



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

ANALÝZA JISTÉ TŘÍDY ZPOŽDĚNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

ANALYSIS OF A CERTAIN CLASS OF DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Martin Hrabec

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.

BRNO 2022

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	Martin Hrabec
Studijní program:	Matematické inženýrství
Studijní obor:	bez specializace
Vedoucí práce:	doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.
Akademický rok:	2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Analýza jisté třídy zpožděných diferenciálních rovnic

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Diferenciální rovnice se zpožděným argumentem si v průběhu let získaly značnou popularitu, neboť v mnoha situacích modelují reálné jevy lépe než klasické (nezpožděné) rovnice. Důvod nás může napadnout, málokterý systém totiž reaguje na změnu stavu okamžitě, přirozená je spíše právě reakce na stav v (třeba nedávné) minulosti. Na druhou stranu lze očekávat, že zmíněná větší realističnost modelu bude vykoupena náročnější teorií. Mezi různými typy zpožděných rovnic mají přirozeně důležité postavení lineární rovnice. V práci se zaměříme na určitou třídu lineárních zpožděných rovnic, ve kterých je zpoždění argumentu generováno specifickou funkcí. Tato třída zahrnuje dva důležité typy, rovnice s konstantními zpožděními a rovnice s proporcionálními zpožděními (tzv. rovnice multi-pantografu).

Cíle bakalářské práce:

Teoretická část:

1. Nastudování vybraných partií teorie zpožděných diferenciálních rovnic (zejména lineárních).
2. Popis vhodné numerické metody pro řešení studované úlohy.

Praktická část:

1. Návrh numerických simulací, zejména s ohledem na potvrzení/vyvrácení hypotézy z článku [1].
2. Implementace prvního bodu v prostředí MATLAB.

Seznam doporučené literatury:

ČERMÁK, J., NECHVÁTAL, L. On stability of linear differential equations with commensurate delayed arguments. Accepted for publication in Appl. Math. Lett., 2021. [1]

DRIVER, R.D. Ordinary and Delay Differential Equations, Springer, 1977.

ELAYDI, S. An Introduction to Difference Equations. New York: Springer, 2005.

KOLMNANOVSKII, V., MYSHKIS, A. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Kluwer, 1999.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá analýzou jisté třídy zpožděných diferenciálních rovnic. Nejprve je uvedeno několik potřebných poznatků týkajících se diferenciálních rovnic se zpožděným argumentem. Dále je představena samotná studovaná třída rovnic a formulováno poměrně jednoduché kritérium představující nutnou a postačující podmínku pro atraktivitu nulového řešení studované rovnice. Vedle teorie jsou prezentovány numerické experimenty včetně popisu použité numerické metody.

Abstract

This thesis deals with analysis of a certain class of delay differential equations. Firstly there are described basic concepts related to delay differential equations. The studied class of equations and relatively simple criterion representing a necessary and sufficient condition of attractivity of null solution are introduced next. Numerical experiments and description of used numerical method are presented as well.

Klíčová slova

zpožděné diferenciální rovnice, rovnice multi-pantografu, lineární diferenční rovnice, atraktivita nulového řešení, kritéria atraktivity, Rungovy–Kuttovy metody

Keywords

delay differential equations, multi-pantograph equation, linear difference equations, attractivity of null solution, attractivity criteria, Runge–Kutta methods

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Analýza jisté třídy zpožděných diferenciálních rovnic* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Ludka Nechvátala, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Martin Hrabec

Chtěl bych poděkovat vedoucímu své bakalářské práce doc. Ing. Ludku Nechvátalovi, Ph.D. za ochotu, trpělivost, četné konzultace a cenné rady při psaní této práce.

Martin Hrabec

Obsah

1	Úvod	12
2	Analýza studované třídy zpožděných rovnic	13
2.1	Zavedení studované třídy rovnic	13
2.2	Vybrané poznatky z teorie lineárních diferenčních rovnic	13
2.3	Otázka atraktivity	14
3	Numerické řešení	19
3.1	Teorie	19
3.2	Experimenty	21
4	Závěr	30

1 Úvod

Obyčejnou diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, jejíž neznámou je funkce jedné proměnné a která obsahuje derivaci či derivace této neznámé funkce. Obecnějším typem diferenciálních rovnic jsou ty, ve kterých se, na rozdíl od obyčejných diferenciálních rovnic, neznámá funkce vyskytuje pro různé hodnoty argumentů. Takové rovnice lze chápat jako speciální případ funkcionálních rovnic. Nejjednodušším a nejpřirozenějším zástupcem této třídy jsou zpožděné diferenciální rovnice. Diferenciální rovnice se zpožděným argumentem nacházejí uplatnění v celé řadě odvětví, kde se využívají k modelování různých reálných jevů. Tyto rovnice se těší velké oblibě, jelikož mnohdy modelují reálné situace lépe než obyčejné diferenciální rovnice. To je způsobeno tím, že ve většině případů nedochází k okamžité reakci systému na změnu stavu, ale dochází k odezvě na změnu stavu v nějakém dřívějším časovém okamžiku, což je přesně jejich podstatou.

Za dostatečně obecný tvar zpožděné rovnice lze považovat např.

$$y'(t) = f(t, y(t), y(d(t))), \quad t \in I, \quad (1.1)$$

kde $I = \langle t_0, T \rangle$ (nebo $I = \langle 0, \infty \rangle$) a funkce d splňuje $d(t) \leq t$ pro každé $t \in I$ (tento požadavek zaručuje, že se skutečně jedná o zpoždění argumentu). O funkci f předpokládáme, že je (na nějaké vhodné množině) spojitá ve všech argumentech a o funkci d , že je spojitá na I . Protože pravá strana rovnice (1.1) obecně vyžaduje díky zpoždění i hodnoty argumentu menší než t_0 , je potřeba předepsat počáteční funkci na intervalu $\langle \tau, t_0 \rangle$, kde hodnota τ představuje maximální zpoždění (v případě, že funkce d není ohraničená zdola, klademe $\tau = -\infty$ a počáteční funkci předepisujeme na $(-\infty, t_0)$). Označíme-li zmíněnou počáteční funkci ϕ a budeme-li předpokládat, že je na $\langle \tau, t_0 \rangle$ spojitá, pak řešením rovnice (1.1) na intervalu $I^* = \langle \tau, t_0 \rangle \cup I$ rozumíme každou spojitou funkci $y : I^* \rightarrow \mathbb{R}$, která je spojitě diferencovatelná na I , splňuje rovnici (1.1) v každém bodě $t \in I$ a $y(t) = \phi(t)$ v každém bodě $t \in \langle \tau, t_0 \rangle$.

Poznamenejme ještě, že v obecnějším případě může funkce f z rovnice také záviset na více zpožděných stavech, tj. měli bychom $f = f(t, y(t), y(d_1(t)), y(d_2(t)), \dots, y(d_k(t)))$. Další poznatky týkající se zpožděných diferenciálních a funkcionálních rovnic lze nalézt např. v [2, 4, 5].

Tato práce se bude blíže zabývat jistou třídou lineárních zpožděných diferenciálních rovnic, u kterých je zpoždění argumentu generováno speciální funkcí. Do této skupiny rovnic patří jeden významný zástupce, tzv. rovnice multi-pantografu. Zaměříme se na atraktivitu nulového řešení rovnic spadajících do studované třídy. Jedním z cílů práce je návrh a následná realizace numerických simulací, jejichž záměrem je ověření hypotézy týkající se postačující a nutné podmínky atraktivity nulového řešení rovnice. Hypotéza, která je přednesena v publikaci [1], pracuje s myšlenkou nadbytečnosti jednoho předpokladu tohoto kritéria.

Práce je členěna následovně. Druhá kapitola obsahuje několik výsledků z teorie funkcionálních rovnic souvisejících se studovanou třídou rovnic, která je zde také představena. Dále je zde obsaženo několik poznatků z teorie lineárních diferenčních rovnic, které hrají významnou roli u studovaného kritéria atraktivity nulového řešení. Následuje část věnovaná samotnému vyšetřování atraktivity nulového řešení rovnice. Nejprve jsou zde uvedeny dosud dosažené výsledky v této oblasti a následně je předneseno jednoduché kritérium doplněné asymptotickým odhadem. Třetí kapitola se zabývá numerickými metodami, které jsou užívány k řešení zpožděných diferenciálních rovnic. Zejména je zde popsána modifikace Rungovy–Kuttovy metody na zpožděný případ s řízením délky kroku. Tuto metodu používá rutina `ddesd`, která je implementována v prostředí MATLAB. Metoda je použita k systematickým experimentům za účelem ověření výše zmíněné hypotézy.

2 Analýza studované třídy zpožděných rovnic

2.1 Zavedení studované třídy rovnic

Pojmy související se studovanou třídou rovnic jsou čerpány především z článku [1]. Představme nejprve třídu funkcí, které ve zkoumané rovnici generují zpoždění. Necht' t_0^* a $0 < q < 1$ jsou reálná čísla. Označme symbolem \mathcal{R}_{q,t_0^*} množinu všech funkcí ξ definovaných na intervalu $\langle t_0^*, \infty \rangle$ takových, že ξ je spojitě diferencovatelná a neohraničená na tomto intervalu, $\xi(t) < t$ pro všechna $t > t_0^*$, ξ' je kladná nerostoucí funkce na $\langle t_0^*, \infty \rangle$ a $q = \xi'_+(t_0^*)$.

V analýze studovaného problému hraje důležitou roli následující tvrzení z teorie funkcionálních rovnic.

Tvrzení 2.1. *Necht' $\xi \in \mathcal{R}_{q,t_0^*}$. Poté existuje spojitě diferencovatelné řešení φ Schröderovy rovnice*

$$\varphi(\xi(t)) = q\varphi(t), \quad t \in \langle t_0^*, \infty \rangle, \quad (2.1)$$

kteří je kladné a neohraničené na $\langle t_0^, \infty \rangle$ a má kladnou derivaci na $\langle t_0^*, \infty \rangle$.*

Důkaz tohoto tvrzení je uveden např. v publikaci [5].

