Univerzita Palackého v Olomouci

Přírodovědecká fakulta

Katedra algebry a geometrie

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MATEMATICKÉ SOUTĚŽE PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL

Marie Huvarová

chemie – matematika

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.

OLOMOUC 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a pouze s použitím literatury a zdrojů uvedených v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla (diplomová práce) ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Olomouci dne 25. května 2012 Vlastnoruční podpis..............................

Poděkování

Úvodem bych ráda poděkovala RNDr. Jaroslavu Švrčkovi, CSc., za odborné vedení, rady a věcné připomínky, které přispěly ke zkvalitnění této diplomové práce.

Dále bych ráda poděkovala své rodině za velkou podporu a trpělivost po dobu mého studia.

OBSAH

1. Úvod

Cílem diplomové práce bylo podání uceleného přehledu o historii a současném stavu matematických soutěží pro žáky středních škol v České republice (Československu) a jejich porovnání s podobnými soutěžemi v evropských zemích. Součástí práce bylo rovněž zmapování mezinárodních matematických soutěží pro středoškoláky v Evropě. Hlavním důvodem, který vedl k zadání a zpracování tohoto tématu, byla především skutečnost, že dosud nebyl podobný souhrn informací přehledně publikován.

První část diplomové práce se zabývá významem a historickým vývojem matematických soutěží. Pomocí nejdůležitějších historických mezníků je zmapován vývoj matematických soutěží až do současnosti. Další část diplomové práce je zaměřena na současný stav matematických soutěží pro žáky středních škol v České republice. Obsahuje také podrobně zpracovanou historii československých (později českých) matematických soutěží. Kromě národních soutěží (Matematická olympiáda, či Celostátní matematická soutěž žáků SOŠ, ISŠ, SOU, ... viz např. [65]) se mohou čeští středoškoláci zapojit také do korespondenčních seminářů, či menších matematických soutěží – např. matematická soutěž Náboj, viz např. [64] – na které čeští žáci soutěží spolu se svými slovenskými vrstevníky. Navíc se žáci středních škol České republiky každoročně účastní některých evropských regionálních matematických soutěží, a také mezinárodních matematických soutěží s celosvětovou působností. Tyto a některé další z významných matematických soutěží pro žáky středních škol v Evropě jsou popsány v závěrečných kapitolách diplomové práce. Jednotlivé matematické soutěže, evropské regionální či mezinárodní s celosvětovou působností, jsou zde zpracovány a analyzovány chronologicky, podle jejich vzniku. Výše zmíněná část diplomové práce je doplněna stručným popisem některých mezinárodních mimoevropských matematických soutěží.

V závěru diplomové práce (6. kapitola) lze nalézt přeložená aktuální zadání soutěžních úloh z několika vybraných matematických soutěží.

2. Historie, současnost a význam matematických soutěží

Opomeneme-li dalekou historii vzniku a rozvoje matematiky, s prvními matematickými soutěžemi – hrami jako takovými, se setkáváme již ve starověkém Egyptě. V dávných dobách byly tyto matematické soutěže pořádány spíše pro zábavu, později i kvůli společenské prestiži, viz např. [23]. V současnosti zastávají matematické soutěže důležitou roli v rozvoji matematického talentu u žáků středních, ale i základních škol, viz např. [15]. A právě s tímto záměrem, umožnit talentovaným žákům rozvíjet a posilovat svůj talent, původně vznikly nejstarší matematické soutěže dnešního typu. Silné zázemí mají matematické soutěže v evropské části Ruska, nejstarší zmínky však musíme hledat jinde. Podívejme se nyní na některé významné mezníky v historii matematických soutěží na evropském kontinentu.

Historicky první zmínka o aktivitách spojených s prací s matematickými talenty pochází již z roku 1885, kdy se v Bukurešti (Rumunsko) konala nejstarší matematická soutěž pro žáky nižších ročníků gymnázií. Tehdy se jí zúčastnilo 70 soutěžících, kdy 11 nejlepších bylo oceněno. V roce 1894 se v Maďarsku poprvé uskutečnila matematická soutěž „moderního" typu pro žáky gymnázií (nové a nestandardní úlohy vyžadovaly od žáků (soutěžících) vysokou kreativitu) – soutěž Loránda Eötvöse. Soutěžícími byli převážně žáci závěrečných ročníků gymnázií, kteří ve vymezeném čase 4 hodin přistupovali k řešení tří soutěžních úloh (podobně jako v dnešní Matematické olympiádě – dále jen MO), viz [15].

Dalším směrem, kterým se matematické soutěže ubíraly, byly čtenářské soutěže uveřejňované v některých časopisech. Za nejstarší z nich je považována soutěžní rubrika v rumunském časopise „Gazeta matematicặ" (vydáván od roku 1895), viz např. [1], která funguje již od roku 1902, a která inspirovala i naše matematiky k vytvoření podobné čtenářské soutěže v časopise Rozhledy matematicko-přírodovědecké (vznik soutěže v roce 1922).

Dalším významným bodem v historii práce s matematickými talenty byla Leningradská městská matematická olympiáda (Leningrad - dnes Petrohrad, Санкт – Петербург) pořádaná v roce 1934. O rok později (1935) proběhl také 1. ročník Moskevské matematické olympiády. Soutěže byly zaměřeny hlavně na vyhledávání a rozvoj matematických talentů středních škol obou velkých ruských měst. Byly řízeny centrálně a svou podobu i strukturu si zachovaly dodnes, viz např. [54], nebo [55].

Vlivem historických událostí v Evropě (2. světová válka a poválečný stav) se MO a jí podobné matematické soutěže postupně rozšiřovaly z Ruska do poválečných evropských zemí, tj. do zemí tehdejšího lidově-demokratického bloku střední a východní Evropy – do Polska, Československa, Jugoslávie, Bulharska, Rumunska, Německé demokratické republiky (NDR) a do Maďarska, viz např. [7]. Počátkem 50. let se v těchto zemích objevuje MO jako zcela nová forma práce s matematickými talenty.

Významným historickým mezníkem ve vývoji matematických soutěží, zejména z hlediska mezinárodního, byl bezpochyby rok 1959, kdy se uskutečnila historicky první Mezinárodní matematická olympiáda (dále jen MMO), viz např. [51]. MMO byla první mezinárodní soutěží pro talentované středoškoláky všech zemí. V současnosti patří MMO mezi největší mezinárodní matematické soutěže a ročně se jí zúčastní zhruba 100 zemí světa a více než 500 soutěžících, viz např. [15], popř. [51].

V 70. letech minulého století vznikly další matematické soutěže na úrovni jednotlivých států, ale i na úrovni mezinárodní. Význačným trendem se v posledních 20 – 30 letech stal také vznik regionálních matematických soutěží, kterým je věnována kapitola 4.1.

Mezi aktuální evropské regionální matematické soutěže patří například tyto:

Balkánská MO
Baltic Way
MEMO – Středoevropská MO
BxMO – MO pro země Beneluxu
EGMO – Evropská dívčí MO

Pro dokreslení situace uvádíme také některé z nejznámějších mimoevropských regionálních matematických soutěží:

Iberoamerická MO
PAMO – Panafrická matematická olympiáda
APMO – Asijsko – pacifická MO
SEAMC – matematická soutěž jihovýchodní Asie

Jak již bylo výše uvedeno – tyto a mnohé další matematické soutěže jsou jednou z možných forem práce s matematicky talentovanými žáky. Vznik nových matematických soutěží je pro práci s nadanými žáky velmi důležitý, více talentovaných žáků se tak může zúčastnit matematických soutěží, a tím rozvíjet své nadání. Mezi obecné cíle matematických soutěží patří především tyto: využití lidského potenciálu, rozvoj a podpora talentu matematicky nadaných žáků, a v neposlední řadě udržení jejich zájmu o matematiku jako vědní obor.

Struktura a pravidla jednotlivých matematických soutěží jsou specifická, nicméně se u mnoha matematických soutěží lze setkat s obdobou organizace, struktury a pravidel MMO (dle typu MMO), viz např. [51]. Každá ze soutěží prošla od svých počátků jistým vývojem a příslušnými změnami. Nejvíce se však v průběhu let změnila struktura a obtížnost soutěžních úloh. V současnosti na matematických soutěžích figurují matematické úlohy vyžadující precizní znalost specifických metod a postupů. Jsou zde zastoupeny úlohy z planimetrie či úlohy, při nichž musí soutěžící zapojit své abstraktní myšlení, či využít tvůrčího myšlení a kreativity. Matematicky nadaní žáci (soutěžící) jsou k řešení nestandardních úloh trénováni na speciálních přípravných seminářích, nebo také ve školách svými učiteli a školiteli.

Převážná většina matematických soutěží je určena jednotlivcům, je však možné se účastnit i soutěží kombinovaných (jednotlivci a týmy), ale existují i matematické soutěže určené výhradně soutěžním týmům. K účasti v matematické soutěži jsou kromě reprezentačního družstva přizváni vždy také vedoucí týmu (Leader) a pedagogický vedoucí (Deputy Leader). Podmínky účasti v současných matematických soutěžích, pravidla a specifika jednotlivých soutěží jsou podrobně popsána ve 4. kapitole diplomové práce.

V současnosti existuje v evropských zemích velké množství matematických soutěží určených žákům středních škol. Každá z evropských zemí má svou vlastní národní MO. Kromě MO jsou v některých zemích v rámci státu pořádány další zajímavé matematické soutěže, přičemž mnohé z nich se těší velké žákovské oblibě. Kompletní výčet národních soutěží jednotlivých evropských zemí však není cílem této diplomové práce, a tudíž si neklademe nárok na úplnost přehledu. Pro ilustraci je v následujícím odstavci popsáno několik zajímavých (v mnoha případech i populárních) národních matematických soutěží, které jsou našim učitelům a žákům známy jen okrajově, některé možná vůbec. Kritérium výběru těchto soutěží nebylo nijak specifické. V jednotlivých vybraných soutěžích je poukázáno na možné rozdíly v národních matematických soutěžích, ať už z hlediska jazykového či územního. Společným kritériem pro všechny vybrané matematické soutěže byla skutečnost, že se tyto matematické soutěže (zmínky o nich, odkazy na domácí internetové stránky jednotlivých matematických soutěží) objevovaly na různých matematicky orientovaných internetových stránkách častěji, než ostatní.

Populární národní matematickou soutěží je například **Abelova matematická soutěž**, která je vlastně národní matematickou olympiádou v Norsku (The Niels Henrik Abels mathematical competition nebo Niels Henrik Abels matematikkonkurranse). Tato matematická soutěž se skládá ze dvou výběrových kol a finále. První kolo obsahuje 20 soutěžních testových otázek s výběrem z 5 možných odpovědí, přičemž časový limit prvního kola je nastaven na 100 minut. Zajímavý je také způsob bodování soutěžních úloh – za označení správné odpovědi obdrží soutěžící 5 bodů, odevzdání prázdné odpovědi je hodnoceno 1 bodem a za označení špatné odpovědi se body nepřidělují. Maximálně lze tedy dosáhnout 100 bodů. Ti nejlepší dále postupují do 2. kola, které je omezeno stejným časovým limitem, jako kolo první, avšak zde soutěžící přistupují k řešení 10-ti soutěžních úloh (každá ohodnocena do výše 10 bodů). Nejvyšší skóre, kterého lze v 2. kole dosáhnout, je také 100 bodů. Body z obou výběrových kol se sčítají a do finále je pozváno 20 nejlepších soutěžících. Finálové soutěžní úlohy vyžadují kromě správných výsledků také správné argumentace, postupy a důkazy. V závěrečném soutěžním kole řeší žáci středních škol 4 úlohy v časovém limitu 4 hodin. Na závěr Abelovy matematické olympiády je vybráno 16 středoškoláků, kteří později reprezentují Norsko na MMO, Baltic Way nebo na Norské matematické soutěži (The Nordic Mathematical Competition) viz např. [78].

Ze severské Abelovy matematické olympiády se přesuneme ve výčtu některých zajímavých národních matematických soutěží jižněji, a to do Dánska. **Dánská matematická soutěž Georga Mohra** (Georg Mohr-Konkurrencen) probíhá ve dvou kolech, přičemž prvního kola se může zúčastnit jakýkoliv žák střední školy bez předchozí registrace. Dobré výsledky z 1. kola posouvají soutěžící do 2. kola, v němž žáci středních škol řeší 5 různě obtížných soutěžních úloh v časovém limitu 4 hodin. Obvykle se najdou jen 2 – 3 soutěžící (z celkového počtu 1000 účastníků), kteří jsou schopni vyřešit bezchybně všechny zadané soutěžní úlohy. Bodová dotace soutěžních úloh je do výše 4 bodů, celkem lze tedy získat až 20 bodů. Vítězové matematické soutěže Georga Mohra jsou pozváni k účasti na speciálních seminářích na univerzitě nebo na jiné vysoké škole, viz např. [25]. Z vítězů dánské matematické soutěže Georga Mohra jsou vybráni členové reprezentačního dánského týmu pro MMO.

V dalším odstavci byly popsány některé zvláštnosti národních matematických soutěží v určitých evropských zemích. Prvním z nich je Belgie. Zde jsou matematické olympiády ovlivněny větším počtem úředních jazyků. Například **Belgická matematická olympiáda** (The Olympiade Mathématique Belge), viz např. [80] je určena jen francouzsky hovořícím žákům středních škol, naopak holandsky (vlámsky) mluvící středoškoláci se mohou účastnit **Vlámské matematické olympiády** (Vlaamse Wiskunde Olympiade), viz např. [79]. Dále například Německo, které má kromě národní Matematické olympiády také samostatné matematické soutěže v rámci některých spolkových zemí. Jmenujme alespoň **Bavorskou matematickou soutěž** (Landeswettbewerb Mathematik Bayern), nebo **Bádensko – Württemberskou matematickou soutěž** (Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg), viz např. [81], nebo [82].

Ze zajímavých národních matematických soutěží východní Evropy je dále popsána bulharská **Matematická soutěž Ivana Salabasheva** ("Ivan Salabashev" Mathematics Competition), která se díky atraktivním soutěžním úlohám stala nejpopulárnější matematickou soutěží mezi bulharskými středoškoláky. V roce 2009 se soutěže zúčastnilo přibližně 8000 studentů z celkem 30 míst Bulharska. Matematická soutěž Ivana Salabasheva je soutěží jednotlivců a je určena žákům 2. až 12. tříd. Část soutěže určená středoškolákům obsahuje 6 soutěžních úloh s volitelnou odpovědí a 2 soutěžní úlohy s odpovědí volnou. Za každou správnou odpověď, z možných volitelných, obdrží soutěžící 3 body. Kompletní řešení úloh s volnou odpovědí jsou oceněna celkem 6-ti body. Vždy jsou vyžadována úplná řešení.

Kromě této populární matematické soutěže je v Bulharsku organizována národní MO, ale také další důležité národní matematické soutěže: Zimní a Jarní matematická soutěž (The Winter and The Spring Mathematical competition), viz např. [83].

Samostatná kapitola by mohla být věnována matematickým soutěžím v Rumunsku, kde lze díky dlouholeté tradici nalézt nespočet matematických soutěží určených žákům různých věkových kategorií, viz např. [1], nebo [10].

Poslední krátká zmínka bude věnována polské **Matematické olympiádě gymnazistů** (Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów). Matematická olympiáda gymnazistů byla poprvé organizována v roce 2005/2006 a letos proběhl již VII. ročník této matematické soutěže určené mladší věkové kategorii (odpovídá 2. stupni základní školy v České republice). OMG byla vyčleněna ze standardní národní MO určené středoškolákům (Olimpiada Matematyczna), a to kvůli změnám polského vzdělávacího systému.

Struktura této matematické soutěže je klasická – třístupňová. I. školní kolo je korespondenční, kdy soutěžící řeší celkem 7 soutěžních úloh. V II. (provinčním) i III. kole soutěžící přistupují k řešení 5 úloh v časovém limitu 3 hodin, viz např. [84], popř. [85].

Původně OMG vznikla se záměrem umožnit těm nejtalentovanějším žákům z mladší věkové kategorie rozvíjet svůj talent. Vytvoření MO pro mladší žáky zjevně přispělo k rozvoji mladých matematických talentů v Polsku. Důkazem mohou být i výsledky z letošního 1. ročníku Evropské dívčí matematické olmypiády, kde polské dívky dosáhly nejlepšího celkového umístění.

Na závěr je nezbytné zmínit, že v Evropě existují také různé matematické soutěže určené vysokoškolským studentům, například česká Soutěž o cenu Vojtěcha Jarníka (po vzoru americké matematické soutěže William Lowell Putnam Mathematical Competition), viz např. [66] nebo evropský SEEMOUS, viz např. [57] či dnes velmi populární internetové matematické soutěže – ERUDITUS [58], Internetová matematická olympiáda [59], či Purple Comet [60].

Celá následující kapitola podrobně popisuje stav matematických soutěží pro žáky středních škol v České republice. Přes zevrubně zpracovanou historii československých (později českých) matematických soutěží, až po současné matematické soutěže či korespondenční semináře. Výsledky a celková umístění českých středoškoláků na mezinárodních matematických soutěžích (MMO a MEMO) byly zpracovány do přehledných tabulek a grafů.

3. Matematické soutěže pro žáky středních škol v ČR

3.1 Historie a vývoj matematických soutěží

Organizace matematických soutěží pro žáky středních škol v Československu byla vždy spjata s činností Jednoty československých matematiků a fyziků (dále jen JČSMF, později jen JČMF), která byla založena roku 1862 posluchači filozofické fakulty pražské univerzity. Již od roku 1870 začala JČSMF uveřejňovat ve svých časopisech matematické a fyzikální úlohy určené středoškolákům, kdy na jejich řešení byly vypisovány odměny. Jedním z cílů bylo poskytnout nadaným žákům dostatečné množství úloh a problémů pro rozvoj jejich matematického nadání. Zpočátku byl okruh řešitelů velmi úzký, i z důvodu malé publicity časopisu.

Od roku 1922 byl vydáván nový časopis *Rozhledy matematicko-přírodovědecké,* určený především žákům středních škol. Zde se poprvé objevila řešitelská rubrika s náročnějšími příklady z elementární matematiky určená všem zájemcům, především pak žákům tehdejších reálných gymnázií. Později došlo k malé změně v názvu časopisu, a to na Rozhledy matematicko-fyzikální a funkci řešitelské rubriky plnila „Naše soutěž“, která v časopise nepřetržitě existovala až do počátku 90. let minulého století. Na tuto soutěž poté navázala rubrika „Zajímavé matematické úlohy“ obsažená v novém časopise *Matematika-fyzika-informatika* (MFI), která si kladla za svůj cíl oslovit hlavně čtenáře z řad učitelů matematiky (i jejich žáky) a podnítit jejich zájem o nestandardní matematické úlohy, viz např. [15].

