Univerzita Palackého v Olomouci

Přírodovědecká fakulta

Katedra experimentální fyziky

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

## Sbírka příkladů z atomové a jaderné fyziky

Autor: Petr Smilek

Studijní program: B1701 Fyzika

Studijní obor: 1701R003 Fyzika se zaměřením na vzdělávání

Forma studia: Prezenční

Vedoucí práce: RNDr. Renata Holubová, CSc.

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Renaty Holubové, CSc. a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci ……………….   ...…………………………......

## Poděkování

Děkuji vedoucí práce paní RNDr. Renatě Holubové, CSc. a panu Mgr. Vítu Procházkovi Ph.D. za cenné rady a připomínky v průběhu psaní bakalářské práce. Také děkuji Jaroslavu Fričerovi a Pavlu Hlaváčkovi za pomoc a podporu při psaní této bakalářské práce.

## Bibliografická identifikace:

| | |
|---|---|
| Jméno a příjmení autora | Petr Smilek |
| Název práce | Sbírka příkladů z atomové a jaderné fyziky |
| Typ práce | Bakalářská |
| Pracoviště | Katedra experimentální fyziky |
| Vedoucí práce | RNDr. Renata Holubová, CSc. |
| Rok obhajoby práce | 2013 |
| Abstrakt | Cílem bakalářské práce je sestavit sbírku řešených úloh z vybraných partií atomové a jaderné fyziky. Sbírka bude obsahovat příklady na středoškolské úrovni různé obtížnosti a stane se doplňkem existující sbírky řešených úloh z fyziky nakladatelství Prometheus. Sbírka bude využívána nejen v rámci výuky studentů učitelství fyziky v rámci didaktiky fyziky – Řešení fyzikálních úloh, ale budou ji moci použít i učitelé a žáci středních škol. |
| Klíčová slova | Atomová a jaderná fyzika, sbírka řešených příkladů |
| Počet stran | 44 |
| Počet příloh | 0 |
| Jazyk | Český |

## Bibliographical identification:

| | |
|---|---|
| Autor’s first name and surname | Petr Smilek |
| Title | A collection of exercises from Atomic and Nuclear physics |
| Type of thesis | Bachelor |
| Department | Department of Experimental Physics |
| Supervisor | RNDr. Renata Holubová, CSc. |
| The year of presentation | 2013 |
| Abstract | The task of the thesis is to assemble a collection of solved problems from Atomic and Nuclear physics. The collection will include excercises on the secondary school level in various difficulties and it will become a part of existing collection of solved problems in Physics from the Prometheus publishing company. The collection will be used within the education of students of a teaching profession aimed on Physics – The solutions of physical problems, and it will be able to teachers and pupils of secondary school. |
| Keywords | Atomic and Nuclear physics, collection of solved problems |
| Number of pages | 44 |
| Number of appendices | 0 |
| Language | Czech |

## Obsah

# Úvod

Cílem bakalářské práce je vytvořit sbírku řešených příkladů z atomové a jaderné fyziky na středoškolské úrovni, která by rozšiřovala a doplňovala existující sbírky a práce zabývající se tímto tématem. Sbírka obsahuje úlohy různého stupně obtížnosti. Příklady jsou určeny nejen pro učitele a studenty středních škol, ale také pro všechny zájemce o studium fyziky.

Bakalářská práce je rozdělena do tří kapitol s názvy: Základní poznatky kvantové fyziky, Elektronový obal atomu a Jaderná fyzika. Před každou kapitolou jsou uvedeny základní vztahy a souvislosti, které je nutné si osvojit pro zvládnutí řešení úloh. Každá kapitola dále obsahuje řešené příklady. Do sbírky je zahrnuto 23 řešených úloh. Jednotlivé úlohy jsou složeny ze zadání, názorného řešení a odpovědí.

# 1 Základní poznatky kvantové fyziky

*Kvantová fyzika* se zabývá studiem objektů a jevů mikrosvěta.

## 1.1 Světelné vlny a fotony

Světlo lze chápat jako vlnu, přičemž platí vztah

$$c = \lambda f, \tag{1}$$

kde $c = 3 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$ je rychlost světla ve vakuu, $\lambda$ je vlnová délka světla a $f$ je frekvence světla.

Podle kvantové teorie se však světlo šíří v určitých „balíčcích“ energie. Tyto „balíčky“ (kvanta) energie nazýváme fotony. Energie se tedy předává diskrétně, ne spojitě. Energie fotonu je rovna

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}, \tag{2}$$

kde $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$ je Planckova konstanta, $c$ je rychlost světla ve vakuu, $\lambda$ je vlnová délka světla a $f$ je frekvence světla.

Při interakci fotonu elektromagnetického záření s látkou dochází k přenosu nejen energie, ale i hybnosti. Velikost hybnosti fotonu je dána vztahem

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}, \tag{3}$$

kde $E$ je energie fotonu o vlnové délce $\lambda$ a frekvenci $f$.

## 1.2 Vlnové vlastnosti částic

Všechny objekty mikrosvěta (např. atomy, molekuly, protony, neutrony, elektrony a další elementární částice) se chovají nejen jako částice, ale mají také své vlnové vlastnosti. Tahle skutečnost se označuje jako vlnově-korpuskulární (částicový) dualismus. Vlna, která je přiřazena volně se pohybující částici (tedy částici, na kterou nepůsobí žádné vnější síly), se nazývá *de Broglieho vlna*.

*Vlnová délka de Broglieho vlny* $\lambda$ je definována

$$\lambda = \frac{h}{p}, \tag{4}$$

kde $p = mv$ je hybnost částice a $h$ je Planckova konstanta.

## 1.3 Heisenbergův princip neurčitosti

Tento princip říká, že částici nelze současně přiřadit polohu $\boldsymbol{r}$ a hybnost $\boldsymbol{p}$ s neomezenou přesností. *Heisenbergův princip neurčitosti* stanovuje pro jednotlivé složky $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$ tyto meze:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}, \tag{5}$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{h}{4\pi}, \tag{6}$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \frac{h}{4\pi}. \tag{7}$$

Tady např. $\Delta x$ a $\Delta p_x$ jsou po řadě neurčitosti polohy a neurčitosti hybnosti ve směru osy $x$. Každý součin neurčitosti polohy a neurčitosti hybnosti bude vždy větší než $\frac{h}{4\pi}$.

## 1.4 Fotoelektrický jev

Ozařujeme-li elektromagnetickým zářením s dostatečně krátkou vlnovou délkou $\lambda$ (velkou frekvencí $f$) čistý kovový povrch, vyráží toto elektromagnetické záření z kovu elektrony. Tento jev se nazývá *vnější fotoelektrický jev*. Platí Einsteinova rovnice

$$hf = W_v + \frac{1}{2} m_e v^2, \tag{8}$$

kde $hf$ je energie fotonu, $W_v$ je výstupní práce kovu, což je minimální energie, kterou musíme elektronu dodat, aby opustil povrch kovu, a $\frac{1}{2} m_e v^2$ je kinetická energie elektronu.

Pro vnější fotoelektrický jev platí:

1. Fotoelektrický jev nastane jen tehdy, je-li frekvence dopadajícího elektromagnetického záření $f$ větší než mezní frekvence $f_m$ , která je charakteristická pro daný materiál $(f \geq f_m)$. V opačném případě fotoelektrický jev nenastane $(f < f_m)$.
2. Dopadající elektromagnetické záření s vlnovou délkou $\lambda$ způsobí, že bude probíhat fotoelektrický jev pouze tehdy, je-li vlnová délka $\lambda$ menší než mezní

vlnová délka $\lambda_m$, která je také charakteristická pro daný materiál $(\lambda \leq \lambda_m)$. V opačném případě opět fotoelektrický jev nenastane $(\lambda > \lambda_m)$.

3. Elektrony vyražené z kovu při fotoelektrickém jevu vytvářejí elektrický proud, který se nazývá fotoelektrický proud. Tento fotoelektrický proud je přímo úměrný intenzitě dopadajícího záření.
4. Kinetická energie vyražených elektronů $\frac{1}{2}m_e v^2$ je tím větší, čím je větší frekvence dopadajícího záření $f$. Tato energie nezávisí na intenzitě dopadajícího záření.

## 1.5 Comptonův jev

Při dopadu rentgenového záření s vlnovou délkou $\lambda$ na určitý materiál (např. uhlík) dochází k rozptylu fotonů rentgenového záření na volných elektronech v daném materiálu. Tomuto jevu říkáme *Comptonův jev*.

