UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Natálie Sikorová

Zlatý řez

Olomouc 2019 vedoucí práce: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracovala samostatně a uvedla veškerou použitou literaturu a zdroje.

V Olomouci dne **Natálie Sikorová**

Poděkování

Chtěla bych poděkovat panu Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D. za odborné vedení, užitečné rady, doporučení literatury a motivaci při zpracovávání této bakalářské práce.

Obsah

Úvod ... **6**

1 Raná historie zlatého řezu ... **7**

1.1 Pojmenování ... 7

1.2 Pyramidy ... 7

1.3 Feideas ... 8

1.4 Platón ... 9

1.5 Eukleides ... 9

2 Zlatý řez v matematice ... **11**

2.1 Matematické vyjádření ... 11

2.2 Číslo φ ... 12

3 Geometrické útvary a jejich konstrukce ... **14**

3.1 Rozdělení úsečky ve zlatém řezu ... 14

3.2 Zlatý obdélník ... 14

3.3 Zlatý trojúhelník a zlatý gnómon ... 15

3.4 Zlatá logaritmická spirála ... 16

3.5 Zlatý úhel ... 17

3.6 Pentagram ... 17

3.7 Platónská tělesa ... 18

4 Fibonacciho posloupnost ... **20**

4.1 Leonardo Fibonacci ... 22

4.2 Úloha o množení králíků ... 22

5 Přírodní úkazy zlatého řezu ... **24**

5.1 Člověk ... 24

5.2 Živočichové ... 26

5.3 Rostliny ... 27

5.3.1 Fylotaxe ... 28

5.3.2 Květy ... 29

5.3.3 Plody ... 30

5.4 Neživá příroda ... 31

5.5 Vesmír ... 31

6 Zlatý řez v umění ... 34

6.1 Architektura ... 34

6.2 Malířství ... 35

6.3 Hudba ... 37

Závěr ... 40

Seznam použité literatury ... 41

Seznam a zdroje obrázků ... 42

Úvod

Cílem mé bakalářské práce je proniknout do problematiky zlatého řezu a seznámit s tímto zajímavým poměrem i čtenáře, pro které je tato problematika doposud neznámá. V průběhu mého studia na základní škole ani na gymnáziu jsem se s ním vůbec nesetkala. Na vysoké škole jsem tento název zaslechla poprvé. Po podrobnějším prozkoumání jsem zlatý řez zhodnotila jako vhodné téma ke zpracování. Už jen z hlediska matematického mě uchvátil do takové míry, že byl pro mě jasnou volbou.

Zlatým řezem rozumíme rozdělení úsečky o libovolné velikosti jedním bodem na dvě nestejné části tak, aby její délka byla ve stejném poměru k její delší části jako její delší část ke kratší. Základní definicí ale všechno teprve začíná. Matematicky bychom mohli spočítat jeho hodnotu, která činí přibližně 1,618. V geometrii se pak od úsečky dostáváme k několika dalším útvarům, v nichž zlatý řez nacházíme ve spoustě podob. Využití našel v několika směrech umění, a to hlavně v architektuře, sochařství, malířství a hudbě. Ve vědě a vesmíru hraje taktéž obrovskou roli. Lidé jej tedy používají už po několik tisíciletí. Proto bychom mohli jmenovat dlouhý seznam osobností, které jakýmkoli způsobem přispěly k jeho objevování, zkoumání, anebo jej používaly při své tvorbě.

Fascinující je, že kromě člověka se o jeho vyobrazení postarala i sama příroda. Nachází se v nejrozmanitějších oblastech našeho světa. Zlatý řez v různých formách jeho vyobrazení prezentují rostliny, živočichové, ale také neživá část přírody, např. proudění. Můžeme tedy říci, že je starší než lidstvo samo. Pravděpodobně dodnes nebyla objevena všechna místa jeho výskytu. Je všude kolem nás. Potkáváme jej na každém rohu a vůbec si to neuvědomujeme. Odhalení některých souvislostí zlatého řezu realitou je někdy opravdu vzrušující. Nemusíme být matematici k tomu, abychom si jeho krásu oblíbili.

Tato bakalářská práce by mohla být určena pro zájemce z řad studentů středních škol a gymnázií. U nich se totiž předpokládá, že jsou již seznámeni se základy matematiky, geometrie a biologie, což je potřeba k ucelenému pochopení zlatého řezu.

1 Raná historie zlatého řezu

Sjednotit historii zlatého řezu není ani zdaleka tak jednoduché, jak se může zdát. Záleží totiž na tom, z jakého pohledu se na tento podivuhodný poměr díváme. V této kapitole se budeme zabývat historií zlatého řezu z hlediska jeho objevování a počátků používání. Jak vlastně lidé odhalili jeho jedinečné kouzlo? Kdo byl první? A jak se jím dále zabývaly významné osobnosti našeho světa?

1.1 Pojmenování

Předpokládáme, že zlatý řez byl v průběhu historie na některých místech zapomenut a na jiných zase objeven. Z toho můžeme vyvodit, že nemá jeden jediný ucelený název, ale existuje pro tuto fascinující matematickou konstantu spousta pojmenování.

Oficiálně název „zlatý řez" uvedl ale až ve své knize *Čistá elementární matematika* v roce 1835 Martin Ohm. Byl bratrem známého a velice úspěšného fyzika Georga Ohma, jehož příjmení dnes nese název jednotka elektrického odporu. (2)

Můžeme tedy jmenovat vedle zlatého řezu také božský řez, zlatý poměr, božský poměr, božská proporce, zlatá úměra, zlaté číslo, posvátné číslo, posvátný řez nebo posvátný poměr. (2)

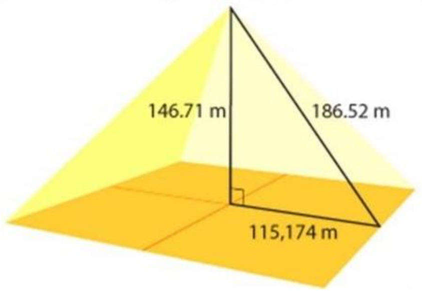
1.2 Pyramidy

Za úplně nejstarší vyjádření tohoto fascinujícího božského poměru, který využil člověk ve svém díle, je považována stavba pyramid již ve starověkém Egyptě. Velká pyramida v Gíze, taktéž známá jako *Chufevova pyramida*, prokazuje vyjádření zlatého řezu ve svých rozměrech. Její stavba trvala přibližně 20 let a nechal si ji postavit faraon Chufev. Měla později sloužit jako jeho hrobka. Byla dostavěna přibližně kolem roku 2500 př. n. l. a jedná se o nejvyšší pyramidu na světě. (2)

Obrázek 1: Chufevova pyramida v Gíze

Původně dosahovala výšky necelých 147 metrů. V současné době je asi o 9 metrů nižší z důvodu sejmutí jejího nejvyššího bloku. (10)

V geometrii hovoříme o pyramidě jako o pravidelném čtyřbokém jehlanu, na kterém rozlišujeme čtvercovou podstavu a plášť složen ze čtyř rovnoramenných trojúhelníků. Stěny pláště svírají s podstavou úhel 51 ° 51 ‘ a každá je orientovaná na jednu světovou stranu. Při podrobnějším zkoumání můžeme pozorovat, že výška trojúhelníku pláště na stranu podstavy je ve zlatém poměru s výškou celé pyramidy. (2)

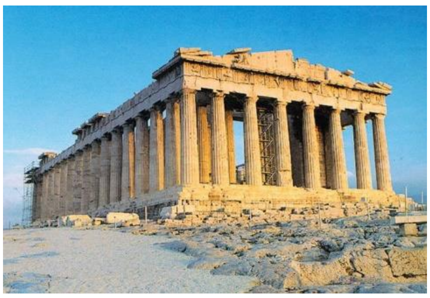


Obrázek 2: Schéma vzdáleností v Chufevově pyramidě

Nedochovaly se však žádné nákresy či náčrty, podle kterých byly pyramidy postaveny. Mohla by to být jen pouhá náhoda? Bylo provedeno spousta měření a různých matematických výpočtů. Této problematice se již věnovalo několik významných osobností a bylo vydáno mnoho knih. Prvním z nich byl světový historik Hérodot. Ve svých knihách hovoří o užívání zlatého řezu při stavbách pyramid, na což navazuje spousta dalších historiků a matematiků. Teorie, že staří Egypťané neznali božský poměr, byla téměř zamítnuta. (2)

1.3 Feideas

První stavbou, jejíž původní náčrty byly dochovány a dokazují záměrné použití zlatého řezu, byl chrám *Parthenon*. Byl postaven v Athénách pod vedením řeckého sochaře a matematika Feidea. Kontroloval průběh jeho stavby a zabýval se zejména sochami, které byly součástí chrámu. Jeho nejvýznamnějším dílem se stala socha *Dia v Olympii*, která patřila k sedmi divům světa. Žádný z jeho výtvorů se do dnešní doby bohužel nedochoval. Můžeme však vidět zbylé trosky Parthenonu. (2)



Obrázek 3: Parthenon

Právě podle Feidea je zlatý řez označován řeckým písmenem φ, čteme „fí“. Tento symbol má vyjadřovat první písmeno ve jméně Feideas v řečtině. Stanovil jej tak ve 20. století Mark Barr. Před tímto označením byl zlatý řez známý pouze pod jeho slovními pojmenováními. Číslo φ pak znamenalo značné zjednodušení při zápisu matematických vzorců a počítání s tímto božským číslem. (2)

Matematik George Markowsky se zabýval dlouhou dobu hledáním důkazu o tom, že Parthenon neodpovídá objeveným souvislostem se zlatým řezem. Dokonce vydal článek *Mylné představy o zlatém řezu*, ve kterém tuto teorii vyvrací. Vysvětluje, že krajní části Parthenonu přesahují přes zlatý obdélník, do kterého má stavba přesně zapadat při pohledu zpředu. Podotýkal, že měření Parhenonu bylo prováděno špatným způsobem a z různých míst, proto je dané tvrzení celkem nepřesné. (7)

1.4 Platón

Řecký pedagog, matematik a především filozof Aristoklés je celosvětově známý pod přezdívkou Platón. Žil na přelomu 5. a 4. století př. n. l. a je považován za prvního všestranně myslícího člověka v historii lidstva. Pro mladého Platóna se stal obrovským vzorem jeho učitel matematiky, Theodóros z Kyrény, který se proslavil dokazováním iracionálních čísel. (3)

Platón prosazoval matematiku jako obor, který je nezbytně nutné znát. Podle něj se bez ní neobejdou vědci ani filozofové. Soustředil své výzkumy výrazně na vesmír a hvězdnou oblohu. Během života přinesl světu spoustu objevů. Vlastní zkušenosti a vědomosti se snažil předávat nové generaci své doby, v níž tím odstartoval obrovský pokrok v matematice. Při takovém nadšení pro vzdělávání a vědu kladl důraz zejména na geometrii. Proto nás jistě nepřekvapí, že se už on začal zabývat některými vlastnostmi a výskytem zlatého řezu. Popisoval s ním spojenou nesouměřitelnost úseček a dospěl také k pěti nejoriginálnějším geometrickým trojrozměrným útvarům, jež známe pod názvem platónská tělesa. (3)

1.5 Eukleides

Jedním z nejvýznamnějších osobností, které se podílely na zkoumání a formulování zlatého řezu, byl Eukleides z Alexandrie. Zároveň patřil k nejvzdělanějším a nejlepším učitelům matematiky všech dob. Působil v první Alexandrijské škole kolem roku 300 př. n. l. Předtím zřejmě studoval v Athénách matematiku. O podrobnostech jeho života toho není moc známo, dokonce ani místo, kde se narodil. (2)

Jeho nejproslulejší dílo, kniha *Základy,* se stalo nejvýznamnější historickou matematickou učebnicí, která byla používána ještě po mnoho staletí. V knize popisoval geometrii a teorii čísel. Byla rozdělena do třinácti svazků. Později, ale ještě v průběhu starověku, k ní napsali své komentáře postupně Heron, Pappos a Proklos. (3)

Eukleides evidentně nikdy nenazval onen poměr zlatým řezem. Zabýval se jeho zákonitostmi v matematice, a to ve spoustě směrech. Vysvětlil, jak vypočítat jeho hodnotu. Popisoval, ve kterých geometrických útvarech můžeme zlatý řez najít. Zároveň ukazoval jejich geometrické konstrukce. (6)

Obrázek 4: Eukleides

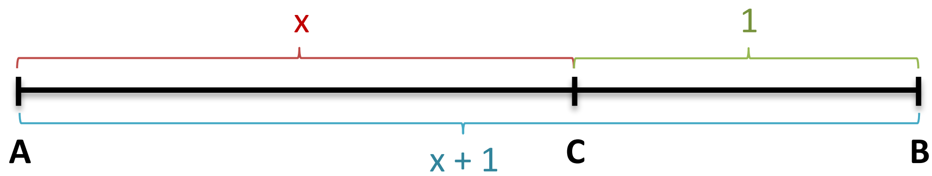
V *Základech* použil zlatý řez na několika místech a v různých souvislostech. Byl první, kdo uvedl jeho dobře zkoordinovanou definici. Nakreslil úsečku a pak ji rozdělil právě ve zlatém poměru. Toto rozdělení však nazval jako *rozdělení úsečky v krajním a středním poměru*. Zapsal se do historie také tím, že měl výjimečnou schopnost vyjadřovat se výstižně, logicky a jeho způsob myšlení se velice lišil od ostatních tehdejších vědců a badatelů. Nyní je dokonce považován za zakladatele geometrie. (2)

Jmenováním těchto velevýznamných mužů nejsme ani zdaleka u konce. V následujících kapitolách postupně prozkoumáme různá odvětví, ve kterých se zlatý řez uplatňuje. Matematiků, umělců a vědců, kteří jej zkoumali a nechávali se jím inspirovat, je snad nespočetné množství. Budeme si postupně uvádět hlavně ty nejpodstatnější z nich.

