

# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

## ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

## MOŽNOSTI APROXIMACE DOPRAVNÍHO ZPOŽDĚNÍ ZOBECNĚNÝMI LAGUERROVÝMI FUNKCEMI

POSSIBILITIES OF A DEAD-TIME APPROXIMATION BY MEANS OF GENERALIZED LAGUERRE FUNCTIONS.

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Norbert Zsitva

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

BRNO 2016



# Bakalářská práce

bakalářský studijní obor **Automatizační a měřicí technika**

Ústav automatizace a měřicí techniky

**Student:** Norbert Zsitva

**ID:** 164444

**Ročník:** 3

**Akademický rok:** 2015/16

## NÁZEV TÉMATU:

### **Možnosti aproximace dopravního zpoždění zobecněnými Laguerrovými funkcemi**

#### **POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:**

1. Seznamte se se současnými způsoby aproximace dopravního zpoždění.
2. Seznamte se se zobecněnými Laguerrovými funkcemi a jejich některými vlastnostmi.
3. Prostudujte vliv volných parametrů těchto funkcí na jejich chování. Doplňte grafickými ukázkami průběhů. Úlohy implementujte v programovém prostředí Matlab.
4. Na základě chování zobecněných Laguerrových funkcí v závislosti na volných parametrech navrhnete možnosti aproximace dopravního zpoždění pomocí těchto funkcí.

#### **DOPORUČENÁ LITERATURA:**

1. LIBOR PEKAR, EVA KURECKOVA: Rational Approximations for Time-Delay Systems: Case Studies.

Mathematical Methods and Techniques in Engineering and Environmental Science, ISBN:

978-1-61804-046-6

2. [https://en.wikipedia.org/wiki/Laguerre\\_polynomials](https://en.wikipedia.org/wiki/Laguerre_polynomials)

**Termín zadání:** 8.2.2016

**Termín odevzdání:** 23.5.2016

**Vedoucí práce:** prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

**Konzultant bakalářské práce:**

**doc. Ing. Václav Jirsík, CSc., předseda oborové rady**

#### **UPOZORNĚNÍ:**

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

## Abstrakt

Táto bakalárska práca sa zaoberá aproximáciou dopravného oneskorenia. V nej sú najprv ukázané spôsoby aproximácie racionálnymi funkciami. Tieto metódy sú vyhodnotené podľa noriem  $H_2$  a  $H_\infty$ . Následne sú prezentované zobecnené Laguerrove funkcie a využitie týchto funkcií pre aproximáciu dopravného oneskorenia. V záverečnej časti práce sú porovnané metódy z predchádzajúcich kapitol.

## Kľúčové slová

dopravné oneskorenie, prenosová funkcia, racionálna aproximácia, frekvenčné charakteristiky, norma  $H_2$  a  $H_\infty$ , zobecnená Laguerrova funkcia

## Abstract

This bachelor's thesis deals with the approximation of time delay systems. First, the ways of approximating time delay with rational functions are shown. These methods are evaluated according to the  $H_2$  and  $H_\infty$  norms. After this, the generalized Laguerre functions and means of approximating time delay with these functions are presented. In the final section of the work the previously shown methods are compared.

## Key words

time delay, transfer function, rational approximation, frequency characteristics,  $H_2$  and  $H_\infty$  norms, generalized Laguerre function

ZSITVA, N. *Možnosti aproximace dopravního zpoždění zobecněnými Laguerrovými funkcemi*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2016. 44 s. Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. Pavel Jura, CSc..

## PREHLÁSENIE

Prehlasujem, že svoju bakalársku prácu na tému „Možnosti aproximace dopravního zpoždění zobecněnými Laguerrovými funkcemi“ som vypracoval samostatne pod vedením vedúceho bakalárskej práce a s použitím odbornej literatúry a ďalších informačných zdrojov, ktoré sú všetky citované v práci a uvedené v zozname literatúry na konci práce.

Ako autor uvedenej bakalárskej práce ďalej prehlasujem, že v súvislosti s vytvorením tejto bakalárskej práce som neporušil autorské práva tretích osôb, najmä som nezasiahol nedovoleným spôsobom do cudzích autorských práv osobnostných a/alebo majetkových a som si plne vedomý následkov porušenia ustanovenia § 11 a nasledujúceho autorského zákona č. 121/2000 Sb., o práve autorskom, o právach súvisiacich s právom autorským a o zmene niektorých zákonov (autorský zákon), v znení neskorších predpisov, vrátane možných trestnoprávných dôsledkov vyplývajúcich z ustanovenia časti druhej, hlavy VI. diel 4 Trestného zákonníka č. 40/2009 Sb.

Brno .....

.....

podpis autora

## POĎAKOVANIE

Rád by som sa poďakoval vedúcemu bakalárskej práce, pánovi Prof. Ing. Pavlovi Jurovi, CSc. za odborné konzultácie, cenné rady a návrhy pri spracovávaní bakalárskej práce.

Brno .....

.....

podpis autora

# Obsah

Zoznam obrázkov.....	7
Zoznam tabuliek.....	8
Úvod.....	9
1 Spôsoby aproximácie dopravného oneskorenia .....	10
1.1 Vybrané racionálne aproximácie.....	10
1.2 Lineárne a kvadratické aproximácie dopravného oneskorenia .....	11
1.3 Vyhodnotenie vybraných aproximácií pomocou noriem $H_2$ a $H_\infty$ .....	16
1.3.1 Výpočet normy $H_2$ .....	17
1.3.2 Výpočet normy $H_\infty$ a vyhodnotenie aproximácií.....	18
2 Zobecnené Laguerrove funkcie .....	20
2.1 Zobecnené Laguerrove polynómy.....	20
2.2 Zobecnené Laguerrove funkcie.....	20
2.3 Vplyv voľných parametrov .....	21
3 Aproximácia dopravného oneskorenia pomocou Laguerrových funkcií.....	24
3.1 Výpočet extrému zobecnenej Laguerrovej funkcie nultého rádu.....	24
3.2 Normalizácia zobecnenej Laguerrovej funkcie nultého rádu.....	26
3.3 Výpočet limit z normalizovanej Laguerrovej funkcie nultého rádu.....	29
3.4 Laplaceova transformácia normalizovanej Laguerrovej funkcie .....	32
4 Porovnanie výsledkov s racionálnymi aproximáciami.....	36
4.1 Porovnanie aproximácie pomocou zobecnených Laguerrových funkcií a Laguerrovej aproximácie.....	40
5 Záver.....	42
Literatúra.....	43
Zoznam príloh .....	44

# Zoznam obrázkov

Obr. 1: Prechodové charakteristiky lineárnych aproximácií čistého dopravného oneskorenia $T = 1s$ .....	12
Obr. 2: Prechodové charakteristiky kvadratických aproximácií čistého dopravného oneskorenia $T = 1s$ .....	13
Obr. 3: Prechodové charakteristiky lineárnych aproximácií systému 2. rádu, $T = 1s$ .....	14
Obr. 4: Prechodové charakteristiky kvadratických aproximácií systému 2. rádu, $T = 1s$ .....	14
Obr. 5: Frekvenčné charakteristiky lineárnych aproximácií systému 2. rádu .....	15
Obr. 6: Frekvenčné charakteristiky kvadratických aproximácií systému 2. rádu .....	15
Obr. 7: Výpočet normy $H_2$ .....	17
Obr. 8: Výstupný signál z modelu na obr. 7 .....	18
Obr. 9: Zobecnené Laguerrove funkcie pre rôzne rády, $m = 0, 1, 2, 3$ ; $\alpha = 14$ ; $\sigma = 3$ .....	21
Obr. 10: Zmena parametru $\alpha$ .....	22
Obr. 11: Zmena parametru $\sigma$ .....	22
Obr. 12: Súčasná zmena parametrov $\alpha$ a $\sigma$ .....	23
Obr. 13: Normalizovaná Laguerrova funkcia s parametrami $\alpha = \sigma = 10$ .....	28
Obr. 14: Normalizovaná Laguerrova funkcia s parametrami $\alpha = \sigma = 100$ .....	28
Obr. 15: Aproximácia pomocou zobecnených Laguerrových funkcií pre rôzne $\alpha$ .....	37
Obr. 16: Prechodové charakteristiky aproximácií čistého dopravného oneskorenia .....	38
Obr. 17: Prechodové charakteristiky aproximácií systému druhého rádu s dopravným oneskorením .....	38
Obr. 18: Frekvenčné charakteristiky aproximácií systému druhého rádu s dopravným oneskorením .....	39
Obr. 19: Porovnanie aproximácie pomocou zobecnených Laguerrových funkcií a Laguerrovej aproximácie .....	41

## Zoznam tabuliek

Tab. 1: Normy $H_2$ a $H_\infty$ pre vybraný systém .....	18
Tab. 2: Normy $H_2$ a $H_\infty$ pre systému druhého rádu (kvadratické aproximácie) .....	39



# Úvod

Systémy s dopravným oneskorením sú skupinou systémov, kde dochádza k časovému oneskoreniu signálu. Obvykle je to čas potrebný na prenos informácie alebo na premiestnenie hmoty. Dopravné oneskorenie v systémoch je vo väčšine prípadov nežiadajúce. Z toho dôvodu môžeme prenos dopravného oneskorenia aproximovať a získať nový prenos systému. Tým nahradíme v prenose člen dopravného oneskorenia jeho aproximáciou, čo môže uľahčiť prácu so systémom za cenu nižšej presnosti.

Cieľom bakalárskej práce je ukázať spôsoby aproximácie dopravného oneskorenia pomocou zobecnených Laguerrových funkcií a porovnať ich s vybranými racionálnymi aproximáciami. V rámci tejto práce sú najprv ukázané a vyhodnotené racionálne aproximácie. Ďalej sú popísané zobecnené Laguerrove funkcie a vplyv voľných parametrov na ich chovanie. Nasledujúca kapitola je venovaná aproximácii dopravného oneskorenia pomocou týchto funkcií. Obsahuje dôkaz a odvodenie potrebných vzťahov. Poslednou súčasťou práce je porovnanie aproximácie dopravného oneskorenia zobecnenými Laguerrovými funkciami a racionálnymi aproximáciami.

# 1 Spôsohy aproximácie dopravného oneskorenia

V súčasnosti pre aproximáciu dopravného oneskorenia sú najpoužívanejšie racionálne aproximácie. Tieto metódy sa často využívajú pre analýzu a syntézu regulačných obvodov s dopravným oneskorením. Dôvodom aproximácie je, že dokážeme zjednodušiť systémy nekonečného rádu na konečné. V tejto kapitole sú popísané a vyhodnotené niektoré racionálne aproximácie.

## 1.1 Vybrané racionálne aproximácie

### 1) Padého aproximácia

Táto metóda je jeden z najvyužívanejších aproximácií. Padého aproximácia je určená nasledujúcim výrazom [1, 2]

$$e^{-Ts} \approx \frac{P(-s)}{P(s)} \quad P(s) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(2n-k)!}{(2n)!} (Ts)^k \quad (1)$$

### 2) Laguerrova aproximácia [1, 3]

Formula obsahuje len jeden  $n$ -násobný pól. Kvôli jednoduchosti výrazu (2) je táto aproximácia jednoduchšie realizovateľná ako napríklad Padého aproximácia.

$$e^{-Ts} \approx \left( \frac{1 - \frac{Ts}{2n}}{1 + \frac{Ts}{2n}} \right)^n \quad (2)$$

### 3) Taylorov rozvoj menovateľa [2]

$$e^{-Ts} = \frac{1}{e^{Ts}} \approx \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} s^n} \quad (3)$$

### 4) „Limitná“ aproximácia [2]

$$e^{-Ts} = \frac{1}{e^{Ts}} \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{T}{n}s\right)^n} \quad n = \{1, 2, \dots\} \quad (4)$$

Vo výrazoch (1-4)  $T$  je dopravné oneskorenie

V praxi sú najčastejšie používané aproximácie prvého ( $n = 1$ ) alebo druhého rádu ( $n = 2$ ) kvôli jednoduchosti aproximovaného prenosu. Z toho dôvodu budeme sa zaoberať hlavne s lineárnymi a kvadratickými aproximáciami.

## 1.2 Lineárne a kvadratické aproximácie dopravného oneskorenia

Výrazy pre lineárne aproximácie dostaneme z rovníc (1-4) pre  $n = 1$ , pre kvadratické aproximácie  $n = 2$ . Aproximované prenosy budeme značiť písmenom  $G$ .

