UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Dolní a horní celá část reálného čísla v úlohách

Katedra algebry a geometrie

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.**

Vypracoval(a): **Alena Králová**

Studijní program: Matematika pro vzdělávání

Studijní obor Matematika pro vzdělávání/Chemie se zaměřením na vzdělávání

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2023

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Alena Králová

Název práce: Dolní a horní celá část reálného čísla v úlohách

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra algebry a geometrie

Vedoucí práce: RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.

Rok obhajoby práce: 2023

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá funkcemi dolní celá část a horní celá část reálného čísla z pohledu matematické analýzy. Cílem práce bylo studium a popis základních vlastností těchto speciálních funkcí. Hlavní část práce je věnována aplikacím studovaných funkcí při řešení konkrétních matematických úloh z oblasti elementární matematiky. Tato část je zpracována formou řešených úloh různého typu, které pomohou k lepšímu pochopení celé problematiky. V poslední kapitole práce jsou prezentovány neřešené příklady, které je možné využít k procvičování.

Klíčová slova: dolní celá část reálného čísla, horní celá část reálného čísla, celá část reálného čísla

Počet stran: 43

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Alena Králová

Title: Lower and upper integer part of a real number in problems

Type of thesis: Bachelor´s

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.

The year of presentation: 2023

Abstract: This bachelor´s thesis is dealing with functions of lower integer part of a real number and upper integer part of a real number from the view of mathematical analysis. The goal of this work was to study and describe basic properties of these special functions. The main part of this work is dedicated to applications of studied functions for solving specific mathematical problems in the field of elementary mathematics. This part is composed from solved problems of different sorts, which will help with better understanding of the whole issue. Non-solved problems, which can be used for practice, are presented in the last chapter.

Key words: lower integer part of a real number, upper integer part of a real number, integer part of a real number

Number of pages: 43

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Jaroslava Švrčka, CSc., a že jsem v seznamu literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 25.dubna 2023

....

Alena Králová

Poděkování

Velké poděkování patří vedoucímu mé bakalářské práce panu RNDr.Jaroslavu Švrčkovi, CSc., za spolupráci a cenné rady při psaní této práce. Především pak za veškerý čas, který mi věnoval, trpělivost a vstřícnost.

Chtěla bych také poděkovat všem svým blízkým za trvalou podporu během celé doby studia na Univerzitě.

Obsah

Seznam použitých symbolů

$\mathbb{Z}$ .... množina celých čísel
$\mathbb{R}$ .... množina reálných čísel
$\{a, b, c\}$ .... množina dána výčtem prvků obsahující prvky a, b, c
(a, b) .... otevřený interval, množina $x \in \mathbb{R}; a < x < b$
$\langle a, b\rangle$ .... uzavřený interval, množina $x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b$
$\langle a, b)$ .... zleva uzavřený interval, množina $x \in \mathbb{R}; a \leq x < b$
$(a, b\rangle$ .... zprava uzavřený interval, množina $x \in \mathbb{R}; a < x \leq b$
$A \cap B$ .... průnik množin A a B
$A \cup B$ .... sjednocení množin A a B
$x \in A$ .... x je prvkem množiny A
$x \notin A$ .... x není prvkem množiny A
$\lfloor x \rfloor$ .... dolní celá část reálného čísla x
$\lceil x \rceil$ .... horní celá část reálného čísla x

Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá studiem funkcí dolní celá část reálného čísla a horní celá část reálného čísla. Z pohledu matematické analýzy se jedná o speciální funkce. Tyto neelementární funkce nejsou součástí středoškolských osnov. Přesto se objevují úlohy, k jejichž řešení je potřebná znalost těchto funkcí, například v zadání matematických soutěží (Matematická olympiáda apod.).

Prostřednictvím předloženého textu se seznámíme se základními vlastnostmi obou funkcí a jejich aplikacemi v konkrétních úlohách elementární matematiky.

Práce je rozdělena do čtyř částí. V první kapitole jsou definovány funkce dolní celá část reálného čísla a horní celá část reálného čísla.

Ve druhé kapitole jsou prezentovány grafy funkcí $y = \lfloor x \rfloor$ a $y = \lceil x \rceil$ spolu s popisem základních vlastností těchto funkcí (definiční obor, obor hodnot, monotonie, atd.).

Třetí, nejrozsáhlejší, kapitola je věnována aplikacím funkce dolní celá část a horní celá část reálného čísla při řešení matematických úloh, především z oblasti školní matematiky. Pro přehlednost je tato kapitola rozčleněna na tři podkapitoly podle typu řešených příkladů. V první části jsou řešeny rovnice s dolní a horní celou částí. Jsou zde uvedeny dva způsoby řešení, které lze během úloh tohoto typu použít. Následující podkapitola je věnována soustavám těchto rovnic. Celou kapitolu uzavírá část graficky řešených úloh.

V poslední kapitole je uvedeno několik neřešených příkladů, které mohou být využity k procvičování. Příklady nevyžadující grafické řešení jsou doplněny výsledky.

Práce je vysázena autorkou v programu LaTeX, všechny grafy jsou zpracované v programu GeoGebra.

1 Základní vlastnosti

Funkce *dolní celá část reálného čísla* a *horní celá část reálného čísla* patří mezi speciální funkce. Z pohledu matematické analýzy a školské matematiky se jedná o nespojité funkce (viz definice níže), které nejsou na středních školách detailně probírány. Přesto se úlohy, k jejichž řešení je potřebná znalost těchto funkcí, pravidelně objevují v zadáních různých matematických soutěží (zejména Matematická olympiáda, dále MO).

Cílem této práce je studium funkcí dolní celá část reálného čísla a horní celá část reálného čísla a popis jejich základních vlastností. Stěžejní kapitola této práce je věnována aplikacím funkce dolní celá část reálného čísla a horní celá část reálného čísla při řešení matematických úloh.

Nejprve uvedeme definici a základní vlastnosti obou funkcí.

Pro funkci dolní celá část reálného čísla používáme značení $\lfloor x \rfloor$. Podobně je značena i funkce horní celá část reálného čísla $\lceil x \rceil$.

Definice 1.1

Funkce dolní celá část reálného čísla je zobrazení $\lfloor \cdot \rfloor \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, kde každé reálné číslo x splňuje nerovnosti

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \tag{1.1}$$

tedy $\lfloor x \rfloor$ je největší celé číslo y, které není větší než x.

Analogicky definujeme také funkci horní celá část reálného čísla.

Definice 1.2

Funkce horní celá část reálného čísla je zobrazení $\lceil \cdot \rceil \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, kde každé reálné číslo x splňuje nerovnosti

$$\lceil x \rceil \geq x > \lceil x \rceil - 1. \tag{1.2}$$

Zde se jedná o nejmenší celé číslo y, které není menší než reálné číslo x.

Věta 1.1

Pro všechna reálná čísla x, y platí

a) $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$, kde k je libovolné celé číslo.

b) $\lfloor x+y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$

c) $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$, kde k je libovolné celé kladné číslo.

Důkaz.

a) Z definice funkce dolní celá část reálného čísla plynou následující nerovnosti

$$\lfloor x \rfloor + k \leq x + k < \lfloor x \rfloor + k + 1, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že výraz $\lfloor x \rfloor + k$ je největší celé číslo, které není větší než $x+k$. Platí tedy

$$\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k,$$

kde k je libovolné celé číslo

b) Pro každé reálné číslo x, y z definice (1.1) plyne

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \tag{1.3}$$

$$\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1. \tag{1.4}$$

Sečtením nerovností (1.3) a (1.4) dostaneme

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

Tento výraz následně upravíme do tvaru postupné nerovnosti

$$x + y - 2 < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y. \tag{1.5}$$

Podle definice dolní celé části reálného čísla $x+y$ pak platí

$$\lfloor x+y \rfloor \leq x + y < \lfloor x+y \rfloor + 1,$$

Tento výraz lze rovněž upravit

$$x + y - 1 < \lfloor x+y \rfloor \leq x + y. \tag{1.6}$$

Z nerovností (1.5) a (1.6) pak přímo plyne

$$\lfloor x+y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor.$$

c) Z definice funkce dolní celá část reálného čísla lze odvodit vztah

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{k} \leq \frac{x}{k} < \frac{\lfloor x \rfloor}{k} + 1, \tag{1.7}$$

kde k je libovolné celé kladné číslo. Z nerovnosti (1.7) také plyne, že $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor$ je největší celé číslo, které není větší než $\left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$. Platí tedy rovnost

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor .$$

□

Funkce horní celá část reálného čísla má velmi podobné vlastnosti jako funkce dolní celá část reálného čísla.

Věta 1.2

Pro všechna reálná čísla x, y platí

a) $\lceil x + k \rceil = \lceil x \rceil + k$, kde k je libovolné celé číslo,

b) $\lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$,

c) $\left\lceil \frac{\lceil x \rceil}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{k} \right\rceil$, kde k je libovolné celé kladné číslo.

