UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Aplikace integrálního počtu v ekonomii

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.
Rok odevzdání: 2013

Vypracovala:
Jana Lýsková
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana RNDr. Jana Tomečka, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 26. dubna 2013

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucímu bakalářské práce panu RNDr. Janu Tomečkovi, Ph.D. za spolupráci i za čas, který mi věnoval při konzultacích a mým rodičům za podporu při studiu.

Obsah

Úvod

Jak již název bakalářské práce „Aplikace integrálního počtu v ekonomii“ napovídá, budeme se zabývat využitím matematiky v ekonomické oblasti. Konkrétně se bude jednat o integrální počet a jeho ekonomické aplikace v oblastech celkových a mezních veličin, investic, tvorby kapitálu a dalších. K výběru tohoto tématu, mě vedl především zájem o využití matematiky v praxi. V práci je uvedena potřebná matematická teorie, na kterou navazují ekonomické aplikace a obě části jsou doplněny ilustrativními příklady.

Text je rozdělen do čtyř kapitol. První tři kapitoly popisují matematickou teorii, která je potřeba v aplikační části, tedy ve čtvrté kapitole.

První kapitola nás uvede do problematiky integrálního počtu, seznámí nás se základními pojmy, jako je primitivní funkce a neurčitý integrál a naučíme se metody výpočtu neurčitého integrálu. V druhé kapitole se seznámíme s pojmem určitý integrál, představíme si podmínky integrovatelnosti, vlastnosti a metody výpočtu určitého integrálu. Třetí kapitola pojednává o pojmu nevlastní integrál. V těchto kapitolách byla využita především literatura [12], [13], [14], [15]. Příklady v těchto kapitolách pochází především z [1].

Poslední kapitola je věnovaná aplikacím integrálního počtu v ekonomii a zahrnuje čtyři podkapitoly. První podkapitola představuje celkové a mezní veličiny, na nichž si představíme aplikaci neurčitého integrálu. V druhé podkapitole si uvedeme aplikaci určitého i neurčitého integrálu v oblasti investic a tvorby kapitálu. Ve třetí podkapitole si povíme o stanovení současné hodnoty cash-flow, k čemuž využijeme aplikaci určitého integrálu. V případě, že cash-flow trvá věčně, jedná se o aplikaci nevlastního integrálu. Závěrečná podkapitola pojednává o Domarově modelu růstu. V aplikační části byla především využita literatura [2], ze které byly čerpány i ilustrační příklady.

Předpokladem k porozuměním textu je znalost diferenciálního počtu a základů ekonomické teorie na úrovni ekonomických kurzů vysokých škol.

1. Neurčitý integrál

Vznik integrálního počtu se datuje k přelomu 17. a 18. století a úzce souvisí s diferenciálním počtem. Základy integrálního a diferenciálního počtu položili vědci Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz a bratři Jakob a Johann Bernoulliovi.

Integrace znamená proces, kdy hledáme primitivní funkci F na intervalu I k funkci f tak, aby platilo $F' = f$. Proces integrace je opačnou operací k derivování, kdy hledáme k funkci f její derivaci f'.

Obsahem této kapitoly budou definice základních pojmů integrálního počtu a metody výpočtu.

1.1. Primitivní funkce a neurčitý integrál

Základním pojmem integrálního počtu je primitivní funkce, proto začneme s její definicí.

Definice 1. Nechť jsou funkce f a F definovány na intervalu I $\subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí* k funkci f na intervalu I, jestliže

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I.$$

Nutno říci, že pokud některý z krajních bodů intervalu I do tohoto intervalu patří, pak v tomto bodě x rozumíme symbolem $F'(x)$ příslušnou jednostrannou derivaci. Jelikož z existence vlastní derivace funkce plyne spojitost, je primitivní funkce ke kterékoliv funkci vždy na odpovídajícím intervalu spojitá.

Příklad 1. Funkce $F(x) = \sin(x)$ je primitivní funkcí k $f(x) = \cos(x)$ na $\mathbb{R}$, protože $\forall x \in \mathbb{R}$ platí, že $(\sin(x))' = \cos(x)$. Tedy platí výše zmíněný vztah $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.

Věta 1. *Ke každé funkci spojité na intervalu I existuje primitivní funkce na I.*

Věta 1 neplatí naopak. Může totiž existovat funkce, která není na intervalu I spojitá a přesto k ní existuje na intervalu I primitivní funkce, například funkce

$$f(x) = \begin{cases} -\cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

je v bodě 0 nespojitá a přesto k ní existuje primitivní funkce

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Ale platí, že ke *každé **elementární** funkci existuje primitivní funkce.* Ovšem **ne** ke každé funkci musí existovat primitivní funkce.

Primitivní funkce $F(x)$ však není určena zcela jednoznačně, což si uvedeme v následující větě.

Věta 2. *Je-li F primitivní funkce k funkci f na I a $c \in \mathbb{R}$ libovolné číslo, potom každá funkce $G(x) = F(x) + c$, $\forall x \in I$ je primitivní funkcí k f na I.*

Pokud má funkce $f(x)$ alespoň jednu primitivní funkci $F(x)$, pak jich má nekonečně mnoho, protože k primitivní funkci můžeme přičítat a odečítat libovolné reálné číslo c a tak ji měnit.