1) Padého aproximácia

$$G_{P1}(s) = \frac{1 - \frac{T}{2}s}{1 + \frac{T}{2}s} \quad (5)$$

$$G_{P2}(s) = \frac{1 - \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{12}s^2}{1 + \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{12}s^2} \quad (6)$$

2) Laguerrova aproximácia

$$G_{Lag1}(s) = \frac{1 - \frac{T}{2}s}{1 + \frac{T}{2}s} \quad (7)$$

$$G_{Lag2}(s) = \frac{1 - \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{16}s^2}{1 + \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{16}s^2} \quad (8)$$

3) Taylorov rozvoj menovateľa

$$G_{T1}(s) = \frac{1}{1 + Ts} \quad (9)$$

$$G_{T2}(s) = \frac{1}{1 + Ts + \frac{T^2}{2}s^2} \quad (10)$$

4) „Limitná“ aproximácia

$$G_{Lim1}(s) = \frac{1}{1 + Ts} \quad (11)$$

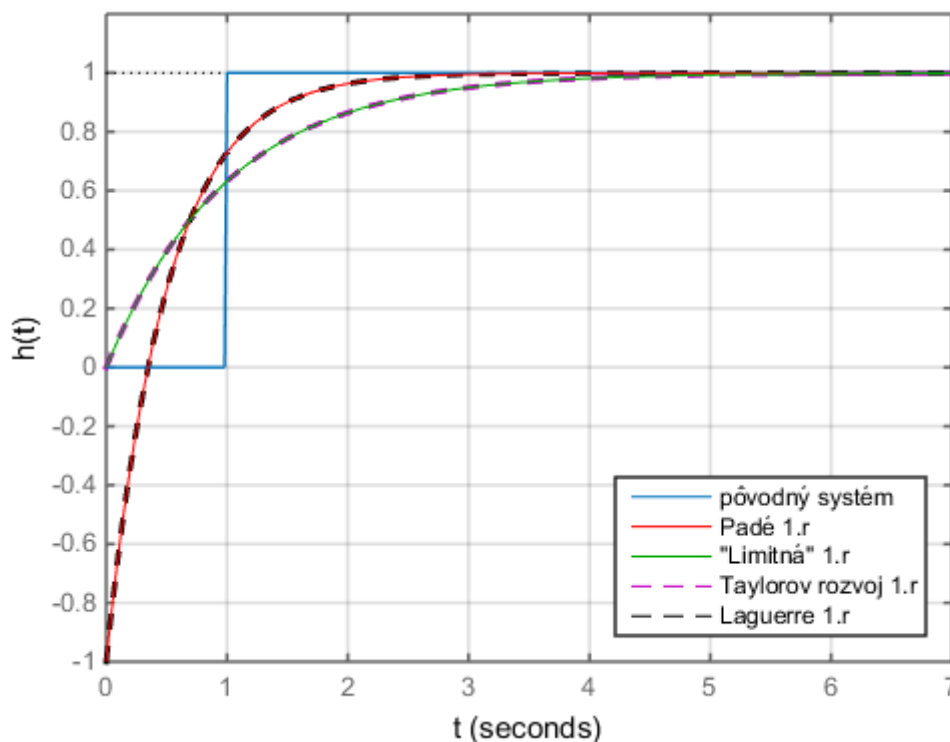
$$G_{Lim2}(s) = \frac{1}{1 + Ts + \frac{T^2}{4} s^2} \quad (12)$$

Vidíme, že rovnice (5) a (7) majú zhodný tvar, tak isto ako rovnice (9) a (11). Vyššie uvedené aproximácie najprv ukážeme na čistom dopravnom oneskorení

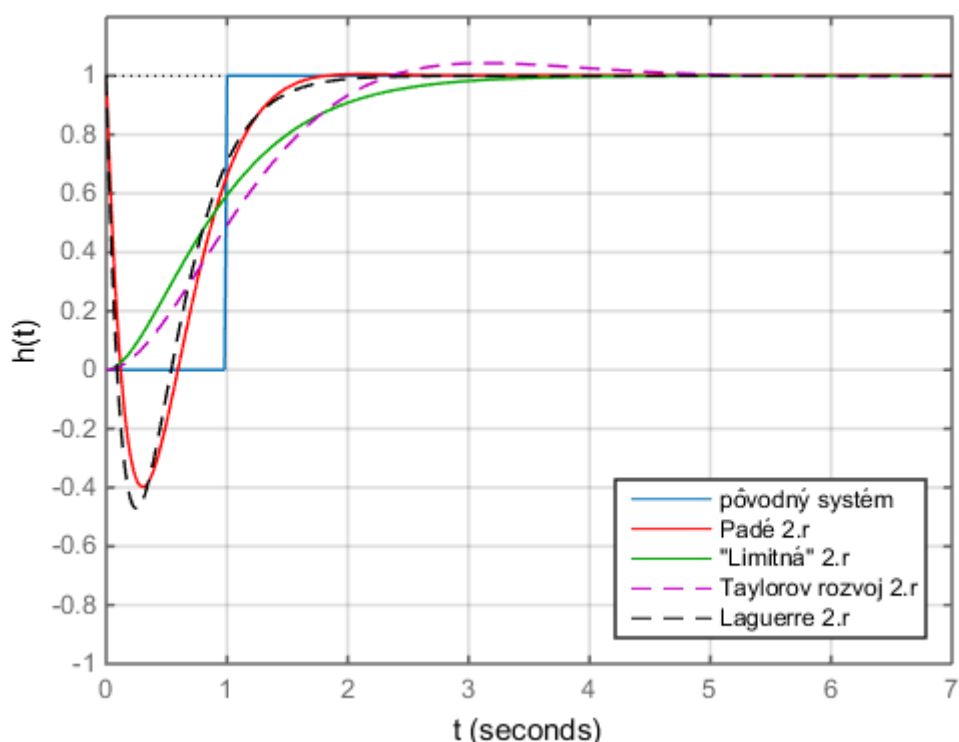
$$F(s) = e^{-Ts} \approx G(s),$$

kde  $G(s)$  je niektorý z uvedených lineárnych alebo kvadratických aproximácií.

Na obr. 1 a obr. 2 sú uvedené prechodové charakteristiky systému bez aproximácie a s jednotlivými aproximáciami dopravného oneskorenia ( $T = 1s$ ). Z charakteristík je vidno, že Padého a Lagerrova aproximácia sa ustália najrýchlejšie na pôvodnej prechodovej charakteristike, avšak tieto aproximácie majú aj záporné hodnoty. Toto chovanie je spôsobené nestabilnou nulou v aproximovanom prenose. „Limitná“ aproximácia a Taylorov rozvoj menovateľa sú pomalšie ako ďalšie dve už spomínané aproximácie, ale neobsahujú žiadne podkmity do záporných hodnôt.



Obr. 1: Prechodové charakteristiky lineárnych aproximácií čistého dopravného oneskorenia ( $T = 1s$ )



Obr. 2: Prechodové charakteristiky kvadratických aproximácií čistého dopravného oneskorenia ( $T = 1s$ )

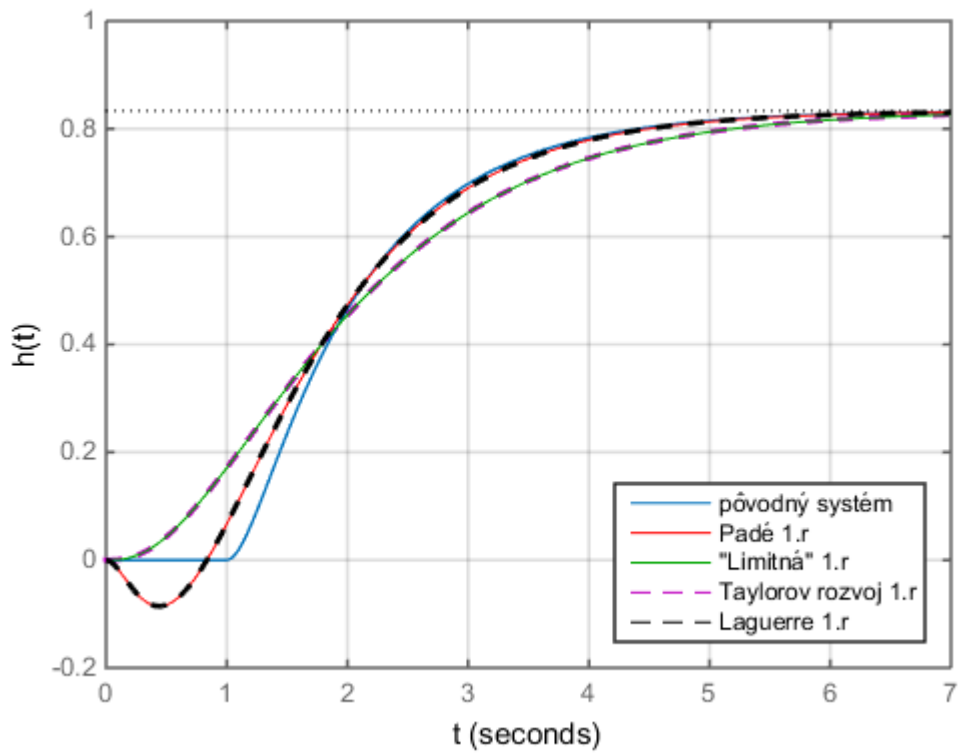
Vybrané aproximácie provnáme aj na systéme druhého rádu s prenosom

$$F(s) = \frac{5}{(s+1)(s+6)} e^{-Ts} \approx \frac{5}{(s+1)(s+6)} G(s). \quad (13)$$

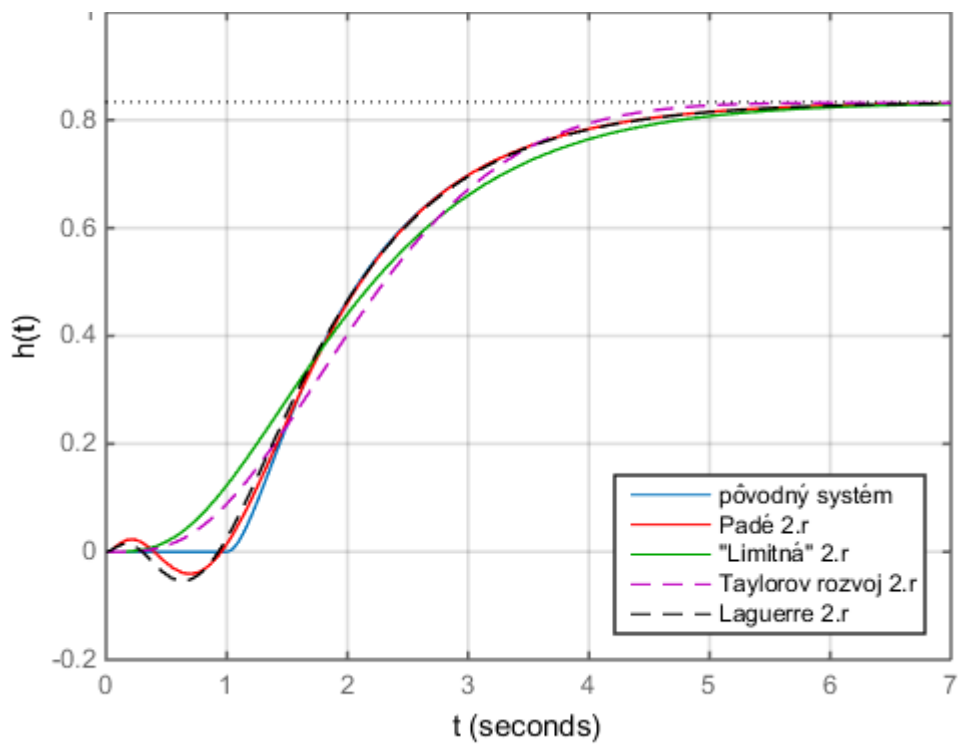
Kde prenos  $G(s)$  predstavuje jeden z vyššie uvedených aproximovaných prenosov (5-12).

Na obrázkach 3 a 4 sú uvedené prechodové charakteristiky systému s lineárnymi a kvadratickými aproximáciami, na obr. 5 a obr. 6 vidíme frekvenčné charakteristiky v komplexnej rovine (dopravné oneskorenie je všade  $T = 1s$ ). Prechodové charakteristiky sa chovajú podobne ako u čistého dopravného oneskorenia, Padého a Laguerreova aproximácia sa ustália oveľa rýchlejšie, ako „Limitná“ alebo Taylorov rozvoj menovateľa. Prvé dve aproximácie dosiahli ustálenú hodnotu do dvoch sekúnd, nevýhodou sú opäť kmity do záporných hodnôt. „Limitná“ aproximácia a Taylorov rozvoj menovateľa sa konvergujú pomalšie, ale neobsahujú žiadne kmity.

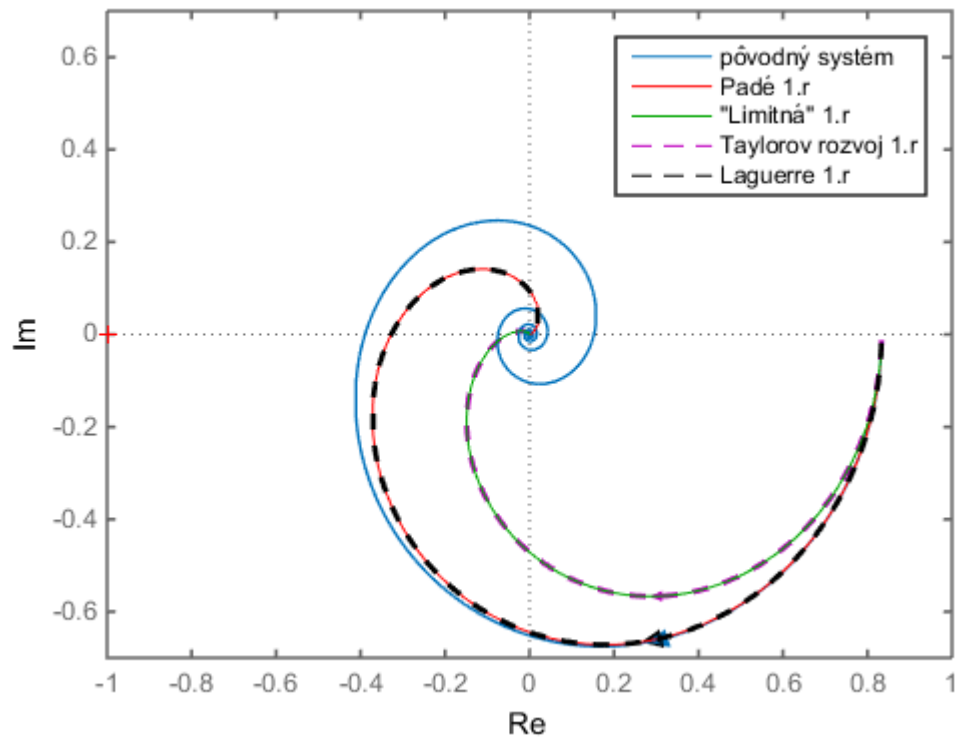
Ohľadom frekvenčných charakteristík najlepšie lineárne aproximácie sú jednoznačne Padého a Laguerreova aproximácia. Ako vidíme z obr. 5. „Limitná“ aproximácia a Taylorov rozvoj menovateľa sú vhodné len pre nízke kmitočty. Na obr. 6 sú uvedené kvadratické aproximácie frekvenčných charakteristík, najhoršou aproximáciou je „Limitná“, najlepšou je Padého aproximácia. Všimneme si, že každý kvadraticky aproximovaný priebeh konverguje jednoznačne lepšie k priebehu pôvodného systému ako patričná lineárna aproximácia.