Rozptýlený svazek obsahuje velký rozsah vlnových délek, ovšem nejčastěji má rozptýlené záření jistou vlnovou délku $\lambda^{'}$ a také svou původní vlnovou délku záření $\lambda$.

Rozdíl $\Delta\lambda = \lambda^{'} - \lambda$ se označuje jako *Comptonův posuv*. Hodnota Comptonova posuvu se mění s úhlem, pod kterým je rozptýlené záření detekováno. Vlnová délka rozptýleného záření $\lambda^{'}$ je vždy větší než vlnová délka dopadajícího záření $\lambda$.

Ze zákona zachování energie a zákona zachování hybnosti lze pro Comptonův posuv odvodit vztah

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\varphi), \qquad (9)$$

kde konstanta $\frac{h}{m_e c}$ se nazývá *Comptonova vlnová délka elektronu*.

Pro frekvenci $f^{'}$ fotonu odraženého pod určitým úhlem platí rovnice

$$hf = hf^{'} + E_k, \qquad (10)$$

kde $f$ je frekvence dopadajícího záření, $h$ je Planckova konstanta a $E_k$ je kinetická energie elektronu po srážce. Frekvence rozptýleného rentgenového záření $f^{'}$ je tedy vždy menší než frekvence dopadajícího záření $f$.

**Úloha 1.1**

Největší dosud známá hvězda VY Canis Majoris vyzařuje světlo s výkonem $2 \cdot 10^{31}$ W. Jaká je energie jednoho fotonu hvězdy? Kolik fotonů vyzáří tato hvězda za 1 s? Uvažujte, že světlo hvězdy je monochromatické s vlnovou délkou 600 nm.

*Řešení:*

$P = 2 \cdot 10^{31}$ W, $\lambda = 600$ nm $= 6 \cdot 10^{-7}$ m, $c = 3 \cdot 10^{8}$ m $\cdot$ s$^{-1}$,

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s, $E = ?$, $N = ?$

---

Energie fotonu hvězdy je dána vztahem

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda},$$

po dosazení:

$$E = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{6 \cdot 10^{-7}} \doteq 3{,}32 \cdot 10^{-19}$$

$$E \doteq 3{,}32 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

Pokaždé, když hvězda vyzáří foton, ztrácí energii $3{,}32 \cdot 10^{-19}$ J.

Pro četnost vyzařování fotonů $N$ platí

$$N = \frac{P}{E},$$

Číselně:

$$N = \frac{2 \cdot 10^{31}}{3{,}32 \cdot 10^{-19}} \doteq 0{,}60 \cdot 10^{50} = 6{,}0 \cdot 10^{49}$$

$$N = 6{,}0 \cdot 10^{49}\ \text{fotonů/s}$$

Energii jednoho fotonu odpovídá hodnota $3{,}32 \cdot 10^{-19}$ J. Hvězda vyzařuje $6{,}0 \cdot 10^{49}$ fotonů za sekundu, což je ohromné množství.

Z příkladu je patrné, že četnost vyzařování fotonů je závislá na výkonu hvězdy, nikoliv na její velikosti. VY Canis Majoris je nejen obrovská hvězda, patří také k těm hvězdám, které mají velký zářivý výkon.

**Úloha 1.2**

Žába o hmotnosti 150 g skáče do rybníka pod úhlem 30°. Určete vlnovou délku de Broglieho vlny žáby v okamžiku, kdy dosáhne největší výšky. Celková doba letu je 0,4 s. Odpor vzduchu zanedbejte, počítejte s gravitačním zrychlením 10 m · s$^{-2}$.

*Řešení:*

$m = 150\text{ g} = 0{,}15\text{ kg}, \alpha = 30°, t = 0{,}4\text{ s}, h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\text{ J} \cdot \text{s},\ g = 10\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \lambda = ?$

---

Předpokládejme, že se žába pohybuje šikmým vrhem s elevačním úhlem $\alpha$. Pro složky rychlosti se dají odvodit obecné rovnice

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

kde $v_0$ je počáteční rychlost žáby, $v_x$ je její velikost rychlosti ve směru osy *x* a $v_y$ je její velikost rychlosti ve směru osy *y*.

V nejvyšší výšce, kterou žába dosáhne, bude složka rychlosti $v_y = 0$. Čas, za který se žába do této výšky dostane, je $t^{´} = \frac{t}{2}$. Druhou rovnici upravíme a můžeme psát, že $v_0 = \frac{gt^{´}}{\sin\alpha}$ a po dosazení do první rovnice získáme $v_x = gt^{´}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = gt^{´}\cot\alpha$.

Pro vlnovou délku de Broglieho vlny platí vztah

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{mv_x} = \frac{h}{mgt^{´}\cot\alpha} = \frac{2h}{mgt\cot\alpha}$$

a po dosazení číselných hodnot konečně vyjde:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}}{0{,}15 \cdot 10 \cdot 0{,}4 \cdot \cot 30°} \doteq 12{,}76 \cdot 10^{-34}$$

$$\lambda = 12{,}76 \cdot 10^{-34}\text{ m}$$

Vlnová délka žáby je $12{,}76 \cdot 10^{-34}$ m. Tato hodnota je velmi malá, dokonce menší než je rozměr atomového jádra, proto se vlnové vlastnosti žáby neprojeví.

**Úloha 1.3**

Určete vlnovou délku de Broglieho vlny spojené s pohybem

a) jedoucího vozidla,
b) molekuly kyslíku v plicích,
c) elektronu urychleného napětím $U$. [Převzato z [9], str. 54]

*Řešení:*

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s, $M_r = 2 \cdot 16 = 32, m_u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg,

$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J · K$^{-1}$, $p_a = ?, p_b = ?, p_c = ?$

---

Abychom mohli řádově určit vlnové délky de Broglieho vln, je nutno provést odhad hybností pro jednotlivé částice.

a) Nechť má auto hmotnost $m = 1000$ kg a pohybuje se rychlostí $v = 10$ m · s$^{-1}$, pak má auto hybnost:

$$p_a = mv = 1000 \cdot 10 = 10^4$$

$$p_a = 10^4 \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Vlnová délka de Broglieho vlny auta vychází:

$$\lambda_a = \frac{h}{p_a} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{10^4} = 6{,}63 \cdot 10^{-38}$$

$$\lambda_a = 6{,}63 \cdot 10^{-38} \text{ m}$$

b) Lidské tělo má zhruba teplotu $T = 310$ K, pro střední kvadratickou rychlost molekuly kyslíku při této teplotě lze odvodit vztah $v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$. Pro hybnost molekuly kyslíku platí

$$p_b = m \cdot \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{3mkT} = \sqrt{3M_r m_u kT},$$

kde $M_r$ je relativní molekulová hmotnost kyslíku, $m_u$ je atomová hmotnostní konstanta a $k$ je Boltzmannova konstanta. Číselně vychází:

$$p_b = \sqrt{3 \cdot 32 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 310} \doteq 2{,}61 \cdot 10^{-23}$$

$$p_b = 2{,}61 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{m \cdot kg \cdot s^{-1}}$$

Pro de Broglieho vlnovou délku molekuly kyslíku platí:

$$\lambda_b = \frac{h}{p_b} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{2{,}61 \cdot 10^{-23}} \doteq 2{,}5 \cdot 10^{-11}$$

$$\lambda_b = 2{,}5 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}$$

c) Elektron, který je urychlován napětím $U$, získá rychlost:

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

Je-li $m_e$ hmotnost elektronu, pak pro hybnost elektronu $p_c$ platí:

$$p_c = m_e\sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = \sqrt{2eUm_e}$$

Předpokládejme, že napětí $U = 900$ V. Pak po dosazení pro hybnost dostaneme:

$$p_c = \sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 900 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} \doteq 162 \cdot 10^{-25}$$

$$p_c = 162 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{m \cdot kg \cdot s^{-1}}$$

Pro de Broglieho vlnovou délku elektronu platí:

$$\lambda_c = \frac{h}{p_c} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{162 \cdot 10^{-25}} \doteq 4{,}1 \cdot 10^{-11}$$

$$\lambda_c = 4{,}1 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}$$

V případě a) vyšla de Broglieho vlnová délka řádově $10^{-38}$ m, což je nedekovatelná hodnota. U obou případů b) a c) je de Broglieho vlnová délka řádově $10^{-11}$ m, to jsou již zlomky atomových vzdáleností, s nimiž se musí při zkoumání těchto objektů počítat.

