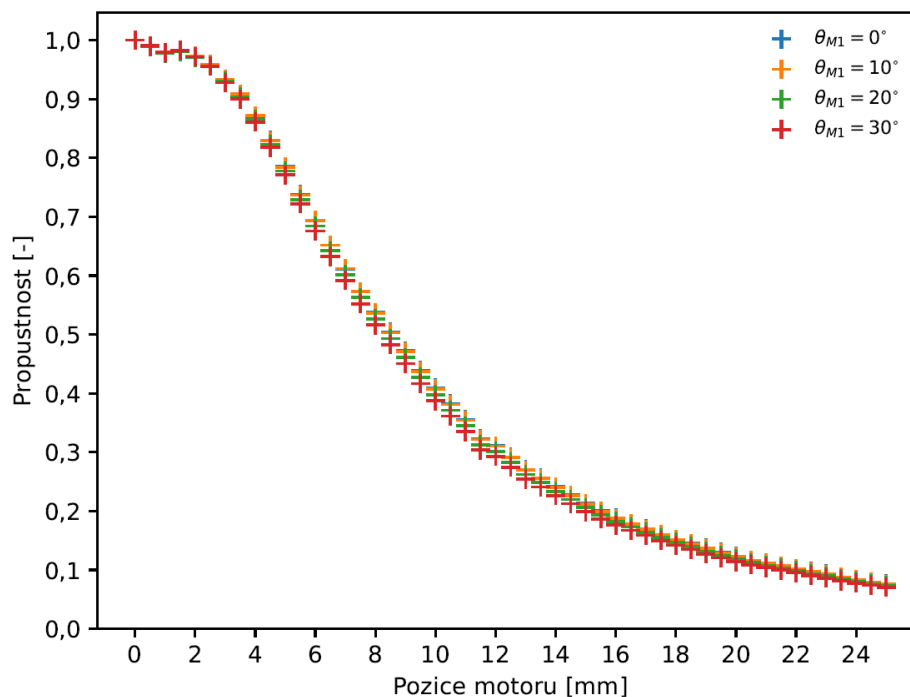
Obr. 2.18. Graf normalizované numerické derivace naměřených hodnot. Data odpovídají příčnému profilu svazku. Nejistota měření jednotlivých bodů byla menší než vykreslený symbol, proto není vyznačena.

Nejistoty měření byly řádově od 10^{-8} pro minimální hodnoty do 10^{-4} pro maximální hodnoty normalizované intenzity. Znalost šířky svazku byla důležitá proto, aby byly správně definovány zavedené ztráty. V první fázi experimentu byl jako ztrátový člen použit kovový břit, kterým se provádělo měření šířky svazku. Nicméně hodnota ztrát byla různá pro různé intenzity svazku, resp. pro zavedení stejné ztráty bylo nutné zajet motorem na jiné pozice v závislosti na vstupní polarizaci. Z tohoto důvodu byl nakonec využit šedý filtr, viz následující kapitola.

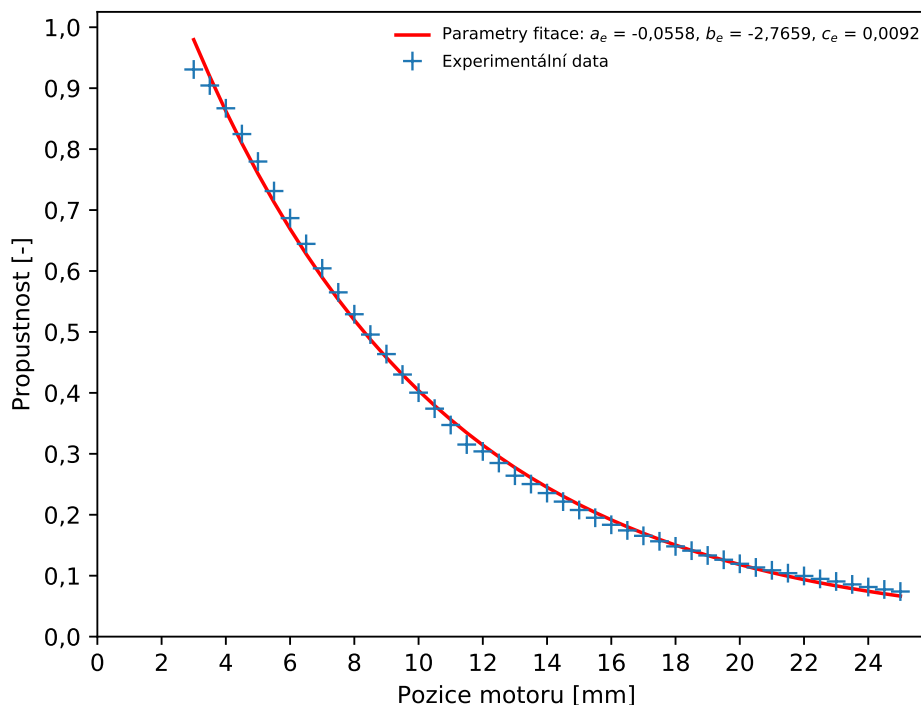
2.4.4 Měření transmise šedého filtru

Postup proměření funkce transmise šedého filtru je popsán v kapitole 2.3.4. Grafy jednotlivých měření pro rotaci půlvlnné destičky od 0° do 30° jsou zobrazeny na obr. 2.19, kdy pozice lineárního posuvu je vynesena na horizontální ose a normalizované naměřené hodnoty intenzity jsou vyneseny na vertikální ose. Jelikož jsou naměřené hodnoty intenzit normalizovány, lze vertikální osu označit jako propustnost.

Z grafu na obr. 2.19 je viditelné, že naměřené hodnoty intenzit pro různá nastavení půlvlnné destičky se značně překrývají, tedy propustnost na jedné pozici motoru je stejná pro svazek s různou intenzitou. Dále lze zpozorovat, že křivka intenzity pomalu klesá pro pozice motoru přibližně od hodnoty od 0 mm do 2,5 mm. Jelikož je zamýšleno provést výpočet průměru měřených hodnot pro jednotlivé hodnoty propustnosti a následně tyto hodnoty fitovat exponenciální funkcí dle relace (2.65), hodnoty pozice motory z intervalu od 0 mm do 2,5 mm budou při fitaci zanedbány. Bude taktéž přiřazena propustnost 1,0 na pozici motoru 0 mm. Na obr. 2.20 jsou modrými body zobrazeny zprůměrované naměřené hodnoty spolu s nejistotami měření a červená křivka představuje nafitovanou funkci dle relace (2.65). Nejistota měření byla řádově od 10^{-6} pro minimální hodnoty do 10^{-4} pro maximální hodnoty normalizované intenzity.



Obr. 2.19. Graf naměřených hodnot funkce transmise pro jednotlivá nastavení půlvlnné destičky $\hat{R}_{HWP}(\theta_{M1})$ v optické soustavě na obr. 2.10. Nejistota měření jednotlivých bodů byla menší než vykreslený symbol, proto není vyznačena.