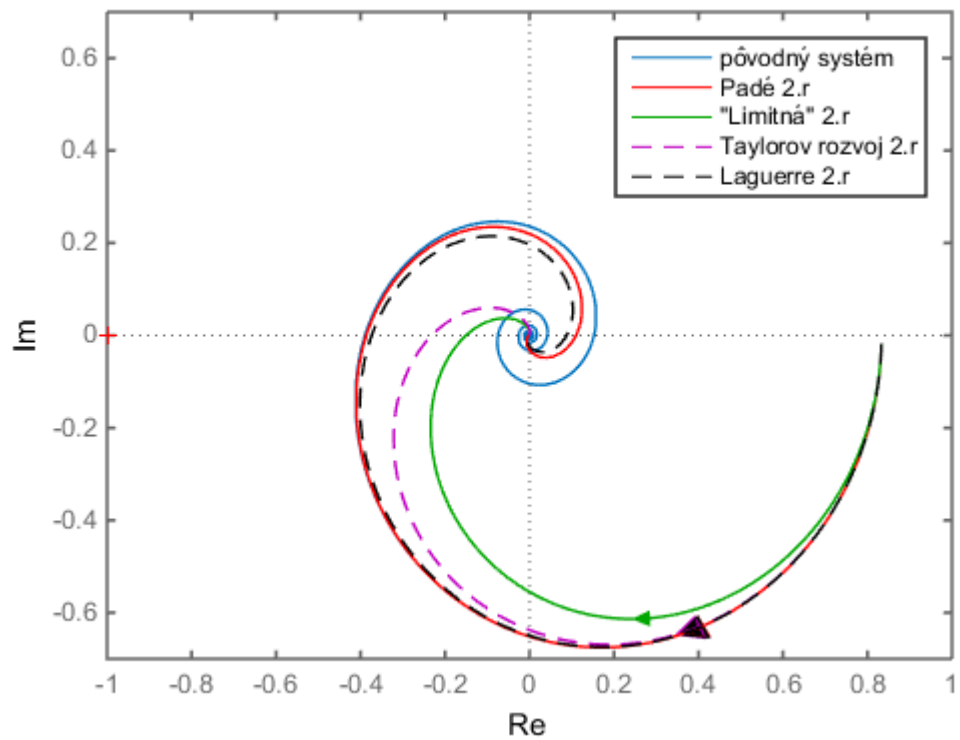
Obr. 3: Prechodové charakteristiky lineárnych aproximácií systému 2. rádu,  $T = 1s$



Obr. 4: Prechodové charakteristiky kvadratických aproximácií systému 2. rádu,  $T = 1s$



Obr. 5: Frekvenčné charakteristiky lineárnych aproximácií systému 2. rádu



Obr. 6: Frekvenčné charakteristiky kvadratických aproximácií systému 2. rádu

## 1.3 Vyhodnotenie vybraných aproximácií pomocou noriem

### $H_2$ a $H_\infty$

Norma  $H_2$  (alebo kvadratická norma) [1] pre stabilné lineárne SISO systémy je definovaná ako

$$\|F\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega}, \quad (14)$$

kde  $F(j\omega)$  je frekvenčný prenos systému. Táto norma je konečná pre systémy u ktorých rád menovateľa je vyšší než rád čitateľa, a ktoré nemajú žiadny pól na imaginárnej ose.

Norma  $H_\infty$  [1] pre stabilné lineárne SISO systémy je definovaná nasledujúcim výrazom:

$$\|F\|_\infty = \sup_{\omega} |F(j\omega)|. \quad (15)$$

$F(j\omega)$  je opäť frekvenčný prenos systému. Pre konečnosť normy  $H_\infty$  platia tie isté podmienky ako pre normu  $H_2$ .

Tieto dve normy aplikujeme na rozdiel pôvodného a aproximovaného prenosu. Z rovníc (14) a (15) dostaneme:

$$\|F - F_{APR}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega) - F_{APR}(j\omega)|^2 d\omega}, \quad (16)$$

$$\|F - F_{APR}\|_\infty = \sup_{\omega} |F(j\omega) - F_{APR}(j\omega)|. \quad (17)$$

Kde  $F(j\omega)$  je frekvenčný prenos pôvodného systému s dopravným oneskorením a  $F_{APR}(j\omega)$  je aproximovaný frekvenčný prenos.

V programovom prostredí MATLAB existuje príkaz `norm()`, ktorým vieme určiť  $H_2$  alebo  $H_\infty$  normu vybraného systému. Tento príkaz ale nefunguje pre rozdiel dvoch systémov s dopravným oneskorením, takže pre vyhodnotenie aproximácií používame iné metódy.

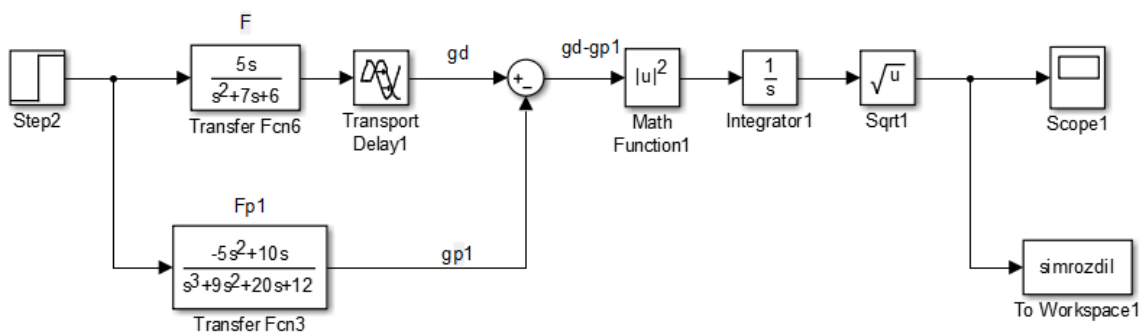


### 1.3.1 Výpočet normy $H_2$

Normu  $H_2$  určíme pre systém druhého rádu, ktorý je popísaný rovnicou (13) v kapitole 1.2 (dopravné oneskorenie je opäť  $T = 1s$ ). Pre výpočet normy som vytvoril zapojenie v SIMULINKu, ktorú vidíme na obr. 7. Pretože rovnica (16) je v Laplaceovom obraze a simulácia sa prebieha v časovej oblasti, musíme normu  $H_2$  definovať aj pre časovú oblasť. Z rovnice (16) vznikne:

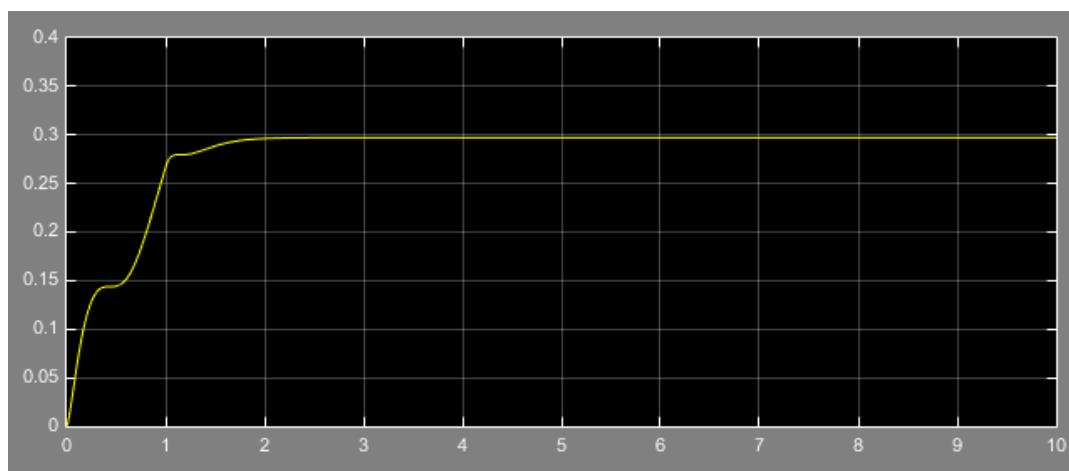
$$\|v - v_{apr}\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} [v(t) - v_{apr}(t)]^2 dt}. \quad (18)$$

Kde  $v(t)$  je časový signál a  $v_{apr}(t)$  je aproximácia tohto signálu. Model v SIMULINKu bol vytvorený podľa rovnice (18).



Obr. 7: Výpočet normy  $H_2$

Na obr. 7  $F$  je prenos pôvodného systému vynásobený  $s$ -krát. Na vstupe modelu je jednotkový skok, takže týmto násobením dostaneme z prechodovej charakteristiky impulzovú.  $Fp1$  je prenos systému aproximovaný lineárnou Padého aproximáciou. Výstupmi systémov sú impulzové charakteristiky  $gd(t)$  a  $gp1(t)$ . Signál  $gd(t) - gp1(t)$  (rozdiel charakteristik) prejde cez ďalšie tri bloky podľa rovnice (18). Výstupom modelu je priebeh na obr. 8. Hodnoty tohto priebehu uložíme do workspaceu ako vektor, posledná hodnota tohto vektoru udáva najpresnejšie hľadanú  $H_2$  normu.



Obr. 8: Výstupný signál z modelu na obr. 7

### 1.3.2 Výpočet normy $H_\infty$ a vyhodnotenie aproximácií

Všimneme si, že rovnica (15), ktorá definuje normu  $H_\infty$  udáva, že táto norma je najväčšia hodnota z bodeho charakteristiky systému. Podľa toho už není náročné určiť túto normu pomocou programového prostredia MATLAB. Z rozdielu prenosu pôvodného systému a aproximovaného prenosu vykreslíme bodeho charakteristiku, hodnoty tejto charakteristiky uložíme do vektoru.  $H_\infty$  norma je maximálna hodnota z toho vektoru, ktorú získame príkazom `max()`.

V nasledujúcej tabuľke sú uvedené normy  $H_2$  a  $H_\infty$  vypočítané pre systém druhého rádu, ktorý je popísaný rovnicou (13) v kapitole 1.2.

rád aproximácie	aproximácia	norma $H_2$	norma $H_\infty$
lineárna	Padého aproximácia	0.2971	0.2620
	Laguerreova aproximácia	0.2971	0.2620
	Taylorov rozvoj menovateľa	0.2975	0.2832
	"Limitná" aproximácia	0.2975	0.2832
kvadratická	Padého aproximácia	0.1806	0.1465
	Laguerreova aproximácia	0.2128	0.1677
	Taylorov rozvoj menovateľa	0.2253	0.2019
	"Limitná" aproximácia	0.2416	0.2137

Tab. 1: Normy  $H_2$  a  $H_\infty$  pre vybraný systém

Z tabuľky 1 vidíme, že medzi lineárnymi aproximáciami z pohľadu normy  $H_2$  a  $H_\infty$  najlepšie sú Padého a Laguerrova aproximácia. U kvadratických aproximáciach situácia je podobná, najlepšou aproximáciou je Padého, najhoršou je „Limitná“ aproximácia.

V ďalších kapitolách sú popísané zobecnené Laguerrove funkcie a ich využitie pre aproximáciu dopravného oneskorenia.

Poznámka: Táto kapitola bola čerpaná z môjho semestrálneho projektu [4].

## 2 Zobecnené Laguerrove funkcie

### 2.1 Zobecnené Laguerrove polynómy

Zobecnené Laguerrove polynómy sú riešením Laguerrovej rovnici

$$xy''(x) + (\alpha + 1 - x)y'(x) + my(x) = 0. \quad (19)$$

Tieto polynómy patria medzi klasické ortogonálne polynómy a sú dané vzťahom [5]:

$$l_m^{(\alpha)} = \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m+\alpha}{m-n} \frac{x^n}{n!} \quad (20)$$

kde  $m = 0, 1, \dots$ ;  $\alpha > -1$ ;  $x \in \mathbb{R}^+$ , parameter  $\alpha$  je rád zobecnenia.