2 Zlatý řez v matematice

Z matematického hlediska se zlatý řez vysvětluje jako poměr či úměra. Oba pojmy si nejprve objasníme, protože nemají doslova stejný význam, jak si na první pohled můžeme myslet. Poměrem nazveme vzájemný vztah dvou částí jednoho celku. Pokud se dva poměry rovnají, hovoříme o této rovnosti jako o úměře. Obvykle mívá čtyři různé členy a nazýváme ji čtyřčlennou nespojitou úměrou (např. 2/5 = 4/10). Existuje také trojčlenná úměra, pro kterou platí, že dva poměry mají jeden člen společný, tzv. „geometrický průměr“ (např. 5/8 = 8/13). Tato úměra je nazývána jako spojitá a je typická právě pro zlatý řez. (1)

Ten můžeme popsat mnoha způsoby. Asi úplně nejtypičtější je jeho vyjádření na úsečce, které stanovil již zmiňovaný Eukleides.



Obrázek 5: Úsečka rozdělená ve zlatém řezu

Úsečka je rozdělaná ve zlatém řezu právě tehdy, když její velikost je ve stejném poměru k její delší části jako její delší část ke kratší. Podle obrázku 5 tedy platí, že velikost úsečky AB je ve stejném poměru k AC, jako je velikost úsečky AC k CB. Matematicky tuto úměru zapisujeme takto: $AB/AC = AC/CB$. (2)

2.1 Matematické vyjádření

Na naší úsečce AB rozdělené zlatým řezem v bodě C si označíme úsečku AC jako x, úsečku CB jako 1 a úsečku AB jako $x + 1$. Dosazením těchto vzdáleností do stanovených poměrů sestavíme následující rovnici:

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}.$$

Zbavíme zlomky jmenovatelů a dostáváme jednoduchou kvadratickou rovnici.

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Po vypočtení získáváme dva kořeny: $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Druhý kořen nemůžeme použít, jelikož nemůže existovat záporná velikost úsečky. První kořen je tedy výsledkem, který jsme hledali. Označujeme jej symbolem φ:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2.2 Číslo φ

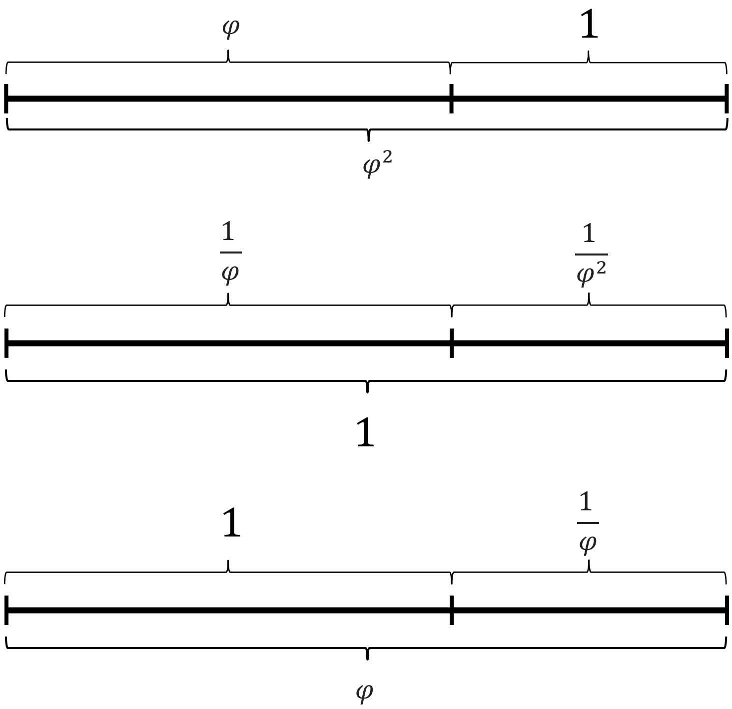
Jelikož tohle číslo je označováno řeckým písmenem, existuje velké „fí“ a malé „fí“. V matematice se pro zlatý řez používají obě jeho varianty. Je známo také jako zlaté číslo. Jeho hodnota je přibližně 1,6180339887 .... (2)

Φ φ

Obrázek 6: Velké a malé řecké písmeno „fí“

Takové číslo má kromě spojitosti se zlatým řezem spoustu dalších pozoruhodných matematických vlastností. Pokud bychom chtěli získat druhou mocninu čísla φ, lišilo by se pouze v jednom místě, a to před desetinnou čárkou by nebyla jednička, ale dvojka. Můžeme tedy říci, že jeho druhá mocnina se rovná $1 + \varphi$. Dalším zajímavým matematickým poznatkem je jeho převrácená hodnota. Vydělíme-li jedničku číslem φ, dostaneme výsledek $\varphi - 1$. Za desetinnou čárkou se opět žádné změny nedějí. Pouze před ní bude místo jedničky nula. (3)

Na úsečce rozdělené zlatým řezem můžeme pro označení její celkové délky či délek jejích částí použít číslo φ. (1)



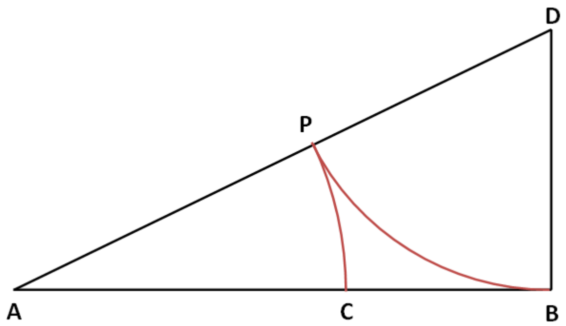
Obrázek 7: Použití φ pro označení délek v úsečce

Číslo φ je iracionálním číslem, a tedy má nekonečný neperiodický rozvoj. Je mnohem méně známé než Ludolfovo číslo π, „pí“, se kterým se děti setkávají již na základní škole. Číslo π je vyjádření poměru obvodu kruhu k jeho průměru. Jak ale bude zmíněno v dalších kapitolách, nachází číslo φ daleko větší uplatnění snad skoro ve všech oblastech, na které si jenom vzpomeneme. Dokonce jej lze čistě a jasně matematicky vyjádřit na rozdíl od čísla π. (3)

3 Geometrické útvary a jejich konstrukce

3.1 Rozdělení úsečky ve zlatém řezu

Máme-li k dispozici úsečku o libovolné velikosti, můžeme ji jednoduchým způsobem rozdělit na dvě nestejné části, které jsou ve zlatém poměru. K úsečce AB narýsujeme v bodě B kolmici a naneseme na ni poloviční velikost úsečky AB. Dorýsujeme pravoúhlý trojúhelník ABD. Narýsujeme kružnici se středem v bodě D a poloměrem BD. Průsečík této kružnice s úsečkou AD označíme jako bod P. Narýsujeme další kružnici se středem v bodě A a poloměrem AP. V místě protnutí této kružnice s úsečkou AB dostaneme bod C. Tento bod rozděluje úsečku AB přesně ve zlatém řezu. (3)



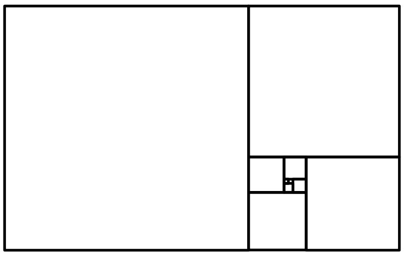
Obrázek 8: Rozdělení úsečky zlatým řezem

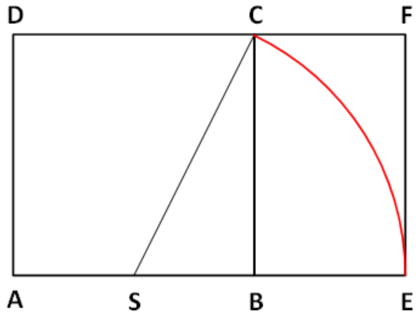
Představili jsme si zlatý řez na úsečce. Použili jsme tedy vyobrazení na přímce. Dále existuje několik geometrických objektů, které vyobrazují zlatý řez, a to buď v rovině, nebo v prostoru.

3.2 Zlatý obdélník

Pro konstrukci zlatého obdélníku si nejprve narýsujeme čtverec $ABCD$ o libovolné velikosti strany a. Protáhneme polopřímku AB a určíme střed úsečky AB jako S. Narýsujeme kružnici se středem v bodě S a poloměrem SC, která nám protne polopřímku AB. Vzniklý průsečík označíme bodem E, který nám už postačí k dorýsování zlatého obdélníku $AEFD$. Malý obdélník $BEFC$, který rozšířil čtverec do zlatého obdélníku, je taktéž zlatým obdélníkem. (2)

Pro každý zlatý obdélník platí, že jeho delší strana je ve zlatém poměru ke kratší. Pokud bychom k jeho delší straně přirýsovali čtverec, vznikl by další větší zlatý obdélník. Kdybychom naopak do nějakého zlatého obdélníku dorýsovali největší čtverec, vznikne vedle čtverce menší další zlatý obdélník. Takovéto přidávání čtverců, ať už do zlatého obdélníku nebo vedle něj, můžeme provádět do nekonečna. (3)



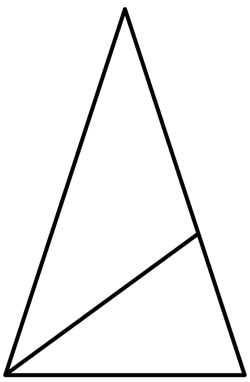


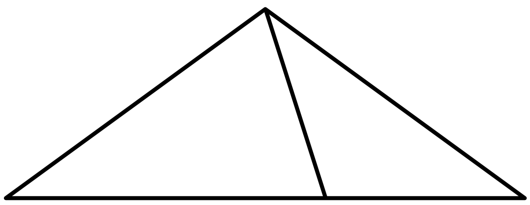
Obrázek 9: Rozdělení zlatého obdélníků na čtverce Obrázek 10: Konstrukce zlatého obdélníku

3.3 Zlatý trojúhelník a zlatý gnómon

Vedle zlatého obdélníku můžeme zlatý řez vyjádřit také pomocí zlatého trojúhelníku. Je to takový rovnoramenný trojúhelník, ve kterém jsou úhly při základně rovny 72 °. Třetí úhel, který svírají dvě ramena, pak má velikost poloviční, tedy 36 °. Jeho výjimečnost spočívá v tom, že délka jeho ramene je ve zlatém poměru k délce jeho základny. (5)

Další speciální trojúhelník, jehož vnitřní úhly mají velikost 36 °, 36 ° a 108 °, nazýváme zlatým gnómonem. Společnou vlastností těchto dvou zlatých útvarů je jejich rozdělování. Když je úsečkou rozdělíme správným způsobem, získáme jeden zlatý trojúhelník a jeden gnómon. Rozdělovat tak zlaté trojúhelníky a zlaté gnómony můžeme nekonečně krát. Tuto posloupnost trojúhelníků můžeme využit i naopak. Ke každému zlatému trojúhelníku můžeme přidat zlatý gnómon o správné velikosti k jeho ramenu tak, aby vznikl větší zlatý trojúhelník. (3)





Obrázek 11: Zlatý trojúhelník Obrázek 12: Zlatý gnómon

Konstruovat tyto trojúhelníky lze samozřejmě více způsoby. Zde si však vystačíme s úplně nejjednodušším způsobem konstrukce trojúhelníku. Zvolíme si libovolnou délku základny, která pak s každým ramenem svírá v případě zlatého trojúhelníku úhel 72 °. U gnómonu zvolíme velikost úhlu 36 °. Můžeme se k oběma těmto útvarům dostat také pomocí pentagramu, kterému je věnována samostatná podkapitola. (5)

Pokud bychom sestrojili pravidelný desetiúhelník, lze jej rozdělit na 10 zlatých trojúhelníků pěti úhlopříčkami procházejícími jeho středem. (3)

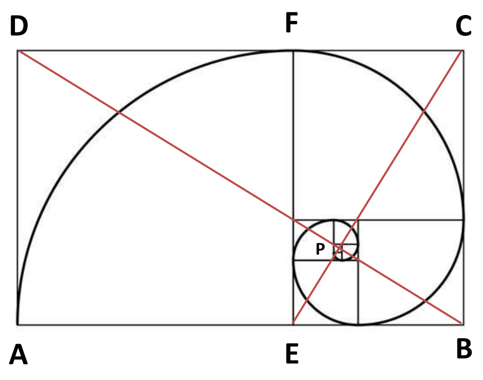
3.4 Zlatá logaritmická spirála

S vyobrazením zlatého trojúhelníku a zlatého obdélníku s rovnými stranami a ostrými úhly se například v přírodě setkáme jen těžko. Můžeme kolem nich však nakreslit útvar, zlatou spirálu, která se nám všude zobrazuje v celé své kráse. V následujících kapitolách si uvedeme několik jejích příkladů.