Velká změna v systému a stylu vyučování matematiky nastala po 2. světové válce. Díky nastupující vědeckotechnické revoluci bylo důležité získávat nové studenty pro studium matematiky. Již v roce 1949/1950 byla zorganizována matematická soutěž pro žáky středních škol v Olomouckém a Ostravském kraji. (Podobnou soutěž připravovaly některé kraje na Slovensku v roce 1951/1952). Tyto soutěže a dobré zkušenosti s podobnými soutěžemi v SSSR a v Polsku inspirovali akademika Eduarda Čecha k myšlence uspořádat celostátní matematickou soutěž pro žáky středních škol s názvem Matematická olympiáda (dále jen MO). V prosinci roku 1951 vychází ve Věstníku Ministerstva školství, věd a umění (MŠVU) oběžník č. 190, kterým se zřizuje celostátní matematická soutěž pro žáky výběrových škol nazvaná Matematická olympiáda, a to z hlavní iniciativy JČSMF.

Překvapivě se 1. ročník MO konal již ve školním roce 1951/1952 a soutěžilo se ve dvou kategoriích. Kategorie A byla určena pro žáky 3. a 4. ročníků gymnázií a průmyslových škol, v kategorii B pak soutěžili žáci 1. a 2. ročníků výběrových škol 3. stupně. Na soutěžící MO čekala tři soutěžní kola, kdy každý z účastníků MO musel projít I. kolem, a to studijním. Následovalo II. kolo v podobě klauzurní zkoušky, které již bylo rázu eliminačního a konalo se v tzv. oblastech (sdružení několika krajů). Pouze úspěšní řešitelé II. kola kategorie A postoupili do III. (závěrečného) celostátního kola, které mělo opět podobu klauzurní zkoušky. 1. ročníku MO se účastnilo 434 žáků v kategorii A, 569 v kategorii B. Na ukázku uvádíme stupnici hodnocení jednotlivých úloh pro všechny kategorie v 1. ročníku matematické olympiády, viz [13]: „Každá úloha byla oblastním výborem samostatně klasifikována podle těchto zásad: „Výborné“ řešení je takové, které je po všech stránkách bezvadné. Ve „chvalitebném“ řešení se mohou vyskytnout menší formální nedostatky. Řešení „dobré“ má buď závažnější formální nebo méně závažné odborné nedostatky; řešení „dostatečné“ je sice zhruba úplné, ale jsou v něm závažné odborné nedostatky. Jinak je řešení „nedostatečné“. Podle těchto zásad byla provedena také klasifikace ve druhém a třetím kole.“ Uvedená klasifikace byla přísnější, než obvyklá školská klasifikace, což samozřejmě vyplývalo z výběrovosti soutěže, viz [13], [15].

Po ukončení 1. ročníku MO byla vydána informační brožura s názvem *První ročník matematické olympiády* (1953). Ročenka 1. MO obsahovala informace o průběhu soutěže, celkové výsledky a jména vítězů, počet účastníků, ale i všechny zadané soutěžní úlohy a jejich úplná řešení. Byla tak založena tradice vydávání ročenek po uzavření každého ročníku MO.

2. ročník MO proběhl beze změn (žáci 3. a 4. tříd středních škol soutěžili v kategorii A ve třech kolech, žáci 1. a 2. tříd v kategorii B ve dvou kolech), naopak 3. ročník MO zaznamenal spolu s českým školstvím výrazné změny (přechod k osmileté střední škole a jedenáctileté střední škole).

Ve 3. ročníku MO (1953/1954) byly nově zavedeny 4 kategorie – A, B, C, D. Přičemž kategorie A, B a C byly určeny žákům 11., 10. a 9. tříd (bráno po řadě) jedenáctiletých středních škol - všeobecně vzdělávací školy a výběrové odborné školy. Kategorie D byla určena žákům 8. tříd a jednoletých učebních kurzů všeobecně vzdělávacích škol (žáci s povinnou školní docházkou). Tímto přestává být MO určena jen žákům výběrových škol.

Další ročníky MO proběhly beze změn, avšak popularita MO byla stále větší i díky činnosti časopisů, které uveřejňovaly články o průběhu MO (hlavně rok 1956/1957). Pro názornost a přehlednost uvádíme tabulku, která byla uveřejněna v ročence 7. ročníku MO.

Tabulka Zařazení žáků do kategorií podle ročníků středních škol

Kategorie	**A**	**B**	**C**	**D**
Ročník střední školy	11	10	9	8
Ročník výběrové odborné školy	3 - 4	2	1	-

Od 8. ročníku (1958/1959) byla značná část odpovědnosti za I. kolo přenesena na učitele a vedení školy, kdy učitelé měli na starost opravu I. kola MO. Další novinkou byl 1. ročník Mezinárodní matematické olympiády (MMO), který se konal v červenci roku 1959 v Rumunsku, a to za účasti československého družstva.

Od 9. ročníku MO byla v Československu nově organizována také fyzikální olympiáda (FO).

V 10. ročníku MO (1960/1961) byly nově pořádány pracovní přednášky pro účastníky MO. Také ve struktuře došlo k menším změnám. První kolo mělo poprvé dvě části: přípravnou a soutěžní. Přípravné úlohy měly charakter úloh řešených ve škole a jejich zpracování bylo povinné.

V roce 1962 se v Československu konal 4. ročník MMO.

Od 16. ročníku MO (1966/1967) se stalo odevzdávání přípravných úloh nepovinným. Žáci byli ponovu celoročně připravováni vysokoškolskými učiteli. Novinkou II. a III. kola kategorie A bylo také zavedení bodování namísto dosavadního způsobu hodnocení.

17. ročník MO (1967/1968) zavedl bodovací systém i pro II. kolo kategorie B a C.

18. ročník MO se svou formou přibližoval podobě MMO. III. kolo kategorie A (závěrečné) poprvé probíhalo ve 2 soutěžních dnech, přičemž každý den řešili účastníci soutěže 3 soutěžní úlohy v časovém horizontu 4 hodin.

V 19. ročníku byly realizovány všechny již dlouho připravované změny. Kategorie D byla přejmenována na kategorii Z. Pro žáky 2. cyklu byly zavedeny pouze dvě kategorie, A a B, vždy pro žáky dvou ročníků (kategorie A pro 3. a 4. ročník, B pro 1. a 2. ročník).

Účastníci 20. ročníku MO (1970/1971) mohli opět soutěžit ve 3 kategoriích: v kategorii A (3. a 4. ročník 2. cyklu), v kategorii B (1. a 2. ročník 2. cyklu) a v kategorii Z, určené žákům 9. tříd ZŠ.

V roce 1971 se v ČSR konala 13. MMO, a to v Žilině.

Ve 21. ročníku MO (1971/1972) byla opět zavedena C kategorie. Platilo tedy toto uspořádání: kategorie A pro 3. a 4. ročníky středních škol všech druhů; kategorie B pro žáky 2. ročníků a kategorie C pro 1. ročníky těchto škol, kategorie Z pro žáky ZŠ.

V 22. ročníku MO (1972/1973) byly zadávány úlohy z modernizované školské matematiky.

23. ročník MO (1973/1974) byl spojen s kulturním programem.

24. ročník MO (1974/1975) byl spojen s prvopočátky přípravné metody – *korespondenčního semináře*. V první fázi bylo vybráno 30 studentů, o nichž se předpokládalo, že by mezi nimi mohli být budoucí členové československého družstva na 17. MMO. V druhé fázi, během školního roku, byly vybraným žákům zasílány úlohy, které poté společně s řešeními posílali zpět. Opravená řešení jim byla později vrácena. Pro tuto metodu přípravy se vžil název *korespondenční seminář*.

V 25. ročníku MO byla kategorie Z nově rozšířena o žáky 8. tříd ZŠ.

Struktura a vymezení kategorií MO zůstalo v 26. ročníku beze změn, poprvé však MO probíhala podle nového organizačního řádu.

V průběhu dalších ročníků MO došlo k částečné reorganizaci kategorií A, B, C a postupnému rozšiřování MO směrem k nižším věkovým kategoriím (po vzoru Slovenska, kde probíhaly experimentální ročníky MO pro žáky ZŠ – 4. – 7. tříd).

V 31. ročníku (1981/1982) došlo ke změnám v organizaci I. kola – namísto přípravných úloh byla zavedena školní část I. kola, které již měla (na rozdíl od přípravných úloh) soutěžní charakter.

Přípravě československého družstva byla v roce 1984 věnována zvýšená pozornost. ČSR byla v tomto roce hostitelskou zemí 25. ročníku MMO.

34. a 35. ročník MO se vyznačují charakteristickými změnami v kategoriích určených žákům nižšího věku. Oficiálně se již soutěžilo v kategoriích Z7 a Z8, experimentálně v Z6, Z5 a Z4. Další změnou, kterou přinesl 35. ročník MO (1985/1986), bylo uvedení

zcela nové soutěžní kategorie pro žáky středních škol – programování (kategorie P). Od tohoto ročníku jsou také poprvé zavedeny dvě ročenky MO – jedna určená kategoriím A, B, C a P, druhá kategoriím Z8, Z7 a Z6.

V dalších letech neprošla MO zásadními změnami a její struktura byla po několik let ustálená. Výjimkou byly kategorie Z, jenž byly několikrát upraveny.

Od 38. ročníku MO (1988/1989), kterého se účastnilo kolem 9500 žáků SŠ, platila tato struktura: v kategorii A soutěžili žáci 3. a 4. ročníků SŠ, v kategorii B žáci 2. ročníků SŠ a v kategorii C žáci 1. ročníků SŠ. I. kolo se skládalo ze dvou částí, přičemž 1. část zahrnovala 6 soutěžních úloh, které žáci řešili doma či ve školních kroužcích, a 2. část – klauzurní, v níž žáci řešili 3 soutěžní úlohy během vymezeného časového limitu 4 hodin. Někteří z úspěšných řešitelů I. kola poté postoupili do kola II. (krajského), v němž ve stejném časovém limitu řešili 4 soutěžní úlohy. V kategoriích A a P bylo pořádáno i III. kolo – celostátní, které již probíhalo ve 2 dnech a v každém z těchto dnů soutěžící přistupovali k řešení 3 soutěžních úloh (kategorie A), nebo 2 soutěžních úloh (kategorie P) v časovém limitu 4 hodin, viz např. [12], popř. [13].

Po dobu následujícího trvání MO opět nedošlo k zásadním změnám v její struktuře. Současný stav MO (2012) bude popsán v následujícím odstavci. Aby však byla zachována časová osa, která je v kapitole dodržena, uvádíme výčet dalších matematických soutěží, které postupně přispívaly k rozvoji českých matematických talentů, a to chronologicky, viz 4. kapitola:

1993 – Matematický DUEL
(1994)/1995 – Matematický Klokan
1995 – Přípravné dvojstřetnutí (později CPS střetnutí)
2006 – Turnaj měst
2007 – MEMO
2012 – CPS – matematická soutěž juniorů

V současnosti je MO považována za prestižní matematickou soutěž, díky které je každoročně objevena řada matematických talentů. Soutěž probíhá celý rok a v závěru jsou vyhlášeni nejúspěšnější řešitelé v jednotlivých kategoriích na úrovni okresu, regionu či celé republiky. Celkem 6 nejúspěšnějších řešitelů z kategorie A později reprezentuje ČR na MMO. Každoročně se MO zúčastní kolem 70 tisíc žáků základních a středních škol. Ve školním roce 2011/2012 proběhl již 61. ročník této matematické soutěže, přičemž dnešní MO má následující aktuální strukturu: Je organizována v několika kategoriích: A (žáci maturitních a předmaturitních ročníků SŠ), B (žáci 2. ročníků SŠ), C (žáci 1. ročníků SŠ), Z9, Z8, Z7, Z6 a Z5 (kategorie určené žákům ZŠ, žákům 9., 8., 7., 6. a 5. tříd po řadě). V kategorii P (programování) soutěží středoškoláci všech ročníků bez ohledu na jejich věk. Kategorie A je celkově rozčleněna do 3 soutěžních kol – I. školního, II. krajského a III. ústředního kola. V kategoriích B a C žáci SŠ soutěží pouze ve 2 soutěžních kolech – I. školní a II. krajské kolo. Školní kolo má vždy dvě části – domácí (6 soutěžních úloh) a klauzurní (3 soutěžní úlohy v určitém časovém limitu). Nejlepší soutěžící školního kola postupují do kola krajského (k řešení předkládány 4 soutěžní úlohy – s maximálním bodovým ohodnocením do 6 bodů – v časovém limitu 4 hodin). Soutěžícím je povoleno používat MF tabulky a kalkulačky bez grafického displeje. Do dalšího kola – ústředního – postupují pouze soutěžící z kategorie A. Zde je povoleno používat pouze psací a rýsovací potřeby. Na MO jsou zadávány autorsky původní soutěžní úlohy různých obtížností, je však zřejmé, že jejich náročnost roste s jednotlivými soutěžními koly MO.

Zadání soutěžních úloh MO jsou zveřejňována na samostatných letácích, nebo v matematických časopisech (Rozhledy matematicko-fyzikální, Matematika, fyzika, informatika, Učitel matematiky).

Na podporu žáků (účastníků MO) bylo v průběhu let vydáváno mnoho studijních textů: např. Škola mladých matematiků nebo tzv. ročenky, které detailně monitorují průběh jednotlivých ročníků MO. Dále pak různé matematické časopisy, vysokoškolská skripta či jiná odborná matematická literatura. Je nutné poznamenat, že kvalitních studijních textů a odborné literatury je v současnosti nedostatek.

V přípravě na MO nejsou opomenuti ani učitelé středních škol, kteří mají k dispozici tzv. Komentáře k úlohám matematické olympiády, kde jsou soutěžní úlohy vyřešeny více způsoby. Navíc jsou zde obsaženy návodné a rozšiřující úlohy, které mohou být žákům předvedeny a případně vyřešeny. Dalším prostředkem přípravy na MO je Seminář k úlohám matematické olympiády, pořádaný jen v některých regionech ČR. Na tomto semináři jsou učitelům prezentována řešení soutěžních úloh i s dalšími návodnými a rozšiřujícími úlohami, a to v ústní podobě.

MO je zřizována pod záštitou Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR, JČMF a Matematického ústavu Akademie věd České republiky. Na organizaci se podílí ústřední komise MO a v krajích je řízena krajskými komisemi MO při pobočkách JČMF. Soutěžní úlohy jsou připravovány vysokoškolskými a středoškolskými učiteli, viz [4].

Kromě MO jsou v České republice organizovány a pořádány další matematické soutěže určené středoškolákům. Bližší seznámení s těmito fungujícími matematickými soutěžemi lze nalézt v následující kapitole.

Kvůli porovnání úrovně a zejména obtížnosti soutěžních úloh v rozmezí 60-ti let existence MO uvádíme zadání soutěžních úloh z 1. a z 61. ročníku MO z III. kola kategorie A (nejvyšší úroveň).

Zadání III. (celostátního) kola 1. ročníku MO v kategorii A:

1) Jsou-li a,b kladná racionální čísla, dokažte, že ve vztahu

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$$

kde c je racionální číslo, plyne, že $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ jsou rovněž racionální čísla.

2) Tabulka čísel

$$\begin{array}{ccccccc} & & a_1 & b_1 & c_1 & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 & g_3 \\ . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

je sestavena takto: První řádek obsahuje tři lichá čísla. Každé číslo dalších řádků je rovno součtu tří sousedních čísel předcházejícího řádku, z nichž prostřední je nad uvažovaným číslem; schází-li v tabulce některé z těchto tří čísel, doplní se nulou. Dokažte, že počínaje druhým řádkem každý řádek obsahuje aspoň jedno sudé číslo.

3) Budiž *ABCD* vypuklý rovnoběžník, v němž $|AB| = |CD|$ a buďtež *R, S* středy stran *AD, BC*. Sestrojte polopřímky *AU*, *DV* souhlasně rovnoběžné s polopřímkou *RS*. Dokažte, že platí vztah

$$|\sphericalangle BAU| = |\sphericalangle CDV|.$$

4) Rozměry obdélníka *ABCD* jsou přirozená čísla *p, q*; obdélník je rozdělen na *pq* jednotkových čtverců. Určete počet těch jednotkových čtverců, jejichž vnitřkem prochází úhlopříčka *AC*, a to v případě, že čísla *p, q* jsou

a) nesoudělná,

b) soudělná.

Zadání III. (ústředního) kola 61. ročníku MO v kategorii A:

1) Najděte všechna celá čísla *n*, pro něž je $n^4 - 3n^2 + 9$ prvočíslo.

2) Zjistěte, jaký je největší možný obsah trojúhelníku *ABC*, jehož těžnice mají délky vyhovující nerovnostem $t_a \leq 2,\ t_b \leq 3,\ t_c \leq 4$.

3) Dokažte, že mezi libovolnými 101 reálnými čísly existují dvě čísla *u* a *v*, pro něž platí

$$100\,|u - v| \cdot |1 - uv| \leq (1 + u^2)(1 + v^2).$$

4) Uvnitř rovnoběžníku *ABCD* je dán bod *X*. Sestrojte přímku, která prochází bodem *X* a rozděluje daný rovnoběžník na dvě části, jejichž obsahy se navzájem liší co nejvíce.

5) Ve skupině 90 dětí má každé aspoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokažte, že je lze rozdělit do tří 30členných skupin tak, aby každé dítě mělo ve své skupině aspoň jednoho kamaráda.

6) V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^4 + y^2 + 4 &= 5yz, \\ y^4 + z^2 + 4 &= 5zx, \\ z^4 + x^2 + 4 &= 5xy. \end{aligned}$$

3.2 Aktuální matematické soutěže v ČR

Žáci středních škol České republiky mají v současnosti na výběr z pestré škály matematických soutěží. Největší tradici mezi matematickými soutěžemi, v ČR i na Slovensku, má Matematická olympiáda, nejstarší předmětová soutěž pro žáky středních a základních škol, viz např. [15] popř. [67]. Dříve než postoupíme k výčtu mezinárodních matematických soutěží, kterých se čeští středoškoláci účastní, uvádíme další významné matematické soutěže a nové formy práce s matematickými talenty v rámci ČR.

Velmi důležitou formou práce s matematickými talenty jsou nejen u nás korespondenční semináře (počátky v 70. letech minulého století). Dnes se na organizaci korespondenčních seminářů určených českým středoškolákům podílejí studenti a učitelé příslušných vysokých škol. Pořadatelé připraví sérii 6 soutěžních úloh a ty jsou poté distribuovány do škol. Zájemci z řad středoškoláků zasílají vyřešené soutěžní úlohy zpět organizátorům. Zde jsou žákovská řešení opravena a spolu se vzorovým řešením zaslána zpět do škol. Navíc k nim přidávají další sérii soutěžních úloh a takto se celý cyklus v průběhu roku opakuje. Korespondenční seminář tedy probíhá celý školní rok v několika sériích. Na závěr je provedeno celkové hodnocení. Ti nejlepší z řešitelů korespondenčního semináře jsou poté pozváni na závěrečné soustředění, kde se mohou setkat s organizátory těchto seminářů, viz např. [4]. Mezi nejznámější korespondenční semináře v ČR patří, viz např. [4], [6] nebo [70]:

- **PraSe** – **Pra**žský **se**minář pořádaný studenty Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, viz např. [69]. Jde o nejstarší korespondenční seminář u nás (od roku 1980).
- **BRKOs** – **Br**něnský **ko**respondenční **s**eminář – pořádaný studenty Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, viz např. [68].
- **Matematický korespondenční seminář Olomouc** – korespondenční seminář pořádaný skupinou studentů matematických oborů a vy-

sokoškolskými učiteli Katedry algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, (olomoucký seminář fungoval od školního roku 1986/1987 až do počátku 90. let).

