TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Vojtěch Jarník – významná osobnost české matematiky

Bakalářská práce

Studijní program: B1701 – Fyzika
Studijní obory: 7504R006 – Fyzika se zaměřením na vzdělávání
7504R015 – Matematika se zaměřením na vzdělávání

Autor práce: **Martina Blažková**
Vedoucí práce: RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.

Liberec 2016

TECHNICAL UNIVERSITY OF LIBEREC
Faculty of Science, Humanities
and Education

Vojtěch Jarník
– an important figure of Czech mathematics

Bachelor thesis

Study programme: B1701 – Physics
Study branches: 7504R006 – Physics for Education
7504R015 – Mathematics for Education

Author: **Martina Blažková**
Supervisor: RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.

Liberec 2016

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: **2014/2015**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Martina Blažková**
Osobní číslo:	**P13000414**
Studijní program:	**B1701 Fyzika**
Studijní obory:	**Fyzika se zaměřením na vzdělávání**
	Matematika se zaměřením na vzdělávání
Název tématu:	**Vojtěch Jarník - významná osobnost české matematiky**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

Zásady pro vypracování:

Cílem bakalářské práce je přiblížit život a dílo profesora Jarníka a zhodnotit význam Jarníkových učebnic matematické analýzy v době jejich vydání i dnes. Provést porovnání vybraných pasáží z těchto učebnic s podáním téže látky v současných skriptech a učebnicích (matematické formulace, značení, na co je kladen důraz apod.). Seznámit se i s Jarníkovými články z dalších matematických oblastí a připomenout např. tzv. Jarníkův algoritmus na vyhledání minimální kostry v grafu.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

JARNÍK, Vojtěch. Úvod do počtu diferenciálního. Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1946.
JARNÍK, Vojtěch. Úvod do počtu integrálního. Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1948.
JARNÍK, Vojtěch. Bolzano a základy matematické analýzy. Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1981.
Časopis pro pěstování matematiky. Praha: Academia, 1951-1990. ISSN 0528-2195.
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1956-. ISSN 0032-2423.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.**
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **15. prosince 2014**
Termín odevzdání bakalářské práce: **4. května 2015**

L.S.

doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.
děkan

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

dne

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum: 2. 5. 2016

Podpis: Blažková

Poděkování

Ráda bych poděkovala RNDr. Aleně Kopáčkové, Ph.D. za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a vypracování bakalářské práce. Mé poděkování patři též Ing. Martinu Plešingerovi, Ph.D. za poskytnutí odborného materiálu a pomoci při zpracování této práce.

Anotace

Bakalářská práce se zaměřuje na významnou osobnost české matematiky Vojtěcha Jarníka. Zabývá se jeho životem a čtyřmi vybranými pracemi, známými učebnicemi matematické analýzy. Dále se soustřeďuje na porovnání těchto publikací s dalšími podobně zaměřenými pracemi (autoři Černý, Nekvinda, Veselý). Součástí práce je i zmínka o Jarníkově činnosti v oblasti teorie grafů, o tzv. Jarníkově algoritmu na vyhledávání minimální kostry v grafu. Přiložen je i kompletní seznam Jarníkových děl.

Klíčová slova

matematická analýza, diferenciální počet, integrální počet, Jarníkův algoritmus

Annotation

This thesis focuses on the remarkable person of Czech mathematics - Vojtěch Jarník. It deals with his life and four selected works, well known textbooks of mathematical analysis. Then it focuses on comparing of these publications with other similar works (authors Černý, Nekvinda, Veselý). The work also includes mention of Jarník's activities in the field of graph theory, so-called Jarník's search algorithm for minimum spanning in the graph. The thesis includes a complete list of Jarník's works.

Key words

mathematical analysis, differential calculus, integral calculus, Jarnik's algorithm

Obsah

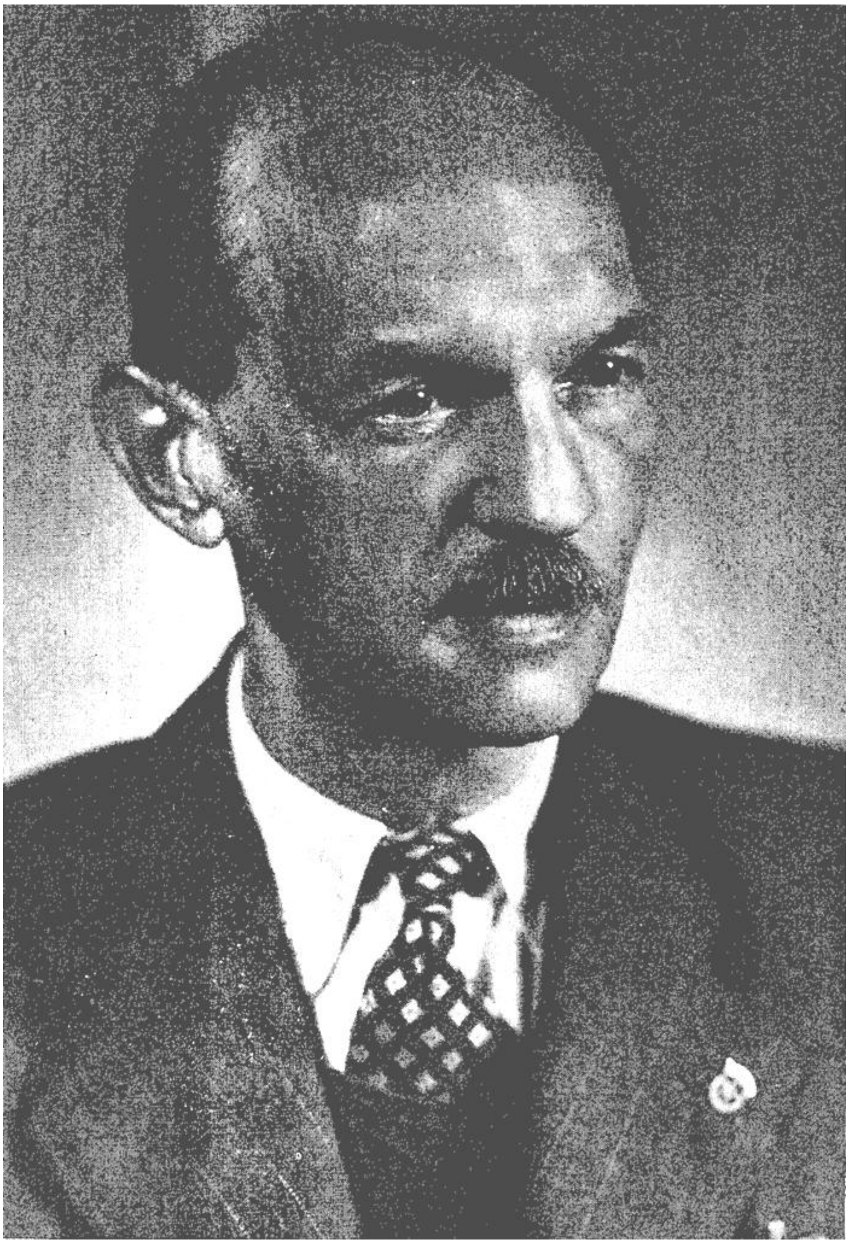
Seznam obrázků

Úvod

Bakalářská práce se zabývá významnou osobností české matematiky, Vojtěchem Jarníkem. Je to jeden z našich nejvýznamnějších matematiků, učitelů a vědců, který dokázal s poznatky z matematické analýzy seznámit širokou veřejnost prostřednictvím knih, učebnic a vědeckých článků. Je mnoho důvodů, proč by jeho osobnost a jeho dílo neměly být zapomenuty.

Vojtěch Jarník byl matematik, výjimečný učitel, redaktor vědeckých časopisů, člen České akademie věd a umění. Za svůj život dosáhl velkého počtu významných funkcí a potkal se s mnoha výjimečnými osobnostmi a matematiky, kteří ho v jeho práci ovlivnili. On sám hodně působil na své posluchače a má na studenty matematických oborů vliv stále. S jeho jménem je dosud spojen obřad pro studenty prvního ročníku MFF UK. Za svoje vynikající vědecké zásluhy a tvůrčí vědeckou činnost obdržel státní cenu. Jeho kolegové, studenti a další lidé, kteří ho znali, na něj dodnes vzpomínají s úctou.

V následujícím textu se budeme zabývat jeho životem, jeho významnými díly, jejichž důležitost, přestože od té doby vznikaly a stále vznikají další učebnice na stejné téma, přetrvává. Pokusím se o srovnání jeho učebnic s dalšími publikacemi a soustředím se přitom na vybraná témata. Zaměřím se také na vývoj jeho učebnic, na změny mezi dvěma vydáními téže učebnice. Dále se zmíníme o Jarníkově přínosu v tématu, které příliš nespadá do jeho hlavního zaměření, o tzv. Jarníkově algoritmu, tedy o problému z teorie grafů na hledání minimální kostry grafu.



Obrázek 1: Vojtěch Jarník

Životopis V. Jarníka

Vojtěch Jarník se narodil dne 22. 12. 1897 v Praze jako syn univerzitního profesora Jana Urbana Jarníka, známého českého romanisty.

V roce 1915 nastoupil jako posluchač matematiky a fyziky na tehdejší filosofickou fakultu Karlovy univerzity. Zde studoval pod vedením profesora Karla Petra, který se úspěšně zabýval teorií čísel, což mohlo v Jarníkovi vzbudit zájem o toto téma.

Po Karlově univerzitě prošel Jarník „nejvyšší školou matematických věd“ v Göttingen v Dolním Sasku, kde se v té době nacházelo jedno z nejvýznamnějších matematických vědeckých středisek světa. Jeho učitelem byl v první řadě Edmund Landau, jedna z největších postav moderní matematiky a spoluzakladatel moderní analytické teorie čísel. Uvádí se, že Landau považoval Jarníka za jednoho z nejlepších žáků a spolupracovníků.

Jarník se nikdy nezabýval jen teorií čísel, poznal nebezpečí přílišné specializace a po celou dobu své kariéry se věnoval i jiným oborům matematiky, zejména matematické analýze.

Svá univerzitní studia zakončil státními zkouškami z matematiky a fyziky, doktorátem, při němž vykonal hlavní rigorosum z matematiky a vedlejší z teoretické fyziky a filosofie. Jako disertační práci předložil pojednání „O kořenech funkcí Besselových“. Od roku 1919 do 1921 působil jako asistent matematiky na Vysoké škole technické v Brně u profesora J. Vojtěcha, kde se seznámil s tehdejším vynikajícím odborníkem v matematické analýze, s profesorem M. Lerchem.

V roce 1921 přešel jako asistent matematického semináře na Karlovu univerzitu do Prahy. Tuto funkci zastával až do 4. března 1929, kdy byl jmenován mimořádným profesorem matematiky UK. Během této doby se habilitoval na základě práce „O mřížkových bodech v rovině“. Od 1. července 1935 byl jmenován řádným profesorem matematiky na UK.

Na své posluchače měl Jarník velký vliv. Mnoho vysokoškolských učitelů lze nazvat Jarníkovými žáky, přestože se časem zabývali jinou oblastí matematiky. Učitelství se věnoval s láskou, jeho nadšení přenést vědecké poznatky na posluchače nepolevovalo ani po desetiletích pedagogické praxe.

Pro všechny Jarníkovy studenty je společné, že převzali tzv. „Jarníkův styl“. Jarník byl učitelem disciplinovaným, nevynechal jedinou přednášku, nenásilnou formou vedl k důkladnosti a poctivosti v práci a v povinnostech. „*Jarník dělal již tenkráte to, čemu dnes říkáváme ´nejen učiti, ale také vychovávati´.*“ ([9], str. 464)

Svých pronikavých úspěchů ve vědecké tvorbě dosáhl díky spojení metod moderní matematiky a hluboké znalosti klasické analýzy. V tomto směru se snažil vést i své žáky, pro které byl obětavým rádcem, pořádal mnoho specializačních přednášek, v nichž seznamoval posluchače s nejnovějšími směry současné matematiky. Byl například prvním, kdo v třicátých letech začal šířit mezi své posluchače poznatky o teorii množin, přičemž známá Čechova publikace byla teprve v rukopise.

Jarník měl svůj výklad vždy detailně promyšlen, dokázal vyložit i ty nejobtížnější teorie tak, aby tomu posluchači rozuměli, a vedl přednášky takovým způsobem, aby bylo zřejmé, k čemu se směřuje. Své studenty vychovával ke kritickému a přesnému myšlení.

V letech okupace vedl spolu s mladšími spolupracovníky semináře s cílem, aby ani za nejhorších dob nepřestal vědecký růst mladší matematické generace.

Po osvobození se projevil velký vliv Jarníkových učebnic na mladší generaci. Šlo o vědecké monografie, které však měly sloužit jako učebnice. Autory článku v Časopise pro pěstování matematiky Knichala a Schwarze zaujalo, kde mohl Jarník při jeho pracovním vytížení vzít čas na sepsání čtyřdílného souboru knih, které jsou považovány za chloubu matematické knižní produkce.

Od roku 1916 byl jedním z aktivních členů Jednoty československých matematiků a fysiků. V letech 1935–1950 byl vedoucím redaktorem matematické části Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky. Ve chvíli, kdy se stal redaktorem, bylo rozhodnuto, že časopis se má změnit na mezinárodní časopis, což nebyl nejsnazší úkol. Díky Jarníkově snaze se stal časopis ve světovém měřítku uznávaným matematickým fórem.

Od roku 1926 byl členem Královské české společnosti nauk a členem předsednictva Národní rady badatelské. Byl také členem Polskiego Towarzystwa Matematycznego, čímž přispěl k prohloubení vědeckých československo-polských styků. Od roku 1934 byl členem České akademie věd a umění.

Od roku 1937 do roku 1939 byl Jarník členem redakční rady mezinárodního časopisu Acta Arithmetica specializovaného na teorii čísel, který vycházel v Polsku, po obsazení Polska nacisty však tento časopis zanikl.

V roce 1947–1948 byl děkanem a v roce 1948–1949 proděkanem Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy. V letech 1950-1953 byl prorektorem UK. Tyto funkce vykonával s nevšední a přímo vědeckou poctivostí a důkladností.

Od roku 1951 se připravovalo ustavení Československé akademie věd (ČSAV). Jarník byl jmenován členem vládní komise pro vybudování ČSAV, po jejím ustavení 17. 11. 1952 byl jmenován jedním z prvních členů ČSAV a stal se předsedou matematicko-fyzikální sekce. V této pozici působil v letech 1952–1955. Nemyslel na svoje osobní pohodlí a na úkor času potřebného k vlastní vědecké činnosti se nezištně staral o organizační zajištění a vybudování nových pracovišť.

Jarník jako host přednášel na různých univerzitách v cizině. Napsal na sto recenzí do matematických časopisů i řadu referátů o nových knihách do Časopisu pro pěstování matematiky.

Za svoje vynikající vědecké zásluhy a tvůrčí vědeckou činnost byl v roce 1952 poctěn státní cenou Klementa Gottwalda, která se udělovala za výjimečný tvůrčí přínos na poli vědy, techniky nebo umění.

Časopis pro pěstování matematiky vydal o Jarníkovi v roce 1957 článek u příležitosti jeho šedesátých narozenin. Autoři popisují jeho osobnost jako: „vzor ušlechtilého úsilí a cílevědomé práce“, jako „vzácného učitele a staršího přítele, jehož dílo vtisklo trvalé stopy vývoji československé matematiky v posledních 30 letech a přispělo podstatně k dobré známosti československé matematiky v matematickém světě“. ([9], str. 463)

Vojtěch Jarník zemřel 22. 9. 1970. V časopise Pokroky z roku 1971, ve kterém o něm Břetislav Novák napsal článek, stojí: „*Zemřel profesor Vojtěch Jarník. Do poslední chvíle plný zájmu nejen o matematiku, ale i o další své lásky: umění, zejména hudbu i sport. Do poslední chvíle pracoval. Jeho odchodem ztrácíme nejen velkého vědce a skvělého učitele, ale i skromného a laskavého člověka, který byl svým spolupracovníkům a studentům upřímným starším přítelem a rádcem. Jeho odchod znamená pro všechny, kteří ho znali, ztrátu těžkou a nenahraditelnou.*“ ([17], str. 5)

Publikační činnost

Profesor Vojtěch Jarník napsal 85 původních vědeckých prací, 5 kongresových referátů, 35 referativních a kritických studií. Napsal i učebnice, které vyšly v několika vydáních, ať už za jeho života změněných či v původní verzi. Publikace Diferenciální počet I. má dosud sedm vydání, z nichž některá vyšla až po jeho smrti. Níže uvádím názvy Jarníkových učebnic a v závěrečných přílohách je kompletní seznam Jarníkových publikací, který je převzat z časopisu s názvem „Časopis pro pěstování matematiky" z roku 1971.

1. Úvod do theorie množství
2. O derivovaných číslech funkcí jedné proměnné
3. Úvod do integrálního počtu
4. Úvod do počtu diferenciálního
5. Úvod do počtu integrálního
6. Diferenciální počet, Pokračování Úvodu do počtu diferenciálního
7. Diferenciální počet I
8. Diferenciální počet II
9. Integrální počet I
10. Integrální počet II

Beánie

Při své práci jsem narazila i na kuriozitu. Odkaz Jarníka je zřejmý i po jeho smrti, nejen tím, že jsou stále používány jeho učebnice, ale také při nástupu do prvního ročníku MFF UK. Proces neoficiálního přijímání studenta do prvního ročníku je tzv. jarníkování. Jedná se o část beánie neboli neoficiálního přivítání prváků do stavu matfyzáckého.

Beánie odkazuje ke středověké tradici přijímání nových univerzitních studentů jejich staršími kolegy. Nováčkům se tehdy říkalo *beanus*, což je slovo údajně vzniklé zkomolením francouzského výrazu *bec jaune (žlutý zobák* či *nováček)*. Odtud tedy název beánie. Do jejího průběhu nepronikло naštěstí skoro nic z krutých iniciačních obřadů středověku, ačkoli symbolický význam přetrvává.

Beánie je tedy zvyk ze středověkých dob. Středověké beánie byly možná trošku kruté a s těmi dnešními mají společný už jen název a okolnosti, za kterých nastávají. Tato akce není organizována fakultou, nýbrž spolkem studentů a přátel školy MFF UK, a není povinností se jí zúčastnit.

Stejně jako rytíř musí být pasován do svého stavu, tak i „matfyzák“ musí složit přísahu a být jarníkován, aby mohl hrdě prohlásit „Jsem matfyzákem”.

Nejdůležitější částí beánie je obřad jarníkování. Vojtěcha Jarníka popisují slovy „duchovní otec našeho ústavu“. O jeho pětisvazkové učebnici matematické analýzy píší, že má archaický styl a úmornou preciznost všeho svého vyjadřování, ale stále se těší oblibě, alespoň jako jistý symbol jejich stavu.