Příklad 2.2. Uvažujme dvě funkce ξ , které jsou typickými zástupci třídy \mathcal{R}_{q,t_0^*} . Jako první případ vezměme $\xi(t) = qt$, $t \geq t_0^* = 0$. Pak není těžké odhalit, že řešením rovnice (2.1) je funkce $\varphi(t) = Ct$, $C \in \mathbb{R}$ (pro $C > 0$ je tato funkce kladná a neohraničená na $(0, \infty)$ a má kladnou derivaci na $\langle 0, \infty \rangle$).

Pokud dále zvolíme $\xi(t) = t^q$ pro $t \geq t_0^* = 1$, pak řešením (2.1) je funkce $\varphi(t) = C \ln t$, $C \in \mathbb{R}$.

Nyní se dostáváme k zavedení třídy lineárních zpožděných diferenciálních rovnic, kterou se budeme zabývat. Uvažujme diferenciální rovnici ve tvaru

$$y'(t) = ay(t) + \sum_{j=1}^m b_j y(\xi^j(t)), \quad t \geq t_0, \quad (2.2)$$

kde a, b_j jsou komplexní konstantní koeficienty a $\xi \in \mathcal{R}_{q,t_0^*}$, přičemž uvažujeme, že $t_0 \geq t_0^*$ je vhodný počátek. Symbolem ξ^j je myšlena j -tá iterace funkce ξ ($j = 1, \dots, m$), $\xi^2(t) = \xi(\xi(t))$, $\xi^3(t) = \xi(\xi^2(t))$, atd.

Třída \mathcal{R}_{q,t_0^*} generuje jeden významný případ, jde o tzv. rovnici multi-pantografu, která má tvar

$$y'(t) = ay(t) + \sum_{j=1}^m b_j y(q^j t), \quad t \geq t_0 \geq 0 \quad (2.3)$$

(tato rovnice vznikne volbou $\xi(t) = qt$).

2.2 Vybrané poznatky z teorie lineárních diferenčních rovnic

V této sekci uvedeme několik výsledků týkajících se lineárních diferenčních rovnic, které budou později využity v důkazu tvrzení týkajícího se kritéria atraktivity pro rovnici (2.2). Následující pojmy lze dohledat např. v [3]. Lineární diferenční rovnici k -tého řádu uvažujeme v sestupném tvaru, tj. ve tvaru

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_k y(n-k) = b(n), \quad (2.4)$$

kde $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ jsou konstantní koeficienty takové, že $a_0, a_k \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$ a $k \in \mathbb{N}$.

Je známo, že každé řešení této rovnice lze napsat ve tvaru

$$y(n) = C_1 u_1(n) + C_2 u_2(n) + \dots + C_k u_k(n) + y_p(n),$$

kde y_p je libovolné řešení nehomogenní rovnice (2.4) a u_1, \dots, u_k jsou lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_k y(n-k) = 0. \quad (2.5)$$

Systém k lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice se nazývá fundamentální systém řešení.

Vzhledem k tomu, že uvažujeme lineární diferenční rovnici s konstantními koeficienty, lze poměrně snadno nalézt fundamentální systém řešení rovnice (2.5) a tedy i obecné řešení této rovnice. Budeme předpokládat, že řešení (2.5) je tvaru λ^n , kde λ je komplexní číslo. Dosazením λ^n do této rovnice dostaneme charakteristickou rovnici

$$a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0. \quad (2.6)$$

Kořeny (2.6) se nazývají charakteristické kořeny. Uvažujme nejprve případ, kdy jsou charakteristické kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ jednoduché. Obecné řešení rovnice (2.5) pak lze psát ve tvaru

$$y(n) = \sum_{i=1}^k C_i \lambda_i^n,$$

kde $C_i \in \mathbb{C}$. Může také nastat případ, kdy jsou některé kořeny vícenásobné. Uvažujme tedy charakteristické kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ s násobnostmi m_1, m_2, \dots, m_r , pro které platí $\sum_{i=1}^r m_i = k$. V tomto případě lze obecné řešení (2.5) vyjádřit jako

$$y(n) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^n (C_{i0} + C_{i1}n + C_{i2}n^2 + \dots + C_{i,m_i-1}n^{m_i-1}).$$

Existuje několik metod, jak určit partikulární řešení y_p , např. metoda neurčitých koeficientů a metoda variace konstanty. Pro naše potřeby bude užitečná následující věta.

Věta 2.3. *Nechť u je řešení homogenní rovnice (2.5) s počátečními podmínkami $y(n_0 - k) = 0$, $y(n_0 - k + 1) = 0, \dots, y(n_0 - 2) = 0$, $y(n_0 - 1) = 1$. Pak partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice (2.4) lze psát ve tvaru*

$$y_p(n) = \frac{1}{a_0} \sum_{j=n_0}^n b(j) u(n - j + n_0 - 1). \quad (2.7)$$

Důkaz této věty lze nalézt v publikaci [18].

2.3 Otázka atraktivity

Následující definici lze nalézt např. v publikaci [20]. Označme \bar{y} řešení rovnice (1.1) s počáteční funkcí ϕ a y řešení rovnice (1.1) vyhovující počáteční funkci ψ .

Definice 2.4. (a) Řešení \bar{y} nazveme stabilním, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takové, že $|y(t) - \bar{y}(t)| < \varepsilon$ pro všechna $t \geq t_0$ a pro všechny počáteční funkce ψ takové, že $\max_{t \in \langle \tau, t_0 \rangle} |\psi(t) - \phi(t)| < \delta$.

- (b) Řešení \bar{y} nazveme atraktivním, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $|y(t) - \bar{y}(t)| \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow \infty$ a pro každou funkci ψ takovou, že $\max_{t \in \langle \tau, t_0 \rangle} |\psi(t) - \phi(t)| < \delta$.
- (c) Řešení nazveme asymptoticky stabilním, jestliže je zároveň stabilní a atraktivní.

V textu se zaměříme na formulaci kritéria, které zaručí, že nulové řešení rovnice (2.2) bude atraktivní. V dalším uvidíme, že tato otázka je v jistém smyslu jednodušší než v případě lineární rovnice s několika konstantními zpožděními, což je rovnice ve tvaru:

$$y'(t) = ay(t) + \sum_{j=1}^m b_j y(t - j\theta), \quad \theta > 0, \quad t \geq t_0. \quad (2.8)$$

Všimněme si, že tato rovnice není generována třídou \mathcal{R}_{q, t_0^*} (volbou $\xi(t) = t - \theta$ dojde k porušení předpokladu, že $\xi'_+(t_0) \in (0, 1)$, protože $\xi'_+(t_0) = 1$).

Je známo, že nulové řešení rovnice (2.8) je asymptoticky stabilní (a tedy i atraktivní) právě tehdy, když všechny kořeny (je jich nekonečně, ale spočetně mnoho) charakteristické rovnice

$$Q(\lambda) = \lambda - a - \sum_{j=1}^m b_j e^{-\lambda j\theta} = 0 \quad (2.9)$$

mají zápornou reálnou část. Vyvstává zde otázka, jestli se tato teoretická podmínka nedá převést do nějaké efektivnější podoby. Během let bylo dosaženo určitých dílčích výsledků, ty je možné nalézt v publikacích [9–14]. Obecně lze ale říct, že formulace snadno uchopitelných postačujících a nutných podmínek pro rovnici (2.8) je provázena řadou obtíží, a není jisté, zda je problém z teoretického hlediska vůbec uchopitelný.

Naproti tomu v případě rovnice multi-pantografu (2.3) je známo (viz [6]), že nulové řešení je atraktivní, jestliže

$$\Re(a) < 0 \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^m |b_j| < |a|. \quad (2.10)$$

Tato podmínka je pro $m = 1$ dokonce nutnou podmínkou atraktivity, ale nikoliv pro $m > 1$ (to přináší určitá omezení při vyšetřování stability některých numerických schémat). V nedávném článku [1] se podařilo podmínku (2.10) doplnit o další podmínky tak, aby vzniklý systém podmínek představoval i nutnost pro atraktivitu nulového řešení, ten byl však získán pouze za apriori předpokladu $\Re(a) < 0$.

Klíčovým nástrojem pro odvození zmíněných podmínek je následující lemma, které se opírá o vlastnosti Schröderovy rovnice (2.1).

Lemma 2.5. *Uvažujme rovnici*

$$y'(t) = ay(t) + \sum_{j=1}^m \beta_j(t) y(\xi^j(t)), \quad t \geq t_0 \geq t_0^*, \quad (2.11)$$

kde a je komplexní skalár s $\Re(a) < 0$, β_j jsou spojité komplexní funkce (předpokládáme, že β_m není identicky rovno nule) takové, že $|\beta_j(t)| \leq B_j$ pro všechna $t \in \langle t_0, \infty \rangle$ ($j = 1, \dots, m$) a $\xi \in \mathcal{R}_{q, t_0^*}$. Jestliže je φ řešením (2.1) s vlastnostmi zaručenými díky tvrzení 2.1, pak

$$y(t) = O((\varphi(t))^\gamma) \quad \text{pro } t \rightarrow \infty, \quad \gamma = \log_{1/q} \left(\sum_{j=1}^m B_j / (-\Re(a)) \right), \quad (2.12)$$

pro libovolné řešení y rovnice (2.11).

Připomeňme, že O značí Landauův symbol, tj. necht f a g jsou funkce definované na nějaké neomezené podmnožině kladných reálných čísel a funkce g je kladná pro všechny dostatečně velké hodnoty x . Řekneme, že

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{pro } x \rightarrow \infty,$$

jestliže existuje kladné reálné číslo M a reálné číslo x_0 takové, že

$$|f(x)| \leq Mg(x) \quad \text{pro všechna } x \geq x_0.$$

Nyní již můžeme přikročit k formulaci předeslané nutné a postačující podmínky pro atraktivitu nulového řešení rovnice (2.2). Za předpokladu $\xi \in \mathcal{R}_{q,t_0^*}$ polynom

$$P(\lambda) = a\lambda^m + \sum_{j=1}^m b_j \lambda^{m-j} \quad (2.13)$$

nazveme charakteristickým polynomem. Označme přitom $\lambda_{\max} = \max\{|\lambda_i| : i = 1, \dots, m\}$, kde λ_i jsou kořeny polynomu P .