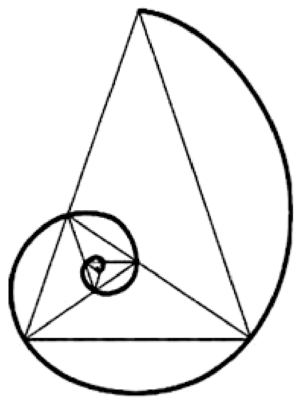
Pokud máme zakresleny zlaté trojúhelníky do sebe tak, že vždy osa úhlu, který svírá základna s jedním ramenem trojúhelníku, rozděluje původní zlatý trojúhelník na zlatý gnómon a nový menší zlatý trojúhelník, můžeme kolem nich nakreslit zlatou spirálu vždy obloukem nad každou základnou. (2)

Jednodušším způsobem se dá spirála nakreslit do zlatého obdélníku. Uspořádáme do něj posloupnost čtverců tak, jak jsme si již uváděli. V největším čtverci narýsujeme oblouk kružnice se středem v bodě, který je zároveň bodem menšího obdélníku, a poloměrem o velikosti strany tohoto čtverce. V dalším menším čtverečku budeme postupovat stejným způsobem tak, aby spirála pokračovala. Můžeme takto dokreslovat oblouky do nekonečna. Sestrojením úhlopříčky DB obdélníku $ABCD$ a úhlopříčky EC obdélníku $EFBC$ získáme střed spirály v místě jejich průsečíku. Tento bod se často nazývá pól a označujeme jej P. Dostal dokonce mystický název „boží oko“. (3)

Oko zlaté spirály bylo označeno také jako asymptota. V tomto případě je myšlena jako místo, ke kterému se spirála neustále přibližuje, ale nikdy tohoto svého středu nemůže dosáhnout. (2)



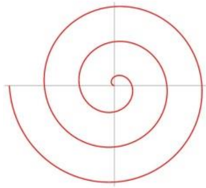
Obrázek 13: Zlatá spirála ve zlatém obdélníku



Obrázek 14: Zlatá spirála kolem zlatého trojúhelníku

Jestliže spojíme úsečkou pól a kterýkoliv bod logaritmické spirály, dostaneme rozdělení křivky touto úsečkou pokaždé ve stejném úhlu. Tuto vlastnost spirály označujeme jako „ekviangulární" čili rovnoúhlá. Jako první tento pojem začal používat francouzský matematik René Descartes v 17. století. (3)

Vedle zlaté spirály vídáme v přírodě často Archimédovu spirálu. Poloměr této rovinné křivky roste lineárně. Vedeme-li z jejího pólu polopřímku jakýmkoli směrem, pak místa, ve kterých postupně protíná spirálu, jsou vždy ve stejné vzájemné vzdálenosti. (2)

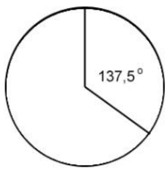


Obrázek 15: Archimédova spirála

3.5 Zlatý úhel

Nepříliš populární, ale plnohodnotně důležitý, je zlatý úhel. Jeho vnější úhel vzhledem k němu je právě ve zlatém poměru. Má velikost 137,5 ° a můžeme jej vypočítat jako

$$\frac{360}{\varphi^2} = 137{,}5.$$



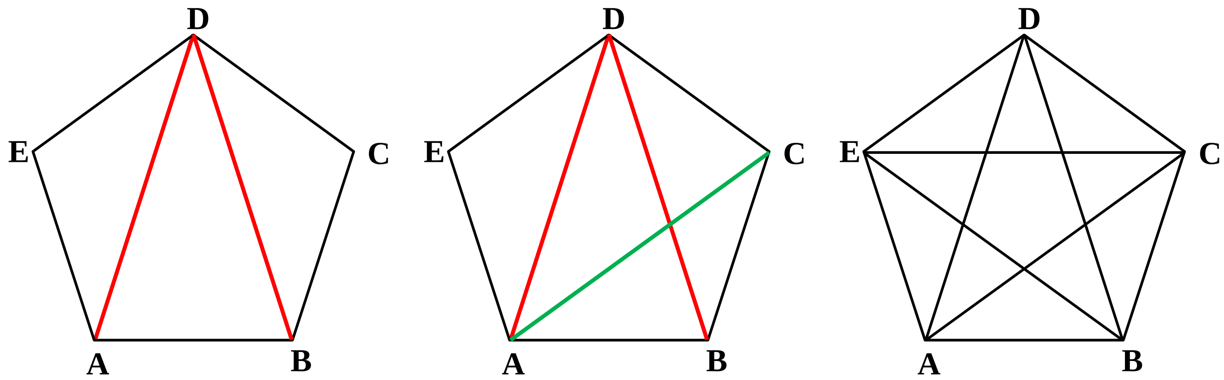
Obrázek 16: Zlatý úhel

V geometrických útvarech se nijak zvlášť neprojevuje, významnou roli ale hraje ve světě rostlin. (2)

3.6 Pentagram

Několik vyobrazení zlatého řezu nacházíme také v pentagramu. Je to geometrický útvar složen z pěti úseček, který připomíná hvězdu. Pro jeho konstrukci použijeme pravidelný pětiúhelník. O něm víme, že je to rovinný útvar, který má všechny strany stejné dlouhé a všechny úhly rovny 108 °.

Nejprve do takového pětiúhelníku $ABCDE$ vkreslíme u vrcholu D dvě úhlopříčky. Tím jsme jej rozdělili na tři rovnoramenné trojúhelníky, přitom prostředním je zlatý trojúhelník. Dva postranní jsou zlaté gnómony. Nyní nakreslíme další úhlopříčku z bodu A do protějšího vrcholu C tak, že protne úsečku BD. Rozdělili jsme zlatý trojúhelník a pravý zlatý gnómon na další zlaté trojúhelníky a gnómony. (3)



Obrázek 17: Zlatý řez v pentagramu

Dokreslíme tedy zbylé dvě úsečky. Všech pět úseček dohromady tvoří pentagram. Tento objekt nazýváme také jako pěticípá hvězda. Každý její cíp je zlatým trojúhelníkem a v jejím středu vzniká menší pětiúhelník. Do něj můžeme opakovaně přidávat úhlopříčky stejným způsobem do nekonečna a získávat tak další pentagramy a pětiúhelníky. Při pohledu na celý útvar můžeme vidět několik zlatých trojúhelníků a gnómonů. Délky mnoha úseček jsou zde vzájemně ve zlatém poměru. (3)

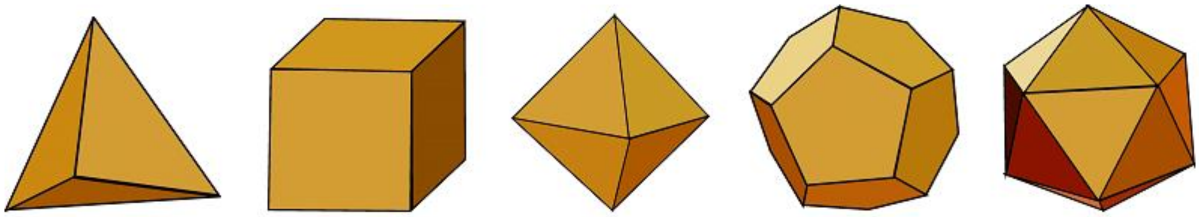
Nejstarší pentagramy, které byly dosud nalezeny v oblasti tehdejší Mezopotámie, pocházejí již ze 4. tisíciletí př. n. l. Byly objeveny spolu s nejstaršími známými nápisy našeho světa. Pokud by byla tato hvězda vkreslena do kruhu, nesla by význam podsvětí. (3)

Vyobrazení pentagramu bylo tedy v jisté době považováno za symbol ďábla. Křesťané si jej spojovali s nevěřícími, kteří podle nich místo boha uctívali Satana. Pokud jeden cíp hvězdy směřoval směrem dolů, lidé na pentagram pohlíželi jako na hlavu kozla, symbolizující pána zla, Lucifera. (2)

3.7 Platónská tělesa

Dosud byly představeny geometrické útvary zobrazující jakékoli vlastnosti zlatého řezu v rovině. Nyní si ale ukážeme, že se jeho originalita promítá v tělesech v trojrozměrném prostoru. Díky Platónovi známe právě pět geniálních těles, která jsou svými vlastnostmi jedinečná. Jsou to pravidelné konvexní mnohostěny a v každém z nich platí tyto tři zákonitosti: každá hrana je stejně dlouhá, každá plocha má stejný tvar, a pokud bychom kolem celého tělesa opsali kouli, dotýkaly by se jí všechny jeho vrcholy. Platónská tělesa se nazývají podle počtu jejich stěn (ploch). Často pozorujeme jejich vzájemné zapadání do sebe.

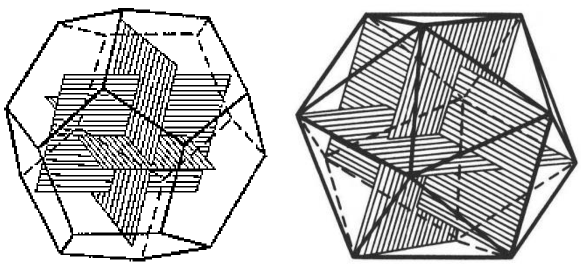
Nejjednodušším z nich je čtyřstěn, jehož strany mají tvar rovnostranného trojúhelníku. Spojíme-li středy těchto trojúhelníků, objeví se v něm nový menší čtyřstěn. (2)



Obrázek 18: Přehled platónských těles: čtyřstěn, šestistěn, osmistěn, dvanáctistěn, dvacetistěn

Šestistěn známe jako obyčejnou krychli. Všechny sousední stěny jsou vzájemně kolmé a mají tvar čtverce. Když spojíme všechny středy těchto čtverců, získáme osmistěn, jehož stěny mají tvar trojúhelníku. Podobně bychom mohli spojením středů jeho stěn získat v něm umístěnou další malou krychličku. Někdy je označován jako dvoustranná pyramida. Z trojúhelníků je poskládán taky dvacetistěn. Při pohledu na některý vrchol shora představují jeho sousední vrcholy body, při jejichž spojení vzniká pětiúhelník. Zbývá nám jmenovat poslední platónské těleso, a to dvanáctistěn. Je tvořen pravidelnými pětiúhelníky. (3)

Dvacetistěn a dvanáctistěn mají jednu společnou vlastnost. Můžeme je totiž zkonstruovat okolo tří zlatých obdélníků, které jsou postaveny kolmo do sebe. Jejich středy se vzájemně protínají v jediném průsečíku, který pak představuje střed celého tělesa. Pro dvanáctistěn platí, že vrcholy obdélníků určují středy jeho stěn, tedy středy pětiúhelníků. U dvacetistěnu je každý vrchol obdélníku také vrcholem celého tělesa, což si dokážeme lépe představit. (3)



Obrázek 19: Porovnání umístění kolmých obdélníků v dvanáctistěnu a dvacetistěnu

Platón se držel myšlenky, že každý ze čtyř základních živlů je představován jedním z těchto těles. Čtyřstěnu přiřadil oheň, který mu připomínala jeho vzpřímená špička. Pro Zemi zvolil krychli symbolizující stabilitu. Osmistěn zastupuje vzduch a dvacetistěn vodu. Dvanáctistěnu připisuje Platón prostor vesmíru a podstatu jeho existence. (6)

4 Fibonacciho posloupnost

Velmi úzce spjata se zlatým řezem je Fibonacciho posloupnost. Jedná se o řadu přirozených čísel, pro kterou platí přesně stanovená jednoduchá pravidla. Ve Fibonacciho posloupnosti každé nové číslo vznikne součtem dvou předchozích čísel. Říkáme, že posloupnost má tedy aditivní charakter. (1)

Matematickým vzorcem můžeme tuto vlastnost znázornit takto:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

kde F_n je n-tým členem posloupnosti.

