

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

**UŽITÍ METOD SKLÁDÁNÍ  
PAPÍRU VE VÝUCE  
MATEMATIKY**

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

**Vedoucí práce**  
prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

**Vypracoval**  
Luděk Mráz

duben 2013

## Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Užití metod skládání papíru ve výuce matematiky jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .....

## Poděkování

Chtěl bych tímto poděkovat prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., který byl vedoucím mé bakalářské práce. Děkuji mu především za jeho cenné rady a ochotu při spolupráci na sestavení mé bakalářské práce.

Anotace:

Cílem bakalářské práce Užití metod skládání papíru ve výuce matematiky je poukázat na význam origami v matematice a na jeho následné využití jakožto vhodné pomůcky v hodinách matematiky na základní, potažmo na střední škole. Převážná část práce je tak věnována praktickým problémům, tzn. konstrukcím rovinných a prostorových útvarů a řešením zajímavých, respektive problémových úloh, které jsou všechny doplněny o grafická řešení a důkazy.

Annotation:

The target of the Bachelor's thesis "Use of paper folding techniques in teaching mathematics" is to highlight the importance of origami in mathematics and its subsequent use as a suitable tool in lessons of mathematics in primary or in secondary schools. Most of the work is devoted to practical problems. It means constructions of planar and spatial figures and solving interesting or problematic tasks which are accompanied by graphics solutions and proofs.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Origami</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Vznik a vývoj origami</b>	<b>9</b>
3.1	Japonsko a origami . . . . .	9
3.2	Evropa a origami . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Formáty papíru</b>	<b>11</b>
4.1	Stříbrný obdélník . . . . .	11
4.2	Zbytkový obdélník . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Origami a geometrie</b>	<b>15</b>
5.1	Axiomy origami . . . . .	15
5.2	Konstrukce tečny paraboly . . . . .	16
5.3	Trisekce úhlu . . . . .	17
5.4	Konstrukce n-úhelníků . . . . .	19
5.4.1	Konstrukce trojúhelníku . . . . .	20
5.4.2	Konstrukce čtyřúhelníku . . . . .	24
5.5	Geometrická tělesa . . . . .	28
5.6	Důkaz Pythagorovy věty . . . . .	31
5.7	Egyptský trojúhelník . . . . .	33
5.8	Dělení strany čtverce . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>37</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Skládání papíru (paper folding, origami) je dnes rozšířeno po celém světě. Většina z nás má tuto činnost spojenou pouze s vytvářením dekorativních vzorů a obrazců, častěji snad ještě se skládáním zvířecích motivů. Ovšem využití origami se dotýká hned několika vědeckých disciplín, matematiku nevyjímaje. Skládání papíru má v matematice, potažmo geometrii, poměrně značný význam. Cílem této práce je zaměřením se na techniky skládání, které lze využít při konstrukci rovinných obrazců, prostorových těles, nebo i k řešení zajímavých, či problémových úloh.

Ve druhé kapitole se na úvod seznámíme s pojmem origami a jeho dvěma nejzákladnějšími podobami a krátce se zmíníme i o jeho využití ve vědeckých disciplínách.

Následující kapitola, která je rozdělena do dvou podkapitol, stručně pojednává o vzniku a vývoji origami. V první části této kapitoly se zaměříme na asijský kontinent, konkrétně na Čínu, která zřejmě jako první položila základy origami, a dále na Japonsko, které následně zdokonalovalo techniky skládání a navíc jako první dalo této činnosti označení origami. Druhá část je věnována vzniku a vývoji origami v Evropě, zejména pak ve Španělsku, které je považováno za kolébkou evropského origami. Na závěr této podkapitoly se zmíníme o nejvýznamnějších evropských osobnostech, které se zabývaly technikami skládání.

Ve čtvrté kapitole, která je rovněž členěna do dvou podkapitol, se zmíníme o tvarech papíru, především pak formátu papíru řady A, a to pro jeho velmi zajímavé a užitečné vlastnosti. Seznámíme se s pojmy stříbrný a zbytkový obdélník a dokážeme si jednoduchým výpočtem, že zbytkový obdélník je taktéž stříbrným obdélníkem.

V páté, nejrozsáhlejší kapitole, se zaměříme na využití origami v matematice. Nejprve si ukážeme systém origami axiomů, z nichž postupně přejdeme ke konstrukcím, které z těchto axiomů vycházejí: konstrukce tečny paraboly a trisekce úhlu. Následuje rozsáhlá podkapitola, týkající se konstrukcí  $n$ -úhelníků. Konstrukce jsou znázorněny pomocí obrázků, které jsou zároveň doplněny o popis řady geometrických vlastností, jež můžeme

během skládání pozorovat. Od rovinných obrazců se dostaneme ke geometrickým tělesům, kde si ukážeme dva diagramy pro konstrukci pravidelného čtyřstěnu a krychle. Kapitulu ale i celou práci pak zakončíme důkazem Pythagorovy věty a dvěma zajímavými úlohami.

Práce je zpracována v typografickém systému  $\text{\LaTeX}$  a obrázky (vyjma autorových fotografií) jsou vytvořeny v programu DGS GeoGebra.

# Kapitola 2

## Origami

Slovo „origami“ pochází z Japonska a je složeno ze dvou slov *oru* - skládat a *kami* - papír. Jedná se tedy o techniku skládání, která má své kořeny v Japonsku. Doba vzniku se datuje k 9. století našeho letopočtu a v průběhu dalších staletí se tato technika postupně rozšiřuje do všech koutů světa. V současnosti existují dvě podoby origami: za prvé se jedná o **tradiční origami**, jehož skládání spočívá v manipulaci s jedním kusem papíru, bez použití lepidla a nůžek. Zároveň je však zakázáno jakékoliv další dozdobování a dokreslování. Postup tvoření jednotlivých skládanek je zaznamenán do tzv. diagramů, kde je každý krok postupně zobrazen, případně doplněn výstižným popisem. To znamená, že ať se o skládání daného origami pokouší kdokoliv, měl by na základě diagramu pokaždé dojít ke stejnému výsledku. Autoři těchto tradičních origami nejsou známi.

Druhým typem je **moderní origami**. Zde je velmi důležitá fantazie skládajícího. Povoleno je skládání z více kusů papíru, které mohou být následně poslepovány, nebo do sebe zasouvány. U moderních origami je umožněno používání nůžek, ale i dokreslování, které se hojně využívá k dozdobování zvířecích origami.

Origami neplní pouze funkci zábavy, ale můžeme se s ním setkat i ve vědě. Příkladem budiž využití v astronomii, kde se tyto techniky využívají ke skládání čím dál větších vesmírných teleskopů tak, aby se s nimi dalo ve vesmíru snadněji manipulovat. S origami se dále setkáme v medicíně, optice a automobilovém průmyslu. [2]



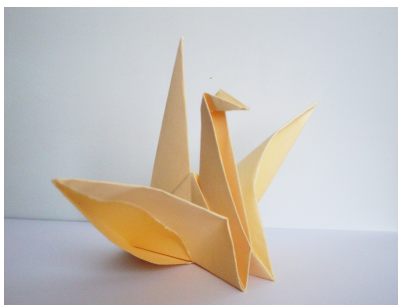
# Kapitola 3

## Vznik a vývoj origami

### 3.1 Japonsko a origami

Vznik origami se datuje do doby vynálezu papíru, který jako první začali vyrábět Číňané zhruba před 2000 lety. Ti také používali papír na skládání různých nádob a krabiček. Ovšem po rozšíření čínského vynálezu na japonské území kolem roku 600 našeho letopočtu dochází v zemi vycházejícího slunce k postupnému zdokonalování technik skládání papíru a dokonce i k pojmenování této činnosti. Z těchto důvodů bývá origami označováno jako japonské umění. Jelikož výroba papíru byla v tehdejší době ekonomicky nákladná, bylo origami v Japonsku používáno výlučně pro náboženské účely. Zdobeny byly převážně šintoistické svatyně. Příkladem je vymezování hranic posvátných území svatyně pomocí papírových řetězů.

Až o několik století později, přesněji od 17. století, nabylo origami dalších významů. Tím hlavním bylo skládání pro zábavu. V této době bylo v Japonsku známo několik desítek skládanek, převážně zvířat a postav. Nejoblíbenější origami skládanou se stal papírový jeřáb (*orizuru*), který byl poprvé složen na počátku 19. století. Pro Japonce je *orizuru* symbolem dlouhého života, klidu a míru. Proto je můžeme velmi často vídat na japonských obydlích.



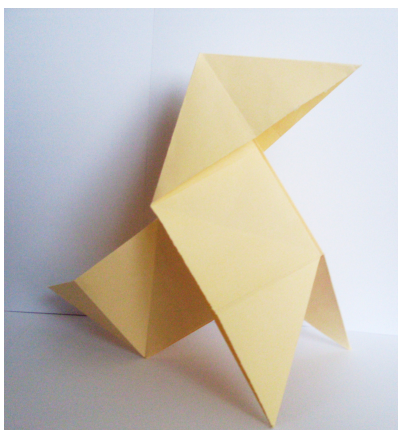
Obrázek 3.1: Jeřáb (*orizuru*)

Umění origami se dále vyvíjelo a na konci 19. století dosáhlo dnešní podoby. Začaly se vydávat knihy a učebnice. Dnes se už děti v mateřských školách setkávají s jednoduchými skládkami a na základní škole je umění origami součástí učebních osnov. V současnosti se počty origami skládanek odhadují ve statisících. [2, 5, 11]

## 3.2 Evropa a origami

Na území Evropy se papír objevil podstatně později, někdy počátkem 2. tisíciletí, což značí jistý deficit oproti tehdejším východním říším. To ovšem nic nemění na faktu, že i zde bylo a stále je skládání papíru velmi populární. O tom, jaký původ má origami na evropském kontinentu, můžeme spekulovat. Nabízí se možnost postupného příchodu origami z Japonska, ovšem existují důkazy, které hovoří jinak. S největší pravděpodobností vzniklo evropské origami nezávisle na japonském. Důkazem jsou odlišnosti ve způsobu skládání jednotlivých skládanek u evropského a japonského origami.