### Úloha 1.4

Elektron se pohybuje ve směru osy $z$ a jeho kinetická energie je 9,6 eV. Určete rychlost elektronu. Dále předpokládejte, že tuto rychlost jsme schopni měřit s 0,6% přesností. Jaká je nejmenší neurčitost, se kterou dokážeme současně změřit polohu elektronu podél osy $z$? [2]

*Řešení:*

$E_k = 9{,}6$ eV $= 15{,}4 \cdot 10^{-19}$ J, $k = 0{,}006, h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg,

$\Delta z =?$

Kinetická energie elektronu je rovna

$$E_k = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} m_e v_z^2,$$

kde $m_e$ je hmotnost elektronu a $v_z$ je velikost jeho rychlosti ve směru osy$z$.

Odtud pro složku rychlosti platí:

$$v_z = \sqrt{\frac{2E_k}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15{,}4 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} \doteq 1{,}8 \cdot 10^6$$

$$v_z = 1{,}8 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Rychlost elektronu je mnohem menší než je rychlost světla, proto pro hybnost použijeme známý relativistický vztah

$$p = p_z = m v_z.$$

Hybnost elektronu jsme ovšem schopni měřit pouze s 0,6% přesností, tedy bude platit

$$\Delta p_z = 0{,}006 \cdot p_z.$$

Zde využijeme Heisenbergova principu neurčitosti, pro nejmenší neurčitost měření polohy elektronu zřejmě platí:

$$\Delta z = \frac{h}{4\pi \Delta p_z} = \frac{h}{4\pi \cdot 0{,}006 \cdot p_z} = \frac{h}{0{,}024 \pi m_e v_z}$$

a číselně nám vyjde:

$$\Delta z = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{0{,}024 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}8 \cdot 10^6} \doteq 5{,}37 \cdot 10^{-9}$$

$$\Delta z = 5{,}37 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Rychlost elektronu je $1{,}8 \cdot 10^6$ m $\cdot$ s$^{-1}$. Elektron, jehož hybnost lze určit pouze s 0,6% přesností, se může nacházet na ose $z$ v rozmezí o velikosti $5{,}37 \cdot 10^{-9}$ m. Z příkladu je patrné, že velkým hodnotám neurčitosti hybnosti odpovídají malé hodnoty neurčitosti polohy a naopak.

**Úloha 1.5**

Představte si, že jste na atletickém stadionu v Berlíně v roce 2009. Usain Bolt právě zaběhl světový rekord na $100\ \mathrm{m}$ s časem $9{,}58\ \mathrm{s}$. Nyní si představte, že v průběhu závodu v Berlíně byla hodnota Planckovy konstanty $0{,}663\ \mathrm{J\cdot s}$. Vypočítejte, s jakou neurčitostí polohy se musí jamajský sprinter pohybovat, váží-li 94 kg a je-li neurčitost rychlosti 1,92 % jeho průměrné rychlosti. Pro jednoduchost předpokládejte, že se Bolt pohybuje průměrnou rychlostí.

*Řešení:*

$s = 100\ \mathrm{m}, t = 9{,}58\ \mathrm{s}, h = 0{,}663\ \mathrm{J\cdot s}, m = 94\ \mathrm{kg}, k = 1{,}92\ \%, \Delta x = ?$

---

Nejprve určíme průměrnou rychlost sprintera $v_p$:

$$v_p = \frac{s}{t} = \frac{100}{9{,}58} \doteq 10{,}44$$

$$v_p = 10{,}44\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Neurčitost $\Delta v_k$ při měření rychlosti je 1,92 % průměrné hodnoty $v_p$, platí:

$$\Delta v_k = \frac{v_p}{100}\cdot k = \frac{10{,}44}{100}\cdot 1{,}92 \doteq 0{,}2$$

$$\Delta v_k = 0{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Podle Heisenbergova principu neurčitosti můžeme psát

$$\Delta x\cdot\Delta p = \frac{h}{4\pi},$$

kde $\Delta p = m\Delta v_k$ je neurčitost hybnosti sprintera.

Pro neurčitost polohy sprintera bude platit:

$$\Delta x = \frac{h}{4\pi m\Delta v_k}$$

Po dosazení vyjde:

$$\Delta x = \frac{0{,}663}{4\cdot 3{,}14\cdot 94\cdot 0{,}2} \doteq 0{,}028$$

$$\Delta x = 0{,}028\ \mathrm{m} = 28\ \mathrm{mm}$$

Za daných podmínek je relace neurčitosti polohy Usaina Bolta v průběhu závodu rovna $28\ \mathrm{mm}$.

**Úloha 1.6**

Uvažujte o vnějším fotoelektrickém jevu. Rozhodněte a vysvětlete, která z následujících tvrzení jsou pravdivá a která nikoliv:

Čím větší je intenzita dopadajícího elektromagnetického záření, tím větší je mezní frekvence látky.

Čím větší je výstupní práce látky, tím větší je mezní frekvence.

Čím větší je frekvence dopadajícího elektromagnetického záření, tím větší je maximální kinetická energie emitovaných elektronů. [2]

*Řešení:*

Pomůžeme si Einsteinovým vztahem fotoelektrického jevu

$$hf = W_v + \frac{1}{2} m_e v^2.$$

a) Zvýšení intenzity záření se projeví jen zvýšením množství fotonů daného záření, které na látku dopadá. Mezní frekvence látky je konstantní. Intenzita elektromagnetického záření nemá na prahovou frekvenci žádný vliv.
b) K vnějšímu fotoelektrickému jevu dochází, když $hf = W_v$. Elektron je v tu chvíli vyražen ze struktury dané látky a jeho kinetická energie $E_k$ je nulová. Je zřejmé, že mezi mezní frekvencí a výstupní prací existuje přímá úměrnost. Tvrzení je pravdivé.
c) Z Einsteinovy rovnice pro vnější fotoelektrický jev je patrné, že frekvence záření a kinetická energie jsou ve vztahu přímé úměrnosti. Tvrzení platí.

**Úloha 1.7**

Výstupní práce elektronů pro stříbro je $4{,}7\ \mathrm{eV}$. Určete minimální frekvenci elektromagnetického záření při vnějším fotoelektrickém jevu. [1]

*Řešení:*

$W_v = 4{,}7\ \mathrm{eV} = 4{,}7 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 7{,}5 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}, h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}, f_m = ?$

---

Aby došlo k vnějšímu fotoelektrickému jevu, je třeba dodat elektronům stříbra energii $hf_m$, kde $f_m$ je minimální (mezní) frekvence elektromagnetického záření. V tomto případě je kinetická energie $E_k$ elektronů nulová. Platí tedy

$$W_v = hf_m \text{ a odtud } f_m = \frac{W_v}{h}.$$

Číselně:

$$f_m = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-19}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}} \doteq 1{,}1 \cdot 10^{15}$$

$$f_m = 1{,}1 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s^{-1}}$$

Minimální frekvence elektromagnetického záření potřebná k tomu, aby nastal vnější fotoelektrický jev u stříbra, je $1{,}1 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s^{-1}}$.

**Úloha 1.8**

Rentgenové záření se rozptyluje na uhlíkovém terčíku pod úhlem $135°$ vzhledem k dopadajícímu paprsku. Energie fotonu tohoto záření je $16{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{eV}$. Určete, jaká je vlnová délka rentgenového záření. Dále určete, jak velký je Comptonův posuv rozptýleného svazku tohoto záření. [3]

*Řešení:*

$E = 16{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{eV} = 16{,}6 \cdot 10^3 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 26{,}6 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{J}, c = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},$

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}, \Delta\lambda = ?$

---

Nejprve určíme vlnovou délku rentgenového záření $\lambda$. Tu získáme ze vztahu pro energii fotonu

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}, \text{ odtud } \lambda = \frac{hc}{E}.$$

Číselně:

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{26{,}6 \cdot 10^{-16}} \doteq 0{,}75 \cdot 10^{-10}$$

$$\lambda = 0{,}75 \cdot 10^{-10}\ \text{m} = 75\ \text{pm}$$

Pro Comptonův posuv byl odvozen vztah

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi),$$

kde $h$ je Planckova konstanta, $m$ je hmotnost elektronu, $c$ je rychlost světla ve vakuu a $\varphi$ je úhel mezi dopadajícím paprskem a rozptýleným paprskem.