Věta 2.6. *Necht a, b_j ($j = 1, \dots, m$) jsou komplexní čísla taková, že $\Re(a) < 0$ a $b_m \neq 0$, necht $\xi \in \mathcal{R}_{q,t_0^*}$ (pro vhodné $q \in (0, 1)$). Pak je nulové řešení rovnice (2.2) atraktivní právě tehdy, když $\lambda_{\max} < 1$. V tomto případě je rychlost poklesu libovolného řešení y rovnice (2.2) dána asymptotickým odhadem*

$$y(t) = O((\varphi(t))^{\log_{1/q} \mu}) \quad \text{pro } t \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

kde je φ řešením (2.1) s vlastnostmi zaručenými tvrzením 2.1 a μ je libovolné reálné číslo splňující $\lambda_{\max} < \mu < 1$.

Poznámka. Polynom P definovaný vztahem (2.13) je oproti Q vystupujícímu v (2.9) standardním polynomem. Problém nalezení všech kořenů uvnitř jednotkové kružnice může být vyřešen (za předpokladu, že všechny vstupy P jsou pevné) např. pomocí Schur–Cohnova kritéria. Jestliže koeficienty polynomu nejsou pevně zvoleny, pak jsou příslušná kritéria známa pouze ve zvláštních případech (viz [7]).

Všimněme si, že podmínka na atraktivitu nezávisí na tvaru funkce $\xi \in \mathcal{R}_{q,t_0^*}$. Tato funkce generující zpoždění se projevuje pouze v rámci asymptotického odhadu, kde φ je řešením rovnice (2.1).

Pokud charakteristický polynom (2.13) obsahuje pouze tři členy, je známo optimální kritérium (tj. obsahující nutné a postačující podmínky), které zaručí, že kořeny takového polynomu jsou uvnitř jednotkového kruhu, a to v řeči jeho koeficientů, viz [8, Thm. 1.3]. Díky tomuto kritériu lze vyslovit následující důsledek věty 2.6 (pro jednoduchost v rovnici uvažujeme pouze reálné koeficienty):

Důsledek 2.7. *Necht $a < 0, b, c \neq 0$ jsou reálná čísla, $m > l \geq 1$ jsou přirozená čísla (bez újmy na obecnosti považujeme m a l za nesoudělná), $\xi \in \mathcal{R}_{q,t_0^*}$ a necht $t_0 \geq t_0^*$. Poté je nulové řešení rovnice*

$$y'(t) = ay(t) + by(\xi^l(t)) + cy(\xi^m(t)), \quad t \geq t_0 \quad (2.15)$$

atraktivní právě tehdy, když

$$|b| + |c| < |a| \quad (2.16)$$

nebo

$$|b| + |c| \geq |a|, \quad |b| - |a| < |c| < |a|, \quad a^{m+l}(-b)^m(-c)^l < 0 \quad a \\ m \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2|ab|} + l \arccos \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2|ac|} < \pi. \quad (2.17)$$

Poznámka. Nerovnost (2.16) představuje podmínku (2.10) a (2.17) popisuje oblast atraktivity nulového řešení, která není pokryta v publikaci [6].

Uvedme nyní vybrané kroky z důkazu věty 2.6, který využívá i poznatky z předcházející kapitoly týkající se lineárních diferenčních rovnic. Přesněji, asymptotické otázky týkající se studované zpožděné rovnice souvisejí s asymptotikou lineární diferenční rovnice. Kompletní důkaz je možné dohledat ve článku [1].

Myšlenka důkazu. Nejprve převedme rovnici (2.2) na rovnici podobnou diferenční rovnici (2.4). K tomu využijeme logaritmickou substituci $s = \log_{1/q} \varphi(t)$, $w(s) = y(t)$ a položíme $h(s) = \varphi^{-1}(q^{-s})$, $g(s) = g(s, w'(s)) = w'(s)/h'(s)$. Platí $h(s) = t$. Po provedení úprav výrazů dostáváme

$$g(s) = w'(s) \frac{\varphi'(h(s))}{\varphi(h(s)) \ln(1/q)} = w'(\log_{1/q} \varphi(t)) \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) \ln(1/q)} = y'(t).$$

Uvedenou substitucí přejde rovnice (2.2) na

$$aw(s) + \sum_{j=1}^m b_j w(s-j) = g(s), \quad s \geq s_0 = \log_{1/q} \varphi(t_0). \quad (2.18)$$

Dále položíme $x(t) = y'(t)$ a derivací rovnice (2.2) dostáváme

$$x'(t) = ax(t) + \sum_{j=1}^m b_j \prod_{i=0}^{j-1} \xi'(\xi^i(t)) x(\xi^j(t)), \quad (2.19)$$

což je rovnice (2.11), kde $\beta_j(t) = b_j \prod_{i=0}^{j-1} \xi'(\xi^i(t))$. Proto, pokud je y řešením (2.2), potom je x řešením rovnice (2.19). Označíme

$$\alpha = \log_{1/q} \left(\sum_{j=1}^m |b_j| / (-\Re(a)) \right)$$

a použitím lemmatu 2.5 s přihlédnutím k $x = y'$ dostaneme

$$y'(t) = \mathcal{O}((\varphi(t))^{\alpha-1}) \quad \text{pro } t \rightarrow \infty,$$

neboli

$$g(s) = \mathcal{O}(q^{-(\alpha-1)s}) \quad \text{pro } s \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Vztah (2.20) určuje chování pravé strany rovnice (2.18) v nekonečnu a rovnici (2.18) tedy můžeme z asymptotického hlediska považovat za lineární nehomogenní diferenční rovnici m -tého řádu. Uvažujme ji na množině $\mathbb{N}_{\bar{s}} = \{\bar{s}, \bar{s}+1, \dots\}$, kde \bar{s} je libovolné ale pevné reálné číslo mezi s_0 a s_0+1 . Bez újmy na obecnosti můžeme položit $\bar{s} = \lceil s_0 \rceil$, kde $\lceil \cdot \rceil$ značí horní celou část čísla. Charakteristická rovnice sestavená pro odpovídající homogenní rovnici

$$aw(s) + \sum_{j=1}^m b_j w(s-j) = 0, \quad s \in \mathbb{N}_{\bar{s}}, \quad (2.21)$$

je $P(\lambda) = 0$, kde polynom P je dán vztahem (2.13).

Uvažujme nejprve, že $\lambda_{\max} < 1$. Pak rovnice (2.21) je asymptoticky stabilní, a tedy i atraktivní a

$$w_h(s) = \mathcal{O}(\mu^s) \quad \text{pro } s \rightarrow \infty. \quad (2.22)$$

Díky tomu, že známe \mathcal{O} odhad (2.22) homogenního řešení v nekonečnu i odhad pravé strany (2.20) rovnice (2.18), lze pomocí konvoluční sumy (2.7) provést odhad partikulárního řešení jako $\mathcal{O}(\mu^s)$ pro $\ln \mu > (\alpha - 1) \ln(1/q)$ a $\mathcal{O}(q^{(\alpha-1+\varepsilon)s})$ pro $\ln \mu \leq (\alpha - 1) \ln(1/q)$. Jelikož známe tyto odhady, můžeme také provést odhad řešení rovnice (2.2). V případě, kdy $\ln \mu > (\alpha - 1) \ln(1/q)$, dostáváme

$$y(t) = \mathcal{O}((\varphi(t))^{\log_{1/q} \mu}) \quad \text{pro } t \rightarrow \infty.$$

V případě $\ln \mu \leq (\alpha - 1) \ln 1/q$ lze vyjádřit odhad řešení (2.2) v nekonečnu ve tvaru

$$y(t) = \mathcal{O}((\varphi(t))^{\alpha-1+\varepsilon}) \quad \text{pro } t \rightarrow \infty.$$

Dále je možné opakovaně aplikovat lemma 2.5, dokud nedostaneme $\ln \mu > (\alpha - k + (k - 1)\varepsilon) \ln(1/q)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$.

Nechť dále $\lambda_{\max} \geq 1$. Protože jakékoliv řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice je asymptoticky stabilní právě tehdy, když je asymptoticky stabilní jeho homogenní část, a víme, že (2.21) není asymptoticky stabilní kvůli $\lambda_{\max} \geq 1$, okamžitě víme, že (2.18) není asymptoticky stabilní, a tedy i nulové řešení (2.2) není atraktivní.

3 Numerické řešení

3.1 Teorie

Existují různé numerické metody, které se používají k řešení obyčejných diferenciálních rovnic, a jejich modifikované tvary uzpůsobené pro případ zpožděných diferenciálních rovnic. Obecně lze tyto metody rozdělit do dvou základních skupin na Rungovy–Kuttovy metody a lineární více krokové metody. Lineární více krokové metody počítají přibližné řešení y_{n+1} v uzlu t_{n+1} pomocí aproximací dřívějších kroků $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots$, zatímco Rungovy–Kuttovy metody jsou tzv. jednokrokové, to znamená, že pro výpočet přibližného řešení y_{n+1} v uzlu t_{n+1} se využívá pouze aproximace předchozího kroku y_n .

Program MATLAB, ve kterém budou prováděny numerické simulace nabízí rutinu `ddestd`, která slouží pro řešení rovnic s obecnými zpožděními a dá se tedy použít i na rovnice patřící do námi studované třídy. V následujícím textu blíže popíšeme rutinu `ddestd` a numerickou metodu, kterou tato rutina využívá.