Za jakousi kolébkou evropského origami lze považovat Španělsko. V období od 8. do 15. století bylo jižní Španělsko obléháno Maury (větve muslimů ze severní Afriky), kteří využívali papírové skládky ke studiu geometrie. Ze Španělska také pochází údajně nejstarší papírová skládanka Evropy, jejíž stáří se odhaduje zhruba na 700 let. Jedná se o *pajaritu*, u nás spíše známou pod označením koník.



Obrázek 3.2: *Pajarita*

Skládáním papíru se samozřejmě nezabývali pouze Španělé. Někteří odborníci se domnívají, že skládáním papíru se věnoval i *Leonardo da Vinci (1452-1519)*. Ten údajně využíval skládání při svých pokusech o vytvoření létajícího stroje. Za zmínku stojí ještě jedna osobnost a tou byl *Friedrich Fröbel (1782-1852)*, zakladatel předškolních zařízení, ve kterých se děti kromě didaktických a pohybových her setkávali i se skládáním jednoduchých origami. [2, 5, 11, 12, 13]

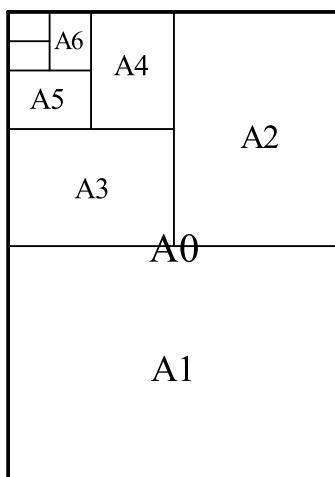
# Kapitola 4

## Formáty papíru

Většina origami se skládá z papíru ve tvaru čtverce. Mezi jeho nejběžnější formáty patří  $6 \times 6 \text{ cm}$ ,  $17 \times 17 \text{ cm}$  a  $21 \times 21 \text{ cm}$ . Nicméně pro naše geometrické účely se v této práci budeme setkávat se skládkami, které jsou složeny z formátu A4. A právě u tohoto, ale i u dalších formátů řady A se zastavíme, neboť nám nabízejí zajímavé vlastnosti, které stojí za povšimnutí. [5]

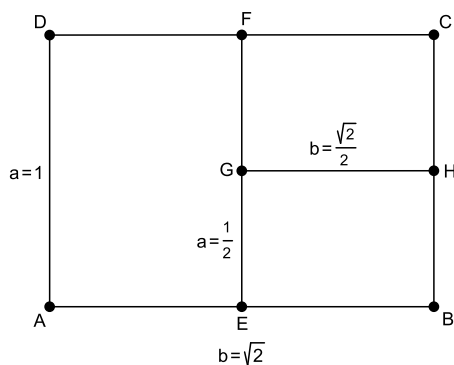
### 4.1 Stříbrný obdélník

Všechny formáty řady A mají strany v poměru  $1 : \sqrt{2}$ . Výchozím formátem je formát A0, jehož plocha je přesně  $1 \text{ m}^2$ . Následující formát A1 vznikne přepůlením delší strany formátu A0. Tak postupně vznikají další formáty (A2, A3, A4,...). Nejběžnější formát A4 má rozměry  $210 \times 297 \text{ mm}$ . Pro tento formát se také vžilo označení stříbrný obdélník, který zavedla britská origami společnost v roce 1979. [10, 15]



Obrázek 4.1: Formát papíru řady A

Pomocí podobnosti si ukážeme, že formáty papíru řady A mají strany v poměru  $1 : \sqrt{2}$ . Mějme obdélník  $ABCD$  se stranami  $a = 1$  a  $b = \sqrt{2}$ . Tento obdélník přeložíme na polovinu podél delší strany  $b$ . Získáme tak obdélník  $EBCF$  se stranami  $a = 1$  a  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Nakonec přeložíme na polovinu i obdélník  $EBCF$ , nyní podél delší strany  $a$ . Dostaneme tak obdélník  $EBHG$  se stranami  $a = \frac{1}{2}$  a  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (viz Obr. 4.2).



Obrázek 4.2: Podobnost obdélníků

Nyní ověříme, že obdélníky  $EBCF$  a  $EBHG$  jsou podobné s obdélníkem  $ABCD$ , tj. mají strany v poměru  $1 : \sqrt{2}$ .

1. Poměr stran obdélníku  $EBCF$

$$\begin{aligned} a : b \\ 1 : \frac{\sqrt{2}}{2} \quad / \cdot \sqrt{2} \\ \sqrt{2} : 1 \end{aligned}$$

2. Poměr stran obdélníku  $EBHG$

$$\begin{aligned} a : b \\ \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} \quad / \cdot 2 \\ 1 : \sqrt{2} \end{aligned}$$

Obdélníky  $EBCF$  a  $EBHG$  jsou podobné s obdélníkem  $ABCD$ , neboť jejich strany jsou v poměru  $1 : \sqrt{2}$ . To znamená, že strany jakéhokoliv formátu papíru řady A jsou v poměru  $1 : \sqrt{2}$ .

Pro ilustraci bychom si mohli spočítat rozměry základního formátu A0, víme-li, že obsah tohoto formátu se stranami  $a$  a  $a\sqrt{2}$  je přesně  $1m^2$ . Tedy

$$S = a \cdot a\sqrt{2}$$

$$1 = a^2\sqrt{2}$$

$$a = 0,841m, \quad a\sqrt{2} = 1,189m$$

Základní formát A0 má tedy rozměry 841x1189 *mm*. V následující tabulce jsou uvedeny rozměry nejběžnějších formátů řady A.

Formát řady A	Rozměry [ <i>mm</i> ]
A1	595x841
A2	420x595
A3	297x420
A4	210x297
A5	149x210

Poněvadž obsah následujícího obdélníku je vždy poloviční oproti obdélníku předchozímu, můžeme mluvit o geometrické posloupnosti s koeficientem  $q = \frac{1}{2}$  s počátečním členem posloupnosti  $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Potom posloupnost obsahů nekonečného počtu obdélníků vypočteme následovně:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}^\infty - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$s_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{-1}{\frac{-1}{2}}$$

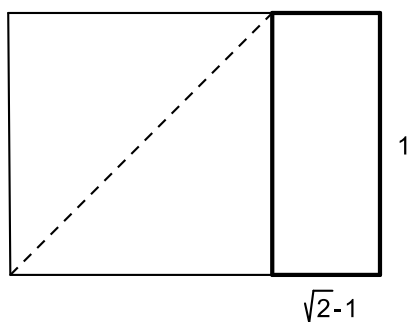
$$s_n = \sqrt{2}$$

Závěrem je, že  $s_n = S = \sqrt{2}$ .

Složíme-li z formátu A4 čtverec jehož strana má délku 1, je délka jeho úhlopříčky rovna  $\sqrt{2}$ . Ta je shodná s délkou delší strany obdélníku. Tuto skutečnost je možné využít na konstrukci rovnoramenného trojúhelníku. (viz str. 22-24). [15]

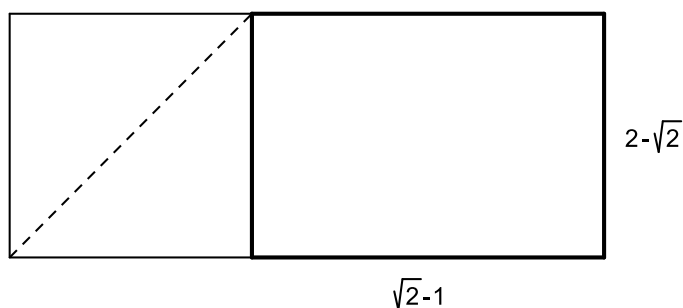
## 4.2 Zbytkový obdélník

Jedná se o takový obdélník, který získáme po odstranění největšího možného čtverce ze stříbrného obdélníku. Jeho strany jsou v poměru  $(\sqrt{2} - 1) : 1$ .



Obrázek 4.3: Zbytkový obdélník

I ze zbytkového obdélníku lze opět získat stříbrný obdélník a to tak, že z něj odstraníme největší možný čtverec. Poměr stran takového stříbrného obdélníku je potom  $(\sqrt{2}-1) : (2-\sqrt{2})$ . [15]



Obrázek 4.4: Stříbrný obdélník získaný ze zbytkového obdélníku

Je na snadě si dokázat, že tento poměr stran skutečně odpovídá poměru stran stříbrného obdélníku, neboť na první pohled to až tak zřejmé není. Vezmeme si tedy délky stran údajného stříbrného obdélníku a budeme upravovat výraz  $\frac{(\sqrt{2}-1)}{(2-\sqrt{2})}$ .