- **Matematicko-fyzikální korespondenční seminář M&M** – organizován Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy v Praze, viz např. [72].

- **Jihočeský matematický korespondenční seminář** – veden Katedrou matematiky Pedagogické fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích.

- **Matematický korespondenční seminář KoS Severák –** organizován studenty a pedagogy Přírodovědecké fakulty Univerzity J.E. Purkyně v Ústí nad Labem, viz např. [73].

Mezi studenty středních, ale i základních škol jsou korespondenční semináře velmi oblíbené, a to i přesto, že soutěžní úlohy mají vyšší obtížnost, než například úlohy z MO.

Díky dlouholeté vzájemné „matematické" spolupráci se Slovenskem projevuje mnoho českých žáků zájem účastnit se také slovenských korespondenčních seminářů, např. BKMS (**B**ratislavský **k**orešpondenčný **m**atematický **s**eminár) a HYDRANT organizované Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Komenského v Bratislavě, viz např. [74], nebo STROM (**S**útaž **T**alentovaných **R**iešiteľov **O**bľubujúcich **M**atematiku) pořádaný Přírodovědeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košicích, viz [71].

Kromě populárních korespondenčních seminářů jsou v České republice pořádány další neméně zajímavé matematické soutěže. V mnoha případech opět ve spolupráci se Slovenskem. Za zmínku jistě stojí matematická soutěž **Náboj**, viz. např. [64] nebo **Pražská střela**, viz např. [76]. Uvedené matematické soutěže jsou známé především pro svou dynamičnost a živou atmosféru. Náboj je mezinárodní matematickou soutěží, které se účastní pětičlenné týmy středoškoláků z různých škol České a Slovenské republiky. Soutěž probíhá současně v Praze, Bratislavě, Opavě a Košicích, a to ve dvou soutěžních kategoriích, přičemž v kategorii Juniorů mohou soutěžit pouze týmy, jejichž členové jsou žáky nejvýše 2. ročníku střední školy. Jinak je tomu v kategorii Seniorů, kde mohou soutěžit týmy středoškoláků v libovolném složení. Celá soutěž trvá pouhé 2 hodiny a soutěžící týmy přistupují k řešení 6 soutěžních úloh. Týmy středoškoláků řeší zadané soutěžní úlohy postupně, přičemž zadání další soutěžní úlohy obdrží až po odevzdání správného řešení úlohy předchozí. Náboj je matematickou soutěží s netradičními soutěžními úlohami, vyžadujícími jistou dávku invence a důvtipu, jak tvrdí sami organizátoři této soutěže.

Další matematickou soutěží, které se mohou čeští středoškoláci (konkrétně žáci 3. ročníků) účastnit je **Moravskoslezský matematický šampionát**, viz např. [75], pořádaný v prostorách Wichterlova gymnázia v Ostravě – Porubě. Jedná se o jednodenní matematickou soutěž. Soutěž probíhá každoročně, vždy v říjnu, a v roce 2012 proběhne již 10. ročník této ne příliš známé matematické soutěže. Soutěžící řeší 5 zajímavých úloh, přičemž v úlohách je kladen důraz na uplatnění matematiky v praktickém životě.

V České republice existuje i matematická soutěž určená žákům středních odborných škol. Jde o Celostátní matematickou soutěž žáků SOŠ, SPŠ, ISŠ, SOU, OU, …. Je organizována JČMF, viz např. [77], OA a VOŠ Valašské Meziříčí ve spolupráci s dalšími 21 odbornými školami z celé České republiky, a to v 7 kategoriích podle typu školy, viz např. [65]. Navíc jsou pro jednotlivé kategorie vymezeny i tematické okruhy, což není v matematických soutěžích obvyklé.

Poslední zmínka bude patřit účasti českých středoškoláků na mezinárodních soutěžích. Pro přehlednost je v textu uveden pouze výčet mezinárodních matematických soutěží s českou participací, detailněji jsou jednotlivé matematické soutěže popsány ve 4. kapitole.

Evropské regionální matematické soutěže, jichž se žáci středních škol České republiky účastní:

Středoevropská matematická olympiáda (MEMO)

Matematický Duel

Přípravné střetnutí česko-polsko-slovenské

Mezinárodní matematické soutěže s celosvětovou působností, na kterých čeští středoškoláci participují:

Mezinárodní matematická olympiáda

Turnaj měst

Matematický klokan

3.3 Práce s matematickými talenty

Práce s matematicky nadanými žáky středních škol má v České republice mnohaletou tradici. Prvním problémem v této tématice však může být samostatné vymezení pojmu – talent/matematický talent. Při studiu odborné literatury se setkáváme s různými výklady tohoto pojmu, jednoznačné vymezení však neexistuje, viz např. [22]. V mnoha případech je pojem talent chápán spíše empiricky, tedy na základě zkušeností jednotlivců. Přesto uvádíme v literatuře nejčastěji zmiňovanou definici matematického talentu: „Matematickými schopnostmi se rozumí individuálně-psychologické zvláštnosti, které odpovídají potřebám vyučování matematiky. Podmiňují při ostatních stejných podmínkách úspěch tvořivého zvládnutí matematiky jako vyučovacího předmětu zvláště vzhledem na rychlost, lehkost a hloubku ovládání vědomostí, zručností a návyků v oblasti matematiky.“ viz např. [8]. V novějších definicích je talent popisován jako systém predispozic pro tvůrčí činnost v jedné nebo ve více oblastech. Je však zřejmé, že samotný talent není zárukou úspěchu. Pro jeho posílení a růst je nutná systematická usilovná práce, učení, trénink a cvičení (matematické soutěže).

Práce s matematicky talentovanými žáky má několik fází, kdy každá z nich je velmi důležitá a přitom nelze žádnou z nich vynechat, detailněji viz [15]. První fází je vyhledávání matematických talentů. Jde o proces dlouhodobý a cílený, který je třeba zahájit již na základních školách (třídy s rozšířenou výukou matematiky, matematické soutěže určené žákům ZŠ, korespondenční semináře pro žáky ZŠ – například KOKOS, či Pikomat). Důležitou roli zde sehrávají učitelé, vyučující matematiky. Dobře odborně a pedagogicky vybavený učitel rozhodně ovlivňuje další žákův přístup k vyučovanému předmětu. Objevení talentovaných žáků a udržení jejich zájmu o matematiku, již od nejmladšího věku, je v současnosti velmi diskutovaným tématem.

Další fází práce s matematickými talenty je především rozvoj jejich matematického nadání, ale také udržení zájmu žáků o matematiku. Během soustavné a dlouholeté práce s matematickými talenty se postupně vyvinuly další způsoby, jak rozvíjet matematický talent. Jmenujme alespoň některé z nich. Čeští talentovaní žáci se kromě matematických soutěží mohou účastnit různých matematických seminářů, přednášek či speciálních soustředění (většinou jako závěrečná příprava před mezinárodními matematickými soutěžemi).

Práce s matematickými talenty má v České republice více než 50-ti letou tradici. Otázkou však zůstávají možnosti vyhledávání talentovaných žáků již na základních školách a následná kvalitní a odborná práce s matematicky nadanými žáky na gymnáziích a ostatních středních školách. Dalším zajímavým a bezesporu aktuálním tématem je klesající společenská prestiž matematiky, tedy úpadek zájmu mladé generace o matematiku, jako o předmět. Přes tato fakta lze konstatovat, že práce s matematickými talenty má v České republice ustálenou podobu a velmi dobrou úroveň, viz např. [15], nebo [22].

3.4 Úspěšnost českých středoškoláků v mezinárodních matematických soutěžích

Žáci českých středních škol se účastní 6 mezinárodních matematických soutěží. Pro detailní popis byly vybrány 2 z nich, které považujeme za nejdůležitější. Z evropských regionálních byl zmapován přehled umístění českých žáků na MEMO. Následně byla zpracována bohatá historie účasti nejprve československých, později českých žáků na MMO.

Úspěšnost českých středoškoláků v mezinárodních matematických soutěžích byla zpracována a poté zachycena pomocí přehledných tabulek a grafů.

3.4.1 Úspěšnost českých středoškoláků v MEMO

Středoevropská matematická olympiáda je poměrně mladou matematickou soutěží a české reprezentační družstvo se MEMa účastní pravidelně, již od jejího vzniku. V září 2012 proběhne již 6. ročník této matematické soutěže. V uplynulých ročnících MEMO dosáhli čeští reprezentanti následujících umístění:

Ročník MEMO	Rok konání MEMO	Získaná ocenění - soutěž JEDNOTLIVCŮ				soutěž TÝMŮ	Počet účastnících se zemí	Počet účastníků
		zlatá	stříbrná	bronzová	čestní členové			
1.	**2007**	0	0	**2**		**BRONZ**	7	39
2.	**2008**	0	**1**	**1**	**1**	**7. místo**	9	54
3.	**2009**	0	**1**	**4**		**5. místo**	10	59
4.	**2010**	0	0	**2**	**3**	**8.místo**	10	59
5.	**2011**	0	0	**2**	**2**	**8.místo**	10	60

Z čísel uvedených v tabulce lze vyhodnotit, že čeští středoškoláci patří na MEMO spíše mezi ty průměrné a v posledních dvou letech bohužel mezi podprůměrné co do celkového umístění. Přestože v každém z ročníků dosáhli na některá ocenění, konkurence reprezentována středoškoláky jiných států střední Evropy je vysoká. Na předních pozicích se již pravidelně umisťují středoškoláci z Polska, Maďarska a Německa, viz např. [38], popř. [39].

3.4.2 Úspěšnost českých středoškoláků v MMO

Žáci ČR (dříve ČSR) se účastní MMO již od jejího počátku. Během několika let společně reprezentovali čeští a slovenští středoškoláci jedinou zemi – Československo a během tohoto období se Československo 3x stalo hostitelem MMO (v letech 1962, 1971 a 1984).

Od roku 1993, kdy došlo k rozdělení Československa, pokračovala ČR v soutěži jako samostatný stát (platí také pro Slovensko). Mezi nejlepší společné úspěchy patří první místo z 2. ročníku MMO. Samostatná ČR se nejlépe umístila v roce 1998, kdy obsadila celkové 15. místo. Z tabulek a grafů uvedených níže vyplývá, že se čeští (českoslovenští) žáci vždy dokázali pomocí svých schopností probojovat až na slušné pozice v horní třetině žebříčku celkového umístění. Během několika let, s rostoucím počtem účastníků (růst konkurence) a rostoucí obtížností úloh již nebylo tak snadné přední pozice obsadit. Od roku 1999 došlo k výraznému pohoršení umístění českých žáků v mezinárodní konkurenci. Od tohoto průlomu se čeští žáci drží spíše kolem středu žebříčku umístění. Výsledky československých či později českých žáků jsou přehledně zpracovány do následujících tabulek a grafů, viz např. [51].

Československo – celkové shrnutí

První účast na MMO: **1959**

Celkový počet účastí ČSR: **33**

Počet získaných ocenění (medailí):

zlatá : **10**
stříbrná: **50**
bronzová: **73**
čestné uznání: **2**

Česká republika – celkové shrnutí

První účast v MMO: **1993**

Celkový počet účastí ČR: **19**

Počet získaných ocenění (medailí):

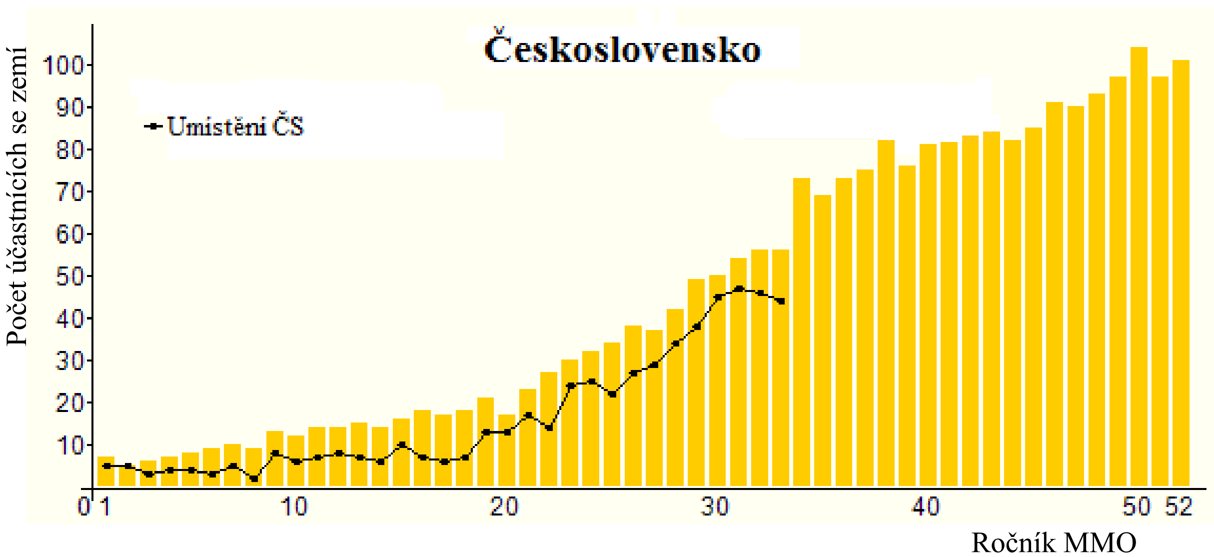
zlatá : **3**
stříbrná: **23**
bronzová: **47**
čestné uznání: **23**

Níže uvedené tabulky a grafy zachycují přehled počtu ocenění a celková umístění Československa a samostatné České republiky v jednotlivých ročnících MMO.

Název státu	První účast na MMO	Počet účastí na MMO	Počet všech účastníků			Počet získaných medailí			
			všichni	chlapci	dívky	zlatá	stříbrná	bronzová	čestní členové
Československo	1959	33	237	205	6	10	50	73	2
Česká republika	1993	19	114	110	4	3	23	47	23

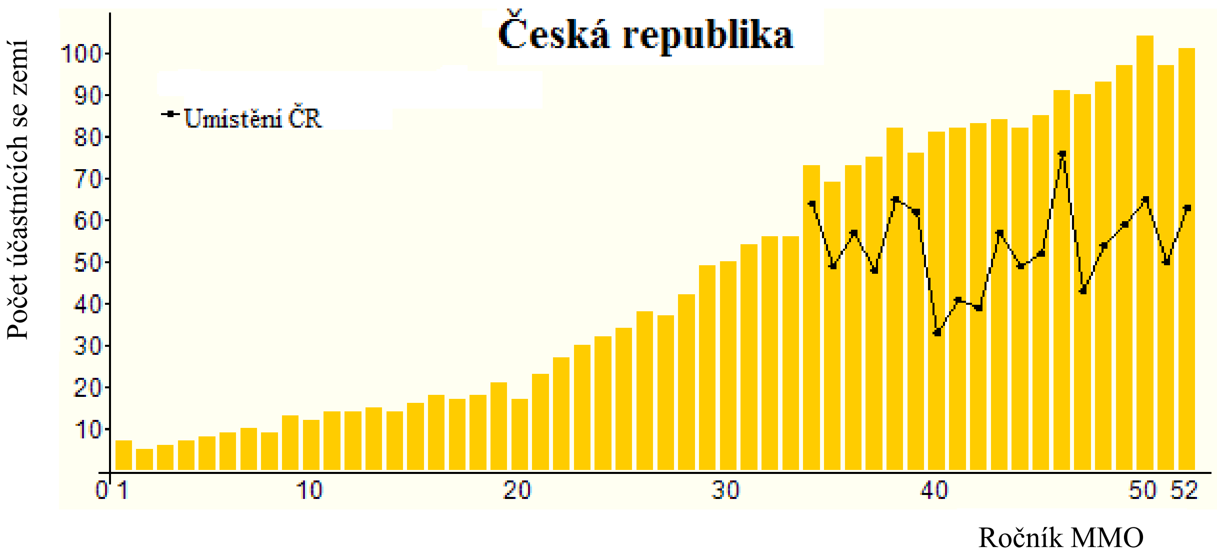
Získaná ocenění v MMO během 1959 – 1992 (Československo), viz např. [51].

Rok konání MMO	Počet ČR reprezentantů			Počet získaných ocenění/medailí		
		chlapci	dívky	zlatá	stříbrná	bronzová
1959	8	5	0	1	0	0
1960	8	6	0	1	1	2
1961	8	1	0	0	0	1
1962	**8**	**4**	**0**	**0**	**1**	**3**
1963	8	2	0	1	0	1
1964	8	3	1	0	2	2
1965	8	7	1	0	1	3
1966	8	8	0	0	1	2
1967	8	8	0	0	1	3
1968	8	8	0	2	4	0
1969	8	8	0	0	0	3
1970	8	7	1	0	0	4
1971	**8**	**7**	**1**	**0**	**0**	**1**
1972	8	8	0	0	0	4
1973	8	8	0	0	1	4
1974	8	7	1	0	0	2
1975	8	8	0	0	0	2
1976	8	8	0	0	1	3
1977	8	8	0	0	3	2
1978	8	8	0	0	2	3
1979	8	8	0	1	0	4
1981	5	5	0	1	3	1
1982	4	4	0	0	2	2
1983	6	6	0	1	1	3
1984	**6**	**6**	**0**	**0**	**2**	**2**
1985	6	5	1	0	3	1
1986	6	6	0	0	3	3
1987	6	6	0	0	4	2
1988	6	6	0	0	2	2
1989	6	6	0	2	1	3
1990	6	6	0	0	5	1
1991	6	6	0	0	4	1
1992	6	6	0	0	2	3



Získaná ocenění v MMO během 1993 – 2011 (Česká republika), viz např. [51].