Definice 2. Neurčitým integrálem funkce f na intervalu I nazýváme množinu všech primitivních funkcí k funkci f na I, tj. množinu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c; c \in \mathbb{R}, F(x) \text{ je primitivní funkce k } f\}.$$

Proces hledání primitivní funkce F k funkci f se nazývá **integrování**.

Poznámka 1. Pro výpočty se využívá následující značení:
$f(x)$ . . . integrovaná funkce nebo-li integrand,
x . . . integrační proměnná,
$\mathrm{d}x$ . . . symbol, který určuje, podle které proměnné se integruje.

1.2. Metody výpočtu

Proces integrace nebo-li integrování je výrazně složitější než proces derivování. Mnohdy nejsme ani schopni určit primitivní funkci, i když existuje. Existují zde pouze doporučené postupy k integrování všech elementárních funkcí.

Ze známých vzorců z diferenciálního počtu plynou tyto vzorce:

1. $\int a \, \mathrm{d}x = ax + c$ $\qquad a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$
2. $\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\qquad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
3. $\int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x \in \mathbb{R}^+$
4. $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + c$ $\qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
5. $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + c$ $\qquad x \in \mathbb{R}$
6. $\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\qquad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{-1\}, x \in \mathbb{R}$
7. $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c$ $\qquad x \in \mathbb{R}$
8. $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + c$ $\qquad x \in \mathbb{R}$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \tan x + c$ $\qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c$ $\qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \arctan x + c$ $\qquad x \in \mathbb{R}$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + c$ $\qquad x \in (-1, 1),$ kde $c \in \mathbb{R}$
13. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$ $\qquad c \in \mathbb{R}$
14. $\int f(ax+b) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$ $\qquad c \in \mathbb{R}$

Výše zmíněné vzorce budeme užívat při výpočtu primitivních funkcí.

Věta 3. *Nechť k funkcím f a g existují primitivní funkce na I a nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom funkce $f \pm g$, $c \cdot f$ mají primitivní funkce na I a platí*

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pokud tedy integrujeme součet funkcí, můžeme tyto funkce integrovat zvlášť a pokud se jedná o součin funkce s konstantou c, můžeme c vytknout a integrovat pouze funkci.

Příklad 2. [Děmidovič, př. 2175] Najděte primitivní funkci k funkci $f(x)$, která má následující zadání

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty, 0), \\ x+1 & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 2x & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Řešení: Výpočet budeme provádět po jednotlivých intervalech.
Pro $x \in (-\infty, 0)$ platí $\displaystyle\int 1\,\mathrm{d}x = x + c_1$,
pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí $\displaystyle\int (x+1)f\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x + c_2$
a pro $x \in (1, \infty)$ platí $\displaystyle\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + c_3$.
Výsledné řešení bude kvůli spojitosti ve tvaru

$$F(x) = \begin{cases} x + c & x \in (-\infty, 0), \\ \frac{x^2}{2} + x + c & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ x^2 + \frac{1}{2} + c & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Povšimněme si, že v intervalu $(1, \infty)$ je odlišný výsledek, než ke kterému jsme došli ve výpočtech. Je tomu tak, protože v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ se nachází funkce $\frac{x^2}{2} + x + c$ v bodě $[1, \frac{3}{2}]$ a v tomto bodě je potřeba navázat i funkcí $x^2 + c$. Proto se přičítá k této funkci $\frac{1}{2}$.

Příklad 3. [Děmidovič, př. 2178] Najděte primitivní funkci k funkci $f(x)$, je-li $f'(x^2) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x > 0$.

Řešení: Určíme si tedy $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \forall x > 0$ a vypočteme neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Často se používají k výpočtu neurčitého integrálu složitější metody než pouhá aplikace známých vzorců plynoucích z diferenciálního počtu. V následujícím textu si představíme metodu per partes a substituční metodu, které ovšem neopomeneme kombinovat se známými vzorci.

V integrálním počtu se objevuje jedna z obtíží a to, že neexistuje vzorec na primitivní funkci součinu. Přesto je tu ale řešení - metoda per partes. Tato metoda nám umožňuje převést součin funkcí na jiný součin funkcí, což v některých případech usnadní hledání primitivní funkce.

Věta 4. ***(Metoda per partes)*** *Nechť funkce u a v mají na intervalu I derivace u' a v'. Existuje-li na I primitivní funkce k jedné z funkcí $u'v, uv'$, existuje i k druhé z nich a platí*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 4. [Děmidovič, př. 2176] Najděte primitivní funkci k funkci $xf''(x)$.

Řešení: $\int xf''(x)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = f''(x) & v = f'(x) \end{vmatrix} = xf'(x) - \int f'(x)\,\mathrm{d}x = xf'(x) -$
$-f(x) + c, c \in \mathbb{R}.$

Příklad 5. [Děmidovič, př. 2106] Najděte primitivní funkci k $\int \sqrt{x}\arctan(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \sqrt{x}\arctan(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \arctan(\sqrt{x}) & u' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \\ v' = \sqrt{x} & v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\arctan(\sqrt{x}) -$$

$$-\int \frac{2}{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\arctan(\sqrt{x}) - \frac{1}{3}\int \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\arctan(\sqrt{x}) -$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{x+1-1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\arctan(\sqrt{x}) - \frac{1}{3}\int 1 - \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\arctan(\sqrt{x}) -$$

$$-\frac{x}{3} + \frac{\ln|1+x|}{3} = \frac{1}{3}(2x^{\frac{3}{2}}\arctan(\sqrt{x}) - x + \ln|1+x|) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Metodu per partes je výhodné aplikovat například na tyto typy funkcí: $P(x)\sin(\alpha x)$, $P(x)\cos(\alpha x)$, $P(x)e^{\alpha x}$, $P(x)\ln x$, $P(x)\arctan x$, kde P označuje polynom.