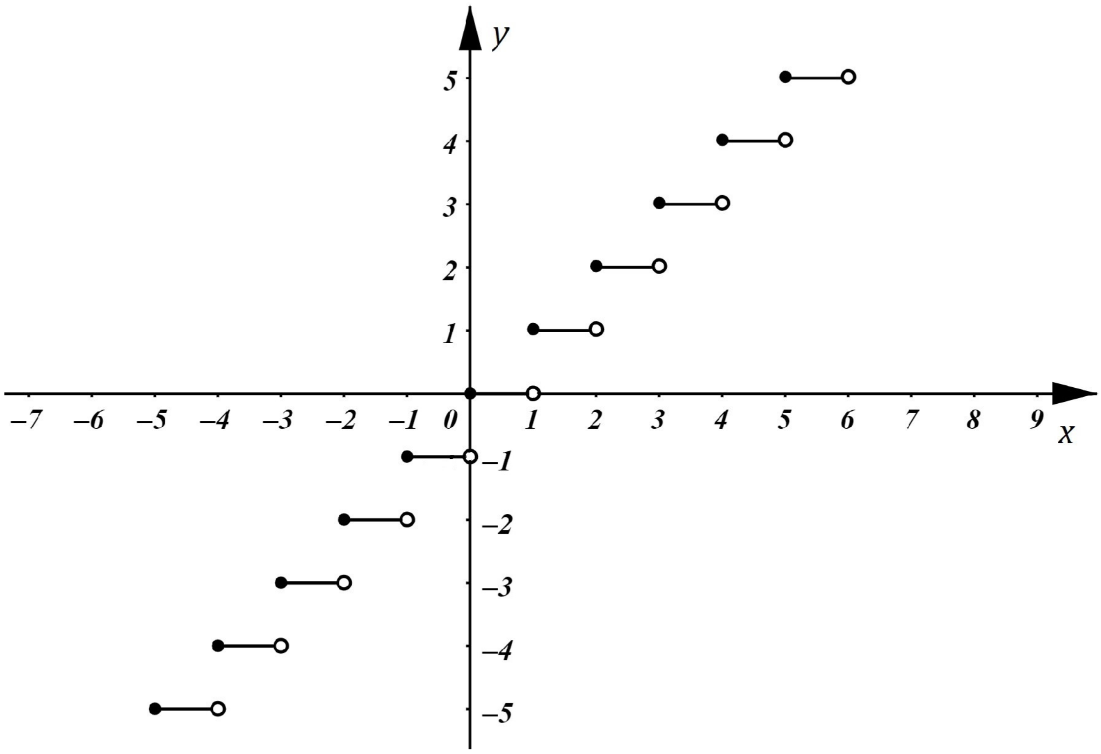
Odvození jednotlivých vlastností funkce horní celá část reálného čísla lze provést analogicky jako u funkce dolní celá část reálného čísla.

2 Grafy funkcí

Z pohledu matematické analýzy nepatří funkce dolní celá část reálného čísla a horní celá část reálného čísla mezi elementární funkce. Obě funkce mají velmi podobné vlastnosti i grafy.

2.1 Dolní celá část reálného čísla

Z definice (1.1) plyne, že definičním oborem funkce $y = \lfloor x \rfloor$ jsou všechna reálná čísla x. Oborem hodnot jsou všechna celá čísla y. Graf této nespojité funkce vidíme na obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Graf funkce $y = \lfloor x \rfloor$

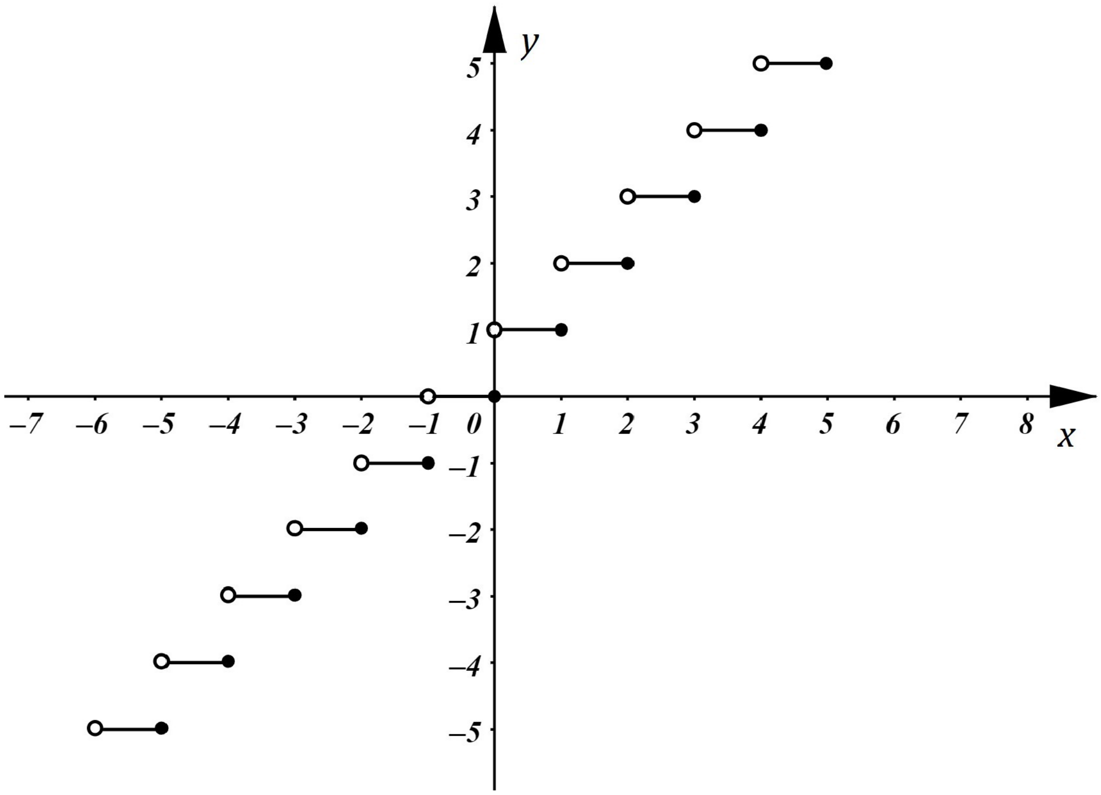
Funkce $y = \lfloor x \rfloor$ není sudá, lichá ani periodická. Nejedná se přitom o funkci prostou.

Z hlediska monotónnosti je funkce *neklesající* na celém definičním oboru, neboť pro všechna $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Jak bylo zmíněno, jedná se o nespojitou funkci, jejíž body nespojitosti jsou všechna $x \in \mathbb{Z}$. Ve všech ostatních bodech definičního oboru, tj. pro všechna x, která nejsou celá čísla, je funkce $y = \lfloor x \rfloor$ spojitá.

2.2 Horní celá část reálného čísla

Definičním oborem funkce $y = \lceil x \rceil$ jsou všechna reálná čísla x. Oborem hodnot jsou opět všechna celá čísla y. Graf této nespojité funkce vidíme na obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Graf funkce $y = \lceil x \rceil$

Funkce $y = \lceil x \rceil$ není sudá, lichá ani periodická. Nejedná se o funkci prostou, jelikož stejné hodnoty y nabývá více než jedno reálné číslo x.

Z hlediska monotónnosti se jedná o funkci *neklesající* na celém definičním oboru, neboť pro všechny $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Stejně jako funkce $y = \lfloor x \rfloor$ je i funkce $y = \lceil x \rceil$ nespojitá. Body nespojitosti jsou shodné jako u funkce dolní celá část reálného čísla. Funkce $y = \lceil x \rceil$ je tedy spojitá pro všechna čísla $x \in D(f)$, kde $x \notin \mathbb{Z}$.

Podrobné důkazy o nespojitosti a monotónnosti funkcí dolní celá část reálného čísla a horní celá část reálného čísla je možné najít v [1].

3 Řešené příklady

Existuje celá řada matematických úloh, které vyžadují znalost funkcí dolní celá část reálného čísla a horní celá část reálného čísla. Ve většině případů to jsou rovnice a jejich soustavy. Řešením takových úloh může být interval, množina nebo, v případě soustavy rovnic, uspořádaná n-tice vyhovující n neznámým v soustavě. Můžeme se také setkat s úlohami, které vyžadují grafické řešení.