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{2}-1)}{(2-\sqrt{2})} &= \frac{(\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2}+2-2-\sqrt{2}}{4-2} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}(2-1)}{2} = \frac{\sqrt{2}(2-1)}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2(2-1)}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Výsledek upraveného výrazu nám skutečně dává za pravdu, že se jedná o stříbrný obdélník, jelikož jeho strany jsou v poměru  $1 : \sqrt{2}$

# Kapitola 5

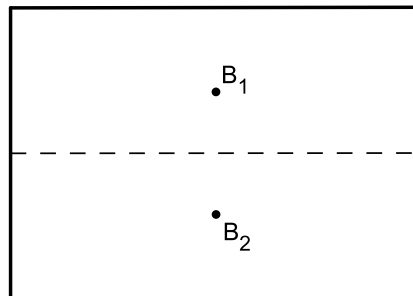
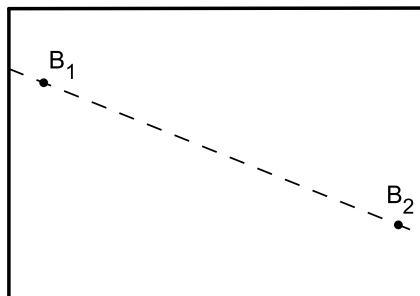
## Origami a geometrie

### 5.1 Axiomy origami

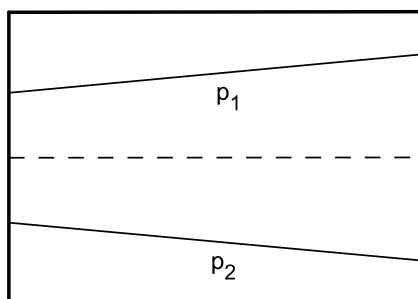
Tak jako v geometrii existují tzv. Euklidovy postuláty, tak i v origami se objevuje podobný systém axiomů. Doposud nejmocnější množinu axiomů formuloval italsko-japonský matematik *Humiaki Huzita (1924-2005)* a to v práci *Understanding Geometry through Origami Axioms* [1] publikované v roce 1991. Jedná se o šest axiomů, které se týkají matematických principů skládání papíru. Pomocí těchto Huzitových pravidel můžeme dojít k řešením i u konstrukcí, které pomocí pravítka a kružítka nejsou řešitelné. Pojd'me si tedy oněch šest axiomů nyní představit.

**O1:** *Jsou li dány body  $B_1$  a  $B_2$ , potom můžeme složit hranu tak, že bude procházet body  $B_1$  a  $B_2$ .*

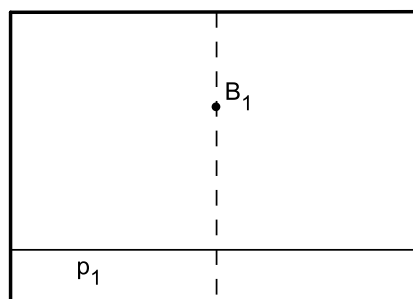
**O2:** *Jsou li dány body  $B_1$  a  $B_2$ , potom můžeme složit hranu tak, že bod  $B_1$  bude na bodu  $B_2$ .*



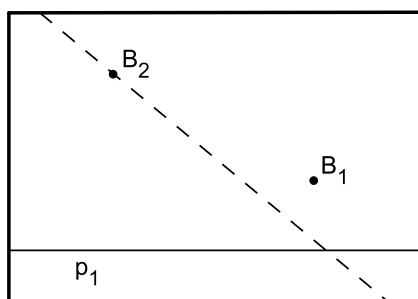
**O3:** Jsou-li dány přímky (hrany)  $p_1$  a  $p_2$ , můžeme složit hranu tak, aby přímka  $p_1$  ležela na přímce  $p_2$ .



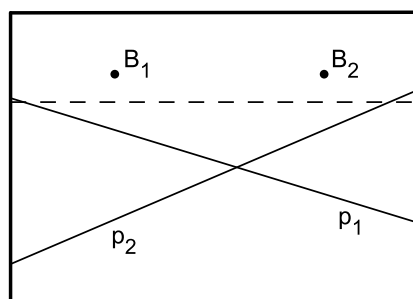
**O4:** Je-li dán bod  $B_1$  a přímka  $p_1$ , můžeme složit hranu, která je kolmá k  $p_1$  a prochází bodem  $B_1$ .



**O5:** Jsou-li dány body  $B_1, B_2$  a přímka  $p_1$ , můžeme složit hranu tak, aby bod  $B_1$  ležel na přímce  $p_1$  a zároveň tato hrana procházela bodem  $B_2$ .



**O6:** Jsou-li dány body  $B_1, B_2$  a přímky  $p_1, p_2$ , můžeme složit hranu tak, aby bod  $B_1$  ležel na přímce  $p_1$  a zároveň bod  $B_2$  ležel na přímce  $p_2$ .



[1, 5]

## 5.2 Konstrukce tečny paraboly

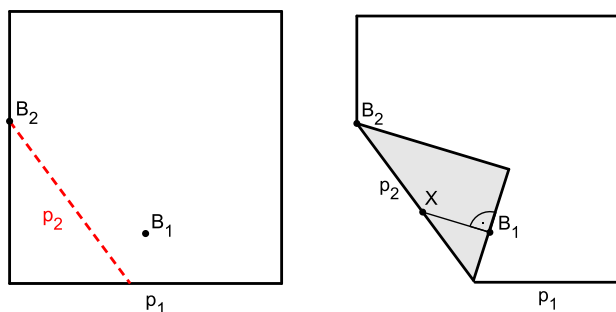
Konstrukci tečny k parabole provedeme podle 5. axiomu, jehož znění si pro potřeby naší konstrukce můžeme upravit do této podoby:



necht' bod  $B_1$  je ohniskem paraboly a přímka  $p_1$  řídící přímkou paraboly. Potom přímku  $p_2$ , která vznikla složením podle axiomu 5, nazveme tečnou paraboly.

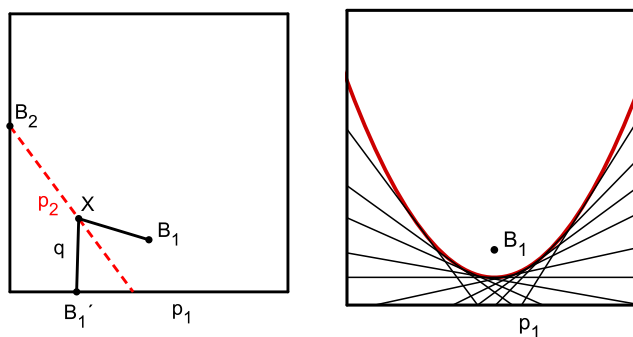
**Řešení:** Necht'  $p_1$  je přímka, která tvoří spodní okraj čtvercového papíru. Dále bod  $B_1$  leží na ose spodního okraje papíru, kde jsme si zvolili přímku  $p_1$ . Bod  $B_2$  leží libovolně na levém (popř. pravém) okraji papíru.

Nyní provedeme složení podle 5. axiomu (viz Obr. 5.1). Tím získáme přímku  $p_2$ , jež prochází bodem  $B_2$  a zároveň přímka  $p_1$  prochází bodem  $B_1$ . Potom veďme úsečku kolmou na přímku  $p_1$  a procházející bodem  $B_1$ . Na přímce  $p_2$  získáme průsečík  $X$ .



Obrázek 5.1: Konstrukce tečny paraboly - Krok 1,2

Po rozložení zjistíme, že  $|B_1X| = |B'_1X|$ . Nakonec z definice paraboly vyplývá, že bod  $X$  leží na parabole s ohniskem v bodě  $B_1$  a řídící přímkou  $p_1$ .



Obrázek 5.2: Konstrukce tečny paraboly - Krok 3,4

[2, 3, 8]

### 5.3 Trisekce úhlu

Trisekce úhlu patří mezi tzv. *tři klasické problémy antické matematiky* (dalšími jsou duplikace krychle a kvadratura kruhu). Řešení těchto tří problémů je omezeno na kon-

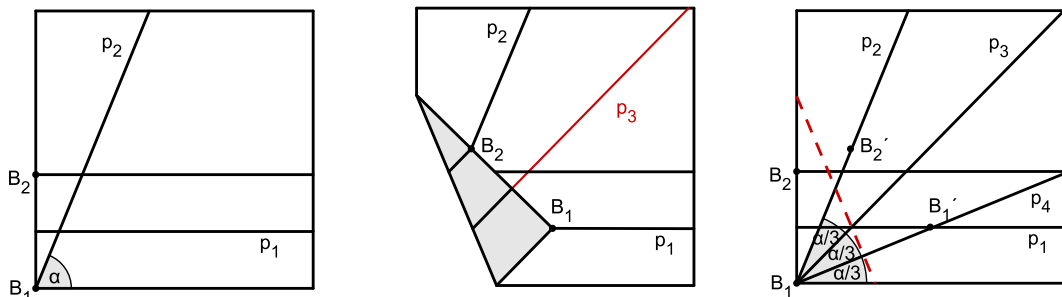
strukci pomocí pravítka a kružítka, tj. *euklidovskou konstrukci*. Zadání trisekce úhlu tedy zní:

*rozdělte pomocí euklidovské konstrukce libovolný úhel na úhly tři, jež mají stejnou velikost.*

Od středověku až po renesanci se mnoho vzdělců pokoušelo problematiku trisekce úhlu vyřešit, leč marně. V roce 1830 přišel francouzský matematik *Évariste Galois* (1811-1832) s důkazem, že trisekce úhlu pomocí euklidovské konstrukce nemá řešení. Ovšem origami nám poskytuje možnosti, které vedou k řešení i takových problémů, jako je trisekce úhlu. Ukažme si tedy postup, jak dojdeme k řešení tohoto problému.