### 2.2 Zobecnené Laguerrove funkcie

Zobecnené Laguerrove funkcie dostaneme zo zobecnených Laguerrových polynómov tak, že ich vynásobíme odmocninou z váhovej funkcie [5]:

$$w^{(\alpha)}(x) = x^\alpha e^{-x} \quad (21)$$

Následne aplikujeme substitúciu  $x = \sigma t$  ( $\sigma > 0$ ) a výraz vynásobíme normalizačnou konštantou [5]

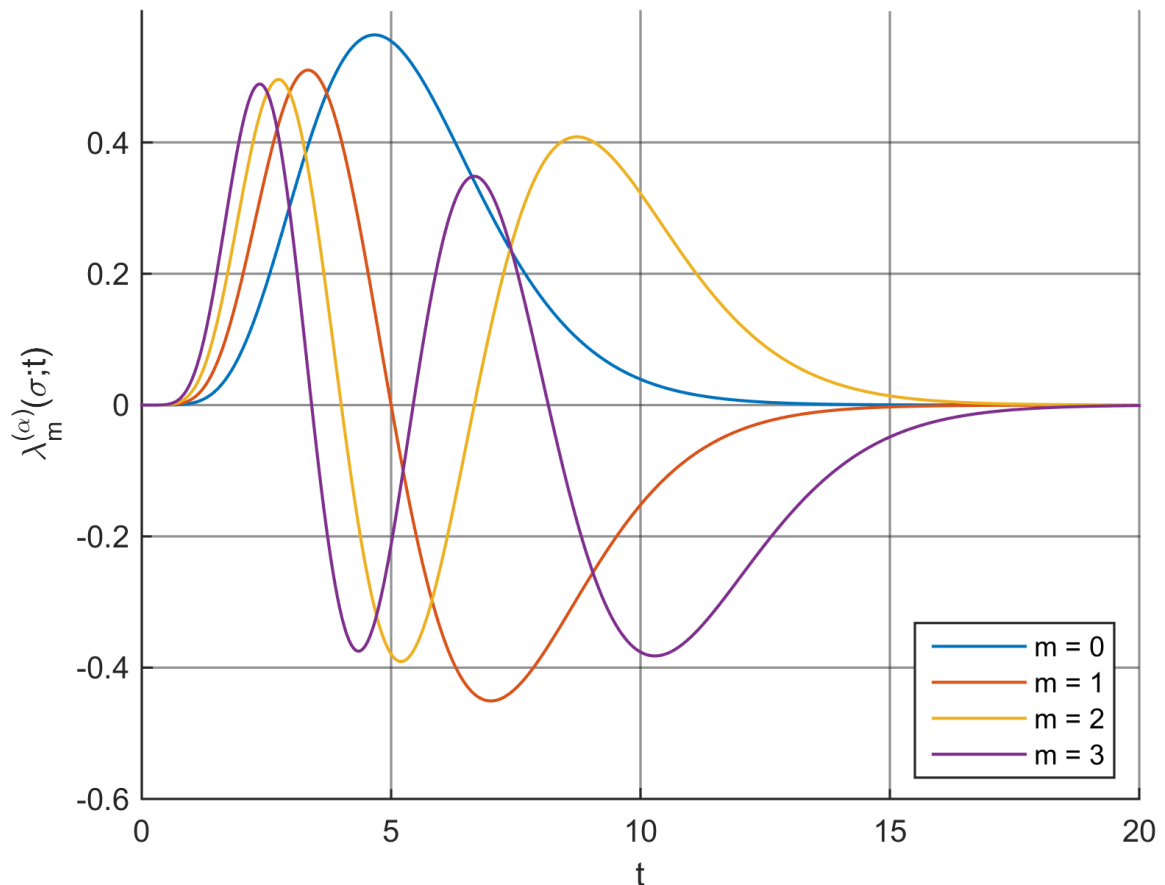
$$\sqrt{\frac{\sigma m!}{\Gamma(m + \alpha + 1)}} \quad (22)$$

kde  $\Gamma(m + \alpha + 1)$  je gama funkcia. Ako výsledok dostaneme *zobecnenú Laguerrovu funkciu* [5]:

$$\lambda_m^{(\alpha)}(\sigma; t) = \sqrt{\frac{\sigma m!}{\Gamma(m + \alpha + 1)}} \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m+\alpha}{m-n} \frac{(\sigma t)^{n+\frac{\alpha}{2}}}{n!} e^{-\sigma t}. \quad (23)$$

Vo výraze (23)  $t$  značí čas, platí  $t \geq 0$ ,  $m$  je rád funkcie ( $m = 0, 1, \dots$ ). Tieto funkcie majú dva voľné parametre, ktoré sú rád zobecnenia  $\alpha$  a časová mierka  $\sigma$ . V prípade, že  $\alpha = 0$  rovnica (23) sa zjednodušuje na *Laguerrovu funkciu*.

Na nasledujúcom obrázku vidíme zobecnené Laguerrove funkcie pre rôzne hodnoty  $m$ .



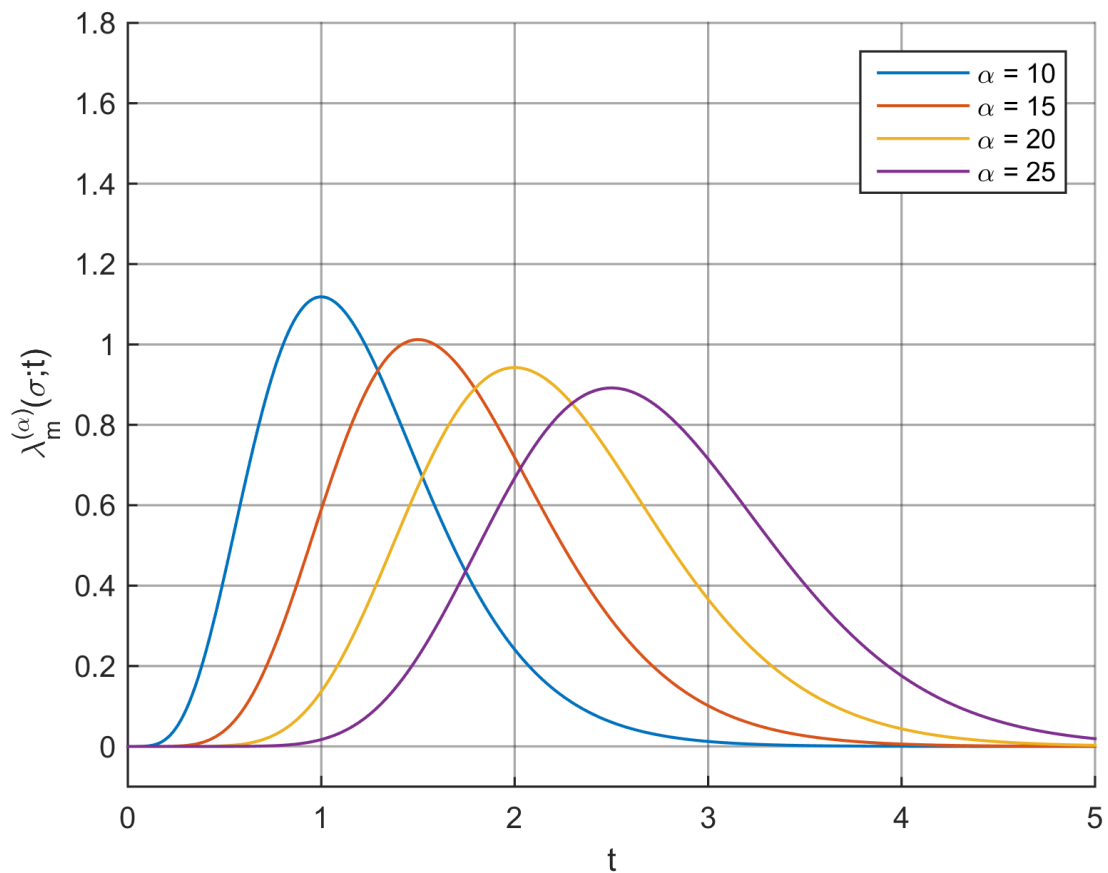
Obr. 9: Zobecnené Laguerrove funkcie pre rôzne rády,  $m = 0, 1, 2, 3$ ;  $\alpha = 14$ ;  $\sigma = 3$

### 2.3 Vplyv voľných parametrov

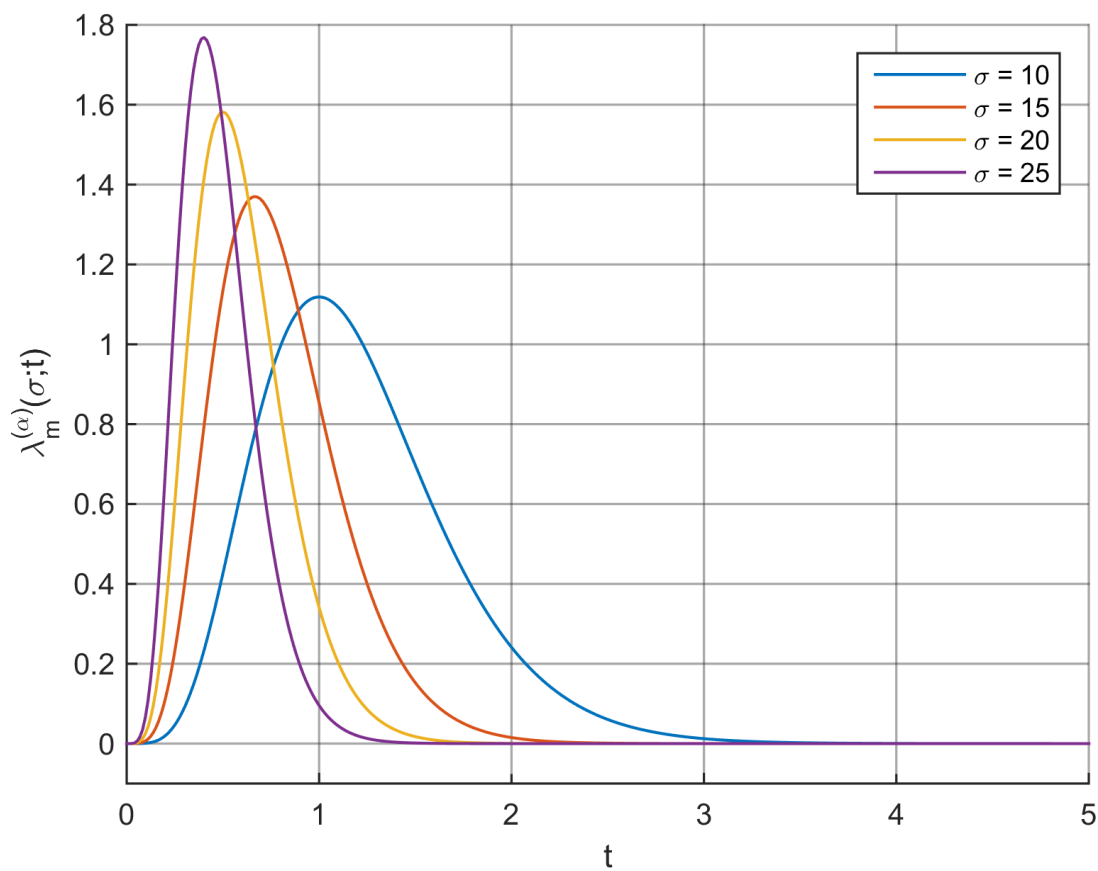
Z obrázku č. 9 vidíme, že najjednoduchšiu zobecnenú Laguerrovu funkciu dostaneme pre rád 0. Z toho dôvodu vplyvy voľných parametrov ukážeme na funkciách s rádom  $m = 0$ .

Na obrázku č. 10 sú vykreslené priebehy pre  $\sigma = 10$ , parameter  $\alpha$  sa zmení od 10 do 25 s krokom 5. S rastúcou  $\alpha$  funkcia sa postupne rozširuje, jeho výška klesá a stred funkcie sa posunie doprava na časovej osy.

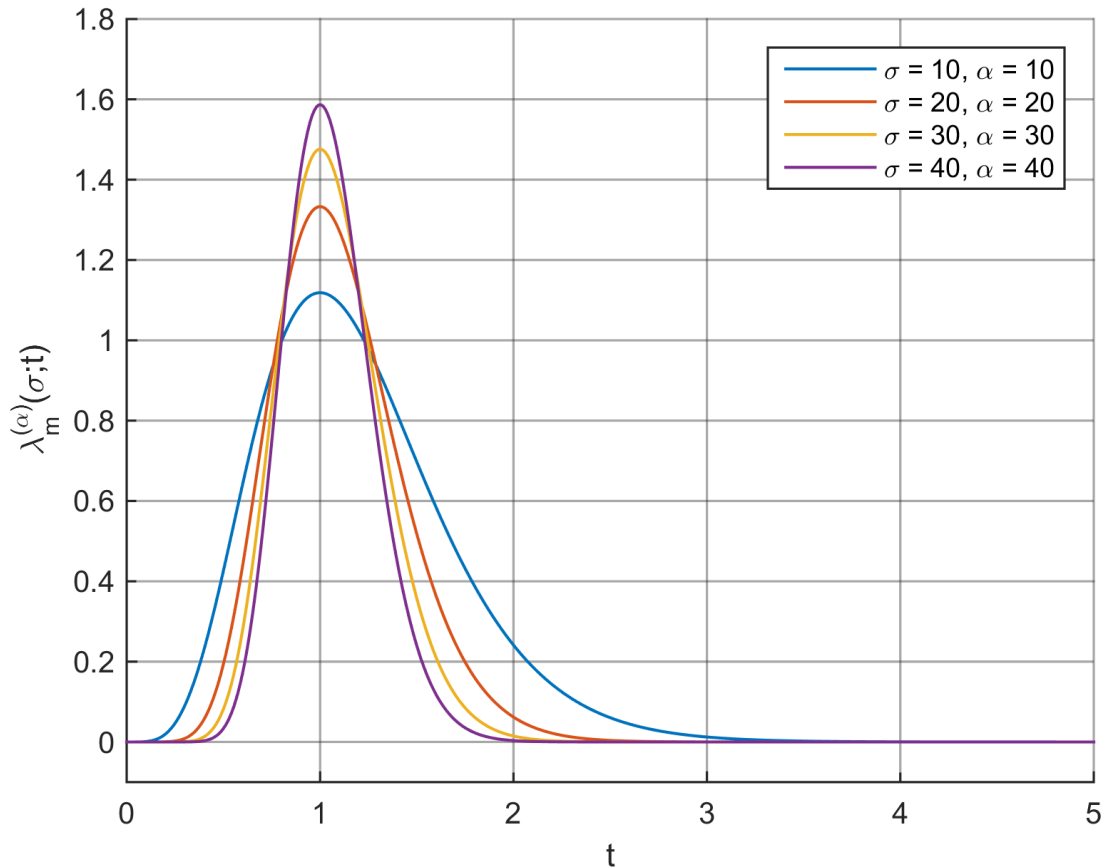
Na obrázku č. 11 vidíme priebehy pre  $\alpha = 10$ . V tomto prípade parameter  $\sigma$  sa zmení od 10 do 25 s krokom 5. To znamená, že prvá funkcia (modrou čiarou) je tá istá ako na obrázku 10, ale zvýšenie parametru  $\sigma$  má opačný vplyv na funkcie než zmena  $\alpha$  v predchádzajúcom prípade: šírka grafov sa postupne zužuje, výška rastie a priebehy so zvyšujúcou  $\sigma$  sa posunú doľava na časovej osy.