Budeme tedy uvažovat zpožděné diferenciální rovnice ve tvaru

$$y'(t) = f(t, y(t), y(d_1(t)), \dots, y(d_k(t))), \quad (3.1)$$

na intervalu $\langle t_0, T \rangle$, přičemž na vhodném intervalu s pravým koncovým bodem t_0 je potřeba zadat počáteční funkci. Aby funkce d_j skutečně zpožďovala argument, požadujeme $d_j(t) \leq t$ pro každé $t \in \langle t_0, T \rangle$. Poznamenejme ještě, že rutina `ddestd` umožňuje uvažovat i zpoždění závislá na stavu rovnice, tj. případ $d_j(t) = d_j^*(t, y(t))$. Nejprve uvedeme způsob, jakým fungují tradiční Rungovy–Kuttovy metody pro obyčejné diferenciální rovnice. Uvažujme tedy rovnici ve tvaru

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t_0 \leq t \leq T \quad (3.2)$$

se zadanou počáteční hodnotou $y(t_0)$. Jednotlivé aproximace y_n , které odpovídají hodnotám $y(t_n)$, jsou počítány v bodech $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. První aproximaci y_0 položíme rovnu $y(t_0)$. Rungovy–Kuttovy metody stanoví předpis pro výpočet aproximace y_{n+1} v $t_{n+1} = t_n + h_n$ (h_n zde představuje délku n -tého kroku) za předpokladu, že známe aproximaci y_n v t_n . Uvažujeme s -bodovou Rungovu–Kuttovu formuli tvaru

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i f_{ni}, \quad (3.3)$$

kde pro koeficienty f_{ni} platí, že $f_{n1} = f(t_n, y_n)$ a pro $i = 2, \dots, s$ je $f_{ni} = f(t_{ni}, y_{ni})$, $t_{ni} = t_n + c_i h_n$ a

$$y_{ni} = y_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f_{nj}.$$

Rutina `ddestd` využívá tzv. klasickou Rungovu–Kuttovu formuli. Jde o čtyřbodovou formuli čtvrtého řádu. Připomeňme, že řád metody souvisí s pojmem lokální diskretizační chyby (anglicky *local truncation error*, budeme používat zkratku lte_n). Lokální diskretizační chyba je chyba, která vznikne v rámci jednoho kroku za předpokladu $y_n = y(t_n)$. Velikost lte_n se určí pomocí vztahu

$$lte_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n \sum_{i=1}^s b_i f_{ni}.$$

Pro dostatečně hladké funkce f a y je tato chyba $O(h_n^{p+1})$, kde p představuje řád metody.

Užitečnější je jiný typ chyby, tzv. lokální chyba metody. Předpokládejme, že proces klasické metody dospěl do bodu t_n , kde $y_n \approx y(t_n)$. Lokální řešení u je zde definováno pro

$$u' = f(t, u), \quad u(t_n) = y_n.$$

Během provádění kroku h_n z bodu t_n za účelem zjištění y_{n+1} vzniká lokální chyba (le_n) metody

$$le_n = u(t_n + h_n) - y_{n+1}. \quad (3.4)$$

Tuto chybu lze odhadnout, jestliže použijeme druhou Rungovu–Kuttovu metodu. Jedna metoda dává aproximaci y_{n+1} s lokální chybou $\mathcal{O}(h_n^{p+1})$ a druhá aproximaci y_{n+1}^* s lokální chybou o jeden řád přesnější. Lokální chyba se využívá při volbě délky kroku, aby byla splněná požadovaná přesnost.

Ve výše popsanych vztazích se vyskytují konstantní koeficienty b_i , c_i a a_{ij} , které definují konkrétní metodu. Klasická metoda je čtvrtého řádu a ke zvolení koeficientů b_i , c_i a a_{ij} , slouží tzv. podmínky řádu (možno dohledat např. v [19]). Klasická metoda splňuje také podmínku

$$c_i = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{i,i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, s. \quad (3.5)$$

V případě řešení zpožděných rovnic hraje zásadní roli spojitá aproximace řešení y první metody pro $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ ve tvaru

$$y_{n+\sigma} = y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i(\sigma) f_{ni}.$$

Koeficienty b_i jsou polynomy v proměnné σ , tato formule tedy představuje polynomiální aproximaci hodnot $y(t_n + \sigma h_n)$ pro $0 \leq \sigma \leq 1$.

Obecně aproximace funkce představuje nahrazení této funkce funkcí jí „blízkou“. Interpolace pak představuje aproximaci, která prochází předepsanými body (tzv. uzly interpolace). Nejběžnější je interpolace pomocí polynomu. Za účelem dosažení dostatečné přesnosti lze provést rozdělení intervalu, na kterém má být provedena interpolace, na dílčí podintervaly, přičemž na každém z nich se sestrojí polynomy nižšího stupně, než by měl jeden polynom procházet všemi uzly. Tohoto postupu využívají interpolační splajny. Polynomickým splajnem myslíme funkci S , která je na každém intervalu $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$ shodná s nějakým polynomem b_i . Rutina `ddesd` konkrétně využívá kubický Hermitův interpolační splajn. Hermitovy interpolační splajny jsou typické tím, že v uzlech interpolace (v krajních bodech intervalu $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$) jsou kromě funkčních hodnot, kterými splajn prochází, předepsány také derivace. V případě Hermitova kubického splajnu jsou předepsány čtyři podmínky ve tvaru

$$S(t_n) = y_n, \quad S(t_{n+1}) = y_{n+1},$$

$$S'(t_n) = f_{n1}, \quad S'(t_{n+1}) = f_{n4}.$$

Důležitý problém, který se musí u obyčejných i zpožděných diferenciálních rovnic řešit, je otázka řízení velikosti rezidua. Celý popis řešení tohoto problému lze najít v [17]. Reziduem r je v případě obyčejných diferenciálních rovnic myšlen rozdíl levé a pravé strany rovnice (3.2) pracující s aproximující funkcí $S(t)$

$$r(t) = S'(t) - f(t, S(t)).$$

Vzhledem, k tomu, že pracujeme se spojitou aproximací první formule, lze řídit velikost rezidua nejen v krajních bodech $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$, ale také uvnitř tohoto intervalu. Tento poznatek je zásadní

zejména u zpožděných rovnic, protože zde vlivem zpoždění může docházet k vyhodnocení numerického řešení kdekoli před aktuálním časem t . Manipulace se spojitou aproximací také umožní získat asymptoticky korektní odhad velikosti rezidua.

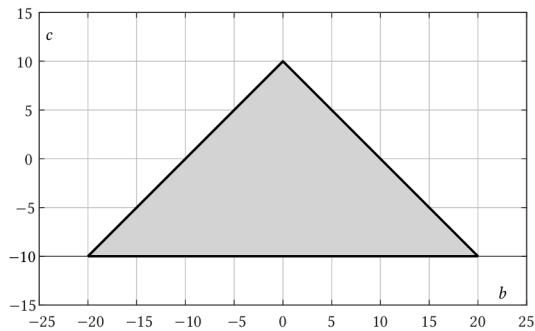
V případě zpožděných rovnic dochází, na rozdíl od těch obyčejných, k několika obtížím, které je potřeba vyřešit. Obecně je situace komplikovanější, když zpoždění d_j nezávisí pouze na t , ale i na řešení y . Abychom mohli vypočítat zpožďující funkce $d_j(t) = d_j^*(t, y(t))$, musíme znát řešení na $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$. Používaná Rungova–Kuttova metoda je nyní implicitní (do této chvíle jsme uvažovali pouze explicitní metody), což komplikuje řešení zpožděných diferenciálních rovnic. V takové situaci se provede extrapolace spojitého rozšíření z předcházejícího kroku na současný, aby zde bylo nalezeno předběžné řešení $S(t) \approx y(t)$. S ním lze vypočítat zpožděné členy a následně vylepšené řešení. Každá taková iterace je obecně poměrně výpočetně náročná, protože zde dochází k většímu množství výpočtů funkční hodnoty. Kvůli tomu se také využívají metody o menším počtu bodů a tedy nižších řádů. Rozlišují se zde 2 situace. Jestliže $d_j^*(t, S(t)) \leq t_n$ pro všechny j a všechny argumenty t , použijeme explicitní formuli. Jestliže nějaké $d_j^*(t, S(t)) > t_n$, pak uvažujeme daný krok jako implicitní a provedeme jednu iteraci.

Dalším problémem, se kterým se musí ddesd vypořádat, je fakt, že obecně se hodnota $y'(t_0+)$ z (3.1) liší od hodnoty $y'(t_0-) = \phi'(t_0-)$, kde $\phi(t_0)$ je hodnota počáteční podmínky v bodě t_0 . Tyto nespojitosti v y' se dále šíří v y'' , y''' , atd. Rutina ddesd k ošetření nespojitostí využívá algoritmy, které zařizují řízení lokální chyby a volbu velikosti kroku. Více podrobností je možné nalézt v [15, 17]. Základní pojmy týkající se numerického řešení obyčejných diferenciálních rovnic byly převzaty z knihy [16].

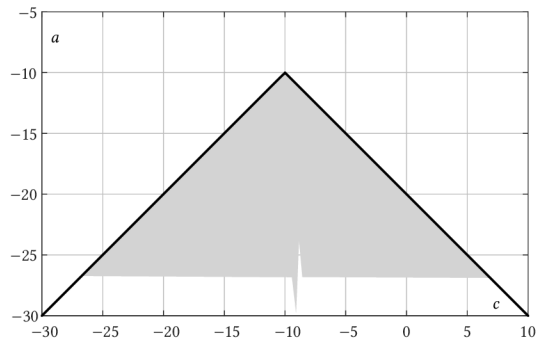
3.2 Experimenty

Hlavní náplní této sekce bude návrh a následná realizace numerických experimentů zaměřených na ověření hypotézy týkající se nutné a postačující podmínky atraktivity nulového řešení z věty 2.6. Tato hypotéza, která byla předložena v článku [1], říká, že předpoklad $\Re(a) < 0$, který je součástí věty 2.6, je nadbytečný. Je tím myšleno, že pokud je tento předpoklad porušen, pak nulové řešení zkoumané rovnice už není atraktivní (není ani stabilní). Zaměříme se přitom na rovnici multi-pantografu obsahující dva zpožděné členy, na které se aplikuje důsledek 2.7 s podmínkami (2.16), (2.17). V tomto případě budeme uvažovat nadbytečnost podmínky $a < 0$.