Dále platí, že podíl dvou vedle sebe stojících čísel konverguje k číslu φ. Pokud bychom naopak některé číslo vynásobili číslem φ, získáme přibližnou hodnotu následujícího čísla posloupnosti. (1)

Matematicky vyjádříme poměr dvou vedle sebe stojících čísel takto:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \approx \varphi.$$

Postupujeme-li k větším a větším číslům, hodnoty střídavě kolísají pod a nad číslo φ. Podíl dvou největších čísel Fibonacciho posloupnosti by vyjadřoval přesnou hodnotu zlatého řezu. (9)

Fibonacciho řada čísel začíná: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377$ .... Platí, že každé třetí číslo je sudé a každé čtvrté číslo je násobkem tří. (2)

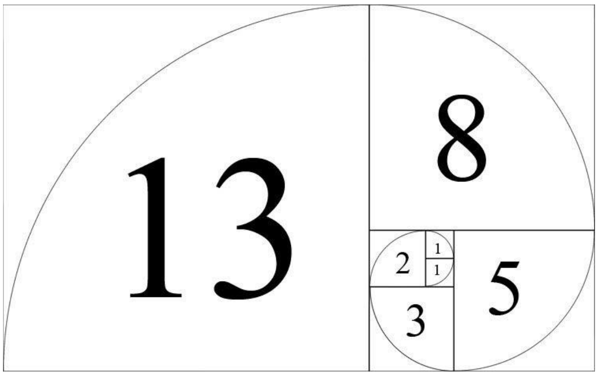
Existuje ale nějaký vzorec, který by sloužil k získání n-tého členu této posloupnosti? Touto problematikou se zabývali matematici Leonard Euler a Abraham de Moivre již v 18. století. Pravděpodobně způsob nalezení každého členu posloupnosti objevili. Přesné matematické vyjádření uvedl francouzský matematik Jacques Philippe Marie Binet v 19. století, podle něhož bylo pak pojmenováno jako Binetův vzorec:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

kde n je pořadí čísla F_n. Chceme-li zjistit, jaké číslo se nachází ve Fibonacciho posloupnosti na konkrétním místě v řadě, dosadíme číslo požadovaného pořadí za n a dopočítáme F_n. Celou Fibonacciho posloupnost bychom mohli získat taktéž postupným dosazováním přirozených čísel od 1 do nekonečna. (3)

Už na první pohled tento vzorec vypadá celkem nepřehledně a složitě. Podíváme-li se na něj podrobněji, vyjasní se zde opět zlatý řez. V prvním členu hranaté závorky stojí n-tá mocnina zlatého čísla: φ^n. Druhým členem této závorky je n-tá mocnina záporného převráceného čísla φ, tedy $\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n$. (3)

Graficky můžeme spojit Fibonacciho posloupnost a zlatý řez postupným spojováním čtverců. Nejprve budeme mít jeden čtverec o délce strany 1. Vedle něj připojíme stejný takový čtverec a vznikne tak obdélník 1×2. K jeho delší straně připojíme čtverec o délce strany 2 a pokračujeme tak dále stejným způsobem. Všechny délky stran čtverců, které připojujeme, se rovnají číslům Fibonacciho posloupnosti a zároveň nám postupně vznikají přibližně zlaté obdélníky. (9)



Obrázek 20: Čtverce, jejichž délky stran jsou vyjádřeny čísly Fibonacciho posloupnosti

Sčítáme-li postupně obsahy čtverců, vždy nám vyjdou součiny Fibonacciho čísel:

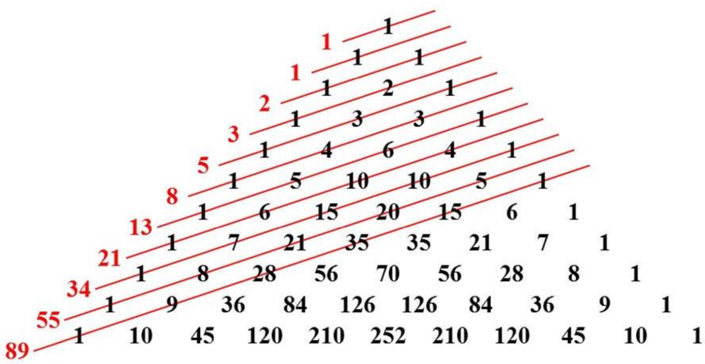
$$1^2 + 1^2 = 1 \cdot 2$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \cdot 3$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \cdot 5$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5 \cdot 8$$

Zajímavě ukryta je tato posloupnost také v Pascalově trojúhelníku. Je to trojúhelník, ve kterém je každé číslo součtem dvou čísel nacházejících se v řádku pod ním. Při pohledu z určitého úhlu můžeme pozorovat právě Fibonacciho čísla. Sčítáme čísla v určitém směru tak, jak vidíme na obrázku 21.



Obrázek 21: Pascalův trojúhelník

4.1 Leonardo Fibonacci

Za tuto řadu vděčíme italskému matematikovi Leonardovi Pisánskému. V některých dokumentech se dokonce představoval jako Leonardo Bigollo. Jméno Bigollo má význam v češtině buď „budižkničemu“ nebo „cestovatel“. Začalo se mu však přezdívat Fibonacci, z latinského filius Bonacci, což znamená syn Bonacciho. Doslovný překlad do češtiny zní „syn dobrosrdečné povahy“. (3)

Obrázek 22: Leonardo Pisánský

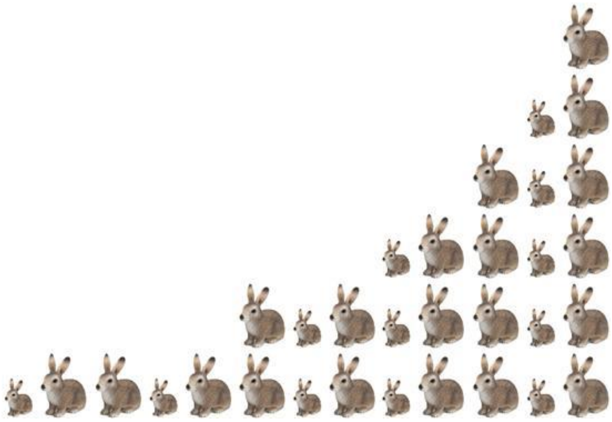
Narodil se v 70. letech 12. století. Studoval matematiku v islámském městě Bugia. Díky jeho cestování se seznámil s využíváním indického počítání, které mělo devět číslic. Za jeho dob se také užívala římská numerace. Tehdejší lidé používali tyto číslovky, ale nikdo, kromě Fibonacciho si neuvědomoval, jaký mají přesný význam. (9)

Napsal spoustu knih, ale bohužel se dochovaly pouze kopie těchto čtyř: *Flos, Practica geometriae, Liber abaci* a *Liber quaratorum.* Zejména těmito díly Fibonacci předběhl svou dobu. Velký rozmach v matematice, který znamenal převrat ve vědě, nastal až přibližně tři sta let po jeho smrti. (3)

4.2 Úloha o množení králíků

Fibonacci celou posloupnost proslavil úlohou o množení králíků, kterou uvádí ve svém díle *Liber abaci.* Úloha spočívá v tom, že muž umístil do prostoru obklopeného zdmi jeden pár králíků. Předpokládá, že každý pár zplodí každý měsíc nový pár, který začne být produktivní od druhého měsíce svého narození. Otázkou je, kolik párů králíků vznikne z prvního páru za určitý počet měsíců? Úloha je velmi teoretická a počítá pouze s ideálními králíky. (9)

Rozebereme si situaci postupně. V prvním měsíci první pár nebude produkovat žádné potomstvo. V druhém měsíci první pár produkuje druhý pár a máme tedy dva páry. V dalším měsíci první pár opět porodí jeden pár a druhý pár mezitím vyroste. Máme tři páry. Následující měsíc první pár porodí jeden pár, druhý pár porodí jeden pár a třetí pár mezitím vyroste. V současné době máme pět párů králíků. Dále bychom pokračovali stejným způsobem, že každý dospělý pár za měsíc porodí nový pár a každý mladý pár vyroste. Konečný počet králíků za každý měsíc tvoří postupně čísla Fibonacciho posloupnosti, z čehož vyplývá, že počet párů králíků v kterémkoli měsíci je vždy součet počtů párů dvou předchozích měsíců. (9)



Obrázek 23: Množení králíků dle Fibonacciho

Na obrázku 23 znázorňuje každý velký králík dospělý pár a každý malý králík mladý pár. Vidíme, že posloupnost dospělých párů králíků je $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ a posloupnost mladých párů králíků je posunuta o jeden měsíc. Proto na začátku přibyde k této posloupnosti ještě nula: $0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$. Když obě posloupnosti sečteme, získáme celkovou posloupnost králičích párů: $1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$. (3)

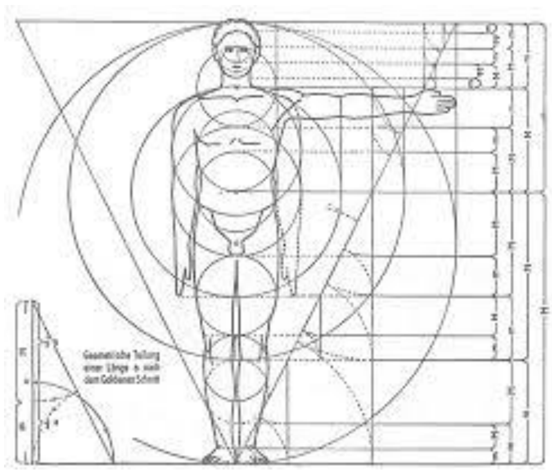
5 Přírodní úkazy zlatého řezu

Vedle matematiky se zlatý poměr vyskytuje v nejrůznějších koutech přírody, aniž bychom si to na první pohled uvědomovali. Nacházení a zkoumání těchto přírodních jevů nám dokazuje, že zlatý řez není pouhým výmyslem lidských bytostí, ale už dávno před nimi se o něj zasloužila samotná matka příroda. Objevování těchto zvláštností může okouzlit i ty, kteří si doposud matematiku nijak zvlášť neoblíbili.