Při jarníkování dostanou nováčci něžný úder do hlavy svazkem učebnic integrálního a diferenciálního počtu, prvními dvěma díly Jarníkovy matematické analýzy. Studenti fakulty se tak svérázně hlásí k odkazu významného českého matematika Vojtěcha Jarníka. O „vážnosti“ tohoto zvyku svědčí tradované tvrzení, že kdo nebyl jarníkován, nedostuduje MFF UK. Obrácená implikace neplatí.

Obsahy vybraných děl V. Jarníka

Pro porovnávání Jarníkových knih s dalšími matematickými publikacemi jsem si vybrala jeho čtyři díla: Diferenciální počet I, Diferenciální počet II, Integrální počet I a Integrální počet II, publikace byly vydány roku 1984. Vybrala jsem si je z toho důvodu, že pro mě byly dostupné. Uvádím zde obsahy výše zmíněných titulů, pro lepší představu toho, co a kde se v které z nich nachází, kde můžeme najít vybrané pojmy a pro představu struktury a obsáhlosti jednotlivých knih. Od prvních vydání se obsahy učebnic neliší.

Diferenciální počet I

Diferenciální počet II

Integrální počet I

Integrální počet II

Porovnání Jarníkových učebnic s dalšími publikacemi

Vybrané publikace se budeme snažit porovnat z hlediska jejich formy (formát, počet stran, použité písmo, apod.), používané terminologie, zařazení jednotlivých témat. Povšimneme si i množství obrázků a zvláštností ve značení a symbolice.

Podkapitoly zde uvádějí autora a učebnice, se kterými budeme porovnání provádět. Přestože dnešní studenti oceňují nové metody, interaktivní způsoby studia jako je e-learning apod., přetrvává význam studia tištěných učebnic. Jelikož mám zkušenosti s matematikou z technických oborů, neboť jsem absolvovala předměty se studenty technické fakulty TUL, vybrala jsem pro srovnávání skripta od Miloslava Nekvindy, vedle nich skripta od Ilji Černého určená pro studenty učitelství na FP TUL a vázané učebnice Jiřího Veselého pro učitele vydané na MFF UK. Společné všem vybraným autorům je např. to, že pojem spojitost funkce je řazen před limitu funkce, ačkoliv je u jiných autorů časté i opačné pořadí.

Vojtěch Jarník

A. **Diferenciální počet (I)** [4]
B. **Diferenciální počet (II)** [5]
C. **Integrální počet (I)** [6]
D. **Integrální počet (II)** [7]

Pro srovnání jsem si vybrala již zmíněné čtyři učebnice s obsahy uvedenými v předcházející kapitole, ale jak je patrné právě z obsahu knih, na porovnání mi budou sloužit hlavně Diferenciální počet I. a Integrální počet I., jelikož v nich se vybrané pojmy (spojitost, limita, derivace, primitivní funkce, neurčitý integrál, určitý integrál) nacházejí. Formát publikací je mezi A5 a A4. Počty stran jednotlivých titulů po řadě jsou 392, 672, 244, 764. Jazyk Jarníkových knih se může jevit archaicky; na takový způsob vyjadřování nejsou dnešní studenti zvyklí. V Jarníkových knihách jsou pro čtenáře na konci probraného tématu uvedena i cvičení, která obsahují otázky, úkoly a příklady na zopakování a prohloubení znalostí. Každá věta je dokázána, je k ní uvedeno několik poznámek nebo praktických příkladů. Obrázků je v Jarníkových publikacích poměrně velké množství, ovšem nenacházejí se např. u pojmu limita funkce. Zajímavé je pořadí témat, která se týkají integrálů. Nejprve se Jarník věnuje Riemannovu integrálu, poté přechází k primitivní funkci a pouze okrajově zmiňuje neurčitý integrál. S tím je spojena netypická terminologie, kdy autor celou kapitolu nazývá „Primitivní funkce neboli neurčitý integrál“, význam tohoto neobvyklého spojení je vysvětlen dále.

Jiří Veselý

A. Matematická analýza pro učitele první a druhý díl [19]

Jedná se o dvě učebnice v rozsahu formátů mezi A5 a A4, první má 230 stran a druhá 220 stran, přičemž druhá je pokračováním první včetně číslování stran. Přestože se fyzicky jedná o dvě knihy, jsou chápány jako jeden titul s jedním ISBN. Také celý obsah knihy (prvního i druhého dílu) je uváděn už v prvním dílu. Oproti ostatním autorům používá Veselý kromě definic, vět a poznámek ještě tvrzení a lemmata. Některé z kapitol této knihy začínají motivací nebo motivační úvahou. Veselý značí přirozený logaritmus místo obvyklého ln zkratkou log. Obrázků je v učebnicích velmi málo. Místo pojmu Newtonův integrál, přestože tak nazývá jednu z kapitol, zavádí autor obecnější pojem zobecněná primitivní funkce. Pořadí témat týkající se integrálů je opět jiné než u ostatních autorů. Témata jsou řazena následovně: primitivní funkce, Riemannův integrál, Newtonův integrál.

Miloslav Nekvinda

A. Matematika I [14]

B. Matematika II [15]

Dalším zvoleným autorem je Miloslav Nekvinda. Jeho skripta mají velikost A5 a počty stran jednotlivých titulů po řadě jsou 238, 104. Skriptum Matematika I. se na první pohled může jevit dnešnímu čtenáři méně přehledné, neboť je použit font, kvůli kterému se špatně orientuje v textu. Například vzorce obsahující znak $\sum$ (suma) jsou nečitelné, jelikož znak sumy má stejnou velikost jako ostatní malá písmena, stejně tak v limitě jsou uváděny znaky $x \to c$ ve stejné velikosti jako ostatní písmena. Oproti dalším vybraným autorům Nekvinda nepoužívá zvýraznění textu, ale nadpisy jako například „poznámka, definice, příklad“ jsou pouze podtrženy. Matematika II. se zdá přehlednější, je psaná jiným fontem a vzorce v textu nezanikají. Na těchto skriptech je vhodné ocenit důraz na názornost, jelikož k textu je přiloženo mnoho názorných obrázků. Pořadí témat se opět liší ve srovnání s ostatními autory. Jako první je definována primitivní funkce a neurčitý integrál, poté přechází autor k Riemannovu integrálu.

Ilja Černý

A. **Matematická analýza 1. část** [1]

B. **Matematická analýza 2. část** [2]

C. **Matematická analýzy 3. část** [3]

Na porovnání s Jarníkovými knihami jsem si zvolila třídílnou sérii skript od profesora Ilji Černého, která byla vydána Technickou univerzitou v Liberci s určením pro fakultu pedagogickou. Na těchto skriptech lze ocenit formát (A4), velikost písmen a v důsledku toho i přehlednost. Počty stran jednotlivých titulů po řadě jsou 225, 164, 125. Nevyskytuje se zde skoro žádný obrázek na dokreslení představ. Text je stejně jako u Jarníka doplněn o cvičení, která jsou zařazena průběžně, nikoli na konci kapitol nebo témat. Zajímavostí je symbolika, kterou Černý používá. Přirozený logaritmus stejně jako Veselý neznačí běžně používanou značkou ln ale znakem lg. Další odlišností je znak množinového rozdílu „−“. Autor používá jako název kapitoly o neurčitém integrálu pojem „Newtonův integrál“, ovšem v definici uvádí pojem zobecněná primitivní funkce. Pořadí témat je stejné jako u Nekvindy, tedy: primitivní funkce, Newtonův integrál (zobecněná primitivní funkce), Riemannův integrál.

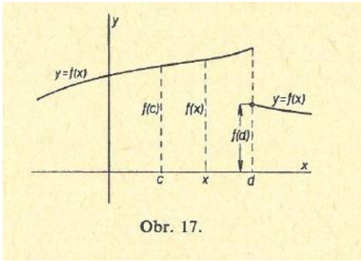
Vybrané základní pojmy

Charakteristiky a specifika jednotlivých publikací ve srovnání s učebnicemi V. Jarníka budeme detailněji ilustrovat na několika vybraných pojmech matematické analýzy: spojitost funkce v bodě, limita funkce, derivace, neurčitý integrál (primitivní funkce) a určitý integrál. Získané poznatky a charakteristiku vybraných publikací předkládám také z toho důvodu, abych dala čtenáři přehled o tom, jak jednotlivé publikace vysvětlují vybrané pojmy, a mohl se díky tomu rozhodnout, která z nich mu bude nejvíce vyhovovat.

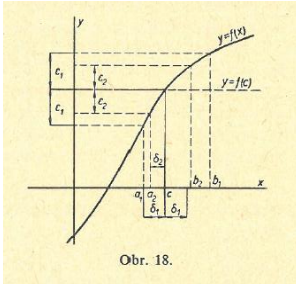
Spojitost funkce

JARNÍK:

V úvodu podkapitoly „Spojitost“ je čtenáři vysvětlen problém spojitosti. Přikládá k tomuto začátku i dva názorné grafy spojitých funkcí. Po tomto úvodu autor usuzuje, že čtenář je již připraven na definici pojmu spojitost funkce v bodě. ([4], str. 158 - 159)



Obrázek 2: Jarník- spojitost 1



Obrázek 3: Jarník- spojitost 2

Definice 17. Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě c, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost

(11) $$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

je splněna pro všechny hodnoty x, pro něž je

(12) $$|x - c| < \delta.$$

Je neobvyklé, že autor nezdůrazňuje, že $c \in R$. Nachází se zde věta o spojitosti absolutní hodnoty funkce, součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí. Důkaz k této větě autor odkládá, jelikož následují věty podobné, které poté, jak píše: „*odbude všechny najednou*“. Následuje věta o spojitosti složené funkce.

Věta o jednostranné spojitosti funkce v bodě je uvedena v následující podkapitole „Limita funkce“, kde se vysvětluje právě pomocí limit. Ovšem i v podkapitole „Spojitost“ je uvedena definice spojitosti zleva a zprava, která se podobá původní definici spojitosti funkce v bodě s jediným rozdílem, že při spojitosti v bodě zprava si nevšímáme hodnot *x* ležících vlevo od bodu a obdobně při spojitosti zleva si nevšímáme hodnot *x* ležících vpravo. Podkapitolu končí autor cvičením.

VESELÝ:

Podkapitola „Spojitost funkce“ předchází podkapitole „Limita funkce“. Autor nepíše žádný úvod, ale rovnou předkládá definici z roku 1817 od Bernarda Bolzana, což byl český německy hovořící matematik, filosof a kněz. ([19], str. 104). Tato definice je založena na pojmu okolí.

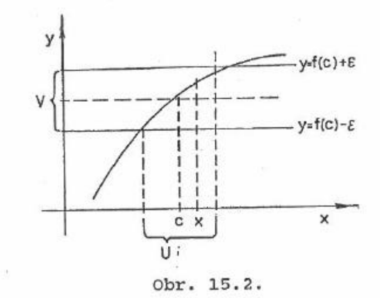
Definice 4.2.1. (Bolzano 1817). Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in R$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\big(\forall x, x \in U_\delta(x_0)\big)\Big(f(x) \in U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)\Big).$$

Následují důsledky definice, např. to, že funkce spojitá v bodě je v tomto bodě definovaná. Uvádí dva zajímavé příklady funkcí: Dirichletovu funkci a Riemannovu funkci, které nejsou spojité v žádném bodě definičního oboru. Jak autor píše, existuje ještě další přístup ke spojitosti funkcí pomocí posloupností a uvádí větu, která popisuje ekvivalentní definici spojitosti. Tato věta je z roku 1872 od německého matematika Eduarda Heineho a zní následovně: „*Funkce f je spojitá v bodě x_0, právě tehdy, když platí pro každou posloupnost $\{x_n\}$: $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.*“ ([18], str. 106) Následuje spojitost součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí. Víme již, že právě takto definuje spojitost Černý.

NEKVINDA:

Kapitola „Spojitost“ předchází kapitole „Limita“. Opět autor ozřejmuje důležitost pojmu. Pomocí přirovnání množiny k fotbalovému míči vysvětluje pojmy spojitá a nespojitá deformace, tím, že když je míč při hře tvarován, dochází ke spojité deformaci, neboť body, které byly blízko sebe, jsou po deformaci stále blízko sebe, kdežto u nespojité deformace dochází k protržení míče a body, které byly blízko sebe, už blízko sebe nejsou. Tento text čtenáři napomáhá představit si jinak abstraktní pojem. Poté je zaveden pojem okolí bodu a následuje definice. ([14], str. 67)



Obrázek 4: Nekvinda- spojitost funkce

Definice 15.1. Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě c, jestliže ke každému okolí V bodu $f(c)$ existuje okolí U bodu c tak, že platí následující implikace:

(15.1) Je-li $x \in U$, pak $f(x) \in V$.

Charakterizujeme-li okolí V číslem $\varepsilon > 0$ a okolí U číslem $\delta > 0$, můžeme definici formulovat takto:

Říkáme, že f je spojitá v bodě c, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí:

(15.2) Je-li $|x - c| < \delta$, pak $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Nechceme-li používat absolutních hodnot, můžeme implikaci přepsat ve tvaru:

(15.3) Je-li $x \in (c - \delta;\ c + \delta)$, pak $f(x) \in (f(c) - \varepsilon; f(c) + \varepsilon)$.

Autor definice dále rozebírá, uvádí příslušné obrázky a dva příklady ilustrující problém spojitosti. Uvádí větu o spojitosti absolutní hodnoty funkce, součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí. Důkazy k těmto větám nejsou prováděny z toho důvodu, že podle autora jsou věty srozumitelné a o jejich platnosti nelze pochybovat. Ovšem u věty o spojitosti složené funkce už autor důkaz provedl. Kapitola končí dvěma příklady. Další věty o spojitosti, jako např. o jednostranné spojitosti se prolínají kapitolou Limita.

ČERNÝ:

Učebnici profesora Černého je třeba rozebrat jiným způsobem než ostatní tři autory, neboť je velmi odlišná. Co se týká spojitosti, limity a derivace, je tímto názvem pojmenována pouze jedna celá kapitola, které ovšem čítá 42 stran. Nejprve se autor věnuje vysvětlení pojmu funkce, jako zobrazení. Poté již ihned uvádí definice spojitosti. ([1], str. 69)

Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in R$, platí-li implikace

(4.1.2) $$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0).$$

(To znamená: pro každou reálnou posloupnost $\{x_n\}$, která konverguje k číslu $x_0 \in R$, konverguje posloupnost $\{f(x_n)\}$ příslušných funkčních hodnot k hodnotě $f(x_0)$ funkce f v bodě x_0.)

Jak je vidět, na rozdíl od předchozích autorů se Černý opírá v definici o pojem limita, resp. konvergence posloupnosti. Následuje spojitost zprava a zleva a na ni navazuje přímo definicí limity, ke které opět přidává limitu zprava a limitu zleva. ([1], str. 70) V definici je uvedeno R^*, čímž má autor na mysli rozšířený obor reálných čísel o $+\infty$ a $-\infty$.

Je-li $x_0 \in R^*$, $A \in R^*$, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 limitu A a píšeme

(4.1.4) $$lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ nebo } f(x) \to A \text{ pro } x \to x_0,$$

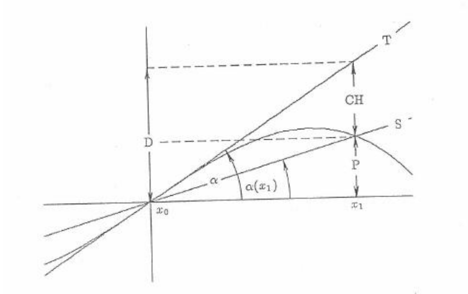
platí-li implikace

(4.1.5) $$x_0 \neq x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to A.$$

Vzápětí je uvedena definice derivace, jednostranná i oboustranná. ([1], str. 71)

> *Je-li $x_0 \in R$, definujeme derivaci $f'(x_0)$ funkce f v bodě x_0 rovností*
>
> *(4.1.10)* $$f'(x_0) := lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$
>
> *existuje-li (konečná nebo nekonečná) limita vpravo. Existuje-li konečná $f'(x_0)$, říkáme, že f je diferencovatelná v bodě x_0.*

Po tomto, jak se může zdát, velice rychlém začátku, přichází mnoho řešených příkladů a cvičení. Nechybí ani poznámky a věty doplňující probírané téma, jako jsou například věty o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí. Černý uvádí i zmínku o Riemannově a Dirichletově funkci.



Obr. 10. Sečna S, tečna T, přírůstek P, diferenciál D, chyba CH

Obrázek **5: Černý- geometrický význam derivace**

Závěr:

Černý, na rozdíl od ostatních autorů, používá v definici spojitosti pojem limita, resp. konvergence posloupnosti. Veselým uváděná definice od Bolzana je založena na pojmu okolí. Jarník v definici pojmu spojitost funkce v bodě využívá pouze absolutních hodnot. Nekvinda uvádí stejně jako Jarník absolutní hodnoty, ale k nim i poznámku, která je součástí definice, že se dá implikace přepsat ve tvaru s intervaly.

Limita funkce

JARNÍK:

Oddíl „Limita funkce“ je součástí kapitoly „Spojitost a limita funkce“. Začíná názorným příkladem funkce $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, která není v bodě $x = 0$ definována. Díky tomu přechází přirozeně k zavedení limity. ([4], str. 167)

Definice 19. Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě c limitu A, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost

(25) $$|f(x) - A| < \varepsilon$$

platí pro všechna x, pro něž je $0 < |x - c| < \delta$.

Z definice je patrné, že autor definuje pouze vlastní limitu ve vlastním bodě. Můžeme si povšimnout značení prstencového okolí bodu nerovností $0 < |x - c| < \delta$. Ihned poté následuje definice jednostranné limity. Autor uvádí vztah mezi spojitostí funkce a limity funkce. Věta o spojitosti zprava (popřípadě zleva) se nachází až v této kapitole o limitě funkce.

Poté se autor vrací k uváděnému příkladu a vyšetřuje jeho jednostranné limity. I s důkazem je zde čtenáři předkládána věta o limitě absolutní hodnoty funkce, součtu, rozdílu, součinu i podílu funkcí. V této kapitole je ještě uvedena limita složené funkce s důkazem, poté už autor přechází ke cvičení. Mezi následující kapitoly patří „Nevlastní limita“, „Limity v bodech $+\infty, -\infty$“.