Při výpočtu složitých výrazů se snažíme situaci co nevhodněji zjednodušit, k čemuž využíváme metodu substituce.

Věta 5. ***(První věta o substituci)*** *Má-li funkce $\varphi : I_1 \to I_2$ derivaci v každém bodě intervalu I_1 a je-li F primitivní funkce k funkci $f : I_2 \to \mathbb{R}$ na intervalu I_2, potom na intervalu I_1 platí*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t = \varphi(x).$$

Nyní si ukážeme použití první věty o substituci na příkladech.

Příklad 6. [Děmidovič, př. 2177] Najděte primitivní funkci k funkci $f'(2x)$.

Řešení: $\int f'(2x)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} a = 2x \\ \mathrm{d}a = 2\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int \frac{1}{2}f'(a)\,\mathrm{d}a = \frac{1}{2}f(a) = \frac{1}{2}f(2x) + c, c \in \mathbb{R}.$

Příklad 7. [Děmidovič, př. 1911] Najděte primitivní funkci k $\displaystyle\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: $\displaystyle\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^n x^{n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{n}{n}\frac{x^n x^{n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int \frac{x^n n x^{n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x =$

$$= \begin{vmatrix} a = x^n \\ \mathrm{d}a = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \frac{1}{n}\int \frac{a}{a+1}\,\mathrm{d}a = \frac{1}{n}\int \frac{a+1-1}{a+1}\,\mathrm{d}a = \frac{1}{n}\int \left(1 - \frac{1}{a+1}\right)\mathrm{d}a =$$

$$= \frac{1}{n}\left(a - \ln|a+1|\right) = \frac{1}{n}(x^n - \ln|x^n+1|) = \frac{x^n}{n} - \frac{\ln|x^n+1|}{n} + c, c \in \mathbb{R}.$$

K výpočtům je někdy velmi nápomocná druhá věta o substituci, kterou si představíme taktéž na příkladě.

Věta 6. ***(Druhá věta o substituci)*** *Nechť f je funkce definovaná na intervalu I_1, φ je funkce mající nenulovou derivaci na intervalu I_2 a nechť $\varphi(I_2) = I_1$. Potom na intervalu I_2 platí*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \quad t = \varphi^{-1}(x).$$

Nutno ještě poznamenat, že metodu per partes a metody substituce lze kombinovat dohromady.

Příklad 8. [Děmidovič, př. 2054] Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Funkce $\dfrac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}$ je definovaná na intervalu $I_1 = \mathbb{R}$. Potřebujeme najít funkci φ, která má nenulovou derivaci na intervalu I_2, $\varphi(I_2) = \mathbb{R}$ a hlavně, aby šla primitivní funkce $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ určit. V tomto případě bude vhodné zvolit $\varphi(t) = \tan\frac{x}{2}$, $t \in I_2 = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Platí tedy $\varphi(I_2) = \mathbb{R}$. K výpočtu primitivní funkce využijeme vztahu $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ a $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Z užité substituce vyjádříme $x = 2\arctan t$ a $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Po dosazení

$$\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + 4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+4t-1}{t^4+t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Zlomek $\dfrac{t^2+4t-1}{t^4+t^2+1}$ lze rozložit na parciální zlomky

$$\frac{t^2+4t-1}{t^4+t^2+1} = \frac{t^2+4t-1}{(t^2-t+1)(t^2+t+1)} = \frac{u_2+u_1t}{t^2-t+1} + \frac{u_4+u_3t}{t^2+t+1}.$$

Odtud vyjádříme $t^2+4t-1 = (u_2+u_1t)(t^2+t+1) + (u_4+u_3t)(t^2-t+1)$ a úpravou získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -1 &= u_2+u_4, \\ 4 &= u_1+u_2+u_3-u_4, \\ 1 &= u_1+u_2-u_3+u_4, \\ 0 &= u_1+u_3. \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic je $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{3}{2}$, $u_3 = -1$, $u_4 = -\frac{5}{2}$. Po dosazení do neurčitého integrálu obdržíme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int \left(\frac{\frac{3}{2}+t}{t^2-t+1} + \frac{-\frac{5}{2}-t}{t^2+t+1} \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \frac{3+2t}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int \frac{-5-2t}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{4}{t^2-t+1} \right) \mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int \left(\frac{-2t-1}{t^2+t+1} - \frac{4}{t^2+t+1} \right) \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} + \frac{1}{4}\int \frac{-2t-1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}. \end{aligned}$$

Pro integrál $\dfrac{1}{4}\displaystyle\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t$ užijeme substituci $a = t^2-t+1$, $\mathrm{d}a = (2t-1)\,\mathrm{d}t$ a podobně u integrálu $\dfrac{1}{4}\displaystyle\int \frac{-2t-1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$ užijeme $b = t^2+t+1$, $\mathrm{d}b = (2t+1)\,\mathrm{d}t$, dojdeme k

$$\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}a}{a} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}b}{b} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}.$$