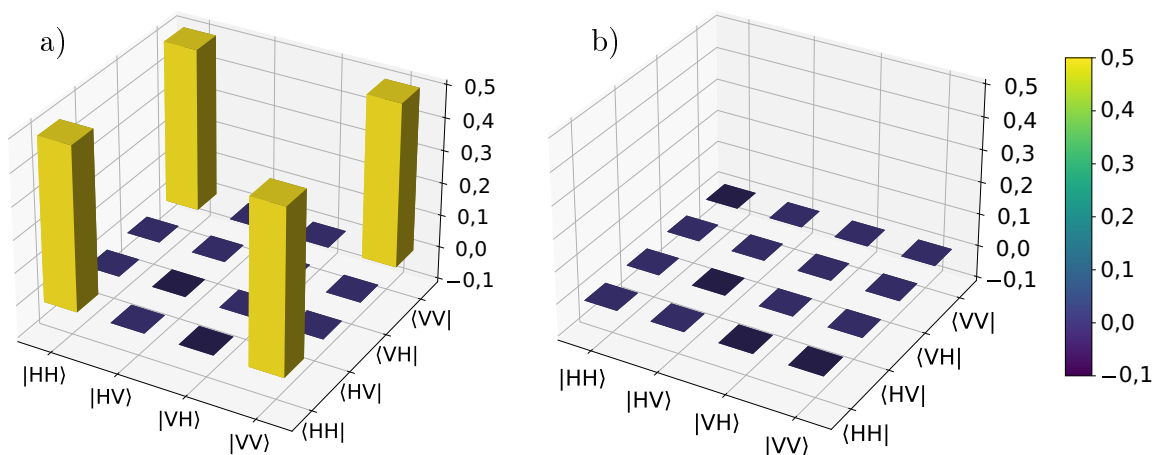


Obr. 2.20. Graf zprůměrovaných naměřených hodnot funkce transmise s naitovanou křivkou. Nejistota měření jednotlivých bodů byla menší než vykreslený symbol, proto není vyznačena.

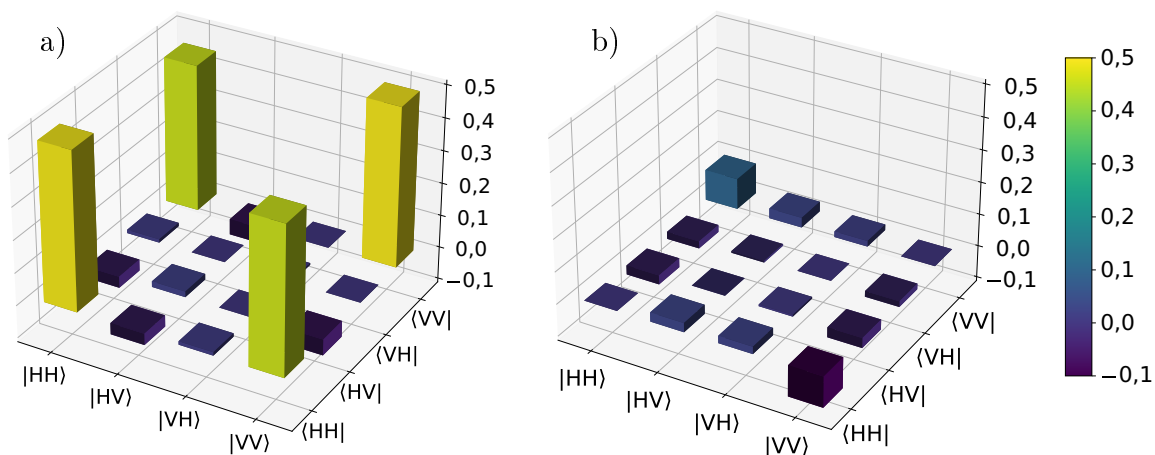
2.4.5 Realizace unitární a neunitární transformace

Závěrečným experimentem byla experimentální realizace obecné unitární a neunitární transformace. Podrobný postup provedení experimentu je uveden v kapitole 2.3.5.

Nejdříve byla optickou soustavou realizována sada unitárních transformací z relace (2.66). V následujících obrázcích 2.21 až 2.30 jsou vyobrazeny histogramy pro virtuální a experimentální matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{u1[\text{vir}]}$ a $\hat{\Pi}_{u1[\text{exp}]}$ k jednotlivým transformacím \hat{U}_{u1} z relace (2.66). Každá dvojice histogramů je následována tabulkou 2.5 až 2.9, ve které je uvedena čistota a vzájemná fidelita jednotlivých matic hustot procesů $\hat{\Pi}_{u1[\text{vir}]}$ a $\hat{\Pi}_{u1[\text{exp}]}$.



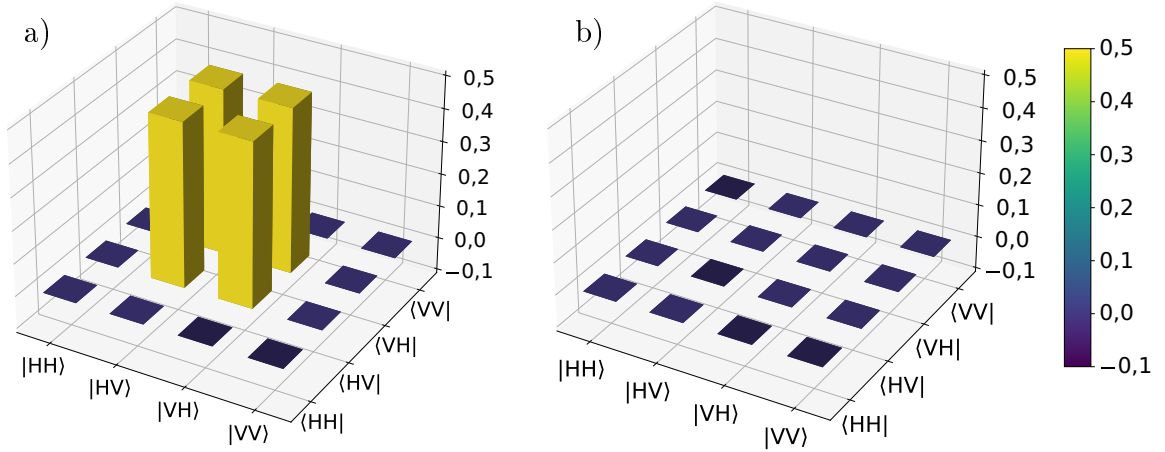
Obr. 2.21. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části virtuálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{u1[\text{vir}]}$ k transformaci \hat{U}_{u1} .



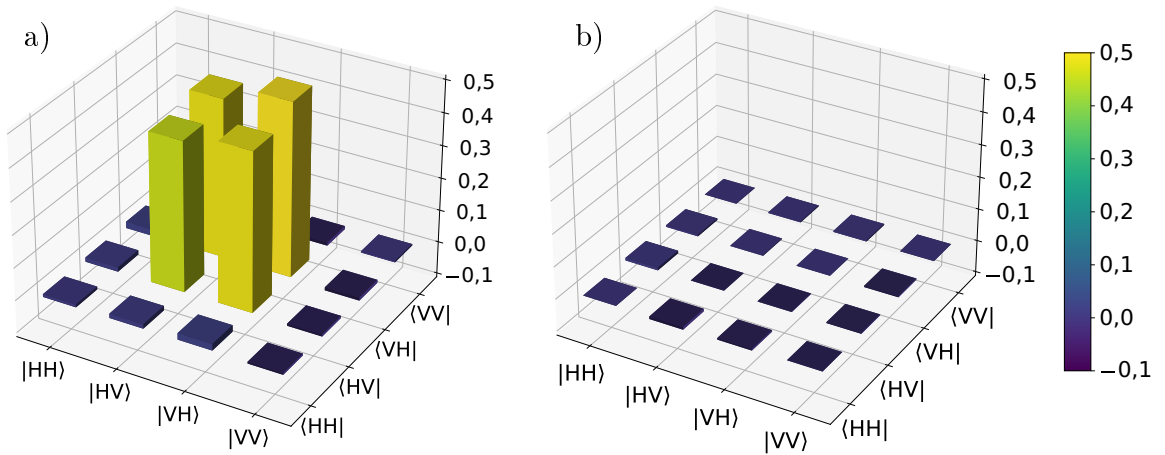
Obr. 2.22. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části experimentálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{u1[\text{exp}]}$ k transformaci \hat{U}_{u1} .