Velká část níže prezentovaných úloh pochází ze starších ročníků MO. Příklady tohoto typu jsou zadávány soutěžícím z prvního až čtvrtého ročníku středních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

3.1 Rovnice s horní a dolní celou částí

Příklad 3.1.1

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\lfloor 2x+4 \rfloor = 9.$$

Řešení. Zavedeme substituci

$$2x+4=y.$$

Podle (1.1) platí

$$9 = \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1 = 10.$$

S ohledem na použitou substituci platí

$$9 \leq 2x+4 < 10.$$

Tento výraz rozdělíme na dvě nerovnice, z nichž každou vyřešíme odděleně.

a)

$$9 \leq 2x+4, \quad \text{tj. } x \geq \frac{5}{2}.$$

b)

$$10 > 2x + 4, \quad \text{tj. } x < 3.$$

Závěr. Řešení příkladu je *průnikem* řešení obou nerovnic.
Tedy

$$x \in \left\langle \frac{5}{2}; 3 \right).$$

Příklad 3.1.2

Určete všechna reálná čísla x, pro která platí

$$\lceil 5x + 3 \rceil = 8. \tag{3.1}$$

Řešení. Podle (1.2) platí nerovnosti

$$8 \geq 5x + 3 > 8 - 1.$$

Obě nerovnice vyřešíme opět odděleně

a)

$$8 \geq 5x + 3, \quad \text{tj. } x \leq 1.$$

b)

$$5x + 3 > 7, \quad \text{tedy } x > \frac{4}{5}.$$

Závěr. Řešením úlohy je průnikem řešení obou nerovnic, tedy

$$x \in \left(\frac{4}{5}; 1 \right\rangle.$$

Příklad 3.1.3

Určete všechna reálná čísla x, pro něž platí

$$3\lfloor x \rfloor + 2 = 5x. \tag{3.2}$$

Řešení. Pro řešení příkladu tohoto typu se nabízí dva způsoby řešení.

1. způsob: Ze zadaní je jasné, že $5x$ je celé číslo. Pro x lze uvažovat 5 různých hodnot

$$k, \quad k+\frac{1}{5}, \quad k+\frac{2}{5}, \quad k+\frac{3}{5}, \quad k+\frac{4}{5}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Postupným dosazením všech pěti možností ověříme, zda pro některou z nich celé číslo k existuje.

a)

$$x = k, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}, \quad \text{tj.} \lfloor x \rfloor = k.$$

V tomto případě

$$3k + 2 = 5k, \quad \text{tj. } k = 1.$$

Řešením je tedy

$$x = 1.$$

b)

$$x = k + \frac{1}{5}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}, \quad \text{tj.} \lfloor x \rfloor = k.$$

Pak platí

$$3k + 2 = 5k + 1, \quad \text{tj. } k = \frac{1}{2}.$$

V tomto případě celočíselné řešení rovnice neexistuje.

c)

$$x = k + \frac{2}{5}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}, \quad \text{tj.} \lfloor x \rfloor = k.$$

Pro tuto možnost dostáváme rovnici (3.2) ve tvaru

$$3k + 2 = 5k + 2, \quad \text{tj. } k = 0$$

$$\text{a} \quad x = \frac{2}{5}.$$

d)

$$x = k + \frac{3}{5}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}, \quad \text{tj.} \lfloor x \rfloor = k.$$

V tomto případě

$$3k + 2 = 5k + 3, \quad \text{tj. } k = -\frac{1}{2}.$$

V tomto případě neexistuje celočíselné řešení k uvažované rovnice.

e)
$$x = k + \frac{4}{5}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}, \quad \text{tj.} \lfloor x \rfloor = k.$$

Pro poslední možnou hodnotu neznámé x bude rovnice (3.2) ve tvaru

$$3k + 2 = 5k + 4, \quad \text{tj. } k = -1.$$

Celé číslo k existuje, a pro x tedy platí

$$x = -1 + \frac{4}{5} = -\frac{1}{5}.$$

Závěr. Existují tedy právě tři řešení dané úlohy, a to

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{2}{5}, \quad x_3 = -\frac{1}{5}.$$

2. způsob: Ze zadání (3.2) vyjádříme neznámou x

$$x = \frac{3\lfloor x \rfloor + 2}{5}. \tag{3.3}$$

Po dosazení x do (1.1) dostaneme nerovnosti

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{3\lfloor x \rfloor + 2}{5} < \lfloor x \rfloor + 1. \tag{3.4}$$

Výraz (3.4) rozdělíme na dvě různé nerovnice, z nichž každou řešíme zvlášť.

a)
$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{3\lfloor x \rfloor + 2}{5}, \quad \text{tj. } \lfloor x \rfloor \leq 1.$$

Dolní celá část reálného čísla x je tedy větší nebo rovna 1. Jelikož $\lfloor x \rfloor$ je celé číslo, pak $\lfloor x \rfloor = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

b)
$$\frac{3\lfloor x \rfloor + 2}{5} < \lfloor x \rfloor + 1, \quad \text{tj. } -\frac{3}{2} < \lfloor x \rfloor$$

Provedeme stejnou úvahu jako při řešení první nerovnice. Dolní celá část neznámé x bude nabývat hodnot, která jsou větší než $-\frac{3}{2}$ a zároveň jsou celá čísla. V tomto případě je $\lfloor x \rfloor = \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Závěr. Průnikem řešení obou nerovnic je množina $\lfloor x \rfloor = \{-1, 0, 1\}$. Postupným dosazením těchto hodnot do výrazu (3.3) získáme konečně řešení dané úlohy, a to

$$x_1 = -\frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{2}{5}, \quad x_3 = 1.$$

Příklad 3.1.4

Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí

$$2\lceil x \rceil - 4x = 27. \tag{3.5}$$

Řešení. Uvedeme opět dva různé postupy.

1. způsob: Ze zadání je opět zřejmě, že $4x \in \mathbb{Z}$ a reálné x pak může nabývat čtyř různých hodnot

$$k, \quad k + \frac{1}{4}, \quad k + \frac{2}{4}, \quad k + \frac{3}{4}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Postupným dosazením všech možností pro neznámou x do zadání (3.5) zjistíme, zda takové celé číslo k existuje.

a)

$$x = k, \quad \lceil x \rceil = k, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Pak

$$2k - 4k = 27, \quad \text{tj. } k = -\frac{27}{2}.$$

V tomto případě neexistuje celočíselné řešení k dané rovnice.

b)

$$x = k + \frac{1}{4}, \quad \lceil x \rceil = k + 1, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Rovnice (3.5) je potom ve tvaru

$$2k + 2 - 4k - 1 = 27, \quad \text{tj. } k = -13.$$

Celé číslo k existuje a pro reálné x tedy platí

$$x = -\frac{51}{4}.$$

c)

$$x = k + \frac{2}{4}, \quad \lceil x \rceil = k + 1, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Potom je rovnice (3.5) ve tvaru

$$2k + 2 - 4k - 2 = 27, \quad \text{tj. } k = -\frac{27}{2}.$$

Tato rovnice tedy nemá celočíselné řešení k.

d)

$$x = k + \frac{3}{4}, \quad \lceil x \rceil = k + 1, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Pro poslední možnost je rovnice (3.5) ve tvaru

$$2k + 2 - 4k - 3 = 27, \quad \text{tj. } k = -14.$$

Předešlá rovnice má celočíselné řešení k, a pro x tedy platí

$$x = -\frac{53}{4}.$$

Závěr. Hledané x může nabývat dvou různých hodnot, a to

$$x_1 = -\frac{51}{4}, \quad x_2 = -\frac{53}{4}.$$

2. způsob: Vyjádříme neznámou x ze zadání (3.5)

$$x = \frac{2\lceil x \rceil - 27}{4}. \tag{3.6}$$

Následným dosazením do (1.2) dostaneme výraz

$$\lceil x \rceil \geq \frac{2\lceil x \rceil - 27}{4} > \lceil x \rceil - 1. \tag{3.7}$$

Postupnou nerovnost rozdělíme na dvě nerovnice a každou vyřešíme zvlášť.

a)

$$\begin{aligned} \lceil x \rceil &\geq \frac{2\lceil x \rceil - 27}{4}, \\ 4\lceil x \rceil - 2\lceil x \rceil &\geq -27, \\ \lceil x \rceil &\geq -\frac{27}{2}. \end{aligned}$$

Horní celá část neznámé x je větší nebo rovna $-\frac{27}{2}$. Jelikož $\lceil x \rceil$ je celé číslo, pak $\lceil x \rceil = \{-13, -12, -11, -10, \dots\}$.

b)

$$\frac{2\lceil x\rceil - 27}{4} > \lceil x\rceil - 1,$$
$$2\lceil x\rceil - 27 > 4\lceil x\rceil - 4,$$
$$\lceil x\rceil < -\frac{23}{2}.$$

Řešením této nerovnice jsou všechna celá čísla menší než $-\frac{23}{2}$. Pro horní celou část neznámé x tedy platí $\lceil x\rceil \in \{-12, -13, -14, -15, \dots\}$.