Výrazy t^2-t+1 a t^2+t+1 upravíme na čtverec $\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, $\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$. Užijeme substituce na upravené výrazy $c = t-\frac{1}{2}, \mathrm{d}c = \mathrm{d}t$ a $e = t+\frac{1}{2}, \mathrm{d}e = \mathrm{d}t$, dostaneme

$$\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}a}{a} + \int \frac{\mathrm{d}c}{c^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}b}{b} - \int \frac{\mathrm{d}e}{e^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}a}{a} + \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}c}{\frac{4}{3}c^2+1} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}b}{b} - \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}e}{\frac{4}{3}e^2+1}.$$

Provedeme-li další substituce $f = \frac{2}{\sqrt{3}}c$, $\mathrm{d}f = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}c$ a $g = \frac{2}{\sqrt{3}}e$, $\mathrm{d}g = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}e$, lehce získáme primitivní funkci

$$\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}a}{a} + \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}f}{f^2+1} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}b}{b} - \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}g}{g^2+1} = \frac{1}{4}\ln|a| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan f -$$
$$-\frac{1}{4}\ln|b| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan g = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{a}{b}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan f - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan g,$$

zpětným dosazením všech užitých substitucí obdržíme

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan^2\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2} + 1}{\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + 1}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan\frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}\right).$$

Argument logaritmu $\frac{\tan^2\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2} + 1}{\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + 1}$ lze upravit na $\frac{2-\sin x}{2+\sin x}$. Protože je funkce $\arctan(x)$ lichá, platí $-\arctan(x) = \arctan(-x)$ a pomocí vzorce

$$\arctan(x) + \arctan(-y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$$

upravíme rozdíl

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan\frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1+2\tan^2\frac{x}{2}}\right).$$

Výslednou primitivní funkci si označíme $F_0(x)$

$$F_0(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2-\sin x}{2+\sin x}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1+2\tan^2\frac{x}{2}}\right).$$

Primitivní funkce $F_0(x)$ je řešením pouze na intervalech $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. V krajních bodech vypočteme limity

$$\lim_{t\to-\pi^+} F_0(t) = \frac{1}{4}\ln|1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-\infty}\right) = 0 + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan 0 = 0,$$

$$\lim_{t\to-\pi^-} F_0(t) = \frac{1}{4}\ln|1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{\infty}\right) = 0 + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan 0 = 0.$$

Výsledné řešení na celé množině $\mathbb{R}$ je $F(x)+c, c\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$, kde

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}\right|+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{1+2\tan^2\frac{x}{2}}\right) & x\in(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi)\,,\\ 0 & x=\pi+k\pi.\end{cases}$$

2. Určitý integrál

Vývoj určitého integrálu prošel dlouhou cestou. Na jeho vývoji se podílel francouzský matematik Augustin-Louis Cauchy a o to, jak ho dnes známe, se zasloužil především německý matematik Georg Friedrich Bernhard Riemann. Proto se určitý integrál nazývá Riemannův integrál. Název „určitý integrál“ stejně tak jako název „neurčitý integrál“ zavedl Leibnizův žák Johann Bernoulli.

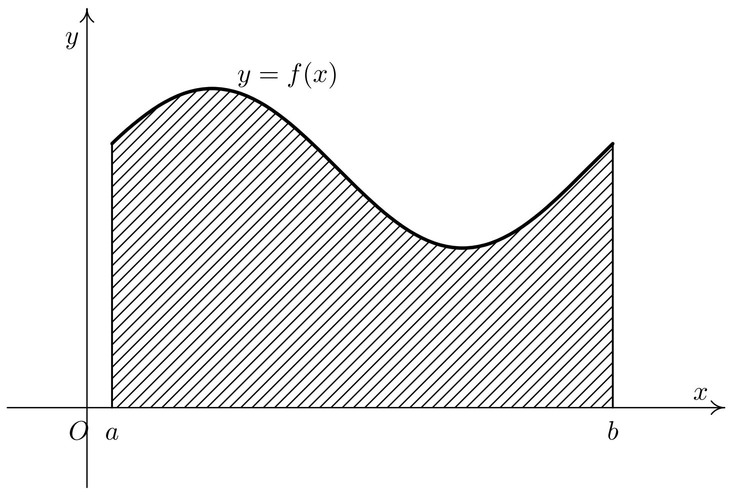
V této kapitole se zaměříme na definice, podmínky integrovatelnosti, vlastnosti a výpočet určitého integrálu.

2.1. Definice určitého integrálu

Určitý integrál byl vyvíjen především za účelem určení obsahu plochy pod nezápornou a omezenou funkcí $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$, viz obrázek 1. Plocha pod funkcí $f(x)$ se aproximuje pomocí útvarů, jejichž obsah umíme snadno počítat - obdélníků.

Definice 3. Dělením uzavřeného intervalu $\langle a,b\rangle$ nazýváme jakoukoliv konečnou množinu bodů $D=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ ležících v intervalu $\langle a,b\rangle$ takovou, že $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Body $x_0,x_1,\dots,x_n$ se nazývají **dělící body** intervalu $\langle a,b\rangle$; interval $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ se nazývá **i-tý dělící interval**; číslo $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ se nazývá **délka *i*-tého dělícího intervalu**.

Každý interval $\langle a,b\rangle$ lze dělit nekonečně mnoha různými způsoby. Množina všech dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ se značí $\mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ nebo jen $\mathcal{D}$, pokud je zřejmé, že jde o interval $\langle a,b\rangle$.