Rok konání MMO	Počet ČR reprezentantů	chlapci	dívky	zlatá	stříbrná	bronzová	čestní členové
				Počet získaných ocenění/medailí			
1993	6	4	2	1	2	3	0
1994	6	6	0	0	2	2	2
1995	6	6	0	0	1	5	0
1996	6	6	0	0	2	1	0
1997	6	6	0	1	2	2	0
1998	6	6	0	0	3	3	0
1999	6	6	0	0	0	1	1
2000	6	6	0	0	1	3	0
2001	6	6	0	0	0	2	2
2002	6	6	0	0	2	3	0
2003	6	6	0	0	1	2	3
2004	6	6	0	0	2	2	0
2005	6	6	0	1	2	2	0
2006	6	6	0	0	0	3	3
2007	6	4	2	0	0	5	1
2008	6	6	0	0	1	1	3
2009	6	6	0	0	1	2	3
2010	6	6	0	0	0	2	3
2011	6	6	0	0	1	3	2



Na závěr uvádíme přehled konečného umístění ČSR i ČR ve srovnání s celkovým počtem účastnících se zemí, viz např. [51]. Z tabulky je zcela patrné, že zlom přišel v roce 1993, kdy se Česká republika osamostatnila. Od tohoto roku se celková umístění českých středoškoláků na MMO posunula směrem k nižším celkovým umístěním. Za světlé okamžiky v této „době neúspěchů“ mohou být považovány roky 1995, 1997, 1998 či 2005, kdy se českým žákům podařilo dosáhnout lepších výsledků, a tím i vyšších celkových umístění.

Rok konání MMO	Ročník MMO	Umístění ČR (ČSR)	Počet účastnících se zemí
1959	1.	3.	7
1960	2.	1.	5
1961	3.	4.	6
1962	**4.**	**4.**	**7**
1963	5.	5.	8
1964	6.	7.	9
1965	7.	6.	10
1966	8.	8.	9
1967	9.	6.	13
1968	10.	7.	12
1969	11.	8	14
1970	12.	7.	14
1971	**13.**	**9.**	**15**
1972	14.	9.	14
1973	15.	7.	16
1974	16.	12.	18
1975	17.	12.	17
1976	18.	12.	18
1977	19.	9.	21
1978	20.	5.	17
1979	21.	7.	23
1981	22.	14.	27
1982	23.	7.	30
1983	24.	8.	32
1984	**25.**	**13.**	**34**
1985	26.	12.	38
1986	27.	9.	37
1987	28.	9.	42
1988	29.	12.	49
1989	30.	6.	50
1990	31.	8.	54
1991	32.	11.	56
1992	33.	13.	56
1993	34.	10.	73
1994	35.	21.	69
1995	36.	17.	73
1996	37.	28.	75
1997	38.	18.	82
1998	39.	15.	76
1999	40.	49.	81
2000	41.	42.	82
2001	42.	45.	83
2002	43.	28.	84
2003	44.	34.	82
2004	45.	34.	85
2005	46.	16.	91
2006	47.	48.	90
2007	48.	40.	93
2008	49.	39.	97
2009	50.	40.	104
2010	51.	48.	97
2011	52.	39.	101

4. Matematické soutěže pro žáky SŠ v rámci Evropy

V této kapitole je uveden přehled nejvýznamnějších matematických soutěží určených žákům středních škol v evropských zemích.

První část 4. kapitoly přibližuje současný stav regionálních matematických soutěží na území Evropy, který se v posledních letech výrazně změnil. Na soutěžním matematickém poli přibylo velké množství matematických soutěží pro talentované žáky. Tato tendence je více než příznivá, umožňuje tak většímu počtu talentovaných žáků účastnit se soutěží mezinárodního charakteru, a tím posilovat a rozvíjet svůj talent. Zmapovány byly regionální matematické soutěže s českou účastí i bez ní.

Druhá část 4. kapitoly blíže popisuje významné mezinárodní matematické soutěže s celosvětovou působností. Zahrnuty byly nejprve mezinárodní soutěže s českou participací, dále pak mezinárodní matematické soutěže bez účasti českých družstev.

4.1 Evropské regionální matematické soutěže

Za evropské regionální matematické soutěže označujeme ty matematické soutěže, jichž se účastní žáci středních škol určitého evropského regionu, tedy žáci středních škol ze zemí náležících určitému území, vymezenému na základě společných znaků (rysů či kritérií), viz např. [14].

Evropské regionální matematické soutěže jsou v této kapitole seřazeny chronologicky, dle data jejich vzniku. Z důvodu nesporného historického významu nejprve uvádíme blok nejstarších matematických soutěží, které *dříve* plnily úlohu regionálních matematických soutěží, ale svou dnešní podobou se řadí spíše do *národních matematických soutěží Ruska*. Jsou jimi: Leningradská matematická olympiáda, Moskevská matematická olympiáda a Všeruská matematická olympiáda.

Dále se budeme zabývat regionálním matematickými soutěžemi v rámci Evropy, jichž se žáci středních škol České republiky účastní (viz 4.1.2 – 4.1.4) a následně se pak zaměříme na další významné evropské regionální matematické soutěže, na kterých čeští žáci neparticipují (viz 4.1.5 – 4.1.10).

4.1.1 Ruské (regionální) matematické soutěže

Leningradská matematická olympiáda
(St. Petersburg Mathematical Olympiad)

Nejstarší ruskou matematickou olympiádou je Leningradská matematická olympiáda (též St. Peterburgská matematická olympiáda, Matematická olympiáda Petrohrad). Poprvé se tato matematická olympiáda konala již v roce 1934. V průběhu let se struktura Leningradské matematické olympiády různě měnila. Jediné, co se během let zachovalo, bylo ústní kolo, ve kterém soutěžící prezentují svá řešení členům poroty. Olympiáda je určená žákům 6. – 11. tříd a probíhá ve 2 kolech. První kolo je písemné a je určeno všem účastníkům olympiády, druhé kolo je ústní a účastní se ho jen nejlepší soutěžící (100 soutěžících na každé úrovni) z prvního kola, [55].

Moskevská matematická olympiáda
(Moscow Mathematical Olympiad)

Moskevská matematická olympiáda se koná každoročně již od roku 1935 (po vzoru Leningradské MO – v roce 1934). Po mnoho let je Moskevská matematická olympiáda nejdůležitější a z hlediska počtu účastníků nejmasovější (ročně se zúčastní více než 2000 účastníků) matematickou olympiádou určenou žákům moskevských škol. Účastnit se jí mohou žáci 8. – 11. tříd. Zatím poslední ročník se uskutečnil v dubnu roku 2012. Moskevská matematická olympiáda probíhá ve dvou dnech. První den absolvují soutěžící tzv. postupovací kolo, které je otevřené všem žákům, zatímco 2. kolo, které se koná o týden později, je určeno jen těm nejlepším z 1. kola. Časový limit prvního kola je vymezen na dobu 5 hodin a soutěžící přistupují k řešení 6-ti soutěžních úloh. Doba k řešení soutěžních úloh u 2. kola je zkrácena na pouhé 4 hodiny. 2. kola posledního ročníku Moskevské matematické olympiády se zúčastnilo 246 soutěžících, viz např. [5] nebo [54].

Všeruská matematická olympiáda (All – Russian Mathematical Olympiad)

Národní všeruská olympiáda se koná každoročně (od roku 1991) pod záštitou Ministerstva školství a Ruské vědecké federace. Celostátní matematická olympiáda je inspirována Moskevskou a Leningradskou matematickou olympiádou, a koná se v pěti fázích s cílem důsledně pokrýt celé území ruské federace na těchto úrovních: škola, obec, region, federální okruh (Jižní, Ural, Centrální, Volga, Sibiřský, Severo – západní, Dálný východ) a finále. Vítězové celostátního finále jsou poté vysíláni na MMO. V průběhu olympiády řeší soutěžící velmi obtížné úlohy v časovém limitu 5 hodin. Tento čas je však považován za nedostatečný, tudíž většina účastníků olympiády neprojde ani 1. kolem. Dalším problémem je velká plocha, kterou Ruská federace pokrývá. Organizace jednotlivých kol je komplikovaná z důvodu nedostatku kvalifikovaných pracovníků, kteří by dohlíželi na chod jednotlivých kol Všeruské matematické olympiády, [56].

Nyní budou blíže popsány evropské regionální matematické soutěže, v nichž čeští žáci participují.

4.1.2 Středoevropská matematická olympiáda (The Middle European Mathematical Olympiad)

Středoevropská matematická olympiáda je poměrně mladou matematickou soutěží. Její vznik je spojen s 47. ročníkem MMO, kdy z podnětu organizačního výboru rakouské MO byly osloveny delegace devíti zemí střední Evropy (delegace Švýcarska, Rakouska, Německa, Slovinska, Chorvatska, České republiky, Slovenska, Polska a Maďarska) s návrhem vytvořit, pro matematicky nadané žáky středních škol uvedených zemí, novou soutěž nazvanou Středoevropská matematická olympiáda (**MEMO** – Middle European Mathematical Olympiad), viz např. [16] nebo [39]. Iniciátoři vzniku této středoevropské soutěže vyšli z pravidel dvojstranné mezinárodní matematické soutěže středoškoláků, tj. Rakousko – polské matematické soutěže (Austrian – Polish Mathematical Competition – APMC), která probíhala dlouhých 29 let (1978 – 2006). Již z názvu je zřejmé, že původně se soutěže pravidelně účastnily pouze 2 země – Rakousko a Polsko. Aktuální matematická soutěž, která je jejím úspěšným následovníkem, nese název Středoevropská matematická olympiáda. Počet evropských zemí, které se této matematické soutěže účastní se výrazně zvýšil. V současnosti má MEMO 10 stálých členů (států střední Evropy): Rakousko, Polsko, Česká republika, Slovensko, Německo, Maďarsko, Litva, Slovinsko, Švýcarsko a Chorvatsko.

Pro úplnost zde uvádíme přehled všech ročníků této (relativně) mladé matematické soutěže, viz. např. [50].

1. ročník MEMO, 20. – 26. 9. 2007, Eisenstadt, Rakousko
2. ročník MEMO, 4. – 10. 9. 2008, Olomouc, ČR
3. ročník MEMO, 24. – 29. 9. 2009, Poznań, Polsko
4. ročník MEMO, 9. – 15. 9. 2010, Strečno, Slovensko
5. ročník MEMO, 1. – 7. 9. 2011, Varaždin, Chorvatsko
6. ročník MEMO, 6. – 12. 9. 2012, Solothurn, Švýcarsko

Organizace a struktura soutěže

MEMO je dvoudenní matematická soutěž určená žákům středních škol. Čeští středoškoláci mohou na soutěži participovat jako jednotlivci (první den), nebo v týmové soutěži (den druhý). Každou zemi vždy zastupuje šestičlenné reprezentační družstvo sestavené ze středoškoláků, kteří však ve stejném roce nebyli účastníky MMO a současně budou v nadcházejícím školním roce stále žáky středních škol (nejsou žáky maturitních ročníků), viz např. [38], popř. [39].

Časový limit individuální části, která obsahuje 4 soutěžní úlohy z oblasti algebry, geometrie, kombinatoriky a teorie čísel, je vymezen na 5 hodin. Týmová část, ve které týmy řeší celkem 8 úloh, obsahuje po 2 soutěžních úlohách z každého oboru matematiky. Soutěž týmů je velmi zajímavá právě tím, že soutěžící řeší zadané úlohy ve vzájemné spolupráci a jsou tak nuceni diskutovat možné postupy a řešení. Každá ze soutěžních úloh je oceněna maximálně 8 body a soutěžícím je povoleno používat pouze psací a výtvarné potřeby. Zadání soutěžních úloh jsou předkládána v mateřštině, svá řešení poté soutěžící odevzdávají taktéž ve svém mateřském jazyce. Během prvních 45 minut (po oba dny soutěže) mohou soutěžící (i týmy) pokládat písemné dotazy, na něž dostanou písemnou odpověď schválenou od mezinárodní komise, viz [38], nebo [39].

4.1.3 Matematický DUEL

Matematický duel je další významnou regionální matematickou soutěží s českou účastí, na které mohou žáci středních škol (gymnázií) měřit své síly. Přestože název soutěže obsahuje slovo duel, soutěže se pravidelně účastní žáci těchto tří měst – rakouský Graz, polský Chorzów a český Bílovec. Když nahlédneme do historie, dostaneme se do roku 1993, kdy tato matematická soutěž vznikla z iniciativy Jósefa Kalinovského ze Slezské univerzity v Katowicích (Polsko) a Jaroslava Švrčka z PřF UP Olomouc (Česká republika). Původně byla koncipována jako matematická soutěž dvou škol – odtud tedy název DUEL. Prvními účastníky byli žáci Licea Ogólnokształcącego im. Juliusza Słowackiego v Chorzówě a žáci Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci. V roce 1997 (od 5. ročníku soutěže) se k žákům těchto dvou škol připojili i žáci z rakouského Bundeserealgymnasia na Keplerstraße v Grazu.

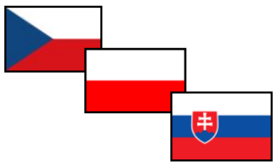
V následujících letech byla soutěž pořádána jako trojstranná, tedy mezi třemi tradičními zeměmi. Změny nastaly až v posledních ročnících, kdy se např. 18. ročníku mezinárodního Matematického duelu (2010) účastnilo pět školních týmů z Rakouska, České republiky, Polska a Rumunska. Tradičně účastnící se BRG Kepler Graz, GMK Bílovec, GJŠ Přerov, I LO Chorzów a poprvé také žáci z rumunského gymnázia CNC v Ploieşti, jako hosté. V březnu roku 2012 proběhl zatím poslední 20. ročník Matematického duelu. Organizací tohoto ročníku bylo pověřeno Gymnázium Mikuláše Koperníka v Bílovci. Celkem se matematického duelu zúčastnilo 7 evropských týmů. Kromě tradičních účastníků byli k účasti přizváni žáci středních škol z Itálie, Rumunska a Bulharska, viz např. [11].

Organizace a struktura soutěže

Soutěž Matematický duel je organizována týmem pedagogů z hostitelských škol a garanty úloh vlastní matematické soutěže z ČR, Polska a Rakouska. Každá z účastnických zemí má právo vyslat 12 reprezentantů (resp. čtyři v každé kategorii). Samotná soutěž probíhá v jednom dni ve dvou fázích - soutěž jednotlivců a týmů – a účastníci mohou soutěžit ve třech věkových kategoriích. Do kategorie A patří žáci 3. a 4. ročníků čtyřletého gymnázia, do kategorie B žáci 1. a 2. ročníku čtyřletého gymnázia a v kategorii C soutěží žáci 3. a 4. tříd osmiletého gymnázia. Týmy jsou čtyřčlenné, přičemž jednotlivá reprezentační družstva tvoří vždy žáci jedné a téže zúčastněné školy z jednotlivých zemí. Každý rok je jedno z gymnázií (měst) v pozici hostitele Matematického duelu a žáci ze všech zúčastněných gymnázií soutěží právě zde, na půdě této školy. V roli pořadatelů a hostitelů se jednotlivé školy pravidelně střídají.

Součástí Matematického duelu je kromě vlastní soutěže i poznávání přírodních a kulturních zajímavostí účastnických zemí, navázání přátelství, vztahů a také rozvoj jazykových znalostí – zadání soutěžních úloh je pro všechny soutěžící v angličtině [40], [41], popř. [42].

4.1.4 Přípravné střetnutí česko-polsko-slovenské (Czech – Polish – Slovak Match)



Společné dějiny a vzájemná sounáležitost, které vždy spojovaly Českou a Slovenskou republiku se projevily i v matematickém dění a v roce 1995 vzniklo přípravné střetnutí česko-slovenské. Česko-slovenské klání je poslední přípravou obou reprezentačních šestičlenných družstev před aktuálním ročníkem MMO. V roce 2001 se k oběma republikám připojilo i Polsko a soutěž byla přejmenována na Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské (střetnutí CPS). Díky této soutěži mohou čeští, slovenští a polští žáci změřit své síly na úrovni, která odpovídá typu MMO, a to každoročně, vždy v červnu.

V květnu roku 2012 (20. – 23. května) se v polské Mszaně poprvé uskutečnil 1. ročník přípravného střetnutí CPS pro řešitele kategorie C (žáci do 15 let) pod názvem: Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów (zkratka CPSZMJ). Tato matematická soutěž určená mladší věkové kategorii byla organizována polskými kolegy, přičemž samotná CPSZMJ měla podobný průběh jako MMO či standardní CPS střetnutí. CPSZMJ probíhala ve dvou částech – v individuální a v týmové. V individuální části řešili žáci v 3,5 hodinovém časovém limitu 5 soutěžních úloh. V týmové části byli soutěžící rozděleni do 6-ti tříčlenných smíšených (česko-polsko-slovenských) družstev, viz např. [85].

Organizace a struktura soutěže

Uvedená matematická soutěž probíhá jako poslední fáze příprav na MMO. Závěrečného matematického trojstřetnutí se účastní šestičlenná družstva žáků středních škol jednotlivých zemí. Organizace a struktura matematického střetnutí je přizpůsobena stylu III. kola MO a podmínkám MMO. Soutěž probíhá ve 2 dnech, v časovém limitu 4 hodin a 30 minut, přičemž každý den účastníci řeší 3 soutěžní úlohy, které jsou ohodnoceny do výše 7 bodů, tzn. lze dosáhnout maximálně 42 bodů, viz např. [13].

Následující část diplomové práce bude zaměřena na další evropské regionální matematické soutěže, na nichž však žáci České republiky neparticipují.

4.1.5 Balkánská matematická olympiáda (The Balkan Mathematical Olympiad)

Významnou regionální matematickou soutěží určenou středoškolákům zemí jihovýchodní Evropy je Balkánská matematická olympiáda, která existuje již od roku 1984. Prvního ročníku, pořádaného v Řecku, se zúčastnili středoškoláci z Řecka, Bulharska, Rumunska a Kypru. V pozdějších letech se počet členů rozšířil o dalších sedm, a v dnešní době se Balkánské matematické olympiády účastní žáci jedenácti zemí Balkánského poloostrova. Mezi tzv. členské země se řadí: Albánie, Bosna a Hercegovina, Bulharsko, Černá Hora, Kypr, Makedonie, Moldávie, Rumunsko, Řecko, Srbsko a Turecko. Od roku 2004 jsou k účasti zvány další země, které se označují jako nečlenské (např. v roce 2011 byli k účasti přizvány jako hosté rovněž tyto země: Ázerbájdžán, Francie, Indonésie, Itálie, Kazachstán, Saudská Arábie, Tádžikistán, Turkmenistán a Velká Británie). Z výčtu nečlenských zemí je patrné, že jsou k účasti na Balkánské MO zvány i mimoevropské země z různých světových kontinentů. Na přelomu dubna a května 2012 proběhl již 29. ročník Balkánské MO, a to v turecké Antalyi.

Účast na Balkánské matematické olympiádě je velmi cennou zkušeností jak pro soutěžící, tak pro jejich učitele. Soutěžící si mohou, stejně jako v jiných regionálních matematických soutěžích, vyzkoušet atmosféru a podmínky mezinárodní soutěže dříve, než se vydají reprezentovat svou zemi na Mezinárodní matematickou olympiádu. Navíc učitelé mohou získat cenné informace například o školních osnovách a školských systémech v účastnických zemích.