**Řešení:** Řešení úlohy je založené na užití axiomu 6. Necht' bod  $B_1$  značí vrchol čtverce. Přímka  $p_2$  prochází bodem  $B_1$  a svírá se spodním okrajem papíru úhel  $\alpha$ . Potom proved' me složení, při kterém dostaneme 2 přímky, jež jsou rovnoběžné se spodním okrajem papíru a vzdálenosti mezi nimi jsou konstantní (prostřední přímku si označme  $p_2$ ). Bod  $B_2$  je průsečík nejsvrchnější přímky a levého okraje papíru.

Nyní proved' me složení podle axiomu 6. To znamená, že bod  $B_1$  bude ležet na přímce  $p_1$  a bod  $B_2$  na přímce  $p_2$ . Poté si narýsujeme prodloužení přímky  $p_1$ , kterou si označíme jako přímku  $p_3$ . Rozložíme zpět na čtverec a přímku  $p_3$  vedeme až k vrcholu  $B_1$ . Nakonec můžeme body  $B_1$  a  $B'_1$  vést přímku  $p_4$ . Výsledkem je tedy rozdělení úhlu  $\alpha$  na 3 shodné části.



Obrázek 5.3: Konstrukce trisekce úhlu

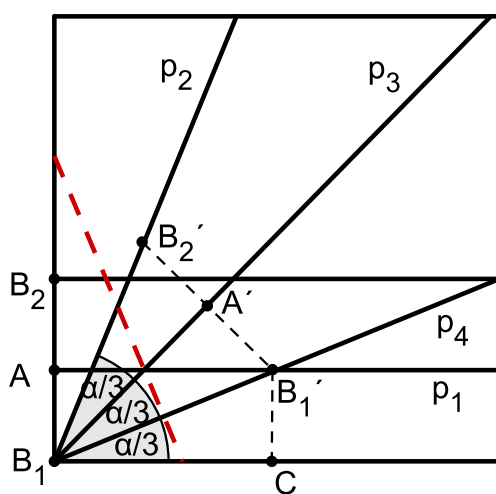
**Důkaz:** Budeme vycházet z trojúhelníků  $B_1A'B'_2$ ,  $B_1A'B'_1$  a  $B_1CB'_1$  (viz Obr. 5.4). Dokážeme-li shodnost těchto 3 trojúhelníků, je potom úhel  $\alpha$  skutečně dělen na třetiny.

Platí, že  $|AB_1| = |AB_2|$ , tedy i  $|A'B'_1| = |A'B'_2|$ . Dále strana  $A'B_1$  je společná trojúhelní-

níkům  $B_1A'B_2'$  a  $B_1A'B_1'$ . Jelikož přímka  $p_3$  je kolmá na stranu  $B_1B_2'$ , jsou trojúhelníky  $B_1A'B_2'$  a  $B_1A'B_1'$  pravouhlé s pravým úhlem u vrcholu  $A'$ . Podle věty *SUS* jsme dokázali, že  $\triangle B_1A'B_2' \cong \triangle B_1A'B_1'$ .

Nyní dokážeme shodnost trojúhelníků  $B_1A'B_1'$  a  $B_1CB_1'$ . Bod  $A'$  je souměrný s bodem  $C$  podle osy  $p_4$ , tudíž  $|B_1A'| = |B_1C|$ . Strana  $|B_1B_1'|$  je společná trojúhelníkům  $B_1A'B_1'$  a  $B_1CB_1'$ . Protože úhly u vrcholů  $A'$  a  $C$  jsou pravé, jsou trojúhelníky  $B_1A'B_1'$  a  $B_1CB_1'$  shodné podle věty *Ssu*.

Potom platí: Je-li  $\triangle B_1A'B_2' \cong \triangle B_1A'B_1'$  a zároveň  $\triangle B_1A'B_1' \cong \triangle B_1CB_1'$ , potom i  $\triangle B_1A'B_2' \cong \triangle B_1CB_1'$ . Tím máme dokázáno, že úhel  $\alpha$  je dělen na třetiny.



Obrázek 5.4: Důkaz trisekce úhlu

[2, 7, 9]

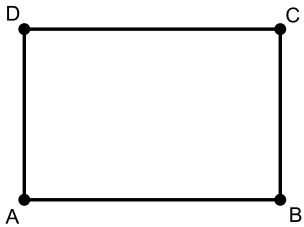
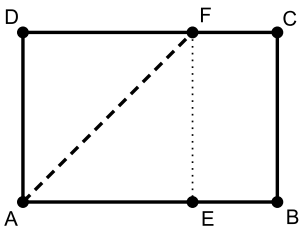
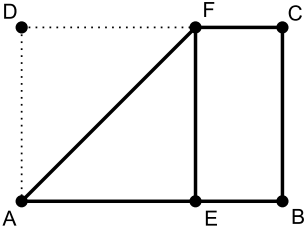
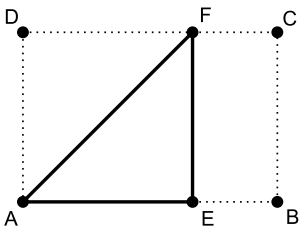
## 5.4 Konstrukce n-úhelníků

Nyní se zaměříme na konstrukci základních rovinných obrazců. Konstrukce rovinných obrazců pomocí skládání papíru, jež jsou zmíněné v této práci, nejsou nikterak složité a jsou vhodné jako školní pomůcka do hodin geometrie. Výhoda této pomůcky spočívá v její názornosti, což může vést k snadnějšímu porozumění probírané látky. Zároveň lze během skládání jednotlivých konstrukcí pozorovat již známé, či neznámé geometrické vlastnosti, které mohou vhodně posloužit při výkladu. Dalšími výhodami, které tato pomůcka má, je schopnost motivovat žáky ve studiu geometrie a dále schopnost zlepšovat jejich manuální zručnost.

Pojďme si tedy jednotlivé konstrukce představit. [19]

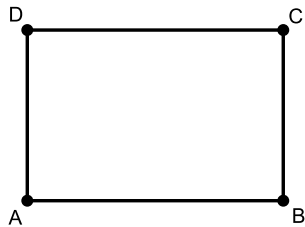
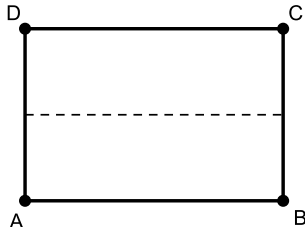
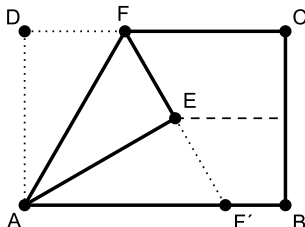
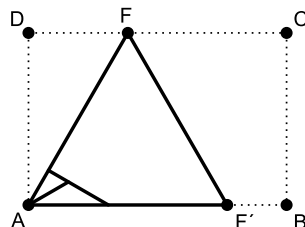
## 5.4.1 Konstrukce trojúhelníku

### Konstrukce pravoúhlého trojúhelníku

<p>Postup konstrukce</p>		
<p>Pozorované vlastnosti</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- rovnoběžník - obdélník,</li> <li>- rovnoběžky,</li> <li>- kolmice, pravý úhel.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- rovnoběžník - čtverec,</li> <li>- úhlopříčka čtverce.</li> </ul>
<p>Postup konstrukce</p>		
<p>Pozorované vlastnosti</p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>- pravoúhlý trojúhelník, os- troúhlý trojúhelník,</li> <li>- vnitřní a vnější úhly troj- úhelníku,</li> <li>- součet velikostí úhlů v trojúhelníku,</li> <li>- sčítání a odčítání, dělení úhlů.</li> </ul>

**Důkaz:** Jelikož bod  $E$  je obrazem bodu  $D$  v osové souměrnosti s úsečkou  $AF$ , jsou strany  $AD$  a  $AE$  stejně dlouhé. Zároveň strany  $AD$  a  $AE$  svírají pravý úhel. Dále, strany  $DF$  a  $EF$ , jež jsou kolmé na strany  $AD$  a  $AE$ , nám rovnoběžník doplňují na čtverec  $AEFD$ . Úsečka  $AF$  je potom úhlopříčkou čtverce  $AEFD$  a z vlastností, které má úhlopříčka čtverce víme, že nám čtverec rozdělí na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky, jejichž odvěsny jsou stejně dlouhé. Z toho tedy plyne, že trojúhelník  $AEF$  je pravoúhlý.