Obrázek 1

Definice 4. Nechť je funkce f omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ je nějaké dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme pro všechna $i = 1, \dots, n$

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\},$$

$$M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}.$$

Potom číslo

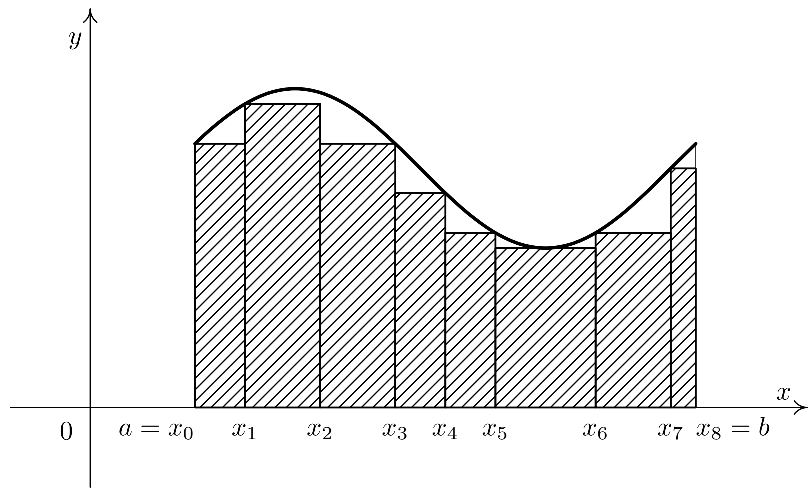
$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$

nazveme **dolním (Riemannovým) součtem funkce f při dělení D** a číslo

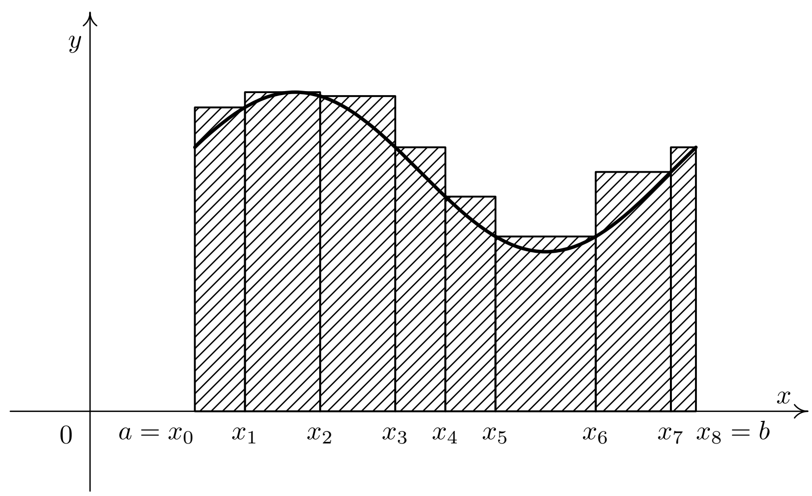
$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$

nazveme **horním (Riemannovým) součtem funkce f při dělení D**.

Číslo $s(f, D)$ vyjadřuje součet obsahů obdélníků pod funkcí $f(x)$, kde uvažujeme nejmenší hodnoty m_i a číslo $S(f, D)$ vyjadřuje součet obsahů obdélníků pod funkcí $f(x)$, kde uvažujeme největší hodnoty M_i, viz obrázky 2 a 3.



Obrázek 2: $s(f, D)$



Obrázek 3: $S(f, D)$

Z obrázků 2 a 3 je patrné, že dolní a horní součty budou tím lépe aproximovat obsah pod funkcí $f(x)$, čím jemněji rozdělíme interval $\langle a, b\rangle$. Zjemnění intervalu $\langle a, b\rangle$ provedeme přidáním k původnímu dělení další dělící body.

Věta 7. *Nechť f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\langle a, b\rangle)$. Potom platí*

$$m \cdot (b-a) \leq s(f, D_1) \leq S(f, D_2) \leq M \cdot (b-a),$$

kde

$$m = \inf\{f(x); x \in \langle a, b\rangle\},$$

$$M = \sup\{f(x); x \in \langle a, b\rangle\}.$$

Z věty 7 je patrné, že funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá své nejmenší hodnoty m a své největší hodnoty M. V tomto případě je horní i dolní součet funkce f omezený shora i zdola a to nás opravňuje zavést definici 5.

Definice 5. Nechť f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom se číslo

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{s(f, D); D \in \mathcal{D}(\langle a, b\rangle)\}$$

nazývá **dolní (Riemannův) integrál funkce f na intervalu** $\langle a, b\rangle$ a číslo

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{s(f, D); D \in \mathcal{D}(\langle a, b\rangle)\}$$

se nazývá **horní (Riemannův) integrál funkce f na intervalu** $\langle a, b\rangle$.

Definice 6. Nechť f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Jestliže

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

říkáme, že funkce f je **riemannovsky integrovatelná na** $\langle a, b\rangle$, značíme $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$. Společnou hodnotu dolního a horního Riemannova integrálu nazveme **Riemannovým integrálem funkce f na intervalu** $\langle a, b\rangle$, značíme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{případně } (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Funkce, která není riemannovsky integrovatelná, je například Dirichletova funkce. Tato funkce má dolní integrál menší než horní integrál, tudíž není splněn vztah z definice 6. Dirichletova funkce není spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, proto neexistuje Riemannův integrál.