Organizace a struktura soutěže

Každou z účastnických zemí může na Balkánské matematické olympiádě reprezentovat šest soutěžících ve věkové hranici od 15 – 20 let, přičemž všichni soutěžící musí být středoškoláci. Každoročně jsou zadávány 4 soutěžní úlohy, kdy na jejich řešení mají žáci vymezený časový limit 4 hodin a 30 minut. Za každou soutěžní úlohu mohou soutěžící získat až 10 bodů, v celkovém hodnocení mohou být tedy oceněni až 40 body. Oficiálním jazykem na Balkánské matematické olympiádě je anglický jazyk, avšak každý soutěžící má možnost volby, v jakém jazyce (angličtina x mateřština) bude svá řešení psát.

Kromě této formy Balkánské matematické olympiády, která je určena matematicky nadaným středoškolákům ve věku od 15 do 20 let (mimo VŠ), existuje také Balkánská matematická olympiáda juniorů. Ta je určena žákům, kteří ještě nedosáhli věkové hranice 16 let, viz např. [28]. Zmíněná matematická soutěž je podrobněji popsána v následujícím odstavci. Mezi těmito evropskými matematickými soutěžemi ji uvádíme z toho důvodu, že existence matematických soutěží pro mladší žáky je velmi důležitá a Balkánská matematická olympiáda juniorů je již dlouho fungujícím reprezentantem těchto matematických soutěží.

Balkánská matematická olympiáda juniorů
(The Junior Balkan Mathematical Olympiad)

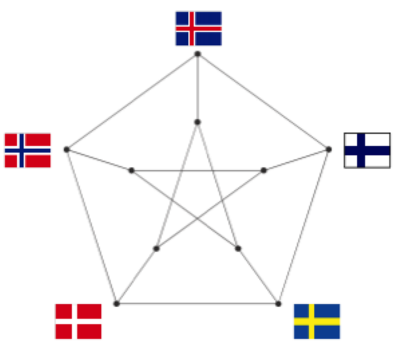
Balkánská matematická soutěž juniorů je ve své podobě i organizaci obdobou klasické Balkánské MO. Je určena těm soutěžícím, kteří ještě nedosáhli věkové hranice 16 let. Soutěž vznikla v roce 1997 z iniciativy několika matematiků účastnických zemí - Vladimir Stojanović (Srbsko), Christo Malčeski (Makedonie) a Ivan Tonov (Bulharsko). Již 15. ročník juniorské Balkánské MO se konal v loňském roce na Kypru, viz např. [2] nebo [29].

Mezi tradiční účastníky (členské země) Balkánské MO juniorů se řadí: Albánie, Bosna a Hercegovina, Bulharsko, Černá Hora, Kypr, Makedonie, Moldávie, Rumunsko, Řecko, Srbsko a Turecko (v posledním ročníku bez účasti Turecka a Albánie). V roce 2011 se jako „nečlenské“ zúčastnily také následující země: Ázerbájdžán, druhý tým Kypru, Kazachstán, Tádžikistán a Turkmenistán. Oficiálním jazykem je i zde angličtina, avšak řešení mohou soutěžící odevzdávat v jazyce, který si sami zvolí (mateřský či anglický jazyk).

Na ukázku uvádíme zadání Balkánské MO z roku 2011 (viz 6. kapitola). Vzorová řešení soutěžních úloh lze najít na oficiálních stránkách olympiády, odkud bylo pro potřeby této práce převzato i zadání úloh, viz [28].

4.1.6 Matematická soutěž zemí Skandinávie (The Nordic Mathematical Contest)

Matematická soutěž zemí Skandinávie je určena talentovaným žákům středních škol 5-ti severských zemí. Každoročně se soutěže účastní středoškoláci z Norska, Švédska, Finska, Dánska a Islandu. Tato matematická soutěž vznikla v roce 1987 s cílem připravit soutěžící k účasti v soutěži mezinárodního charakteru, viz např. [9]. Pořádání soutěže je také cenným zdrojem informací pro tzv. národní organizační výbory, jejichž úkolem je výběr účastníků na MMO.



Na jaře roku 2012 se konal dosud poslední, 26. ročník soutěže.

Organizace a struktura soutěže

Jak již bylo výše uvedeno, průběh Matematické soutěže zemí Skandinávie v jednotlivých zemích zajišťují národní organizační výbory, které jsou zodpovědné za výběr a přípravu národních týmů na MMO. Dle pravidel má každá ze zúčastněných zemí právo vyslat maximálně 20 středoškoláků, kteří ještě nedosáhli věkové hranice 20 let. Každý z účastníků absolvuje soutěž ve své škole pod dohledem supervizora. Předběžně opravená žákovská řešení s komentářem a celkovým překladem jsou poté zasílána do organizátorské země, která tyto řešení vyhodnocuje. V časovém rozmezí 4 hodin řeší žáci čtyři soutěžní úlohy, kdy za každou úlohu mohou získat až 5 bodů. Zadání soutěžních úloh jsou jednotlivým účastníkům předkládána v mateřštině a výhodou pro soutěžící je jistě i fakt, že celková svá řešení soutěžních úloh mohou taktéž psát ve své mateřštině. K řešení zadaných úloh mohou žáci využít pouze psacích a výtvarných potřeb viz např. [9], [25], nebo [26].

4.1.7 Baltská matematická soutěž (The Baltic Way)

Baltská matematická soutěž je určena středoškolákům severoevropských zemí, které leží na pobřeží Baltského moře. Ve srovnání s ostatními matematickými soutěžemi je Baltic Way výjimečná, jedná se totiž o týmová matematickou soutěž. Netradiční pojmenování – Baltic Way (Baltská cesta) získala soutěž po významné historické události, kterou byla mezinárodní demonstrace pobaltských států za svobodu v roce 1989. Lidé ze všech tří pobaltských republik – Estonska, Lotyšska a Litvy – vytvořili tzv. „lidský řetěz“ nebo „cestu“ a to tak, že více než milion obyvatel těchto států spojilo řetězem lidských rukou vzdálenost přesahující 600 km a došlo tak k symbolickému propojení tří hlavních měst, Tallinu, Rigy a Vilniusu. Po osamostatnění pobaltských států a uvolnění jejich hranic již nic nebránilo tomu, aby se v roce 1990 konal 1. ročník této matematické soutěže, kterého se účastnily týmy Estonska, Lotyšska a Litvy. V této sestavě proběhly pouze první dva ročníky soutěže. Od roku 1992 se soutěž postupně rozšiřovala do zemí, jejichž pobřeží omývá Baltské moře a také na vzdálený Island.

V současnosti se této týmové matematické soutěže pravidelně účastní 11 týmů z těchto zemí: Litva, Lotyšsko, Estonsko, Dánsko, Norsko, Švédsko, Finsko, Německo (vysílá tým, který zastupuje pouze jeho nejsevernější část – Rostock a Hamburg), Polsko, Rusko (zástupce z Petrohradu) a Island (účast z historických důvodů – jako první uznal nezávislost nově vzniklých pobaltských států). V některých uplynulých ročnících byli k soutěži přizváni další účastníci: 2001 – Izrael, 2004 – Bělorusko, 2005 – Belgie, 2011 – Jihoafrická republika. Zatím poslední ročník Baltské matematické soutěže (22. ročník) se konal v listopadu roku 2011 na pobřeží Baltského moře, a to v německém Greifswaldu (logo vpravo nahoře), viz např. [21] nebo [27].

Organizace a struktura soutěže

Baltská matematická soutěž je výhradně soutěží týmovou. Každý tým je složen z pěti žáků, kteří spolupracují na řešení jednotlivých soutěžních úloh. Soutěž tedy kromě výborných matematických znalostí vyžaduje i schopnost spolupráce v kolektivu. Čas vymezený k řešení 20 soutěžních úloh je stanoven na 4 hodiny a 30 minut.

Protože se jedná o téměř ojedinělou matematickou soutěž svého druhu, je v práci přiloženo k nahlédnutí zadání 10 (z celkových 20) soutěžních úloh z dosud posledního ročníku soutěže (viz 6. kapitola). V dalších jazykových verzích viz např. [27].

4.1.8 Matematická olympiáda zemí Beneluxu (The Benelux Mathematical Olympiad)

Dále se ve výčtu matematických soutěží určených žákům středních škol dostáváme mezi „nejmladší“ matematické soutěže. Matematická olympiáda zemí Beneluxu je jednou z nových matematických soutěží, která má za sebou již 4 úspěšné ročníky. Matematická olympiáda zemí Beneluxu je určena žákům středních škol všech zemí tohoto volného společenství – Beneluxu (Be – Belgie, Ne – Nizozemí, Lux – Lucembursko, zkratky jsou tvořeny z anglických názvů jednotlivých zemí). 1. ročník této olympiády se konal na jaře roku 2009 a již v 2. ročníku soutěže byli nově přizváni další účastníci ze Slovinska, Španělska a Švýcarska. Organizací a přípravou 3. ročníku Matematické olympiády Beneluxu bylo v roce 2011 pověřeno Lucembursko. Zatím poslední, 4. ročník Matematické olympiády zemí Beneluxu, proběhl v dubnu roku 2012 v Belgii, v oblasti Marlagne.

Organizace a struktura soutěže

Svou strukturou se MO zemí Beneluxu velmi podobá ostatním matematickým soutěžím tohoto typu. Je určena žákům středních škol, přičemž soutěžící nesmí být studenty vysokých škol. V 2. ročníku MO byla dokonce stanovena konkrétní podmínka, že se mohou účastnit pouze ti soutěžící, kteří byli narozeni po dubnu 1990. K řešení jsou soutěžícím zadány 4 soutěžní úlohy, kdy každá z nich může být ohodnocena až 7 body. Soutěžícím je povoleno psát svá řešení v mateřštině, a to v časovém horizontu 4 hodin a 30 minut, viz např. [30], popř. [31].

4.1.9 Evropská dívčí matematická olympiáda (The European Girls´ Mathematical Olympiad)

Velmi zajímavou matematickou soutěží je již dlouho připravovaná Evropská dívčí matematická olympiáda, která má být po vzoru Čínské dívčí matematické olympiády [33] určena pouze dívkám školního věku. Evropská dívčí matematická olympiáda vznikla s cílem dát více dívkám šanci soutěžit v matematických soutěžích na mezinárodní úrovni. Místem konání 1. ročníku Evropské dívčí matematické olympiády bylo významné britské univerzitní město Cambridge, a to v termínu od 10. do 16. dubna 2012, viz např. [32]. 1. ročníku EGMO se zúčastnilo kolem 70 dívek z celkem 20 zemí. Nejúspěšnějšími soutěžícími 1. ročníku byly dívky z Polska, Rumunska a Ukrajiny. Kromě evropských států se EGMO zúčastnily také dívky z USA či ze Saudské Arábie, jako hosté. Česká republika se do prvního ročníku EGMO nezapojila.

Organizace a struktura soutěže

EGMO se vesměs řídí pravidly MMO. Inspirace Čínskou dívčí matematickou olympiádou je zřejmá ze struktury soutěže, kdy se soutěží ve 2 dnech a každý den soutěžící dívky řeší 4 soutěžní úlohy v časovém limitu 4 hodin a 30 minut. Za každou ze soutěžních úloh lze získat až 7 bodů. Celkem mohou danou zemi reprezentovat 4 dívky – středoškolačky. Dívčí olympiáda je v Evropě novinkou, ale už teď je jasné, že bude mít úspěch, viz [32].

4.1.10 Některé další regionální matematické soutěže

Matematické soutěže uvedené v této kapitole nepatří mezi ty nejdůležitější matematické soutěže pro žáky středních škol v evropských státech. Při studiu odborné literatury a internetových zdrojů se však objevují zmínky o těchto matematických soutěžích. Pro dokreslení situace a rozšíření obsahu této kapitoly tedy uvádíme některé další regionální matematické soutěže, na nichž čeští žáci neparticipují. V této kapitole není dodrženo chronologické uspořádání jednotlivých soutěží.

Matematická soutěž oblasti Středozemního moře (Mediterranean Mathematical Competition)

Další regionální soutěží určenou středoškolákům, která je determinována zeměpisnými podmínkami, je Mediterranean Mathematical Competition (Matematická soutěž zemí oblasti Středozemního moře), známá též jako Peter O‘Halloran Memorial. Soutěž byla založena v roce 1998 a je každoročně pořádána na přelomu března a dubna v každém z účastnických států, ne však ve stejné datum. Kromě států, které leží na pobřeží Středozemního moře, se této matematické soutěže účastní také státy s nimi sousedící, a to jako hosté.

Během soutěžního klání řeší žáci středních škol 4 soutěžní úlohy (za úplné řešení každé z nich lze získat maximálně 7 bodů), a to v časovém limitu 4 hodin a 30 minut. Účast na této matematické soutěži je podmíněna pozváním k účasti, viz např. [43], nebo [44].

Přestože tato soutěž existuje již od roku 1998, neexistuje dostatek odborných materiálů či informačních zdrojů, které by umožňovaly detailnější popis této matematické soutěže. Jediné, co lze aktuálně sledovat, jsou zadání soutěžních úloh z jednotlivých ročníků, viz např. [45].

Maďarsko-izraelská matematická soutěž (Hungary-Israel Binational Mathematical Competition)

Maďarsko-izraelská matematická soutěž vznikla v roce 1990 a od tohoto roku je každoročně organizována jednou z pořadatelkých zemí, vždy na jaře. Je určena žákům středních škol dvojice účastnících se států – Maďarska a Izraele. Soutěžit lze ve dvou kategoriích,

v soutěži jednotlivců (k řešení je předkládáno 6 soutěžních úloh) a v soutěži týmů (předkládáno 5 – 7 soutěžních úloh), viz např. [44].

Dunajská matematická olympiáda
(Donova Mathemtical Olympiad)

V roce 2005 se v rumunském městě Călărşi, které leží nedaleko řeky Dunaje, uskutečnil 1. ročník mezinárodní Dunajské matematické olympiády. Jde o matematickou soutěž, jejímiž účastníky mohou být žáci středních škol všech zemí, přes které řeka Dunaj (Donova, Danube) protéká. 1. ročníku olympiády se zúčastnily pouze 4 země: Rumunsko, Jugoslávie, Bulharsko a Moldávie. Soutěžícím byly k řešení předkládány 4 soutěžní úlohy, avšak poslední záznamy z roku 2010 dokazují, že se počet řešených úloh zvýšil na 5, viz např. [45].

Matematická soutěž Leonarda Eulera
(Leonard Euler Math Olympiad)

Matematická soutěž Leonarda Eulera je další ruskou matematickou soutěží, do které se zapojují tyto státy: Rusko, Kazachstán, Bulharsko, Bělorusko, Ukrajina a Litva. Soutěž probíhá rozmezí 2 dnů a každý den řeší soutěžící 4 soutěžní úlohy. Připomínáme, že pro ruské soutěže je typická stupňovitost – soutěž tedy probíhá na několika úrovních (například město, okres, region), [53].

V kapitole 4.1 byl zpracován přehled těch nejznámějších evropských regionálních matematických soutěží, který nepochybně nebyl zcela vyčerpán. I z tohoto důvodu může být tato diplomová práce východiskem pro jiné závěrečné práce, jejichž cílem by mohlo být podrobné zmapování všech regionálních soutěží v rámci Evropy.

Pro úplnost přehledu matematických soutěží byl zmapován také přehled současných mezinárodních matematických soutěží s celosvětovou působností, kterých se mohou žáci evropských středních škol účastnit. Nejprve je opět uveden výčet mezinárodních matematických soutěží s českou účastí. Následují neméně zajímavé mezinárodní matematické soutěže, avšak bez české participace.

4.2 Mezinárodní matematické soutěže s celosvětovou působností

4.2.1 Mezinárodní matematická olympiáda (The International Mathematical Olympiad)

V úvodu kapitoly uvádíme nejvýznamnější a zároveň nejstarší mezinárodní matematickou soutěž, kterou je Mezinárodní matematická olympiáda (MMO). Jde o prestižní matematickou soutěž, která je nejvyšším stupněm mezi matematickými soutěžemi. MMO je určena těm nejlepším z nejlepších matematicky talentovaných žáků středních škol. V současnosti se této matematické soutěže účastní žáci více než 100 zemí z 5 kontinentů, každá reprezentovaná 6-ti členným družstvem doprovázeným vedoucím, zástupcem a popřípadě i diváky (rodinnými příslušníky).

První ročník MMO se konal v roce 1959 v Rumunsku za účasti těchto zemí: Maďarsko, Bulharsko, Polsko, Československo, Východní Německo a SSSR. Od tohoto roku je MMO pořádána každoročně, s výjimkou v roce 1980, kdy byla MMO zrušena kvůli lidovým střetům v Mongolsku. Z počátku se MMO účastnily výhradně východní země, a to z důvodu silného vlivu bývalého Sovětského svazu. Postupně se však olympiáda rozšířila do dalších zemí celého světa. V roce 2012 se uskuteční již 53. ročník MMO, a to v daleké Argentině.

MMO má kromě oficiálního loga (vpravo) také oficiální vlajku (1995) a svou vlastní hymnu (1997) se španělským textem. Vlajka MMO je bílá a uprostřed nese logo MMO.

Důležitost MMO a obecně velký význam práce s matematickými talenty formou matematických soutěží dokládá i fakt, že někteří účastníci MMO dosáhli mimořádných úspěchů.

Organizace a struktura soutěže

Vzhledem k tomu, že je MMO matematickou soutěží na nejvyšší možné úrovni a její strukturou jsou inspirovány mnohé další matematické soutěže, bude organizace a struktura soutěže rozebrána detailněji. V mnoha případech se vyskytuje ustálené slovní spojení IMO typ (MMO typ) – nápodoba, inspirace či dodržení pravidel, organizace a struktury MMO v jiných matematických soutěžích.

MMO je matematickou soutěží jednotlivců, přičemž každou zemi může reprezentovat 6 žáků středních škol. Přestože se v týmové soutěži oficiálně nesoutěží, jsou týmové výsledky velmi často vzájemně porovnávány. Výběr reprezentantů pro účast na MMO je odlišný stát od státu. Většinou jde o systém národních soutěží, ve kterém se účastníci postupně třídí, až do konečného počtu možných účastníků na MMO.