### Konstrukce rovnostranného trojúhelníku

<p>Postup konstrukce</p>		
<p>Pozorované vlastnosti</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- rovnoběžník - obdélník,</li> <li>- rovnoběžky,</li> <li>- kolmice, pravý úhel.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- střed strany.</li> </ul>
<p>Postup konstrukce</p>		

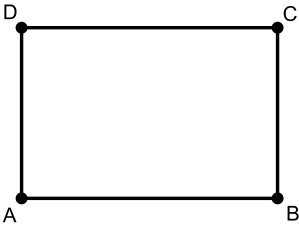
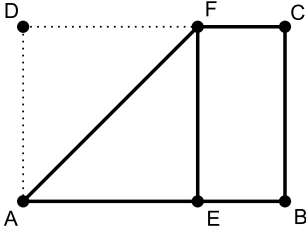
<b>Pozorované vlastnosti</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- pravoúhlý trojúhelník, ostroúhlý trojúhelník,</li> <li>- součet velikostí úhlů v trojúhelníku,</li> <li>- sčítání a odčítání, dělení úhlů,</li> <li>- shodnost trojúhelníků podle vět sss, sus, usu.</li> </ul>	- rovnostranný trojúhelník.
------------------------------	--	-----------------------------

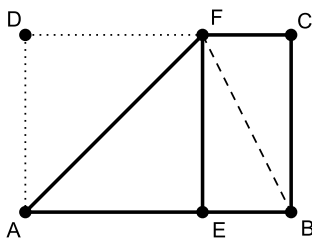
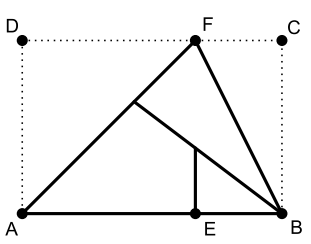
**Důkaz:** Přeložením obdélníku dostaneme hranu, která nám daný obdélník dělí na 2 shodné obdélníky. Vezmeme roh papíru (v našem případě u vrcholu  $D$ ) a přeložíme ho na již vzniklou hranu. Tím získáme pravoúhlý  $\triangle AEF$ . Pod  $\triangle AEF$  se nachází další trojúhelník, jež je s  $\triangle AEF$  shodný. Vytvoříme-li pomocí osově souměrnosti obraz bodu  $F$  podle strany  $AE$ , dostaneme bod  $F'$  a tím i další pravoúhlý  $\triangle AEF'$ . Podle věty  $SUS$  je  $\triangle AEF$  shodný s  $\triangle AEF'$ , neboť

- 1) strana  $AE$  je společná oběma trojúhelníkům,
- 2) bod  $E$  je středem strany  $FF' \Rightarrow EF \cong EF'$ ,
- 3)  $\angle FEB \cong \angle BEF'$ .

Nyní ze znalosti o vlastnostech vnitřních úhlů v trojúhelníku snadno dokážeme, že  $\triangle AFF'$  je rovnostranný. Úhel u vrcholu  $A$  je dělen na třetiny, tzn., že  $\angle FAF' = \frac{2}{3} \cdot 90^\circ = 60^\circ$ . Dále platí, že  $\angle FAE = 30^\circ$  a  $\angle AEF = 90^\circ$ . Potom  $\angle F'FA = \angle EFA = 180^\circ - (\angle FAE + \angle AEF) = 60^\circ$ . Nakonec  $\angle AFF' = 180^\circ - (\angle FAF' + \angle F'FA) = 60^\circ$  a máme dokázáno, že  $\triangle AFF'$  je rovnostranný.

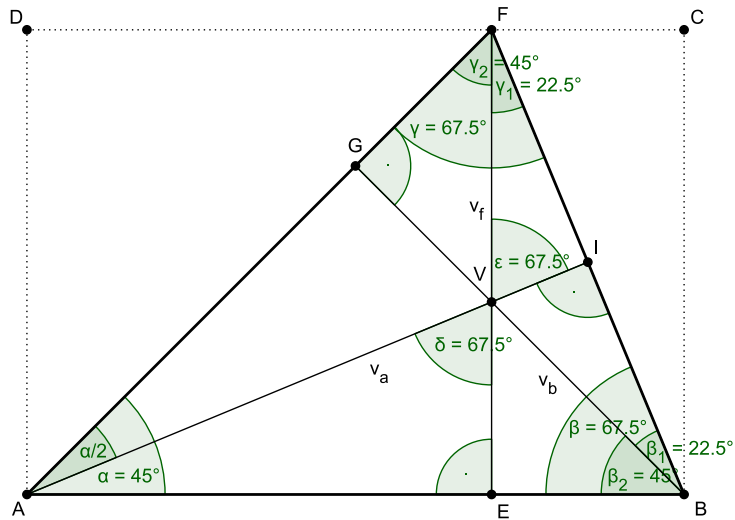
### Konstrukce rovnoramenného trojúhelníku

<b>Postup konstrukce</b>		
--------------------------	---	---

<b>Pozorované vlastnosti</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- rovnoběžník - obdélník,</li> <li>- rovnoběžky,</li> <li>- kolmice, pravý úhel.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- pravoúhlý trojúhelník, ostroúhlý trojúhelník,</li> <li>- vnitřní a vnější úhly trojúhelníku,</li> <li>- součet úhlů v trojúhelníku,</li> <li>- sčítání a odčítání, dělení úhlů.</li> </ul>
<b>Postup konstrukce</b>		
<b>Pozorované vlastnosti</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- úhlopříčka obdélníku.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- rovnoramenný trojúhelník,</li> <li>- ramena a základnu rovnoramenného trojúhelníku,</li> <li>- výšky rovnoramenného trojúhelníku.</li> </ul>

**Důkaz:** Abychom mohli o  $\triangle ABF$  říct, že je rovnoramenný, budeme muset dokázat, že úhel  $\beta$  při vrcholu  $B$  je shodný s úhlem  $\gamma$  při vrcholu  $F$  (viz Obr. 5.5). Tzn.

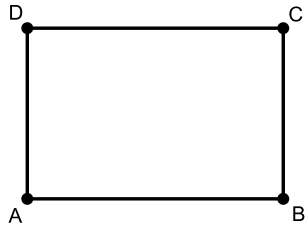
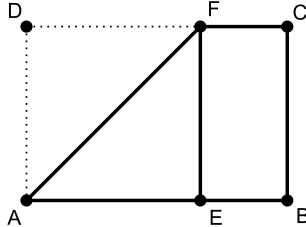
- 1) úsečky  $AI$ ,  $BG$ , a  $EF$  jsou výšky v  $\triangle ABF$ ,
- 2)  $v_a$  půlí úhel  $\alpha$ , tzn.  $\alpha/2 = 22^\circ 30'$ ,
- 3) dopočteme úhel  $\delta$ ;  $\delta = 180^\circ - (90^\circ + 22^\circ 30') = 67^\circ 30'$ ,
- 4) úhel  $\epsilon$  je roven úhlu  $\delta$ , protože se jedná o vrcholové úhly,
- 5) dopočteme úhel  $\gamma_1 = 180^\circ - (90^\circ + 67^\circ 30') = 22^\circ 30'$ ,
- 6) úhel  $\beta_1$  je roven úhlu  $\gamma_1$ , neboť  $\triangle IVB \cong \triangle IVF$ ,
- 7)  $\triangle GFV$  a  $\triangle EVB$  jsou pravoúhlé, jejichž úhly při přeponách jsou rovny  $45^\circ$ ,
- 8) úhel  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 67^\circ 30'$ ,
- 9) úhel  $\beta = \beta_1 + \beta_1 = 67^\circ 30'$ ,
- 10)  $\beta = \gamma$ .



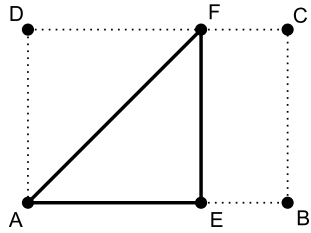
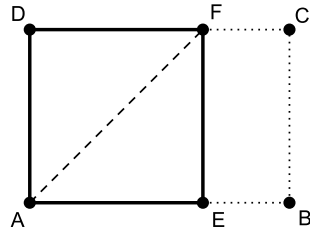
Obrázek 5.5: Rovnoramenný trojúhelník

## 5.4.2 Konstrukce čtyřúhelníku

### Konstrukce čtverce

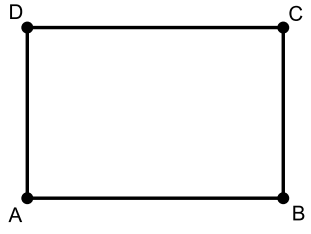
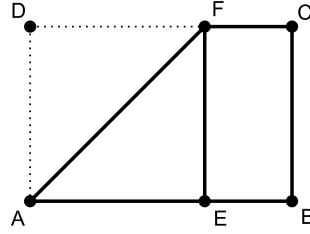
<p><b>Postup konstrukce</b></p>		
<p><b>Pozorované vlastnosti</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- rovnoběžník - obdélník,</li> <li>- rovnoběžky,</li> <li>- kolmice, pravý úhel.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- pravouhlý trojúhelník,</li> <li>- přepona, odvěsny,</li> <li>- obdélník.</li> </ul>

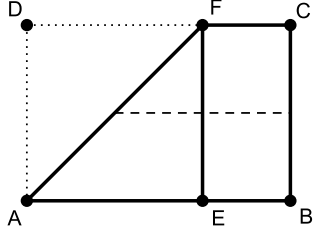
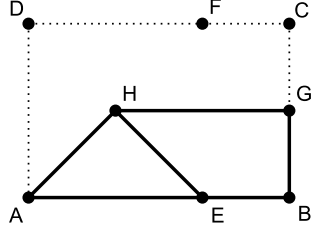
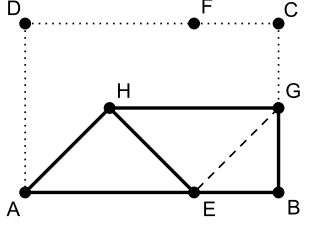
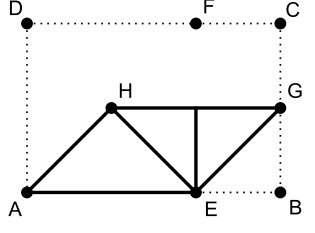


<b>Postup konstrukce</b>		
<b>Pozorované vlastnosti</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- vnitřní a vnější úhly trojúhelníku,</li> <li>- součet úhlů v trojúhelníku,</li> <li>- sčítání a odčítání, dělení úhlů.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- osová souměrnost,</li> <li>- čtverec,</li> <li>- úhlopříčka čtverce.</li> </ul>

**Důkaz:** Přeložením získáme pravoúhlý  $\triangle AEF$ , jehož odvěsny jsou stejně dlouhé a úhly při přeponě mají  $45^\circ$ . To znamená, že když rozložíme papír zpět, získáme 2 takové trojúhelníky, které nám dohromady dávají čtverec.