Tabulka 2.5: Parametry matic hustot procesu $\hat{\Pi}_{u1[\text{vir}]}$ a $\hat{\Pi}_{u1[\text{exp}]}$.

Maticе hustoty procesu	Čistota matice	Fidelita
$\hat{\Pi}_{u1[\text{vir}]}$	1,0	0,940 85
$\hat{\Pi}_{u1[\text{exp}]}$	0,917 87	



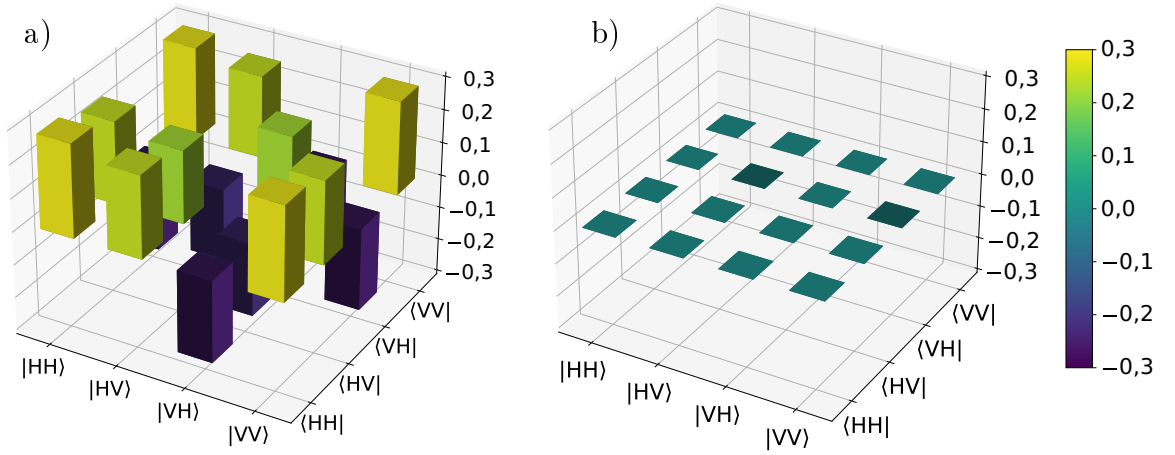
Obr. 2.23. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části virtuálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{u2[\text{vir}]}$ k transformaci \hat{U}_{u2} .



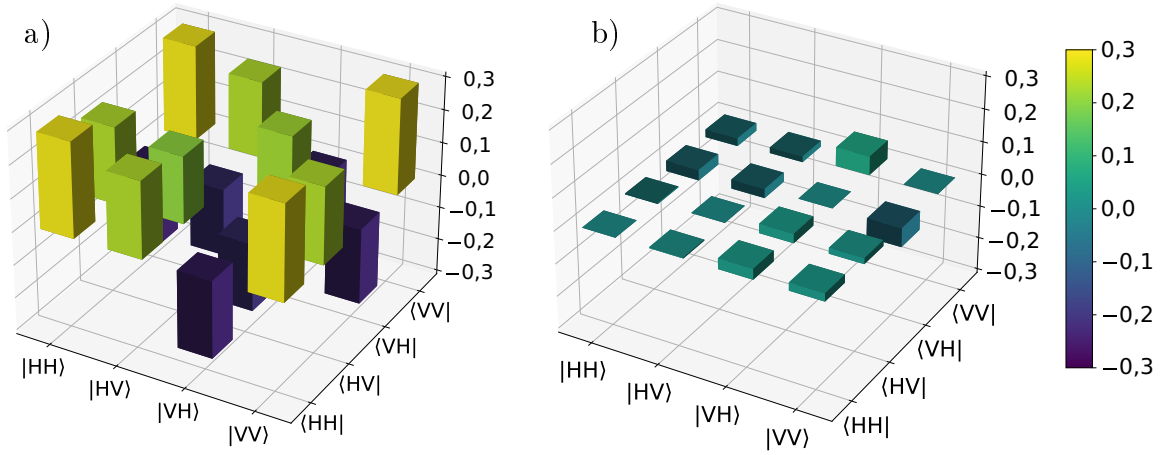
Obr. 2.24. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části experimentálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{u2[\text{exp}]}$ k transformaci \hat{U}_{u2} .

Tabulka 2.6: Parametry matic hustot procesu $\hat{\Pi}_{u2[\text{vir}]}$ a $\hat{\Pi}_{u2[\text{exp}]}$.

Maticе hustoty procesu	Čistota matice	Fidelita
$\hat{\Pi}_{u2[\text{vir}]}$	1,0	0,977 93
$\hat{\Pi}_{u2[\text{exp}]}$	0,960 86	



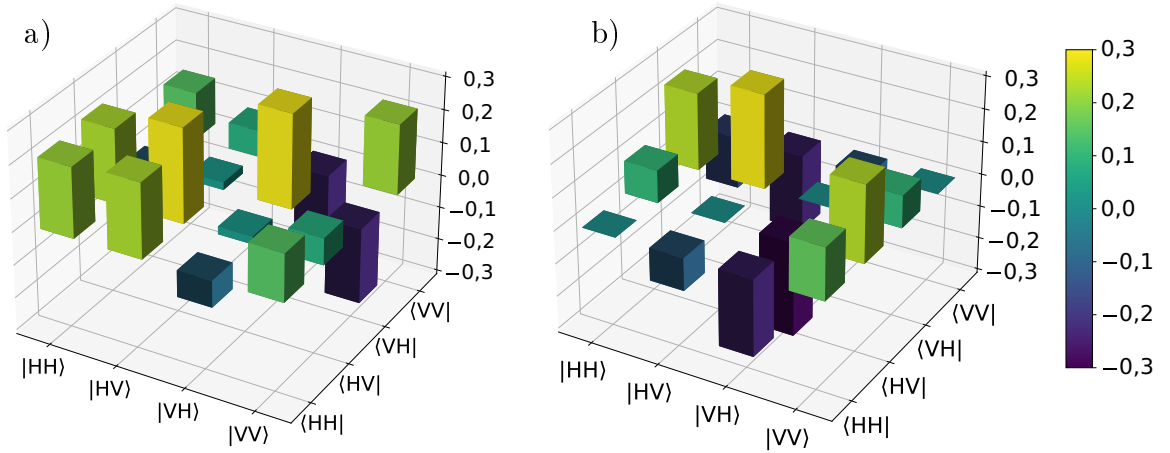
Obr. 2.25. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části virtuálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{u3[\text{vir}]}$ k transformaci \hat{U}_{u3} .



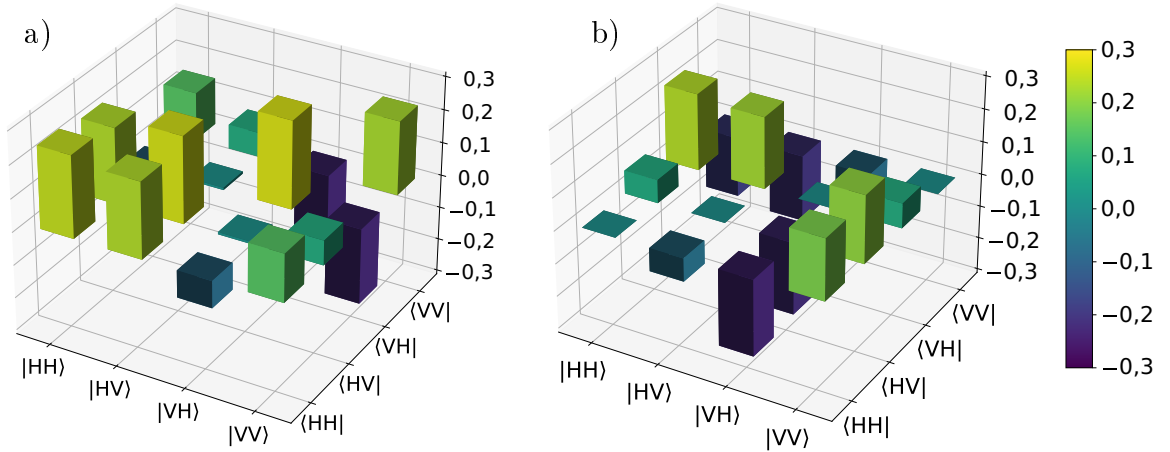
Obr. 2.26. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části experimentálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{u3[\text{exp}]}$ k transformaci \hat{U}_{u3} .