Po dosazení číselných hodnot dostaneme:

$$\Delta\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^{8}}(1 - \cos 135°) = 0{,}243 \cdot 10^{-11}\left[1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \doteq 4\ \text{pm}$$

$$\Delta\lambda = 4\ \text{pm}$$

Vlnová délka $\lambda$ rentgenového záření, které dopadá na uhlíkový terčík, je asi 75 pm.

Pro Comptonův posuv $\Delta\lambda$ dostáváme hodnotu kolem 4 pm.

### Úloha 1.9

Uvažujte, že se v mlžné komoře pohybuje elektron rychlostí $\boldsymbol{v}$. Srovnejte de Broglieho vlnovou délku elektronu s jeho Comptonovou vlnovou délkou. [2]

*Řešení:*

$c = 3 \cdot 10^{8}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}, h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}, \frac{\lambda_B}{\lambda_C} = ?$

---

Pro de Broglieho vlnovou délku elektronu $\lambda_B$ bude platit, že

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv},$$

kde $h$ je Planckova konstanta, $m$ je hmotnost elektronu a $v$ je rychlost elektronu.

Comptonova vlnová délka elektronu $\lambda_C$ je konstantní a lze zapsat ve tvaru

$$\lambda_C = \frac{h}{mc},$$

kde $h$ je Planckova konstanta, $m$ je hmotnost elektronu a $c$ je rychlost světla ve vakuu.

Pro srovnání vlnových délek bude stačit, určíme-li jejich vzájemný poměr. Tedy:

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_C} = \frac{\frac{h}{mv}}{\frac{h}{mc}} = \frac{\frac{1}{v}}{\frac{1}{c}} = \frac{c}{v}$$

Ze vzájemného poměru vlnových délek $\lambda_B$ a $\lambda_C$ lze určit, že de Broglieho vlnová délka elektronu $\lambda_B$ je vždy větší než Comptonova vlnová délka elektronu $\lambda_C$, protože žádná hmotná částice nemůže dosáhnout úplné rychlosti světla ve vakuu $c$.

# 2 Elektronový obal atomu

*Elektronový obal* atomu je tvořen záporně nabitými elektrony, které se pohybují v okolí kladně nabitého jádra atomu. Elektrony jsou k jádru vázány přitažlivou Coulombovskou silou

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}, \tag{11}$$

kde $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ F \cdot m^{-1}$ je permitivita vakua, $r$ je vzdálenost mezi částicemi, $Q_1$ a $Q_2$ jsou elektrické náboje.

## 2.1 Kvantové stavy

Atom se může nacházet jen v určitých *kvantových stavech*, které jsou charakterizovány určitými hodnotami energie $E_1$, $E_2$, $E_3$ atd.

Kvantový stav s nejnižší možnou energií (můžeme ji označit $E_1$) se nazývá *základní kvantový stav*. Kvantové stavy s vyšší energií se označují jako *excitované kvantové stavy*.

Excitované kvantové stavy nejsou příliš stabilní, proto po určité době dochází k *deexcitaci* atomu, to znamená, že atom přejde zpět do svého základního kvantového stavu s nižší energií.

Při přechodu atomu ze stavu o energii $E_n$ do stavu s nižší energií $E_m$ $(E_n > E_m)$ dojde k vyzáření fotonu o energii $hf_{nm}$. Platí rovnice

$$hf_{nm} = E_n - E_m \tag{12}$$

kde $h$ je Planckova konstanta a $f_{nm}$ je frekvence elektromagnetického záření.

Atom také může také foton absorbovat, ale pouze v případě, že energie fotonu $hf$ je rovna rozdílu energií atomu v počátečním a koncovém stavu.

Každé hodnotě frekvence $f_{nm}$ elektromagnetického záření odpovídá hodnota vlnové délky $\lambda_{nm}$, platí

$$\lambda_{nm} = \frac{c}{f_{nm}}, \tag{13}$$

kde $c$ je rychlost světla ve vakuu.

## 2.2 Bohrův model atomu vodíku

V roce 1913 přišel Niels Bohr s návrhem modelu atomu vodíku. Jeho základní předpoklady mohou být formulovány takto:

1. Elektron obíhá kolem jádra atomu jen po určitých kvantových drahách. Pokud se omezíme na kruhové dráhy, pak dostředivá síla $F_d$ má stejnou velikost jako Coulombovská síla $F_e$, tedy

$$F_d = F_e. \tag{14}$$

2. Elektron, který obíhá po uvedených kvantových drahách, nevyzařuje do okolí elektromagnetické záření.
3. Pro velikost momentu hybnosti elektronu $L$ platí vztah

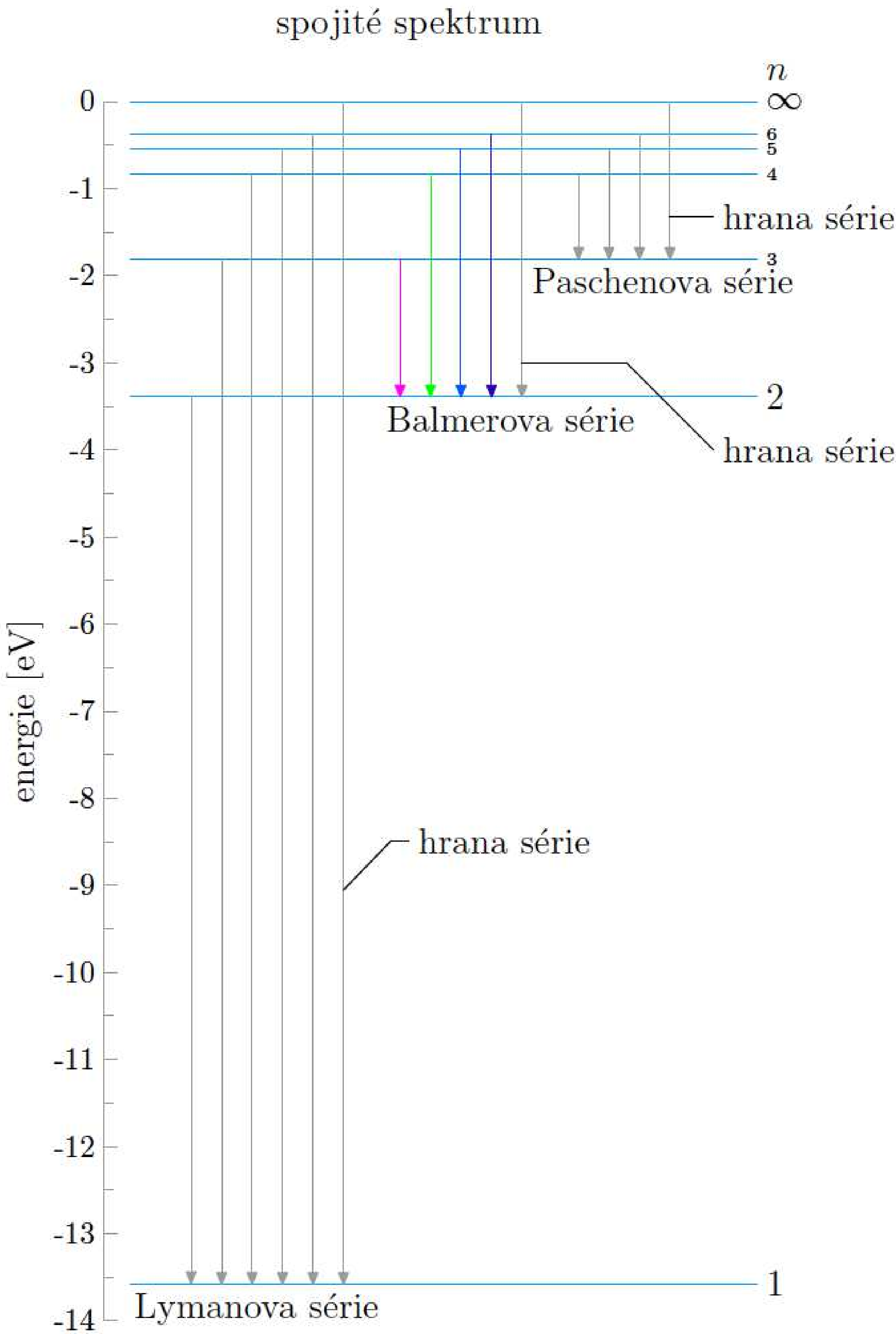
$$L = \frac{nh}{2\pi}, \tag{15}$$

kde $n$ je hlavní kvantové číslo a $h$ je Planckova konstanta.