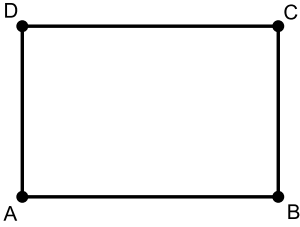
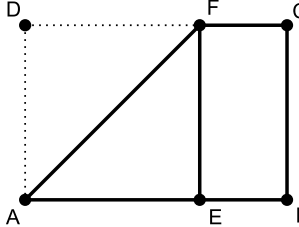
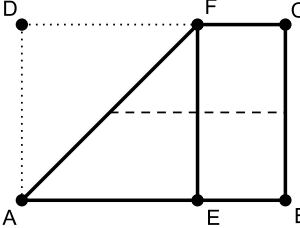
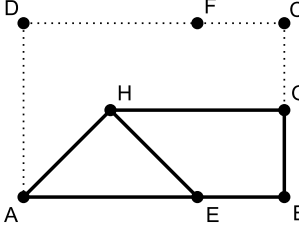
### Konstrukce kosoúhelníku

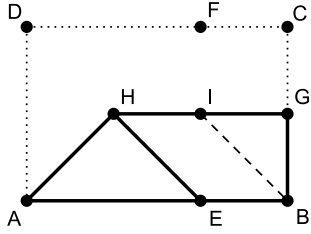
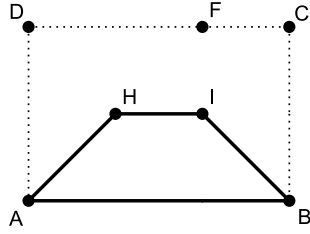
<b>Postup konstrukce</b>		
<b>Pozorované vlastnosti</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- rovnoběžník - obdélník,</li> <li>- rovnoběžky,</li> <li>- kolmice, pravý úhel.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- pravoúhlý trojúhelník,</li> <li>- přepona, odvěsny,</li> <li>- obdélník.</li> </ul>

<p><b>Postup konstrukce</b></p>		
<p><b>Pozorované vlastnosti</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- střed strany, osa strany,</li> <li>- pravoúhlý trojúhelník, ostroúhlý trojúhelník,</li> <li>- vnitřní a vnější úhly trojúhelníku,</li> <li>- součet úhlů v trojúhelníku,</li> <li>- sčítání a odčítání, dělení úhlů.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- pravoúhlý trojúhelník, ostroúhlý trojúhelník,</li> <li>- pravoúhlý lichoběžník.</li> </ul>
<p><b>Postup konstrukce</b></p>		
<p><b>Pozorované vlastnosti</b></p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>- kosoúhelník,</li> <li>- vlastnosti kosoúhelníku (dvojice shodných úhlů, rovnoběžnost protějších stran, kolmost úhlopříček atd.).</li> </ul>

**Důkaz:** U vrcholu  $A$  dostaneme po přeložení polovinu z pravého úhlu, tedy  $45^\circ$ . Stejný postup aplikujeme i u vrcholu  $G$ , kde taktéž velikost úhlu je poté rovna  $45^\circ$ . Zároveň strana  $AH \parallel EG$ . A protože rovnoběžnost platí i pro strany  $AE$  a  $HG$  řekneme, že daný útvar je kosoúhelníkem.

### Konstrukce rovnoramenného lichoběžníku

<p><b>Postup konstrukce</b></p>		
<p><b>Pozorované vlastnosti</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- rovnoběžník - obdélník,</li> <li>- rovnoběžky,</li> <li>- kolmice, pravý úhel.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- pravouhlý trojúhelník, ostroúhlý trojúhelník,</li> <li>- vnitřní a vnější úhly trojúhelníku,</li> <li>- součet úhlů v trojúhelníku,</li> <li>- sčítání a odčítání, dělení úhlů.</li> </ul>
<p><b>Postup konstrukce</b></p>		

<b>Pozorované vlastnosti</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- střed strany, osa strany,</li> <li>- pravoúhlý trojúhelník, ostroúhlý trojúhelník,</li> <li>- vnitřní a vnější úhly trojúhelníku,</li> <li>- součet úhlů v trojúhelníku,</li> <li>- sčítání a odčítání, dělení úhlů.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- pravoúhlý trojúhelník, ostroúhlý trojúhelník,</li> <li>- pravoúhlý lichoběžník.</li> </ul>
<b>Postup konstrukce</b>		
<b>Pozorované vlastnosti</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- rovnoběžky.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- rovnoramenný lichoběžník,</li> <li>- vlastnosti rovnoramenného lichoběžníku (shodná délka ramen, výška lichoběžníku, součet velikostí vnitřních úhlů při stejném rameni atd.).</li> </ul>

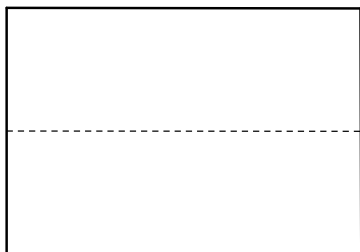
**Důkaz:** U vrcholu  $A$  dostaneme po přeložení polovinu z pravého úhlu, tedy  $45^\circ$ . Stejný úhel získáme přeložením i u vrcholu  $B$ . Poněvadž  $AB \parallel HI$ , pak úhly u vrcholů  $H$  a  $I$  mají stejnou velikost, tedy  $135^\circ$ . Výsledným obrazcem je rovnoramenný lichoběžník.

## 5.5 Geometrická tělesa

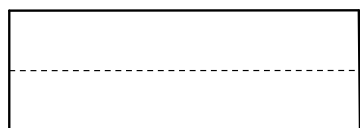
Jak už sám název podkapitoly napovídá, možnosti skládání papíru nekončí pouze u rovinných útvarů. Pomocí technik skládání lze získat i geometrická tělesa a to dvěma způsoby. První z nich je založený na skládání těles s využitím jednoho kusu papíru. Jejich konstrukce není nikterak náročná, avšak takovýchto těles je velmi málo. Během získávání informací k této práci jsem objevil pouze dvě takto složená tělesa a je velmi

pravděpodobné, že tento počet je konečný. Jedná se o 2 z 5 Platónských těles a to konkrétně o pravidelný čtyřstěn a krychli. Jejich diagramy si ukážeme.

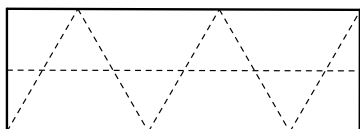
### Konstrukce pravidelného čtyřstěnu



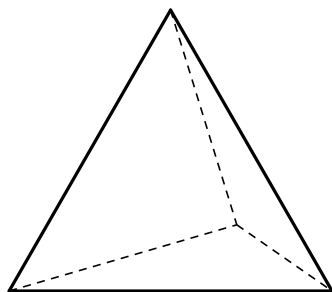
1. Vezmeme si list papíru formátu A4, který přeložíme na polovinu a následně rozložíme zpět.



2. Horní a dolní okraj papíru přeložíme k přehybu z 1. kroku.

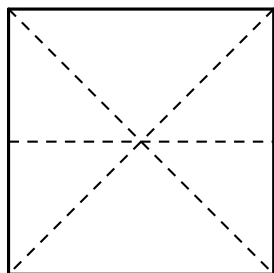


3. Tvoříme rovnostranné trojúhelníky (viz Konstrukce rovnostranného trojúhelníku, str. 21-22) po celé délce papíru.

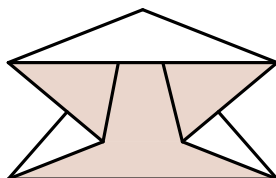


4. Poskládáme do tvaru pravidelného čtyřstěnu a konce papíru do sebe zasuneme.

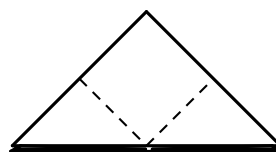
## Konstrukce krychle



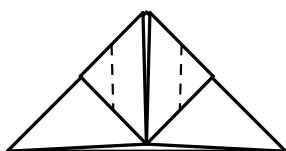
1. Papír ve tvaru čtverce přehneme na polovinu, po úhlopříčkách a rozložíme.



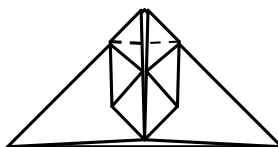
2. Složením dostaneme pravoúhlý trojúhelník.



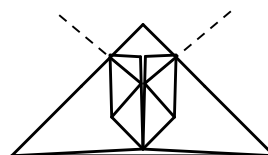
3. Cípy z horní vrstvy přeložíme k sobě.



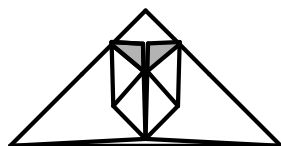
4.



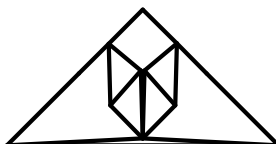
5.



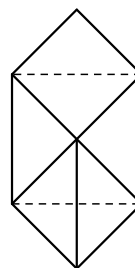
6. Vytvoříme hrany.