2.2. Podmínky integrovatelnosti

Abychom mohli funkci f integrovat na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, musí splňovat následující podmínky.

Věta 8. ***(Nutná a postačující podmínka)*** *Nechť f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom*

$$f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle) \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists D \in \mathcal{D}(\langle a, b\rangle) : S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Věta 9. *Nechť f splňuje jednu z podmínek:*

- *monotónnost na intervalu $\langle a, b\rangle$,*
- *spojitost na intervalu $\langle a, b\rangle$,*
- *omezenost na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť má na $\langle a, b\rangle$ jen konečně mnoho bodů nespojitosti.*

Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.

Nutnou podmínkou integrovatelnosti je, aby funkce f byla omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Postačující podmínkou je, aby funkce f byla na intervalu $\langle a, b\rangle$ omezená, monotónní nebo spojitá.

Věta 10. *Nechť f a g jsou omezené na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f \neq g$ jen v konečně mnoha bodech z $\langle a, b\rangle$. Potom*

$$f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle) \iff g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle),$$

přičemž se integrály těchto funkcí rovnají.

2.3. Vlastnosti $\mathcal{R}$-integrálu

Vlastnosti Riemannova určitého integrálu rozlišujeme v závislosti na funkci, kterou budeme integrovat a v závislosti na intervalu, přes který integrujeme. Nejprve se zaměříme na závislost na funkci a poté na závislost na intervalu.

a) v závislosti na funkci, kterou integrujeme

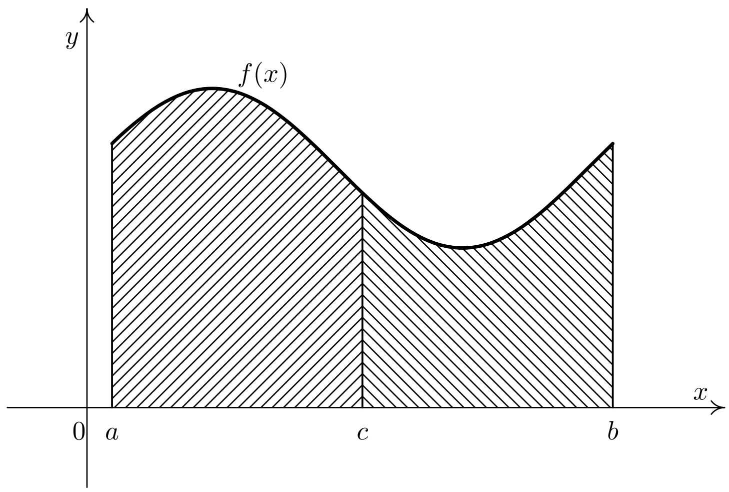
V následující větě si uvedeme vlastnosti $\mathcal{R}$-integrálu, které je nutné při výpočtech zohledňovat. Integrace součtu funkcí nebo součinu konstanty a funkce má podobné vlastnosti jako pro neurčitý integrál.

Věta 11. *Nechť platí $f, g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ a $c \in \mathbb{R}$:*

- *pokud čísla $k, K \in \mathbb{R}$ jsou taková, že $k \leq f(x) \leq K\ \forall x \in \langle a, b\rangle$ platí*
$$k \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq K \cdot (b-a),$$
- *pak $f + g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ a $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$,*
- *pak $c \cdot f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ a platí $\displaystyle\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,*
- *a pokud $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in \langle a, b\rangle$, pak platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$,*
- *pak $|f| \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ a platí $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$,*
- *platí $f \cdot g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$,*
- *pokud $c > 0$ tak, že $g(x) \geq c$ na $\langle a, b\rangle$ platí $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.*

b) v závislosti na intervalu, přes který integrujeme

V některých případech je vhodné určitý integrál funkce $f(x)$, která je definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$, rozdělit na součet dvou určitých integrálů, jejichž meze odpovídají podintervalům $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$, což je graficky znázorněno na obrázku 4 a popsáno v následující větě.



Obrázek 4

Věta 12. *Nechť $a < c < b, a, b, c, \in \mathbb{R}$, nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a, c\rangle)$ a $f \in \mathcal{R}(\langle c, b\rangle)$. Potom $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 13. *Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ a $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Potom $f \in \mathcal{R}(\langle c, d\rangle)$.*

2.4. Výpočet $\mathcal{R}$-integrálu

Pro výpočet určitého integrálu se používá substituční metoda a metoda per partes stejně jako u výpočtu neurčitého integrálu. Nejdříve si uvedeme Newton-Leibnizův vzorec, abychom mohli tyto metody výpočtu používat.

Věta 14. ***(Newton-Leibnizův vzorec)*** *Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ a F je primitivní funkce k f na $\langle a, b\rangle$. Potom platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Poznamenejme, že u určitého integrálu už neuvádíme konstantu c, protože výsledná hodnota $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ na ní nezávisí, platí totiž $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)+c]_a^b =$ $= (F(b)+c)-(F(a)+c) = F(b)+c-F(a)-c = F(b)-F(a)$. Pro jednoduchost tedy volíme c = 0.