*Energie kvantových stavů atomu vodíku* lze vyjádřit vztahem

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}, \tag{16}$$

kde $E_1 = -13{,}6$ eV je energie atomu vodíku v *základním stavu*. Ze vztahu je vidět, že hladiny atomu vodíku jsou záporné. S rostoucím *n* se hladiny postupně zhušťují.




*Obrázek 1: Energiové hladiny atomu vodíku*

(Upraveno podle [2])

**Úloha 2.1**

Odvoďte obecné vztahy pro poloměr trajektorie $r$ a velikost rychlosti $v$ elektronu, který se nachází na $n$-té kvantové dráze v Bohrově modelu atomu vodíku. Dále určete, jaká je velikost poloměru a jaká je velikost rychlosti elektronu na druhé kvantové dráze. [4]

*Řešení:*

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J} \cdot s, m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}, e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C},$

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1}, r = ?, v = ?$

---

V Bohrově modelu atomu se předpokládá, že elektron se pohybuje po kruhových drahách vzhledem k jádru. Působí na něho tedy síla dostředivá $F_d$, která je kompenzována Coulombovskou přitažlivou silou $F_e$. Platí:

$$F_d = F_e$$

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (a)$$

Kde $m_e$ je hmotnost elektronu, $e$ je náboj elektronu a $\varepsilon_0$ je permitivita vakua.

Podle Bohrova postulátu platí

$$L = \frac{nh}{2\pi},$$

kde $L$ je moment hybnosti elektronu, $n$ je hlavní kvantové číslo a $h$ je Planckova konstanta.

Odtud pro rychlost $v$ platí:

$$v = \frac{nh}{2\pi r m_e} \qquad (b)$$

Rovnici $(b)$ dosadíme do rovnice $(a)$ a dostáváme

$$\frac{m_e}{r} \cdot \left(\frac{nh}{2\pi r m_e}\right)^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

a odtud si vztah upravíme a vyjádříme poloměr $r$ a získáme obecný vztah pro poloměr $n$-té kvantové dráhy elektronu:

$$r = \frac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi e^2 m_e} \qquad (c)$$

Pro $n = 2$ vychází:

$$r = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2^2 \cdot (6{,}63 \cdot 10^{-34})^2}{3{,}14 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} \doteq 2{,}13 \cdot 10^{-10}$$

$$r = 2{,}13 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

Obecný vztah pro rychlost elektronu na *n*-té kvantové dráze určíme tak, že dosadíme vztah $(c)$ do rovnice $(b)$, platí:

$$v = \frac{nh}{2\pi m_e} \cdot \frac{1}{r} = \frac{nh}{2\pi m_e} \cdot \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi e^2 m_e}} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh}$$

Pro $n = 2$ vychází:

$$v = \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}} \doteq 1{,}09 \cdot 10^6$$

$$v = 1{,}09 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Velikost poloměru trajektorie elektronu, který se nachází na druhé kvantové dráze, je asi $2{,}13 \cdot 10^{-10}$ m. Velikost rychlosti elektronu na této dráze je zhruba $1{,}09$ m $\cdot$ s$^{-1}$.

**Úloha 2.2**

Spočítejte poměr period obíhání elektronu kolem jádra atomu vodíku na druhé a první kvantové dráze.

*Řešení:*

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F $\cdot$ m$^{-1}$, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C,

$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $\frac{T_2}{T_1} = ?$

---

Z předchozího příkladu jsme odvodili obecné vztahy pro poloměr elektronu a rychlost elektronu na *n*-té kvantové dráze, tedy vztahy:

$$v = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh} \qquad (a)$$

$$r = \frac{\varepsilon_0 h^2 n^2}{\pi m_e e^2} \qquad (b)$$

Elektron kolem jádra obíhá, koná tedy otáčivý pohyb s úhlovou rychlostí $\omega$. Platí

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r,$$

odtud pro periodu $T$ získáváme

$$T = 2\pi \frac{r}{v}$$

a zde dosadíme vztahy $(a)$ a $(b)$. Platí:

$$T = 2\pi \frac{\frac{\varepsilon_0 h^2 n^2}{\pi m_e e^2}}{\frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh}} = 4 \frac{\varepsilon_0^2 h^3 n^3}{m_e e^4}$$

A pro poměr period konečně platí:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{4 \frac{\varepsilon_0^2 h^3 n_2^3}{m_e e^4}}{4 \frac{\varepsilon_0^2 h^3 n_1^3}{m_e e^4}} = \frac{n_2^3}{n_1^3} = \frac{2^3}{1^3} = 8$$

V atomu vodíku je perioda druhé kvantové dráhy 8krát větší než perioda první kvantové dráhy.

**Úloha 2.3**

Určete energii a vlnovou délku fotonu, který je emitován při přechodu ve vodíkovém atomu z kvantového stavu 5 do kvantového stavu 2. [3]

*Řešení:*

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}, c = 3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, \Delta E = ?, \lambda = ?$

Označme si $E_5$ jako energii, kterou má elektron v 5. kvantovém stavu, a $E_2$ jako energii, kterou má elektron v 2. kvantovém stavu. Hodnota rozdílu $\Delta E$ těchto energií určuje energii emitovaného fotonu. Platí:

$$\Delta E = E_5 - E_2$$

Číselně vychází:

$$\Delta E = -(13{,}6)\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{2^2}\right) \doteq 2{,}86$$

$$\Delta E = 2{,}86\ \mathrm{eV}$$

Odpovídající vlnovou délku $\lambda$ získáme z rovnice pro energii fotonu:

$$\Delta E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

Odtud si vyjádříme vlnovou délku $\lambda$ emitovaného fotonu, tedy

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E}$$

a po dosazení hodnot dostaneme:

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2{,}86 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \doteq 435 \cdot 10^{-9}$$

$$\lambda = 435 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m} = 435\ \mathrm{nm}$$

Emitovaný foton má energii $2{,}86\ \mathrm{eV}$, čemuž odpovídá vlnová délka $435\ \mathrm{nm}$, což je modrá barva.

**Úloha 2.4**

Jaký je poměr vlnové délky hrany Balmerovy série a vlnové délky hrany Lymanovy série? [2]

*Řešení:*

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$, $c = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\dfrac{\lambda_B}{\lambda_L} = ?$

Hraně Balmerovy série odpovídá přechod z hladiny $n = \infty$ na hladinu $m = 2$.

Kde $m, n$ jsou hlavní kvantová čísla. Rozdíl energií, který je způsoben tímto přechodem, je roven:

$$\Delta E_B = E_\infty - E_2 = (-13{,}6)\left(\frac{1}{\infty^2} - \frac{1}{2^2}\right) = (-13{,}6)\left(0 - \frac{1}{4}\right) = 3{,}4$$

$$\Delta E_B = 3{,}4 \text{ eV}$$

Pro hranu Lymanovy série je charakteristický přechod z hladiny $n = \infty$ na hladinu $m = 1$. Analogicky jako v předchozím případu platí:

$$\Delta E_L = E_\infty - E_1 = (-13{,}6)\left(\frac{1}{\infty^2} - \frac{1}{1^2}\right) = (-13{,}6)(0 - 1) = 13{,}6$$

$$\Delta E_L = 13{,}6 \text{ eV}$$

Pro poměr vlnových délek, které odpovídají hranám sérií v atomu vodíku, platí:

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_L} = \frac{\frac{hc}{\Delta E_B}}{\frac{hc}{\Delta E_L}} = \frac{\Delta E_L}{\Delta E_B} = \frac{13{,}6}{3{,}4} = 4$$

Vlnové délky hrany Balmerovy série je 4krát větší než vlnová délka hrany Lymanovy série.

### Úloha 2.5

Jakou energii musíme dodat atomárnímu vodíku o hmotnosti $2{,}5\text{ g}$, aby přešel ze základního stavu do třetího excitovaného stavu? Ve výpočtu použijte pro Avogadrovu konstantu hodnotu $6 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$ a pro atomovou relativní hmotnost vodíku hodnotu 1. [1]

*Řešení:*

$m = 2{,}5 \text{ g} = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}, A = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}, A_r(H) = 1,$

$M_m = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}, E = ?$

---

Pro energii, kterou musíme dodat atomárnímu vodíku o hmotnosti $m$ ze základního do třetího excitovaného stavu, platí

$$E = N\Delta E = N(E_4 - E_1), \qquad (a)$$

kde $N$ je počet atomů vodíku odpovídající hmotnosti $m$, $E_4$ je energie atomu vodíku ve třetím excitovaném stavu a $E_1$ je energie atomu vodíku v základním stavu.