5.1 Člověk

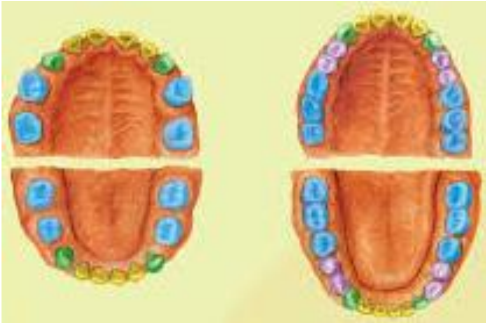
V lidském těle se projevuje spousta poměrů a úměr, které se blíží zlatému řezu. Například bylo zkoumáno, jestli postava člověka je rozdělena pupkem ve zlatém poměru. Velké množství měření dokazovalo spíše rozdělení v poměru Fibonacciho čísel, a to nejčastěji 5/3 nebo 8/5. U malého dítěte najdeme pupek přibližně uprostřed těla a oblasti genitálií dělí celou délku postavy ve zlatém řezu. Teprve, až dítě úplně vyroste, se tyto vlastnosti navzájem prohodí. (1)

Délka horní končetiny je rozdělena ve zlatém poměru loktem. Distální část je pak rozdělena zápěstím. Dokonce články prstů jsou navzájem ve zlatém poměru. (8)



Obrázek 24: Rozdělení lidského těla zlatými řezy

Mléčný chrup má dohromady dvacet zubů. Vezmeme-li ale v úvahu pouze jednu jeho čtvrtinu, najdeme zde dva řezáky, jeden špičák a dvě stoličky. Dohromady tedy pět zubů. Každá čtvrtina úplného chrupu dospělého člověka je obohacena o dva třenové zuby a jednu stoličku, které jsou zde celkem tři. Dohromady tedy osm zubů. Kdybychom ještě sečetli počet zubů jedné čtvrtiny mléčného chrupu s počtem zubů čtvrtiny trvalého chrupu, získáme třináct zubů. Postupně jsme tedy nacházeli čísla Fibonacciho posloupnosti: $1, 2, 3, 5, 8, 13$. (1)



Obrázek 25: Mléčný a trvalý chrup člověka

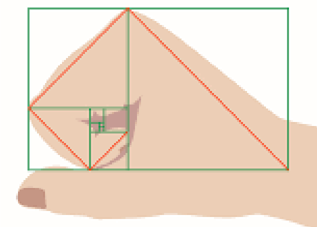
Na obrázku 25 vidíme vlevo mléčný chrup a vpravo trvalý chrup. Jednotlivé typy zubů jsou vyznačeny stejnou barvou: žlutě – řezáky, zeleně – špičáky, fialově – třenové zuby, modře – stoličky. (4)

Základní struktura našeho života je molekula DNA (deoxyribonukleová kyselina). Pouhým okem ji samozřejmě nevidíme, ale v dnešní době máme vyspělé technologie, které nám ji umožňují pozorovat. Z chemického hlediska se jedná o řetězec nukleotidů, kde každý z nich je složen z cukru (pentóza), fosfátu (zbytek kyseliny fosforečné) a dusíkaté báze (adenin, guanin, cytosin nebo thymin). (4)

DNA je dlouhá 34 angströmů a široká 21 angströmů. Na této molekule, vyskytující se ve formě dvoušroubovice, pozorujeme dvě rýhy, jejichž délky jsou 21 a 13 angströmů. Nacházíme zde tedy Fibonacciho čísla. Když provedeme příčný řez molekulou DNA, získáme při pohledu na něj desetiúhelník, ve kterém každé vlákno dvoušroubovice opisuje pětiúhelník. (2)

Lidské tělo vykazuje spoustu zlatých spirál. Můžeme jmenovat pohyb embrya či prázdný vlasový folikul. Ta nejvýraznější spirála, orgán kochlea, se nachází ve vnitřním uchu. Díky níž je zajišťován sluch. Je vyplněna tekutinou a obalena tvrdou skořápkou. Dovoluje nám slyšet přibližně deset oktáv. Někteří savci mohou díky odlišnému počtu otáček kochley vnímat i jiné frekvence zvuku než člověk. (2)

Zatneme-li ruku v pěst, pak při pohledu z boku se nám jeví články prstů jako úhlopříčky čtverců, které jsou poskládány do zlatého obdélníku. Můžeme si k nim jednoduše domyslet zlatou spirálu. (2)



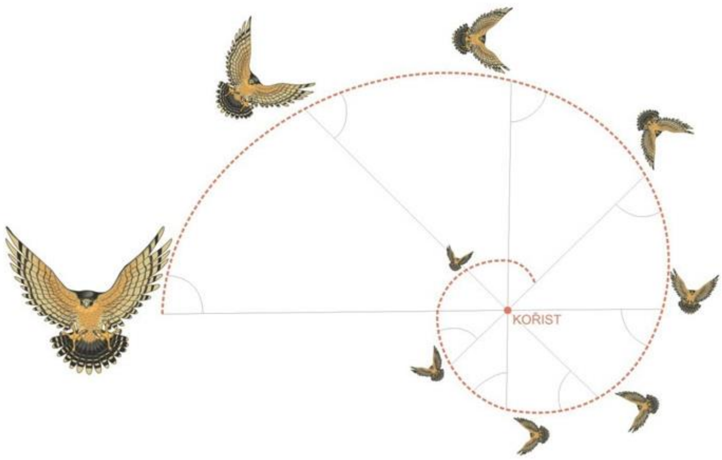
Obrázek 26: Zlatý řez v zatnuté pěsti

5.2 Živočichové

Ve světě živočichů nejprve uvedeme příklady zlaté spirály. Asi nejkonkrétnější znázornění dokazují schránky těl některých měkkýšů. Ulita loděnky se zasloužila o jedno z nejčastějších vyobrazení zlatého řezu v přírodě v podobě zlaté spirály v několika knihách a učebnicích. Krásným hlemýžděm se zlatě spirálovitou ulitou je také oceánský oxygyrus. (2)

Obrázek 27: Ulita loděnky

Trajektorie letu sokola stěhovavého při lovu své kořisti kopíruje logaritmickou spirálu. Jeden z nejrychlejších ptáků světa používá místo letu střemhlav právě spirálovitý pohyb. Sokol však není jediným ptákem, kterému se vyplatí praktikovat tento způsob letu při lovu. Důvodem kroužení a postupného přibližování se ke kořisti je postavení jeho očí po stranách hlavy. Nedívá se tedy rovnou před sebe, ale jeho oko dokonale zaostřuje předměty nacházející se asi o 40 ° směrem do strany. Díky spirálovitému otáčení tak nespouští zrak z kořisti, což značně zvyšuje úspěšnost jeho lovu. Touto problematikou se zabýval biolog Vance A. Tucker. Pomocí několika experimentů zjistil, že kdyby sokol musel otáčet hlavu při střemhlavém letu, ve výsledku by byl zpomalován daleko více, než při kroužení po spirále. (3)

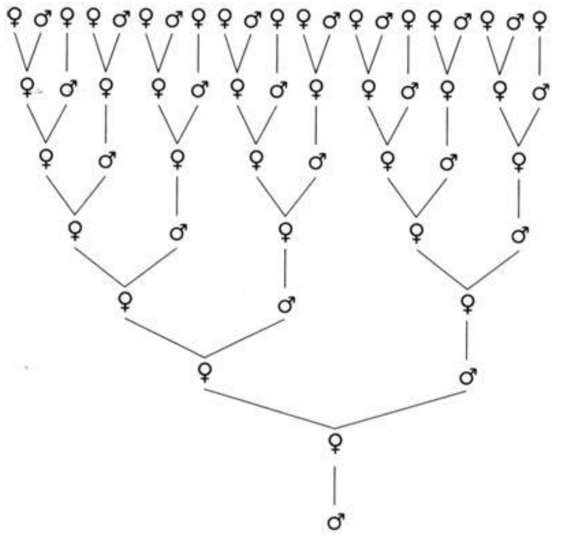


Obrázek 28: Let sokola

Další spirály můžeme najít v různých částech zvířecích těl. Mohou ji ztvárňovat třeba zobáky, ocasy, zuby či parohy.

Pětičetné útvary v přírodě pozorujeme hlavně u některých mořských živočichů. Tělo hvězdice při pohledu shora už podle jejího názvu má tvar hvězdy pentagramu. Mučenka má tvar pravidelného desetiúhelníku, jenž je utvořen ze dvou pětiúhelníků umístěných nad sebou. Zlaté obdélníky nakreslíme kolem těl některých ryb i spousty zástupců ze skupiny hmyzu. (1)

Každé společenstvo včel má jednu hlavní včelu, které říkáme královna. Další samičky jsou dělnice. Líhnou se z oplozených vajíček a mají tedy dva rodiče. Samečkům, kteří se líhnou z neoplozených haploidních vajíček, říkáme trubci. Mají pouze jednoho rodiče, a to matku. V rodokmenu každého trubce můžeme pozorovat určitou specifičnost. Jeho matka má dva rodiče, protože je to samička. Trubec má tedy 2 prarodiče – jednoho samce a jednu samičku, ti mají dohromady 3 rodiče. Náš pozorovaný trubec má 3 praprarodiče – 1 samec a 2 samičky. Další generaci tvoří 2 samci a 3 samičky, dohromady tedy 5 prapraprarodičů prvního trubce. Pokud bychom pozorovali rodokmen dále, získávali bychom pouze další čísla Fibonacciho posloupnosti. (3)



Obrázek 29: Rodokmen trubce

Těla živočichů mohou nést čísla této posloupnosti na několika místech současně. Na krunýři želvy vidíme 13 rohovitých plátů, které jsou uspořádány do 3 řad: krajní mají dohromady 8 platů a prostřední 5. Želva má na každé končetině 5 drápků a páteř složenou ze 34 obratlů. Pavoučí tělo je rozděleno na 8 částí, kde z každé vychází 1 kráčivá končetina. Mají ale dohromady 5 párů končetin, přičemž každá z nich je rozdělena na 5 článků. (1)

5.3 Rostliny

V botanice sledujeme vyobrazení zlatého řezu a výskyt Fibonacciho čísel v nejrůznějších souvislostech. Uvedeme si alespoň ty nejproslulejší z nich.

5.3.1 Fylotaxe

Pro rostliny je důležité, aby co nejvýhodněji využívaly prostoru a podmínek prostředí, ve kterém se vyskytují. Listy nemohou růst na stonku přesně jeden za druhým, protože by se vzájemně zastiňovaly a nedostávalo by se jim dostatečného slunečního záření. Kvůli těsné blízkosti by špatně čerpaly vzdušnou vlhkost a kyslík. (3)

Pozorováním postavení jednotlivých listů se zabýval už ve 3. st. př. n. l. Theofrastos. Ve svém díle *De causis plantarum* uvedl, že ploché listy na rostlinách rostou uspořádány v řadách. Podobnou záležitost zkoumal také Plinius starší v 1. st. n. l., který vydal o rostlinách dílo *Naturalis historia*. Rozmístění listů na stonku (lodyze) nazýváme fylotaxe. Tento termín stanovil švýcarský biolog Charles Bonnet. (3)

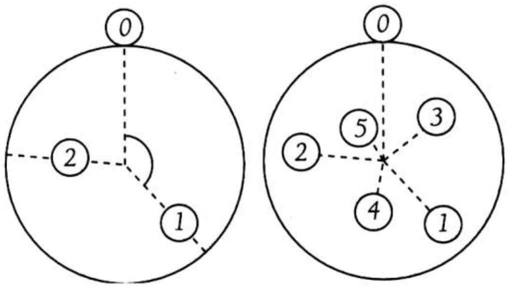
Listy rostou na stonku nejčastěji střídavě, spirálovitě nebo křižmostojně. Některé rostliny se spirálovitou fylotaxí jsou doprovázeny čísly Fibonacciho posloupnosti. Tuto souvislost objevil Johannes Kepler. U stejného druhu se vyskytuje vždy stejný počet otáček ve spirále a listy narůstají v pravidelných vzdálenostech od sebe. Při pohledu shora určujeme úhel, který svírají spojnice středu se dvěma po sobě jdoucími listy. Můžeme pozorovat různý úhel u různých druhů rostlin. Označíme-li počet otoček číslem a, počet listů za jednu otočku číslem b, pak poměr těchto dvou čísel (a/b) nazýváme fylotaktický poměr**.** Výsledný úhel mezi každými dvěma listy získáme vynásobením toho poměru 360 °. (3)

Obrázek 30: Fylotaxe – střídavá, vstřícná, křižmostojná, přeslenitá a spirálovitá

Vzájemný úhel mezi dvěma za sebou rostoucími listy lípy bude mít velikost 180 °. Za každou otáčku vzniknou dva listy čili fylotaktický poměr je zde 1/2. U buku se jeví fylotaktický poměr 1/3. Dubům a jabloním roste na větvičce 5 listů za 2 otočky (2/5) a třeba smuteční vrbě 8 listů během 3 otoček (3/8). Můžeme si povšimnout jisté zákonitosti, která se ve spirálovité fylotaxi vyskytuje. Obě čísla fylotaktického poměru představují čísla Fibonacciho posloupnosti. (3)

Nejčastější úhel, jevící se u fylotaxe, se rovná velikosti zlatého úhlu, tedy 137,5 °. Tuto skutečnost dokázali bratři Bravaisové v roce 1837 a nazvali jej také divergenčním úhlem. Dále se jím zabýval i Němec G. van Iterson. Přišel na to, že když seskupíme jednotlivé body znázorňující místo růstu listů ve spirále, dostaneme dvě různé skupiny spirál, z nichž se každá skupina točí opačným směrem. (3)