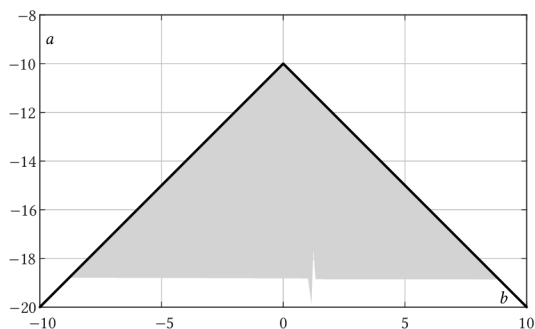
Před samotným ověřováním popsané hypotézy naznačíme, jak vypadají oblasti atraktivity nulového řešení. Oblasti atraktivity budeme uvažovat ve formě „řezů“. Pevně se zvolí hodnota jednoho z koeficientů rovnice a oblast atraktivity pak představuje množina bodů v rovině určená zbývajícimi dvěma koeficienty, pro kterou jsou splněny podmínky (2.16) a (2.17). Následující obrázky ilustrují oblasti atraktivity pro dvě situace, kdy dojde postupně k zafixování určité hodnoty jednotlivých koeficientů a , b , c a různé volbě počtu iterací m a l zpožďující funkce ξ .



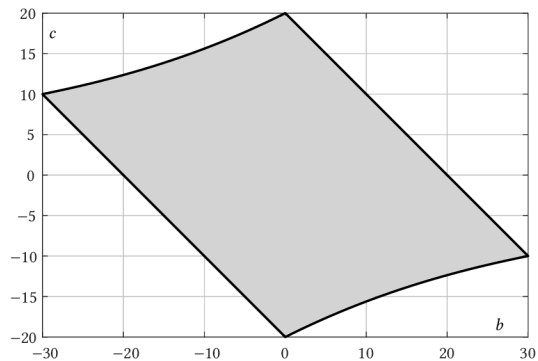
Obr. 1: $a = -10, m = 2, l = 1$



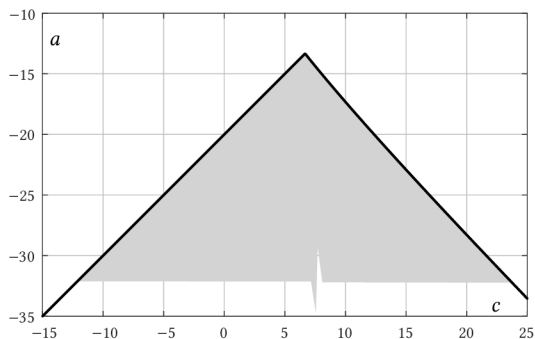
Obr. 2: $b = -20, m = 2, l = 1$



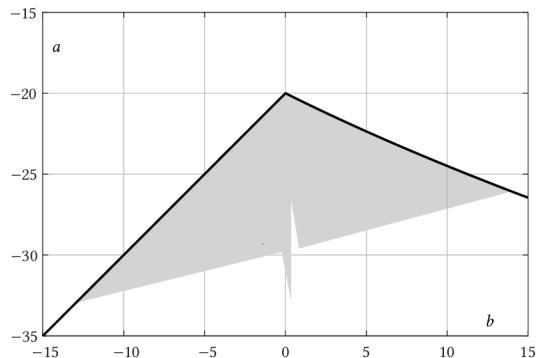
Obr. 3: $c = -10, m = 2, l = 1$



Obr. 4: $a = -20, m = 3, l = 1$



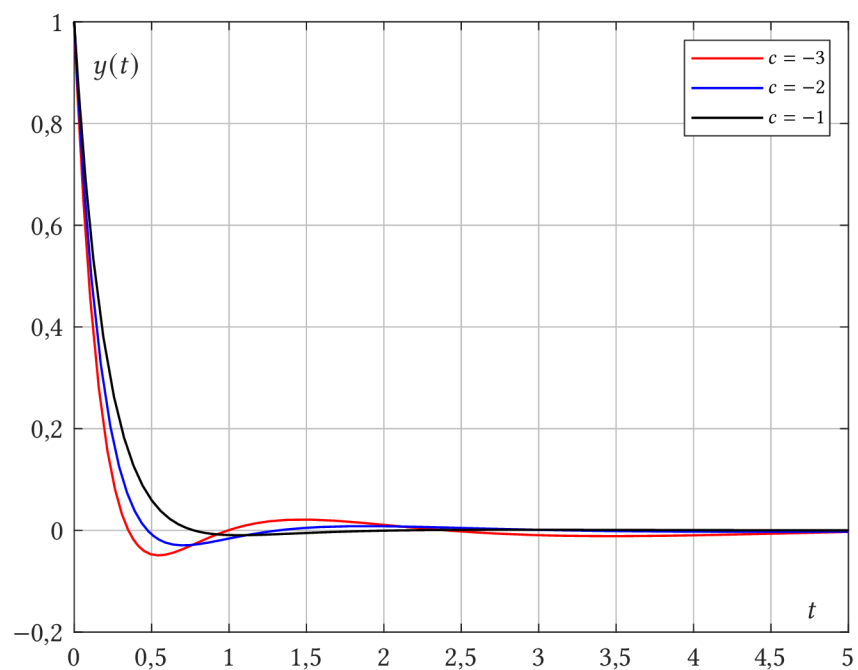
Obr. 5: $b = -20, m = 3, l = 1$



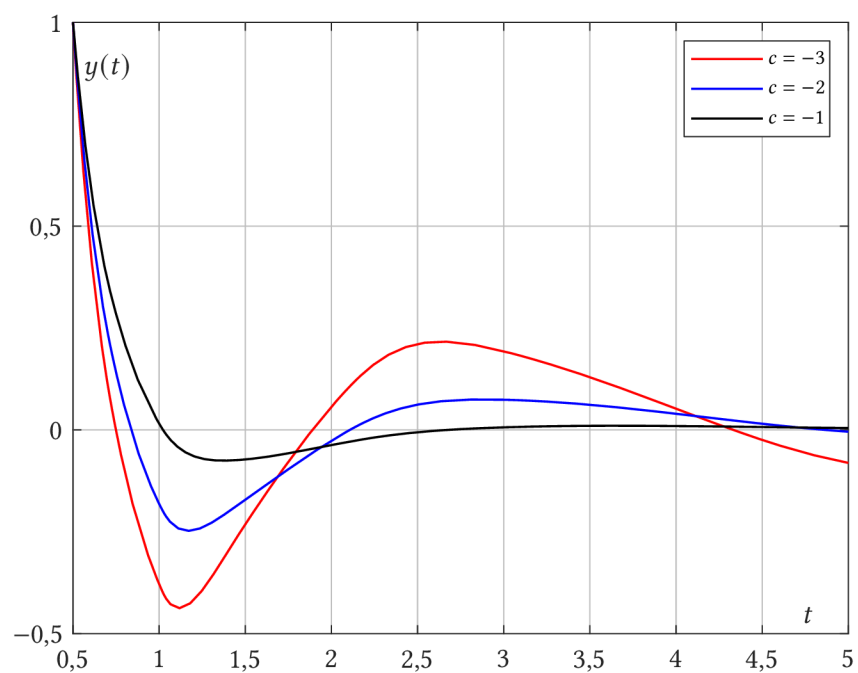
Obr. 6: $c = -20, m = 3, l = 1$

Dále zde předvedeme grafy průběhů řešení rovnice (2.3) pro různé volby jednotlivých koeficientů a, b, c této rovnice a ukážeme, jaký vliv má na průběh řešení volba q nebo počátečního bodu t_0 . Samotnou atraktivitu nulového řešení budeme posuzovat podle toho, zda budou řešení daných počátečních úloh konvergovat k nule.

Průběh řešení je v případě zpožděných rovnic silně ovlivněn volbou počáteční funkce ϕ . V případě rovnice multi-pantografu se (díky stále se zmenšujícímu zpoždění pro $t \rightarrow 0+$) tato funkce „ztratí“ a předepisujeme pouze funkční hodnotu. Dimenze prostoru řešení se tak z nekonečné stane jednou. Pro rovnice patřící do námi studované třídy se při stanovení obvyklého počátečního bodu $t_0 = 0$ neprojeví počáteční hodnota, protože řešení y pro žádné q nezávisí na $t < t_0$. Pokud se počátek posune ($t_0 > 0$), potom řešení závisí i na stavu před počátkem. V případě atraktivních nulových řešení se to může projevit záškvy k nim konvergujících řešení, které předchází ustálení průběhů řešení.

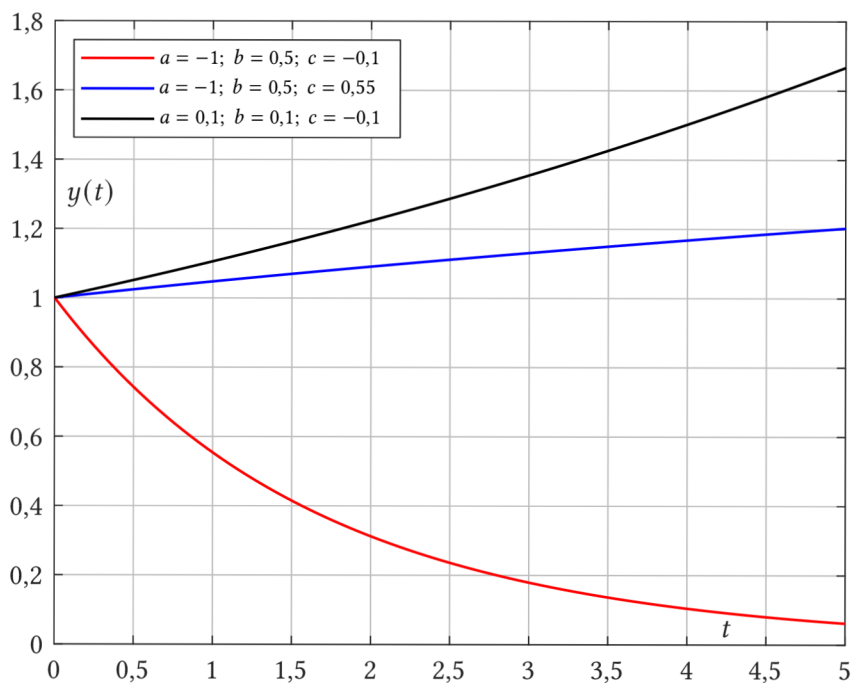


Obr. 7: Průběhy řešení pro $a = -5; b = 1; m = 2; l = 1; q = 0,7; \phi = 1; t_0 = 0$