VESELÝ:

Téma „Limita funkce“ začíná zavedením pojmu prstencové okolí bodu ($P(x_0)$). Následuje definice. Autor v poznámce uvádí, že se jedná o definici z roku 1874 od německého matematika Karla Theodora Wilhelma Weierstrasse. ([19], str. 110)

Definice 4.3.2 (Weierstrass 1874). Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in R^*$ *limitu* $A \in R^*$*, jestliže platí*

$$(\forall U(A))(\exists P(x_0))(f(P(x_0) \subset U(A)).$$

Píšeme $lim_{x \to x_0} f(x) = A$*, nebo* $f(x) \to A$ *pro* $x \to x_0$*. Chceme-li pracovat s parametry okolí, lze definici modifikovat takto*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\big(\forall x \in P_\delta(x_0)\big)(f(x) \in U_\varepsilon(A)).$$

Má-li funkce limitu $+\infty$ *nebo* $-\infty$ *říkáme, že má nevlastní limitu.*

Jak vidíme, autor pracuje s rozšířeným číselným oborem reálných čísel R^*, kde přidává i „body“ $+\infty$ a$-\infty$. Definice zahrnuje i nevlastní limitu, popř. limitu v nevlastním bodě. Následuje lemma o jednoznačnosti limity funkce, tvrzení o limitě spojité funkce. Autor uvádí limity součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí. Nachází se zde i věta o limitě sevřené funkce a Bolzano-Cauchyho podmínka pro existenci limity. Teprve po všech větách, důkazech, tvrzeních a poznámkách následuje pár řešených příkladů.

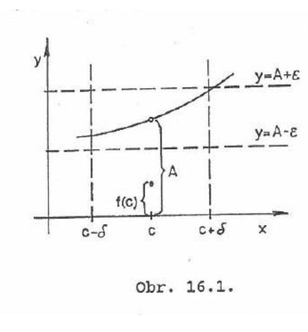
V učebnici jsou uvedeny i dvě definice jednostranných limit z roku 1837 od německého matematika Johanna Petera Gustava Lejeunea Dirichleta, k tomu jsou připojeny i definice o spojitosti funkce v bodě zprava a zleva s následnou spojitostí v bodě.

Mezi dalšími probíranými tématy je spojitost funkce na uzavřeném intervalu, nabývání maxima a minima spojité funkce v uzavřeném intervalu.

Autor uvádí takzvanou Darbouxovou vlastnost funkce, respektive vlastnost nabývání mezihodnot.

NEKVINDA:

Autor začíná kapitolu s názvem „Limita“ nejprve zdůrazněním důležitosti tohoto pojmu. Jako motivační příklad volí funkci $f(x) = \frac{sin\ x}{x}$, kde zkoumá, jak se dají určit hodnoty, kterých tato funkce nabývá v okolí nuly. Po předběžných úvahách je uvedena definice. ([14], str. 72)



Obrázek 6: Nekvinda- limita

Definice 16.1. Řekneme, že funkce f má za limitu číslo A pro x blížící se bodu c, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *takové, že platí:*

(16.1.) *Je-li* $x \in (c - \delta;\ c + \delta),\ x <> c,$ *pak* $|f(x) - A| < \varepsilon.$

Píšeme pak

$$lim_{x \to c}\, f(x) = A$$

a čteme: limita funkce f pro x blížící se k c (nebo též pro x konvergující k bodu c) je rovna A.

V definici je uvedena neobvyklá symbolika $x <> c$, Nekvinda tím značí $x < c \vee x > c$. K textu je přidán ilustrující obrázek (obrázek 6). Následuje věta o vztahu limity a spojitosti funkce v bodě.

Po vyřešení dvou příkladů na limitu funkce přichází téma jednostranná limita. Autor uvádí pouze limitu zprava společně s ilustrujícím obrázkem a o limitě zleva zmiňuje pouze, že je definována obdobným způsobem. Ihned poté uvádí větu o vztahu mezi jednostrannými limitami funkce a limitou funkce. Kapitolu o jednostranných limitách ukončuje dvěma řešenými příklady.

Limity nevlastní a limity v nevlastních bodech začíná Nekvinda definicí. Autor uvádí několik obrázků, které čtenáři přiblíží probíraný problém. Také jsou zde uvedena grafická znázornění některých variant nevlastních limit (jednostranných, oboustranných, rovných $+\infty$ nebo $-\infty$).

Je zajímavé, že si autor jako názvy dvou kapitol zvolil limity funkcí, přesněji tyto limity: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ a $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

ČERNÝ:

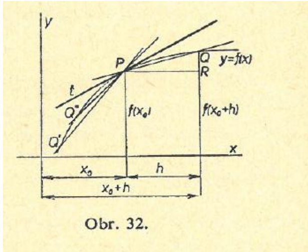
Vzhledem k tomu, že Černý uvádí pojmy limita funkce v bodě, spojitost funkce v bodě a derivaci v jedné kapitole, není možné je rozdělit a zabývat se jimi zvlášť, proto je zařazuji dohromady v kapitole „Spojitost funkce“.

Závěr:

Jarník definuje pouze vlastní limitu ve vlastním bodě, nevlastní limity a limity v $+\infty$ a $-\infty$ rozebírá v samostatných kapitolách, kde uvádí jejich definice. Veselý pracuje s rozšířeným oborem reálných čísel (o $+\infty$ a $-\infty$) a v jedné definici definuje i nevlastní limitu a limitu v nevlastním bodě. Na rozdíl od všech ostatních používá Veselý pojmy prstencové okolí bodu a okolí bodu. Nekvinda stejně jako Jarník v definici uvádí pouze vlastní limitu ve vlastním bodě a nevlastní limity mají samostatnou kapitolu se samostatnými definicemi. Černý pracuje stejně jako Veselý s rozšířeným oborem reálných čísel.

Derivace

JARNÍK:



Obrázek 7: Jarník- derivace

Na začátku kapitoly „Derivace“ jsou uvedeny dva motivační příklady týkající se okamžité rychlosti a směrnice tečny ke grafu. Poté je zde již definice, kterou autor doplňuje několika poznámkami. Po definici uvádí příklad, který je doplněn obrázkem pro lepší představu. ([4], str. 209)

Definice 24. Budiž f funkce, x_0 číslo. Limitu

(5) $$lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

nazýváme derivací funkce f v bodě x_0. Obdobně nazýváme limitu

(6) $$lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ (popř. } lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\text{)}$$

derivací funkce f v bodě x_0 zprava (popř. zleva). Neexistuje-li první, popř. druhá, popř. třetí z těchto limit, říkáme, že funkce f nemá v bodě x_0 derivaci, popř. derivaci zprava, popř. zleva. Limity (5), (6) mohou být vlastní nebo nevlastní; mluvíme pak o vlastní nebo nevlastní derivaci.

Jednostranná derivace je v této učebnici na rozdíl od ostatních definována společně s derivací. Po tomto zavedení pojmu přichází podkapitola „Počítání derivací“, ve které se nachází vzorce (věty) pro výpočet derivace funkce násobené konstantou, součtu funkcí, součinu a podílu dvou funkcí. Následuje věta o derivaci inverzní funkce. Nechybí zde důkazy uvedených vět ani řešené příklady. V závěru kapitoly je velké množství neřešených příkladů (s výsledky) ve formě cvičení.

VESELÝ:

Na začátku kapitoly je uvedena motivace, pod níž se skrývají dvě úlohy z běžného života, které se dají vyřešit právě pomocí derivace. Jedná se o okamžitou rychlost a směrnici tečny ke grafu. Po těchto motivačních úlohách je uvedena definice, tentokrát bez historických poznámek. ([19], str. 126)

Definice 5.1.3. Nechť je funkce f definována v nějakém okolí $U(x_0)$ bodu x_0 z R. Potom limitu (pokud existuje)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

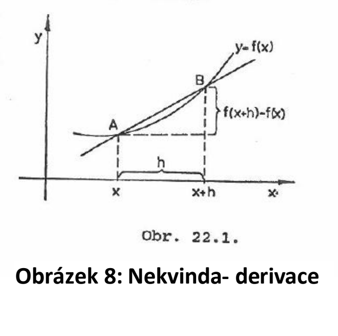
nazýváme derivací funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.

Je-li i $f'(x_0) \in R$, říkáme, že f má v bodě x_0 vlastní derivaci. Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že f má v bodě x_0 nevlastní derivaci. Pokud vyšetřovaná limita neexistuje, říkáme, že f nemá v bodě x_0 derivaci nebo že $f'(x_0)$ neexistuje.

Autor uvádí také ekvivalentní definici, tedy $f'^{(x_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, poté definuje derivaci zleva a zprava. Zde je uveden příklad funkce signum, kterou autor derivuje zprava i zleva v bodě 0, obě derivace vycházejí $+\infty$, má tedy v tomto bodě derivaci rovnu $+\infty$, ovšem tato funkce není v bodě 0 spojitá. Následují početní pravidla, která se týkají derivace součtu a rozdílu funkcí, dále derivace funkce násobené konstantou, nakonec derivace součinu a rozdílu funkcí. Ke všem tvrzením jsou uvedeny důkazy. Poté přichází věta o derivaci složené funkce společně s důkazem. Zajímavostí je velký důraz na historii pojmu derivace, která je uvedena na konci kapitoly. Je v ní poznamenáno, že počátky vývoje pojmu derivace lze hledat v geometrických a fyzikálních problémech, jako např. hledání úhlu, pod nímž se protínají křivky, konstrukce dalekohledu, hledání maxima a minima funkce, problémy s rychlostí a zrychlením pohybu.

NEKVINDA:

Autor stejně jako Veselý uvádí na začátku kapitoly o derivacích dvě úlohy, které sice nenazývá motivačními, ale tuto funkci zastávají. Jedná se o klasické úlohy na použití derivace pro řešení okamžité rychlosti a tečny ke grafu funkce (jako limitní polohy sečny). Po určení vzorců pro limity u těchto základních úloh zavádí nový pojem, pojem derivace. ([14], str. 86)



Obrázek 8: Nekvinda- derivace

Definice 22.1 Nechť existuje limita $lim_{h\to o}(f(x+h)-f(x))/h$.
Pak tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě x a značíme ji symboly

(22.3) $$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=Df(x)=lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Zavedeme-li substituci $v=x+h$, *bude* $h=v-x$ *a vzorec pro derivaci nabude tvaru*

(22.4) $$f'(x)=lim_{v\to x}\frac{f(v)-f(x)}{v-x}.$$

Autor se zabývá fyzikálním významem derivace (okamžitá rychlost) i různým značením derivace (čárkou, tečkou i podílem $df(t)/dt$).

Další podkapitolou jsou základní vzorce pro derivování. Jako jediný z autorů uvádí souhrnně tabulku derivací elementárních funkcí, tzv. tabulku derivace, kde ovšem chybí vzorec pro derivování funkce $\log_a x$. K této kapitole patří i šest procvičujících příkladů. V následující kapitole dochází k odvození obecných pravidel pro derivování, jako např. pravidlo o derivaci součtu, součinu a podílu funkcí, vynechána není ani derivace složené a inverzní funkce.

Některé z následujících kapitol jsou například: „Diferenciál funkce“, „Vyšší derivace“, „Výpočet derivací funkce zadané implicitně“, „Výpočet derivací podle x v případě parametrického zadání“ nebo „Výpočet derivací podle x v případě křivek zadaných v polárních souřadnicích“.

Oproti ostatním autorům Nekvinda neuvádí pojem a tudíž ani definici jednostranné derivace.

ČERNÝ:

Vzhledem k tomu, že Černý uvádí pojmy limita funkce v bodě, spojitost funkce v bodě a derivaci v jedné kapitole, není možné je rozdělit a zabývat se jimi zvlášť, proto je zařazuji dohromady v kapitole „Spojitost funkce“.

Závěr:

Jarník využívá vzorec s h, v definici uvádí rovnou i derivaci zleva a derivaci zprava, v definici je i poznámka o tom, že derivace mohou být vlastní i nevlastní. Veselý pracuje s ekvivalentním vzorcem, kde pokládá $h=x-x_0$, definuje nevlastní derivace, ale na rozdíl od Jarníka derivace zprava a zleva uvádí až v následující samostatné definici. Nekvinda vychází ze stejného vzorce jako Jarník, ale předkládá i upravený vzorec se substitucí jako má

Veselý. V jeho definici se neobjevuje nevlastní derivace ani jednostranná derivace. Stejně tak se neobjevují tyto dva pojmy ani u Černého. Ten uvádí vzorec, který se objevuje u Veselého.

Primitivní funkce a neurčitý integrál

JARNÍK:

Ještě než Jarník definuje primitivní funkcí, zabývá se souvislostí primitivní funkce s určitým integrálem, aniž by byla primitivní funkce definována a tento pojem primitivní funke je zmíněn pouze jednou. Podkapitola začíná větou (č. 39), která zní: „*Budiž* $a < b$*; nechť existuje integrál* $\int_a^b f(x)dx$*. Budiž* $F(x)$ *funkce spojitá v uzavřeném intervalu* $\langle a, b\rangle$*, jež v každém bodě otevřeného intervalu* (a, b) *má derivaci* $F'(x) = f(x)$*. Potom jest* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.“ Je vidět, že Jarník dává přednost pojmu určitý integrál a z něj přechází na primitivní funkci.

Kapitola, ve které Jarník tyto dva pojmy uvádí, se nazývá „Theorie neurčitého integrálu neboli primitivní funkce“ přičemž tento nadpis může být zavádějící, protože víme, že neurčitý integrál a primitivní funkce není totéž a ani autor tímto způsobem uvedený nadpis takto nechápal. Neurčitý integrál je množinou všech primitivních funkcí dané funkce, proto tam spojka „neboli“ nevyznívá srozumitelně, ale jak sám autor uvádí, přidržuje se tohoto označení z důvodů: „*Dvojice označení „určitý integrál = Riemannův určitý integrál“ a „neurčitý integrál = primitivní funkce“ není příliš důsledná. Přidržuji se jí jen proto, že je tradiční v elementárních učebnicích*.“ (Jarník, Integrální počet I., 1984, str. 165). ([6], str. 57)

§ 1. Definice primitivní funkce. Buďte $F(x)$, $f(x)$ *dvě funkce definované v otevřeném intervalu* (a, b) *(omezeném nebo neomezeném). Platí-li pro všechna* x *intervalu* (a, b) *rovnice* $F'(x) = f(x)$*, říkáme, že funkce* $F(x)$ *je primitivní funkcí k funkci* $f(x)$ *v intervalu* (a, b).

Definice neurčitého integrálu není vůbec uvedena. Jarník dává důraz na pojem primitivní funkce, a jak vyznívá z názvu kapitoly, bere tyto dva pojmy neurčitý integrál a primitivní funkci víceméně jako pojem jeden. Pojem neurčitý integrál splývá mezi řádky a autor se o něm zmiňuje jen v krátkosti: „*Primitivní funkce k funkci* $f(x)$ *v intervalu* (a, b) *nazýváme také neurčitým integrálem funkce* $f(x)$ *v intervalu* (a, b) *a značíme ji znakem* $\int f(x)dx$*. Jinými slovy: neurčitým integrálem funkce* $f(x)$ *v intervalu* (a, b) *nazýváme každou funkci (definovanou v intervalu* (a, b)*), jež má pro každé v intervalu* (a, b) *derivaci rovnou číslu* $f(x)$*.“* ([6], str. 58)

VESELÝ:

Primitivní funkcí se autor zabývá na straně 207 [19]. Je zde uvedena definice.

Definice 8.1.1. Nechť f je funkce definovaná na $(a, b) \subset R$. Pak funkci F, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$, nazýváme primitivní funkcí k f (na intervalu (a, b)).

Oproti jiným kapitolám se zde autor zabývá hlavně výpočty, tedy výpočtem primitivní funkce. Zejména v kapitolách „Výpočty primitivní funkce“ a „Integrace racionálních funkcí“ je vyřešeno více příkladů, než je obvyklé v jiných kapitolách.

Co se týká neurčitého integrálu, je uveden až v druhé učebnici na straně 264 a to teprve poté, co byl definován určitý Riemannův integrál. Kapitola se nazývá „Newtonův integrál“, ale autor zavádí obecnější pojem zobecněná primitivní funkce. ([18], str. 264)

Definice 10.3.1. Nechť $K \subset I$ je konečná množina a nechť pro funkci F definovanou na intervalu $I \subset R$ a funkci f definovanou na $I \setminus K$ platí:

$$F'(x) = f(x), x \in I \setminus K.$$

Dále nechť F je spojitá funkce na I. Potom říkáme, že F je zobecněná primitivní funkce k f na I.

NEKVINDA:

Autor začíná s definicí primitivní funkce: ([14], str. 136)

Definice 39.1 Nechť f, F jsou dvě funkce definované v intervalu I. Říkáme, že F je primitivní funkcí k f v intervalu I, jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

Od primitivní funkce se dostává k neurčitému integrálu přes stanovení dvou otázek, první z nich se týká problému existence a jednoznačnosti primitivní funkce, druhou otázkou je problém nalezení primitivní funkce. Nevynechává ani větu, která říká, že operace sestrojení primitivní funkce není jednoznačná. Poté již plynule přechází k samotné definici neurčitého integrálu a k tabulce základních integrálů. ([14], str. 137)

Definice 39.2 Nechť funkce f má v intervalu I primitivní funkci. Pak množinu všech primitivních funkcí k funkci f v intervalu I nazýváme neurčitým integrálem funkce f v intervalu I a značíme symbolem $\int f(x)dx$.

V závěru kapitoly autor s důkazem uvádí, že operace integrování je aditivní a homogenní, tedy že je lineární. Nechybí ani ilustrativní příklad s řešením. Další kapitoly se týkají substituce v integrálech, integrování po částech (neboli per partes) nebo parciálních zlomků, které se používají při integraci racionálních funkcí. Kapitoly jsou zaměřeny prakticky, nechybí zde velké množství řešených příkladů.

ČERNÝ:

Oproti předchozím stručnějším kapitolám je kapitola o primitivní funkci poměrně rozsáhlá. Kapitola má šedesát stran a začíná tím, že se musíme ze začátku vyhýbat termínu integrace, vzhledem k tomu, že se stejný termín používá i v jiných souvislostech. Zavádí pojem primitivní funkce. ([2], str. 47)

7.1. Je-li $f\colon (a,b) \to R$, kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, říkáme, že funkce $F\colon (a,b) \to R$ je funkcí primitivní k f v (a,b), je-li $F' = f$ všude v (a,b). Množinu všech funkcí primitivních k f v (a,b) budeme značit $PF(f;(a,b))$ nebo o něco stručněji $PF(f;a,b)$ Je tedy

(7.1.1.) $$PF(f;a,b) \coloneqq \{F\colon (a,b) \to R; F' = f \text{ všude v } (a,b)\};$$

nevylučujeme ovšem ani případ, že f primitivní funkci nemá, tj. případ, že $PF(f;a,b) = \emptyset$.

Po definici přichází věta o množině primitivních funkcí. Co se týká konstanty c, má k ní autor několik zajímavých poznámek. Tvrdí, že ve velkém množství případů je zbytečné ji psát.