Tabulka 2.7: Parametry matic hustot procesu $\hat{\Pi}_{u3[\text{vir}]}$ a $\hat{\Pi}_{u3[\text{exp}]}$.

Matice hustoty procesu	Čistota matice	Fidelita
$\hat{\Pi}_{u3[\text{vir}]}$	1,0	0,963 94
$\hat{\Pi}_{u3[\text{exp}]}$	0,943 26	



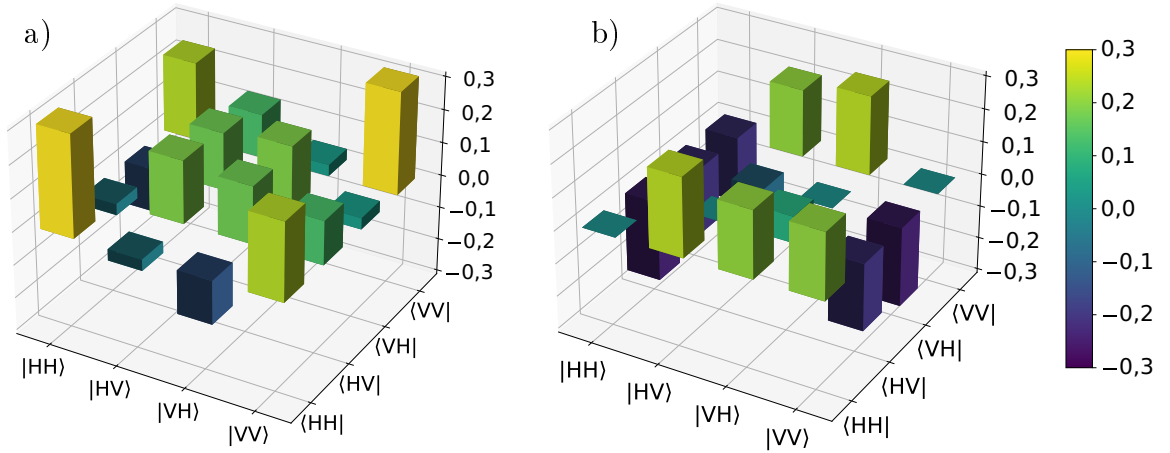
Obr. 2.27. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části experimentálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{u4[\text{vir}]}$ k transformaci \hat{U}_{u4} .



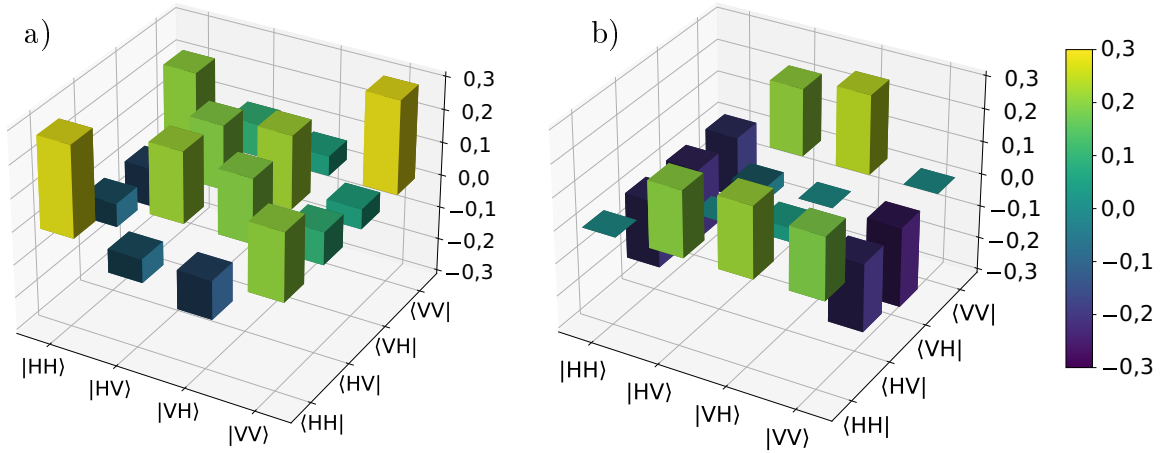
Obr. 2.28. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části virtuálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{u4[\text{exp}]}$ k transformaci \hat{U}_{u4} .

Tabulka 2.8: Parametry matic hustot procesu $\hat{\Pi}_{u4[\text{vir}]}$ a $\hat{\Pi}_{u4[\text{exp}]}$.

Matice hustoty procesu	Čistota matice	Fidelita
$\hat{\Pi}_{u4[\text{vir}]}$	1,0	0,941 78
$\hat{\Pi}_{u4[\text{exp}]}$	0,901 54	



Obr. 2.29. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části experimentálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{u5[\text{vir}]}$ k transformaci \hat{U}_{u5} .



Obr. 2.30. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části virtuálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{u5[\text{exp}]}$ k transformaci \hat{U}_{u5} z relace (2.66).

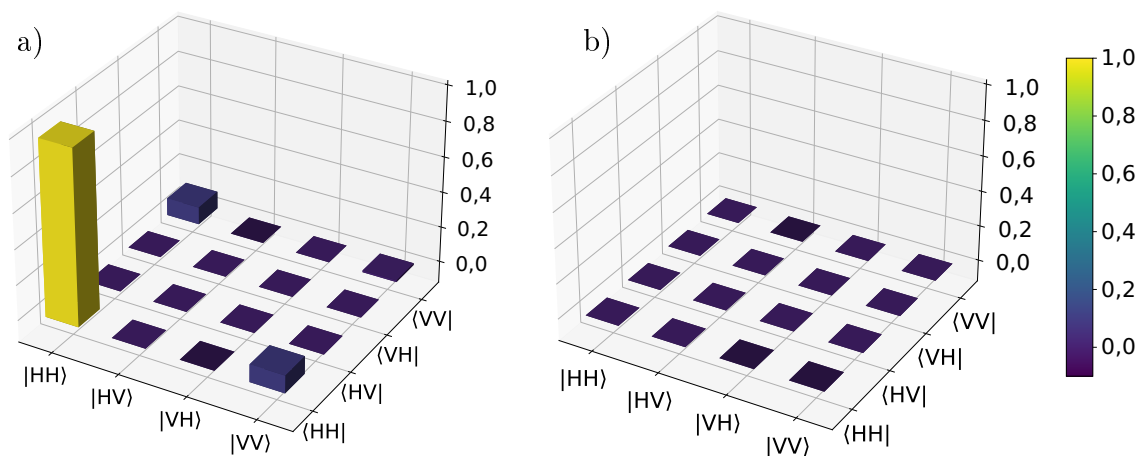
Tabulka 2.9: Parametry matic hustot procesu $\hat{\Pi}_{u5[\text{vir}]}$ a $\hat{\Pi}_{u5[\text{exp}]}$.