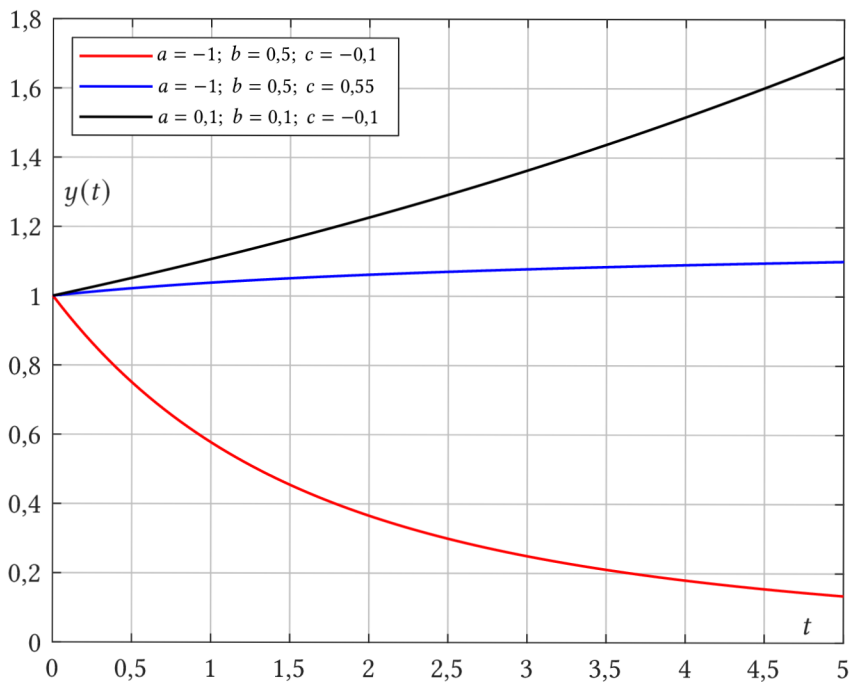


Obr. 8: Průběhy řešení pro $a = -5; b = 1; m = 2; l = 1; q = 0,7; \phi = 1; t_0 = 0,5$

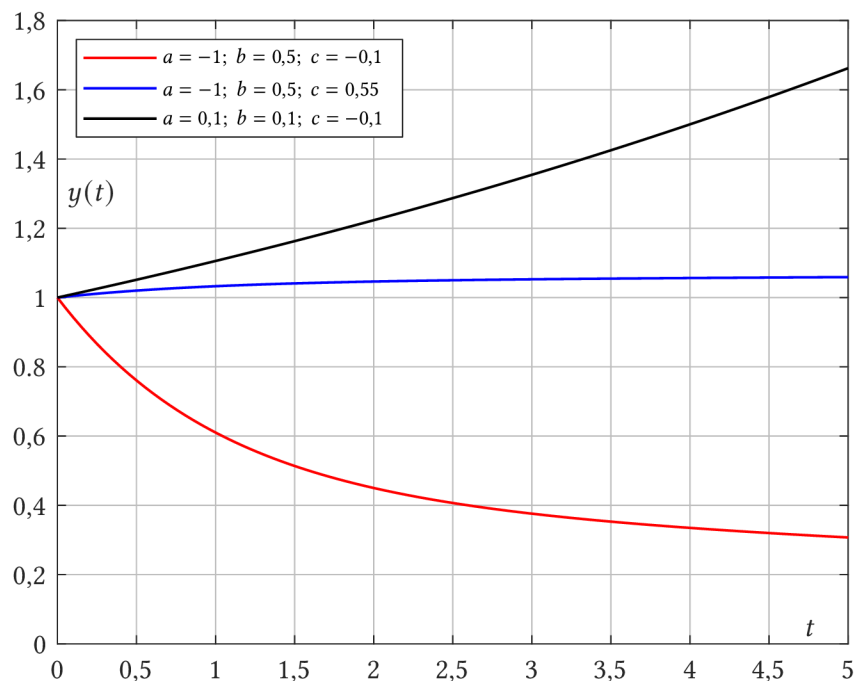
V každém z následujících obrázků budou zastoupeny tyto situace: atraktivní nulové řešení a dva případy, kdy nulové řešení není atraktivní. V prvním případě nebyla splněna ani jedna z podmínek (2.16) a (2.17) a v druhém byl porušen předpoklad $a < 0$. Sledujeme zde také, jakým způsobem ovlivňuje průběh řešení parametr q .



Obr. 9: Průběhy řešení pro $q = 0,9; m = 2; l = 1; \phi = 1; t_0 = 0$



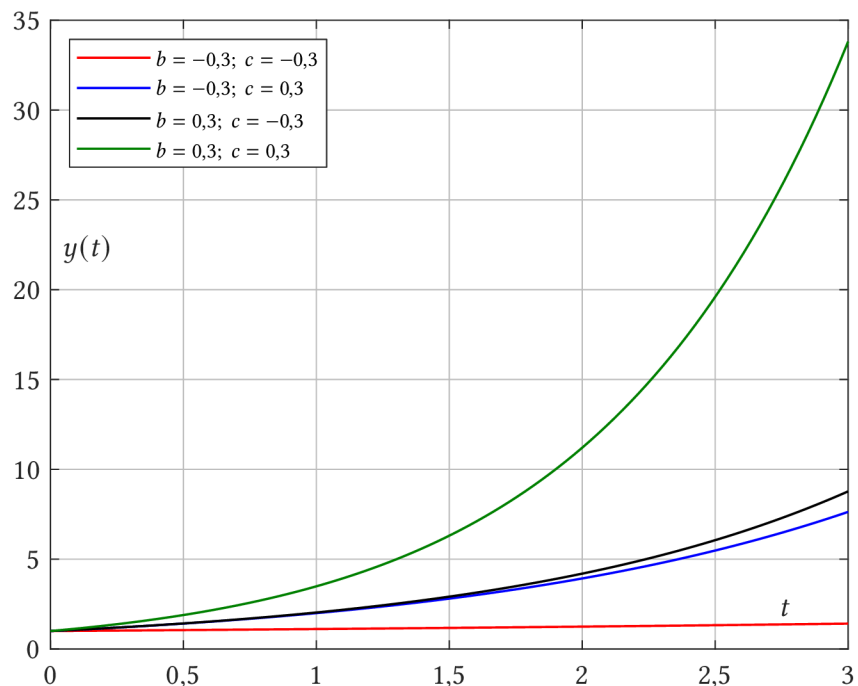
Obr. 10: Průběhy řešení pro $q = 0,5; m = 2; l = 1; \phi = 1; t_0 = 0$



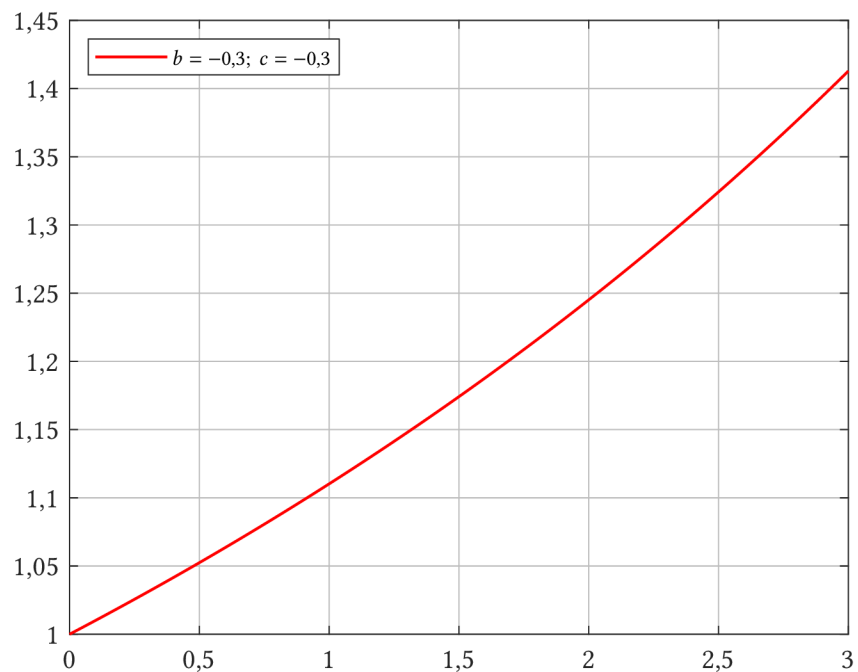
Obr. 11: Průběhy řešení pro $q = 0,1; m = 2; l = 1; \phi = 1; t_0 = 0$

Lze vidět, že volba parametru q ovlivňuje rychlost přimykání řešení počáteční úlohy k nule v atraktivním případě a rychlost růstu řešení v případě, kdy nulové řešení není atraktivní.

V dalším se zaměříme na rovnice, u kterých dochází k porušení předpokladu $a < 0$. Ilustrujme na následujících obrázcích čtyři situace, kdy jsou splněny podmínky (2.16), (2.17), ale nulová řešení rovnic nejsou atraktivní.