Závěr. Průnikem řešení obou nerovnic a), b) je množina celých čísel $\{-13; -12\}$. Postupným dosazením hodnot $\lceil x\rceil = -13$ a $\lceil x\rceil = -12$ do (3.6) dostaneme řešení této úlohy

$$x_1 = -\frac{53}{4}, \quad x_2 = -\frac{51}{4}.$$

Příklad 3.1.5

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$3\lfloor x\rfloor + 1 = \frac{3x - 1}{2}. \tag{3.8}$$

Řešení. Rovnici (3.8) upravíme do tvaru

$$2\lfloor x\rfloor + 1 = x. \tag{3.9}$$

Z upravené rovnice je zřejmé, že x je celé číslo. Platí tedy $\lfloor x\rfloor = x$ a rovnici (3.9) lze napsat ve tvaru

$$2x + 1 = x.$$

Po úpravě získáme jediné řešení této úlohy, a to

$$x = -1.$$

Příklad 3.1.6

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$3\lfloor x\rfloor + 2 = \frac{3x - 1}{2}. \tag{3.10}$$

Řešení. Rovnici (3.10) upravíme do tvaru

$$6\lfloor x \rfloor + 5 = 3x. \tag{3.11}$$

Z takto upravené rovnice je zřejmé, že $3x \in \mathbb{Z}$. Hledané reálné číslo x lze zapsat ve tvaru

$$x = k + \frac{1}{3}q, \tag{3.12}$$

kde k je celé číslo, q nabývá hodnot $\{0; 1; 2\}$ a pro každé takové x platí

$$\lfloor x \rfloor = k.$$

Dosazením (3.12) do rovnice (3.11) a její následné úpravě dostaneme výraz

$$k = \frac{q-5}{3},$$

kde k je celé číslo a $q = \{0, 1, 2\}$. To nastane, právě když je $q = 2$. Pak je $k = -1$.
Závěr. Dosazením hodnot $k = -1$ a $q = 2$ do (3.12) získáme právě jednou řešení dané úlohy, tj.

$$x = -\frac{1}{3}.$$

Příklad 3.1.7 (24. MO, A-II-2b)

Určete všechna reálná čísla x, pro které platí

$$3\lfloor x \rfloor^2 + 6x - 4 = 0. \tag{3.13}$$

Řešení. Ze zadání opět vyplývá, že $6x$ musí být celé číslo. Reálné x lze tedy napsat obecně ve tvaru

$$x = k + \frac{1}{6}q, \tag{3.14}$$

kde k je celé číslo a q nabývá hodnot $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Potom pro každé takové x bude platit

$$\lfloor x \rfloor = k. \tag{3.15}$$

Dosazením (3.14) a (3.15) do zadání příkladu (3.13) a následné úpravě získáme rovnici

$$3k^2 + 6k + q - 4 = 0, \tag{3.16}$$

kde k je celé číslo a $q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Pro každé q z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ověříme, zda má rovnice (3.16) řešení, které splňuje podmínku, že $k \in \mathbb{Z}$.
To nastane, právě když $q = 4$.

$$\begin{aligned} 3k^2 + 6k &= 0, \\ k(k+2) &= 0. \end{aligned}$$

Tedy $k_1 = 0$, nebo $k_2 = -2$. Postupným dosazením obou možností do (3.14) dostaneme dvě řešení této úlohy, a to

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = -\frac{4}{3}.$$

Příklad 3.1.8 (40. MO, B-S-2)

Najděte alespoň jednu dvojici celých čísel a, b tak, aby pro každé celé číslo x platilo

$$\left\lfloor \frac{x+a}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+b}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2x}{5} \right\rfloor. \tag{3.17}$$

Řešení. V případě, že je $x = 0$ platí

$$\left\lfloor \frac{a}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{5} \right\rfloor = 0$$

Pro $x = 1$ a $x = 2$ platí

$$\left\lfloor \frac{1+a}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1+b}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2+a}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2+b}{5} \right\rfloor = 0.$$

Pro $x = 3$ a $x = 4$ zase dospějeme k rovnostem

$$\left\lfloor \frac{3+a}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3+b}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4+a}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4+b}{5} \right\rfloor = 1.$$

Pro $x = 5$ dostaneme výraz

$$\left\lfloor \frac{5+a}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5+b}{5} \right\rfloor = 2,$$

který lze upravit

$$\left\lfloor 1 + \frac{a}{5} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \frac{b}{5} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{a}{5} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{b}{5} \right\rfloor = 2.$$

Dostáváme tak stejný výraz jako pro případ $x = 0$. Tedy

$$\left\lfloor \frac{a}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{5} \right\rfloor = 0.$$

Stejně tak v případě, že $x = 6$ dostaneme výraz totožný s výrazem pro $x = 1$.

Stačí tedy najít dvojici celých čísel a, b, která vyhovuje rovnici (3.17) pro $x_0 = 0, 1, 2, 3, 4$. Pak bude tato dvojice vyhovovat rovnici (3.17) i pro každé x ve tvaru $x = 5k + x_0$, kde k je celé číslo. Zvolíme čísla a,b z množiny {0,1,2,3,4} tak, že $a \leq b$. Hodnoty a, b postupně dosazujeme v různých kombinacích pro každé x_0 z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, \}$.
Musí tedy platit

$$\left\lfloor \frac{1+a}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2+a}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3+a}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4+a}{5} \right\rfloor = 0,$$

$$\left\lfloor \frac{1+b}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2+b}{5} \right\rfloor = 0,$$

$$\left\lfloor \frac{3+b}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4+b}{5} \right\rfloor = 1.$$

Rovnice (3.17) má řešení pro každé x_0 z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, právě když

$$a = 0, \quad b = 2.$$

Dvojice čísel $a = 0$ a $b = 2$ tedy vyhovuje rovnici (3.17) i pro každé celé číslo x.

Příklad 3.1.9 (54. MO, B-I-5)

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5\lfloor x \rfloor - 7}{7\lfloor x \rfloor - 5}. \tag{3.18}$$

Řešení. Rovnici (3.18) upravíme do tvaru

$$\begin{aligned}
7\lfloor x\rfloor x - x &= 5\lfloor x\rfloor x - 7x + 20k - 28,\\
2x(\lfloor x\rfloor + 1) &= 20\lfloor x\rfloor - 28,\\
x &= \frac{10\lfloor x\rfloor - 14}{\lfloor x\rfloor + 1}. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Dle (1.1) musí platit

$$\lfloor x\rfloor \leq \frac{10\lfloor x\rfloor - 14}{\lfloor x\rfloor + 1} < \lfloor x\rfloor + 1.$$

Řešíme tedy dvě nerovnice.

a)

$$\begin{aligned}
\lfloor x\rfloor &\leq \frac{10\lfloor x\rfloor - 14}{\lfloor x\rfloor + 1}, \qquad (3.20)\\
\frac{\lfloor x\rfloor(\lfloor x\rfloor + 1) - 10\lfloor x\rfloor + 14}{\lfloor x\rfloor + 1} &\leq 0,\\
\frac{(\lfloor x\rfloor - 7)(\lfloor x\rfloor - 2)}{\lfloor x\rfloor + 1} &\leq 0.
\end{aligned}$$

Řešením této nerovnice jsou všechna celá čísla $\lfloor x\rfloor$ z množiny

$$\{\ldots - 4, -3, -2\} \cup \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{10\lfloor x\rfloor - 14}{\lfloor x\rfloor + 1} &< \lfloor x\rfloor + 1, \qquad (3.21)\\
\frac{-(\lfloor x\rfloor + 1)^2 + 10\lfloor x\rfloor - 14}{\lfloor x\rfloor + 1} &< 0,\\
\frac{(\lfloor x\rfloor - 3)(\lfloor x\rfloor - 5)}{\lfloor x\rfloor + 1} &> 0.
\end{aligned}$$

Řešením druhé nerovnice jsou všechna celá čísla $\lfloor x\rfloor$, která patří do množiny celých čísel

$$\{0, 1, 2\} \cup \{6, 7\}.$$

Průnikem řešení nerovnic (3.20) a (3.21) je tříprvková množina

$$\{\ 2, 6, 7\}.$$

Závěr. Postupným dosazením všech hodnot, kterých může $\lfloor x \rfloor$ nabývat do (3.19), dostaneme tři řešení dané úlohy, a to

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{46}{7}, \quad x_3 = 7.$$

Příklad 3.1.10 (54. MO, B-S-3)

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = \frac{\lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor}. \tag{3.22}$$

Řešení. Ze zadání je zřejmé, že $\dfrac{\lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor}$ patří do oboru celých čísel.
Tento výraz lze upravit

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor} = \frac{1}{1 - \lfloor x \rfloor} - 1.$$

Z takto upraveného výrazu je jasné, že celé číslo $1 - \lfloor x \rfloor \in \{-1, 1\}$. Tedy $\lfloor x \rfloor$ může nabývat pouze dvou celočíselných hodnot $\lfloor x \rfloor \in \{0, 2\}$.

a) Nechť $\lfloor x \rfloor = 0$. Potom

$$0 \leq x < 1 \tag{3.23}$$

a rovnice (3.22) má tvar

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = 0.$$

Platí tedy $0 \leq \dfrac{x}{1-x} < 1$. Tento výraz rozdělíme na dvě nerovnice a každou z nich vyřešíme zvlášť.