Věta 15. ***(Metoda per partes)*** *Nechť funkce u a v mají derivace na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť $u', v' \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Potom*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 9. [Děmidovič, př. 2242] Vypočtěte integrál $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrál $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,\mathrm{d}x$ lze rozdělit na součet dvou integrálů s rozdílnými mezemi $\int_{\frac{1}{e}}^{1} -\ln x\,\mathrm{d}x + \int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$, což nám podstatně usnadní výpočet. Odtud lze použít na oba integrály stejnou *metodu per partes* a jednoduše dojít k řešení

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} -\ln x\,\mathrm{d}x + \int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{vmatrix} = -\left([x\ln x]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1}\mathrm{d}x\right) +$$

$$+\left([x\ln x]_1^e - \int_1^e \mathrm{d}x\right) = -\left(\left(0+\frac{1}{e}\right) - [x]_{\frac{1}{e}}^{1}\right) + ((e-0)-[x]_1^e) =$$

$$= -\left(\frac{1}{e} - \left(1-\frac{1}{e}\right)\right) + (e-(e-1)) = -\left(\frac{2}{e}-1\right) + 1 = \frac{2}{e} + 2 = 2\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

Věta 16. ***(Substituční metoda)*** *Nechť má funkce $t = \varphi(x)$ spojitou derivaci na $\langle a,b\rangle$ a nechť f je spojitá na H_φ (obor hodnot funkce φ). Potom*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \varphi(x) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ x = a \Rightarrow t = \varphi(a) \\ x = b \Rightarrow t = \varphi(b) \end{vmatrix} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka 2. Pokud měníme proměnnou, např. u substituce, tak musíme upravit integrační meze. U substituce můžeme zvolit i jiný postup a vyhnout se přepočítání mezí. Lze nejprve určit primitivní funkci, pak se vrátit k původní proměnné a následně dosadit do Newton-Leibnizova vzorce.

Poznámka 3. Pokud je $a = b$, pak definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

A pokud je $b < a$ a $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$, definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 10. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{-2}^{3} x(x^2-4)^4\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_{-2}^{3} x(x^2-4)^4\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} a = x^2-4 \\ \mathrm{d}a = 2x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}a \end{vmatrix} = \int_0^5 \frac{a^4}{2}\,\mathrm{d}a = \frac{1}{2}\int_0^5 a^4\,\mathrm{d}a = \frac{1}{2}\left[\frac{a^5}{5}\right]_0^5 = \frac{5^4}{2},$$

kde jsme přepočítali horní mez $3^2 - 4 = 5$ a dolní mez $(-2)^2 - 4 = 0$.

Druhou možností je vypočítat nejdříve primitivní funkci $\displaystyle\int x(x^2-4)^4\,\mathrm{d}x =$

$$= \begin{vmatrix} a = x^2-4 \\ \mathrm{d}a = 2x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}a \end{vmatrix} = \int \frac{a^4}{2}\,\mathrm{d}a = \frac{1}{2}\int a^4\,\mathrm{d}a = \frac{(x^2-4)^5}{10} + c \text{ a pak dosadit}$$

do Newton-Leibnizova vzorce $\displaystyle\int_{-2}^{3} x(x^2-4)^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x^2-4)^5}{10}\right]_{-2}^{3} = \frac{5^5}{10} = \frac{5^4}{2}.$

Příklad 11. [Děmidovič, př. 2279] Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^\pi e^x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Nejdříve provedeme úpravu výrazu $\cos^2 x$ pomocí známých goniometrických vzorců na $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$. Dosadíme-li upravený vzorec do integrálu, dojdeme k

$$\int_0^\pi e^x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x(\cos 2x + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \cos 2x \,\mathrm{d}x.$$

Nyní se podíváme blíže na výpočet výrazu $\displaystyle\int_0^\pi e^x \cos 2x \,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^\pi e^x \cos 2x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos 2x & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{vmatrix} = \left[\frac{1}{2}e^x \sin 2x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2}e^x \sin 2x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^\pi \cdot 0 - 0\right) - \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \sin 2x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin 2x & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left[-\frac{e^x \cos 2x}{2}\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \cos 2x \,\mathrm{d}x\right) = \left(\frac{e^\pi - 1}{4}\right) - \frac{1}{4}\int_0^\pi e^x \cos 2x \,\mathrm{d}x$$

Vidíme, že jsme došli zase ke stejnému výrazu a proto

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^x \cos 2x \,\mathrm{d}x &= \left(\frac{e^\pi - 1}{4}\right) - \frac{1}{4}\int_0^\pi e^x \cos 2x \,\mathrm{d}x, \\
\frac{5}{4}\int_0^\pi e^x \cos 2x \,\mathrm{d}x &= \frac{e^\pi - 1}{4}, \\
\int_0^\pi e^x \cos 2x \,\mathrm{d}x &= \frac{4}{5}\left(\frac{e^\pi - 1}{4}\right) = \frac{e^\pi - 1}{5}.
\end{aligned}$$

Pak tedy

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \cos 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[e^x\right]_0^\pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^\pi - 1}{5} = \frac{e^\pi - 1}{2} + \frac{e^\pi - 1}{10} =$$

$$= \frac{5e^\pi - 5 + e^\pi - 1}{10} = \frac{6e^\pi - 6}{10} = \frac{3}{5}\left(e^\pi - 1\right).$$