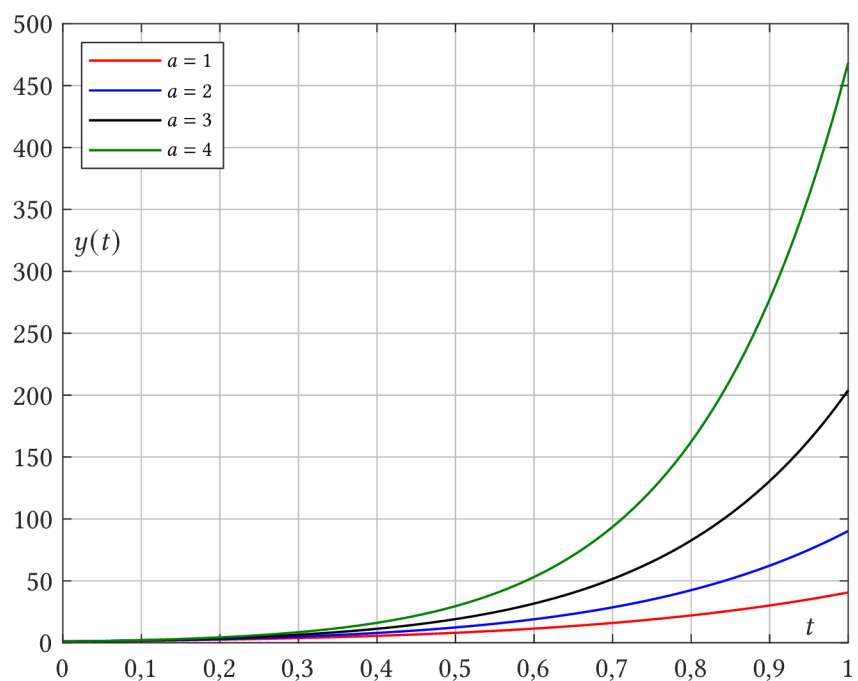


Obr. 12: Průběhy řešení pro $a = 0,7; q = 0,9; m = 2; l = 1; \phi = 1; t_0 = 0$

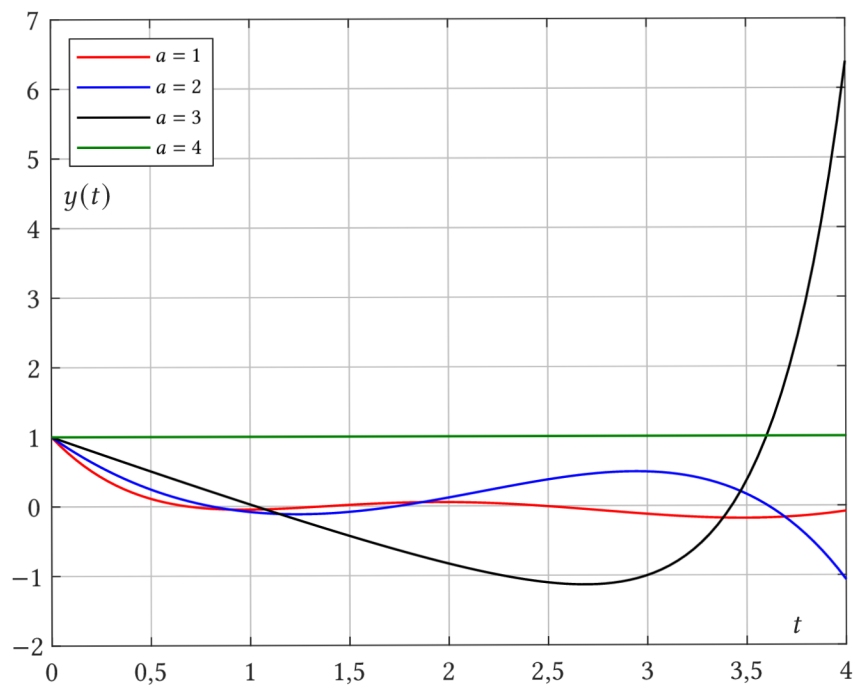


Obr. 13: Průběh řešení pro $a = 0,7; q = 0,9; m = 2; l = 1; \phi = 1; t_0 = 0$

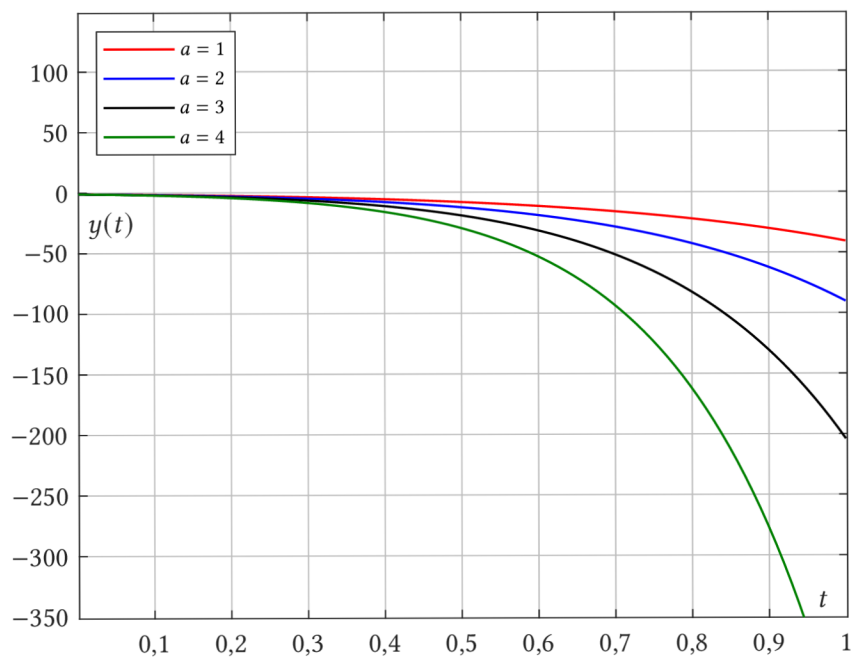
Při vykreslování průběhů řešení v situaci, kdy nulové řešení není atraktivní, lze pozorovat tři případy. Řešení úloh rostou nad, případně klesají pod všechny meze, v druhém případě dochází nejprve k zákmitům a třetí případ představuje situaci, kdy platí $b + c = -a$ a řešení tvoří konstantní funkce o hodnotě počáteční podmínky.



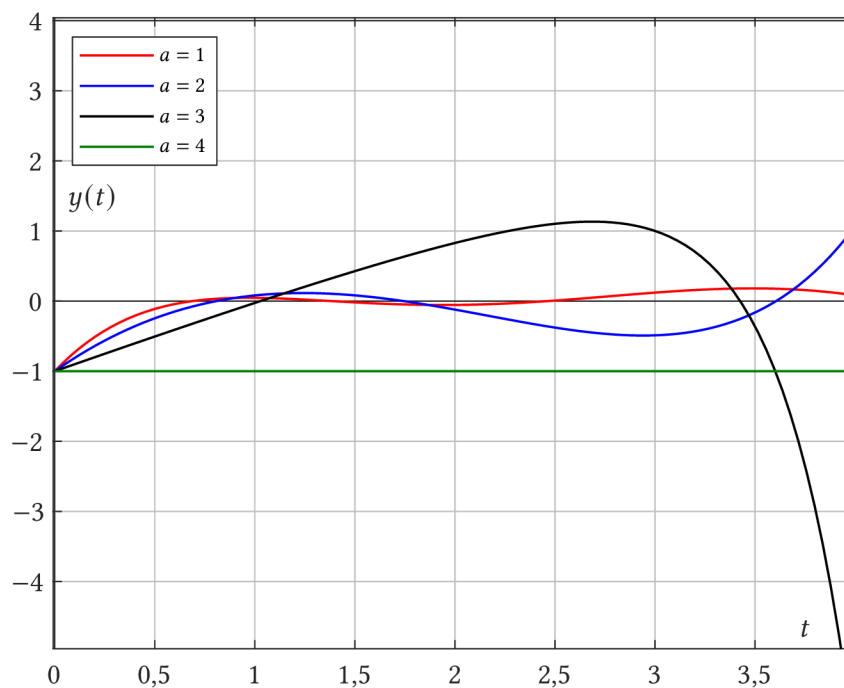
Obr. 14: Průběhy řešení pro $b = 3; c = 1; q = 0,8; m = 2; l = 1; \phi = 1; t_0 = 0$



Obr. 15: Průběhy řešení pro $b = -3; c = -1; q = 0,8; m = 2; l = 1; \phi = 1; t_0 = 0$

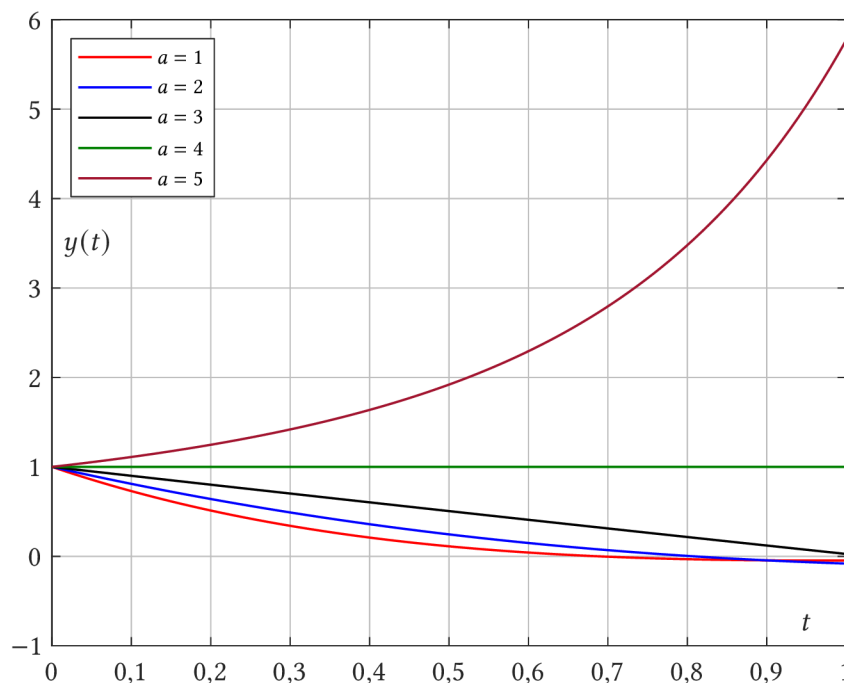


Obr. 16: Průběhy řešení pro $b = 3; c = 1; q = 0,8; \phi = -1; t_0 = 0$



Obr. 17: Průběhy řešení pro $b = -3$; $c = -1$; $q = 0,8$; $m = 2$; $l = 1$; $\phi = -1$; $t_0 = 0$

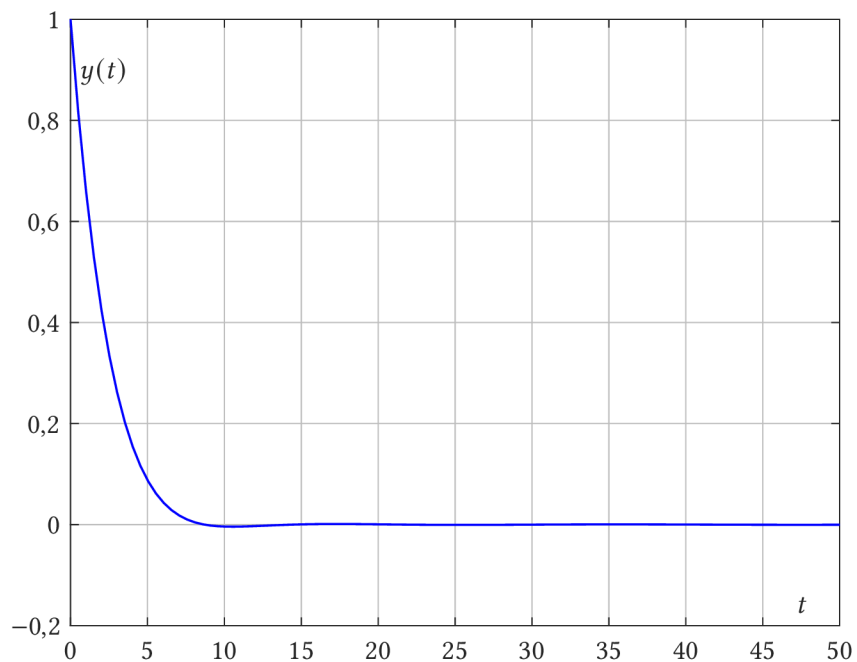
Následující situace doplňuje Obr. 15 o řešení rovnice pro koeficient a , který je roven pěti. Jsou zde znázorněny všechny tři zmíněné situace.