(i)

$$0 \leq \frac{x}{1-x}$$

Této nerovnici vyhovují všechna x z intervalu $\langle 0; 1)$.

(ii)

$$\frac{x}{1-x} < 1$$

V toto případě vyhovují nerovnici všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \langle \frac{1}{2}; 1\rangle$.

Průnikem řešení obou nerovnic je interval $\langle 0; \frac{1}{2})$, který splňuje (3.23).

b) Jestliže $\lfloor x \rfloor = 2$. Pak

$$2 \leq x < 3 \tag{3.24}$$

a rovnice (3.22) je ve tvaru

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = -2.$$

Odtud

$$-2 \leq \frac{x}{1-x} < -1.$$

Výraz opět rozdělíme na dvě nerovnice.

(i)

$$-2 \leq \frac{x}{1-x}$$

Této nerovnici vyhovují všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \langle 1; 2)$.

(ii)

$$\frac{x}{1-x} < -1$$

Řešením této nerovnice jsou všechna x z intervalu $(1; \infty)$.

Řešením obou nerovnic, které zároveň splňuje podmínku (3.24), je zleva uzavřený interval $\langle 2; 3)$.

Závěr. Výsledným řešením dané úlohy jsou všechna $x \in \left\langle 0; \frac{1}{2}\right) \cup \langle 2; 3)$.

3.2 Soustavy rovnic s horní a dolní celou částí

Příklad 3.2.1 (72. MO, A-I-1)

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x + \lfloor y \rfloor &= 2022, \\ 3y + \lfloor 2x \rfloor &= 2023. \end{aligned}$$

Řešení. Po úpravě zadaných rovnic

$$2x = 2022 - \lceil y \rceil, \tag{3.25}$$

$$\lfloor 2x \rfloor = 2023 - 3y, \tag{3.26}$$

je zřejmé, že $2x \in \mathbb{Z}$. Za těchto podmínek můžeme porovnat výrazy (3.25) a (3.26).

$$\begin{aligned} 2022 - \lfloor y \rfloor &= 2023 - 3y, \\ 3y &= \lfloor y \rfloor + 1, \\ y &= \frac{\lfloor y \rfloor + 1}{3}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Podle definice (1.1) platí

$$\lfloor y \rfloor \leq \frac{\lfloor y \rfloor + 1}{3} < \lfloor y \rfloor + 1. \tag{3.28}$$

Tento výraz rozdělíme na dvě nerovnice, které vyřešíme odděleně

a)

$$\begin{aligned} \lfloor y \rfloor &\leq \frac{\lfloor y \rfloor + 1}{3}. \\ \lfloor y \rfloor &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Řešením této nerovnice jsou všechna celá čísla, která jsou menší než $\frac{1}{2}$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{\lfloor y \rfloor + 1}{3} &< \lfloor y \rfloor + 1, \\ \lfloor y \rfloor &> -1. \end{aligned}$$

Řešením nerovnice jsou všechna celá čísla, která jsou větší než -1.

Průnik řešení první a druhé nerovnice je jednoprvková množina

$$\lfloor y \rfloor = 0.$$

Z výrazu (3.27) získáme hodnotu neznámé y. Z rovnice (3.25) dopočítáme hodnotu druhé neznámé x. Zjistíme tak, že existuje právě jedno řešení dané soustavy rovnic

$$(x, y) = \left(1011; \frac{1}{3}\right).$$

Příklad 3.2.2

Určete všechna reálná čísla x, y taková, pro která platí

$$\begin{aligned} 3x + \lceil y \rceil &= 18, \\ \lceil 3x \rceil - 5y &= -42. \end{aligned}$$

Řešení. Po úpravě zadání

$$3x = 18 - \lceil y \rceil, \tag{3.29}$$
$$\lceil 3x \rceil = 5y - 42, \tag{3.30}$$

je zřejmě, že hodnota $3x$ je celé číslo. Můžeme tedy porovnat pravé strany výrazu (3.29) a (3.30).

$$\begin{aligned} 18 - \lceil y \rceil &= 5y - 42, \\ 5y &= 60 - \lceil y \rceil, \\ y &= 12 - \frac{1}{5}\lceil y \rceil. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Podle (1.2) dostaneme

$$\lceil y \rceil \geq 12 - \frac{1}{5}\lceil y \rceil > \lceil y \rceil - 1. \tag{3.32}$$

Výraz (3.32) rozdělíme na dvě nerovnice, které postupně vyřešíme.

a)

$$\lceil y \rceil \geq 12 - \frac{1}{5}\lceil y \rceil, \quad \text{tj. } \lceil y \rceil \geq 10.$$

Řešením této nerovnice jsou celá čísla větší nebo rovna 10.

b)

$$12 - \frac{1}{5}\lceil y \rceil > \lceil y \rceil - 1, \quad \text{tj. } \lceil y \rceil < \frac{65}{6}.$$

Řešením druhé nerovnice jsou celá čísla $\lceil y \rceil = \{10, 9, 8, 7, \dots\}$.
Průnik první a druhé nerovnice je jednoprvková množina

$$\lceil y \rceil = 10.$$

Dosazením $\lceil y \rceil = 10$ do výrazu (3.31) získáme hodnotu pro reálné y

$$y = 10.$$

Pro nejjednodušší nalezení hodnoty neznámé x použijeme první rovnici (3.29). Konečným řešením soustavy je uspořádaná dvojice

$$(x, y) = \left(\frac{8}{3}; 10\right).$$

Příklad 3.2.3 (54. MO, B-II-4)

Najděte všechny trojice reálných čísel x, y, z, pro které platí

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor - y &= \frac{2004}{2005}, \\ 2\lfloor y \rfloor - z &= \frac{2004}{2005}, \\ 3\lfloor z \rfloor - x &= \frac{2004}{2005}. \end{aligned}$$

Řešení. Označme $k = \dfrac{2004}{2005} \in (0; 1)$. Každou rovnici zapíšeme ve tvaru

$$y = \lfloor x \rfloor - k, \tag{3.33}$$
$$z = 2\lfloor y \rfloor - k, \tag{3.34}$$
$$x = 3\lfloor z \rfloor - k. \tag{3.35}$$

Pro každou rovnici soustavy platí

$$\begin{aligned} \lfloor y \rfloor &= \lfloor x \rfloor - 1, \\ \lfloor z \rfloor &= 2\lfloor y \rfloor - 1, \\ \lfloor x \rfloor &= 3\lfloor z \rfloor - 1. \end{aligned}$$

Z uvedených rovnic vyplývá, že $\lfloor x \rfloor = 2.$

Po dosazení $\lfloor x \rfloor = 2$ do zbylých rovnic dostaneme $\lfloor y \rfloor = 1, \lfloor z \rfloor = 1.$

Získané hodnoty pro dolní celé části neznámých x, y, z dosadíme zpět do rovnic (3.33), (3.34), (3.35) a konstantu k nahradíme její hodnotou.

$$\begin{aligned} x &= 3 - \frac{2004}{2005}, \\ y &= 2 - \frac{2004}{2005}, \\ z &= 2 - \frac{2004}{2005}. \end{aligned}$$

Hodnoty neznámých x, y, z lze dále upravit. Řešením celého příkladu je uspořádaná trojice

$$(x, y, z) = \left(2 + \frac{1}{2005}; 1 + \frac{1}{2005}; 1 + \frac{1}{2005}\right).$$

Dolní celé části hledaných hodnot x, y a z se shodují s hodnotami, které jsme obdrželi při řešení příkladu. Tím je provedena i zkouška správnosti.

Příklad 3.2.4

v oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\lfloor x + y \rfloor = x - y, \tag{3.36}$$

$$\lfloor 5y + x \rfloor = 5y - x. \tag{3.37}$$

Řešení. Ze zadání je zřejmé, že čísla $x - y$ i $5y - x$ jsou celá.
Platí tedy, že $5y - x + x - y = 4y$ je celé číslo a rovnici (3.37) lze zapsat ve tvaru

$$\lfloor 4y + y + x \rfloor = 5y - x.$$

Odtud

$$\begin{aligned} 4y + \lfloor y + x \rfloor &= 5y - x, \\ \lfloor y + x \rfloor &= y - x. \end{aligned}$$

z rovnice (3.36) tedy plyne, že

$$\begin{aligned} x - y &= y - x, \\ x &= y. \end{aligned}$$

Danou soustavu rovnic lze zapsat jako dvojici rovnic s neznámou y.

$$\lfloor 2y \rfloor = 0, \tag{3.38}$$
$$\lfloor 6y \rfloor = 4y. \tag{3.39}$$

Z rovnice (3.38) je zřejmé, že

$$0 \leq y < \frac{1}{2}. \tag{3.40}$$

Z druhé rovnice (3.39) je jasné, že $4y$ je celé číslo a y je tedy možné zapsat ve tvaru $k + \frac{1}{4}q$, kde k je celé číslo a q je z množiny $\{0, 1, 2, 3\}$. Vzhledem k podmínce (3.40) vyhovují neznámé y právě dvě hodnoty $y_1 = 0$ a $y_2 = \frac{1}{4}$. Daná úloha má tedy dvě různá řešení, a to

$$(x_1, y_1) = (0; 0) \quad (x_2, y_2) = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

Příklad 3.2.5 (59. MO, C-II-3)

Určete všechny dvojice reálných čísel x, y, které vyhovují soustavě rovnic

$$\lfloor x + y \rfloor = 2010, \tag{3.41}$$
$$\lfloor x \rfloor - y = p, \tag{3.42}$$

jestliže a) $p = 2$, b) $p = 3$.