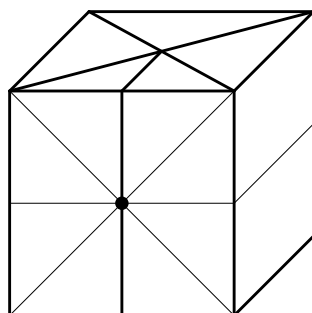
7. Barevně znázorněné cípy zasuneme do kapsiček podle vytvořených hran.



8. Skládanku otočíme a kroky 3. - 7. zopakujeme i na druhé straně.

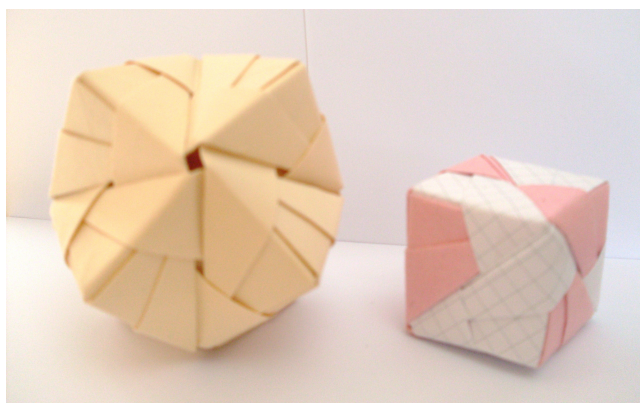


9. Do otvoru v dolním cípu foukáme.



## 10. Krychle

U druhého způsobu skládání se setkáváme s tzv. *modulárními origami*. Jejich skládání je poměrně časově náročné, neboť je založeno na skládání několika shodných dílů (někdy až několik desítek), které se poté do sebe vzájemně zasunují. Díky této technice jsme schopni poskládat nejrůznější geometrická tělesa. Kupříkladu všechna Platónská tělesa, dále Kepler-poínsotova tělesa, Archimédovská tělesa atd.



Obrázek 5.6: Ukázka modulárních origami

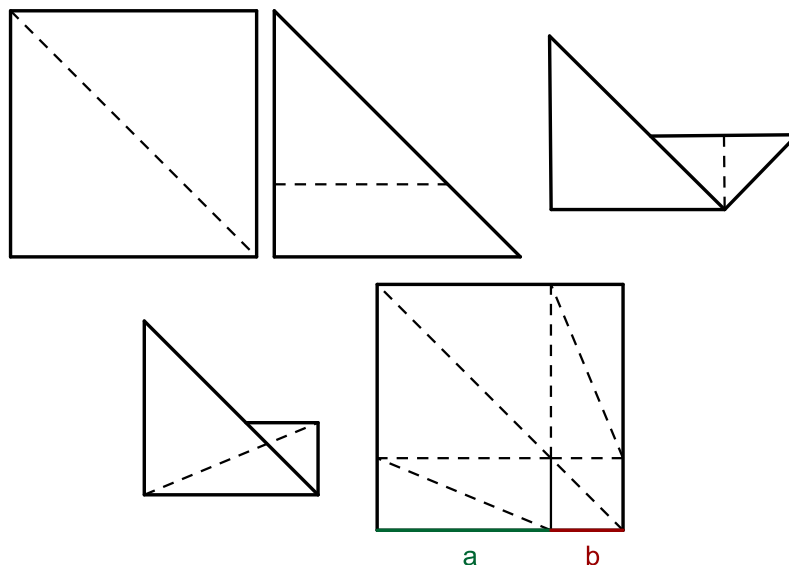
[2, 16, 17, 18]

## 5.6 Důkaz Pythagorovy věty

Skládání papíru můžeme využít i k důkazu Pythagorovy věty. Důkaz je snadný a názorný, tudíž se jedná o velmi vhodnou pomůcku pro učitele, jak ukázat žákům princip této věty. Na důkaz použijeme čtvercový papír, který složíme dvěma způsoby. Podle Obr. 5.7 přehneme čtverec na polovinu tak, abychom dostali pravoúhlý trojúhelník.

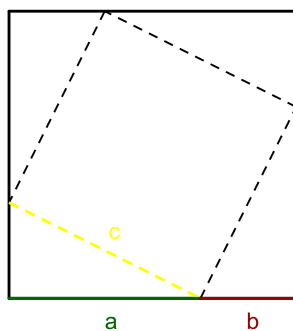
Poté vezmeme vrchol trojúhelníku a přehneme ho tak, aby vzniklá hrana byla rovnoběžná s odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka. Vzniklý cíp v podobě rovnoramenného trojúhelníka přeložíme kolmo k přeponě pravoúhlého trojúhelníka. V předposledním kroku vytvoříme pomocnou hranu a posléze papír rozložíme zpět do čtverce. Ten je pomocí hran rozdělený na jeden menší a jeden větší čtverec a čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky. Písmeny  $a$ ,  $b$  označíme odvěsny pravoúhlých trojúhelníků.

Obsah čtverce můžeme vyjádřit pomocí stran  $a$ ,  $b$ , a to ve tvaru  $S = a^2 + b^2 + 2ab$ .



Obrázek 5.7: Pythagorova věta - 1. způsob složení

Nyní přejdeme ke druhému způsobu složení (viz Obr. 5.8). Vezmeme čtverec a budeme ho překládat tak, abychom na krajích dostali čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami  $a$  a  $b$ . Po tomto složení jsme uvnitř získali čtverec, jehož jednu stranu označíme  $c$ .



Obrázek 5.8: Pythagorova věta - 2. způsob složení

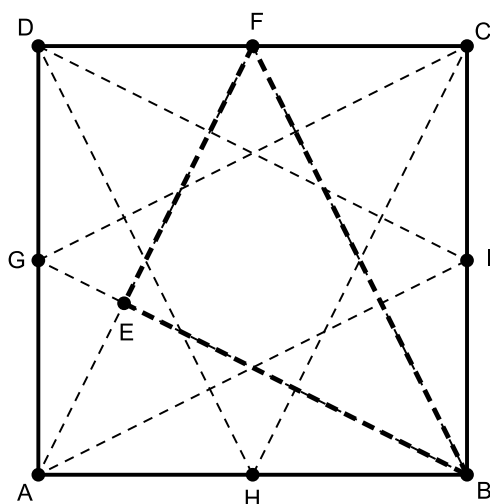


Opět budeme chtít spočítat obsah původního čtverce, který vyjádříme ve tvaru  $S = 2ab + c^2$

Nakonec porovnáme předchozí rovnice a zjišťujeme, že  $c^2 = a^2 + b^2$ , což jsme chtěli dokázat. [2]

## 5.7 Egyptský trojúhelník

Mějme papír ve tvaru čtverce a vyznačme si středy jeho stran. Každý vrchol čtverce budeme poté překládat k protější straně přímo do vyznačených středů. Dostaneme tak 8 linií, které nám znázorní dohromady 32 trojúhelníků, z nichž 8 jsou tzv. Pythagorejské trojúhelníky (též známé jako Egyptské trojúhelníky), jejichž strany jsou v poměru  $3 : 4 : 5$  (viz  $\triangle EBF$  z Obr. 5.9). [14]



Obrázek 5.9: Egyptský trojúhelník

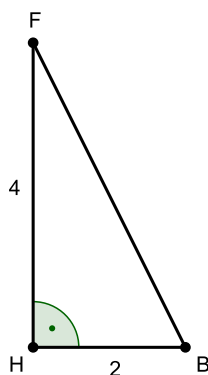
**Důkaz:** 1) pravoúhlost  $\triangle EBF$

Mějme dány strany  $AB$  a  $AD$ , které jsou na sebe kolmé. Bod  $G$  je střed  $AD$  a bod  $F$  je střed  $CD$ . Potom strany  $BG$  a  $AF$  jsou na sebe rovněž kolmé, neboť vznikly pouhým otočením původních stran  $AB$  a  $AD$  a tudíž  $\triangle EBF$  je pravoúhlý.

2)  $\triangle EBF$  je Pythagorejský

Určíme si libovolnou délku strany čtverce, třeba  $a = 4$ .

Nejprve vycházejme z  $\triangle HBF$ . Chceme vypočítat délku strany  $BF$ , přičemž známe  $|BH| = 2$  a  $|FH| = 4$ .

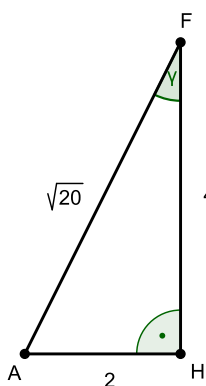


$$|BF|^2 = |BH|^2 + |FH|^2$$

$$|BF|^2 = 2^2 + 4^2$$

$$|BF| = 2\sqrt{5} \doteq 4,47$$

Nyní si z  $\triangle HAF$  spočteme úhel  $\gamma$  u vrcholu  $F$ .