Newtonův integrál uvádí autor až v další samostatné kapitole s názvem „Newtonův integrál“, ale definicí zavádí pojem zobecněná primitivní funkce. ([2], str. 108)

8.1 Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a nechť $I \subset R$ je interval s krajními body a, b. Říkáme, že $F\colon I \to R$ je zobecněná primitivní funkce funkce f na (nebo: v) intervalu I, jestliže zaprvé

(8.1.1.1) F je spojitá v I

a zadruhé

(8.1.1.2) existuje konečná množina $K \subset I$ tak, že rovnost $F' = f$ platí všude v $I - K$.

Dále uvádí velké množství příkladů. Následuje linearita integrálu, monotonie integrálu a aditivita integrálu. Ihned za sebou uvádí dvě metody hledání výpočtu Newtonova integrálu, tedy metodu per partes a substituci. Po jejich vysvětlení uvádí pouze pár příkladů a až po zavedení obou pojmů přikládá větší množství příkladů na procvičení.

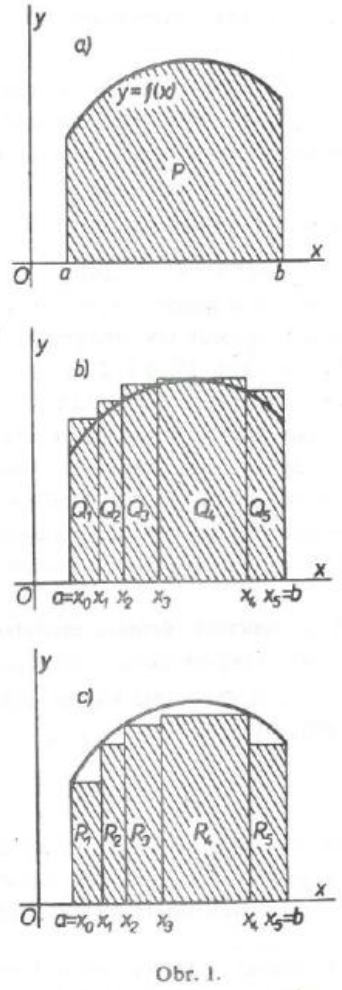
Závěr:

Jarník definuje pouze primitivní funkci; neurčitý integrál nemá svou vlastní definici, autor se o něm zmiňuje jen v krátkosti. Veselého definice primitivní funkce je shodná s Jarníkovou definicí a stejně jako on zavádí také zobecněnou primitivní funkci. Definice primitivní funkce u Nekvindy je stejná jako u Jarníka. Oproti Jarníkovi ovšem definuje neurčitý integrál. Černého definice je na rozdíl od ostatních autorů podrobnější, mimo jiné se v ní zabývá i situací, kdy funkce nemá primitivní funkci. Místo neurčitého integrálu zavádí Černý pojem zobecněná primitivní funkce, stejně jako je tomu u Jarníka a Veselého.

Riemannův integrál

JARNÍK:

V úvodní podkapitole kapitoly „Teorie určitého integrálu (Riemannova)“ uvádí Jarník geometrický význam určitého integrálu. Zavádí pojmy infimum a supremum (m a M) funkce v uzavřeném intervalu. Rozděluje obsah měřené plochy pod grafem na geometrické útvary (konkrétně obdélníky), jejichž obsah dovedeme spočítat, tak, aby nepřesahovaly hranici měřené oblasti a vzájemně se nepřekrývaly. Tuto skutečnost ilustruje na přikládaných obrázcích.



Obrázek 9: Jarník- určitý integrál

Další podkapitola se nazývá Součtová definice určitého integrálu, v níž Jarník zavádí pojmy: dělící body, dělení D, horní a dolní součet $S(D)$ a $s(D)$ příslušný k dělení, supremum M a infimum m funkce na uzavřeném dílčím intervalu, ve větě č. 12 zavádí největší hodnotu horního součtu ($M(b-a)$) a nejmenší hodnotu dolního součtu *(*$m(b-a)$).

Poté již přichází k zavedení pojmů dolní integrál funkce na omezeném intervalu, jakožto supremum dolních součtů a horní integrál funkce na omezeném intervalu jako infimum horních součtů. Až na konci podkapitoly zaniká mezi řádky závěr definice: *„Říkáme v tomto případě (tj. tehdy, když se horní integrál rovná dolnímu), že* $\int_a^b f(x)dx$ *existuje, nebo že funkce* $f(x)$ *má určitý integrál od a do b nebo také, že funkce* $f(x)$ *jest integrace schopna v intervalu* $\langle a,b\rangle$*.*“ ([6], str. 31)

Jak je vidět i v dalších podkapitolách, autor dává důraz na pojmy horní a dolní integrál, které používá v následujících větách, například ve větě o integraci součtu uvádí tyto dvě nerovnosti:

$$\int_{\underline{a}}^{b}\big(f_1(x)+f_2(x)\big)dx \geq \int_{\underline{a}}^{b} f_1(x)dx + \int_{\underline{a}}^{b} f_2(x)dx;$$

$$\int_{a}^{\overline{b}}\big(f_1(x)+f_2(x)\big)dx \leq \int_{a}^{\overline{b}} f_1(x)dx + \int_{a}^{\overline{b}} f_2(x)dx.$$

VESELÝ:

V kapitole Riemannův integrál Veselý nejprve zavádí a vysvětluje důležité pojmy, například dělení intervalu. Uvádí definici z roku 1823 od Augustina Louise Cauchyho o integrovatelné funkci. „*Funkce f se nazývá integrovatelná (dle Cauchyho) na intervalu $[a, b]$ a hodnota jejího integrálu je rovna číslu $V \in R$, jestliže platí: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $v(D) < \delta \Rightarrow |V - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})| < \epsilon$. Je-li splněna tato podmínka, definujeme $\int_a^b f(x)dx \coloneqq V$.*“ ([18], str. 252) Ve větě je uveden symbol $v(D)$, který znamená normu dělení. Následují tři lemmata a poté již samotná definice z roku 1854 od Riemanna a z roku 1875 od Darbouxe. ([19], str. 253)

Definice 10.2.9 (Riemann 1854, Darboux 1875). Označme pro každou (dle úmluvy neomezenou) funkci f definovanou na intervalu$[a, b]$

$$I_h(f; a, b) = inf\{S(f; D); D \in D(a, b)\},$$

$$I_d(f; a, b) = sup\{s(f; D); D \in D(a, b)\}.$$

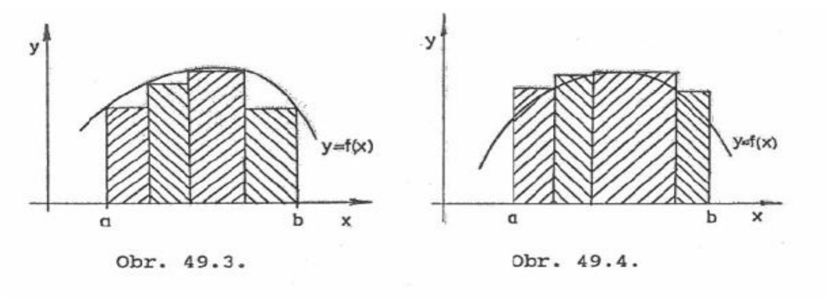
Platí-li $I_d(f; a, b) = I_h(f; a, b)$, pak definujeme $I(f; a, b) := I_d(f; a, b)$ a nazýváme hodnotu $I(f; a, b)$ Riemannův integrál funkce f na intervalu $[a, b]$. Píšeme pak

$$(R) \int_a^b f(x)dx \coloneqq I(f; a, b).$$

Po definici přichází věty, poznámky, lemata a poté již výše zmíněný Newtonův integrál, kterým jsem se zabývala již v předchozí podkapitole „Primitivní funkce a neurčitý integrál“.

NEKVINDA:

Oddíl s názvem Riemannův integrál začíná autor kapitolou „Modelová úloha a integrál“. Po této kapitole již přichází kapitola Riemannův integrál, definice. Ovšem autor ji neuvádí ihned na začátku, nejprve musí zavést a vysvětlit několik důležitých pojmů, například dělení intervalu, zjemnění dělení, dolní integrální součet atd. Teprve poté se autor dostává k definici Riemannova integrálu. ([14], str. 177)



Obrázek 10: Nekvinda- Riemannův integrál

Definice 50.1. Říkáme, že funkce f má v intervalu $\langle a; b\rangle$ Riemannův integrál resp. že je v $\langle a; b\rangle$ riemannovsky integrovatelná, je-li dolní integrál z funkce f roven hornímu integrálu. V tomto případě definujeme Riemannův integrál od a do b z funkce f, znak $\int_a^b f(x)dx$, jako společnou hodnotu dolního a horního integrálu, tedy

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Jestliže $\underline{\int_a^b} f(x)dx < \overline{\int_a^b} f(x)dx$, říkáme, že funkce f nemá v intervalu $\langle a; b\rangle$ Riemannův integrál resp. že není v $\langle a; b\rangle$ riemannovsky integrovatelná. Symbol $\int_a^b f(x)dx$ není v tomto případě definován.

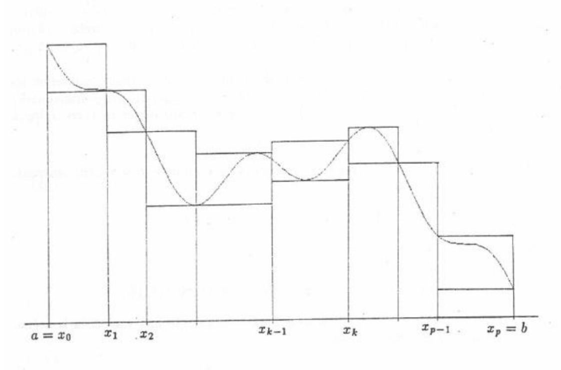
Na konci kapitoly uvádí základní geometrickou aplikaci tedy obsah plochy křivočarého lichoběžníka, pokud je funkce v intervalu nezáporná. Další kapitoly pojednávají o existenci Riemannova integrálu, jeho vlastnostech, geometrickém významu a velké množství kapitol tohoto oddílu je věnováno praktickému využití určitého integrálu například při výpočtech obsahů rotačních útvarů a válcových ploch, délky křivky atd.

ČERNÝ:

Začátek kapitoly nazvané „Riemannův integrál“ je věnován důležitosti pojmu, ovšem ve srovnání s Lebesgueovým integrálem (od francouzského matematika Henri Léona Lebesgueho) je úvod zaměřen také na nedostatky Riemannova integrálu. Černý se ptá, čemu má dát člověk přednost, zda Riemannovu s jednoduchou definicí a špatnými vlastnostmi nebo například Lebesgueovu integrálu s mnohem komplikovanější definicí a uspokojivými vlastnostmi. Ten, kdo ho zavádí, dává přednost Riemannovu, ale vyvstává otázka: „*Zavádíme integrál kvůli definici, nebo proto, že s ním chceme pracovat?*“ ([3], str. 160) Jak autor uvádí, jediným racionálním důvodem, proč se zabývat Riemannovým integrálem, je možnost důkazu věty o existenci primitivní funkce ke spojité funkci (na otevřeném intervalu).

Původní součtovou definici Riemannova integrálu nahrazuje ekvivalentní definicí od francouzského matematika Jeana Gastona Darbouxe. Zahrnuje do ní vysvětlení horního a dolního součtu, zjemnění dělení, horní a dolní integrál a v závěru definuje Riemannův integrál, jakožto rovnost horního a dolního integrálu. Jelikož je to definice velmi dlouhá, uvádím ji v závěru mezi přílohami.

Dále se autor věnuje aditivitě integrálu vzhledem k integračnímu oboru, monotonii integrálu a jeho existenci.



OBR. 35. Geometrický význam dolních a horních součtů

Obrázek 11: Černý - Riemannův integrál

Závěr:

Veselý jako jediný v definici uvádí určitý integrál jako rovnost suprema množiny dolních součtů a infima množiny horních součtů. Tyto hodnoty značí dolní a horní Riemannův integrál. Jarníkovu definici tvoří celá samostatná podkapitola s názvem „Součtová definice Riemannova integrálu“. Podobně je tomu tak i u Černého. Oba tito autoři v definici zavádí a vysvětlují pojmy, které jsou k definici Riemannova integrálu nezbytné. Autoři Veselý, Nekvinda nejdříve zavádí pojmy, které zazní v definici, teprve poté již stručněji pomocí těchto pojmů definují Riemannův integrál.

Integrály v historickém kontextu

Na závěr kapitoly o integrálech se podíváme na zařazení neurčitého a určitého integrálu z hlediska historie. Myšlenku určitého integrálu lze předvést pomocí grafu či obrázku.

Jarníkovo zařazení integrálů do ostatní látky odpovídá historii, kdy učenci nejdříve potřebovali určovat obsah plochy a objemy rotačních těles. Při zařazení určitého integrálu až po neurčitém se může stát, že si studenti neuvědomují myšlenku Riemannova integrálu, protože se soustředí jen na dosazování mezí do primitivní funkce.

Je zřejmé, že neurčitý integrál přiřazuje funkci opět funkci resp. množinu funkcí, kdežto určitý integrál funkci přiřazuje číslo. Podle toho, co vyjadřuje daná funkce, má výsledné číslo různý význam, může znamenat délku křivky, obsah plochy pod grafem, objem rotačních těles, povrch pláště rotačních těles, práci proměnné síly a další fyzikální veličiny.

Určování obsahu rovinného obrazce je jedna z vůbec nejstarších úloh v matematice. Staří Egypťané museli vyměřovat pole, tj. počítat obsahy. Znali obsah čtverce, obdélníka, trojúhelníka a tím i libovolného mnohoúhelníku. Mnohoúhelník rozdělili na trojúhelníky, spočítali jejich obsahy a ty potom sečetli. Uměli počítat i objemy krychle, válce nebo komolého jehlanu se čtvercovou základnou (pyramidy). Velkého pokroku v měření obsahů a objemů bylo dosaženo ve starověkém Řecku v období let 350–200 před. n. l. Řekové se snažili plochu neznámého obrazce získat pomocí mnohoúhelníků, kterými obrazec „vyčerpávali“. Tímto způsobem směřovali k určitému integrálu, aniž by potřebovali nebo znali integrál neurčitý, respektive primitivní funkci.

Vývoj Jarníkových učebnic

V době prvních vydání Jarníkových učebnic šlo o základní učebnice matematické analýzy, a to nejen nejen pro studenty oboru matematického. Pro dnešní studenty jsou často tyto učebnice náročné svou důkladností a rozsáhlostí. Studenti v dnešní moderní době interaktivních učebnic a rozsáhlého technického pokroku očekávají pouze prostá schémata, zkratky a návody k řešení.

Učebnice Vojtěcha Jarníka vycházely v různých dobách v odlišných podobách. Pro srovnání a nahlédnutí do vývoje jeho učebnic jsem si vybrala sbírku Diferenciální počet I., což je název 4. až 7. vydání učebnice, která nejprve vycházela pod názvem Úvod do počtu diferenciálního. Pro představu udávám tabulku s číslem verze a rokem vydání těchto knih.

Tabulka 1: Souhrn vydání vybrané Jarníkovy učebnice

	Úvod do počtu diferenciálního			**Diferenciální počet I**			
Číslo vydání	I.	II.	III.	IV.	V. vydání	VI.	VII.
Rok vydání	1946	1951	1953	1955	1963	1974	1984
Typ	původní	změněné	změněné	nezměněné	změněné	nezměněné	nezměněné

Pro výše zmíněné porovnávání jsem si zvolila první vydání z roku 1946 a poslední vydání z roku 1984, jelikož mi byly dostupné. Jarník sám prováděl v učebnici změny pouze do 5. vydání této učebnice. Šesté vydání vyšlo až deset let po pátém a bylo prvním vydáním po autorově smrti a doslovně se shodovalo s pátým vydáním z roku 1963.

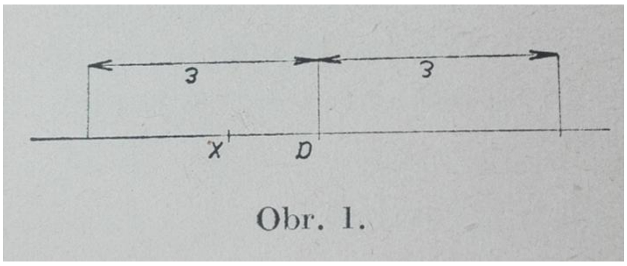
Obsahy obou výše uvedených vydání jsou naprosto stejné; pouze v 7. vydání jsou uváděny dvě předmluvy (k prvnímu a šestému vydání) a na konci je přidán soupis vět a definic. Změny reagující na vývoj pravopisu (inversní, inverzní) jsou přirozené, stejně tak se objevují i změny ve značení ($\dotplus$, $\oplus$). 7. vydání má 392 stran a 1. vydání 446. Rozdíl počtu stran je dán různou velikostí stránek těchto učebnic. Obsah prvního vydání je uváděn na konci učebnice a obsah sedmého vydání na začátku těsně po předmluvách.

Hned na prvních stranách je patrné, že se autor snažil určitým způsobem učebnici zjednodušit, aby se čtenář lépe orientoval v uváděném textu, přidával pro čtenáře více poznámek. Nadpisy „důkaz“, „poznámka“ a „příklad“ jsou v prvním vydání psané velkými tiskacími písmeny, kdežto v sedmém se nijak neliší od ostatního textu.

Příklad doplnění učebnice ([4], str. 16): „*Pro úsporu místa píši často místo zlomkové čáry dělítko. Přitom jest ovšem nutno často přidávat závorky; např.*

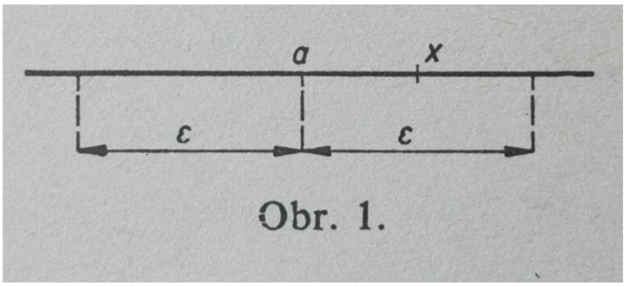
$a{:}\,b = \frac{a}{b}$, $\quad a{:}\,b + c = \frac{a}{b} + c$, $\quad a{:}\,(b + c) = \frac{a}{b+c}$, $\quad a + b{:}\,c = a + \frac{b}{c}$, $\quad (a + b){:}\,c = \frac{a+b}{c}$
atd. Neradím čtenáři, aby si na tento způsob zvykal; užívám ho pouze pro úsporu místa.“

Na straně 34 sedmého vydání se objevila změna, bylo opraveno řecké písmeno ε u obrázku číslo 1 (viz níže), který znázorňuje větu č. 28: „*Buďte* a, x, ε *čísla, potom nerovnost* $|x - a| < \varepsilon$ *platí tehdy a jen tehdy, platí-li nerovnosti* $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.“.