Obr. 10: Zmena parametru  $\alpha$



Obr. 11: Zmena parametru  $\sigma$



Obr. 12: Súčasná zmena parametrov  $\alpha$  a  $\sigma$

Obrázok č. 12 znázorňuje ak sa obidva parametre zmenia súčasne a to špeciálne pre prípad  $\alpha = \sigma$ . Vidíme, že posuny doprava a doľava sa vzájomne vykompenzujú, takže stred funkcie zostane v jednom bode (na obrázku je to bod 1). Ďalej si všimneme, že s rastúcimi parametrami funkcie sa postupne zužujú a ich výška roste. Pre  $\alpha, \sigma \rightarrow \infty$  to znamená, že zobecnená Laguerrova funkcia nultého rádu bude nekonečne úzka a nekonečne vysoká. Z toho vyplýva, že tvar funkcie sa blíži k tvaru Diracovho impulzu. Konkrétne pre náš prípad na obrázku 12 by sme dostali nekonečne úzku a nekonečne vysokú funkciu v bode 1. To je nič iného, ako Diracov impulz s dopravným oneskorením  $T = 1$ s. Dôkaz tohto tvrdenia nasleduje v ďalších kapitolách.

### 3 Aproximácia dopravného oneskorenia pomocou Laguerrových funkcií

V predchádzajúcej kapitole sme sa dopracovali k tomu, že tvar zobecnenej Laguerrovej funkcie nultého rádu s parametrami  $\alpha, \sigma \rightarrow \infty$  sa blíži k tvaru Diracovho impulzu s dopravným oneskorením. Aby sme to dokázali, potrebujeme určiť, že v akom bode leží maximum týchto funkcií a aké parametre to ovplyvňujú.

#### 3.1 Výpočet extrému zobecnenej Laguerrovej funkcie nultého rádu

Najprv určíme zobecnenú Laguerrovu funkciu nultého rádu tak, že do vzťahu (23) dosadíme  $m = 0$ :

$$\lambda_0^{(\alpha)}(\sigma; t) = \sqrt{\frac{\sigma 0!}{\Gamma(0 + \alpha + 1)}} \sum_{n=0}^0 (-1)^n \binom{0 + \alpha}{0 - n} \frac{(\sigma t)^{n + \frac{\alpha}{2}}}{n!} e^{-\sigma \frac{t}{2}}.$$

Po úprave dostaneme výraz:

$$\lambda_0^{(\alpha)}(\sigma; t) = \sqrt{\frac{\sigma}{\Gamma(\alpha + 1)}} (-1)^0 \binom{\alpha}{0} \frac{(\sigma t)^{\frac{\alpha}{2}}}{0!} e^{-\sigma \frac{t}{2}}$$

kde:  $\binom{\alpha}{0} = 1$ .

Ako výsledok pre zobecnenú Laguerrovu funkciu nultého rádu dostaneme

$$\lambda_0^{(\alpha)}(\sigma; t) = \sqrt{\frac{\sigma}{\Gamma(\alpha + 1)}} (\sigma t)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\sigma \frac{t}{2}}. \quad (24)$$

Aby sme určili extrém, potrebujeme derivovať túto funkciu podľa  $t$ . Členy, ktoré obsahujú len konštantné koeficienty označíme písmenom  $K$ :  $K = \sqrt{\frac{\sigma}{\Gamma(\alpha + 1)}} \cdot \sigma^{\frac{\alpha}{2}}$ .

$$\left( \lambda_0^{(\alpha)}(\sigma; t) \right)' = \left( K \cdot t^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{-\sigma \frac{t}{2}} \right)'$$



$$\left(\lambda_0^{(\alpha)}(\sigma; t)\right)' = K \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot t^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\sigma t}{2}} + K \cdot t^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{-\frac{\sigma t}{2}} \cdot \frac{-\sigma}{2} = K \cdot e^{-\frac{\sigma t}{2}} \left[ \frac{\alpha}{2} \cdot t^{\frac{\alpha}{2}-1} - t^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{2} \right].$$

Aby sme dostali extrém z funkcie, jeho derivácia sa musí rovnať nule:

$$K \cdot e^{-\frac{\sigma t}{2}} \left[ \frac{\alpha}{2} \cdot t^{\frac{\alpha}{2}-1} - t^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{2} \right] = 0.$$

Z toho vyplýva, že funkcia určite má extrém v prípade, že

$$\frac{\alpha}{2} \cdot t^{\frac{\alpha}{2}-1} - t^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{2} = 0,$$

$$t^{\frac{\alpha}{2}} \left( \frac{\alpha}{2t} - \frac{\sigma}{2} \right) = 0.$$

Po zjednodušení dostaneme:

$$\frac{\alpha}{t} - \sigma = 0.$$

Ak z toho výrazu vyjadríme  $t$ :

$$t = \frac{\alpha}{\sigma}. \quad (25)$$

To znamená, že zobecnená Laguerrova funkcia nultého rádu má extrém v bode  $t = \frac{\alpha}{\sigma}$ , presnejšie v tomto bode má funkcia maximum. Ak sa znova pozrieme na obrázok 12 vidíme, že maximum funkcií je v bode  $t = 1$  a platí, že  $\alpha = \sigma$ . To môžeme overiť jednoducho s odvodeným výrazom (25). Parametre  $\alpha$  a  $\sigma$  dosadíme pre prvú funkciu (s modrou čiarou):

$$t = \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{10}{10} = 1 \text{ s.}$$

Ďalej vieme, že ak zobecnená Laguerrova funkcia nultého rádu bude nekonečne úzka, bude sa nachádzať v bode, kde má extrém, t.j. v bode  $t = \frac{\alpha}{\sigma}$ . To znamená, že tento čas je dopravné oneskorenie. Práve preto tento bod je obzvlášť dôležitý a označíme ho písmenom  $T$ .

Ďalší krok v dôkazu, že tvar zobecnenej Laguerrovej funkcie s rastúcimi parametrami  $\alpha$  a  $\sigma$  sa blíži k tvaru Diracovho impulzu spočíva v normalizácii tejto funkcie. To je popísané v ďalšej kapitole.

## 3.2 Normalizácia zobecnenej Laguerrovej funkcie nultého rádu

Pre Diracov impulz platí výraz [6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (26)$$

Význam rovnici (26) je, že plocha Diracovho impulzu sa rovná 1. Aby plocha zobecnenej Laguerrovej funkcie nultého rádu bola tiež jednotková, musíme ho normalizovať. Pre normalizáciu platí nasledujúci výraz:

$$\int_0^{\infty} A \cdot \lambda_0^{(\alpha)}(\sigma; t) dt = 1, \quad (27)$$

kde  $A$  je normalizačná konštanta. Člen  $A \cdot \lambda_0^{(\alpha)}(\sigma; t)$  udáva normalizovanú Laguerrovu funkciu nultého rádu a celá ľavá strana je plocha tejto funkcie, čo musí rovnať jednotke. Normalizačnú konštantu určíme pomocou výrazu (27) tak, že vyjadríme z rovnice  $A$ :

$$A = \frac{1}{\int_0^{\infty} \lambda_0^{(\alpha)}(\sigma; t) dt}. \quad (28)$$

Najprv integrujeme zobecnenú Laguerrovu funkciu v menovateli zlomku:

$$I = \int_0^{\infty} \lambda_0^{(\alpha)}(\sigma; t) dt = \sqrt{\frac{\sigma}{\Gamma(\alpha + 1)}} \sigma^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\sigma t}{2}} dt.$$

K integrovaniu výrazu na pravej strane predchádzajúcej rovnice využijeme nasledujúci vzorec [7]:

$$\int_0^{\infty} x^r e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(r + 1)}{a^{r+1}}. \quad (29)$$

Pre náš prípad platí:

$$r = \frac{\alpha}{2}, a = \frac{\sigma}{2}, x = t.$$

Po dosadení:

$$I = \sqrt{\frac{\sigma}{\Gamma(\alpha + 1)}} \sigma^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)}{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}}.$$

Po malých úpravách dostaneme rovnicu (30)

$$I = \sqrt{\frac{\sigma}{\Gamma(\alpha + 1)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}+1}}{\sigma}. \quad (30)$$

S tým sme sa dopracovali k hľadanému integrálu, čo udáva plochu zobecnenej Laguerrovej funkcie. Pomocou toho už vieme určiť normalizačnú konštantu  $A$ :

$$A = \frac{1}{I} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{\Gamma(\alpha + 1)}}} \cdot \frac{\sigma}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}+1}}$$

a pomocou tejto konštanty vypočítame normalizovanú Laguerrovu funkciu, ktorú značíme  $L_0^{(\alpha)}(\sigma; t)$

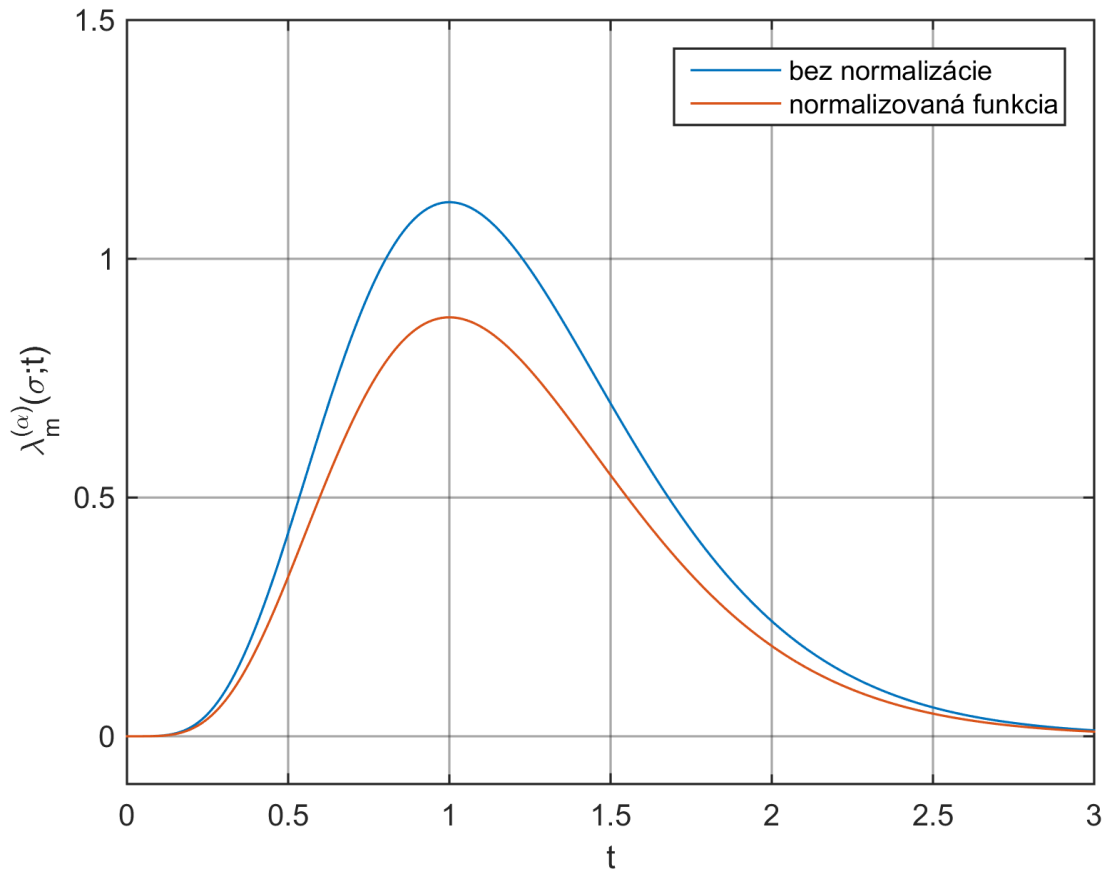
$$L_0^{(\alpha)}(\sigma; t) = A \cdot \lambda_0^{(\alpha)}(\sigma; t), \quad (31)$$

$$L_0^{(\alpha)}(\sigma; t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{\Gamma(\alpha + 1)}}} \cdot \frac{\sigma}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}+1}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\Gamma(\alpha + 1)}} (\sigma t)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\sigma \frac{t}{2}}.$$