Počet $N$ atomů získáme ze dvou vztahů z molekulové fyziky

$$n = \frac{N}{A} \text{ a } M_m = \frac{m}{n},$$

kde $n$ je látkové množství vodíku o hmotnosti $m$, $A$ je Avogadrova konstanta a $M_m$ je molární hmotnost. Ze vztahů lze dostat:

$$N = nA = \frac{m}{M_m} A \qquad (b)$$

Dosazením rovnice (b) do rovnice (a) získáme vztah:

$$E = \frac{m}{M_m} A(E_4 - E_1) = \frac{m}{M_m} A(-13{,}6)\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{1^2}\right)$$

Číselně vychází:

$$E = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-3}} 6 \cdot 10^{23}(-13{,}6)\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{1^2}\right) = 191{,}25 \cdot 10^{23}$$

$$E = 191{,}25 \cdot 10^{23} \text{ eV} = 191{,}25 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3060 \text{ kJ}$$

K tomu, aby 2,5 g atomárního vodíku přešlo do třetího excitovaného stavu, je nutno dodat energii 3060 kJ.

## Úloha 2.6

Určete hlavní kvantová čísla $n, m$ pro takový přechod atomu vodíku, při kterém dochází k emitaci elektromagnetického záření s vlnovou délkou, která se nachází ve viditelné oblasti spektra, a při kterém je jedno hlavní kvantové číslo dvojnásobkem druhého. Určete vlnovou délku, která odpovídá tomuto přechodu.

*Řešení:*

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}, c = 3 \cdot 10^{8}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}, n = ?, m = ?, \lambda = ?$

Pro energii přechodu atomu z $n$-té hladiny na $m$-tou platí vztah

$$\Delta E = E_n - E_m.$$

Z obrázku 1 vidíme, že pro všechny přechody hladin emitovaného záření se vlnové délky, které spadají do viditelné oblasti spektra, nacházejí v Balmerově sérii, které odpovídá hlavní kvantové číslo 2.

Při emitaci světla atom musí přejít z hladiny $n$ na hladinu $m$, kde $n$ je větší než $m$ ($n > m$). Je zřejmé, že $m = 2$.

Ze zadání víme, že hlavní kvantové číslo $n$ je dvojnásobkem druhého. Platí:

$$n = 2m = 2 \cdot 2 = 4.$$

Pro určení vlnové délky emitovaného světla si pomůžeme vztahem:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hc}{E_4 - E_2}$$

Číselně vychází:

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{(-13{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19})\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{2^2}\right)} \doteq 488$$

$$\lambda = 488 \text{ nm}$$

V tomto případě vychází hlavní kvantová čísla $n = 4$ a $m = 2$. Světlo, které je při tomto přechodu emitováno, má vlnovou délku 488 nm, což je zelená barva.

### Úloha 2.7

Jakou vlnovou délku musí mít foton elektromagnetického záření, aby došlo k ionizaci atomu vodíku, přičemž rychlost vyraženého elektronu je $1{,}98 \cdot 10^{6}$ m · s$^{-1}$. [10]

*Řešení:*

$v = 1{,}98 \cdot 10^{6}$ m · s$^{-1}$, $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · $s$, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg,

$c = 3 \cdot 10^{8}$ m · s$^{-1}$, $\lambda =$?

Ionizační energie $E_i$ je energie, která je potřebná k odtržení elektronu z obalu atomu. Protože se jedná o atom vodíku, platí:

$$E_i = \left|\frac{E_1}{n^2}\right| = \left|\frac{-13{,}6}{1^2}\right| = 13{,}6$$

$$E_i = 13{,}6\ \text{eV}$$

Elektron, který je vyražen z obalu, má kinetickou energii $E_k$. Ze zákona zachování energie plyne

$$E_f = E_i + E_k,$$

kde $E_f$ je energie fotonu.

Předcházející rovnici si můžeme upravit do tvaru:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_i + \frac{1}{2} m_e v^2$$

Kde $h$ je Planckova konstanta, $c$ je rychlost světla, $m_e$ je hmotnost elektronu.

Odtud pro vlnovou délku $\lambda$ platí:

$$\lambda = \frac{2hc}{2E_i + m_e v^2}$$

Po dosazení hodnot vychází:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 13{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} + 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}98 \cdot 10^6)^2} \doteq 0{,}50 \cdot 10^{-7}$$

$$\lambda = 0{,}50 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 500\ \text{nm}$$

Foton elektromagnetického záření musí mít vlnovou délku 500 nm.

# 3 Jaderná fyzika

*Jaderná fyzika* je část fyziky, která se zabývá studiem struktury atomového jádra a procesy při jaderných reakcích.

## 3.1 Radioaktivita

*Radioaktivita* je schopnost některých atomových jader vysílat záření. Podle typu záření rozlišujeme záření alfa, beta a gama.

*Záření alfa* je tvořeno jádry helia ${}_{2}^{4}He$, které jsou složeny ze dvou protonů a dvou neutronů. *Záření beta* je tvořeno elektrony $e$. *Záření gama* tvoří elektromagnetické záření s krátkou vlnovou délkou ($\lambda \leq 10^{-10}$ m).

Při jaderných přeměnách dochází k rozpadu jader. Závislost mezi počtem radioaktivních (nepřeměněných) jader $N$ a časem $t$ vyjadřuje *zákon radioaktivní přeměny*

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{17}$$

kde $N_0$ je počet radioaktivních jader v čase $t = 0$, $N$ je počet radioaktivních jader v čase $t$ a $\lambda$ je *přeměnová konstanta*.

*Poločas rozpadu* $T$ je veličina definovaná jako doba, po které počet radioaktivních jader $N$ klesne na polovinu své původní hodnoty. Mezi poločasem rozpadu $T$ a přeměnovou konstantou $\lambda$ platí vztah:

$$T = \frac{ln2}{\lambda} \tag{18}$$

Často se využívá veličiny označované jako aktivita zářiče $R$, která udává počet rozpadů $\Delta N$ za časový interval $\Delta t$:

$$R = \frac{\Delta N}{\Delta t} \tag{19}$$

Aktivita zářiče $R$ se časem zmenšuje a platí vztah

$$R = R_0 e^{-\lambda t}, \tag{20}$$

kde $R_0$ je aktivita zářiče v čase $t = 0$, $R$ je aktivita zářiče v čase $t$ a $\lambda$ je přeměnová konstanta.

Aktivita zářiče je přímo úměrná počtu nepřeměněných jader $N$, přičemž platí:

$$R = \lambda N \tag{21}$$

## 3.2 Jaderné reakce

Jaderné přeměny, ke kterým dochází v důsledku vzájemných srážek jader atomu s jinými jádry nebo celými atomy, nazýváme *jaderné reakce*. Tyto reakce mohou být zapsány jako rovnice, kde na levé straně jsou jádra a částice, které do reakce vstupují, a na pravé straně se nachází jádra a částice, které z reakce vystupují. Lze tedy napsat:

$$A + c = B + d \tag{22}$$

Kde $A$ je ostřelované jádro, $c$ je částice dopadající toto jádro, $B$ je nově vzniklé jádro a $d$ je nově vzniklá částice.

## 3.3 Jaderná energetika

Nukleony (protony a neutrony) jsou v jádře vázány *jadernou silou*. Jde o přitažlivou sílu velmi krátkého dosahu, díky které drží jádro pohromadě. K tomu, aby došlo k rozbití jádra na jednotlivé nukleony, je zapotřebí energie, která se označuje *vazebná energie* $E_j$. Vazebná energie $E_j$ dané soustavy je rovna práci, kterou je nutné vykonat k rozložení soustavy na její jednotlivé části.

Soustava volných protonů a volných neutronů má větší energii než jádro atomu, které se z těchto částic skládá. V souvislosti s tím se definuje veličina označovaná jako *hmotnostní úbytek* $\Delta m$. Nechť $Z$ označuje počet protonů a $N$ počet neutronů v jádře atomu, pak platí

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_j, \tag{23}$$

kde $m_p$ je klidová hmotnost protonu, $m_n$ je klidová hmotnost neutronu a $m_j$ je klidová hmotnost jádra.

Při popisu jaderných reakcí je nepostradatelný Einsteinův vztah mezi hmotností a energií

$$E = mc^2, \tag{24}$$

kde $m$ je hmotnost částice nebo soustavy částic a $c$ je rychlost světla ve vakuu.

## 3.4 Fyzika částic

Díky srážkám mezi protony a elektrony, které jsou urychlovány na vysoké energie v urychlovačích, vzniká velké množství nových částic.