Obr. 1.

Obrázek 12: Diferenciální počet (I) - 1. vydání



Obr. 1.

Obrázek 13: Diferenciální počet (I) - 7. vydání

Vydání z roku 1984 je doplněné ([4], str. 35) o příklad důkazu úplnou indukcí s přesně rozepsaným postupem a vysvětlivkami, jedná se o rovnost:

$$V(n){:}\ 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \text{ kde } n \in N.$$

Do knihy je přidána i poznámka k názvosloví (supremum, infimum místo horní a dolní hranice). ([4], str. 59).

V desáté podkapitole s názvem „Další poznámky k větám o supremu a infimu“ v kapitole I. „Reálná čísla“ je přidáno cvičení se třemi úkoly k úvaze ([4], str. 71 - 72).

Věta č. 126 o derivování složených funkcí má drobnou změnu v důkazu. V prvním vydání vychází autor z limity podílu $\frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0)}{x - x_0}$, v novějším vydání (konkrétně na str. 217) jde o limitu podílu $\frac{f(\varphi(x_0 + h)) - f(\varphi(x_0)}{h}$.

Text k větě č. 140, která zní „*Existuje-li* $f'(x_0) \neq 0$, *nemá funkce* f *v bodě* x_0 *lokální extrém.*“, je doplněn o příklad porovnání problému lokálních extrémů dvou funkcí $f_1(x) = x^2$

a $f_2(x) = x^3$. Přestože obě tyto funkce mají v bodě 0 derivaci rovnou 0, první z nich má v tomto bodě lokální extrém a druhá nemá. ([4], str. 225)

Závěrem můžeme říci, že Vojtěch Jarník měl své dílo kvalitně zpracované již při prvním vydání, což bylo dáno jeho pečlivostí, o které se píše v každém článku o jeho osobnosti. Za svého života Jarník v novějších vydáních pouze opravil chyby, kterých bylo minimum, a doplnil je ať už o příklady nebo poznámky, které čtenáři pouze napomáhaly k lepšímu porozumění nebo usnadňovaly orientaci v textu.

Jarníkův algoritmus

Jarníkovou méně známou oblastí vědecké činnosti byla kombinatorická nebo také diskrétní optimalizace. Jarník se touto problematikou zabýval pouze ve dvou časopiseckých článcích, které byly dlouhou dobu přehlíženy a ani v dnešní době nejsou příliš známé. Jedná se o:

1. Jarník, V: *O jistém problému minimálním*. Práce Mor. Přírodověd. Spol. v Brně (Acta Societ. Scient. Natur. Moravicae) 6 (1930), 57–63.
2. Jarník, V., Kössler, M.: *O minimálních grafech obsahujících n daných bodů*. Časopis Pěst. Mat. 63 (1934), 223–235.

O jistém problému minimálním

Článek „O jistém problému minimálním“ je velmi krátký. Je psán v první osobě jednotného čísla, formou dopisu a důvod této zvláštní formy je patrný již z podtitulu, který zní „Z dopisu panu O. Borůvkovi“. Otakar Borůvka řešil stejný problém již ve svém článku v časopise Práce moravské přírodovědecké společnosti (svazek III., spis 3). Profesor Jarník však zjistil, že ho lze řešit jednodušším způsobem. Zajímavostí je, že Borůvkův článek se jmenoval stejně „O jistém problému minimálním“ a Jarník tento název převzal.

Problém zmiňovaný v tomto článku je ústředním problémem kombinatorické optimalizace. Je také „kolébkou“ mnoha klíčových pojmů. Nyní si představíme důležité pojmy.

Graf

Graf definujme jako dvojici $G = (V, E)$, kde $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ je konečná množina objektů, kterým říkáme vrcholy, někdy též uzly grafu a $E = \{u_i, u_j, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ je množina některých dvojic uzlů, kterým říkáme hrany grafu.

Vrchol (uzel)

Vrcholem se nazývá jeden z prvků množiny definující graf. Užívá se také označení uzel. Znázorňuje se jako bod či malý kruh.

Hrana

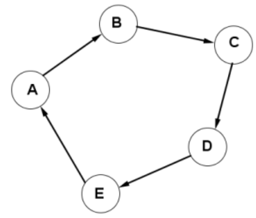
Hranou se nazývá uspořádaná nebo neuspořádaná dvojice vrcholů grafu. Znázorňuje se jako přímka nebo oblouk mezi vrcholy, které spojuje.

Ohodnocení hrany

Ohodnocení hrany vyjadřuje kvalitu nebo kvantitu vztahu mezi dvěma vrcholy (např. vzdálenost).

Kružnice

V teorii grafů se termínem kružnice označuje takový graf, který se skládá z jediného cyklu, tedy uzavřené posloupnosti propojených vrcholů. Kružnice může být orientovaná i neorientovaná.

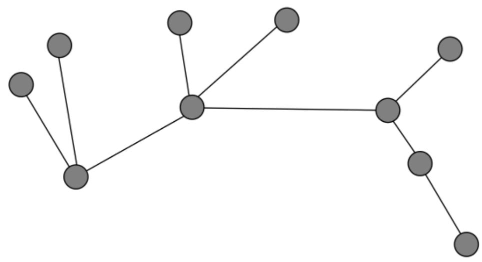


Obrázek 14: Orientovaná kružnice na pěti vrcholech

Strom

Graf G nazýváme stromem, pokud je souvislý (mezi každými dvěma po sobě jdoucími vrcholy je hrana) a neobsahuje kružnici. Vlastnosti:

1. Každé dva vrcholy z G jsou spojeny právě jednou cestou (jednoznačnost cesty).
2. Po odebrání libovolné hrany se stane nesouvislým.
3. G neobsahuje kružnici, ale po přidání libovolné hrany vznikne v G kružnice (maximální graf bez kružnic).
4. $|V| = |E| + 1$, kde V je množina vrcholů a E množina hran grafu G.



Obrázek 15: Strom

Popis Jarníkova algoritmu

V teorii grafů se jedná o algoritmus hledající minimální kostru ohodnoceného grafu. Najde takovou podmnožinu hran grafu, která tvoří strom obsahující všechny vrcholy původního grafu a součet ohodnocení hran z této množiny je minimální.

Zápis problému minimální kostry (PMK):

Nechť je dána množina V a ohodnocení $w{:}\binom{V}{2} \to R$. Najdi strom (V, E) tak, že $\sum_{e \in E} w(e)$ je minimální.

PMK byl poprvé formulován Otakarem Borůvkou. Vojtěch Jarník si ihned uvědomil originalitu tohoto problému a přispěl svým elegantním řešením. Po roce 1955 se teprve začal uskutečňovat rozvoj v tomto směru. Byla formulována řada obecných metod a speciálních algoritmů. Přestože Jarník přispěl zpracováním, které bylo precizní a moderní, jeho článek začal být citován až později. Do té doby byly uváděny citace odkazující pouze na Otakara Borůvku.

Poprvé byl tedy tento algoritmus popsán Vojtěchem Jarníkem roku 1930. Později v roce 1957 byl znovuobjeven Robertem Primem a poté ještě jednou v roce 1959 Edsgerem Dijkstrou. Algoritmus začíná s jedním vrcholem a postupně přidává další, který je spojen s předchozím vrcholem nejméně ohodnocenou hranou, tím zvětšuje velikost stromu do té doby, než obsahuje všechny vrcholy.

Jarníkův algoritmus je stejný jako Primův algoritmus (R. C. Prim), jak je většinou v zahraniční literatuře označován.

O minimálních grafech obsahujících n daných bodů

Jedná se o problematiku nalezení nejkratšího spojení mezi n danými body v rovině. Tento problém má dlouhou historii, je totiž jedním z nejstarších optimalizačních problémů. V historii byl ale většinou uvažován pouze případ $n = 3$. Řešením se zabývalo mnoho badatelů, kteří uvažovali různá zobecnění. Avšak před rokem 1934 nebyl problém nejkratšího spojení n bodů vůbec uvažován. Poprvé se tomu stalo až díky Jarníkovi s Kösslerem. Byl přesně a jasně zformulován i řešen. Autoři článku [16] uvádějí, že se nedá přesně určit, proč se tímto problémem autoři zabývali, možné vysvětlení je, že Jarník stejně jako v předchozím uváděném problému poznal jeho originalitu, něco nového, co tu ještě nebylo.

Tříbodový problém nalezneme v knize od Richarda Couranta a Herberta Robbinsona z roku 1941 s názvem What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods pod názvem Steinerův problém (Jakob Steiner) a problém nejkratšího vzájemného spojení mezi n body je nazýván „zobecněný Steinerův problém“. Jak je ovšem z textu patrné, jedná se o Jarníkův problém nebo Jarníkův-Kösslerův problém. Je pravděpodobné, že Courant a Robbins byli ovlivněni pracemi Jakoba Steinera, a přestože byl Jarník v té době již mezinárodně uznáván a považován za slavného matematika, o jeho pracích nesouvisejících s matematickou analýzou nevěděli.

Problém je náročný na řešení jak teoreticky, tak prakticky, z tohoto důvodu je stále ještě intenzivně studován.

Vojtěch Jarník dal řešením uvedených problémů impuls k začátku nového, do té doby poměrně neznámého odvětví. Jarníkovy články z oblasti teorie grafů nejsou okrajovými příspěvky, které by měly upadnout v zapomnění, ale velice významnými pracemi člověka, který velkou měrou zasáhl do kombinatorické optimalizace, přestože jeho hlavní oblastí působení byla matematická analýza.

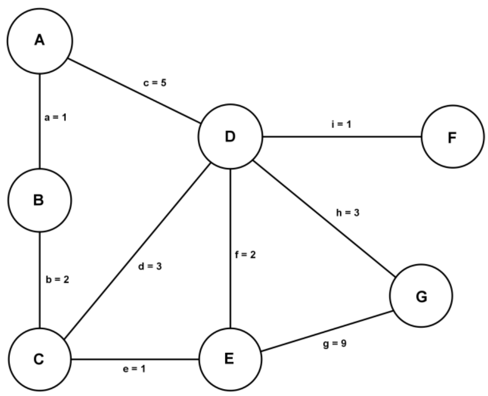
Ukázka Jarníkova algoritmu

Značení:

- červené úsečky = hrany, které algoritmus prověřuje
- modré úsečky a body (uzly) = vybrané pomocí algoritmu
- oranžové body = uzly, které byly naposledy přidány
- původní graf = graf P
- generovaný graf (graf minimální kostry) = M

Na ukázku uvedeme příklad na hledání využití Jarníkova algoritmu. Je dán graf P (původní graf). Tento graf obsahuje sedm vrcholů (uzlů) a devět ohodnocených hran. Cílem je nalezení minimální kostry grafu.

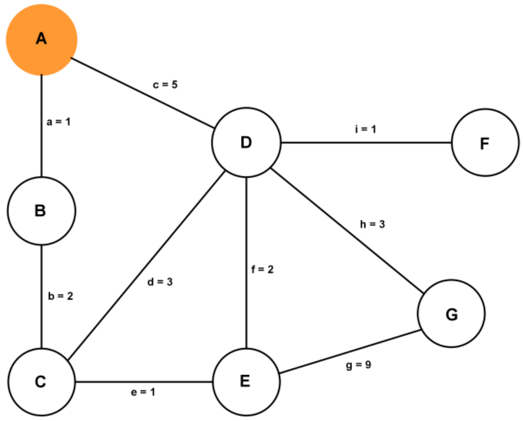
Původní graf:



Obrázek 16: Původní graf

1. krok

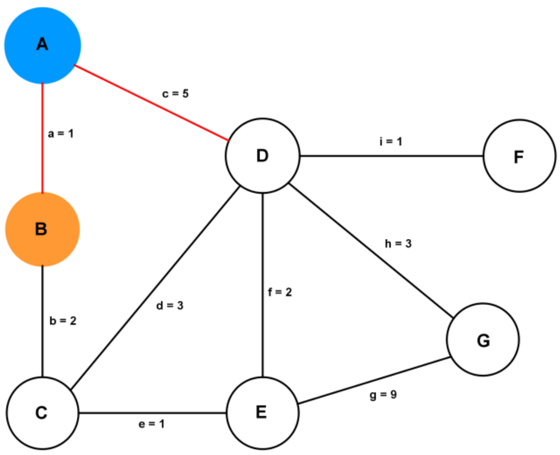
Náhodně zvolíme uzel grafu P, např. uzel A, přidáme ho do grafu M, nezáleží na tom, který uzel vybereme, jelikož na konci budou zahrnuty všechny uzly. Bez prvního uzlu nemůže být algoritmus spuštěn. Graf M má menší počet uzlů než graf P, algoritmus tedy pokračuje.



Obrázek 17: 1. krok Jarníkova algoritmu

2. krok

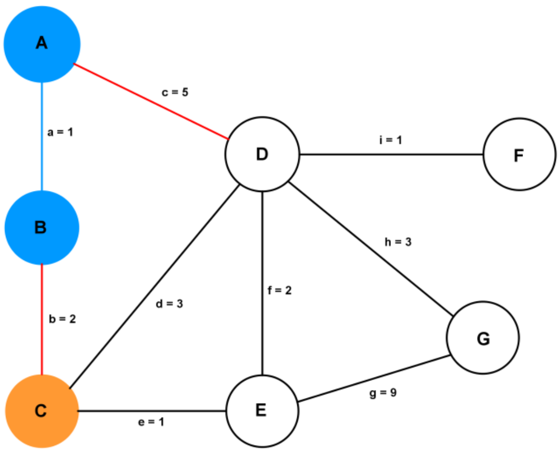
Algoritmus vyhledá hranu s nejmenším ohodnocením, která graf M spojuje se zbývajícími uzly (rozdíl grafů $P - M$). Kandidáty jsou hrany a, c. Vybrána je hrana a, protože má menší ohodnocení. Graf M má stále menší počet uzlů než graf P, algoritmus pokračuje.



Obrázek 18: 2. krok Jarníkova algoritmu

3. krok

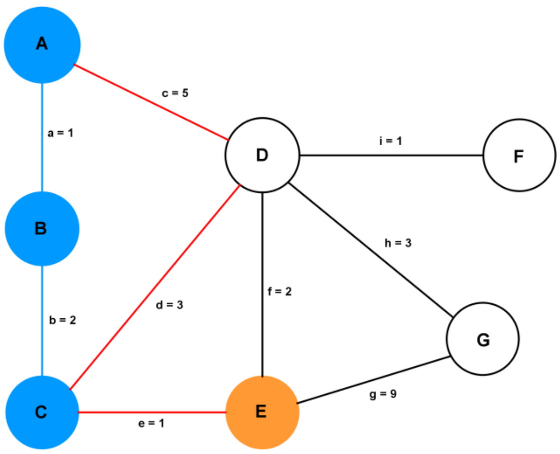
Kandidáty na rozšíření grafu M jsou hrany b, c. Vybrána je hrana b, protože má menší ohodnocení než hrana c. Graf M má stále menší počet uzlů než graf P, algoritmus pokračuje.



Obrázek 19: 3. krok Jarníkova algoritmu

4. krok

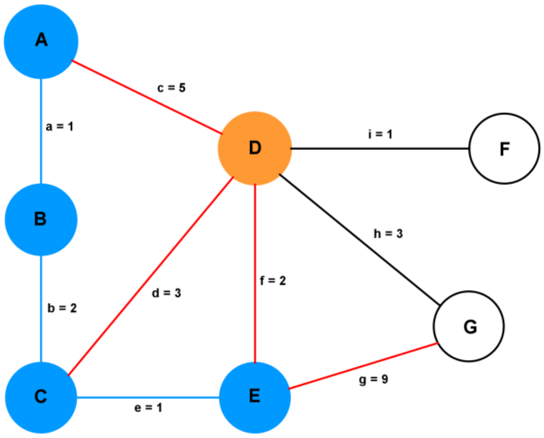
Kandidáty na rozšíření grafu M jsou hrany c, d, e. Vybrána je hrana e, protože má nejmenší ohodnocení. Graf M má stále menší počet uzlů než graf P, algoritmus pokračuje.



Obrázek 20: 4. krok Jarníkova algoritmu

5. krok

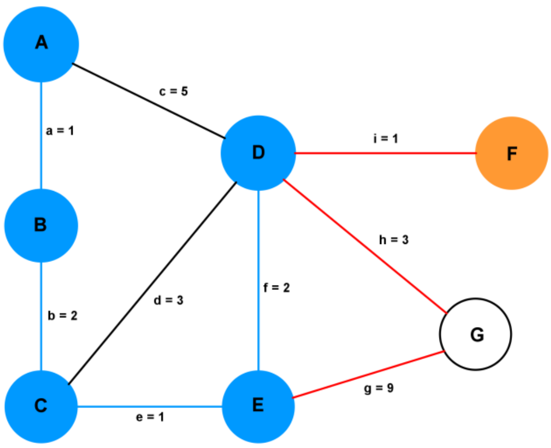
Kandidáty na rozšíření grafu M jsou hrany c, d, f, g. Vybrána je hrana f, protože má nejmenší ohodnocení. Graf M má stále menší počet uzlů než graf P, algoritmus pokračuje.



Obrázek 21: 5. krok Jarníkova algoritmu

6. krok

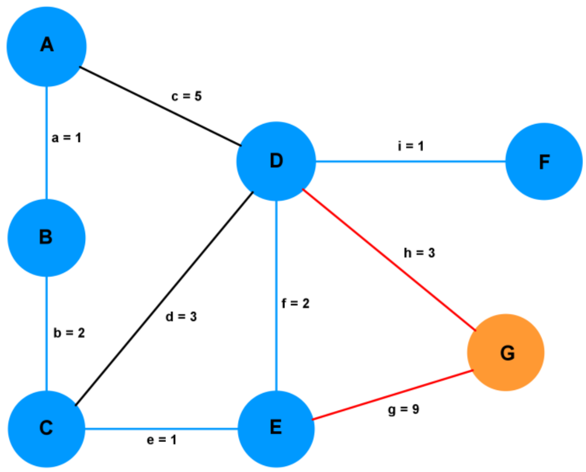
Kandidáty na rozšíření grafu M jsou hrany $i,\ h, g$. Vybrána je hrana i, protože má nejmenší ohodnocení. Hrany $c,\ d$ nejsou uvažovány, protože nespojují graf M s rozdílem grafů $P - M$. Graf M má stále menší počet uzlů než graf P, algoritmus pokračuje.