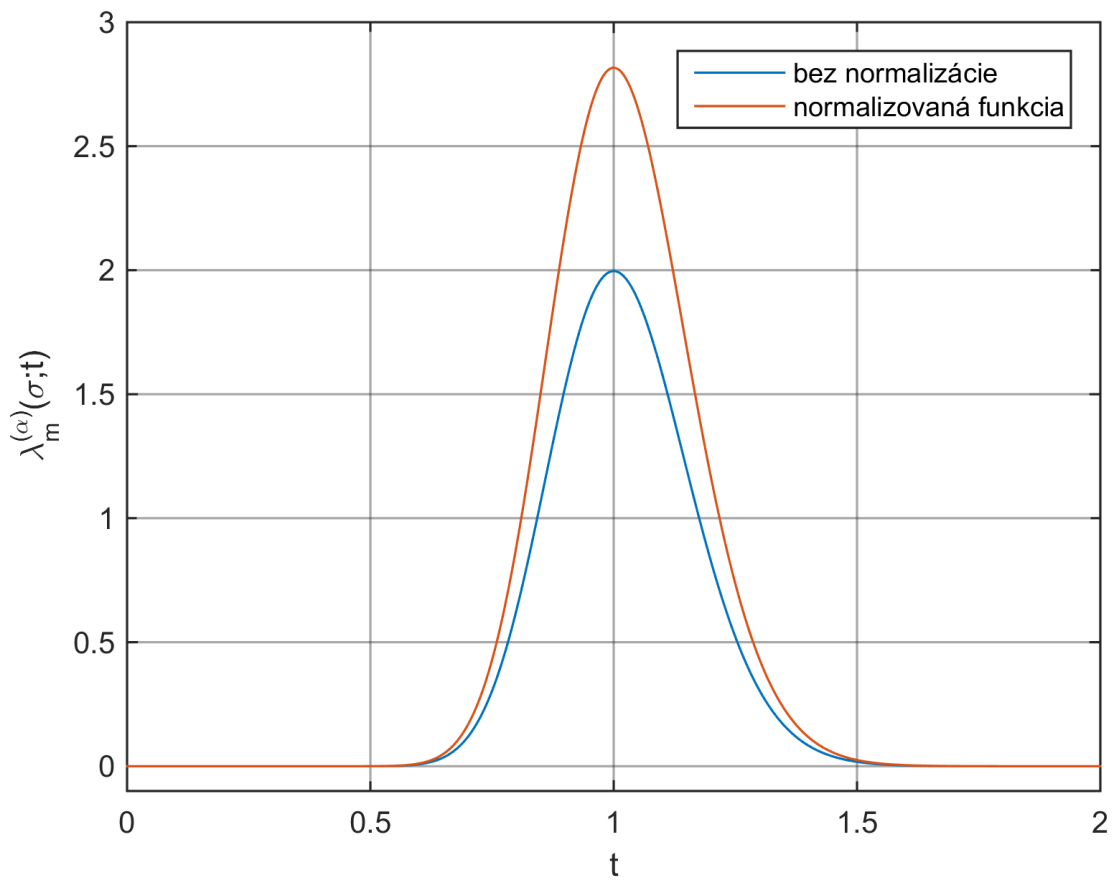
Po zjednodušení dostaneme výsledok

$$L_0^{(\alpha)}(\sigma; t) = \frac{\sigma \cdot (\sigma t)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\sigma \frac{t}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}+1}}. \quad (32)$$

Grafické znázornenie normalizovanej Laguerrovej funkcie je na nasledujúcich obrázkoch s parametrami  $\alpha = \sigma = 10$  a  $\alpha = \sigma = 100$ . Vidíme, že funkcia je vynásobená konštantou, takže zmení sa len jej výška. Všimneme si ešte, že pre nižšie hodnoty  $\alpha$  a  $\sigma$  normalizačná konštantá je menšia ako 1 ( $A < 1$ ). To vidíme na obrázku č. 13, kde výška normalizovanej Laguerrovej funkcie je menšia, ako výška pôvodnej funkcie. Pre vysoké hodnoty  $\alpha$  a  $\sigma$  už platí, že normalizovaná funkcia má väčší extrém, ako pôvodná. Vo výsledku to znamená, že po normalizácii zobecnená Laguerrova funkcia konverguje rýchlejšie k Diracovému impulzu.



Obr. 13: Normalizovaná Laguerrova funkcia s parametrami  $\alpha = \sigma = 10$



Obr. 14: Normalizovaná Laguerrova funkcia s parametrami  $\alpha = \sigma = 100$

### 3.3 Výpočet limit z normalizovanej Laguerrovej funkcie nultého rádu

V tejto kapitole vypočítame limity normalizovanej Laguerrovej funkcie aby sme dokázali, že pre parametre  $\alpha, \sigma \rightarrow \infty$  tvar funkcie sa blíži k tvaru Diracovho impulzu.

Limitu určíme v dvoch prípadoch:

1)  $\sigma T = \alpha$

2)  $\sigma T \neq \alpha$

V prípade č. 1 počítame limitu v bode  $T$ , kde má Laguerrova funkcia extrém a tento extrém sa blíži k nekonečnu pre  $\alpha, \sigma \rightarrow \infty$ .

V prípade č. 2 počítame limitu všade okrem bodu  $\sigma T = \alpha$ . Ak tvar Laguerrovej funkcie sa naozaj blíži k tvaru Diracovho impulzu, táto limita má byť nulová.

1)  $\sigma T = \alpha$

$$\lim_{\alpha, \sigma \rightarrow \infty} L_0^{(\alpha)}(\sigma; t) = \lim_{\alpha, \sigma \rightarrow \infty} \frac{\sigma \cdot (\sigma t)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\sigma \frac{t}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{\alpha}{2} + 1}} \quad (33)$$

V ďalšom kroku do rovnice (33) dosadíme  $\sigma T = \alpha$  a dostaneme výraz:

$$\lim_{\alpha, \sigma \rightarrow \infty} L_0^{(\alpha)}(\sigma; t) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha}{T} \cdot \alpha^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{\alpha}{2} + 1}}. \quad (34)$$

Následne aplikujeme Stirlingovu aproximáciu pre náhradu gama funkcie [7]:

$$\Gamma(n + 1) = n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (35)$$

Z rovnice (35) dostaneme:

$$\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \approx \sqrt{2\pi \frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\frac{\alpha}{2e}\right)^{\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\pi\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{2e}\right)^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (36)$$

Výraz (36) dosadíme do rovnice (34):

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha}{T} \cdot \alpha^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\pi\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{2e}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot 2^{\frac{\alpha}{2} + 1}} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha}{T} \cdot \alpha^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}} (2e)^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\pi} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{\frac{\alpha}{2}} \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}} \cdot 2} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha}{T}}{\sqrt{\pi} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot 2}.$$

Konštanty vytkneme pred limitu a výraz upravíme:

$$\frac{1}{2T\sqrt{\pi}} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\alpha^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2T\sqrt{\pi}} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sqrt{\alpha} = \infty. \quad (37)$$

Vidíme, že výsledný výraz (37) sa blíži k nekonečnu.

2)  $\sigma T \neq \alpha$

Tento prípad je zložitejší ako predchádzajúci. Budeme používať substitúciu  $\sigma T = \alpha x$ , kde  $x$  je rôzne od jednotky a súčasne  $x > 0$ . Opäť vychádzame z výrazu (33):

$$\lim_{\alpha, \sigma \rightarrow \infty} L_0^{(\alpha)}(\sigma; t) = \lim_{\alpha, \sigma \rightarrow \infty} \frac{\sigma \cdot (\sigma t)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\sigma t}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}+1}} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha x}{T} \cdot (\alpha x)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}+1}}. \quad (38)$$

Teraz využijeme Stirlingovu aproximáciu (rovnica (36)), aby sme odstránili gama funkciu z výrazu (38):

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha x}{T} \cdot (\alpha x)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}+1}} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha x}{T} \cdot (\alpha x)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{\sqrt{\pi \alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{2e}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}+1}}$$

Následne túto limitu upravíme

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha x}{T} \cdot \alpha^{\frac{\alpha}{2}} \cdot x^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{-\frac{\alpha x}{2}} \cdot (2e)^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\pi} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{\frac{\alpha}{2}} \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}} \cdot 2} &= \frac{1}{2T} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot x \cdot x^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{-\frac{\alpha x}{2}} \cdot e^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\pi}} = \\ &= \frac{x}{2T\sqrt{\pi}} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{\frac{\alpha}{2}(1-x)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Výraz sme postupne zjednodušili a vytkli sme konštanty pred limitu. Po ďalšom úprave rovnica (39) má tvar:

$$\frac{x}{2T\sqrt{\pi}} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\alpha}}{\left(\frac{e^{x-1}}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}}} \quad (40)$$

Z výrazu  $\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{\frac{\alpha}{2}(1-x)}$  sme vytvorili zlomok nasledujúcim spôsobom:  $\alpha^{\frac{1}{2}}$  sme napísali ako  $\sqrt{\alpha}$  a nechali sme v čitateli,  $x^{\frac{\alpha}{2}}$  sme napísali ako  $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{-\alpha}{2}}$  a  $e^{\frac{\alpha}{2}(1-x)}$  ako  $(e^{x-1})^{\frac{-\alpha}{2}}$ .

Posledné dva výrazy sme napísali ako jeden zlomok  $\left(\frac{e^{x-1}}{x}\right)^{\frac{-\alpha}{2}}$  a to sme dali do menovateľa celého zlomku.

Teraz potrebujeme dokázať, že výraz

$$\frac{e^{x-1}}{x} > 1. \quad (41)$$

Ak to platí, limita (40) je typu " $\frac{\infty}{\infty}$ " a môžeme ju vyriešiť pomocou L'Hospitalovho pravidla. Aby sme to dokázali, potrebujeme určiť extrém rovnice (41). Derivácia tohto výrazu:

$$\frac{d\left(\frac{e^{x-1}}{x}\right)}{dx} = \frac{d(x^{-1} \cdot e^{x-1})}{dx} = -x^{-2}e^{x-1} + x^{-1}e^{x-1}. \quad (42)$$

Pravá strana rovnice (42) sa musí rovnať nule:

$$-\frac{e^{x-1}}{x^2} + \frac{e^{x-1}}{x} = 0$$

$$\frac{e^{x-1}}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Predchádzajúca rovnica platí pre  $x = 1$ . Teraz vyšetříme, či v tomto bode má funkcia maximum alebo minimum. K tomu musíme výraz (41) aj druhýkrát derivovať:

$$\frac{d(-x^{-2}e^{x-1} + x^{-1}e^{x-1})}{dx} = 2x^{-3}e^{x-1} - x^{-2}e^{x-1} - x^{-2}e^{x-1} + x^{-1}e^{x-1}.$$

Pravú stranu rovnice upravíme

$$\frac{2e^{x-1}}{x^3} - \frac{2e^{x-1}}{x^2} + \frac{e^{x-1}}{x} = e^{x-1} \left(\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$$

a tento výraz vypočítame pre  $x = 1$ :

$$e^{1-1} \left(\frac{2}{1^3} - \frac{2}{1^2} + \frac{1}{1}\right) = e^0(2 - 2 + 1) = 1. \quad (43)$$

Ako výsledok sme dostali jednotku, čo je väčšia ako nula. Práve preto v bode  $x = 1$  funkcia (41) má minimum a tento minimum má hodnotu

$$\frac{e^{1-1}}{1} = 1.$$

To znamená, že funkcia (41) pre  $x = 1$  má hodnotu 1 (čo je minimum), ale  $x$  je definované tak, že sa nemôže rovnať jednotke. Z toho vyplýva, že výraz (41) platí a môžeme použiť L'Hospitalovo pravidlo pre limitu (40):

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\alpha}}{\left(\frac{e^{x-1}}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Pre deriváciu menovateľa využijeme vzorec

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (44)$$

a po aplikovaní L'Hospitalovho pravidla dostaneme výsledok

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{e^{x-1}}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \ln \frac{e^{x-1}}{x}} = \frac{1}{2 \cdot \ln \frac{e^{x-1}}{x}} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot \left(\frac{e^{x-1}}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}}} = 0. \quad (45)$$

Vidíme, že výraz (45) obsahuje  $\alpha$  len v menovateli, takže táto limita sa blíži k nule.

S tým sme dokončili prípad č. 2 a dokázali sme, že zobecnená Laguerrova funkcia s rastúcimi parametrami  $\alpha$  a  $\sigma$  sa blíži k nekonečnu v bode  $T$  a k nule všade mimo bodu  $T$ . To isté platí aj pre Diracov impulz  $\delta(t - T)$ , ktorý je posunutý v čase o  $T$ .

Aby dôkaz, že zobecnená Laguerrova funkcia s parametrami  $\alpha, \sigma \rightarrow \infty$  má tvar Diracovho impulzu bol úplný, potrebujeme ešte zistiť jeho Laplaceovu transformáciu. To bude popísané v nasledujúcej kapitole.

### 3.4 Laplaceova transformácia normalizovanej Laguerrovej funkcie

Diracov impulz posunutý v čase o  $T$  má Laplaceovu transformáciu

$$\mathcal{L}\{\delta(t - T)\} = e^{-Ts}.$$



Cieľom tejto kapitoly je dokázať, že Laplaceova transformácia normalizovanej Laguerrovej funkcie nultého rádu pre parametre  $\alpha, \sigma \rightarrow \infty$  sa rovná Laplaceovej transformácii Diracovho impulzu  $\delta(t - T)$ .

Normalizovaná Laguerrova funkcia nultého rádu podľa rovnici (32) má tvar

$$L_0^{(\alpha)}(\sigma; t) = \frac{\sigma \cdot (\sigma t)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\sigma t}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{\alpha}{2} + 1}}.$$

Jeho Laplaceovu transformáciu označíme  $\Lambda_0^{(\alpha)}(\sigma; t)$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_0^{(\alpha)}(\sigma; t) &= \mathcal{L}\{L_0^{(\alpha)}(\sigma; t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\sigma \cdot (\sigma t)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\sigma t}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{\alpha}{2} + 1}}\right\} = \\ &= \frac{\sigma \cdot \sigma^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{\alpha}{2} + 1}} \mathcal{L}\left\{t^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\sigma t}{2}}\right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Konštantné výrazy (ktoré neobsahujú  $t$ ) sme vytkli pred operátor  $\mathcal{L}$ . Potrebujeme transformovať výraz  $t^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\sigma t}{2}}$ . Laplaceovu transformáciu z  $t^{\frac{\alpha}{2}}$  určíme pomocou nasledujúceho vzorca (výraz nájdeme v slovníkoch Laplaceovej transformácie):

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma(p + 1)}{(s)^{p+1}}. \quad (47)$$

To platí pre  $p > -1$ , čo je splnené, pretože  $\frac{\alpha}{2} > -1$ . Pomocou rovnici (47) teda dostaneme:

$$\mathcal{L}\left\{t^{\frac{\alpha}{2}}\right\} = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)}{(s)^{\frac{\alpha}{2} + 1}}. \quad (48)$$

My ale potrebujeme transformovať výraz  $t^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\sigma t}{2}}$ . Obecné pre Laplaceovu transformáciu platí

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),$$

kde  $f(t)$  je  $t^{\frac{\alpha}{2}}$  a  $F(s)$  je pravá strana rovnice (48).