*Pauliho vylučovací princip* říká, že dva elektrony v atomu se nemohou nacházet současně ve stejném kvantovém stavu.

*Spin* $\vec{S}$ je vlastní moment hybnosti částice. Jeho velikost je rovna:

$$|\vec{S}| = \frac{h}{2\pi}\sqrt{S(S+1)} \tag{25}$$

Kde $h$ je Planckova konstanta a $S$ je spinové kvantové číslo, které nabývá hodnot $S = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \frac{h}{2\pi}$.

*Fermiony* jsou částice s poločíselným spinem a platí pro ně Pauliho vylučovací princip. *Bosony* jsou částice s celočíselným spinem a Pauliho vylučovací princip pro ně neplatí.

*Hadrony* jsou částice, mezi kterými působí *silná interakce*, která je odpovědná za jaderné síly, které drží jádro pohromadě. *Leptony* jsou částice, mezi kterými působí *slabá interakce*, která způsobuje radioaktivní beta rozpad.

Ke každé částici existuje odpovídající *antičástice*. Tato antičástice má stejnou klidovou hmotnost a spin jako daná částice, liší se mimo jiné např. tím, že má opačný elektrický náboj.

Setká-li se částice se svou antičásticí, dojde k *anihilaci*, kdy se jejich klidová hmotnost přeměňuje na energii dvou fotonů gama záření. Pro elektron-pozitronovou anihilaci platí:

$$e^- + e^+ = \gamma + \gamma \tag{26}$$

Energie jednoho gama fotonu je rovna $E = 511$ keV.

**Úloha 3.1**

Určete poločas rozpadu $T$ a přeměnovou konstantu $\lambda$ pro radionuklid ${}^{221}_{87}Fr$, jestliže víte, že za 671 s se jeho množství zmenší na $\frac{1}{5}$ původní hodnoty. [1]

*Řešení:*

$t = 671\ \mathrm{s}, N = \dfrac{1}{5} N_0, T = ?, \lambda = ?$

---

Jestliže je počet nepřeměněných jader v počátečním okamžiku $N_0$, pak v čase $t$ pro počet nepřeměněných jader $N$ platí:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

Tuto rovnici upravíme a vyjádříme přeměnovou konstantu $\lambda$.

$$\lambda = -\frac{1}{t} ln \frac{N}{N_0}$$

Číselně:

$$\lambda = -\frac{1}{671} ln \frac{1}{5} \doteq 0{,}0024$$

$$\lambda = 0{,}0024\ \mathrm{s}^{-1} = 2{,}4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}$$

Mezi přeměnovou konstantou $\lambda$ a poločasem rozpadu $T$ platí vztah:

$$\lambda = \frac{ln2}{T}$$

Odtud si vyjádříme poločas rozpadu $T$ a dosadíme hodnoty. Platí:

$$T = \frac{ln2}{\lambda} = \frac{ln2}{2{,}4 \cdot 10^{-3}} \doteq 289$$

$$T = 289\ \mathrm{s} = 4{,}82\ \mathrm{min}$$

Radionuklid ${}^{221}_{87}Fr$ má poločas rozpadu 4,82 min a jeho přeměnová konstanta vychází $2{,}4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}$.

**Úloha 3.2**

Slavný francouzský šachista François André Danican Philidor je autorem učebnice "*Analýza šachové hry*". Určete přibližně, kdy Philidor tuto učebnici musel napsat, jestliže víte, že obsah radionuklidu ${}^{14}_{6}C$ v dřevěných figurkách, které šachista při práci používal, je asi $96{,}8\,\%$. Poločas přeměny nuklidu ${}^{14}_{6}C$ je $5570\,\mathrm{r}$. Předpokládejte, že dřevěné figurky byly vyrobeny zhruba v době, kdy Philidor napsal svoji šachovou učebnici.

*Řešení:*

$N = 0{,}968N_0, T = 5570$ r$, t =$?

---

Pro určení času $t$, který určuje stáří figurek, využijeme zákona radioaktivní přeměny:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad (a)$$

Kde $N_0$ je počet nepřeměných jader v počátečním okamžiku, $N$ je počet nepřeměněných jader v čase $t$ a $\lambda = \frac{ln2}{T}$ je přeměnová konstanta. Rovnici $(a)$ si upravíme do tvaru

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

a určíme přirozený logaritmus jeho pravé a levé strany:

$$ln\frac{N}{N_0} = -\lambda t$$

Pro čas $t$ platí:

$$t = -\frac{1}{\lambda}\cdot ln\frac{N}{N_0} = -\frac{T}{ln2}\cdot ln\frac{N}{N_0}$$

Číselně vychází:

$$t = -\frac{5570}{ln2}\cdot ln0{,}968 \doteq 261$$

$$t = 261\ \mathrm{r}$$

Pro dobu, kdy byla učebnice napsána, zhruba platí $2013 - 261 = 1752 \doteq 1750$ r.

Stáří dřevěných figurek je asi $261$ r, to znamená, že francouzský šachista napsal svoji práci přibližně kolem roku $1750$.

**Úloha 3.3**

Izotop radia ${}^{226}_{88}Ra$ vyzařuje alfa částice. Určete počáteční aktivitu vzorku tohoto izotopu radia, jestliže víte, že jeho hmotnost je $11$ g. Poločas rozpadu radia ${}^{226}_{88}Ra$ je asi $1600$ let. [1]

*Řešení:*

$m = 11$ g $= 11 \cdot 10^{-3}$ kg, $T = 1600$ r $\doteq 5046{,}4 \cdot 10^{7}$ s, $A_r = 226$,

$m_u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$kg, $A(0) =?$

---

Počáteční počet částic $N(0)$ vzorku radia ${}^{226}_{88}Ra$ o hmotnosti $11$ g lze vyjádřit pomocí vztahu:

$$N(0) = \frac{m}{m_a} = \frac{m}{A_r m_u} \qquad (a)$$

Kde $m_a$ je hmotnost jednoho atomu radia ${}^{226}_{88}Ra$, $A_r$ je relativní atomová hmotnost radia ${}^{226}_{88}Ra$ a $m_u$ je atomová hmotnostní konstanta.

Pro přeměnovou konstantu $\lambda$ platí vztah:

$$\lambda = \frac{ln2}{T} \qquad (b)$$

Aktivita vzorku radionuklidu $A(t)$ v čase $t$ je přímo úměrná celkovému počtu nepřeměněných jader $N(t)$. Platí rovnice:

$$A(t) = \lambda N(t) \qquad (c)$$

Pro hledanou počáteční aktivitu vzorku radia ${}^{226}_{88}Ra$ (tj. $t = 0$) lze rovnici $(c)$ přepsat do tvaru:

$$A(0) = \lambda N(0)$$

Do této rovnice dosadíme vztahy $(a)$ a $(b)$ a dostaneme:

$$A(0) = \frac{ln2}{T} \cdot \frac{m}{A_r m_u}$$

Číselně:

$$A(0) = \frac{ln2}{5046{,}4 \cdot 10^7} \cdot \frac{11 \cdot 10^{-3}}{226 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}} \doteq 40{,}3 \cdot 10^{10}$$

$$A(0) = 40{,}3 \cdot 10^{10}\ \mathrm{Bq}$$

Počáteční aktivita vzorku radia ${}^{226}_{88}Ra$ o hmotnosti 11 g je $40{,}3 \cdot 10^{10}$ Bq.

**Úloha 3.4**

Určete složení jádra izotopu prvku, který vznikne z uranu ${}^{238}_{92}U$ po čtyřech rozpadech $\alpha$ a dvou rozpadech $\beta$. [Převzato z [4], str. 557]

*Řešení:*

Jestliže uran ${}^{238}_{92}U$ podléhá čtyřem rozpadům $\alpha$ a dvěma rozpadům $\beta$, pak schematicky můžeme tuto reakci napsat ve tvaru

$${}^{238}_{92}U \rightarrow 4{}^{4}_{2}He + 2{}^{0}_{-1}e + {}^{a}_{b}X.$$

Při reakci platí zákony zachování hmotnosti a elektrického náboje.

Pro neznámé $a, b$ musí být splněny tyto rovnice:

$$a + 0 + 16 = 238$$

$$b - 2 + 8 = 92$$

Odtud $a = 222$ a $b = 86$.

Daným rozpadem vzniká izotop ${}^{222}_{86}Rn$. V jádře tohoto izotopu je 86 protonů a 136 neutronů.