Obrázek 22: 6. krok Jarníkova algoritmu

7. krok

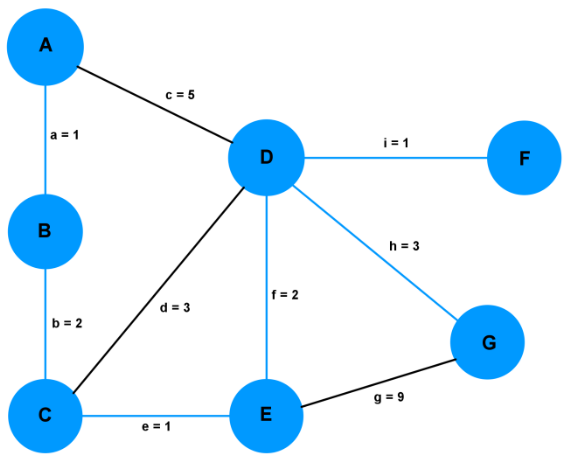
Kandidáty na rozšíření grafu M jsou hrany h, g. Vybrána je hrana h, protože má menší ohodnocení než hrana g. Graf M má stejný počet uzlů jako graf P, algoritmus skončí.



Obrázek 23: 7. krok Jarníkova algoritmu

8. krok

Výpočet je dokončen. Modrý graf M je grafem minimální kostry původního grafu P.



Obrázek 24: 8. krok Jarníkova algoritmu

Závěr

Vojtěch Jarník, jako významná osobnost české matematiky, zasáhl svými pracemi a učebnicemi do života velkého množství studentů. Cílem bakalářské práce bylo přiblížit jeho dílo a poukázat na význam jeho učebnic, porovnat je s dalšími autory a všimnout si i změn ve dvou různých vydáních téže Jarníkovy učebnice.

Zjistili jsme, že v Jarníkových učebnicích se vyskytovaly různé odlišnosti od ostatních autorů. Jako jediný z vybraných autorů se nejprve věnoval Riemannovu integrálu, na kterém stavěl i při přechodu k pojmu primitivní funkce, a poté až primitivní funkci, resp. neurčitému integrálu. Dalším specifikem týkajícím se Riemannova integrálu je, že nejen samotná definice určitého integrálu, ale i další věty a vlastnosti byly založeny na horních a dolních integrálech. Zvláštností může být i samotný název jedné z kapitol „Teorie neurčitého integrálu neboli primitivní funkce“, kterou jsme objasnili při porovnávání pojmů.

Prozkoumání vývoje Jarníkovy učebnice Diferenciální počet I přineslo zjištění, že jeho práce neobsahovaly v podstatě žádné chyby již při prvním vydání. Je to dáno Jarníkovou pečlivostí, o které se píše ve všech článcích všímajících si jeho osobnosti a díla. Pokud autor v dalších vydáních něco měnil, bylo to zpravidla doplnění drobných poznámek či nových příkladů.

Ukázali jsme, že Jarník se nezabýval pouze matematickou analýzou, ale svou prací se velmi výrazně zapsal i do oblasti teorie grafů, přestože v zahraničí jeho objev, tedy Jarníkův algoritmus, pod tímto názvem neznají.

Vhodným námětem pro další práce v této oblasti může být rozsáhlejší zkoumání problematiky nalezení nejkratšího spojení mezi n danými body v rovině, jelikož tento problém je stále ještě intenzivně studován.

Seznam použitých zdrojů

1. ČERNÝ, Ilja. *Matematická analýza*. 1. vyd. Liberec: Technická univerzita, 1996, 225 s. ISBN 80-7083-188-1.
2. ČERNÝ, Ilja. *Matematická analýza*. 1. vyd. Liberec: Technická univerzita, 1996, 164 s. ISBN 80-7083-206-1.
3. ČERNÝ, Ilja. *Matematická analýza*. Vyd. 1. Liberec: Technická univerzita, 1995, 125 s. ISBN 80-7083-188-1.
4. JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet I*. 7. nezměněné vyd. Praha: Academia, 1984, 392 s.
5. JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet II*. 4. vyd. Praha: Academia, 1984, 672 s.
6. JARNÍK, Vojtěch. *Integrální počet I*. 6. nezměněné vyd. Praha: Academia, 1984, 244 s.
7. JARNÍK, Vojtěch. *Integrální počet II*. 3. vyd. Praha: Academia, 1984, 764 s.
8. JARNÍK, Vojtěch. Úvod do počtu diferenciálního, 1. vyd., JČMF, Knihovna spisů matematických a fyzikálních, sv. 22, 1946, 448 s.
9. KNICHAL, V.; SCHWARZ, Š.: Akademik Vojtěch Jarník šedesátníkem. Časopis pro pěstování matematiky. 82 (1957), 463-492.
10. KOŘÍNEK, V.; VYČICHLO, F.: Akademik Vojtěch Jarník šedesátníkem. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.* 3 (1958), str. 1-8.
11. KURZWEIL, J.: NOVÁK, B.: Zemřel profesor Vojtěch Jarník. *Časopis pro pěstování matematiky*. 96 (1971), 307-337.
12. KURZWEIL, J.: Sedmdesátiny akademika Vojtěcha Jarníka. *Časopis pro pěstování matematiky*. 92 (1967), 486-489.
13. BEČVÁŘOVÁ M., BEČVÁŘ J.: *Matematika v proměnách věků*. V Praze: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004, il., portréty. ISBN 80-7285-040-7.
14. NEKVINDA, Miloslav. *Matematika*. Vyd. 4. opr. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2001, 238 s. ISBN 80-7083-447-1.
15. NEKVINDA, Miloslav. *Matematika*. Vyd. 2. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2002, 104 s. ISBN 80-7083-570-2.

16. NEŠETŘIL, J., KORTE, B.: Práce Vojtěcha Jarníka v kombinatorické optimalizaci. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.* 44 (1999), str. 187-200.
17. NOVÁK, B.: Za profesorem Vojtěchem Jarníkem. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.* 16 (1971), str. 1-5.
18. SCHWARZ, Š.: Niekol'ko spomienok na akademika Vojtěch Jarníka. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.* 35 (1990), str. 340-345.
19. VESELÝ, Jiří. *Matematická analýza pro učitele*. Praha: Matfyzpress, 1997, 7, 230 s. ISBN 80-85863-23-5.

Internetové zdroje:

1. Webové stránky studentů a přátel MMF UK dostupné na: http://www.matfyzak.cz/wp/beanie/ (navštíveno dne 11. 11. 2015)
2. Webové stránky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze dostupné na: http://www.mff.cuni.cz/verejnost/konalo-se/2013-10-beanie/ (navštíveno dne 11. 11. 2015)
3. Přednáška paní Šarmanové o historii určitého integrálu ve formátu PDF dostupná online na: http://skomam.vsb.cz/archiv/2005/files/prednasky/P_Sarmanova.pdf (navštíveno 11. 11. 2015)
4. Osobní webové stránky Ing. Vojtěcha Horděјčuka o programování, digitálních obvodech a dalších věcech kolem výpočetní techniky dostupné na: http://voho.cz/wiki/algoritmus-jarnik-prim/ (navštíveno dne 16. 3. 2016)
5. Populárně naučný portál POPULAR dostupný na: http://popular.fbmi.cvut.cz/it/Stranky/Grafy-a-grafove-algoritmy-5-Hledani-minimalni-kostry.aspx (navštíveno dne 16. 3. 2016)
6. Webové stránky poskytujících základní úvod do teorie grafů, dostupné na: http://teorie-grafu.cz/ (navštíveno dne 7. 4. 2016)
7. Studijní materiály Jany Friebelové z ekonomické fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích dostupné na: http://www2.ef.jcu.cz/~jfrieb/tspp/data/teorie/grafy.pdf (navštíveno dne 16. 4. 2016)

Seznam příloh

Příloha I- kompletní seznam Jarníkových publikací

- převzato z: Kurzweil, J.: Novák, B.: Zemřel profesor Vojtěch Jarník. *Časopis pro pěstování matematiky*. 96 (1971), 307-337.

Příloha II - Jarníkova definice Riemannova integrálu

- převzato z: JARNÍK, Vojtěch. *Integrální počet II*. 3. vyd. Praha: Academia, 1984, 764 s.

Příloha III - Černého definice Riemannova integrálu

- převzato z: ČERNÝ, Ilja. *Matematická analýza*. Vyd. 1. Liberec: Technická univerzita, 1995, 125 s. ISBN 80-7083-188-1.

Příloha I – kompletní seznam Jarníkových publikací

SEZNAM VĚDECKÝCH PRACÍ AKADEMIKA VOJTĚCHA JARNÍKA

Zkratky:

Rozpravy ... Rozpravy II. tř. České akademie věd a umění
Bulletin ... Bulletin international de l'Académie des sciences de Boheme
Věstník ... Věstník Král. čes. spol. nauk

A. Původní vědecké práce

Práce vyšlé dvojmo (např. originál v Rozpravách a výtah v jiném jazyku v Bulletinu) jsou uvedeny pod týmž číslem jako a), b) apod.

[1] O kořenech funkcí Besselových, Rozpravy *29* (1920), č. 28, 6 stran.
[2] O funkci Bolzanově, Časopis pěst. mat. *51* (1922), 248—264.
[3] Poznámka k methodě postupných approximací, Časopis pěst. mat. *52* (1922), 51—55.
[4] O číslech derivovaných funkcí jedné reálné proměnné, Časopis pěst. mat. *53* (1923), 98—101.
[5] a) O derivaci funkcí jedné proměnné, Rozpravy *32* (1923), č. 5, 8 stran.
b) Sur la dérivée des fonctions d'une variable. Bulletin 1923, 4 strany.
[6] a) O rozšíření definičního oboru funkcí jedné proměnné, při němž zůstává zachována derivabilita funkce, Rozpravy *32* (1923), č. 15, 15 stran.
b) Sur l'extension du domaine de définition des fonctions d'une variable qui laisee intacte la dérivalibilité de la fonction, Bulletin 1923, 5 stran.
[7] a) O mřížových bodech v rovině, Rozpravy *33* (1924), č. 36, 23 strany.
b) Sur les points à coordonnées entières dans le plan, Bulletin 1924, 12 stran.
[8] a) Několik poznámek o mřížových bodech v kruhu, Rozpravy *34* (1925), č. 27, 13 stran.
b) Quelques remarques sur les points à coordonnées entières à l'intérieur d'un cercle, Bulletin 1925, 3 strany.
[9] Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven, Math. Z. *24* (1925), 500—518.
[10] a) O funkcích první třídy Baireovy, Rozpravy *35* (1926), č. 2, 13 stran.
b) Sur les fonctions de la première classe de Baire, Bulletin 1926, 11 stran.

332

[11] Über bedingt konvergente Reihen, Math. Z. *24* (1926), 715—732.
[12] Über die Gitterpunkte auf homothetischen Kurven, Math. Z. *26* (1927), 445—459.
[13] Umordnungen von bedingt konvergenten Reihen, Math. Z. *28* (1928), 360—371.
[14] Über die Umordnung unendlicher Reihen, Věstník 1927, č. 8, 45 stran.
[15] O integrování nekonečných řad, Časopis pěst. mat. *57* (1928), 103—113.
[16] O mřížových bodech ve vícerozměrných koulích, Časopis pěst. mat. *57* (1928), 123—128.
[17] a) O mřížových bodech ve vícerozměrných elipsoidech, Rozpravy *37* (1928), č. 27, 19 stran.
b) Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoïdes à plusieurs dimensions, Bulletin 1928, 10 stran.
[18] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Ann. *100* (1928), 699—721.
[19] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. 2. Abhandlung, Math. Ann. *101* (1929), 136—146.
[20] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Z. *27* (1927), 154—160.
[21] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. 2. Mitteilung, Math. Z. *28* (1928), 311—316.

Poznámka. Práce [18], [19] jsou zcela odlišné od prací 20, 21 přes stejný název. Totéž platí o jiných pracích stejného názvu, pokud jsou uvedeny pod různými pořadovými čísly.

[22] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Tohoku Math. J. *30* (1929), 354—371.
[23] Bestimmung einer absoluten Konstanten aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Annali di matematica pura ed applicata, ser. 4, sv. 6 (1928—29), 7 stran. Společně s *K. Grandjotem, E. Landauem* a *J. E. Littlewoodem.*
[24] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, Math. Z. *30* (1929), 768—786.
[25] Über das Riemannsche Integral, Věstník 1929, č. 1, 14 stran.
[26] Zur metrischen Tehorie der diophantischen Approximationen, Prace matematyczno-fizyczne *36* (1928—29), 16 stran.
[27] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Z. *32* (1930), 152—160. Společně s *A. Walfiiszem.*
[28] a) Několik poznámek o Hausdorffově míře. Rozpravy *40* (1930), č. 9, 8 stran.
b) Quelques remarques sur la mesure de M. Hausdorff, Bulletin 1930, 6 stran.
[29] O jistém problému minimálním. Práce moravské přírodovědecké společnosti, sv. 6, spis 4, 1930, 57—63.
[30] Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass. Math. Sb. 36 (1929), 371—382.
[31] Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions, Věstník 1930, č. 6, 11 stran.
[32] Sur une fonction arithmétique. Věstník 1930, č. 7, 13 stran.
[33] Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, Math. Z. *33* (1931), 62—84.
[34] Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. 2. Abhandlung, Math. Z. *33* (1931), 85—97.
[35] Über die simultanen diophantischen Approximationen, Math. Z. *33* (1931), 505—543.
[36] Ein Existenzsatz aus der Theorie der diophantischen Approximationen, Prace matematyczno-fizyczne *39* (1932), 135—144.
[37] Zur Theorie der diophantischen Approximationen, Monatsh. Math. *39* (1932), 403—438.
[38] Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, Věstník 1931, č. 20, 17 stran.
[39] Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen, Fund. Math. *21* (1933), 48—58.
[40] Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, 3. Abhandlung, Math. Z. *36* (1933), 581—617.
[41] Über die Menge der Punkte, in welchen die Ableitung unendlich ist, Tohoku Math. J. *37* (1933), 248—253.
[42] O jedné třídě funkcí spojitých, Časopis pěst. mat. *63* (1934), 135—146.
[43] O minimálních grafech, obsahujících *n* daných bodů, Časopis *63* (1934), 223—235. Spolu s *M. Kösslerem.*

[44] Sur la dérivabilité des fonctions continues, Spisy přírodov. fakulty univ. Karlovy, č. 129 (1934), 7 stran.
[45] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden: eine Anwendung des Hausdorfschen Massbegriffes, Math. Z. *38* (1934), 217—256.
[46] Sur les nombres dérivés approximatifs, Fund. Math. *22* (1934), 4—16.
[47] Über die stetigen Abbildungen der Strecke, Monatsh. Math. *41* (1934), 408—423.
[48] Sur la dérivée approximative unilatérale, Věstník 1934, č. 9, 10 stran.
[49] Untersuchungen über einen van der Corputschen Satz, Math. Z. *39* (1935), 745—767. Společně s *E. Landauem*.
[50] Sur l'approximation des fonctions contiunes par les superpositions de deux fonctions, Fund. Math. *24* (1935), 206—208. Společně s *V. Knichalem*.
[51] Sur les superpositions des fonctions continues non décroissantes, Fund. Math. *25* (1935), 190—197. Společně s *V. Knichalem*.
[52] Remarque sur les nombres dérivés, Fund. Math. *23* (1934), 1—8.
[53] a) O simultánních diofantických aproximacích, Rozpravy *45* (1935), č. 19, 16 stran.
b) Sur les approximations diophantiques simultannées, Bulletin 1935, 8 stran.
[54] Über einen Satz von A. Khintchine, Prace matematyczno-fizyczne *43* (1935), 1—16.
[55] Sur une propriété des fonctions continues, Časopis pěst. mat. *65* (1936), 53—63.
[56] Über einen Satz von A. Khintchine. 2. Mitteilung, Acta Arith. *2* (1936), 1—22.
[57] Sur les fonctions de deux variables réelles, Fund. Math. *27* (1936), 147—150.
[58] Über die angenährte Lösung der Gleichung $x_1\Theta_1 + \dots + x_n\Theta_n + x_0 = 0$ in ganzen Zahlen, Časopis pěst. mat. *66* (1937), 192—205.
[59] Eine Bemerkung über lineare Kongruenzen, Acta Arith. *2* (1937), 214—220. Společně s *P. Erdösem*.
[60] Neuer Beweis eines Khintchinechen Satzes, Časopis pěst. mat. *67* (1938), 109—113.
[61] Sur un problème de M. Čech, Věstník 1938, č. 6, 7 stran.
[62] Zum Khintchineschen „Übertragungssatz". Труды тбилиского математ. института *3* (1938), 193—216.
[63] Sur les solutions approchées de l'équation $x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0 = 0$ en nombres entiers x_1, x_2, x_0, Věstník 1938, č. 7, 26 stran.
[64] Sur un théorème de M. Mahler, Časopis pěst. mat. *68* (1939), 59—60.
[65] Remarques à l'article précédent de M. Mahler, Časopis pěst. mat. *68* (1939), 103—111.
[66] Über einen *p*-adischen Übertragungssatz, Monatsh. Math. *48* (1939), 277—287.
[67] Eine Bemerkung zur Gitterpunktlehre, Časopis pěst. mat. *69* (1940), 57—60.
[68] Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide $\alpha_1(u_1^2 + \dots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \dots + u_r^2) \leqq x$, Věstník 1940, č. 3, 63 stran.
[69] Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. 5. Abhandlung, Časopis pěst. mat. *69* (1940), 148—174.
[70] Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide $\alpha_1(u_1^2 + \dots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \dots + u_r^2) \leqq x$. Zweite Abhandlung, Časopis pěst. mat. *70* (1940), 1—33.
[71] Věty o střední hodnotě z teorie mřížových bodů. 6. pojednání, Časopis pěst. mat. *70* (1941), 89—103.
[72] Dvě poznámky ke geometrii čísel, Věstník 1941, č. 24, 12 stran.
[73] a) O lineárních nehomogenních diofantických aproximacích, Rozpravy *51* (1941), č. 29, 21 stran.
b) Sur les approximations diophantiques linéaires non homogènes, Bulletin 1946, 16 stran.
[74] a) K hlavní větě geometrie čísel. Rozpravy *53* (1943), č. 43, 15 stran. Společně s *V. Knichalem*.
b) Sur le théoreme de Minkowski dans la géométrie des nombres, Bulletin 1946, 15 stran. s *V. Knichalem*.