Každá z účastnících se zemí, mimo hostitelskou, předkládá návrhy soutěžních úloh, které jsou dále posuzovány a diskutovány komisí. Dříve, než MMO proběhne, vybírá komise ze všech navrhovaných soutěžních úloh (z tzv. longlistu) 20 – 30 nejvhodnějších soutěžních úloh (tzv. shortlist), z kterého je nakonec vybráno 6 soutěžních úloh do konečného zadání. Z tohoto důvodu musí být vedoucí jednotlivých týmů po celou dobu od svých žáků odděleni, neboť o problémech, které se v soutěži mohou vyskytnout jsou již informováni. Česká republika již několik let pravidelně přispívá do výše zmíněného užšího výběru, do shortlistu. Spektrum obtížnosti soutěžních úloh je opravdu široké. Od náročných úloh z oblasti komplexní či projektivní geometrie, až k teorii čísel. Hojně jsou zastoupeny soutěžní úlohy obsahující algebraické nerovnosti, komplexní čísla nebo konstrukční geometrické problémy. Obecně lze soutěžní úlohy zařadit do 4 oborů matematiky: algebry, kombinatoriky, geometrie a teorie čísel. K řešení jednotlivých soutěžních úloh není potřeba znalosti infinitesimálního počtu či metod matematické analýzy, ale je povoleno tyto metody při řešení používat. Řešení jsou ve většině případů krátká a pochopitelná. Zadání soutěžních úloh jsou srozumitelná i žákům se základními znalostmi matematiky, avšak k řešení je nebytné znát o mnoho více. Většinou jde spíše o elegantní metody řešení, či určitou dávku vynalézavosti, kterou musí soutěžící použít, aby danou úlohu vyřešili.

Samotná soutěž probíhá po dobu dvou dnů, přičemž každý den řeší soutěžící 3 matematické úlohy v časovém limitu 4 a ½ hodiny. Každá soutěžní úloha je ohodnocena do výše 7 bodů a celkem je tedy možné získat 42 bodů. Úlohy jsou zadávány v mateřském jazyce jednotlivých účastníků, taktéž soutěžící odevzdávají svá řešení v mateřštině.

Na začátku soutěže, v rámci vymezeného času 4 a ½ hodiny, mohou soutěžící – po dobu 30 minut – klást své písemné dotazy, které budou ještě před začátkem soutěže zodpovězeny. V závěru soutěže je pak oceněna nejméně půlka soutěžících. Minimální zisky bodů pro získání zlaté, stříbrné a bronzové medaile jsou určeny tak, že poměr medailistů je následující 1:2:3. Tedy 1/12 soutěžících je oceněna zlatou, 1/6 stříbrnou a 1/4 bronzovou medailí. Soutěžící, kteří nedosáhnou na medailové pozice, ale alespoň jednu soutěžní úlohu vyřeší za plný počet bodů (7 bodů), získávají čestné uznání – honourable mention.

Mezi dlouhodobě nejúspěšnější řešitele na MMO patří Čína, Rusko a USA. Oficiálními jazyky soutěže jsou: angličtina, francouzština, němčina, ruština a (španělština), viz např. [23], [51], popř. [52].

Pro názornost a přehlednost uvádíme na následující straně časovou osu MMO v letech 1959 – 2011, viz [51].

Mezinárodní matematická olympiáda					
Ročník MMO	Rok konání MMO	Pořadatelská země	Místo konání MMO	Počet účastnících se zemí	Počet soutěžících
1.	1959	Rumunsko	Braşov	7	52
2.	1960	Rumunsko	Sinaia	5	39
3.	1961	Maďarsko	Veszprém	6	48
4.	**1962**	**Československo**	**České Budějovice**	**7**	**56**
5.	1963	Polsko	Wrocław	8	64
6.	1964	SSSR	Moskva	9	72
7.	1965	NDR	Berlin	10	80
8.	1966	Bulharsko	Sofia	9	72
9.	1967	Jugoslávie	Cetinje	13	99
10.	1968	SSSR	Moskva	12	96
11.	1969	Rumunsko	Bukurešť	14	112
12.	1970	Maďarsko	Keszthely	14	112
13.	**1971**	**Československo**	**Žilina**	**15**	**115**
14.	1972	Polsko	Toruń	14	107
15.	1973	SSSR	Moskva	16	125
16.	1974	NDR	Erfurt	18	140
17.	1975	Bulharsko	Burgas	17	135
18.	1976	Rakousko	Lienz	18	139
19.	1977	Jugoslávie	Bělehrad	21	155
20.	1978	Rumunsko	Bukurešť	17	132
21.	1979	Velká Británie	Londýn	23	166
22.	1981	USA	Washington	27	185
23.	1982	Maďarsko	Budapešť	30	119
24.	1983	Francie	Paříž	32	186
25.	**1984**	**Československo**	**Praha**	**34**	**192**
26.	1985	Finsko	Joutsa	38	209
27.	1986	Polsko	Varšava	37	210
28.	1987	Kuba	Havana	42	237
29.	1988	Rakousko	Canberra	49	268
30.	1989	Německo	Braunschweig	50	291
31.	1990	Čína	Peking	54	308
32.	1991	Švédsko	Sigtuna	56	318
33.	1992	Rusko	Moskva	56	322
34.	1993	Turecko	Istanbul	73	413
35.	1994	Hong Kong	Hong Kong	69	385
36.	1995	Kanada	Toronto	73	412
37.	1996	Indie	Mombaj	75	424
38.	1997	Argentina	Mar del Plata	82	460
39.	1998	Taiwan	Tajpej	76	419
40.	1999	Rumunsko	Bukurešť	81	450
41.	2000	Korea	Taejon	82	461
42.	2001	USA	Washington	83	473
43.	2002	Velká Británie	Glasgow	84	479
44.	2003	Japonsko	Tokyo	82	457
45.	2004	Řecko	Athény	85	486
46.	2005	Mexiko	Mérida	91	513
47.	2006	Slovinsko	Ljubljana	90	498
48.	2007	Vietnam	Hanoj	93	520
49.	2008	Španělsko	Madrid	97	535
50.	2009	Německo	Brémy	104	565
51.	2010	Kazachstán	Astana	97	523
52.	2011	Nizozemí	Amsterdam	101	564
53.	2012	Argentina	Mar del Plata		
54.	2013	Kolumbie	?		
55.	2014	Jihoafrická republika	?		
56.	2015	Thajsko	?		

Podle hostitelské země MMO se každoročně mění i logo MMO. Pro zajímavost uvádíme několik specifických log MMO s typickými znaky hostitelských zemí.

4.2.2 Turnaj měst (The Tournament od Towns)

Jak již bylo v úvodu této práce uvedeno, prvopočátky matematických soutěží mají své kořeny i v Rusku (dříve Sovětský svaz). A právě z Ruska se postupně do celého světa rozšířila matematická soutěž, ve které mohou žáci středních škol reprezentovat města, v nichž studují. Turnaj měst (anglicky: *The International Mathematics Tournament of the Towns,* rusky: *Турнир Городов* nebo *Международный Математический Турнир Городов*) je populární mezinárodní matematickou soutěží, které se každoročně zúčastní přes 100 000 žáků středních škol z více než stovky měst celého světa, viz např. [17], [18], [19], nebo [20].

První ročník matematického turnaje, který se konal v roce 1979/1980, nenesl dnešní pojmenování soutěže. Byl známý jako Olympiáda tří měst – Moskvy, Kyjeva a Rigy. První tři ročníky soutěže se konaly vždy jednou ve školním roce, ale již od čtvrtého ročníku probíhá soutěž ve dvou bězích – v jarním a podzimním – tedy dvakrát do roka. Každý běh má přitom dvě části – přípravnou a soutěžní.

Postupem času se soutěž začlenila do Akademie věd Sovětského svazu a podařilo se jí získat potřebné uznání. Tento fakt umožnil dalším východoevropským zemím, resp. městům, účastnit se této mezinárodní matematické soutěže. V roce 1988 se jako první západní, anglicky mluvící město, zúčastnila Turnaje měst také Canberra. Popularita této matematické soutěže rychle rostla a postupně se do Turnaje měst zapojovala i další města. Například 12. ročníku (1990/1991) se zúčastnilo 65 měst z Austrálie, Bulharska, Německa, Řecka, Izraele, Kanady, Kolumbie a dalších světových zemí. Od 28. ročníku (2006/2007) se do Turnaje měst úspěšně zapojili také matematicky talentovaní žáci středních škol českých měst – Prahy, Opavy, Bílovce, Přerova a dalších, viz např. [34], nebo [35].

V současnosti se soutěže účastní středoškoláci ze 120 měst, 25 zemí celého světa. Mezi nejaktivnější účastníky patří Rusko, Ukrajina, Bulharsko, Srbsko a další země bývalé Jugoslávie. Ze zemí, které dříve nepatřily mezi země tzv. lidově demokratického bloku, můžeme jmenovat například tyto: Austrálii, Kanadu, Kolumbii, Argentinu, Brazílii, Německo, Francii, Švédsko, Rakousko, Lucembursko, Izrael, Nový Zéland, USA a Taiwan.

V současné době je Turnaj měst uznávanou celosvětovou soutěží, a to díky své tradici a vysoké kvalitě v podobě původních netradičních úloh, na kterých se podílejí přední světoví odborníci na práci s talenty. Organizační centrum Turnaje měst se nachází v Moskvě [34], pro mimoevropské země plní stejnou funkci australská metropole Canberra, viz např. [34], [35], nebo [36].

Organizace a struktura soutěže

Jak již bylo výše zmíněno, Turnaj měst je určen žákům středních škol, kteří na soutěži reprezentují město, ve kterém studují, přičemž město může být reprezentováno více středními školami. Turnaj měst probíhá ve dvou bězích – jarním a podzimním. Obou běhů se mohou soutěžící účastnit ve dvou kategoriích. Kategorie JUNIOR je určena mladším středoškolákům (1. a 2. ročníky), případně žákům 9. tříd ZŠ, do kategorie SENIOR patří žáci 3. a 4. ročníků čtyřletých gymnázií, SOŠ a jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Maximální věková hranice pro účast na turnaji je 17 let. Každý běh má dvě úrovně obtížnosti – přípravné úlohy, v angličtině označované jako O – level a soutěžní úlohy, označované A – level. Soutěžící mohou soutěžit v obou úrovních, nebo si jednu zvolit. Přípravné úlohy jsou jednodušší, jsou vhodné pro začátečníky a lze za ně dosáhnout menšího bodového ohodnocení. Soutěžní úlohy jsou ohodnoceny vyšší bodovou dotací a ty nejobtížnější z nich dokáže vyřešit jen malé procento ze všech soutěžících. Začátečníci mají při řešení soutěžních úloh jen velmi malou šanci. Soutěžící řeší úlohy v rámci každého města vždy na jednom místě, všichni ve stejný čas, nejprve přípravné úlohy a s týdenním či čtrnáctidenním odstupem pak i úlohy soutěžní. V rámci přípravných úloh řeší soutěžící 5 zadaných úloh. Zkušenosti získané z přípravných úloh pak mohou uplatnit při řešení zadání 7 úloh soutěžních. Žáci řeší dané úlohy individuálně a jsou vyžadována úplná řešení daných soutěžních úloh. Do konečných výsledků se žákům započítávají tři nejlépe ohodnocené úlohy ze všech řešených (tedy z přípravných i ze soutěžních úloh). Přestože jde o soutěž jednotlivců, na závěr se výsledky všech účastníků v rámci jednoho města vyhodnotí jako celek a následně se korelované výsledky (korelace různými koeficienty – např. je zohledněn počet obyvatel žijících v daném městě) odesílají do center této mezinárodní soutěže – Turnaje měst. Národní (české) centrum soutěže se formovalo od roku 2006 na Katedře algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, [35], nebo [37].

V tabulce uvádíme přehled českých účastnických měst od roku 2006 do současnosti.

Ročník	Běh	Bílovec	Frenštát p. R.	Hranice	Olomouc	Opava	Praha	Přerov
28.	podzim 06	✓					✓	
28.	jaro 07	✓			✓		✓	✓
29.	podzim 07	✓			✓		✓	✓
29.	jaro 08	✓			✓		✓	✓
30.	podzim 08	✓			✓		✓	✓
30.	jaro 09	✓				✓		✓
31.	podzim 09	✓				✓	✓	✓
31.	jaro 10	✓	✓			✓	✓	✓
32.	podzim 10	✓	✓			✓		✓
32.	jaro 11	✓	✓	✓		✓		✓
33.	podzim 11	✓				✓	✓	✓
33.	jaro 12	✓				✓	✓	✓

* v tabulce byly vynechány města Benešov a Nymburk, které se účastnili jen jednou, a to na jaře 2007

4.2.3 Matematický klokan (Le Kangourou des Mathématiques)

Zatímco Mezinárodní matematická olympiáda je považována za jednu z prestižních matematických soutěží s obtížnými soutěžními úlohami, následující matematická soutěž získala svou oblíbenost a popularitu mezi žáky a učiteli zejména díky velké pestrosti soutěžních úloh. Soutěž bývá žáky i učiteli hodnocena jako přijatelnější a zajímavější, než například MO, hlavně díky své přístupnosti širšímu počtu žáků. Matematický klokan je jednou z nejznámějších mezinárodních matematických soutěží pro žáky základních i středních škol. Podle klokana (anglicky: *kangaroo*) - obsaženého

v názvu soutěže není těžké odhadnout, odkud se tato populární matematická soutěž rozšířila do Evropy. V roce 1980 vznikla soutěž Matematický klokan v Austrálii a již v roce 1991 se konal první evropský ročník ve Francii, kde se v současnosti nachází koordinační centrum soutěže. Následně se soutěž rozšířila do Polska a v roce 1995 také do České republiky (1994 se soutěž konala jen regionálně na severní Moravě). Ročně se této soutěže zúčastní přibližně 6 miliónů řešitelů ze čtyř světových kontinentů. Vysoké účasti se těší i česká verze Matematického klokana, kdy počet řešitelů přesáhl hodnotu 300 000. Konkrétní počty účastníků této populární matematické soutěže od roku 1995 do roku 2011 naleznete v tabulce v závěru kapitoly.

Organizace a struktura soutěže

V ČR je Matematický klokan organizován JČMF ve spolupráci s Katedrou matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci a Katedrou algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci (v úvodu kapitoly uvedeno české logo této matematické soutěže). Z výše uvedených informací je zřejmé, že je soutěž řízena celorepublikovým centrem právě z Olomouce, přičemž pro každý kraj a okres je ustanoven důvěrník, který distribuuje soutěžní úlohy do škol. Matematický klokan patří (dle MŠMT) mezi soutěže kategorie A, tedy je plně hrazen z prostředků MŠMT.

„Australského klání“ se žáci mohou účastnit každoročně, vždy třetí týden v březnu, a to v následujících šesti kategoriích: Klokánek (4. a 5. třída ZŠ), Benjamin (6. a 7. třída ZŠ), Kadet (8. a 9. třída ZŠ), Junior (1. a 2. ročník SŠ) a Student (3. a 4. ročník SŠ). Za relativně novou kategorii můžeme v ČR považovat kategorii Cvrček (2. a 3. třída), která se k pěti původním kategoriím připojila až 10 let později. Soutěž probíhá v jednom termínu ve všech krajích České republiky a žáci tak absolvují všechna kola (školní, oblastní, republikové a mezinárodní) na svých domovských půdách, ve svých lavicích. Ve všech uvedených kategoriích soutěžící řeší 24 testových úloh, kdy mohou vybírat z pěti možných nabízených řešení (zavřené úlohy – „multiple choice“). Soutěžní úlohy jsou řazeny do tří skupin podle obtížnosti, kdy za správnou odpověď lze získat 3 body (snadnější úlohy), 4 body (středně obtížná úloha) nebo 5 bodů (obtížnější úlohy), naopak za špatnou odpověď je soutěžící penalizován a jeden bod se mu strhává. Aby se soutěžící nemohli ve svých výsledcích dostat do záporných hodnot, dostávají do vínku 24 bodů. Pokud soutěžící neodpoví, nezatrhne ani správnou, ani špatnou odpověď, obdrží nula bodů. Horní bodová hranice, které mohou soutěžící dosáhnout, činí 120 bodů. V kategoriích určených mladším žákům (ZŠ) - Klokánek, Benjamin a Kadet - je na řešení všech soutěžních úloh vymezen časový limit 60 minut, pro starší žáky (SŠ) v kategoriích Junior a Student je časový limit prodloužen o 15 minut, celkem tedy mají na řešení všech úloh 75 minut čistého času. Jedná se o jednorázovou soutěž, která navíc nevyžaduje od žáků úplná řešení problémů. Výsledky soutěže pro ČR jsou následně statisticky vyhodnoceny v olomouckém centru. Tyto výsledky, zadání soutěžních úloh a správné odpovědi jsou zveřejněny v každoročně vydávaném sborníku Matematický klokan (vydáván JČMF).

Pod záštitou této populární matematické soutěže se pořádají další doprovodné akce. Můžeme jmenovat například tyto: Matematický klokan pro žáky se sluchovým postižením (2004, 2005), Přírodovědný klokan (od roku 2006) nebo třeba Běh s klokanem, viz např. [24].

Tabulka Počet účastníků Matematického klokana ve všech kategoriích v letech 1995 – 2011 (tabulka byla převzata z elektronické podoby sborníku Matematický klokan 2011, viz [24])

	CVRČEK	KLOKÁNEK	BENJAMÍN	KADET	JUNIOR	STUDENT	CELKEM
1995		6 205	7 834	7 280	2 195	1 297	**24 811**
1996		18 522	30 819	27 262	6 148	3 938	**86 689**
1997		61 161	59 314	51 769	8 631	7 349	**188 224**
1998		62 963	67 417	57 653	11 580	8 484	**208 097**
1999		87 885	79 717	73 578	16 847	6 606	**264 633**
2000		95 426	87 304	81 893	20 384	10 319	**295 326**
2001		93 434	86 458	78 408	20 173	11 228	**289 701**
2002		99 204	86 785	81 440	20 479	10 428	**298 336**
2003		83 584	74 112	65 839	19 615	9 879	**253 029**
2004		78 275	75 609	68 324	17 345	9 729	**249 282**
2005	11 076*	70 886	72 090	69 425	18 333	10 690	**252 500**
2006	46 832	66 799	69 739	69 104	18 003	9 947	**280 424**
2007	60 744	70 705	66 840	71 491	17 804	10 274	**297 858**
2008	70 942	74 668	64 995	69 734	19 101	10 191	**309 631**
2009	70 084	75 624	64 258	65 694	18 711	10 599	**304 970**
2010	78 291	81 737	66 731	63 412	18 711	9 646	**318 528**
2011	79 758	84 031	65 461	60 404	16 326	8 721	**314 701**

* pouze experimentální ročník, výsledek nebyl zahrnut co celostátního součtu [24]

4.2.4 Rumunský mistr matematiky a přírodních věd (Romanian Master of Mathematics & Sciences)

Jednou z nově vzniklých mezinárodních matematických soutěží je rumunský Romanian Master of Mathematics. Soutěžící z celého světa se mohou této matematické soutěže zúčastnit každoročně, vždy v únoru, a to v hlavním městě Rumunska – v Bukurešti. Soutěž je určena žákům středních škol, avšak mohou se zúčastnit pouze žáci těch zemí, které byly do soutěže přizvány.