Záhadu spirálovitého růstu rozluštíme pohledem na vrchol rostliny shora. Na konci stonku se nachází meristematické pletivo, které umožňuje jeho růst. Samotná špička připomíná tvar kužele. Růst jednotlivých listů popisuje obrázek 31. Čísla určují jejich pořadí, ve kterém vznikly. Starší listy jsou daleko od vrcholu (list č. 0 je nejstarší) a blízko u něj jsou listy nové (list č. 5 je nejmladší). Kdybychom nakreslili křivku, která by spojovala listy podle čísel vzestupně, objevila by se zde spirála, která dokazuje pravidelné otáčení listů kolem stonku. Někdy se označuje jako tzv. „genetická spirála“. (3)



Obrázek 31: Schéma růstu listů na stonku při pohledu na vzrostný vrchol shora

Takovéto schéma bylo publikováno v díle *O vztahu fylotaxe k zákonům mechaniky,* jehož autorem je Arthur H. Church. (3)

5.3.2 Květy

Pozorujeme-li úbor slunečnice, vidíme uprostřed květy uloženy v kruhu. Pokud ale sledujeme jejich rozložení podrobněji, vidíme, že jsou upořádány do levotočivých a současně pravotočivých spirál. Poměr počtu spirál těchto dvou skupin je vždy poměr dvou vedle sebe stojících čísel Fibonacciho posloupnosti, např. 55/34, 89/55 nebo 144/89. Zpravidla platí, že větší slunečnice mívají větší počet spirál než ty menší. (3)

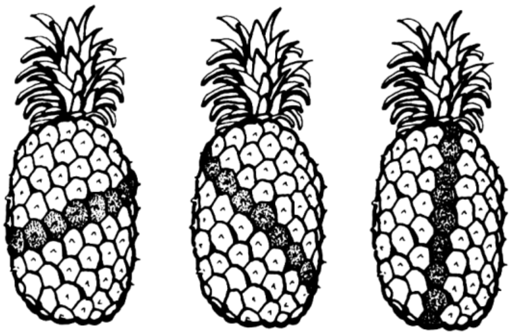
Korunní plátky různých druhů rostlin mohou vykazovat i několik vyjádření zlatého řezu. Například plátky květu růže jsou uspořádány do spirál. Dokonce mezi každými dvěma po sobě rostoucími plátky nacházíme zlatý úhel. Ani projevování Fibonacciho posloupnosti v této oblasti nezůstává pozadu. Uplatňuje se zde zejména v počtu korunních plátků velkého množství rostlinných druhů. Jeden nebo dva květní plátky se vyskytují jen zřídka, zato tři najdeme u kosatců či lilií. Pět plátků mají pryskyřníky, stračky nebo orlíčky. Krevnice a krásenka jich mají 8, kopretiny 13 a astry 21. Velmi rozmanité počty najdeme třeba u sedmikrásek. Mohou mít korunních plátků 13, 21, ale také 55 nebo dokonce 89.

Samozřejmě, že v přírodě existují i jiné počty květních plátků než jsou tato čísla. Přesto však tuto velmi častou shodu s Fibonacciho posloupností považujeme za zvláštnost přírody. (2)

Obrázek 32: Uspořádání poupat v úboru slunečnice

5.3.3 Plody

Ani při utváření některých plodů příroda zlatý řez nevynechala. Zajímavě se jeví rozmístění šupin na ananasu. Každá z nich patří do tří řad, které vedou různým směrem a otáčejí se spirálovitě vzhledem k jeho svislé ose.



Obrázek 33: Spirálovité řady šupin na ananasu

Když pohlédneme z boku na většinu druhů ananasu, vidíme téměř svislé řady, které se mírně točí zleva doprava směrem nahoru. Takovýchto řad je celkem 8 a jsou vzájemně rovnoběžné. Šikměji směřujících řad, které míří zleva doprava směrem dolů, je 13. Poslední nejméně strmé řady směřují zleva doprava směrem vzhůru a je jich 21. Počty vzájemně rovnoběžných řad odpovídají číslům Fibonacciho posloupnosti. Některé druhy však mohou vykazovat ještě jiný počet spirál, avšak stále je vždy Fibonnacciho číslem. (3)

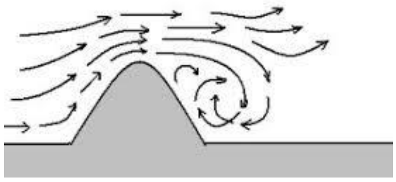
Podobným způsobem se točí šupiny borových šišek či pupeny vrby jívy. (1)

Překrojením jablka na dvě poloviny uvidíme na každé z nich hvězdičku připomínající tvar pentagramu. Semena granátového jablka se zprvu nacházejí v červených rosolovitých kuličkách. V důsledku jejich těsného uspořádání se při dozrávání tvarují do dvanáctistěnu. Vyplní tak rovnoměrně vnitřní prostor ohraničený slupkou. (2)

5.4 Neživá příroda

Vzduch a voda jsou dva ze čtyř základních živlů naší planety. Pokud se vzduch pohybuje, nazveme ho větrem. Vznik větrných spirál je důsledkem působení větru na překážku. Tento proud vzduchu sklouzne po překážce a za ní se začne točit do spirálovitých útvarů.

Takovýto jev nastává i v okamžiku, pokud se předmět v bezvětrném prostředí pohybuje nějakým směrem, např. když jede jakýkoli dopravní prostředek po silnici. Podobně dochází k obtékání překážky ve vodním prostředí. Buďto působíme na stabilní překážku proudem vody, anebo se předmět ve vodě sám pohybuje. (2)



Obrázek 34: Schéma proudění

Kdybychom se podívali na zeměkouli z vesmírného prostoru, uviděli bychom na ní bílé spirálovitě se točící skvrny mraků, což způsobuje právě proudění vzduchu v atmosféře. Značně ovlivňuje aktuální počasí v každém místě na světě. Spirálovité působení větru i proudů v oceánu dokonce ovlivňuje rotaci Země. V 80. letech 20. století se její otáčení kolem vlastní osy zpomalilo o 0,0002 sekundy důsledkem jevu El Niño. Byl zpozorován v Tichém oceánu a došlo při něm k oslabení Peruánského studeného proudu. Zároveň se změnilo proudění vzduchu po celém světě. Den na Zemi se tak prodloužil o 0,0005 sekundy. (2)

Ani na vyobrazování platónských těles příroda nezapomněla. Vyskytují se třeba v krystalografických strukturách nerostů. Například kubická soustava je poskládána z krychliček a objevuje se např. u diamantu, fluoritu, halitu, galenitu, zlata, stříbra, pyritu či mědi. (3)

5.5 Vesmír

Naše planeta Země, jedna z planet sluneční soustavy, obíhá kolem své nejbližší hvězdy, a to Slunce. Spolu s dalšími stovkami miliard hvězd patří do jedné obrovské galaxie, kterou nazýváme Mléčná dráha. V dnešní době prostřednictvím dokonalých technologií můžeme pozorovat spoustu dalších okolních galaxií. Většina z nich má tvar disku, v němž jsou jednotlivá vesmírná tělesa uspořádána do několika spirál. Každé z nich říkáme spirální rameno. (3)

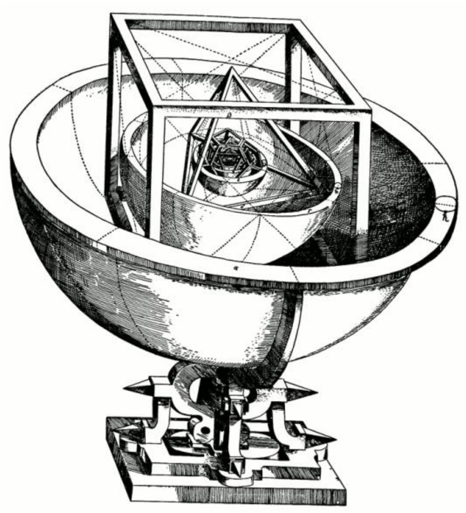
Obrázek 35: Galaxie

Tedy ani ve vědeckých výzkumech, týkajících se vesmíru, zlatý řez nezklamal svou přítomností. Někteří astronomové využívali při své práci jejich matematické nadání. Asi nejvýznamnějším z nich se stal Němec Johannes Kepler. Jakožto hluboce věřící člověk studoval teologii. Považoval za své poslání rozluštění vzniku vesmíru tak, jak jej stvořil sám Bůh. Po úspěšném absolvování nezastával funkci pastora, ale nastoupil do školy jako učitel matematiky. Mimo to byl vynikající metafyzik a spisovatel. Je autorem několika děl, např. *Astronomia Nova* nebo *Harmonie světa*. V nich dokazoval světově proslulé 3 zákony o pohybu planet sluneční soustavy: planety se nepohybují po kružnicích, ale po elipsách; průvodič planety (neboli spojnice planety se Sluncem) opíše za stejnou dobu stejnou plochu; poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je stejný jako poměr třetích mocnin jejich velkých poloos. Později byly podle něj pojmenovány jako Keplerovy zákony. (2)

Žil na přelomu 16. a 17. století, kdy bylo známo teprve šest planet sluneční soustavy. Na začátku svého výzkumu vycházel z Koperníkovy teorie, která uvádí, že se planety otáčejí kolem Slunce, a to po kružnicových trajektoriích. Snažil se najít matematické vyjádření tohoto jevu pomocí čísel. Rovněž hledal důvod, proč Bůh stvořil zrovna šest planet. Zpracoval několik vztahů vyjadřující poměry průměrů kružnicových trajektorií sousedních planet a začal prosazovat teorii tzv. „hudby sfér“. (2)

Nakonec dospěl k vyjádření geometrickému pomocí pěti platónských těles. Začal od tehdejší nejvzdálenější známé planety. Sféru Saturnu znázornil jako kouli. Do ní umístil krychli tak, aby se všemi rohy dotýkala vnitřní strany koule. Do krychle pak přikreslil další kouli, představující sféru Jupiteru. Postupně přikresloval sféry dalších planet pomocí střídání platónského tělesa a koule. Do sféry Jupiteru vložil čtyřstěn, v němž umístěná koule znázorňuje sféru Marsu. Vložil dvanáctistěn, kulatou sféru Země, dvacetistěn, kulatou sféru Venuše, osmistěn a do něj poslední sféru planety Merkuru. (6)

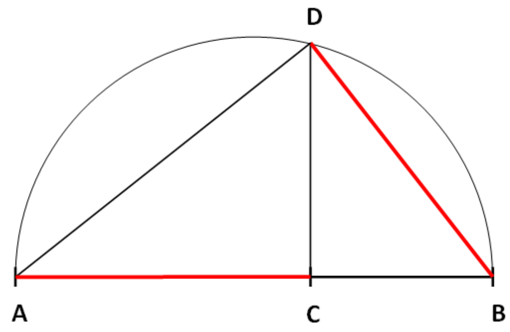
Ze svého modelu byl neskutečně nadšený. Vytvořil tak jednotný celek, kterým vyjadřoval postavení planet sluneční soustavy za užití všech platónských těles uspořádaných do sebe zahrnující velikost jejich oběžných drah, také zlatý řez a pravoúhlé trojúhelníky. Dokazoval i existenci šesti planet, mezi jejichž sféry lze uspořádat právě pět platónských těles. Bohužel při dalších výzkumech došel k závěru, že jeho teorie je zcela mylná. Při měření oběžné dráhy Marsu se jeho trajektorie nejevila jako kružnice, ale jako elipsa. Celý jeho model byl založen na nesprávně určených kružnicových trajektoriích planet. Pozdější objevení planet Uran a Neptun jeho teorii absolutně vyřadilo ze hry. (6)



Obrázek 36: Keplerův model

Podle Keplera má geometrie dva obrovské poklady. Prvním z nich je Pythagorova věta, kterou přirovnává k žíle zlata. Za druhý poklad považoval rozdělení úsečky v krajním a středním poměru. Označil zlatý řez drahokamem. (6)

Byl zaujat těmito matematickými cennostmi nakolik, že se pokusil objevit nějakou souvislost mezi nimi. Nejprve začal s úsečkou AB, která byla rozdělena zlatým řezem v bodě C. Nad ní sestrojil Thaletovu kružnici a v bodě C kolmici. Protnutím kružnice a kolmice vznikl bod D. Dorýsujeme pravoúhlý trojúhelník ADB s přeponou AB a pravým úhlem v bodě D. Kepler dokázal, že jeho kratší odvěsna BD má stejnou velikost jako délka větší části původní úsečky, tedy AC. (3)



Obrázek 37: Souvislost zlatého řezu a pravoúhlého trojúhelníku

6 Zlatý řez v umění

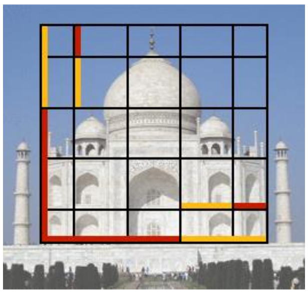
Spousta odvětví umění skrývá jak některé vlastnosti zlatého řezu, tak čísla Fibonacciho posloupnosti. Lidé byli tímto poměrem tak fascinováni, že se snažili jej využít tam, kde jen to šlo. Je až neuvěřitelné, kde všude byl uplatněn a kolik světových umělců jej dokázalo výstižně použít. Mistrovská díla jsou zakládána na smyslu rovnováhy a souladu celku k jeho částem.