Ak funkciu  $f(t)$  vynásobíme výrazom  $e^{at}$  a výsledok transformujeme dostaneme:

$$\mathcal{L}\{f(t) \cdot e^{at}\} = F(s - a). \quad (49)$$

Pomocou rovnici (49) už nie je náročné určiť hľadanú Laplaceovu transformáciu:

$$\mathcal{L}\left\{t^{\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{\sigma t}{2}}\right\} = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)}{\left(s + \frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}}. \quad (50)$$

Teraz vypočítanú transformáciu dosadíme do rovnice (46)

$$A_0^{(\alpha)}(\sigma; t) = \frac{\sigma \cdot \sigma^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}+1}} \mathcal{L}\left\{t^{\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{\sigma t}{2}}\right\} = \frac{\sigma \cdot \sigma^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}+1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)}{\left(s + \frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}}.$$

Po zjednodušení pravej strany dostaneme

$$A_0^{(\alpha)}(\sigma; t) = \frac{\sigma^{\frac{\alpha}{2}+1}}{2^{\frac{\alpha}{2}+1} \cdot \left(s + \frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}} = \left(\frac{\sigma}{2 \cdot \left(s + \frac{\sigma}{2}\right)}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1} = \left(\frac{\sigma}{2s + \sigma}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}.$$

Pretože Laplaceovu transformáciu normalizovanej Laguerrovej funkcie počítame pre prípad, že parametre  $\alpha, \sigma \rightarrow \infty$ , môžeme využiť výraz  $\sigma T = \alpha$ . Pomocou toho odstránime  $\sigma$  z predchádzajúcej rovnice:

$$\left(\frac{\sigma}{2s + \sigma}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1} = \left(\frac{\frac{\alpha}{T}}{2s + \frac{\alpha}{T}}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}$$

a po úprave dostaneme

$$\left(\frac{\frac{\alpha}{T}}{2s + \frac{\alpha}{T}}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1} = \left(\frac{1}{\frac{2Ts}{\alpha} + 1}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1} = \left(\frac{1}{\frac{Ts}{\alpha} + 1}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}. \quad (51)$$

Ako sme už spomínali na začiatku kapitole, Laplaceova transformácia Diracovho impulzu posunutého v čase o  $T$  je  $e^{-Ts}$ . Pre exponenciálnu funkciu platí nasledujúca aproximácia [8]:

$$e^x \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ pre } n \rightarrow \infty. \quad (52)$$

Túto rovnicu aplikujeme pre výraz  $e^{-Ts}$ :

$$e^{-Ts} = \frac{1}{e^{Ts}} \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{Ts}{n}\right)^n} = \left(\frac{1}{1 + \frac{Ts}{n}}\right)^n. \quad (53)$$

Vidíme, že pravé strany rovníc (53) a (51) sú skoro zhodné. Vo výraze (51)  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Z toho plyne, že aj  $\frac{\alpha}{2} \rightarrow \infty$  a platí

$$\frac{\alpha}{2} + 1 \approx \frac{\alpha}{2}.$$

S tým sme dokázali nasledujúcu rovnosť pre  $n, \alpha \rightarrow \infty$

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{Ts}{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1} = \left(\frac{1}{1 + \frac{Ts}{n}}\right)^n. \quad (54)$$

Na ľavej strane rovnici (54) je Laplaceova transformácia zobecnenej Lagerrovej funkcie pre  $\alpha, \sigma \rightarrow \infty$  a na pravej strane je Laplaceova transformácia Diracovho impulzu s dopravným oneskorením  $T$ .

S tým je už kompletný dôkaz, že zobecnená Lagerrova funkcia s vhodnými parametrami má tvar Diracovho impulzu. To znamená, že túto funkciu môžeme využiť pre aproximáciu dopravného oneskorenia.

## 4 Porovnanie výsledkov s racionálnymi aproximáciami

V predchádzajúcej kapitole sme odvodili, že Laplaceova transformácia zobecnenej Laguerrovej funkcie nultého rádu vyzerá nasledujúcim spôsobom:

$$A_0^{(\alpha)}(\sigma; t) = \left( \frac{1}{1 + \frac{Ts}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{2}+1} \approx e^{-Ts}. \quad (55)$$

Tento výraz použijeme pre aproximáciu dopravného oneskorenia.

Člen dopravného oneskorenia  $e^{-Ts}$  rozložíme na zlomok:

$$e^{-Ts} = \frac{e^{-\frac{Ts}{2}}}{e^{\frac{Ts}{2}}}. \quad (56)$$

Pre výrazy  $e^{-\frac{Ts}{2}}$  a  $e^{\frac{Ts}{2}}$  aplikujeme odvodený vzťah (55)

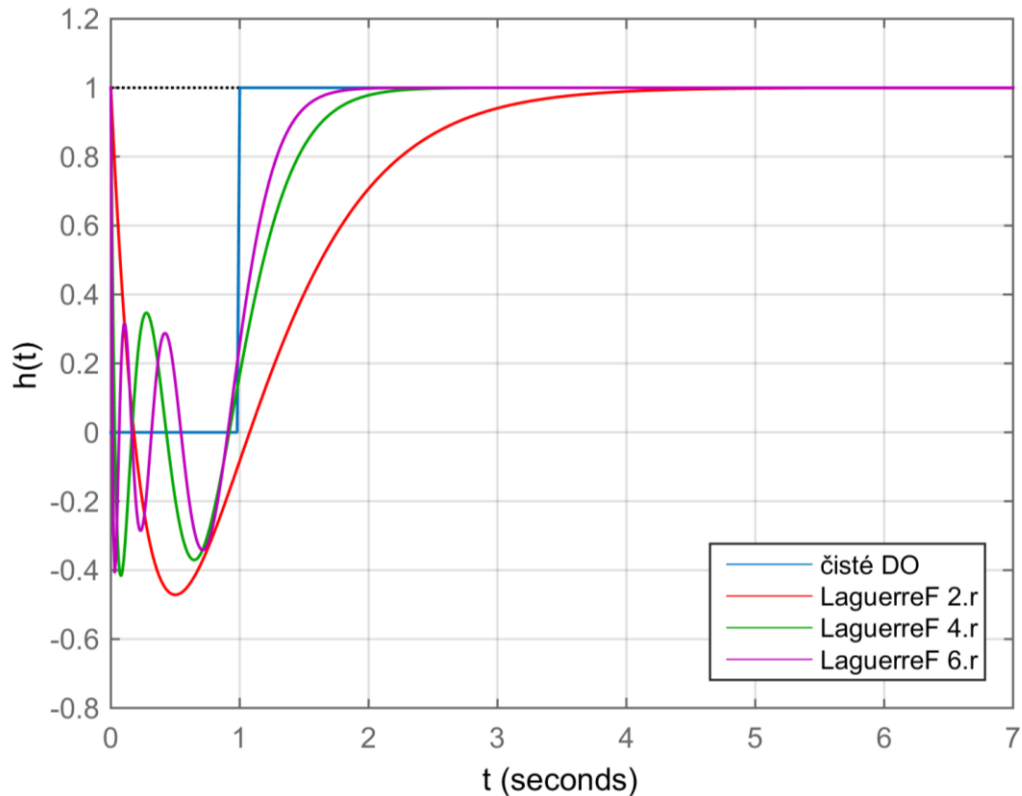
$$e^{-\frac{Ts}{2}} = \left( \frac{1}{1 + \frac{Ts/\alpha}{2}} \right)^{\frac{\alpha}{2}+1} = \left( \frac{1}{1 + \frac{Ts}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{2}+1},$$

$$e^{\frac{Ts}{2}} = \left( \frac{1}{1 - \frac{Ts/\alpha}{2}} \right)^{\frac{\alpha}{2}+1} = \left( \frac{1}{1 - \frac{Ts}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{2}+1}.$$

a po dosadení do rovnice (56) máme

$$e^{-Ts} = \frac{e^{-\frac{Ts}{2}}}{e^{\frac{Ts}{2}}} = \left( \frac{1 - \frac{Ts}{\alpha}}{1 + \frac{Ts}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{2}+1}. \quad (57)$$

Na nasledujúcom obrázku vidíme, ako sa zmení aproximácia dopravného oneskorenia podľa rovnici (57) so zvyšujúcou  $\alpha$  (pre 2. rád  $\alpha = 2$ , pre 4. rád  $\alpha = 6$  a pre 6. rád  $\alpha = 10$ ).

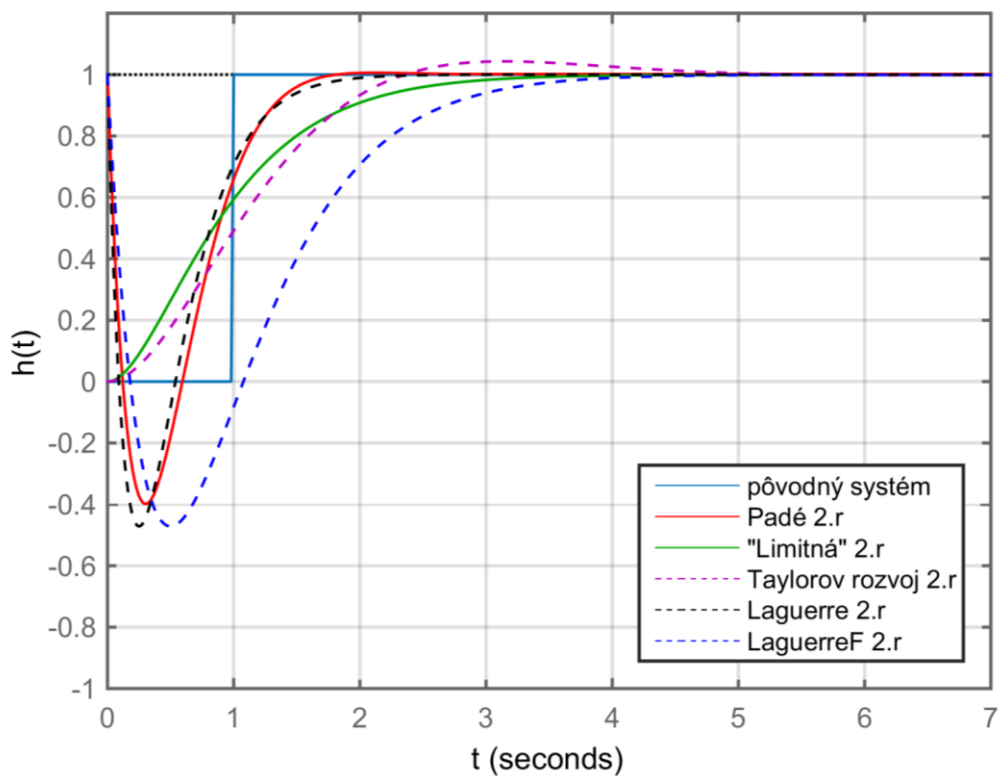


Obr. 15: Aproximácia pomocou zobecnených Laguerrových funkcií pre rôzne  $\alpha$

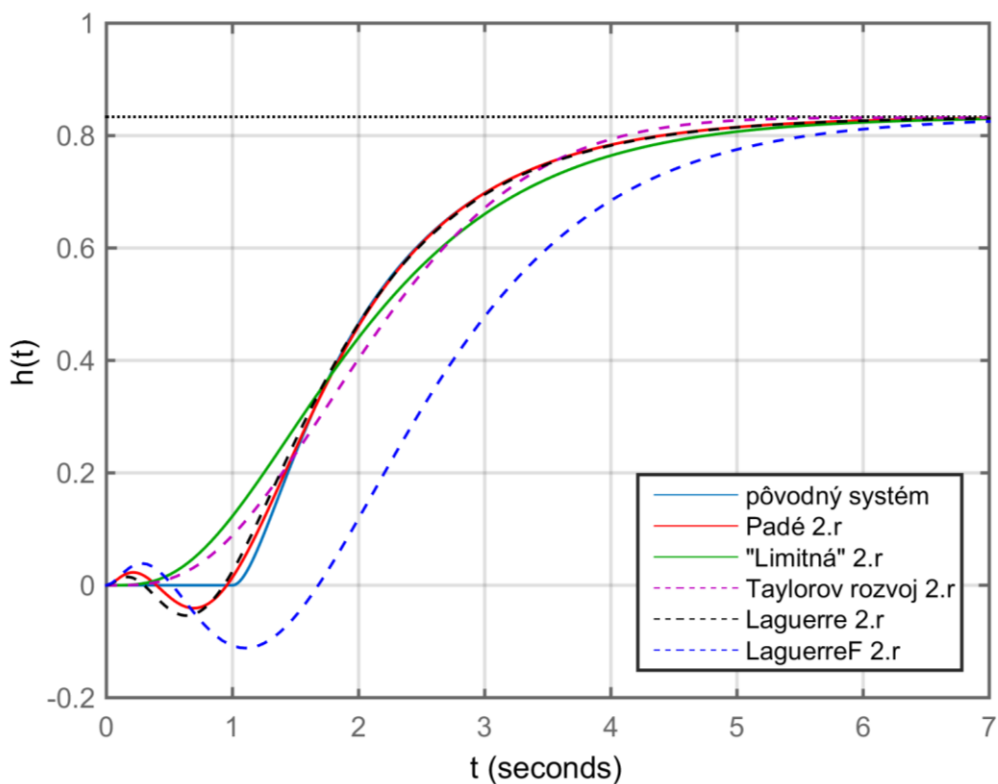
Následne porovnáme odvodenú aproximáciu s racionálnymi aproximáciami z kapitoly 1 na čistom dopravnom oneskorení a na systéme, ktorý je popísaný rovnicou (13). Aby sme dostali aproximáciu druhého rádu, zvolíme  $\alpha = 2$  (toto označíme  $G_{LF2}$  v súlade s prvou kapitolou).

$$G_{LF2} = \left( \frac{1 - \frac{T}{2}s}{1 + \frac{T}{2}s} \right)^2 = \frac{1 - Ts + \frac{T^2}{4}s^2}{1 + Ts + \frac{T^2}{4}s^2}. \quad (58)$$