Matice hustoty procesu	Čistota matice	Fidelita
$\hat{\Pi}_{u5[\text{vir}]}$	1,0	0,954 86
$\hat{\Pi}_{u5[\text{exp}]}$	0,929 24	

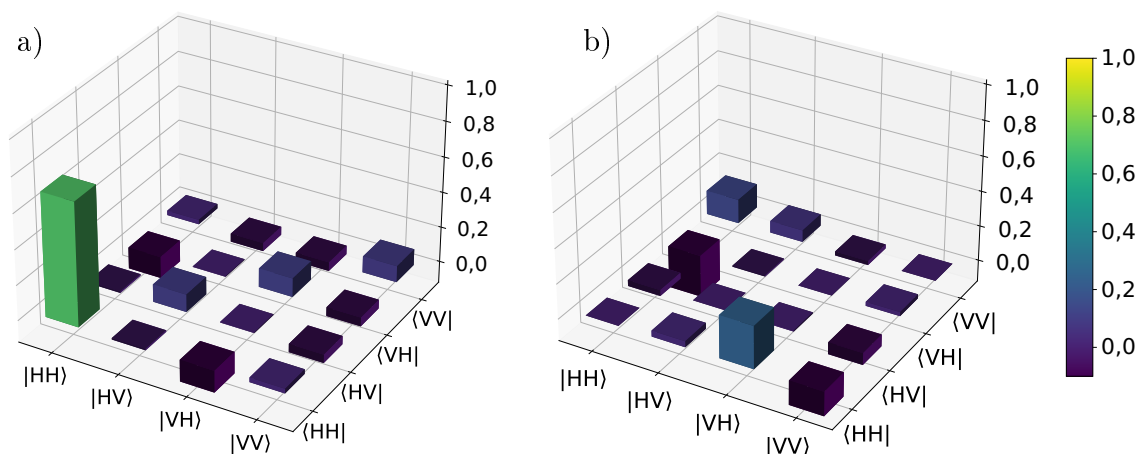
Stopa pro všechny výše uvedené matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{u_i}$ je rovna jedné. Pro všechny provedené unitární transformace platí, že fidelita s jejich virtuální, resp. ideální formou matice hustoty byla vždy vyšší než 0,94, viz tabulky 2.5 až 2.9. To vypovídá o tom, že optická soustava s malou pravděpodobností prováděla další transformace, viz relace (2.24). Tyto dodatečně provedené transformace není nutné explicitně vyjadřovat, jelikož se dají zahrnout do nejistot provedení experimentu.

Nyní bude následovat realizace sady neunitárních transformací z relace (2.69). V obrázcích 2.31 až 2.36 jsou vyobrazeny histogramy pro virtuální a experimentální matice

hustoty procesu $\hat{\Pi}_{n_i[\text{vir}]}$ a $\hat{\Pi}_{n_i[\text{exp}]}$ k jednotlivým transformacím \hat{U}_{n_i} z relace (2.69). Ke každé dvojici histogramů je opět uvedena tabulka 2.10 až 2.12, ve které je uvedena čistota a vzájemná fidelita jednotlivých matic hustot procesů $\hat{\Pi}_{u_i[\text{vir}]}$ a $\hat{\Pi}_{u_i[\text{exp}]}$.



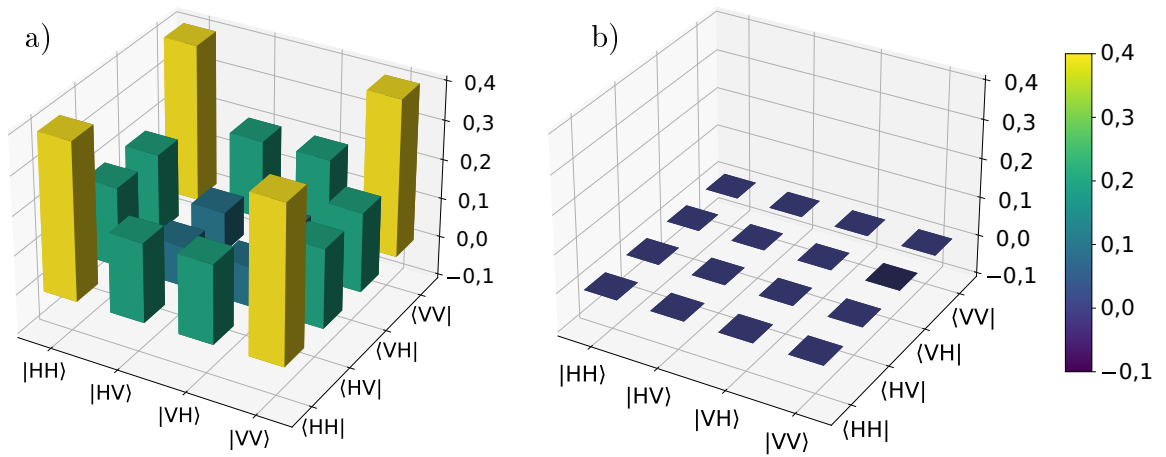
Obr. 2.31. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části virtuálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{n1[\text{vir}]}$ k transformaci \hat{U}_{n1} .



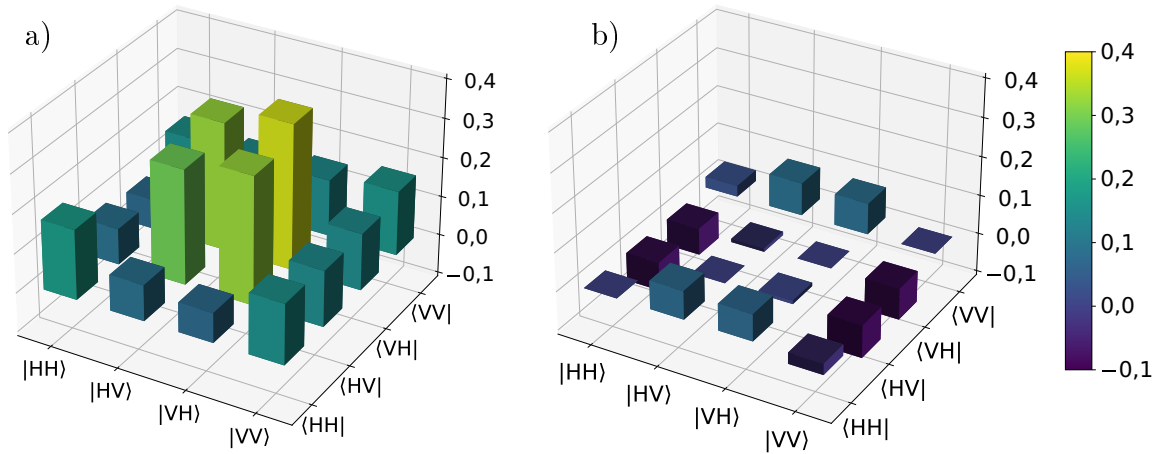
Obr. 2.32. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části experimentálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{n1[\text{exp}]}$ k transformaci \hat{U}_{n1} .

Tabulka 2.10: Parametry matic hustot procesu $\hat{\Pi}_{n1[\text{vir}]}$ a $\hat{\Pi}_{n1[\text{exp}]}$.