[75] Sur les approximations diophantiques des nombres p-adiques, Revista de Ciencias, Lima, *47* (1945), 489—505.
[76] On the main theorem of the Minkowski geometry of numbers, Časopis pěst. mat. *73* (1948), 1—8.
[77] On the successive minima of arbitrary sets, Časopis pěst. mat. *73* (1948), 9—15.
[78] On Estermann's proof of a theorem of Minkowski, Časopis pěst. mat. *73* (1949), 131—140.
[79] O kružnici křivosti, Časopis pěst. mat. *73* (1949), D37—D51.
[80] Sur la symétrie des nombres dérivés approximatifs, Annales de la société polonaise de mathématique, Kraków, *21* (1948), 214—218.
[81] Une remarque sur les approximations diophantiennes linéaires, Acta scientiarum mathematicarum, Szeged, *12* (1950), 82—86.
[82] Sur le produit de composition de deux fonctions continues, Studia Math. *12* (1951), 58—64.
[83] К теории однородных линейных диофантовых приближений, Czechoslovak Math. J. *79* (1954), 330—353.
[84] К метрической теории цепных дробей, Czechoslovak Math. J. *79* (1945), 318—329.
[85] Lineární závislost funkcí jedné proměnné, Časopis pěst. mat. *80* (1955), 32—43.
[86] Eine Bemerkung zum Übertragungssatz, Известия на математическия институт (Bulgarian Ac. Sci) vol. *3*, book 2 (1959), 170—175.
[87] Eine Bemerkung über diophantische Approximationen, Math. Z. *72* (1959), 187—191.
[88] Zur Gitterpunktslehre von mehrdimensionalen Ellipsoiden, Acta Arith. *9* (1964), 321—329.
[89] Bemerkungen zu Landauschen Methoden in der Gitterpunktlehre, Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis. Zur Erinnerung an E. Landau, VEB, Berlin, 1968, 139—156.
[90] Un théoréme d'existence pour les approximations diophantiennes, L'Enseignement mathé matique *XV* (1969), 171—175.

B. Kongresové referáty

[1] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, Sprawozdanie z I. kongresu matematyków krajów slowiańskich, Warszawa 1929, 244—245.
[2] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Verhandlungen des Internat. Mathematikerkongresses, Zürich 1932, sv. II, 24—25.
[3] Zur Theorie der diophantischen Approximationen, Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens, Oslo 1936, sv. II, 11.
[4] Sur quelques points de la théorie géométrique des nombres, Zprávy o 2. sjezdu matematiků zemí slovanských, Praha 1934 (též Časopis pěst. mat. *64* (1934—35), 26—48.
[5] Über lineare diophantische Approximationen, Bericht über die Mathematikertagung in Berlin 14.—18. I. 1953, 189—192.
[6] Approximations diophantiennes linéaires et homogènes, Proceedings of the Int. Congr. Amsterdam, Vol. *I* (1957), 430.

C. Knižní publikace

[1] Úvod do theorie množství, Dodatek do *K. Petra* Integrálního počtu, 2. vyd., JČMF, Praha 1931, 655—725.
[2] O derivovaných číslech funkcí jedné proměnné, Dodatek do knihy *E. Čecha*, Bodové množiny, JČMF, Praha 1936, 245—265.
[3] Úvod do integrálního počtu, JČMF 1938, stran 168.
[4] Úvod do počtu diferenciálního, 1. vyd., JČMF, Knihovna spisů matematických a fyzikálních, sv. 22, 1946, stran 448.
[5] Úvod do počtu integrálního, 1. vyd., JČMF, Knihovna spisů matematických a fyzikálních, sv. 22, 1948, stran 324.

[6] Úvod do počtu diferenciálního, 2. vyd., Přírodovědecké vydavatelství, 1951.
[7] Úvod do počtu diferenciálního, 3. vyd., NČSAV, 1953, stran 449.
[8] Diferenciální počet. Pokračování Úvodu do počtu diferenciálního, I. vyd., NČSAV, 1953, stran 595.
[9] Úvod do počtu integrálního, 2. vyd., NČSAV, 1954, stran 295.
[10] Integrální počet II, 1. vyd., NČSAV, 1955, stran 760.
[11] Diferenciální počet, I, 4. vyd., NČSAV, 1955, stran 451.
[12] Integrální počet I, 3. vyd., NČSAV, 1956, stran 299.
[13] Diferenciální počet II, 2. vyd., NČSAV, 1956, stran 609.
[14] Diferenciální počet I, 5. vyd. 1963, NČSAV, 390 str.
[15] Integrální počet I, 4. vyd., 1963, NČSAV, 243 str.
[16] Differenciální rovnice v reálném oboru. Podle přednášek prof. Jarníka zpracoval V. Petrův. Učební texty vysokých škol, Státní pedag. naklad. 1963, offset, 245 str.
[17] Matematická analysa pro 3 semestr. Učební texty vysokých škol, Státní pedagog. naklad. 1965, rotaprint, 246 p.
[18] Diferenciální rovnice v komplexním oboru, vyjde v r. 1972, ACADEMIA.

D. Studie referativní a kritické

[1] Recense: *G. H. Hardy* and *M. Riesz*, The General Theory of Dirichlet's Series, Časopis pěst. mat. *51* (1922), 339—340.
[2] Felix Klein†, Časopis *55* (1925), 105—108.
[3] Recense: *G. Valiron*, Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable; *P. Lévy*, Analyse fonctionnelle, Časopis pěst. mat. *55* (1926), 191.
[4] Recense: *E. Landau*, Vorlesungen über Zahlentheorie I—III, Časopis pěst. mat. *57* (1927), 62—63.
[5] Mengerova teorie dimensí, Časopis pěst. mat. *58* (1929), 367—374.
[6] Bolzanova „Functionenlehre", Časopis pěst. mat. *60* (1931), 240—262.
[7] Recense: Poznámky k článku prof. Fr. Rádla: Odpověď k recensi prof. Petra, Časopis pěst. mat. *61* (1932), 211—223.
[8] Recense: Ještě k „Učebnici" prof. Fr. Rádla, Časopis pěst. mat. *62* (1932), 68—74.
[9] Recense: *W. Sierpiński*, Wstęp do teorji funkcji zmiennej rzeczywistej, Časopis pěst. mat. *63* (1933), 53.
[10] Nový matematický časopis (Compositio mathematica), Časopis pěst. mat. *63* (1934), 312—313.
[11] Recense: Tři knihy o funkcích skoroperiodických. *A. S. Besicovitch*, Almost periodic functions, *H. Bohr*, Fastperiodische Funktionen, *J. Favard*, Leçons sur les fonctions presque-périodiques, Časopis pěst. mat. *64* (1935), D 89—91.
[12] Recense: *E. Landau*, Grundlagen der Analysis; *E. Landau*, Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung, Časopis pěst. mat. *64* (1935), D 91—82.
[13] Nový matematický časopis (Acta arithmetica), Časopis pěst. mat. *64* (1935), D 122—123.
[14] Recense: *A. Zygmund*, Trigonometrical series; *S. Kaczmarz* a *H. Steinhaus*, Theorie der Orthogonalreihen, Časopis pěst. mat. *65* (1936), D 117—122.
[15] Recense: *E. C. Titchmarsch*, The Zeta-Funktion of Rieman; *A. E. Ingham*, The Distribution of Prime Numbers, Časopis pěst. mat. *67* (1937), D 54—56.
[16] Edmund Landau†, Časopis pěst. mat. *67* (1938), D 215—216.
[17] Recense: *E. Landau*, Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie; *J. M. Vinogradov*, Novyj metod v analitičeskoj teorii čísel, Časopis pěst. mat. *67* (1938), D 303—306.
[18] Recense: *S. Saks*, Theory of the Integral, Časopis pěst. mat. *68* (1939), D 111—113.
[19] Návod ke studiu analysy pro začátečníky, Časopis pěst. mat. *70* (1941), D 109—116.

[20] Recense: *O. Haupt, G. Aumann*, Differential- und Integralrechnung, Časopis pěst. mat. *70* (1941), D 224—227.
[21] Recense: *A. J. Chinčin*, Tři perly theorie čísel, Časopis pěst. mat. *74* (1949), D 87—88.
[22] Recense: *I. M. Vinogradov*, Úvod do theorie čísel, Časopis pěst. mat. *74* (1949), D 88—89.
[23] Nový důkaz věty o rozdělení prvočísel, Časopis pěst. mat. *74* (1949), D 51—54.
[24] Recense: *C. L. Siegel*, Transcendental Numbers, Časopis pěst. mat. *75* (1950), D 436—440.
[25] Recense: Tři sovětské knihy o analytické theorii čísel, Časopis pěst. mat. *76* (1951), 35—65.
[26] Před ustavením Československé akademie věd, Časopis pěst. mat. *77* (1952), 205—207.
[27] Před ustavením Československé akademie věd, Časopis Ústředního ústavu astronomického *2* (1952), 1.
[28] Recense: *A. Apfelbeck:* Příspěvek k Chinčinovu principu přenosu, Časopis pěst. mat. *77* (1952), 93.
[29] Recense: *J. Kurzweil*, Příspěvek k metrické theorii diofantických aproximací, Časopis pěst. mat. *77* (1952), 94.
[30] Recense: *Z. Zahorski*, O křivkách, jejichž tečna nabývá na každém oblouku všech směrů, Časopis pěst. mat. *77* (1952), 94—95.
[31] Recense: *A. J. Chinčin*, Řetězové zlomky, Časopis pěst. mat. *78* (1953), 113—116.
[32] Vědecké práce M. Kösslera, Časopis pěst. mat. *80* (1955), 106—115.
[33] a) Deset let matematiky v osvobozeném Československu, Časopis pěst. mat. *80* (1955), 261—273.
b) Десять лет математики в освобожденной Чехословакии, Czechoslovak Math. J. *80* (1955), 291—307.
[34] Bernard Bolzano a základy matematické analysy, Sborník „Zdeňku Nejedlému Československá akademie věd", 450—458.
[35] Něco o problémech a methodách moderní matematiky, Publikace „XX. století a co dalo lidstvu", III. svazek, 12—46.
[36] Recense: *J. W. S. Cassels*, An Introduction to Diophantine Approximations, Časopis pěst. mat. *84* (1959), 212—216.
[37] Recense: *A. Walfisz*, Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, Časopis pěst. mat. *85* (1960), 109—112.
[38] Recense: *K. Prachar*, Primzahlverteilung; *W. Specht*, Elementare Beweise der Primzahlsätze, Časopis pěst. mat. *85* (1960), 364—392.
[39] Bernard Bolzano (5. 10. 1781—18. 12. 1848) Czechoslovak Math. J. *86* (1961), 485—489, Časopis pěst. mat. *87* (1962), 107—111.
[40] Recense: *Carl Ludwig Siegel*, Gesammelte Abhandlungen I—III, Časopis pěst. mat. *92* (1967), 481—485.
[41] Poznámky k otázkám vysokoškolské výuky, Pokroky mat. fyz. astronomie *XVI* (1971), 5—9.

Příloha II – Jarníkova definice Riemannova integrálu

§ 2. Součtová definice určitého integrálu. Budiž dán interval $\langle a, b\rangle$ a budiž dána funkce $f(x)$ omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Je-li dáno celé kladné číslo n a je-li dáno $n+1$ bodů[5]) $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, jež splňují vztahy

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,, \tag{3}$$

říkáme, že tyto body definují určité ***rozdělení*** intervalu $\langle a, b\rangle$. Body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ budeme nazývat ***dělicími body*** tohoto rozdělení; tyto body dělí interval $\langle a, b\rangle$ na n částečných intervalů $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$.[6])

---

[4]) Zdůrazňuji, že tento paragraf měl pouze informativní charakter; chtěl jsem zde čtenáři pouze ukázat, že otázka, jíž bude věnována tato kapitola, není nijak uměle sestrojena, nýbrž že jsme k ní vedeni zcela přirozeným způsobem. Pro logickou výstavbu teorie, jež bude podána v dalších paragrafech, je ovšem tento úvodní paragraf vlastně zbytečný. Proto přirozeně tento paragraf neobsahuje žádných pozitivních výsledků a také při jeho stylizaci jsem nekladl velkou váhu na obvyklé požadavky matematické přesnosti.

[5]) Míním ovšem body na ose číselné, čili reálná čísla.

[6]) Nejjednodušší „rozdělení" intervalu $\langle a, b\rangle$ dostaneme, vezmeme-li $n = 1$; potom jest $x_0 = a$, $x_1 = b$; při tomto „rozdělení" máme ovšem jediný částečný interval $\langle x_0, x_1\rangle = \langle a, b\rangle$.

Toto rozdělení, definované dělicími body $x_0, x_1, \ldots, x_n$, označme písmenem D.[7]) Označme znakem Δx_i délku i-tého částečného intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, tj. položme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Označme dále znakem M_i supremum a znakem m_i infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$.[8]) Danému rozdělení D přiřadíme nyní dvě čísla: číslo

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i \, ,$$

jež budeme nazývat *horním součtem příslušným k rozdělení* D, a číslo

$$s(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i \, ,$$

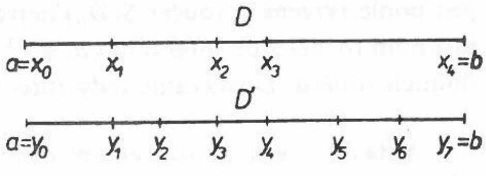
jež budeme nazývat *dolním součtem příslušným k rozdělení* D. Tyto horní a dolní součty budeme nyní podrobně vyšetřovat.[9])

Pro každé i platí ovšem nerovnost $m_i \leqq M_i$, tedy $m_i \, \Delta x_i \leqq M_i \, \Delta x_i$, a sečteme-li od $i = 1$ do $i = n$, dostaneme nerovnost $s(D) \leqq S(D)$, čili slovy:

Tvrzení A. *Dolní součet, příslušný k rozdělení D, je nejvýše roven hornímu součtu příslušnému k témuž rozdělení.*

V dalším budeme však nuceni srovnávat též součty příslušné ke dvěma *různým* rozdělením intervalu $\langle a, b \rangle$.

Budtež D, D' dvě rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$; budeme říkat, že rozdělení D' je *zjemněním* rozdělení D, jestliže každý dělicí bod rozdělení D je také dělicím bodem rozdělení D'. (Viz obr. 2, kde rozdělení D' dané dělicími body $y_0, y_1, \ldots, y_7$ je zjemněním rozdělení D daného dělicími body $x_0, x_1, \ldots, x_4$; zde jest $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_3$, $x_3 = y_4$, $x_4 = y_7$.) Budiž nyní rozdělení D', dané dělicími body $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = b$, vskutku zjemněním rozdělení D, daného dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Označme znakem M_i supremum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a znakem M'_k supremum této funkce v intervalu $\langle y_{k-1}, y_k \rangle$; položme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$; potom jest



Obr. 2.

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i \, , \qquad S(D') = \sum_{k=1}^{m} M'_k \, \Delta y_k \, .$$

[7]) Takových rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$ je ovšem nekonečně mnoho: především můžeme zvolit libovolně celé kladné číslo n a za druhé, když číslo n jest již zvoleno, můžeme ještě zvolit dělicí body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ libovolně, až na to, že musí vyhovovat podmínce (3). Různá rozdělení budeme rozlišovat čárkami, indexy apod.

[8]) Funkce $f(x)$ jest v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ omezená podle kap. I, § 2, poznámka 6.

[9]) Je vidět, že postupujeme přesně podle programu stanoveného v § 1.

Srovnejme tato dvě čísla. Vezměme určitý interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$; body x_{i-1}, x_i jsou ovšem také dělicími body rozdělení D'; budiž třeba $x_{i-1} = y_r$, $x_i = y_s$ (jest ovšem $r < s$). Částečný interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ přispívá k součtu $S(D)$ příspěvkem[10]) $M_i \Delta x_i$, kdežto k součtu $S(D')$ přispívá příspěvkem $\sum_{k=r+1}^{s} M'_k \Delta y_k$. Je-li $r + 1 \leqq k \leqq s$, jest interval $\langle y_{k-1}, y_k \rangle$ částečným intervalem intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a tedy podle pozn. 6 v kap. I, § 2 jest $M'_k \leqq M_i$. Tedy jest (viz poznámku[10]))

$$\sum_{k=r+1}^{s} M'_k \Delta y_k \leqq M_i \sum_{k=r+1}^{s} \Delta y_k = M_i(y_s - y_r) = M_i(x_i - x_{i-1}) = M_i \Delta x_i .$$

Je tedy příspěvek, kterým interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ přispívá k součtu $S(D')$, nejvýše roven příspěvku, kterým týž interval přispívá k součtu $S(D)$. Ježto to platí pro každý částečný interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, jest $S(D') \leqq S(D)$; obdobně se dokáže nerovnost $s(D') \geqq s(D)$. Dokázali jsme tedy toto

Tvrzení B. *Je-li rozdělení D' zjemněním rozdělení D, jest $S(D') \leqq S(D)$, $s(D') \geqq s(D)$.*

Z tvrzení B učiníme ihned jeden důsledek: Budiž D_0 ono rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$, jež je definováno dělicími body $x_0 = a$, $x_1 = b$. Zřejmě jest $S(D_0) = M(x_1 - x_0) = M(b - a)$, $s(D_0) = m(b - a)$, kde M značí supremum, m infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$. Ježto každé rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$ je zřejmě zjemněním rozdělení D_0 (neboť body a, b jsou dělicími body každého rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$), jest podle tvrzení B součet $S(D_0)$ největší ze všech horních součtů příslušných všem možným rozdělením intervalu $\langle a, b \rangle$;[11]) obdobně součet $s(D_0)$ jest nejmenší ze všech dolních součtů. Dostáváme tedy tuto větu:

Věta 12. *Je-li M supremum a m infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$, jest největší hodnota horního součtu rovna číslu $M(b - a)$, nejmenší hodnota dolního*

---

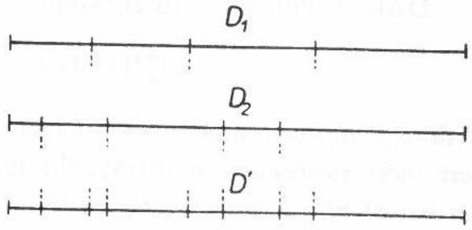
[10]) Co tím rozumíme, je snad jasno. Budeme říkat, že interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ přispívá k součtu $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ příspěvkem $M_i \Delta x_i$; obecněji, je-li $p < q$, budeme říkat, že interval $\langle x_p, x_q \rangle$ přispívá k součtu $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ příspěvkem $\sum_{i=p+1}^{q} M_i \Delta x_i = M_{p+1}(x_{p+1} - x_p) + M_{p+2}(x_{p+2} - x_{p+1}) + \ldots + M_q(x_q - x_{q-1})$. Učiňme ještě jednu poznámku, které často použijeme. Je-li $p < q$, je $\sum_{i=p+1}^{q} \Delta x_i = (x_{p+1} - x_p) + (x_{p+2} - x_{p+1}) + \ldots + (x_q - x_{q-1}) = x_q - x_p$; speciálně tedy $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = x_n - x_0 = b - a$. Geometrický význam těchto rovnic je jasný: délka intervalu $\langle x_p, x_q \rangle$ se rovná součtu délek intervalů $\langle x_p, x_{p+1} \rangle$, $\langle x_{p+1}, x_{p+2} \rangle$, ..., $\langle x_{q-1}, x_q \rangle$.