Řešení.

a) Po dosazení $p = 2$ do rovnice (3.42) a její jednoduché úpravě je zřejmé, že y je celé číslo. Lze tedy upravit i rovnici (3.41). Získáváme tak novou soustavu rovnic

$$\lfloor x \rfloor = 2010 - y, \tag{3.43}$$
$$\lfloor x \rfloor = 2 + y. \tag{3.44}$$

Z rovnic (3.43) a (3.44) plyne $y = 1004$. Dosazením hodnoty y do rovnice (3.44) dostaneme $\lfloor x \rfloor = 1006$. Tedy $1006 \leq x < 1007$.
Pro $p = 2$ je řešením dané soustav rovnic každé x z intervalu $\langle 1006; 1007)$ a $y = 1004$.

b) Po dosazení $p = 3$ do rovnice (3.42) a analogických úpravách jako v případě a) dostaneme novou soustavu rovnic

$$\lfloor x \rfloor = 2010 - y, \tag{3.45}$$
$$\lfloor x \rfloor = 3 + y. \tag{3.46}$$

Z těchto rovnic opět vyplývá, že $y \in \mathbb{Z}$. Porovnáním pravých stran rovnic (3.45) a (3.46) obdržíme

$$y = \frac{2007}{2}.$$

Hledané y nenabývá celočíselné hodnoty. V tomto případě tedy nemá soustava rovnic řešení.

Příklad 3.2.6

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnice

$$\lfloor 2x + 3y \rfloor = 4y + 1, \tag{3.47}$$

$$\lfloor 3x + 2y \lfloor = x + 4. \tag{3.48}$$

Řešení. Z rovnice (3.47) plyne, že $4y$ je celé číslo. Neznámá y je tedy ve tvaru $k + \frac{1}{4}q$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a $q = \{0, 1, 2, 3\}$. Z rovnice (3.48) je zřejmé, že x je celé číslo. Ověříme všechny čtyři možnosti, které mohou nastat.

a) $y = k$, kde k je libovolné celé číslo. Daná soustava rovnic je tedy ve tvaru

$$2x + 3k = 4k + 1,$$
$$3x + 2k = x + 4.$$

Řešením této soustavy je uspořádaná dvojice $(x, k) = (1; 1)$. Řešením dané soustavy rovnic (3.47),(3.48) je uspořádaná dvojice $(x, y) = (1; 1)$.

b) $y = k + \frac{1}{4}$, kde k je libovolné celé číslo. Daná soustava rovnic je pak ve tvaru

$$2x + 3k = 4k + 2,$$
$$3x + 2k = x + 4.$$

Z této soustavy plyne, že $k = -\frac{2}{3}$. Řešení tedy není v oboru celých čísel.

c) $y = k + \frac{2}{4}$, kde k je libovolné celé číslo. V tomto případě dostáváme dvojici rovnic

$$2x + 3k + 1 = 4k + 3,$$
$$3x + 2k + 1 = x + 4.$$

Vyřešením soustavy dostaneme $k = \frac{1}{3}$. Tato soustava rovnic nemá řešení v oboru celých čísel.

d) $y = k + \frac{3}{4}$, kde k je libovolné celé číslo. V posledním možném případě obdržíme soustavu rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} 2x + 3k + 2 &= 4k + 4, \\ 3x + 2k + 1 &= x + 4. \end{aligned}$$

Tato soustava opět nemá celočíselné řešení.

Závěr. Daná úloha má jediné řešení, a to

$$(x, y) = (1; 1).$$

3.3 Úlohy s dolní a horní celou částí reálného čísla – řešené graficky

Grafickým řešením úloh s dolní a horní celou částí reálného čísla získáme nespojitý graf, který je tvořen nekonečně mnoha úsečkami.

S měnící se hodnotou celé části se mění i předpis zadané funkce. Pro přesné sestrojení grafu je třeba určit intervaly reálné osy, ve kterých se nemění hodnota celé části reálného čísla. Tím zároveň určíme předpis funkce pro jednotlivé intervaly.

Příklad 3.3.1

Sestrojte graf funkce

$$y = \lfloor x \rfloor + x.$$

Řešení. Vyšetříme hodnotu dolní celé části reálného x v jednotlivých intervalech na reálné ose. S měnící se hodnotu $\lfloor x \rfloor$ se bude měnit předpis funkce.

a) $x \in \langle 0; 1)$
Pro každé reálné číslo x z intervalu $\langle 0; 1)$ platí $\lfloor x \rfloor = 0$. V tomto intervalu bude předpis funkce $y = x$.

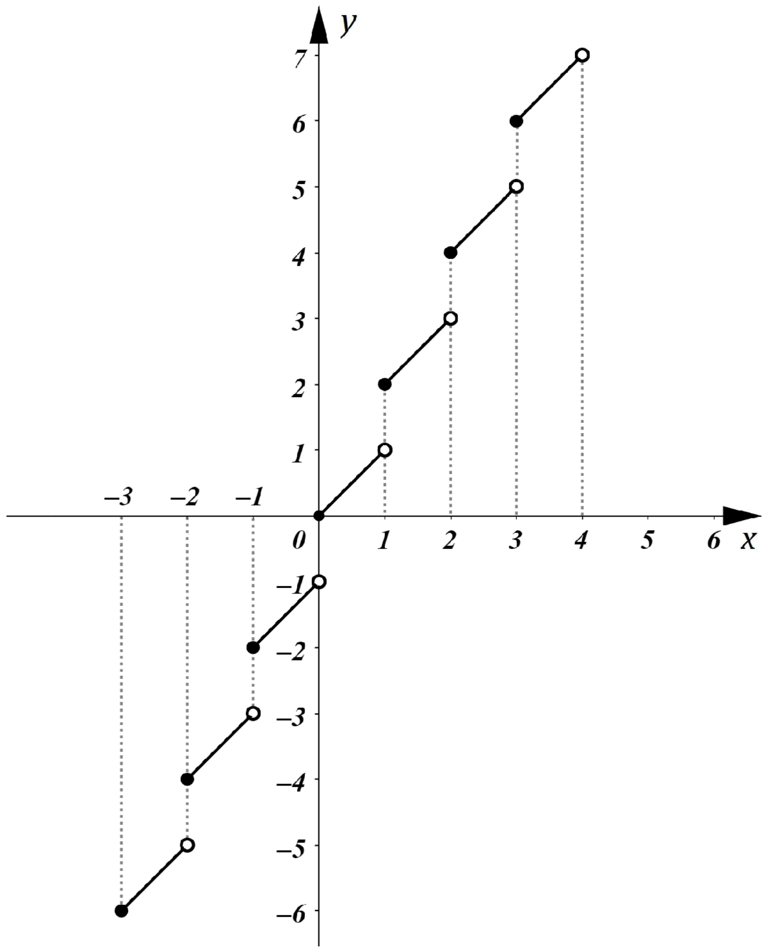
b) $x \in \langle 1; 2)$
Pro každé reálné x, které patří do intervalu $\langle 1; 2)$ je $\lfloor x \rfloor = 1$. Potom $y = 1 + x$.

c) $x \in \langle 2; 3)$
Pro každé x reálné z tohoto intervalu je $\lfloor x \rfloor = 2$. Potom je zadaná funkce ve tvaru $y = 2 + x$.

d) $x \in \langle -1; 0)$
Pro každé reálné x z intervalu $\langle -1; 0)$ je dolní celá část x rovna -1.
Pak $y = -1 + x$.