Matic hustoty procesu	Čistota matice	Fidelita
$\hat{\Pi}_{n1[\text{vir}]}$	1,0	0,700 42
$\hat{\Pi}_{n1[\text{exp}]}$	0,731 92	



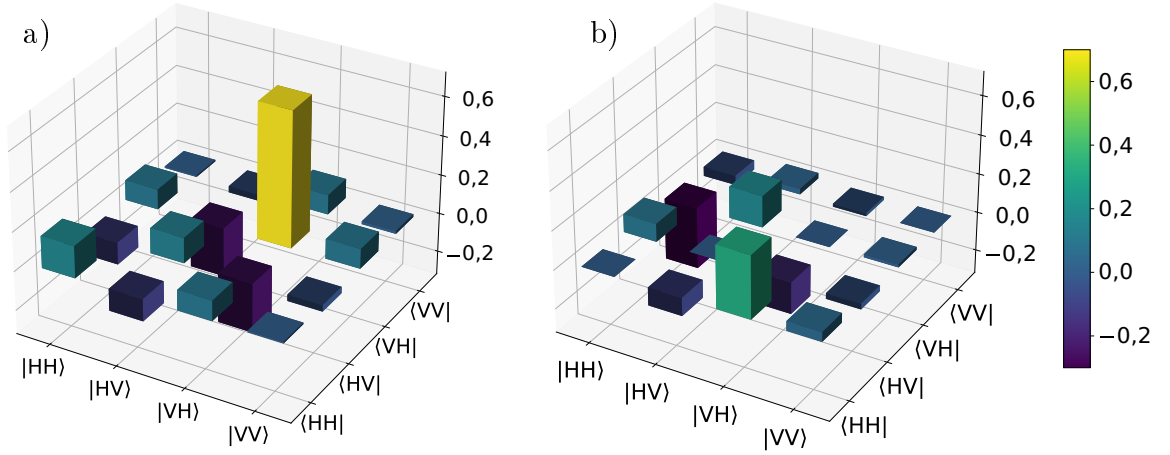
Obr. 2.33. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části virtuálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{n2[\text{vir}]}$ k transformaci \hat{U}_{n2} .



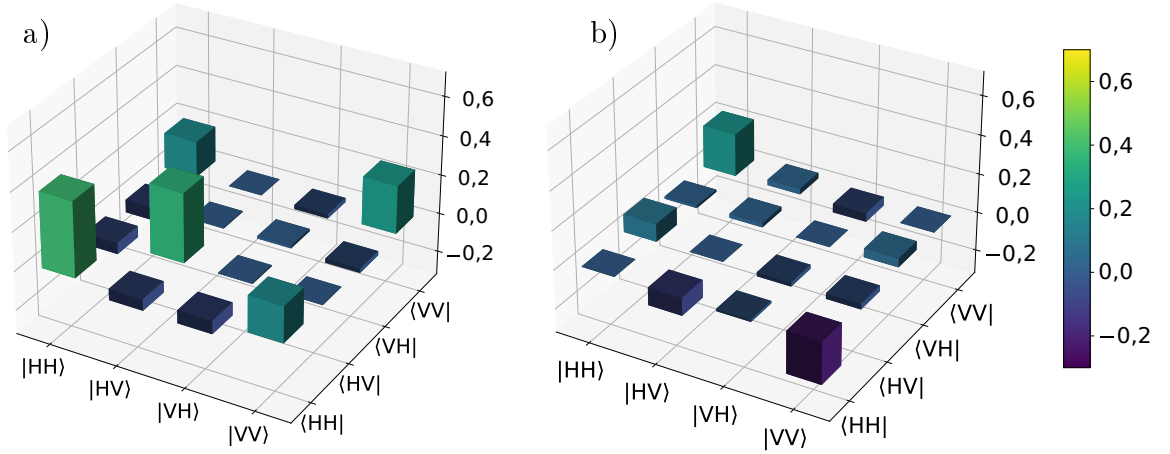
Obr. 2.34. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části experimentálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{n2[\text{exp}]}$ k transformaci \hat{U}_{n2} .

Tabulka 2.11: Parametry matic hustot procesu $\hat{\Pi}_{n2[\text{vir}]}$ a $\hat{\Pi}_{n2[\text{exp}]}$.

Matice hustoty procesu	Čistota matice	Fidelita
$\hat{\Pi}_{n2[\text{vir}]}$	1,0	0,569 66
$\hat{\Pi}_{n2[\text{exp}]}$	0,692 90	



Obr. 2.35. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části virtuálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{n3[\text{vir}]}$ k transformaci \hat{U}_{n3} .



Obr. 2.36. Vizualizace a) reálné a b) imaginární části experimentálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{n3[\text{exp}]}$ k transformaci \hat{U}_{n3} .

Tabulka 2.12: Parametry matic hustot procesu $\hat{\Pi}_{n3[\text{vir}]}$ a $\hat{\Pi}_{n3[\text{exp}]}$.

Matice hustoty procesu	Čistota matice	Fidelita
$\hat{\Pi}_{n3[\text{vir}]}$	1,0	0,114 20
$\hat{\Pi}_{n3[\text{exp}]}$	0,539 39	

Stopa pro všechny výše uvedené matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{nj}$ je rovna jedné. Z tabulek 2.5 až 2.9 plyne, že všechny experimentálně získané matice hustoty procesu $\hat{\Pi}_{nj[\text{exp}]}$ mají čistotu výrazně menší než jedna. To vypovídá o tom, že optická soustava s již nezanedbatelnou pravděpodobností prováděla další transformace, viz relace (2.24). Z tohoto důvodu taktéž fidelita mezi maticemi $\hat{\Pi}_{nj[\text{vir}]}$ a $\hat{\Pi}_{nj[\text{exp}]}$ je pro všechny případy nízká, s nejnižší získanou hodnotou 0,1. Optická soustava tedy nezrealizovala požadované neunitární transformace \hat{U}_{nj} z relace (2.69). Z naměřených dat lze ale získat operátory pro

transformace, které byly optickou soustavou realizovány. Nyní následuje proces nalezení transformace \hat{U}_{zi} , která generuje matici hustoty $\hat{\Pi}_{nj[\text{exp}]}$. Podrobnější popis tohoto postupu lze nalézt v kapitole 2.3.5.

Pro matici hustoty $\hat{\Pi}_{n1[\text{exp}]}$, jejíž forma je zobrazena na obr. 2.32, byly s fidelitou větší než 0,99 získány dva operátory \hat{U}_{z1} a \hat{U}_{z2} s přiřazenými pravděpodobnostmi $p_{z1} = 0,2573$ a $p_{z2} = 0,7427$ v následující formě

$$\begin{aligned}\hat{U}_{z1} &= \begin{pmatrix} 0,8210e^{-0,0809i} & 0,3575e^{-1,9898i} \\ 0,5388e^{1,673i} & 0,3556e^{-2,835i} \end{pmatrix} \\ \hat{U}_{z2} &= \begin{pmatrix} 0,9082e^{-1,7057i} & 0,3416e^{2,4927i} \\ 0,2234e^{3,082i} & 0,3092e^{-0,6291i} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.70}$$

Dále pro matici hustoty $\hat{\Pi}_{n2[\text{exp}]}$, jejíž forma je zobrazena na obr. 2.34, byly s fidelitou větší než 0,99 získány dva operátory \hat{U}_{z3} a \hat{U}_{z4} s přiřazenými pravděpodobnostmi $p_{z3} = 0,4537$ a $p_{z4} = 0,5463$ v následující formě

$$\begin{aligned}\hat{U}_{z3} &= \begin{pmatrix} 0,2434e^{0,1635i} & 0,9478e^{-1,6986i} \\ 0,8001e^{-1,6323i} & 0,2440e^{-0,8617i} \end{pmatrix} \\ \hat{U}_{z4} &= \begin{pmatrix} 0,6174e^{-1,6597i} & 0,3831e^{-1,5775i} \\ 0,4158e^{-1,7277i} & 0,5881e^{-1,347i} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.71}$$

Pro poslední matici hustoty $\hat{\Pi}_{n3[\text{exp}]}$, jejíž forma je zobrazena na obr. 2.36, byly s fidelitou větší než 0,99 získány dva operátory \hat{U}_{z5} a \hat{U}_{z6} s přiřazenými pravděpodobnostmi $p_{z5} = 0,4621$ a $p_{z6} = 0,5379$ v následující formě

$$\begin{aligned}\hat{U}_{z5} &= \begin{pmatrix} 0,4847e^{2,4427i} & 0,0637e^{-1,1132i} \\ 0,7262e^{0,2543i} & 0,5268e^{2,8546i} \end{pmatrix} \\ \hat{U}_{z6} &= \begin{pmatrix} 0,7975e^{1,2968i} & 0,1501e^{-1,9729i} \\ 0,5592e^{2,7539i} & 0,5402e^{2,3941i} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.72}$$

Porovnáním nalezených operátorů \hat{U}_{zi} z relací (2.70), (2.71) a (2.72) s příslušnými operátory \hat{U}_{nj} z relace (2.69) není nalezena podobnost. Rozpad na jednotlivé operátory \hat{U}_{zi} značí hrubou experimentální chybu. Lze tedy usoudit, že experimentální realizace obecné neunitární transformace optickou soustavou na obr. 2.10 nebyla úspěšně provedena.