[11]) To znamená, že žádný z horních součtů není větší než číslo $S(D_0)$.

součtu rovna číslu $m(b-a)$. Je-li tedy D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, platí nerovnosti $m(b-a) \leqq s(D) \leqq S(D) \leqq M(b-a)$.[12])

Buďtež nyní D_1, D_2 dvě zcela libovolná rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme znakem D' rozdělení, jež je zjemněním rozdělení D_1 a rovněž zjemněním rozdělení D_2. (Takové zjemnění D' se dá snadno sestrojit např. tím, že za dělicí body rozdělení D' vezmeme jednak všechny dělicí body rozdělení D_1, jednak všechny dělicí body rozdělení D_2; tak je to provedeno na obr. 3).

Podle tvrzení B je $S(D_1) \geqq S(D')$; podle tvrzení A je $S(D') \geqq s(D')$; podle tvrzení B je $s(D') \geqq s(D_2)$; odtud plyne $S(D_1) \geqq \geqq s(D_2)$. Platí tedy



Obr. 3.

Tvrzení C. *Jsou-li D_1, D_2 dvě libovolná rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$* (totožná nebo navzájem různá), *jest $S(D_1) \geqq s(D_2)$.* (Čili: každý dolní součet je nejvýše roven kterémukoliv hornímu součtu.)

Každému rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ přísluší určité číslo $S(D)$; všechna čísla $S(D)$ příslušná všem možným rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$ tvoří jistou množinu číselnou; označme ji znakem $\mathfrak{M}$. Rovněž tak každému rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ přísluší určité číslo $s(D)$; všechna čísla $s(D)$ příslušná všem možným rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$ tvoří jistou množinu číselnou; označme ji znakem $\mathfrak{m}$.

Čísla množiny $\mathfrak{M}$ (jinými slovy: horní součty $S(D)$) jsou podle věty 12 vesměs nejvýše rovna číslu $M(b-a)$ a nejméně rovna číslu $m(b-a)$; tedy množina $\mathfrak{M}$ je omezená, má tedy podle vět o supremu a infimu (kap. I, § 1) supremum a infimum. Supremum snadno stanovíme: největší horní součet, čili největší číslo množiny $\mathfrak{M}$, jest podle věty 12 číslo $M(b-a)$; podle **DI**, str. 70, v 4. vyd. str. 73 je toto číslo supremem množiny $\mathfrak{M}$. Nás bude však zajímat hlavně *infimum* množiny $\mathfrak{M}$. *Toto infimum množiny* $\mathfrak{M}$ (čili infimum horních součtů) *označíme znakem* $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ a budeme je nazývat *horním integrálem funkce $f(x)$ od a do b.*

Rovněž čísla množiny $\mathfrak{m}$ (jinými slovy: dolní součty $s(D)$) jsou podle věty 12 vesměs nejvýše rovna číslu $M(b-a)$ a nejméně rovna číslu $m(b-a)$; tedy množina $\mathfrak{m}$ je omezená. Nejmenší číslo (a tedy infimum) množiny $\mathfrak{m}$ je podle věty 12 číslo $m(b-a)$. Nás bude však zajímat hlavně *supremum* množiny $\mathfrak{m}$. *Toto supremum množiny* $\mathfrak{m}$ (čili supremum dolních součtů) *označíme znakem* $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ a budeme je nazývat *dolním integrálem funkce $f(x)$ od a do b.*

Funkci $f(x)$ nazýváme v obou případech (při horním i dolním integrálu) funkcí integrovanou nebo integrandem; čísla a, b nazýváme *mezemi* horního (dolního)

[12]) Nerovnost $s(D) \leqq S(D)$ plyne z tvrzení A.

integrálu, a to číslo a nazýváme *dolní mezí*, číslo b *horní mezí*. Písmeno x, které vystupuje ve funkci $f(x)$ a v symbolu dx, nazýváme *integrační proměnnou.*[13])

Věta 13. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Označíme-li písmenem M supremum a písmenem m infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$, jest*

$$m(b - a) \leqq \underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b - a)\,.$$

Důkaz. Položme pro zkrácení

$$\underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = s\,, \quad \overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S\,.$$

Číslo S je *infimem* množiny $\mathfrak{M}$, kdežto číslo $M(b - a)$, jak jsme zjistili před okamžikem, jest *supremem* množiny $\mathfrak{M}$; tedy jest $S \leqq M(b - a)$. Obdobně se dokáže nerovnost $m(b - a) \leqq s$. Zbývá tedy ještě dokázat nerovnost $s \leqq S$. Víme, že $S = \inf \mathfrak{M}$, $s = \sup \mathfrak{m}$. Podle tvrzení C není žádné číslo z $\mathfrak{m}$ větší než žádné číslo z $\mathfrak{M}$ (tj. vezmu-li libovolné číslo z $\mathfrak{m}$ a libovolné číslo z $\mathfrak{M}$, je první číslo nejvýše rovno druhému). Podle pozn. 1 v kap. I, § 1 je tedy vskutku $s \leqq S$.

Uveďme ještě dva jednoduché důsledky věty 13:

Věta 14. *Budiž $a < b$; nerovnosti $A \leqq f(x) \leqq B$ budte splněny pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom jest*

$$A(b - a) \leqq \underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq B(b - a)\,.$$

Důkaz. Budiž M supremum a m infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$; podle poznámky 3 v kap. I, § 2 jest $A \leqq m$, $B \geqq M$ a tedy podle věty 13

$$A(b - a) \leqq m(b - a) \leqq \underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq \overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b - a) \leqq B(b - a)\,.$$

Věta 15. *Budiž $a < b$; nerovnost $|f(x)| \leqq K$ budiž splněna pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$; potom jest*

$$\left|\underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K(b - a)\,, \quad \left|\overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K(b - a)\,.$$

[13]) Integrační proměnná nemusí vždy být označena písmenem x, může být označena třeba písmenem t, u, y apod.; horní (dolní) integrál píšeme pak $\overline{\int}_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ atd. Hodnota horního (a rovněž dolního) integrálu nezávisí na označení integrační proměnné; to znamená: je-li funkce f omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$, jest

$$\overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int}_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \overline{\int}_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \ldots$$

(neboť funkce f nabývá v kterémkoliv bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ stejné hodnoty, ať v ní nezávisle proměnnou značím písmenem x či t). Tedy např.

$$\overline{\int}_2^5 (x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x = \overline{\int}_2^5 (t^2 - t + 2)\,\mathrm{d}t,\ \underline{\int}_0^\pi \sin u\,\mathrm{d}u = \underline{\int}_0^\pi \sin y\,\mathrm{d}y \text{ atd.}$$

Důkaz. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ jest $-K \leqq f(x) \leqq K$; podle věty 14 je tedy

$$-K(b-a) \leqq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq K(b-a) \quad \text{čili} \quad \left|\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K(b-a)\,;$$

obdobně pro horní integrál.

Ve větě 13 jsme zjistili, že vždy platí vztah $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Platí-li v tomto vztahu znamení rovnosti, nazýváme společnou hodnotu horního a dolního integrálu krátce *integrálem* (obšírněji *určitým integrálem*[14])) *funkce $f(x)$ od a do b a označujeme ji znakem* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; ještě obšírněji mluvíme o Riemannově určitém integrálu.[15]) *Říkáme v tomto případě* (tj. tehdy, když se horní integrál rovná dolnímu), *že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje, nebo že funkce $f(x)$ má určitý integrál od a do b nebo také, že funkce $f(x)$ jest integrace schopna v intervalu $\langle a, b\rangle$.*[16]) Tím jsme podali tzv. *Riemannovu* (nebo také Cauchyovu-Riemannovu) *součtovou definici určitého integrálu.* Podle této definice tedy integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (kdež $a < b$) existuje tehdy a jen tehdy, je-li $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$; je-li tato rovnost splněna, jest integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ definován vztahem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\,.^{17})$$

Příklad 1. Budiž $a < b$; budiž fukce $f(x)$ konstantní v intervalu $\langle a, b\rangle$, třeba $f(x) = c$. Potom supremum i infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ je rovno číslu c; podle věty 13 jest tedy

$$c(b-a) \leqq \underline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x \leqq c(b-a)\,.$$

Ježto oba krajní členy jsou si rovny, musí v těchto nerovnostech vesměs platit znamení rovnosti; tedy konstanta c má určitý integrál od a do b a jest

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)\,.^{18})$$

Příklad 2. Definujme funkci $f(x)$ takto: pro racionální x budiž $f(x) = 0$, pro iracionální x budiž $f(x) = 1$. Budiž $\langle a, b\rangle$ libovolný interval. Budiž D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} <$

---

[14]) Název „určitý integrál" volíme proto, abychom tento integrál zřetelněji odlišili od tzv. „integrálu neurčitého", kterým se budeme zabývat v kapitole III.

[15]) Existují totiž ještě jiné definice integrálu. Jednou z nejdůležitějších je definice Lebesgueova, na které budou spočívat úvahy II. svazku tohoto Integrálního počtu. Několik zásadních poznámek k definicím integrálu viz v kap. VIII, § 1.

[16]) Jinak se u určitého integrálu užívá téhož názvosloví jako u horního a dolního integrálu: a je dolní mez, b je horní mez atd.

[17]) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jsme tedy dosud definovali jen pro $a < b$. Později rozšíříme tuto definici i na případy $a = b$, $a > b$.

[18]) Je-li $c = 1$, budeme místo $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x$ psát kratčeji $\int_a^b \mathrm{d}x$, jak je zvykem.

Příloha III – Černého definice Riemannova integrálu

9.1. Nechť $\langle a, b\rangle \subset \mathbf{R}$ je kompaktní interval a nechť funkce f je v něm omezená. Přiřaďme každému dělení

$$D : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b \tag{9.1.1}$$

čísla

$$m_k := \inf f(\langle x_{k-1}, x_k\rangle), \; M_k := \sup f(\langle x_{k-1}, x_k\rangle), \tag{9.1.2}$$

kde $k = 1, \ldots, p$; vzhledem k omezenosti funkce f jsou všechna tato čísla konečná. Má tedy dobrý smysl definovat i čísla

$$s_f(D) := \sum_{k=1}^{p} m_k(x_k - x_{k-1}), \; S_f(D) := \sum_{k=1}^{p} M_k(x_k - x_{k-1}); \tag{9.1.3}$$

nazývají se **dolní** resp. **horní součet** (odpovídající funkci f a dělení D). Je-li zřejmé, o kterou funkci f jde, užíváme i kratších symbolů $s(D), S(D)$.

Protože $m_k \leq M_k$ pro $k = 1, \ldots, p$, je zřejmě

$$s_f(D) \leq S_f(D) \text{ pro každé dělení } D \tag{9.1.4}$$

intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li $\inf f(\langle a, b\rangle) > 0$, mají dolní a horní součty jednoduchý geometrický význam: Jde o součty obsahů obdélníků, jimiž je "zevnitř" resp. "zvenku" aproximována množina $M(f; a, b) = \{(x, y);\; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ "pod grafem" funkce f. (Viz OBR. 35.)

Je-li D^* zjemněním D, víme, že existuje (konečná) posloupnost dělení $D_0 = D, D_1, \ldots, D_m = D^*$ ($m \geq 0$) tak, že D_j ($1 \leq j \leq m$) vznikne z D_{j-1} přidáním právě jednoho dělicího bodu. Chceme-li tedy dokázat, že platí implikace

$$D^* \text{ je zjemnění } D \Rightarrow s_f(D^*) \geq s_f(D), \; S_f(D^*) \leq S_f(D), \tag{9.1.5}$$

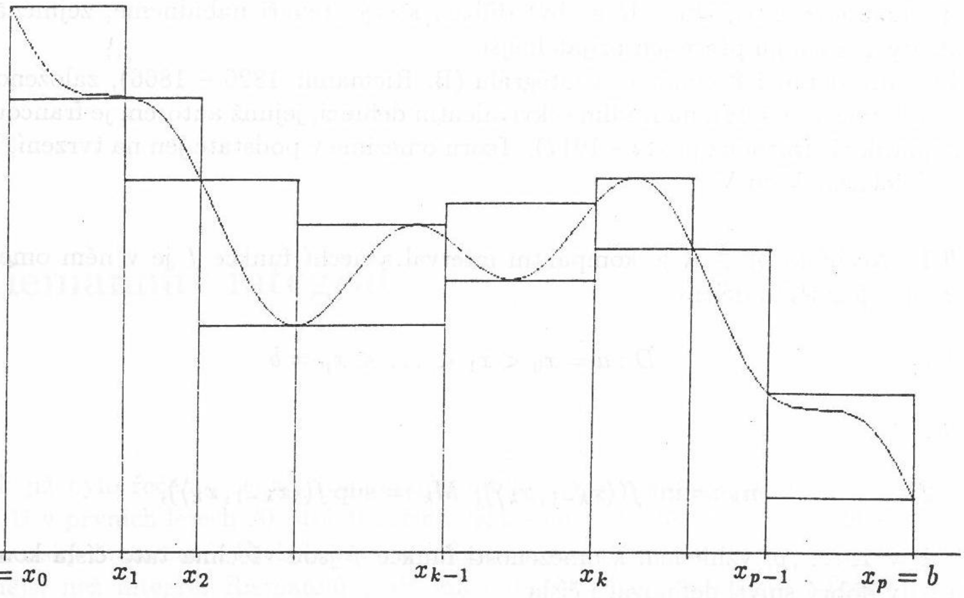
stačí to provést pro případ, že D^* vznikne z D přidáním jediného bodu, např. bodu $\xi \in (x_{k-1}, x_k)$ (kde k je vhodný index).

Protože však zřejmě

$$m_k^* := \inf f(\langle x_{k-1}, \xi\rangle) \geq m_k, \; m_k^{**} := \inf f(\langle \xi, x_k\rangle) \geq m_k, \tag{9.1.6.1}$$

$$M_k^* := \sup f(\langle x_{k-1}, \xi\rangle) \leq M_k, \; M_k^{**} := \sup f(\langle x_{k-1}, x_k\rangle) \leq M_k, \tag{9.1.6.2}$$

161



OBR. 35. Geometrický význam dolních a horních součtů

nahradí se (při přechodu od D k D^*) v součtu $s_f(D)$ resp. $S_f(D)$ sčítanec $m_k(x_k - x_{k-1})$ resp. $M_k(x_k - x_{k-1})$ součtem

$$m_k^*(\xi - x_{k-1}) + m_k^{**}(x_k - \xi) \geq m_k(x_k - x_{k-1})$$

resp. součtem

$$M_k^*(\xi - x_{k-1}) + M_k^{**}(x_k - \xi) \leq M_k(x_k - x_{k-1});$$

ostatní sčítanci zůstanou beze změny. Z toho ihned plynou nerovnosti uvedené v (9.1.5).

Každá dvě dělení D', D'' intervalu $\langle a, b \rangle$ mají společná zjemnění; jedno z nich – označme je D^* – se skládá právě ze všech dělicích bodů obou dělení D', D''. Užijeme-li poznatků obsažených v tvrzeních (9.1.4) a (9.1.5), dostaneme nerovnosti $s_f(D') \leq s_f(D^*) \leq S_f(D^*) \leq S_f(D'')$. Tím je dokázáno, že

(9.1.7) pro každá dvě dělení D', D'' intervalu $\langle a, b \rangle$ je $s_f(D') \leq S_f(D'')$.

Každý horní součet je tedy horním odhadem množiny všech dolních součtů a každý dolní součet je dolním odhadem množiny všech horních součtů. Podle C.2.2.7 je v důsledku toho číslo

(9.1.8.1) $$\underline{\int_a^b} f := \sup\{s_f(D);\ D \text{ je dělením } \langle a, b \rangle\}$$

nejvýše rovno číslu

(9.1.8.2) $$\overline{\int_a^b} f := \inf\{S_f(D);\ D \text{ je dělením } \langle a, b \rangle\},$$

tj.

$$\int_{\underline{a}}^{b} f \leq \int_{a}^{\overline{b}} f \tag{9.1.9}$$

(pro každou funkci f omezenou v $\langle a, b\rangle$). Číslo (9.1.8.1) resp. (9.1.8.2) se nazývá **dolní** resp. **horní** (Riemannův) **integrál** funkce f od a do b. Platí-li v (9.1.9) rovnost, značíme společnou hodnotu dolního a horního integrálu

$$\int_a^b f, \quad \text{podrobněji (R)} \int_a^b f, \tag{9.1.10}$$

a nazýváme ji **Riemannův integrál** funkce f od a do b. Užívá se (podobně jako v případě Newtonova integrálu) i označení $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b f(t)\,dt$, apod. ; analogicky v případě dolního a horního integrálu.

Umluvme se, že v této kapitole bude symbol $\int_a^b f$ označovat Riemannův integrál; budeme-li pracovat i s Newtonovým integrálem, budeme psát $(\mathrm{R})\int_a^b f$ resp. $(\mathrm{N})\int_a^b f$.

Poznámka 9.1.1. Zatímco dolní a horní integrál existuje pro *každou* funkci f omezenou v $\langle a, b\rangle$, její Riemannův integrál existovat *nemusí*. Ukazuje to např. tento

Příklad 9.1.1. Je-li f Dirichletova funkce (tedy $f(x) = 1$ pro každé $x \in \mathbf{Q}$ a $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$) a je-li $\langle a, b\rangle$ libovolný interval, je zřejmě $m_k = 0$, $M_k = 1$ pro $k = 1, \dots, p$ a každé dělení (9.1.1); v každém intervalu totiž leží jak racionální, tak iracionální čísla.

V důsledku toho je $s_f(D) = 0$, $S_f(D) = b - a$ pro *každé* dělení D, tedy i

$$\int_{\underline{a}}^{b} f = 0, \quad \int_{a}^{\overline{b}} f = b - a \neq 0.$$

Dirichletova funkce f tedy nemá Riemannův integrál od a do b (pro žádná dvě čísla $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}, a < b$).

Příklad 9.1.2. Je-li funkce f konstantní v $\langle a, b\rangle$, $f \equiv k \in \mathbf{R}$, je zřejmě $s_f(D) = S_f(D) = k(b-a)$ pro každé dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$. V důsledku toho je číslu $k(b-a)$ roven jak dolní, tak i horní integrál z f od a do b, a příslušný Riemannův integrál existuje. Tedy:

$$\text{Pro každé } k \in \mathbf{R} \text{ je } \int_{\underline{a}}^{b} k = \int_{a}^{\overline{b}} k = \int_a^b k = k(b-a). \quad \square \tag{9.1.11}$$

Je-li $Y \subset \mathbf{R}$, je, jak víme (sr. s Po.2.2.3),

$$\inf\{-y; y \in Y\} = -\sup Y, \quad \sup\{-y; y \in Y\} = -\inf Y; \tag{9.1.12}$$

je-li $k \in \mathbf{R}_+$, je, jak snadno nahlédneme,

$$\inf\{ky; y \in Y\} = k \cdot \inf Y, \quad \sup\{ky; y \in Y\} = k \cdot \sup Y. \tag{9.1.13}$$