Obecně pro každé reálné číslo x z intervalu $\langle k; k+1)$, kde k je libovolné celé číslo, platí $\lfloor x \rfloor = k$ a

$$y = k + x.$$



Obrázek 3.1: Graf funkce $y = \lfloor x \rfloor + x$

Příklad 3.3.2

Sestrojte graf funkce
$$y = \left\lfloor x - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Řešení. Uvažujme substituci
$$z = x - \frac{1}{2}.$$

a) $z \in \langle 0; 1)$
Pro každé z z intervalu $\langle 0; 1)$ je $\lfloor z \rfloor = 0$.
Tedy $0 \leq z < 1$. S ohledem na použitou substituci platí $0 \leq x - \frac{1}{2} < 1$.
Po úpravě poslední nerovnosti dostaneme
$$\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}.$$
Platí tedy, že pro každé reálné x z intervalu $\left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right)$ je $\left\lfloor x - \frac{1}{2} \right\rfloor = 0$.
Pro neznámou x z tohoto intervalu je $y = 0$.

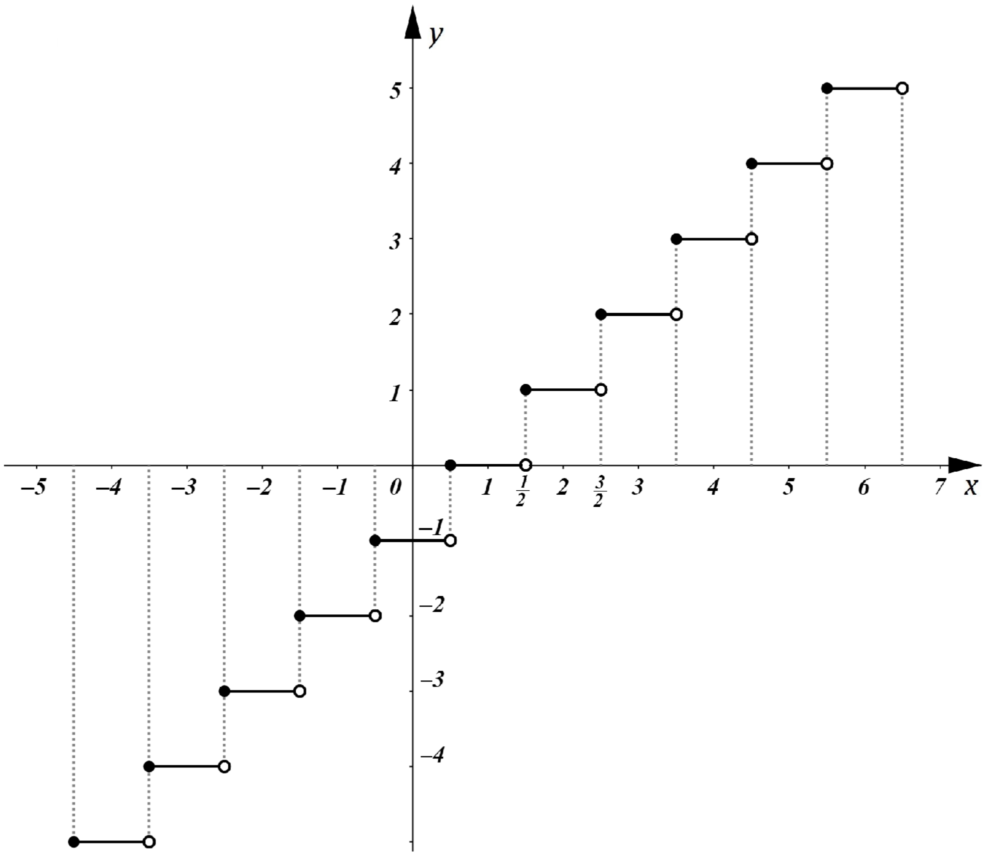
b) $x \in \left\langle \frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right)$
Pro každé $x \in \left\langle \frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right)$ je $y = 1$.

c) $x \in \left\langle \frac{5}{2}; \frac{7}{2} \right)$
Pro každé $x \in \left\langle \frac{5}{2}; \frac{7}{2} \right)$ je $y = 2$.

d) $x \in \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$
Pro každé $x \in \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$ je $y = -1$.

e) $x \in \left\langle -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right)$
Pro každé $x \in \left\langle -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right)$ je $y = -2$.

Obecně pro každé x z intervalu $\left\langle k + \frac{1}{2}; k + \frac{3}{2} \right)$, kde k je libovolné celé číslo, je funkce dána předpisem
$$y = k.$$



Obrázek 3.2: Graf funkce $y = \left\lfloor x - \frac{1}{2} \right\rfloor$

Příklad 3.3.3

Sestrojte graf funkce

$$y = \lfloor 3x \rfloor .$$

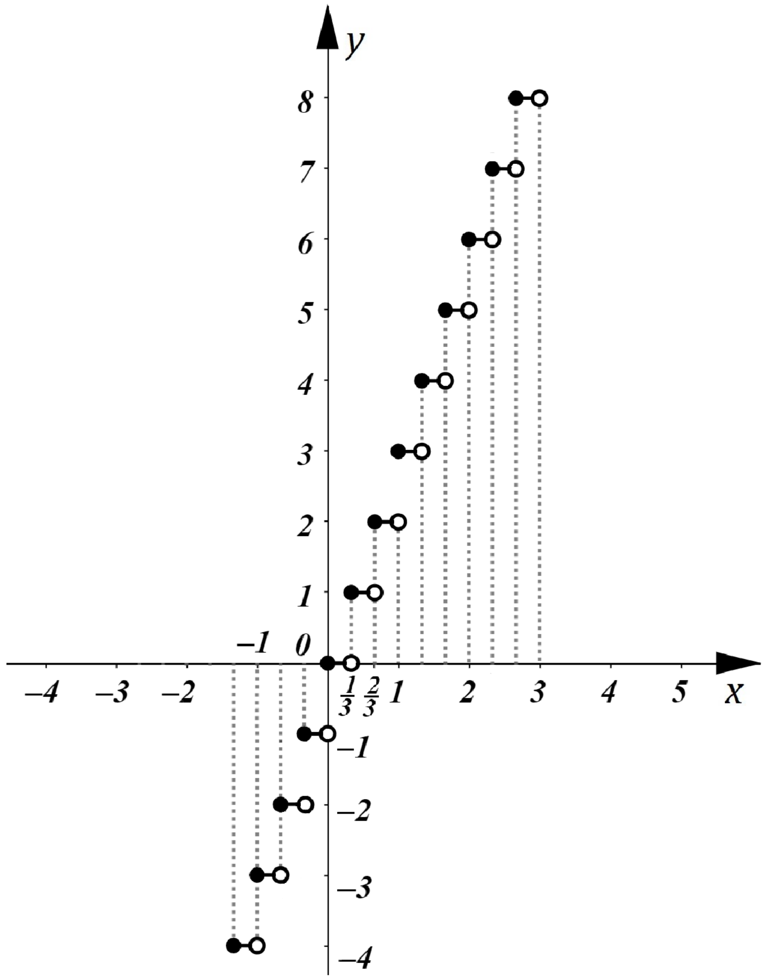
Řešení. Postup je analogický jako u předchozích úloh.

a) $x \in \left\langle 0; \frac{1}{3} \right)$
Pro x z intervalu $\left\langle 0; \frac{1}{3} \right)$ je funkce daná předpisem $y = 0$.

b) $x \in \left\langle \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$
V tomto případě platí $y = 1$.

Obecně lze zapsat, že pro všechna x z intervalu $\left\langle \frac{1}{3}k; \frac{k+1}{3} \right)$, kde k je libovolné celé číslo, je funkce daná předpisem

$$y = k.$$



Obrázek 3.3: Graf funkce $y = \lfloor 3x \rfloor$

Příklad 3.3.4

Sestrojte graf funkce

$$y = \lceil 2x + 1 \rceil - x.$$

Řešení. Postup je opět podobný jako u předchozích příkladů.

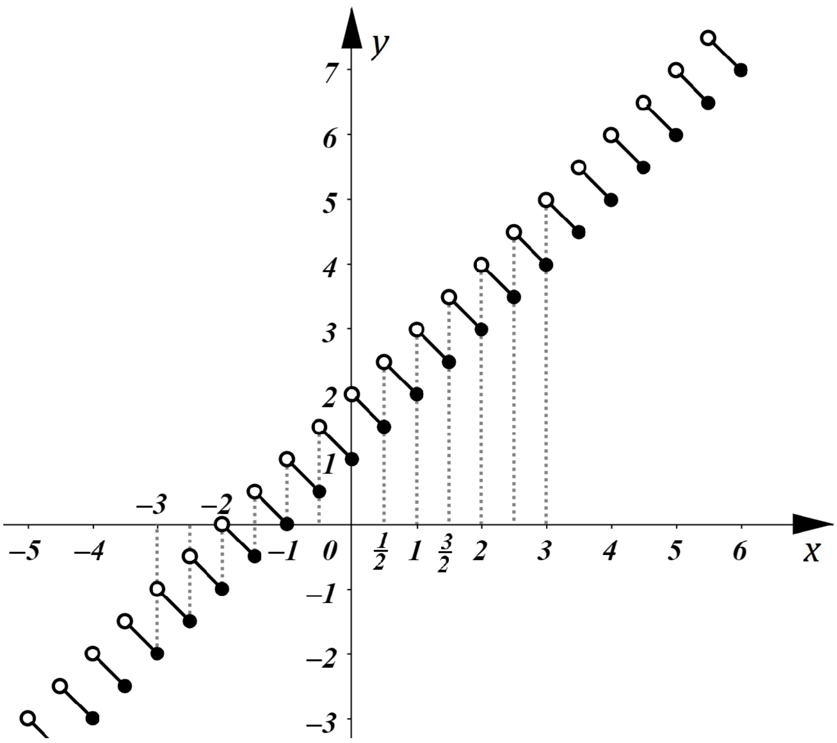
a) $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right\rangle$
Pro x z intervalu $\left(-\frac{1}{2}; 0\right\rangle$ je funkce dána předpisem $y = 1 - x$.

b) $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right\rangle$
Pro x z tohoto intervalu je funkce dána předpisem $y = 2 - x$.

c) $x \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right\rangle$
   V tomto případě je předpis funkce $y = -x$.