První ročník soutěže proběhl v roce 2008 s původním názvem Romanian Master od Mathemtacis. V roce 2010 byla k soutěži připojena sekce fyziky a došlo ke změně názvu soutěže na Romanian Master of Mathematics & Sciences. Další změnu přinesl rok 2011, kdy se k matematice a fyzice připojila další dvě soutěžní odvětví – chemie a počítače. V letošním ročníku (2012) se soutěž vrátila ke staršímu formátu a soutěžilo se opět jen v matematice a fyzice. Momentálně na předních příčkách žebříčku umístění dominuje Čína a Rumunsko.

Organizace a struktura soutěže

Vzhledem k mezinárodnímu charakteru soutěže je jasné, že úředním jazykem soutěže je angličtina. Soutěžící si mohou vybrat mezi zadáním soutěžních úloh v mateřštině nebo v angličtině. Řešení soutěžních úloh pak musí výhradně odevzdávat ve své mateřštině.

Do dvoudenní matematické soutěže vysílají účastnické země 3 – 6-ti členné družstvo středoškoláků. V prvních dvou ročnících soutěžící řešili 5 soutěžních úloh během časového limitu 4 hodin, v roce 2010 byl počet úloh i hodin redukován. V současné podobě soutěže se k řešení předkládají 3 úlohy s časovým omezením 4 hodin (v některých zdrojích uvedeno 4 hodiny 30 minut). Podmínkou je, že každý tým musí přijít s návrhem možných soutěžních úloh i s jejich řešeními, a to v angličtině.

Pro zajímavost uvádíme přehled účastníků jednotlivých ročníků, a to hlavně z důvodu výjimečné celosvětové účasti, [48], [49].

1. ročník – 2008 – Bulharsko, Jakutsko, Moldávie, Polsko, Rumunsko, Rusko, Srbsko, UK .

2. ročník – 2009 – Bulharsko, Čína, Itálie, Rumunsko, Rusko, Srbsko, UK, USA .

3. ročník – 2010 – Bulharsko, Brazílie, Čína, Itálie, Rumunsko, Rusko, Srbsko, UK, USA.

4. ročník – 2011 – Bulharsko, Brazílie, Čína, Itálie, Maďarsko, Peru, Polsko, Rumunsko, Rusko, Srbsko, UK, Ukrajina, USA.

5. ročník – 2012 – Bulharsko, Brazílie, Čína, Itálie, Maďarsko, Polsko, Rumunsko, Rusko, Srbsko, UK, Ukrajina, USA.

4.2.5 Mezinárodní turnaj mladých matematiků (The International Tournament of Young Mathematicians)

Velmi zajímavou a strukturně odlišnou matematickou soutěží je Mezinárodní turnaj mladých matematiků. Jedná se o týmovou matematickou soutěž určenou středoškolákům zemí celého světa. Mezinárodní turnaj mladých matematiků se vyvinul z domácích turnajů některých států východní Evropy. K jeho vzniku (2009) přispěla také stále rostoucí popularita Mezinárodního turnaje mladých fyziků. Mladí matematici se mohou této mezinárodní soutěže zúčastnit každoročně, a to na přelomu června a července, na universitním kampusu Paris – Sud d‘Orsay (30 km od Paříže).

Organizace a struktura soutěže

Struktura a organizace této matematické soutěže je velmi specifická. Výjimečnost soutěže spočívá v tom, že zadání 9 – 12 soutěžních úloh jsou žákům středních škol předkládána již několik měsíců předem (březen), z nichž některá s neznámými řešeními. Účastníci řeší soutěžní úlohy sami či spolupracují s ostatními v týmu, přičemž platí, že každou zemi může reprezentovat tým 4 – 6 středoškoláků. Povoleno je také spolupracovat s vedoucími učiteli a s odborníky – matematiky. Na Mezinárodním turnaji mladých matematiků musí účastníci projít dvěma soutěžními koly a poté následuje finále. V každém kole jsou soutěžící týmy rozděleny do skupin po 3 či 4, přičemž každý z nich zastává jednu z předem stanovených rolí – role: reportéra (zpravodaje), oponenta (odpůrce), recenzenta a pozorovatele. Soutěžící týmy se v různých rolích účastní jakési diskuse, ve které prezentují své návrhy řešení jednotlivých soutěžních úloh. Reportér (Reporter) pomocí počítačů, projektorů či tabule prezentuje hlavní myšlenky a výsledky, které se objevily při řešení soutěžních úloh. Oponent (Opponent) analyzuje výsledky a myšlenky reportéra, poukazuje na nedostatky, stejně tak jako na výhody možných řešení. Soutěž směřuje do diskuse. Recenzent (Reviewer) hodnotí kladné i záporné aspekty této diskuse. Pozorovatel (Observer) se aktivně neúčastní diskuse, pouze si zapisuje důležité poznámky k jednotlivým návrhům řešení soutěžních úloh. K lepšímu pochopení poslouží tabulka pod textem. Oficiálním jazykem turnaje je angličtina. Ze struktury a organizace jasně vyplývá cíl této matematické soutěže: popularizace matematiky, rozvoj komunikačních a týmových schopností. Účastníci Mezinárodního turnaje mladých matematiků musí zaplatit vstupní poplatek, který činí 150 € na osobu. Výdaje pokrývají náklady na ubytování a stravování během soutěže.

Z důvodu uskutečnění malého počtu ročníků Mezinárodního matematického turnaje mladých matematiků uvádíme výčet všech ročníků a jejich účastníků. Zatím poslední ročník se bude konat v červenci roku 2012, viz např. [46].

1. ročník – 2009 – účastnické země: Francie, Bulharsko, Bělorusko a Rusko.

2. ročník – 2010 – účastnické země: Francie, Bulharsko, Bělorusko, Rusko a Německo.

3. ročník – 2011 – účastnické země: Francie, Bělorusko, Rusko a Německo.

Tabulka Rozdělení rolí pro skupinu tvořenou 3 týmy, viz např. [46]

	1. část	2. část	3. část
Tým 1	Reportér	Recenzent	Oponent
Tým 2	Oponent	Reportér	Recenzent
Tým 3	Recenzent	Oponent	Reportér

4.2.6 Zhautykovova mezinárodní matematická olympiáda (The International Zhautykov Olympiad)

Další mezinárodní matematická soutěž vznikla v zemi, která je v posledních letech velmi aktivní na poli matematických soutěží, a to v Kazachstánu. Název soutěže nese jméno významného kazašského vědce a matematika – O. Zhautykova. Zhautykovova mezinárodní matematická olympiáda je každoročně pořádána v lednu, v kazašském městě Almaty, a to od roku 2005. Kromě matematiky mohou středoškoláci soutěžit ve fyzice, ale také v počítačích.

Zatím posledního ročníku, který proběhl v lednu roku 2012, se zúčastnilo 54 týmů (343 soutěžících) z 18 světových zemí. Pro představu, které země na této olympiádě participují, uvádíme abecední výčet všech zúčastněných zemí: Afghánistán, Arménie, Ázerbájdžán, Bělorusko, Bulharsko, Gruzie, Indie, Indonésie, Kazachstán, Kyrgyzstán, Moldávie, Mongolsko, Rumunsko, Rusko, Tádžikistán, Turkmenistán, Ukrajina, Uzbekistán. (Poznámka: počty účastníků jsou uvedeny pro všechny soutěžní odvětví – matematiku, fyziku a počítače.)

Organizace a struktura soutěže

Na Zhautykovově matematické olympiádě mohou být jednotlivé země reprezentovány několika týmy. Týmy jsou složeny ze 7 žáků středních škol – 3 žáci se účastní matematické soutěže, 2 fyzikální a 2 počítačové soutěže, přičemž není podmínkou, aby týmy byly kompletní. Zhautykovova mezinárodní olympiáda má klasický dvoudenní formát – soutěž probíhá ve dvou dnech a každý den soutěžící přistupují k řešení 3 soutěžních úloh, kdy za každou mohou dosáhnout bodového ohodnocení do výše 7 bodů. Soutěžní čas je stanoven v rozmezí 4 hodin. I když je spektrum oficiálních jazyků docela široké, mohou soutěžící psát svá řešení v mateřštině. Oficiálními jazyky olympiády jsou kazachština, ruština a angličtina, [47].

5. O některých mezinárodních mimoevropských matematických soutěžích

Pro dokreslení celkového stavu matematických soutěží pro žáky středních škol byly vybrány některé z nejznámějších mezinárodních mimoevropských matematických soutěží. Konkrétně je v této kapitole zpracován stručný popis tří z nich – Panafrických matematických olmypiád, Asijsko – pacifické matematické olmypiády a Iberoamerické olmypiády.

5.1 Panafrické matematické olympiády (Pan African Mathematics Olympiads)

Panafrické matematické olympiády jsou prestižní matematickou soutěží, které se účastní nejlepší žáci středních škol, jejichž věk nepřesáhl věkovou hranici 20 let. Matematická olympiáda afrického kontinentu je pořádána již od roku 1987 Africkou matematickou unií. Během dvou soutěžních dnů reprezentuje každou africkou zemi 4 – členné družstvo, přičemž každý den jsou soutěžícím předkládány 3 soutěžní úlohy v časovém limitu 4 a 1/2 hodiny. V zájmu rozvoje mezikulturních vztahů zařadili organizátoři do soutěže zajímavý prvek. Každá z účastnících se zemí by měla do soutěže přinést dárek, který jistým způsobem reprezentuje její kulturu. Dárky jsou poté mezi jednotlivými účastníky vzájemně vyměněny. Mezi účastníky Panafrických matematických olympiád najdeme například tyto země: Alžírsko, Burkina Faso, Botswana, Keňa, Nigérie, Leshoto, Mosambik, Jihoafrická republika, Tunisko, Svahilsko, Ghana a mnohé další africké státy, viz [61].

5.2 Asijsko – pacifická matematická olympiáda (Asian Pacific Mathematics Olympiad)

Asijsko – pacifická olympiáda byla založena v roce 1989. Je určena žákům středních škol těch zemí, které leží na pobřeží Tichého oceánu (Pacific ocean). Žáci řeší 5 soutěžních úloh během vymezeného času 4 hodin. Soutěžní úlohy mají různou obtížnost a za každou lze získat až 7 bodů. Každoročně je tato matematická soutěž pořádána ve dvou dnech – jeden den v zemích Severní a Jižní Ameriky, druhý den v zemích západního Pacifiku a Asii. Mezi účastnické země patří: Argentina, Austrálie, Bangladéš, Brazílie, Kanada, Kolumbie, Hong Kong, Indonésie, Japonsko, Kazachstán, Kyrgyzstán, Mexiko, Nový Zéland, Peru, Filipíny, Saudská Arábie, USA a mnoho dalších, viz např. [62].

5.3 Iberoamerická matematická olympiáda (Olimpíada Iberoamericana de Matemática)

Následující matematická soutěž je učena všem středoškolákům zemí Latinské Ameriky a Pyrenejského poloostrova. Iberoamerická matematická olympiáda je každoročně pořádána již od roku 1985. Každá země je reprezentována čtyřčlenným družstvem, přičemž podmínkou účasti je věk soutěžících, kteří nesmějí přesáhnout věkovou hranici 18 let. Soutěž má klasický dvoudenní formát (dle MMO). Soutěžící každý den přistupují k řešení 3 soutěžních úloh v časovém intervalu 4 hodin, přičemž soutěžní úlohy jsou oceněny maximálně 7 body, viz [63]. Podrobně je tato tématika zpracována mj. v diplomové práci Radky Borůvkové: *Práce s matematickými talenty v Iberoamerické zóně*, viz [3].

6. Ukázky zadání soutěžních úloh z vybraných matematických soutěží

V závěrečné kapitole jsou uvedena přeložená zadání aktuálních soutěžních úloh z předposledních či posledních (zatím posledních) ročníků vybraných matematických soutěží: MMO, MEMO, Balkánská MO, Baltic Way, Matematická olympiáda zemí Beneluxu, Romanian Master a EGMO. Internetové odkazy na jednotlivá zadání, i na jejich řešení lze najít na domovských stránkách jednotlivých soutěží.

Pro další orientaci mezi soutěžními zadáními uvádíme nejprve přehled všech matematických soutěží, ze kterých byla soutěžní zadání vybrána. Výčet je navíc doplněn dalšími informacemi (soutěžní kategorie, soutěžní kolo, ročník, počet příkladů, ...).

Mezinárodní matematické soutěže

1. **MMO** – soutěž jednotlivců (červenec 2011)	1. soutěžní den (3 příklady) 2. soutěžní den (3 příklady)
2. **Romanian Master** – soutěž jednotlivců (březen 2012)	1. soutěžní den (3 příklady)

Regionální matematické soutěže

3. **MEMO** (září 2011)	– soutěž jednotlivců (4 příklady)
4. **Balkánská MO** (květen 2011)	– soutěž jednotlivců (4 příklady)
5. **Baltic Way** (listopad 2011)	– soutěž týmová (10 příkladů z 20-ti)
6. **Benelux MO** (květen 2011)	– soutěž jednotlivců (4 příklady)
7. **Evropská dívčí MO** (duben 2012)	– soutěž jednotlivců (4 příklady)

1.

International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

Language: **Czech**

Day: **1**

Pondělí, 18. července, 2011

Úloha 1. Pro libovolnou množinu $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ čtyř (po dvou různých) přirozených čísel označme s_A součet $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Dále nechť n_A značí počet dvojic (i, j), kde $1 \leq i < j \leq 4$ a $a_i + a_j$ dělí s_A. Určete všechny čtyřprvkové množiny A přirozených čísel, pro které je hodnota n_A největší možná.

Úloha 2. Nechť S je množina alespoň dvou bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží na přímce. *Větrným mlýnem* rozumíme následující proces. Na počátku je vybrána nějaká přímka l procházející právě jedním bodem $P \in S$. Tato přímka se začne otáčet ve směru hodinových ručiček se *středem otáčení* P dokud „nenarazí" na další bod množiny S, označme jej Q. Přímka se nadále otáčí ve směru hodinových ručiček, ovšem se středem otáčení Q, dokud nenarazí na další bod množiny S, a tak dále. Tento proces neustále pokračuje (nekonečně dlouho). Dokažte, že lze zvolit bod $P \in S$ a přímku l, procházející bodem P, tak, že jimi začínající větrný mlýn bude mít za střed otáčení každý bod z S nekonečně mnohokrát.

Úloha 3. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce z množiny reálných čísel do množiny reálných čísel splňující nerovnost

$$f(x + y) \leq y f(x) + f\big(f(x)\big)$$

pro všechna reálná x a y. Dokažte, že $f(x) = 0$ pro všechna $x \leq 0$.

Language: Czech

Čas: 4 hodiny a 30 minut

Za každou úlohu můžete získat až 7 bodů

Language: **Czech**

Day: **2**

Úterý, 19. července, 2011

Úloha 4. Nechť n je celé kladné číslo. Máme dány rovnoramenné váhy a n závaží o hmotnostech $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. V n krocích máme na váhy postupně po jednom umístit všechna závaží. Každý z kroků spočívá ve výběru jednoho ze závaží, které ještě není na vahách, a jeho umístění buď na levou, nebo pravou misku vah ale vždy tak, aby obsah pravé misky nebyl nikdy těžší než obsah levé. Kolik různých posloupností takovýchto n kroků existuje?

Úloha 5. Nechť f je funkce z množiny celých čísel do množiny celých kladných čísel taková, že pro libovolná celá m a n je rozdíl $f(m) - f(n)$ dělitelný $f(m-n)$. Dokažte, že pro libovolná celá m a n, taková, že $f(m) \leq f(n)$, je číslo $f(n)$ dělitelné číslem $f(m)$.

Úloha 6. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník a Γ kružnice jemu opsaná. Dále nechť l je tečna kružnice Γ a l_a, l_b, l_c jsou po řadě obrazy přímky l v osové symetrii podle přímek BC, CA, AB. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami l_a, l_b, l_c se dotýká kružnice Γ.

Language: Czech

Čas: 4 hodiny a 30 minut

Za každou úlohu můžete získat až 7 bodů

2.

1) Nechť je dán konečný počet chlapců a dívek. *Společenskou skupinou chlapců* nazveme takovou skupinu chlapců, kde každá dívka zná aspoň jednoho chlapce v této skupině. *Společenskou skupinou dívek* nazveme takovou skupinu dívek, kde každý chlapec zná aspoň jednu dívku z této skupiny. Dokažte, že počet společenských skupin chlapců se rovná počtu společenských skupin dívek. (Známost se pokládá za oboustrannou.)

2) V nerovnoramenném trojúhelníku ABC jsou dány body D, E a F jako středy stran BC, CA a AB, po řadě. Kružnice BCF a přímka BE se protínají v bodě P, kružnice ABE a přímka AD v bodě Q. Dále přímky DP a FQ se protínají v bodě R. Dokažte, že těžiště G trojúhelníku ABC leží na kružnici PQR.

3) Každé kladné celé číslo má buď červenou, nebo modrou barvu. Funkce f, která je dána na množině kladných celých čísel má sama k sobě následující dvě vlastnosti:

(a) jestliže $x \leq y$, pak $f(x) \leq f(y)$; a

(b) jestliže x, y a z jsou kladná celá čísla stejně obarvená (ne nutně různá) pro něž platí $x + y = z$, pak $f(x) + f(y) = f(z)$.

Dokažte, že existuje takové kladné číslo a, že pro všechna kladná celá čísla x platí: $f(x) \leq ax$.

3.

MEMO 5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: Czech

5. Středoevropská matematická olympiáda

SOUTĚŽ JEDNOTLIVCŮ

3. ZÁŘÍ 2011

Úloha I-1.

Na tabuli je napsáno číslo 44. Celé číslo a napsané na tabuli můžeme nahradit čtyřmi různými celými čísly a_1, a_2, a_3, a_4, jejichž aritmetický průměr $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ je roven číslu a. V jednom kroku současně nahradíme všechna čísla na tabuli výše popsaným způsobem. Po 30 krocích dostaneme na tabuli $n = 4^{30}$ celých čísel $b_1, b_2, \dots, b_n$. Dokažte, že

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}{n} \geq 2011.$$

Úloha I-2.

Nechť $n \geq 3$ je přirozené číslo. Jeníček a Mařenka hrají následující hru: Nejdříve Jeníček očísluje strany pravidelného n-úhelníku čísly od 1 do n (v libovolném pořadí; každé číslo použije právě jednou). Potom Mařenka zvolí některých $n-3$ neprotínajících se úhlopříček rozdělujících daný n-úhelník na trojúhelníky. Všechny tyto úhlopříčky se pak očíslují číslem 1, a dovnitř každého z trojúhelníků se napíše součin čísel na jeho stranách. Součet těchto $n-2$ součinů označme S. Jaká bude hodnota součtu S, jestliže snahou Jeníčka je, aby byl součet co největší a Mařenka se snaží, aby byl součet co nejmenší, přičemž oba dělají nejlepší možné volby?

Úloha I-3.