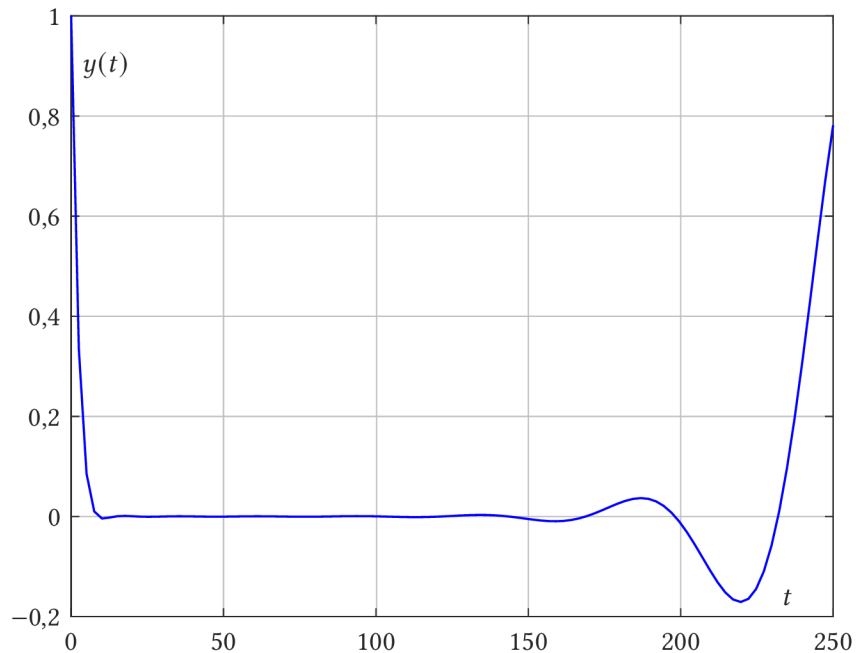
Obr. 18: Průběhy řešení pro $b = -3$; $c = -1$; $q = 0,8$; $m = 2$; $l = 1$; $\phi = 1$; $t_0 = 0$

Z předcházejících obrázků lze vypožorovat, že se divergence řešení rychleji projevuje s rostoucím a . Zákřivky vyskytující se u některých průběhů řešení můžou při vyšetřování atraktivity nulového řešení působit jistě komplikace. Na následujícím obrázku je znázorněn případ,

který na první pohled vypadá jako atraktivní, ale skutečnost, že nulové řešení není atraktivní, se projeví až pro vyšší hodnoty t .



Obr. 19: Průběh řešení pro $a = 0$; $b = -0,3$; $c = -0,1$; $q = 0,9$; $m = 3$; $l = 1$; $\phi = 1$; $t_0 = 0$



Obr. 20: Průběh řešení pro $a = 0$; $b = -0,3$; $c = -0,1$; $q = 0,9$; $m = 3$; $l = 1$; $\phi = 1$; $t_0 = 0$

4 Závěr

V úvodu této práce bylo uvedeno několik potřebných poznatků z teorie zpožděných diferenciálních rovnic. Dále jsme zavedli zkoumanou třídu zpožděných diferenciálních rovnic a popsali funkce, které generují zpoždění. Poté bylo uvedeno několik poznatků z teorie lineárních diferenciálních rovnic, které byly využity v následující sekci věnované atraktivitě nulového řešení. V ní je předvedena nutná a postačující podmínka atraktivity nulového řešení rovnic ze zkoumané třídy a také její modifikace pro tříčlenné rovnice. Poslední kapitola je věnována numerickým experimentům zaměřeným především na ověření uvedené hypotézy a popisu použité numerické metody.

Provedené experimenty naznačují, že skutečně platí nadbytečnost předpokladu $\Re(a) < 0$ z vyšetřované hypotézy. Experimenty však pracovaly pouze s tříčlennými rovnicemi multipantografu s reálnými koeficienty. Na práci je tedy možné navázat vyšetřováním atraktivity nulového řešení a ověřováním zmíněné hypotézy pro obecnější rovnice.

Reference

- [1] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. On stability of linear differential equations with commensurate delayed arguments. *Applied mathematics letters* [online]. Elsevier, 2022, **125**, 107750 [cit. 2022-03-02]. ISSN 0893-9659. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089396592100402X>
- [2] DRIVER, R. D. *Ordinary and Delay Differential Equations*. Springer, 1977. ISBN 978-1-4684-9467-9.
- [3] ELAYDI, Saber N. *An introduction to difference equations*. 3rd. ed. New York: Springer, 2005. ISBN 0-387-23059-9.
- [4] KOLMANOVSKIJ, Vladimir Borisovič a Anatolij Dmitrijevič MYŠKIS. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. ISBN 0-7923-5504-0.
- [5] KUCZMA, Marek, Bogdan CHOCZEWSKI a Roman GER. *Iterative functional equations*. New York: Cambridge University Press, 1990. ISBN 0-521-35561-3.
- [6] LIU, M.Z a Dongsong LI. Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation. *Applied mathematics and computation* [online]. NEW YORK: Elsevier, 2004, **155**(3), 853-871 [cit. 2022-04-03]. ISSN 0096-3003. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300303008245>
- [7] MATSUNAGA, Hideaki. Exact stability criteria for delay differential and difference equations. *Applied mathematics letters* [online]. OXFORD: Elsevier, 2007, **20**(2), 183-188 [cit. 2022-05-02]. ISSN 0893-9659. Dostupné z: <https://www-sciencedirect-com.ezproxy.lib.vutbr.cz/science/article/pii/S0893965906001212>
- [8] CERMAK, Jan a Jiri JANSKY. Explicit stability conditions for a linear trinomial delay difference equation. *Applied mathematics letters* [online]. OXFORD: Elsevier, 2015, **43**, 56-60 [cit. 2022-04-05]. ISSN 0893-9659. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965914003838>
- [9] ANDRONOV, A. A. a A. G. MAIER. Simplest linear systems with retardation. *Avtomat. I Telemekh.* 1946, **7**, 95-106.
- [10] HAYES, N. D. Roots of the Transcendental Equation Associated with a Certain Difference-Differential Equation. *Journal of the London Mathematical Society* [online]. Oxford University Press, 1950, **s1-25**(3), 226-232 [cit. 2022-05-02]. ISSN 0024-6107. Dostupné z: <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1112/jlms/s1-25.3.226>
- [11] MASET, S. Stability of Runge-Kutta methods for linear delay differential equations. *Numerische Mathematik* [online]. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2000, **87**(2), 355-371 [cit. 2022-05-02]. ISSN 0029-599X. Dostupné z: <https://link.springer.com/article/10.1007/s002110000179>
- [12] NAKAJIMA, Hiroyuki. On the Stability of a Linear Retarded Differential-Difference Equation. *Funkcialaj Ekvacioj* [online]. 2014, **57**(1), 43-56 [cit. 2022-05-02]. ISSN 0532-8721. Dostupné z: https://www.jstage.jst.go.jp/article/fesi/57/1/57_43/_article

- [13] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. On stabilization of unstable steady states of autonomous ordinary differential equations via delayed feedback controls. *Physica D* [online]. Elsevier B.V, 2020, **404**, 132339 [cit. 2022-05-02]. ISSN 0167-2789. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278918304834?via%3Dihub>
- [14] MAHAFFY, Joseph M. a Timothy C. BUSKEN. Regions of stability for a linear differential equation with two rationally dependent delays. *Discrete and Continuous Dynamical Systems- Series A* [online]. 2015, **35**(10), 4955-4986 [cit. 2022-05-02]. ISSN 1553-5231. Dostupné z: <http://aimsciences.org//article/doi/10.3934/dcds.2015.35.4955>
- [15] SHAMPINE, L.F. a S. THOMPSON. Solving DDEs in Matlab. *Applied numerical mathematics* [online]. AMSTERDAM: Elsevier B.V, 2001, **37**(4), 441-458 [cit. 2022-05-02]. ISSN 0168-9274. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168927400000556>
- [16] ČERMÁK, Libor. *Numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic*. Brno: Litera Brno, 2013. ISBN 978-80-903586-7-6.
- [17] SHAMPINE, L.F. Solving ODEs and DDEs with residual control. *Applied numerical mathematics* [online]. AMSTERDAM: Elsevier B.V, 2005, **52**(1), 113-127 [cit. 2022-05-02]. ISSN 0168-9274. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168927404001187>
- [18] CULL, Paul, Mary FLAHERTY a Robby ROBSON. *Difference Equations: From Rabbits to Chaos*. New York: Springer, 2005. ISBN 9780387276458.
- [19] SHAMPINE, L. F. *Numerical solution of ordinary differential equations*. New York: Chapman & Hall, 1994. ISBN 9780367449568.
- [20] BREDÁ, Dimitri, Stefano MASET a Rossana VERMIGLIO. *Stability of linear delay differential equations: a numerical approach with MATLAB*. New York: Springer, 2015. ISBN 9781493921065.