Obecně platí, že pro každé x z intervalu $\left(\frac{1}{2}(k-1); \frac{1}{2}k\right\rangle$, kde k je libovolné celé číslo, je funkce dána předpisem

$$y = (k+1) - x.$$



Obrázek 3.4: Graf funkce $y = \lceil 2x + 1 \rceil - x$

Příklad 3.3.5

Sestrojte graf funkce

$$y = 2\lceil 1 - x \rceil + 2x.$$

Řešení. Opět vyšetříme hodnotu horní celé části reálného čísla x v jednotlivých intervalech na reálné ose. Pro jednotlivé intervaly určíme předpis zadané funkce.

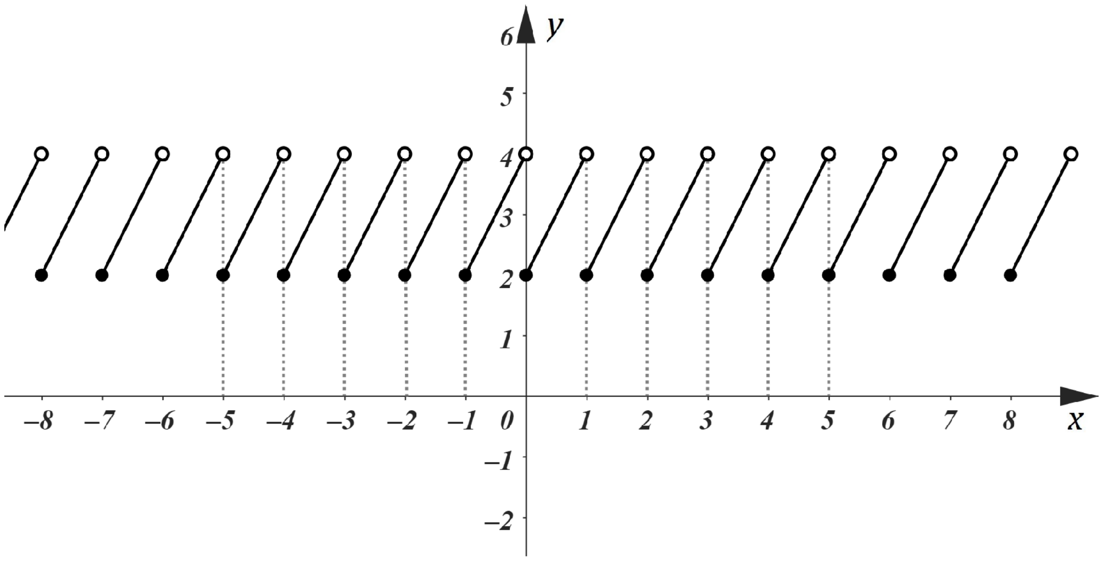
a) $x \in \langle 1; 2)$
   Pro x z intervalu $\langle 1; 2)$ je zadaná funkce ve tvaru $y = 2x$.

b) $x \in \langle 0; 1)$
Pro každé x z intervalu $\langle 0; 1)$ je funkce dána předpisem $y = 2 + 2x$.

c) $x \in \langle -2; -1)$
Pro každé x z intervalu $\langle -2; -1)$ platí $\lceil 1 - x \rceil = 3$. Pak $y = 6 + 2x$.

Obecně pro každé x z intervalu $\langle k; k+1)$, kde k je libovolné celé číslo je funkce dána předpisem

$$y = 2(1 - k) + 2x.$$



Obrázek 3.5: Graf funkce $y = 2\lceil 1 - x \rceil + 2x$

4 Neřešené příklady

Na závěr jsou uvedeny neřešené úlohy, které mohou být využity k procvičování. Některé úlohy jsou doplněny řešením.

Další úlohy s dolní a horní celou částí reálného čísla lze dohledat například v [2] či [3].

Příklad 4.1

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\lfloor 5x + 5 \rfloor = 10.$$

$\left[x \in \left\langle 1; \frac{6}{5} \right)\right]$

Příklad 4.2

Určete všechna reálná čísla x, pro která platí

$$3\lceil 5 - x \rceil = 45.$$

$[x \in \langle -10; -9)]$

Příklad 4.3

Určete všechna reálná čísla x, pro která platí

$$20x + 4\lfloor x \rfloor = 48.$$

$[x = 2]$

Příklad 4.4

Určete všechna reálná čísla x, pro která platí

$$5\lfloor x \rfloor - 8x = 102.$$

$\left[x_1 = -34;\ x_2 = -\frac{277}{8};\ x_3 = -\frac{282}{8}\right]$

Příklad 4.5 (40. MO, B-I-1)

V oboru reálných čísel řešte rovnic

$$3x^3 - \lfloor x \rfloor = 3.$$

$\left[x = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right]$

Příklad 4.6

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x + \lfloor y \rfloor &= 10, \\ \lfloor 4x \rfloor + x + y &= 17. \end{aligned}$$

$\left[(x_1, y_1) = \left(\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right), (x_2, y_2) = \left(\frac{11}{3}; -\frac{2}{3}\right)\right]$

Příklad 4.7

Sestrojte graf funkce

$$y = 3\lfloor x \rfloor.$$

Příklad 4.8

Sestrojte graf funkce

$$y = x + \left\lfloor \frac{1}{2}x + 2 \right\rfloor.$$

Za zmínku stojí také slovní úloha v [5] (úloha 9. Výplata n euro; s. 68-76), kde je při řešení použita funkce dolní celá část reálného čísla. V úloze je řešeno kolika způsoby lze vyplatit n euro v mincích 1 €, 2 € a 5 €.

Závěr

Předložená bakalářská práce je věnována funkcím dolní a horní celá část reálného čísla a jejich aplikacím v úlohách elementární matematiky. Je zpracována tak, aby ji například mohli žáci středních škol využít k rozšíření svých znalostí v rámci matematické analýzy. Prostřednictvím této práce seznámíme se speciálními matematickými funkcemi. Získané poznatky lze pak využít při řešení nestandardních matematických úloh.

Stěžejní kapitola je věnována právě aplikacím funkce dolní celá část a horní celá část reálného čísla. Část řešených úloh je převzata ze straších ročníků Matematické olympiády. Dále jsou prezentovány autorkou vytvořené příklady. V poslední kapitole jsou uvedeny neřešené příklady, které lze využít k procvičováním.

Hlavním přínosem práce je souhrn základních vlastností funkce dolní a horní celá část reálného čísla spolu s řešenými úlohami z elementární matematiky.

Literatura

[1] Eliáš, J.: *O celej části reálného čísla a funkcii* $y = \lfloor x \rfloor$, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 47, 1968/1969, č. 6, č. 7 a č. 8.

[2] Ročenky n-tého ročníku Matematické olympiády ($n = 22, 24, 34, 36, 40, 53, 54, 59, 61, 67, 72$). SPN, Praha.

[3] Pawłowski, H.: *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata.: Rozwiązania i odpowiedzi, Vademecum olimpijczyka.* Tutor, Polsko, 1997.

[4] Švrček, J., Calábek, P.: *Sbírka netradičních matematických úloh.* Prometheus, 1. vydání, Praha, 2007.

[5] Trávníček, S.:*Pojďme na to s matematikou (a někdy i s počítačem).* Univerzita Palackého v Olomouci, 1. vydání, Olomouc, 2013.

[6] Dolní a horní celá část. Přípravný kurz matematiky [online]. *KAM FIT ČVUT*, 2021 [cit. 2022-10-11]. Dostupné z: https://kam.fit.cvut.cz/deploy/bi-pkm/mirror/textbook/sec-dolni-a-horni-cela-cast.html#sec-dolni-a-horni-cela-cast

[7] 72. ročník (2022/2023)-Matematická olympiáda [online]. *MO Matematická olympiáda*, 2022 [cit. 2022-13-11]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/mo-pro-ss/rocnik/72-rocnik