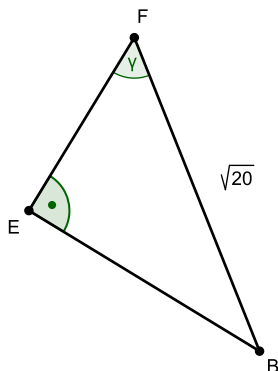


$$\cos \gamma = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\gamma = 26^\circ 34'$$

Je zřejmé, že úhel u vrcholu  $F$  v  $\triangle EBF$  je  $2\gamma$ , tedy  $53^\circ 08'$ . Známe-li v  $\triangle EBF$  jeho vnitřní úhel  $\gamma$  a délku přepony  $BF$ , můžeme nyní snadno dopočítat i délky jeho odvěsen.



$$\cos \gamma = \frac{|EF|}{|BF|}$$

$$|EF| = \cos 53^\circ 08' \cdot \sqrt{20}$$

$$|EF| \doteq 2,68$$

$$|BE|^2 = |BF|^2 - |EF|^2$$

$$|BE|^2 = 4,47^2 - 2,68^2$$

$$|BE| \doteq \sqrt{12,80}$$

$$|BE| \doteq 3,58$$

Posledním krokem je ověření v, jakém poměru jsou strany  $\triangle EBF$ . Nejprve sečteme délky stran  $\triangle EBF$  a výsledný součet vydělíme součtem stran Pythagorejského trojúhelníku se stranami 3, 4 a 5.

$$(|EF| + |BE| + |BF|) : 12 = (2,68 + 3,58 + 4,47) : 12 = 10,73 : 12 \doteq 0,894$$

Tím jsme dostali hodnotu jednoho dílku, který teď vynásobíme délkami stran Pythagorejského trojúhelníku.

$$3 \cdot 0,894 \doteq 2,68 = |EF|$$

$$4 \cdot 0,894 \doteq 3,58 = |BE|$$

$$5 \cdot 0,894 \doteq 4,47 = |BF|$$

Zjistili jsme, že strany  $|EF|$ ,  $|BE|$  a  $|BF|$  jsou v poměru 3 : 4 : 5, což znamená, že  $\triangle EBF$  je Pythagorejský trojúhelník.

## 5.8 Dělení strany čtverce

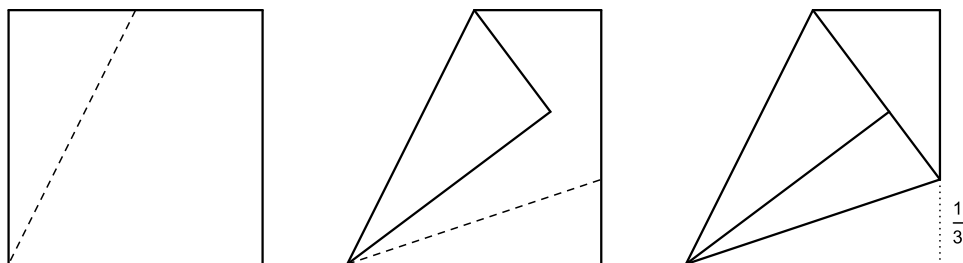
Stranu čtverce velmi snadno rozdělíme na 2, 4, 8 atd. shodných částí, kdy dochází k neustálému půlení jednotlivých úseček (viz. Obr 5.10).



Obrázek 5.10: Dělení strany čtverce

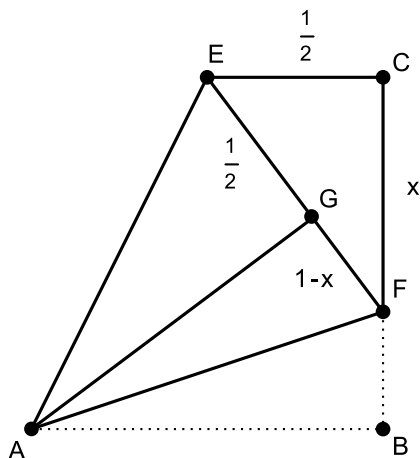
Abychom stranu čtverce rozdělili kupříkladu na 3 shodné části, budeme muset použít

tzv. *Hagovu větu* [20], kterou si ukážeme v následujícím diagramu (viz. Obr 5.11) a posléze provedeme její důkaz.



Obrázek 5.11: Hagova věta

**Důkaz:** Necht' délka strany čtverce je 1. Potom  $|CE| = |EG| = \frac{1}{2}$ . Délku úsečky  $|CF|$  označíme neznámou  $x$  a délku úsečky  $FG$  pak  $1-x$ . Nyní známe délky všech stran pravoúhlého trojúhelníku  $CEF$ , tudíž můžeme použít na tento trojúhelník Pythagorovu větu, abychom vypočetli hodnotu neznámé  $x$ .



$$\left(\frac{1}{2} + 1 - x\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4}$$

$$\frac{9}{4} - 3x + x^2 = x^2 + \frac{1}{4}$$

$$\frac{8}{4} = 3x$$

$$\frac{2}{3} = x$$

Hodnota neznámé  $x$ , což je délka strany  $CF$ , je tedy  $\frac{2}{3}$ . Na úsečku  $BF$ , tudíž zbývá  $\frac{1}{3}$ . Je evidentní, že strana čtverce je dělena na třetiny. [20]

# Kapitola 6

## Závěr

Je evidentní, že origami, respektive skládání papíru, má ve vědecké disciplíně, jakou je matematika, svoje místo a význam. Proto bych na závěr zmínil dva nejdůležitější přínosy, které nám origami v matematice poskytuje.

Prvním z nich je vědecký přínos, jež je především zásluhou Humiakiho Huzity a definováním šesti origami axiomů. Tato množina axiomů je množinou velmi významnou, neboť z těchto axiomů vychází řešení pro úlohy, či matematické problémy, které nejsou Euklidovskou geometrií řešitelné (viz trisekce úhlu). Zároveň nám u některých úloh přináší řadu elegantních řešení (viz tečna paraboly).

Tím druhým je pak přínos edukační, poněvadž se jedná o velmi vhodnou a kvalitní pomůcku v rámci hodin matematiky, která podporuje porozumění dané látce. Studentům tato učební pomůcka může učivo nejen přiblížit ale i zpříjemnit. Představuje oživení výuky a podporuje zároveň praktickou činnost, která napomáhá zlepšit jejich manuální zručnost. Konstrukce geometrických těles pak přispívají i k rozvoji prostorové představivosti. Výčet výhod můžeme uzavřít schopností motivovat studenty v jejich práci. To vše tedy hovoří pro zakomponování této pomůcky do výuky geometrie.

# Literatura

- [1] HUZITA, Humiaki. *Understanding Geometry through Origami Axioms*, in the Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91), J. Smith ed., British Origami Society, 1992.
- [2] PUPÍK, Petr. *Origami* [online], Masarykova Univerzita, Brno, 2008. Dostupné z WWW: <<http://www.pupa.ic.cz/dokumenty/origami.pdf>>.
- [3] KRIER, Jaema. L., *Mathematics and Origami: The Ancient Arts Unite* [online], 2007. Dostupné z WWW: <<http://math.utt Tyler.edu/nathan/classes/senior-seminar/JaemaKrier.pdf>>.
- [4] Konstrukce origami [online]. [cit. srpen 2012]. Dostupné z WWW: <[http://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/334/priloha\\_37\\_origami.pdf](http://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/334/priloha_37_origami.pdf)>.
- [5] Origami [online]. [cit. listopad 2012]. Dostupné z WWW: <<http://www.origami.cz/podrobnosti.html>>.
- [6] Huzita axioms. *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. [cit. listopad 2012]. Dostupné z WWW: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Huzita-Hatori\\_axioms](http://en.wikipedia.org/wiki/Huzita-Hatori_axioms)>.
- [7] Trisekce úhlu [online]. [cit. listopad 2012]. Dostupné z WWW: <<http://www.origami.cz/Geometrie/axiomy.html>>.
- [8] Tečna paraboly [online]. [cit. listopad 2012]. Dostupné z WWW: <<http://www.origami.cz/Geometrie/axiom5.html>>.
- [9] GALOIS, Évariste. *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. [cit. prosinec 2012]. Dostupné z WWW: <<http://cs.wikipedia.org/wiki/Galois>>.
- [10] Tvary papíru [online]. [cit. prosinec 2012]. Dostupné z WWW: <<http://origami.webz.cz/matematika/pdf/tvareypapiru.pdf>>.
- [11] Historie [online]. [cit. únor 2013]. Dostupné z WWW: <<http://origami.webz.cz/historie.htm>>.

- [12] Maurové. *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. [cit. únor 2013]. Dostupné z WWW: <<http://cs.wikipedia.org/wiki/Maurové>>.
- [13] FRÖBEL, Friedrich. *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. [cit. únor 2013]. Dostupné z WWW: <[http://cs.wikipedia.org/wiki/Friedrich\\_Fr%C3%B6bel](http://cs.wikipedia.org/wiki/Friedrich_Fr%C3%B6bel)>.
- [14] Egyptský trojúhelník [online]. [cit. únor 2013]. Dostupné z WWW: <<http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/PaperFolding/345Triangle.shtml>>.
- [15] Formát papíru. *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. [cit. březen 2013]. Dostupné z WWW: <[http://cs.wikipedia.org/wiki/Formát\\_papíru](http://cs.wikipedia.org/wiki/Formát_papíru)>.
- [16] Pravidelný čtyřstěn [online]. [cit. březen 2013]. Dostupné z WWW: <<http://users.datarealm.com/hecht/origami/diags/tetra.pdf>>.
- [17] Krychle [online]. [cit. březen 2013]. Dostupné z WWW: <<http://mladyfilatelista.blog.cz/0704/origami-vodni-bomba>>.
- [18] The Cube, The Octahedron [online]. [cit. březen 2013]. Dostupné z WWW: <<http://nuwen.net/poly.html>>.
- [19] Konstrukce n-úhelníků [online]. [cit. březen 2013]. Dostupné z WWW: <<http://library.leeds.ac.uk/skills>>.
- [20] Haga's theorem [online]. [cit. duben 2013]. Dostupné z WWW: <[http://www.origami.gr.jp/Archives/People/CAGE\\_/divide/02-e.html](http://www.origami.gr.jp/Archives/People/CAGE_/divide/02-e.html)>.