V rovině se kružnice K_1 a K_2, o středech po řade I_1 a I_2, protínají ve dvou bodech A a B. Nechť je úhel I_1AI_2 tupý. Tečna ke K_1 v bodě A protíná K_2 ještě v bodě C a tečna ke K_2 v bode A protíná K_1 ještě v bodě D. Označme K_3 kružnici opsanou trojúhelníku BCD. Nechť E je střed toho oblouku CD kružnice K_3, který obsahuje bod B. Přímky AC a AD protínají K_3 po řadě ještě v bodech K a L. Dokažte, že přímky AE a KL jsou vzájemně kolmé.

Úloha I-4.

Nechť k a m $(k > m)$ jsou kladná celá čísla taková, že číslo $km(k^2 - m^2)$ je dělitelné číslem $k^3 - m^3$. Dokažte, že $(k-m)^3 > 3km$.

4.

28th BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
Iassy, May 6th, 2011

1) Nechť *ABCD* je tětivový čtyřúhelník, který není lichoběžník a jehož úhlopříčky se protínají v bodě *E*. Středy stran *AB* a *CD* označme po řadě *F* a *G*. Nechť *l* je přímka procházející bodem *G*, a zároveň rovnoběžná s *AB*. Paty kolmic z bodu *E* na přímku *l* a ke straně *CD* jsou po řadě označeny *H* a *K*. Dokažte, že přímky *EF* a *HK* jsou kolmé.

2) Jsou dána reálná čísla *x*, *y*, *z* taková, že platí: $x + y + z = 0$. Dokažte, že platí nerovnost:

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1} + \frac{y(y+2)}{2y^2+1} + \frac{z(z+2)}{2z^2+1} \geq 0.$$

Kdy nastane rovnost?

3) Je dána konečná množina přirozených čísel *S* s následujícími vlastnostmi: jestliže *x* náleží do *S*, pak jeho kladní dělitelé jsou také prvky množiny *S*. Neprázdná podmnožina *T* množiny *S* je *dobrá*, platí-li, že jsou-li $x, y \in T$ a $x < y$, poměr y/x je mocnina prvočísla. Neprázdná podmnožina *T* množiny *S* je *špatná*, platí-li, že jsou-li $x, y \in T$ a $x < y$ je poměr y/x není mocninou prvočísla. Platí, že jednoprvková podmnožina je *dobrá* i *špatná*. Nechť *k* je největší možná *dobrá* podmnožina množiny *S*. Dokažte, že *k* je také ten nejmenší počet po dvou disjunktních *špatných* množin, jejichž sjednocením je množina *S*.

4) Je dán konvexní šestiúhelník *ABCDEF* s jednotkovým obsahem, jehož protilehlé strany jsou rovnoběžné. Přímky *AB*, *CD* a *EF* se vzájemně protínají vždy ve dvou bodech a tvoří vrcholy trojúhelníka. Podobně přímky *BC*, *DE* a *FA* tvoří další trojúhelník. Ukažte, že obsah alespoň jednoho z těchto dvou trojúhelníků je alespoň 3/2.

5.

Baltic Way ´11
Greifswald, Germany

1) Nechť jsou dána reálná čísla $x_1, \dots, x_{2011}$ taková, že platí:

$$x_1 + x_2 = 2x_1', \quad x_2 + x_3 = 2x_2', \quad . \ . \ . \ , \quad x_{2011} + x_1 = 2x_{2011}'$$

kde $x_1', x_2', \dots, x_{2011}'$ je permutace čísel $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$.

Dokažte, že $x_1 = x_2 = \dots = x_{2011}$.

2) Nechť a, b, c, d jsou nezáporná reálná čísla, přičemž platí, že $a + b + c + d = 4$.

Dokažte, že platí nerovnost:

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \le \frac{4}{9}.$$

3) Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že pro všechna reálná čísla x platí:

$$f\big(f(x)\big) = x^2 - x + 1$$

Určete $f(0)$.

4) V Griefswaldu jsou 3 školy označené *A*, *B* a C. Každou z nich navštěvuje aspoň 1 student. Ve skupině tří studentů (jeden student ze školy *A*, druhý z *B* a třetí z *C*) jsou dva, kteří se vzájemně znají a dva, kteří se vzájemně neznají. Dokažte, že aspoň jedno z následujících tvrzení platí:

- Některý student z *A* zná všechny studenty z *B*.
- Některý student z *B* zná všechny studenty z *C*.
- Některý student z *C* zná všechny studenty z *A*.

5) Nechť *AB* a *CD* jsou dva různé průměry kružnice *k*. Nechť je dán libovolný bod *P* na *k* takový, že paty kolmic z bodu *P* na *AB* a *CD* označíme jako *R* a *S*, po řadě. Dokažte, že délka úsečky *RS* je nezávislá na volbě bodu *P*.

6) Je dán vnitřní bod *P* čtverce *ABCD* tak, že platí: $|PA| : |PB| : |PC|$ odpovídá 1 : 2 : 3. Stanovte velikost úhlu *BPA*.

7) Určete všechna kladná celá čísla d taková, že když d dělí kladné celé číslo n, pak d dělí také libovolné celé číslo, které vznikne jakoukoliv záměnou číslic v čísle n.

8) Určete všechny dvojice prvočísel (p, q), pro něž jsou oba výrazy $p^2 + q^3$ a $q^2 + p^3$ druhými mocninami.

9) Nechť $p \neq 3$ je prvočíslo. Dokažte, že existuje nekonstantní aritmetická posloupnost kladných celých čísel $x_1, x_2, \dots, x_p$ taková, že součin všech členů této posloupnosti je třetí mocninou některého přirozeného čísla.

10) Celé číslo $n \geq 1$ nazveme *vyváženým*, jestliže má sudý počet různých hlavních dělitelů. Dokažte, že zde existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že jsou zde přesně dvě *vyvážená* čísla mezi čísly $n, n+1, n+2$ a $n+3$.

6.

BxMO 2011

THIRD BENELUX MATHEMATICAL OLYMPIAD

Luxembourg, 6–8 May 2011

1) Uspořádanou dvojici celých čísel (m, n), kde $1 < m < n$ nazveme *párem* Beneluxu, jsou-li splněny následující podmínky: číslo m má stejné prvočíselné dělitele jako číslo n, a číslo $m + 1$ má stejné prvočíselné dělitele jako číslo $n + 1$.

(a) Najděte tři *páry* (m, n) Beneluxu takové, pro něž platí $m \leq 14$.

(b) Dokažte, že existuje nekonečně mnoho *párů* Beneluxu.

2) Nechť I značí střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Osy úhlů AI, BI a CI protínají úsečky BC, CA a AB po řadě v bodech D, E a F. Kolmice na AD protíná přímky BI a CI po řadě v bodech M a N. Dokažte, že body A, I, M a N leží na téže kružnici.

3) Nechť k je celé číslo a nechť $c(k)$ označuje největší 3. mocninu čísla k, která je menší nebo rovna než k. Určete všechna přirozená čísla p, pro něž je následující posloupnost splňující předpis:

$$a_0 = p \qquad \text{a} \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2c(a_n) \qquad \text{pro } \forall n \geq 0.$$

omezená.

(Posloupnost $a_0, a_1, \ldots$ reálných čísel je *omezená*, jestliže existuje takové $M \in \mathbb{R}$, že pro všechna celá $n \geq 0$ platí: $|a_n| \leq M$.)

4) Abby a Brian hrají následující hru: Nejdříve si zvolí přirozené číslo N. Abby začíná hru tím, že napíše na tabuli 1, poté se v zapisování čísel na tabuli střídají. Pokud jeden z nich napíše číslo n, musí druhý zapsat další číslo jako $n + 1$ nebo $2n$ tak, že číslo není větší než N. Hráč, který na tabuli jako první napíše N, vyhrává.

(a) Určete, který z hráčů může vyhrát, jestliže je $N = 2011$.

(b) Najděte takové přirozené číslo $N \leq 2011$, pro které by byl vítězem Brian.

7.

EGMO | 2012

European Girls' Mathematical Olympiad

1) Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Jsou dány body D, E a F, kde $D \in BC$, $E \in CA$ a $F \in AB$ tak, že DE je kolmá na CO a DF je kolmá na BO. Nechť K je střed kružnice opsané trojúhelníku AFE. Dokažte, že přímky DK a BC jsou navzájem kolmé.

2) Nechť n je přirozené číslo. Najděte největší možné celé číslo m, v závislosti na n, s následujícími vlastnostmi: tabulka s m řádky a n sloupci může být vyplněna reálnými čísly tak, že pro libovolné dva řádky $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ a $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ platí:

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1.$$

3) Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná x a y platí:

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y).$$

4) Množina celých čísel A se nazývá *úplně sčítatelná*, jestliže $A \subseteq A + A$ (každý prvek $a \in A$ je součtem nějaké dvojice prvků $b, c \in A$ (nikoliv nutně stejných). Množina celých čísel A se nazývá *0-sčítatelná*, jestliže 0 je jediné číslo, které nelze vyjádřit jako součet prvků konečné neprázdné podmnožiny množiny A. Rozhodněte, zda existuje *úplně sčítatelná 0-sčítatelná* množina čísel.

7. Závěr

Cílem diplomové práce – Matematické soutěže pro žáky středních škol – bylo zpracování uceleného přehledu o matematických soutěžích pro žáky středních škol v České republice, ale také v Evropě. Jedním z důvodu zadání a následného zpracování tohoto tématu byla i skutečnost, že podobný přehled tohoto typu nebyl zatím publikován, tudíž tato práce nenavazuje na žádnou z předchozích. Naopak může být tato diplomová práce východiskem pro jiné závěrečné práce, které by mohly podat ucelený přehled například o matematických soutěžích určených žákům základních škol. Dále lze tuto práci považovat také za přehledný informační materiál pro učitele a žáky středních škol, nebo jako návod k snadnější orientaci pro širší matematickou veřejnost.

Tato diplomová práce by nemohla vzniknout bez dostupných internetových stránek, které byly v tomto případě klíčovým zdrojem informací. Pro získání co největšího počtu dostupných informací bylo zpracováno a přeloženo velké množství zahraničních textů, především z angličtiny a z ruštiny, ale také z jiných evropských jazyků. Při studiu informací z historie byly naopak využity odborné knižní publikace, dále také ročenky matematických soutěží, matematické časopisy a sborníky.

V průběhu zpracování tohoto tématu bylo objeveno a popsáno mnoho zajímavých matematických soutěží určených středoškolákům evropských zemí. Z širokého spektra různých matematických soutěží, ať už regionálních či mezinárodních s celosvětovou působností, usuzujeme, že jsou matematické soutěže vhodnou a hlavně žákovsky oblíbenou formou práce s matematickými talenty.

Matematické soutěže, jako nepostradatelná forma práce s matematickými talenty, tak výrazně přispívají k rozvoji a udržení matematického talentu napříč všemi věkovými kategoriemi.

8. Použitá literatura a další zdroje

[1] Berinde,V., Gavrilut,M., Horvat-Marc,A.: *Mathematics Competitions in Romania*. Cub Press 22, Baia Mare 2004.

[2] Bilčev, S. J.: *Младежка Балканска Олимпиада по математике 1997 – 2009*. Русе 2009.

[3] Borůvková,R.: *Práce s matematickými talenty v zemích iberoamerické zóny*, diplomová práce. UP, Olomouc 2012.

[4] Calábek, P., Švrček, J., Vaněk, V.: *Péče o matematické talenty v České republice*. UP, Olomouc 2007.

[5] Galperin, G.A., Tolpygo, A.K.: *Московские таматематические олимпиады.* Просвещение 1986.

[6] Kolkopová,M.: *Problematika nadání na matematiku u studentů gymnázií*, bakalářská práce. UP, Olomouc 2009.

[7] Konjagin, S.V.;et.al.: *Зарубежные математические олимпиады*. Nauka, Moskva 1987.

[8] Kruteckij, V. A.: *Otázky psychologie schopností žáků*. SPN, Praha 1968.

[9] Lehtinen, M.: *The Nordic Mathematical Competition 1987 – 2006, Problems and Solutions*. Mācību grāmata, Riga 2006.

[10] Marcus, S.: *Mathematics in Romania*. Cub Press, Baia Mare 2004.

[11] *Mathematical Duel ´12* (sborník). Olomouc: UP, 2012- . Vychází ročně. ISBN 978-80-244-3029-4

[12] Moravčík, J., Vyšín, J.: *Dvacet pět let matematické olympiády v Československu*. Mladá fronta, Praha 1976.

[13] *Ročenky 1. – 59. ročníku Matematické olympiády*. SPN. Praha 1952 – 2012.

[14] Skokan, L.: *O geografické regionalizaci a „učení o zemích“ a regionech ve školské (ale nejen školské) geografii*. Univerzita J. E. Purkyně, Ústí nad Labem 1999.

[15] Švrček, J.: *Tvorba a využití gradovaných řetězců matematických úloh*. UP, Olomouc.

[16] Švrček, J.: 1st Middle Europan mathematical olmypiad 20 – 26 September, Eisenstadt, Austria. *Mathematics competitons. Journal of WFNMC,* AMT Publishing, 2007, vol.20, no. 2.

[17] Švrček, J.: Turnaj měst v České republice. *MFI*, 2006/07, roč. 16, č. 7, s. 402-406.

[18] Tolpygo, A.: Turnaj měst – mezinárodní matematická soutěž. *MFI*, 1994/95, roč. 4, č. 8, s. 349-352.

[19] Taylor, P. J.: *Tournament of the Towns 1980 - 1984*. Australian Mathematics Trust, Enrichment Series, 1993.

[20] Taylor, P. J.: *Tournament of the Towns 1984 - 1989*. Australian Mathematics Trust, Enrichment Series, 1992.

[21] Villemoes, R.: *Baltic Way 2002 – 2006 , Problems and Solutions*. University of Aarhus 2007.

[22] Zhouf, J.: *Školní vzdělávací program jako příležitost ke zlepšení práce talentovanými žáky v matematice*, JČMF 2006. Dostupné také na: pedf.cuni.cz

[23] http://www.wikipedie.org (ke dni 25. 5. 2012).

[24] http://www.matematickyklokan.net (ke dni 25. 5. 2012).

[25] http://www.georgmohr.dk (ke dni 25. 5. 2012).

[26] http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/ (ke dni 25. 5. 2012).

[27] http://www.balticway-2011.de (ke dni 25. 5. 2012).

[28] http://www.bmo2011.lbi.ro (ke dni 25. 5. 2012).

[29] http://jbmo2011-cyprus.eu (ke dni 25. 5. 2012).

[30] http://www.wiskundeolympiade.nl (ke dni 25. 5. 2012).

[31] http://math.uni.lu (ke dni 25. 5. 2012).

[32] http://www.egmo2012.org.uk (ke dni 25. 5. 2012).

[33] http://www.msri.org/web/msri/static-pages/-/node/261 (ke dni 25. 5. 2012).

[34] http://www.turgor.ru (ke dni 25. 5. 2012).

[35] http://kag.upol.cz/turnajmest (ke dni 25. 5. 2012).

[36] http://www.math.toronto.edu (ke dni 25. 5. 2012).

[37] http://www.amt.edu.au/imtot.html (ke dni 25. 5. 2012).

[38] http://memo2011.math.hr/ (ke dni 25. 5. 2012).

[39] http://kag.upol.cz/memo/ (ke dni 25. 5. 2012).

[40] http://www.gmk.cz/mezinarodni-matematicka-soutez-duel/ (ke dni 25. 5. 2012).

[41] http://www.bilovec.cz/vismo/dokumenty2.asp?u=442&id_org=442&id=86539 (ke dni 25. 5. 2012).

[42] http://www.gjs.cz/novinky-aktualne.htm (ke dni 25. 5. 2012).

[43] http://mural.uv.es/rorunu/cmm/bases/Bases05ing.pdf (ke dni 25. 5. 2012).

[44] http://www.imomath.com (ke dni 25. 5. 2012).

[45] http://www.artofproblemsolving.com (ke dni 25. 5. 2012).

[46] http://www.itym.org (ke dni 25. 5. 2012).

[47] http://izho.kz (ke dni 25. 5. 2012).

[48] http://rmm.lbi.ro (ke dni 25. 5. 2012).

[49] http://www.imo-register.org.uk (ke dni 25. 5. 2012).

[50] http://www.imosuisse.ch/memo2012/ (ke dni 25. 5. 2012).

[51] http://www.imo-official.org (ke dni 25. 5. 2012).

[52] http://oma.org.ar/imo2012/ (ke dni 25. 5. 2012).

[53] http://www.matol.ru (ke dni 25. 5. 2012).

[54] http://www.mcnmo.ru (ke dni 25. 5. 2012).

[55] http://www.pdmi.ras.ru/~olymp/index.html (ke dni 25. 5. 2012).

[56] http://www.rosolymp.ru (ke dni 25. 5. 2012).

[57] http://www.seemous.eu (ke dni 25. 5. 2012).

[58] http://www.eruditus.lt (ke dni 25. 5. 2012).

[59] http://www.i-olymp.net (ke dni 25. 5. 2012).

[60] http://purplecomet.org (ke dni 25. 5. 2012).

[61] http://www.pamo-official.org (ke dni 25. 5. 2012).

[62] http://www.mmjp.or.jp/competitions/APMO/index.html (ke dni 25. 5. 2012).

[63] http://www.oei.es/oim/ (ke dni 25. 5. 2012) .

[64] http://naboj.org (ke dni 25. 5. 2012).

[65] http://www.oavm.cz/cms/index.htm (ke dni 25. 5. 2012).

[66] http://vjimc.osu.cz/ (ke dni 25. 5. 2012).

[67] http://www.math.muni.cz/mo (ke dni 25. 5. 2012).

[68] http://brkos.math.muni.cz/ (ke dni 25. 5. 2012).

[69] http://mks.mff.cuni.cz/ (ke dni 25. 5. 2012).

[70] http://www.gfxs.cz/matematika/ (ke dni 25. 5. 2012).

[71] http://seminar.strom.sk (ke dni 25. 5. 2012).

[72] http://mam.mff.cuni.cz/ (ke dni 25. 5. 2012).

[73] http://www.kos-ujep.estranky.cz/ (ke dni 25. 5. 2012).

[74] http://www.kms.sk/ (ke dni 25. 5. 2012).

[75] http://www.sampionat.cz/ (ke dni 25. 5. 2012).

[76] http://gchd-soutez.hu.cz (ke dni 25. 5. 2012).

[77] http://www.jcmf.cz (ke dni 25. 5. 2012).

[78] http://abelkonkurransen.no (ke dni 25. 5. 2012).
[79] http://www.vwo.be/vwo (ke dni 25. 5. 2012).
[80] http://omb.sbpm.be/ (ke dni 25. 5. 2012).
[81] http://lwmb.de/ (ke dni 25. 5. 2012).
[82] http://landeswettbewerb-mathematik.de/ (ke dni 25. 5. 2012).
[83] http://www.math.bas.bg/bcmi/ (ke dni 25. 5. 2012).
[84] http://www.skmo.sk/ (ke dni 25. 5. 2012).
[85] http://www.omg.edu.pl/ (ke dni 25. 5. 2012).