**Úloha 3.5**

Při ostřelování nuklidu dusíku ${}^{14}_{7}N$ protony vznikl nuklid kyslíku ${}^{15}_{8}O$, který vysílal záření $\beta^+$. Zapište proběhlé reakce a zjistěte, jaký nuklid v důsledku těchto reakcí vznikl. [Převzato z [1], str. 179]

*Řešení:*

Jadernou reakci, při které z dusíku ${}^{14}_{7}N$ ostřelovaného protony ${}^{1}_{1}H$ vzniká nuklid kyslíku ${}^{15}_{8}O$, můžeme schematicky zapsat ve tvaru:

$${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{15}_{8}O$$

Nuklid kyslíku ${}^{15}_{8}O$ vysílá záření $\beta^{+}$, které je tvořeno pozitrony ${}^{0}_{1}e$. Pro tuto reakci platí

$${}^{15}_{8}O \rightarrow {}^{0}_{1}e + {}^{a}_{b}X,$$

kde ${}^{a}_{b}X$ je hledaný nuklid. Odtud lze snadno určit neznámé $a, b$, platí $a = 15, b = 7$.

Vzniklý nuklid lze tedy zapsat jako ${}^{15}_{7}X$.

Vidíme, že vzniklý nuklid má protonové číslo 7, které je charakteristické pro dusík.

To znamená, že ostřelováním nuklidu dusíku ${}^{14}_{7}N$ protony, vzniká jiný nuklid dusíku ${}^{15}_{7}X = {}^{15}_{7}N$.

**Úloha 3.6**

Zjistěte, o kolik MeV je vazebná energie $\alpha$-částice větší než vazebná energie deuteronu. [4]

*Řešení:*

$m_n = 1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_D = 3{,}3435 \cdot 10^{-27}$ kg, $\Delta E =$?

---

Částice $\alpha$ je jádro atomu helia ${}^{4}_{2}He$. Tato částice je složena ze dvou protonů a dvou neutronů. Pokud si postupně označíme celkovou hmotnost $\alpha$-částice $m_\alpha$, hmotnost protonu $m_p$ a hmotnost neutronu $m_n$, pak pro úbytek hmotnosti při vytvoření částice $\alpha$ platí:

$$\Delta m_\alpha = 2(m_p + m_n) - m_\alpha$$

$$\Delta m_\alpha = 2(1{,}6749 \cdot 10^{-27} + 1{,}6726 \cdot 10^{-27}) - 6{,}6446 \cdot 10^{-27}$$

$$\Delta m_\alpha = 0{,}0504 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

Deuteron je jádro izotopu vodíku ${}_{1}^{2}D$. Je složen z jednoho protonu a jednoho neutronu. Pokud si celkovou hmotnost deuteronu označíme $m_D$, pak pro hmotnostní úbytek vytvořeného deuteronu platí:

$$\Delta m_D = m_p + m_n - m_D$$

$$\Delta m_D = 1{,}6749 \cdot 10^{-27} + 1{,}6726 \cdot 10^{-27} - 3{,}3435 \cdot 10^{-27}$$

$$\Delta m_D = 0{,}0040 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

Obě dvě částice jsou jádra atomu a vazebná energie jádra je energie, kterou musíme jádru dodat, abychom ji rozložili na protony a neutrony. Díky tomu, že známe úbytek hmotnosti každé částice, jsme schopni dopočítat vazebnou energii $E$ z rovnice

$$E = \Delta mc^2.$$

Číselně vychází:

$$E_\alpha = 0{,}0504 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 453{,}6 \cdot 10^{-14}$$

$$E_\alpha = 453{,}6 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J} = 28{,}35\ \mathrm{MeV}$$

$$E_D = 0{,}0040 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 36 \cdot 10^{-14}$$

$$E_D = 36 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J} = 2{,}25\ \mathrm{MeV}$$

Pro rozdíl vazebných energií $\Delta E$ platí:

$$\Delta E = E_\alpha - E_D$$

$$\Delta E = 28{,}35 - 2{,}25 = 26{,}10$$

$$\Delta E = 26{,}10\ \mathrm{MeV}$$

Vazebná energie deuteronu je $E_D = 2{,}25$ MeV. Pro částici $\alpha$ vazebná energie vychází $E_\alpha = 28{,}35$ MeV. Vazebná energie částice $\alpha$ je tedy o $26{,}10$ MeV větší než vazebná energie deuteronu.

**Úloha 3.7**

Jaká vlnová délka elektromagnetického záření by mohla vyvolat vznik elektron-pozitronového páru? [Převzato z [4], str. 566]

*Řešení:*

$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $m_p = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot\, s, \lambda = ?$

---

Vznik elektron-pozitronového páru může být vyvolán fotony o dostatečně velké energii. Klidová hmotnost $\Delta m$ páru elektron-pozitron je rovna součtu klidových hmotností elektronu $m_e$ a pozitronu $m_p$. Pro energii $\Delta E$, která odpovídá přírůstku hmotnosti $\Delta m$ při vzniku takového páru, platí:

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

Protože vznik elektron-pozitronového páru způsobují fotony elektromagnetického záření s energií $E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}$, platí:

$$\Delta E = E_f$$

$$\Delta mc^2 = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{h}{\Delta mc} = \frac{h}{(m_e + m_p)c}$$

Číselně:

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{(9{,}1 \cdot 10^{-31} + 9{,}1 \cdot 10^{-31})3 \cdot 10^{8}} \doteq 1{,}2 \cdot 10^{-12}$$

$$\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

Hledaná vlnová délka elektromagnetického záření, která je schopna vyvolat vznik páru elektron-pozitron, je asi $1{,}2 \cdot 10^{-12}$ m, což je $\gamma$ záření.

# Závěr

Tato bakalářská práce si kladla za cíl vytvořit sbírku řešených příkladů z atomové a jaderné fyziky na úrovni středních škol. Bakalářská práce byla rozdělena do tří kapitol, z nichž každá obsahovala teoretický úvod a řešené úlohy. Pro lepší pochopení a osvojení vztahů nutných pro řešení daných fyzikálních úloh byl do sbírky uveden teoretický úvod. Tento úvod ke kapitolám byl vytvořen ze zdrojů [1], [2] a [3], které jsou uvedeny v seznamu literatury.

Samotná sbírka řešených úloh obsahuje příklady, které nejsou obtížné a které se často opakují i v jiných sbírkách a publikacích, např. úlohy 1.6; 1.7; 2.3; 3.1 a 3.5. Do sbírky jsou ovšem zahrnuty i složitější příklady, které nejsou pro střední školu tak časté. Jsou to úlohy např. 1.3; 2.1; 2.5 a 3.7. Vzhledem k tomu, že ve všech příkladech si čtenář vystačí se středoškolskou matematikou, mohl by být schopen vyřešit a osvojit si i tyto úlohy. Nejvýznamnějším přínosem této práce mohou být příklady 1.1; 1.2; 1.5; 2.6; 3.2, které jsou charakteristické tím, že jsou neobyčejné nebo že mají originální zadání. Tyto příklady nebyly dosud publikovány.

# Literatura


[1] Bartuška, K.: *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy IV*. Praha: Prometheus 2008.

[2] Halliday D.; Resnick R.; Walker J.: *Fyzika. Vysokoškolská učebnice fyziky. Část 5: Moderní fyzika*. Brno: VUTIUM, Praha: Prometheus 2000.

[3] Machala, L.: *Cvičení z atomové a jaderné fyziky*. Olomouc: Univerzita Palackého 2005.

[4] Hajko V. a kolektiv: *Fyzika v príkladoch*. Bratislava: ALFA 1988.

[5] Lepil O.; Široká M.: *Sbírka testových úloh k maturitě z fyziky*. Praha: Prometheus 2001.

[6] Žák V.: *Fyzikální úlohy pro střední školy*. Praha: Prometheus 2011.

[7] Nahodil, J.: *Sbírka úloh z fyziky kolem nás pro střední školy*. Praha: Prometheus 2011.

[8] Volkenštejn V. S.: *Sbornik zadač po obščemu kursu fiziki*. Moskva: Gosudarstvjennoje izdatělstvo fiziko-matematičeskoj litěratury 1962.

[9] Studijní texty ke studijním tématům 54. ročníku FO. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/atomy.pdf> [cit. 1. 5. 2013]

[10] Fyzikální webové stránky - webFyzika. Dostupné z: <http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/priklady/modernifyzika_resene_2.pdf> [cit. 3. 5. 2013]