Závěr

Tato práce pojednává o \mathcal{PT} -symetrické teorii a jejímu propojení s quasi-hermitovskou a pseudo-hermitovskou teorií. Z dostupných informací ještě není zcela zřejmé, jestli \mathcal{PT} -symetrická teorie je opravdu komplexním rozšířením hermitovské kvantové mechaniky, nebo se jedná o konkrétní podskupinu pseudo-hermitovských hamiltoniánů. Na tuto otázku je nyní intenzivně hledána odpověď.

V praktické části byl předložen návrh lineárně-optické soustavy pro realizaci obecné jednoqubitové neunitární transformace, která byla získána z optické soustavy realizující obecnou dvouqubitovou unitární transformaci.

V první části experimentu bylo virtuální simulací prověřeno, jestli dvouqubitová optická soustava může provést obecnou dvouqubitovou unitární transformaci. Hledaná řešení nastavení optické soustavy pro realizaci náhodně generované dvouqubitové unitární transformace byla nalezena ve většině případů se shodou větší jak 0,99.

Před sestavením optické soustavy pro realizaci obecné jednoqubitové neunitární transformace byly prověřeny vybrané optické prvky. Nejdříve byly měřicím procesem nalezeny směry optických os fázových destiček. Při tomto měření se ukázala různá maxima a minima u čtvrtvlnných destiček. Použitím těchto fázových destiček lze očekávat růst odchylek v experimentální demonstraci. Dále byl proměřen příčný profil laserového svazku, jehož zdrojem byl klasický zdroj světla reprezentován laserovou diodou LP 705-SF15, u kterého byl nalezen očekávaný gaussovský tvar. Závěrem byl prověřen ztrátový člen, jako který byl zvolen šedý filtr NDL-25C-4, u něhož funkce transmise byla naměřena stejná pro různé intenzity laserového svazku. Ze znalosti tohoto výsledku bylo možné definovat ztráty v soustavě, a to vytvořením jednoduché závislosti mezi pozicí motoru a funkcí transmise bez závislosti na intenzitě světla procházející šedým filtrem.

V poslední části byly na sestavené optické soustavě experimentálně demonstrovány obecné jednoqubitové unitární a neunitární transformace. Výsledky byly porovnány s výsledky získanými virtuálně simulovanou identickou optickou soustavou.

Získané výsledky byly uspokojující pro unitární proces, kdežto při experimentální realizaci neunitárního procesu byly získány velké odchylky od výsledků z virtuální simulace. Z výsledků realizací neunitárních transformací byly nalezeny operátory pro transformace, které byly skutečně realizovány optickou soustavou. Ukázalo se, že optická soustava při požadavku pro realizaci neunitární transformace prováděla dvě transformace s jednotlivě přiřazenými pravděpodobnostmi, které byly výrazně odlišné od požadované. Tento výsledek nebyl očekáván a experimentální realizace neunitární transformace je proto považována za neúspěšnou.

Literatura

- [1] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010. ISBN: 9781107002173.
- [2] Peter Wittek. *Quantum Machine Learning: What Quantum Computing Means to Data Mining*. Aug. 2014. ISBN: 9780128009536.
- [3] C. M. Caves. Antilinear operators [online]. [cit. 1.03.2022]. Dostupné z: <http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph216/antilinearops.pdf>.
- [4] Robert G. Littlejohn. Physics 221a, fall 2019, notes 21, time reversal [online]. [cit. 01.03.2022]. Dostupné z: <http://bohr.physics.berkeley.edu/classes/221/1112/notes/timerev.pdf>.
- [5] Carl M. Bender, Stefan Boettcher, and Peter N. Meisinger. PT-symmetric quantum mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 40(5):2201–2229, May 1999.
- [6] Carl M Bender, Peter N Meisinger, and Qinghai Wang. Finite-dimensional PT-symmetric hamiltonians. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(24):6791–6797, Jun. 2003.
- [7] Carl M. Bender, Dorje C. Brody, Hugh F. Jones, and Bernhard K. Meister. Faster than Hermitian Quantum Mechanics. *Physical Review Letters*, 98(4), Jan. 2007.
- [8] Carl M. Bender, Dorje C. Brody, João Caldeira, Uwe Günther, Bernhard K. Meister, and Boris F. Samsonov. PT-symmetric quantum state discrimination. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371(1989):20120160, 2013.
- [9] F. Mirzapour and A. Mirzapour. Further properties of involutory and idempotent matrices, 2020.
- [10] Katherine Jones-Smith. *Non-Hermitian quantum mechanics*. Disertační práce, Case Western Reserve University, Department of Physics, 2010.
- [11] Carl M. Bender, Dorje C. Brody, and Hugh F. Jones. Complex extension of quantum mechanics. *Physical Review Letters*, 89(27), Dec. 2002.
- [12] Carl M Bender. Introduction to PT-symmetric quantum theory. *Contemporary Physics*, 46(4):277–292, Jul. 2005.
- [13] Carl M Bender, M V Berry, and Aikaterini Mandilara. Generalized PT symmetry and real spectra. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(31):L467–L471, Jul. 2002.

- [14] Carl M. Bender and Philip D. Mannheim. PT-symmetry and necessary and sufficient conditions for the reality of energy eigenvalues. *Physics Letters A*, 374(15-16):1616–1620, Apr. 2010.
- [15] Carl M Bender, Peter N Meisinger, and Qinghai Wang. Calculation of the hidden symmetry operator in PT-symmetric quantum mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(7):1973–1983, Feb. 2003.
- [16] Carl M Bender and Barnabas Tan. Calculation of the hidden symmetry operator for a PT-symmetric square well. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(8):1945–1953, Feb. 2006.
- [17] Carl M Bender. PT-symmetric quantum theory. *Journal of Physics: Conference Series*, 631:012002, Jul. 2015.
- [18] ALI MOSTAFAZADEH. Pseudo-hermitian representation of quantum mechanics. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 07(07):1191–1306, 2010.
- [19] Carl M Bender, Joachim Brod, André Refig, and Moretz E Reuter. The C operator in PT-symmetric quantum theories. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(43):10139–10165, Oct. 2004.
- [20] F.G. Scholtz, H.B. Geyer, and F.J.W. Hahne. Quasi-hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle. *Annals of Physics*, 213(1):74–101, 1992.
- [21] Ali Mostafazadeh. Pseudo-hermiticity versus PT symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-hermitian hamiltonian. *Journal of Mathematical Physics*, 43(1):205–214, Jan. 2002.
- [22] Ali Mostafazadeh. Exact PT-symmetry is equivalent to Hermiticity. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(25):7081–7091, Jun. 2003.
- [23] Philip D. Mannheim. PT symmetry as a necessary and sufficient condition for unitary time evolution, Nov. 2009.
- [24] Fabio Masillo. *Dynamics of Hermitian and Quasi-Hermitian Open Systems*. Disertační práce, University Of Salento, Department of Physics, 2010.
- [25] Sarah Croke. PT-symmetric hamiltonians and their application in quantum information. *Phys. Rev. A*, 91:052113, May 2015.
- [26] Ali Mostafazadeh. Pseudo-hermiticity versus PT-symmetry. II. a complete characterization of non-hermitian hamiltonians with a real spectrum. *Journal of Mathematical Physics*, 43(5):2814, 2002.
- [27] Ali Mostafazadeh. Pseudo-hermiticity versus PT-symmetry III: Equivalence of pseudo-hermiticity and the presence of antilinear symmetries. *Journal of Mathematical Physics*, 43(8):3944–3951, Aug. 2002.
- [28] Ruili Zhang, Hong Qin, and Jianyuan Xiao. PT-symmetry entails pseudo-hermiticity regardless of diagonalizability. *Journal of Mathematical Physics*, 61(1):012101, Jan. 2020.