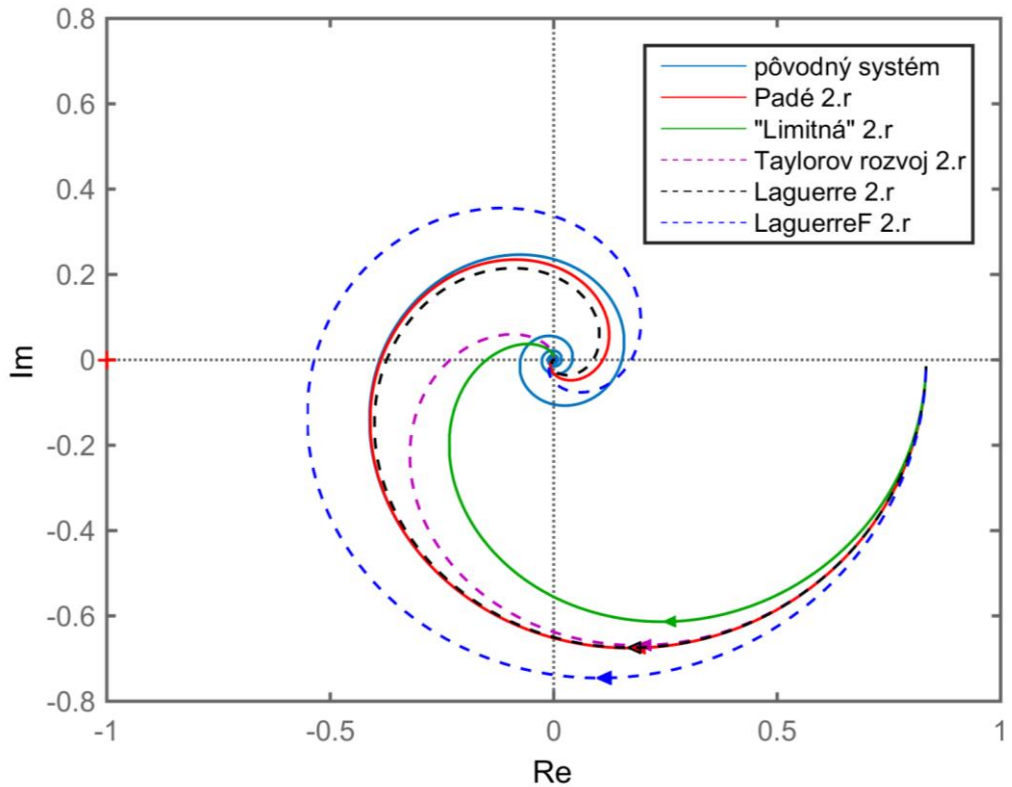
Nasledujúce obrázky graficky znázorňujú jednotlivé aproximácie, na nich LaguerreF je pridaná aproximácia pomocou vzorca (58). Na obrázkoch 16 a 17 vidíme priebehy z obr. 2 a 4 s pridanou aproximáciou pomocou zobecnených Laguerrových funkcií. Ďalší graf znázorňuje priebehy z obrázku 6 a aproximáciu podľa rovnice (58). Z týchto obrázkov (16 až 18) vidíme, že aproximácia dopravného oneskorenia pomocou zobecnených Laguerrových funkcií nedáva lepšie výsledky, ako racionálne aproximácie. Výraz (57) má ale jednu výhodu oproti racionálnym aproximáciám a to je, že parameter  $\alpha$  nemusí byť celé číslo.



Obr. 16: Prechodové charakteristiky aproximácií čistého dopravného oneskorenia



Obr. 17: Prechodové charakteristiky aproximácií systému druhého rádu s dopravným oneskorením



Obr. 18: Frekvenčné charakteristiky aproximácií systému druhého rádu s dopravným oneskorením

Výsledky si môžeme porovnať aj podľa noriem  $H_2$  a  $H_\infty$ . Nasledujúca tabuľka udáva tieto normy pre systém druhého rádu (priebegy sú na obr. 17 a na obr. 18).

aproximácia	norma $H_2$	norma $H_\infty$
Padého aproximácia	0.1806	0.1465
Laguerrova aproximácia	0.2128	0.1677
Taylorov rozvoj menovateľa	0.2253	0.2019
"Limitná" aproximácia	0.2416	0.2137
pomocou zob. Lag. funkcií	0.3156	0.4854

Tab. 2: Normy  $H_2$  a  $H_\infty$  pre systému druhého rádu (kvadratické aproximácie)

Normami  $H_2$  a  $H_\infty$  sme sa dostali k podobnému záveru ako pomocou obrázkoch 16-18, aproximácia pomocou zobecnených Laguerrových funkcií udáva najväčšiu chybu.

## 4.1 Porovnanie aproximácie pomocou zobecnených Laguerrových funkcií a Laguerrovej aproximácie

Porovnajme si rovnicu (57) s rovnicou (2). Vidíme, že majú podobné tvary. Ak v exponentu rovnici (57) zanedbáme jednotku, t.j. nahradíme výraz  $\frac{\alpha}{2} + 1$  výrazom  $\frac{\alpha}{2}$  dostaneme

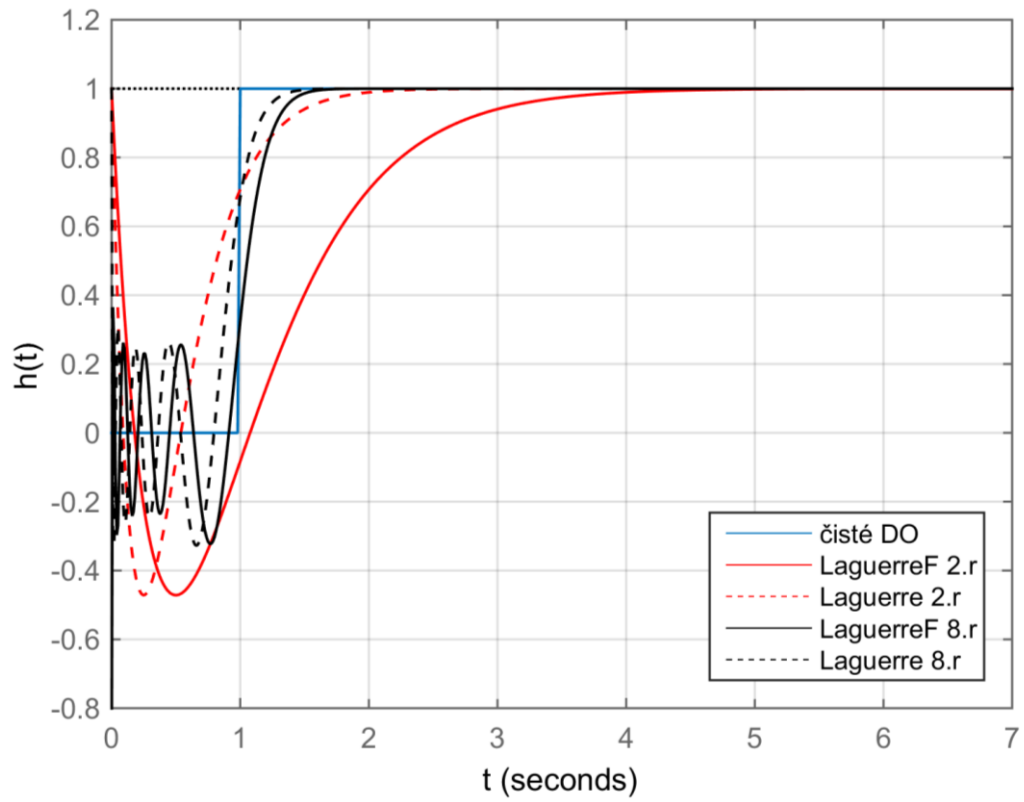
$$e^{-Ts} = \left( \frac{1 - \frac{Ts}{\alpha}}{1 + \frac{Ts}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Táto rovnica je zhodná s rovnicou (2) pri podmienke, že  $\alpha = 2n$ . To znamená, že z odvodenej Laplaceovej transformácie normalizovanej Laguerrovej funkcie nultého rádu dostaneme Laguerrovu aproximáciu (kapitola 1). Ak si porovnáme tieto dve aproximácie podľa obrázkoch 16 až 18 uvidíme, že odvodená aproximácia je horšia. Spôsobuje to, že v exponente je výraz  $\frac{\alpha}{2} + 1$  namiesto  $\frac{\alpha}{2}$ . Pre vysoké  $\alpha$  ale platí, že

$$\frac{\alpha}{2} + 1 \approx \frac{\alpha}{2},$$

takže aproximácia pomocou zobecnených Laguerrových funkcií s rastúcou  $\alpha$  sa blíži k Laguerrovej aproximácii. Toto znázorňuje aj nasledujúci obrázok, kde sú porovnané len tieto dve aproximácie pre 2. a 8. rád. Vidíme, že aproximácie majú podobné priebehy a tvary týchto priebehov sa približujú s rastúcim rádom.





Obr. 19: Porovnanie aproximácie pomocou zobecnených Laguerrových funkcií a Laguerrovej aproximácie

## 5 Záver

Hlavnou úlohou práce bolo popísať možnosti aproximácie dopravného oneskorenia pomocou zobecnených Laguerrových funkcií a vyhodnotiť tieto aproximácie.

V prvej kapitole sú uvedené racionálne aproximácie, ktoré sú porovnané na čistom dopravnom oneskorení a na vybranom systéme s vykreslením prechodových a frekvenčných charakteristík. Grafické vyhodnotenie vo väčšine prípadov ale nebolo jednoznačné, preto sú k vyhodnoteniu použité normy  $H_2$  a  $H_\infty$ . Podľa týchto noriem bola najlepšou aproximáciou Padého aproximácia.

V ďalšej kapitole sú popísané zobecnené Laguerrove funkcie a vplyv voľných parametrov  $\alpha$  a  $\sigma$  na chovanie týchto funkcií. Táto časť je doplnená grafickými ukázkami. Nasledujúca kapitola sa zaoberá zobecnenou Laguerrovou funkciou nultého rádu. Obsahuje dôkaz, že tvar tejto funkcie sa blíži k tvaru Diracovho impulzu pre parametre  $\alpha, \sigma \rightarrow \infty$ . Dôležité súčasti tohto dôkazu sú normalizácia, určenie limit a výpočet Laplaceovej transformácie zobecnenej Laguerrovej funkcie.

Vyhodnotenie výsledkov sa nachádza v ďalšej kapitole, kde sú porovnané všetky vyskúšané aproximácie. Z grafických príkladov a z vypočítaných noriem vidíme, že aproximácia dopravného oneskorenia zobecnenými Laguerrovými funkciami nedáva lepšie výsledky ako racionálne aproximácie. Presnosť týchto aproximácií je ale ovplyvnená aj prenosom vlastného systému, preto by bolo vhodné ich porovnať na ďalších príkladoch.

Práca by sa dala ďalej rozšíriť o porovnanie aproximácií pre rôzne hodnoty dopravného oneskorenia a tým určiť vplyv veľkosti dopravného oneskorenia na presnosť aproximácií.

# Literatúra

- [1] PEKAR L, KURECKOVA E.: *Rational Approximations for Time-Delay Systems: Case Studies*. Mathematical Methods and Techniques in Engineering and Environmental Science. Tomas Bata University, Zlin. ISBN: 978-1-61804-046-6
- [2] VAVRUŠA S.: *Řízení spojitéch systémů s dopravním zpožděním různými metodami*. Dizertační práce, UTB Zlín, 2006
- [3] LAM J.: *Analysis on the Laguerre Formula for Approximating Delay Systems*. Department of Mechanical Engineering, University of Hong Kong. IEEE Log Number 9401689.
- [4] ZSITVA N.: *Lineární časově invariantní systémy s dopravním zpožděním*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2016. 29 s. Vedoucí semestrální práce prof. Ing. Pavel Jura, CSc..
- [5] BELT H. J. W., BRINKER A. C. den: *Optimal parametrization of truncated generalized Laguerre series*. 1997 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1997. DOI: 10.1109/icassp.1997.604708.
- [6] JURA P.: *Signály a systémy, část 1: Spojité signály*. Skriptum VUT, druhé opravené vydání, Brno, 2010
- [7] REKTORYS K. a spolupracovníci: *Přehled užití matematiky*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000. ISBN: 978-807-1961-796.
- [8] KHATTRI S. K.: *New Approximations to the Mathematical Constant e*. Journal of Mathematics Research. Stord Haugesund University College, Norway, 2009.

# Zoznam príloh

Zoznam priložených súborov na CD:

- aproxDO.m – súbor pre vykreslenie prechodových charakteristík aproximácií čistého dopravného oneskorenia (obr. 1, 2, 16)
- aprox2rad.m – súbor pre vykreslenie prechodových a frekvenčných charakteristík aproximácií systému druhého rádu (obr. 3-6, 17, 18) a výpočet noriem
- H2normy.slx – obsahuje schémy pre výpočet noriem
- LagFobecne.m – funkcia pre výpočet zobecnenej Laguerrovej funkcie
- LagFunc.m – funkcia pre vykreslenie zobecnenej Laguerrovej funkcie
- LagFunkcie.m – súbor pre vykreslenie zobecnených Laguerrových funkcií pre rôzne rády (obr. 9)
- LF\_parametre.m – súbor pre grafické znázornenie vplyvu parametrov  $\alpha$  a  $\sigma$  (obr. 10-12)
- LF\_normalizacia.m – súbor pre grafické znázornenie normalizovanej Laguerrovej funkcie (obr. 13, 14)
- LF\_aprox\_porovnanie.m – súbor pre grafické znázornenie aproximácie pomocou zobecnených Laguerrových funkcií (obr. 15, 19)

Všetky súbory boli napísané v programu MATLAB R2014b.