6.1 Architektura

Objevováním počátků zlatého řezu jsme se již zabývali v předchozích kapitolách. Využívání tohoto božského poměru v architektuře zde ale nekončí. O několik let i století později se jeho krása dál uplatňovala ve spoustě dalších významných staveb.

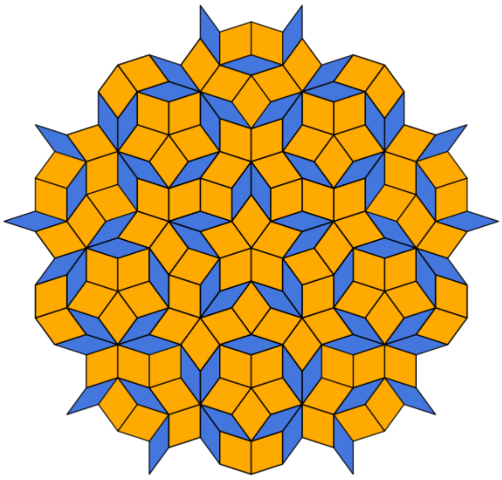
Byl zakomponován do gotických katedrál a objevil se například v dílech renesančního umělce Michelangela Buonarrotiho. Začínal sice jako malíř, avšak později našel zalíbení v sochařství, architektuře či psaní básní. Proporcím zlatého řezu přesně odpovídá jeho socha *Davida* ve Florencii, díky níž se stal nejproslulejším italským sochařem. Vyobrazuje nahého mladého muže, jenž má v plánu zavraždit Goliáše. Byla zhotovena z jednoho jediného kusu mramoru. (2)

Nejslavnější gotická katedrála *Notre-Dame* se nachází v Paříži. Několik jejích proporcí odpovídá zlatému poměru přímo ukázkově. Mezi další významné stavby, ve kterých se uplatňuje, patří např. pařížská *Eiffelova věž* či *Taj Mahal* v Indii.



Obrázek 38: Taj Mahal ve zlatém řezu

Hodnota zlatého řezu se objevuje také při dláždění. Musejí být vybírány pouze takové tvary dlaždic, které do sebe dokonale zapadají a zaplňují tak souvisle danou plochu. Touto problematikou se zabýval ve 20. století britský matematik Roger Penrose, který dokázal sestavit dlažbu z pouhých dvou odlišných čtyřúhelníků. Jedním z nich je takový úzký čtyřúhelník, který vznikl spojením základen dvou stejně velkých zlatých trojúhelníků. Druhý, o něco širší čtyřúhelník, je složen stejným způsobem ze dvou zlatých gnómonů. Nejen, že tyto dva zlaté útvary jsou podstatou celého Penroseova dlážděni, ale i poměr ploch, které zaujímají širší obrazce na určité ploše vzhledem k užším obrazcům, vyjadřuje číslo φ. (2)



Obrázek 39: Penroseovo dláždění

6.2 Malířství

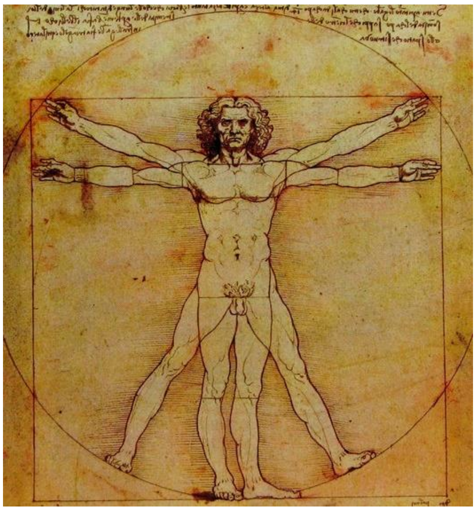
V dobách, kdy ještě neexistovaly fotografie, hrálo malířství významnou roli. Někteří malíři byli natolik talentovaní, že se zajímali navíc o matematiku, kterou s výtvarným uměním nejvíce spojuje geometrie.

Jedním z matematicky nadaných malířů byl renesanční Piero della Francesca, italský autor proslulého obrazu *Bičování Krista*. Lidé si ho pamatují jako významného malíře 15. století, ale ve skutečnosti se hodně angažoval právě ve vědě matematiky. Z několika jeho děl se dochovala pouze tři. V knize *O perspektivě při malování* ukazuje propojení matematiky a vidění. Dalšími jsou *Stručná kniha o pěti pravidelných tělesech* a *Pojednání o abaku,* ve kterém se objevují pravidelný pětiúhelník a všech pět platónských těles. Během svého života nevydal žádné z nich pod svým jménem. (2)

Některé Pierovy texty pak použil ve značné míře jeho přítel Luca Pacioli ve svém nejslavnějším díle *Divina proportione (Božská proporce)*. Je složeno celkem ze tří knih a střed pozornosti zaujímá zlatý řez. Pojednává o Euklidově větě o rozdělení úsečky v krajním a středním poměru, zabývá se pravidelnými pětiúhelníky, platónskými tělesy či využitím zlatého poměru v architektuře. Pacioli využívá již objevená a potvrzená data, ke kterým přispívá svými poznatky a názory. Uvádí zde také pět důvodů, proč by se zlatému řezu mělo říkat božská proporce. Porovnává s ním jedinečnost a neměnnost Boha, což má vést k používání přívlastku „božský“ právě tomuto číslu. Pacioli neměl moc šťastné dětství. Jeho rodina byla velmi chudá. Vstoupil do kláštera a pak se stal učencem obchodníka, od něhož později odešel, protože se chtěl věnovat raději matematice. (6)

Během života se setkal s několika slavnými matematiky. Vedle Piera della Francescy jeho tvorbu výrazně ovlivnil architekt, matematik a humanista Leon Battista Albert. Napsal *Deset knih o architektuře,* v nichž popisuje, jaký harmonický vztah mají jednotlivé části k sobě navzájem a jaké mají vztahy vzhledem k celku. Uplatnění těchto poměrů zkoumá v geometrických obrazcích, hudbě i matematických posloupnostech. Vytvořil také první moderní příručku *O malířství*, která sloužila ostatním malířům. (2)

Naštěstí se Pacioli spřátelil i s Leonardem da Vincim, který ilustroval veškeré potřebné obrázky v knihách Božské proporce. Leonardo používal proporce zlatého řezu ve svých dílech. Postupně vznikaly teorie, jakým způsobem jej vyobrazuje. Zejména je tomu tak při jeho hledání na obrazu *Mony Lisy*. Obrovský počet badatelů se již zabývalo tím, kde se všude může zlatý poměr na tomto obraze vyskytovat. Názory se však liší natolik, že nebyl potvrzen žádný konkrétní z nich. Dokonce se spekulovalo o tom, jestli se dá nakreslit kolem tváře Mony Lisy zlatý obdélník. Leonardo da Vinci byl autorem kresby *Proporce lidské postavy*, v níž zachycuje poměry částí těla člověka. Snažil se dbát na přesnost, a proto prováděl obrovské množství měření a výpočtů. (3)



Obrázek 40: Proporce lidské postavy od Leonarda da Vinciho

Jednotné schéma i s číselnými údaji o velikostech jednotlivých částí zhotovil Švýcar Le Corbusier a nazval jej jako *Modulor*. Svůj systém proporcí využil i následně ve své architektské tvorbě. (2)

Božské proporce využívali také malíři Albrecht Dürer nebo Georges Seurata. Na jejich obrazech sledujeme buďto poměr celku obrazu k jednotlivým částem, nebo poměry jeho částí navzájem. (1)

Jedním z nejpovedenějších děl italského malíře Giotta di Bondoneho se stala malba *Ognissanti Madonna (Trůnící Madona)*. Je na ní vyobrazena Panna Marie sedící na trůně.

Na jejím levém koleni sedí děťátko a okolo jsou uspořádáni andělé hledící směrem k nim. Několik spisů a knih tvrdí, že celá tato malba je vkreslena do zlatého obdélníku. Tato vlastnost je zřejmá i u některých dalších obrazů. Můžeme jmenovat díla *Santa Trinita Madonna*, kterou ztvárnil Cenni di Pepo, nebo *Madonna Rucellai*, jejímž autorem je malíř Duccio di Buoninsegna. Všechna tři veledíla se do současné doby dochovala a jsou uložena ve Florencii. Nachází se dokonce ve stejné místnosti v galerii Uffizi. (3)

V horní části obrazu *Svátost poslední večeře* od Salvadora Dalího je vyobrazena část dvanáctistěnu. Zvolil jej proto, že stejně jako Platón považoval za stvořitele celého vesmíru Boha, který se při své práci inspiroval právě tímto mnohostěnem. (3)

Obrázek 41: Svátost poslední večeře

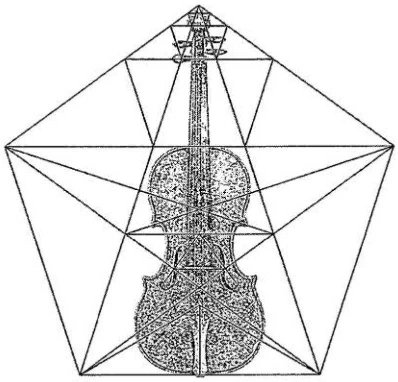
Malované obrazy jsou postupně nahrazovány fotografiemi. Není však divu, že pozorované objekty jsou nejčastěji umísťovány do místa, které dělí celou fotografii ve zlatém řezu.

6.3 Hudba

Projevy tónů a melodií doprovází lidstvo už od nepaměti. V průběhu vývoje člověka se kromě hlasového projevu používala spousta hudebních nástrojů. Začínalo se s těmi nejprimitivnějšími. Postupně se zdokonalujícími prostředky vznikaly nástroje moderní doby. Některé z nich byly vytvořeny tak, že znázorňují zlatý řez. Těmi nejznámějšími z nich jsou housle a piano.

Ital Antonio Stradivari vyráběl housle (strunné smyčcové hudební nástroje), přičemž používal zlatý řez na více místech najednou. Svislou osu houslí si můžeme rozdělit zlatým poměrem tak, že v bodě rozdělení bude střed kružnice, která opisuje jejich spodní oblouk. Na těle houslí se vyskytuje spousta okrajových oblouku, ale právě tento je největší. I otvory ve tvaru písmene f jsou umístěny podle přesně vypočtených vzdáleností. (3)

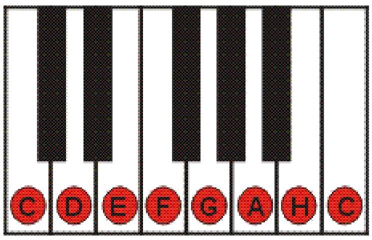
Vložením houslí do pentagramu vkresleného do pětiúhelníku pozorujeme, že je jejich korpus oddělen od zbylých částí vodorovnou úhlopříčkou pětiúhelníku. Analogickým způsobem jsou také rozděleny, a to na hlavu a krk. Originalita Stradivariho houslí, která se vyznačovala matematickými výpočty a především geometrickými měřeními, se na jejich kvalitě údajně neuplatňuje. (1)



Obrázek 42: Umístění houslí v pentagramu

Piano je souhrnný název pro strunné úderové hudební nástroje: klavír (velké piano, křídlo) a pianino (malé piano, postavené na výšku). (11)

Zde nacházíme Fibonacciho čísla v počtu kláves jedné oktávy. Nejprve vidíme 2 černé klapky, pak 3 černé klapky. Dohromady tedy 5 černých klapek. Bílých vidíme 8 a s černými dohromady jich je 13. Toto zobrazení čísel Fibonacciho posloupnosti má přece jen jeden háček. Tón C je zde použit dvakrát, jako první a poslední klávesa. (1)