- [29] Abhijeet Alase, Salini Karuvade, and Carlo Maria Scandolo. The operational foundations of PT-symmetric and quasi-hermitian quantum theory, 2022.
- [30] Joseph Schindler, Ang Li, Mei C. Zheng, F. M. Ellis, and Tsampikos Kottos. Experimental Study of Active LRC Circuits with PT-Symmetries. *Physical Review A*, 84(4), Oct. 2011.
- [31] Chao Zheng, Liang Hao, and Gui Lu Long. Observation of a fast evolution in a parity-time-symmetric system. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371(1989):20120053, Apr. 2013.
- [32] Kohei Kawabata, Yuto Ashida, and Masahito Ueda. Information Retrieval and Criticality in Parity-Time-Symmetric Systems. *Physical Review Letters*, 119(19), Nov. 2017.
- [33] F. Klauck, L. Teuber, M. Ornigotti, M. Heinrich, S. Scheel, and A. Szameit. Observation of PT-symmetric quantum interference. *Nature Photonics*, 13(12):883–887, Sep. 2019.
- [34] Lei Xiao, Kunkun Wang, Xiang Zhan, Zhihao Bian, Kohei Kawabata, Masahito Ueda, Wei Yi, and Peng Xue. Observation of Critical Phenomena in Parity-Time-Symmetric Quantum Dynamics. *Physical Review Letters*, 123(23), Dec. 2019.
- [35] Ş K. Özdemir, S. Rotter, F. Nori, and L. Yang. Parity-time symmetry and exceptional points in photonics. *Nature Materials*, 18(8):783–798, Aug. 2019.
- [36] Jan Soubusta and Antonín Černoch. *Optické vlastnosti pevných látek*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2014. ISBN: 978-80-244-4111-5.
- [37] P. G. Kwiat J. B. Altepeter, E. R. Jeffrey. Quantum state tomography [online]. [cit. 25.03.2022]. Dostupné z: http://research.physics.illinois.edu/QI/Photonics/tomography-files/amo_tomo_chapter.pdf.
- [38] Michala Žďárská. Vývoj fotogrammetrického mapování na našem území. Bakalářská práce, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2013.
- [39] Omer Bayraktar. Quantum-polarization state tomography. Diplomová práce, Quantum Electronics and Quantum Optics, Department of Applied Physics, Royal Institute of Technology (KTH) and Physik-Department E11, Technische Universität München, 2016.
- [40] Zdeněk Hradil, Jaroslav Řeháček, Jaromír Fiurášek, and Miroslav Ježek. *3 Maximum-Likelihood Methods in Quantum Mechanics*, pages 59–112. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [41] A. Niggebaum. *Quantum State Tomography of the 6 qubit photonic symmetric Dicke State*. Diplomová práce, Faculty of Physics of the Ludwig Maximilians University, 2011.
- [42] Daniel F. V. James, Paul G. Kwiat, William J. Munro, and Andrew G. White. Measurement of qubits. *Physical Review A*, 64(5), Oct. 2001.
- [43] T Baumgratz, A Nüßeler, M Cramer, and M B Plenio. A scalable maximum likelihood method for quantum state tomography. *New Journal of Physics*, 15(12):125004, Dec. 2013.

- [44] Daniel A. Lidar. Lecture notes on the theory of open quantum systems, 2019.
- [45] Min Jiang, Shunlong Luo, and Shuangshuang Fu. Channel-state duality. *Phys. Rev. A*, 87:022310, Feb 2013.
- [46] Xiaorong Wang, Ting Gao, and Fengli Yan. On coherence of quantum operations by using choi-jamiołkowski isomorphism. *Laser Physics Letters*, 19(3):035206, feb 2022.
- [47] LP705-SF15 705 nm, 15 mW, C Pin Code, SM Fiber-Pigtailed Laser Diode, FC/PC. *Thorlabs, Inc.* [online]. Copyright © 1999 [cit. 05.03.2022]. Dostupné z: <https://www.thorlabs.com/thorProduct.cfm?partNumber=LP705-SF15>.
- [48] Thorlabs - SM600 Single Mode Optical Fiber, 633 - 780 nm, Diameter 125 μm Cladding. *Thorlabs, Inc.* [online]. Copyright © 1999 [cit. 05.03.2022]. Dostupné z: <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=SM600>.
- [49] Thorlabs - FPC030 Fiber Polarization Controller, 3 Diameter 27 mm Paddles, No Fiber. *Thorlabs, Inc.* [online]. Copyright © 1999 [cit. 05.03.2022]. Dostupné z: <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=FPC030>.
- [50] Thorlabs - C260TMD-B $f = 15.29$ mm, $n_a = 0.16$, Mounted Aspheric Lens, ARC: 600 - 1050 nm. *Thorlabs, Inc.* [online]. Copyright © 1999 [cit. 05.03.2022]. Dostupné z: <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=C260TMD-B>.
- [51] Low Profile DC Motor Rotation Stages. *Newport Corporation* [online]. [cit. 05.03.2022]. Dostupné z: <https://www.newport.com/f/folded-motor-low-profile-rotation-mounts>.
- [52] SMC100CC Motion Controller, Motion Controller, Single-axis DC Motor. *Newport Corporation* [online]. [cit. 05.03.2022]. Dostupné z: <https://www.newport.com/p/SMC100CC>.
- [53] DGL10 - Double Glan-Taylor Polarizer. *Thorlabs, Inc* [online]. [cit. 06.03.2022]. Dostupné z: <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=DGL10>.
- [54] BD40 - Calcite Beam Displacer, 4.0 mm Beam Separation, Diameter 1" Housing. *Thorlabs, Inc* [online]. [cit. 06.03.2022]. Dostupné z: <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=BD40>.
- [55] Thorlabs - PE4 - Piezoelectric Actuator, 4 mm Manual Travel, 15 μm Piezo Travel. *Thorlabs, Inc.* [online]. Copyright © 1999 [cit. 26.04.2022]. Dostupné z: <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=PE4>.
- [56] NDL-25C-4 - Continuously Variable ND Filter, 25 mm x 100 mm, OD: 0.04 - 4.0. *Thorlabs, Inc* [online]. [cit. 06.03.2022]. Dostupné z: <https://www.thorlabs.de/thorproduct.cfm?partnumber=NDL-25C-4>.
- [57] Motorized Linear Stage, Miniature, 25 mm Travel, DC Motor, M2 and M3 *Newport Corporation* [online]. [cit. 06.03.2022]. Dostupné z: <https://www.newport.com/p/MFA-CC>.

- [58] Thorlabs - S120VC Standard Photodiode Power Sensor, UV-Extended Si, 200 - 1100 nm, 50 mw. *Thorlabs, Inc.* [online]. Copyright © 1999 [cit. 05.03.2022]. Dostupné z: <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=S120VC>.
- [59] gwoptics - Component Library. [online]. [cit. 16.03.2022]. Dostupné z: <http://www.gwoptics.org/ComponentLibrary/>.