Obrázek 43: Stupnice C-dur na klávesách piana

Aby hudební nástroj vydával správný tón, je potřeba jej dobře naladit. Každý tón má určitou frekvenci, kterou udává počet vibrací za sekundu a značíme jej jednotkou Hertz (Hz). Nejčastěji využívané hudební intervaly jsou založeny na poměrech Fibonacciho čísel. Jejich názvy jsou odvozeny od počtu jejich tónů v diatonické stupnici (sedmitónová stupnice, kde mezi každými dvěma stupni je buďto celý tón nebo půl tónu). (3)

Tón A má frekvenci 440 Hz a tón C 264 Hz. Tyto dva tóny se používají pro ladění velké sexty. Pokud poměr těchto dvou čísel zkrátíme číslem 88, dostáváme 5/3. Malá sexta je laděna podle vysokého C o frekvenci 528 Hz a tónu E s frekvencí 330 Hz. Poměr těchto dvou čísel je 8/5. Pro kvintu je charakteristický poměr 2/1 a pro oktávu poměr 3/2. (3)

Hudební skladatelé komponovali svá díla s určitou harmonií. Byli mezi nimi takoví, kteří používali zlatý řez při své tvorbě? Zkoumáním sonátů od Wolfganga Amadea Mozarta se zabýval matematik John F. Putz. Hledal výskyt zlatého poměru mezi počtem taktů v určitých částech *Sonátů č. 1 C dur*. Později ale zjistil, že jeho názory byly chybné. (9)

O něco méně známý Maďar Béla Bartók využívá podobným způsobem rozdělení taktů, přičemž ale na první pohled vidíme, že zde znázorňuje zlatý řez. Celkem 89 taktů jeho *Hudby pro smyčce, bicí a celestu* rozdělil na 55 a 34 taktů. Nejhlasitějším okamžikem této skladby je právě v místě rozdělení na tyto dvě části. Jsou dále porcovány různými prvky a počty taktů ukazují čísla Fibonacciho posloupnosti. Ta popisuje také rozdělení na půltóny jeho *Sonát pro dva klavíry a bicí*. Bartók nikdy však neobjasňoval důvody používání těchto detailů ve svých skladbách. Většina muzikologů zabývajících se strukturou těchto děl zpochybňuje jeho záměrné použití těchto čísel. Oproti nim jeho úmysl podporuje Ernö Lendvai. (3)

Podobně spousta hudebních umělců nakládala se zlatým řezem při skládání hudby, ať už vědomě či nevědomě. Claude Debussy si pohrál s poměry počtů taktů v několika svých kompozicích, např. *Odrazy ve vodě*, *Moře, Zahrady za deště* a další. Prostudovával je Roy Howat, který dokonce vydal o jeho tvorbě knihu *Debussy v proporcích*. (3)

Závěr

Hlavním cílem bakalářské práce bylo vysvětlit podstatu zlatého řezu. Nejprve jsem se zabývala historií a postupně jsem jej vyjadřovala z hlediska matematického a geometrického.

Následně jsem z každé oblasti, se kterou se v našem životě často setkáváme, vybírala ty nejzajímavější souvislosti zlatého řezu. Snažila jsem se srozumitelně a výstižně vyjádřit místa jeho výskytu v přírodě a způsoby používání v architektuře, sochařství, výtvarném umění či hudbě. Uvedla jsem řadu významných osobností, které se zasloužily o objevování, šíření a upřesňování jeho vlastností.

Podle mého názoru se mi podařilo vystihnout důležitá fakta a fascinující souvislosti této matematické konstanty.

Seznam použité literatury

1. OLSEN, Scott Anthony. *Záhadný zlatý řez: největší tajemství přírody*. 2. vyd. v českém jazyce. Přeložil Petr HOLČÁK. Praha: Dokořán, 2013. Pergamen. ISBN 978-80-7363-566-4.

2. HEMENWAY, Priya. *Tajný kód: záhadný vzorec v umění, přírodě a vědě*. V Praze: Slovart, 2009. ISBN 978-80-7391-253-6.

3. LIVIO, Mario. *The Golden Ratio: The Story of PHI, the World's Most Astonishing Number.* Broadway Book, 2003. ISBN 9780767908160

4. ROSYPAL, Stanislav. *Nový přehled biologie*. Praha: Scientia, 2003. ISBN 80-7183-268-5.

5. CSACHOVÁ, Lucia, VORÁČOVÁ, Šárka, ed. *Atlas geometrie: geometrie krásná a užitečná*. Praha: Academia, 2012. Atlas (Academia). ISBN 978-80-200-1575-4.

6. BENTLEY, Peter. *Kniha o číslech: tajemství čísel a jejich vliv na náš svět.* Čestlice: Rebo, 2013. ISBN 978-80-255-0649-3.

7. MARKOWSKY, George. *Misconceptions about the golden ratio*. The College Mathematics Journal 23.1 (1992): 2-19.

8. MURALI, Sruthy. *Golden Ratio in Human Anatomy*. (2012).

9. DUNLAP, Richard A. *The golden ratio and Fibonacci numbers*. World Scientific, 1997.

Internetové zdroje

10. Káhira | Pyramidy. Káhira | O Káhiře [online]. Copyright © 2009 [cit. 29.03.2019]. Dostupné z: http://www.kahira.eu/pyramidy/

11. Moved Permanently. Drnek Piana - Pianina [online]. Dostupné z: http://www.pianos.cz/zajimavosti-o-klavirech-a-pianinech/

Seznam a zdroje obrázků

Obrázek 1: Chufevova pyramida v Gíze 7

(dostupné z: https://www.thinglink.com/scene/634159840129712130)

Obrázek 2: Schéma vzdáleností v Chufevově pyramidě.. 8

(dostupné z: https://polahoda.cz/neutrino_a_zlaty_rez_)

Obrázek 3: Parthenon 8

(dostupné z: https://www.pinterest.ca/pin/645211084089448055/)

Obrázek 4: Eukleides 10

(dostupné z: http://home.spsostrov.cz/~grohdo/I3/mysql/zaverecny-test-i3-Groh/zaverecny-test-i3/?page=eukleides)

Obrázek 5: Úsečka rozdělená ve zlatém řezu.. 11

Obrázek 6: Velké a malé řecké písmeno „fí“ 12

(dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/F%C3%AD)

Obrázek 7: Použití φ pro označení délek v úsečce 12

Obrázek 8: Rozdělení úsečky zlatým řezem 14

Obrázek 9: Rozdělení zlatého obdélníků na čtverce.. 15

Obrázek 10: Konstrukce zlatého obdélníku 15

Obrázek 11: Zlatý trojúhelník ……………………………………………………...15

Obrázek 12: Zlatý gnómon…………... 15

Obrázek 13: Zlatá spirála ve zlatém obdélníku 16

(dostupné z: https://365tipu.cz/2016/05/22/tip508-co-je-to-zlaty-rez/, upraveno)

Obrázek 14: Zlatá spirála kolem zlatého trojúhelníku 16

(dostupné z: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQJMkPLVfZdStEKGohMhgcHLLk5dVqKz2u-MmHQA0Tvt4RN93fVoQ)

Obrázek 15: Archimédova spirála 17

(dostupné z: https://cs.garynevillegasm.com/obrazovanie/78961-spiral-arhimeda-i-ee-proyavleniya-v-okruzhayuschem-nas-mire.html)

Obrázek 16: Zlatý úhel.. 17

Obrázek 17: Zlatý řez v pentagramu... 18

Obrázek 18: Přehled platónských těles: čtyřstěn, šestistěn, osmistěn, dvanáctistěn, dvacetistěn 19

(dostupné z: https://liborcermak.blog.idnes.cz/blog.aspx?c=416492)

Obrázek 19: Porovnání umístění kolmých obdélníků v dvanáctistěnu a dvacetistěnu 19

(dostupné z: (3))
Obrázek 20: Čtverce, jejichž délky stran jsou vyjádřeny čísly Fibonacciho posloupnosti...... 21
(dostupné z: https://cz.pinterest.com/pin/439804719838240316/)
Obrázek 21: Pascalův trojúhelník 21
(dostupné z: https://slideplayer.cz/slide/12272220)
Obrázek 22: Leonardo Pisánský 22
(dostupné z: https://fineartamerica.com/featured/leonardo-fibonacci-granger.html?product=poster)
Obrázek 23: Množení králíků dle Fibonacciho 23
(dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1493-fibonacciho-posloupnost-zavedeni)
Obrázek 24: Rozdělení lidského těla zlatými řezy 24
(dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/400799/DejinyMat_39-2009-1_11.pdf)
Obrázek 25: Mléčný a trvalý chrup člověka 25
(dostupné z: https://www.zsdubenec.cz/data/eupenize/bc105.pdf)
Obrázek 26: Zlatý řez v zatnuté pěsti... 25
(dostupné z: https://www.vectorstock.com/royalty-free-vector/human-hand-fibonacci-ratio-vector-21132681)
Obrázek 27: Ulita loděnky 26
(dostupné z: https://zoomagazin.cz/zivouci-fosilie-lodenky)
Obrázek 28: Let sokola 26
(dostupné z: https://www.estav.cz/cz/1016.ergonomie-veda-o-rozmerech-a-pomerech-zlaty-rez-v-praxi)
Obrázek 29: Rodokmen trubce 27
(dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1494-fibonacciho-posloupnost-v-ruznych-souvislostech)
Obrázek 30: Fylotaxe – střídavá, vstřícná, křižmostojná, přeslenitá a spirálovitá 28
(dostupné z: https://docplayer.cz/39652390-3-rust-a-vyvoj-a-embryogeneze-a-cytokineze-b-meristem-a-vyvoj-rostliny-c-vyvoj-listu-a-korenu-kfzr-1.html)
Obrázek 31: Schéma růstu listů na stonku při pohledu na vzrostný vrchol shora................... 29
(dostupné z: (3))
Obrázek 32: Uspořádání poupat v úboru slunečnice 30

(dostupné z: https://www.tyden.cz/rubriky/veda/veda-a-my/video-krasa-prirody-se-ridi-matematickymi-pravidly_183919.html)
Obrázek 33: Spirálovité řady šupin na ananasu 30
(dostupné z: (3))
Obrázek 34: Schéma proudění 31
(dostupné z: http://kocajz.kospo.cz/clanky/meteo/)
Obrázek 35: Galaxie 32
(dostupné z: https://www.novinky.cz/veda-skoly/338264-observator-zachytila-zarici-galaxii-plnou-cernych-der.html)
Obrázek 36: Keplerův model 33
(dostupné z: https://www.stoplusjednicka.cz/johannes-kepler-porodnik-nove-vedy-objevitel-rady-dulezitych-zakonu-2)
Obrázek 37: Souvislost zlatého řezu a pravoúhlého trojúhelníku 33
Obrázek 38: Taj Mahal ve zlatém řezu 34
(dostupné z: http://voho.eu/wiki/zlaty-rez)
Obrázek 39: Penroseovo dláždění 35
(dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:PenroseTilingFilled4.svg)
Obrázek 40: Proporce lidské postavy od Leonarda da Vinciho 36
(dostupné z: https://anquetil.rajce.idnes.cz/LEONARDO)
Obrázek 41: Svátost poslední večeře 37
(dostupné z: https://encheres.catawiki.eu/kavels/6702999-salvador-dal-le-sacrement-de-la-derni-re-c-ne-sacrament-the-last-supper)
Obrázek 42: Umístění houslí v pentagramu 38
(dostupné z: (1))
Obrázek 43: Stupnice C-dur na klávesách piana 38
(dostupné z: https://www.agadir.cz/teorie.php?vyber=2)

Příloha

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Natálie Sikorová
Katedra nebo ústav:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D.
Rok obhajoby:	2019

Název závěrečné práce:	Zlatý řez
Název práce v angličtině:	Golden ratio
Anotace práce:	Hlavním cílem této bakalářské práce je vysvětlit zlatý řez matematicky a uvést jeho souvislosti v ostatních vědách. Zaměřuji se na základní vlastnosti, místa přirozeného výskytu a způsoby využívání zlatého řezu při lidské tvorbě. Dále se zde zabývám blízkým vztahem zlatého řezu s Fibonacciho posloupností.
Klíčová slova:	Zlatý řez, Fibonacciho posloupnost
Anotace práce v angličtině:	The main objective of this thesis is to explain the golden ratio in mathematics and present its connetction with other branches of science. I mainly focus on fundamental properties, areas of natural occurrence and usage of the golden ratio in human creations. I also review the close relationship between the golden ratio and the Fibonacci sequence.
Klíčová slova v angličtině:	Golgen ratio, Fibonacci sequence
Přílohy vázané v práci:	Anotace
Rozsah práce:	44
Jazyk práce:	Český jazyk