Příklad 12. [Děmidovič, př. 2270] Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_1^e (x\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_1^e (x\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \int_1^e x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x & u' = \frac{2\ln x}{x} \\ v' = x^2 & v = \frac{x^3}{3} \end{vmatrix} = \left[\frac{x^3}{3}\ln^2 x\right]_1^e -$$

$$-\int_1^e \frac{x^3}{3}\frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{e^3}{3} - 0\right) - \frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^2 & v = \frac{x^3}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{e^3}{3} - 0\right) + \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2}{9}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{e^3}{3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2e^3 - 2}{27} = \frac{9e^3 - 6e^3 + 2e^3 - 2}{27} =$$

$$= \frac{5e^3 - 2}{27}$$

Příklad 13. [Děmidovič, př. 2276] Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Řešení: V tomto případě nejdříve vyšetříme primitivní funkci a poté dosadíme do Newton-Leibnizova vzorce. K výpočtu užijeme substituce $u = \tan x$, protože zde pak platí vztahy $\sin^2 x = \dfrac{u^2}{1+u^2}$ a $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+u^2}$. Ze substituce vyjádříme $x = \arctan u, \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Po dosazení

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{1}{\frac{u^4}{(1+u^2)^2} + \frac{1}{(1+u^2)^2}}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u.$$

Zlomek $\dfrac{1+u^2}{1+u^4}$ rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{u^2+1}{u^4+1} = \frac{u^2+1}{(u^2-\sqrt{2}u+1)(u^2+\sqrt{2}u+1)} = \frac{t_2+t_1u}{u^2-\sqrt{2}u+1} + \frac{t_4+t_3u}{u^2+\sqrt{2}u+1}.$$

Vyjádříme si $u^2+1 = (t_2+t_1u)(u^2+\sqrt{2}u+1) + (t_4+t_3u)(u^2-\sqrt{2}u+1)$ a úpravou získáme soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
1 &= t_2 + t_4, \\
0 &= t_1 + \sqrt{2}t_2 + t_3 - \sqrt{2}t_4, \\
1 &= \sqrt{2}t_1 + t_2 - \sqrt{2}t_3 + t_4, \\
0 &= t_1 + t_3.
\end{aligned}
$$

Řešením soustavy rovnic je $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = 0$, $t_4 = \frac{1}{2}$. Po dosazení obdržíme

$$
\begin{aligned}
\int \frac{u^2+1}{u^4+1}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{2(u^2-\sqrt{2}u+1)} + \frac{1}{2(u^2+\sqrt{2}u+1)}\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-\sqrt{2}u+1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+\sqrt{2}u+1}.
\end{aligned}
$$

Výrazy $u^2 - \sqrt{2}u + 1$ a $u^2 + \sqrt{2}u + 1$ upravíme na čtverec $(u - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}$, $(u + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}$. Na upravené výrazy aplikujeme substituci $a = u - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{d}a = \mathrm{d}u$ a $b = u + \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{d}b = \mathrm{d}u$, dojdeme k

$$
\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}a}{a^2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}b}{b^2+\frac{1}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}a}{2a^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}b}{2b^2+1}.
$$

Použijeme-li substituci $c = \sqrt{2}a$, $\mathrm{d}c = \sqrt{2}\mathrm{d}a$ a $e = \sqrt{2}b$, $\mathrm{d}e = \sqrt{2}\mathrm{d}b$, vypočítáme primitivní funkci

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}c}{c^2+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}e}{e^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan c + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan e.
$$

Zpětným dosazením všech užitých substitucí získáme

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan(\sqrt{2}\tan x - 1) + \arctan(\sqrt{2}\tan x + 1)\right),
$$

využitím vzorce $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ upravíme na

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right).
$$

Primitivní funkce, ke které jsme došli je pouze řešením na otevřených intervalech $\left(-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Jak je vidno, primitivní funkce není spojitá v krajních bodech a proto v těchto bodech vypočteme limity

$$\lim_{t\to(-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan 2t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{-\infty}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(-\infty) = \frac{-\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\lim_{t\to(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan 2t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\infty}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Aby byla primitivní funkce spojitá ne celé množině $\mathbb{R}$ je nutné tuto funkci uměle napojit. Primitivní funkce je rovna $F(x)+c, c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, kde

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\dfrac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right) + k\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} & x \in \left(-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right), \\ \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} & x = \left(-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right). \end{cases}$$

Konečně se dostáváme k výpočtu určitého integrálu. Meze určitého integrálu se pohybují v uzavřeném intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Pro výpočet $F(0)$ využijeme předpis pro $k=0$

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan 0}{\sqrt{2}}\right) + 0\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan 0 = 0$$

a pro výpočet $F(2\pi)$ využijeme předpis $k=4$

$$F(2\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan 2\pi}{\sqrt{2}}\right) + 4\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan 0 + 2\sqrt{2}\pi = 2\sqrt{2}\pi.$$

Konečný výsledek určitého integrálu $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ vypadá takto

$$F(2\pi) - F(0) = 2\sqrt{2}\pi - 0 = 2\sqrt{2}\pi.$$

3. Nevlastní integrál

V předchozí kapitole, která se věnovala určitému integrálu jsme předpokládali, že integrujeme přes interval, který je uzavřený a funkce $y = f(x)$ je omezená. Pokud ale není některý z těchto předpokladů splněn, pak mluvíme o nevlastním integrálu. Můžeme se setkat například s otevřenými intervaly typu $(-\infty, b\rangle, \langle a, \infty)$ nebo $(-\infty, \infty)$. Rozlišujeme nevlastní integrál prvního druhu a druhého druhu.

Rozlišení integrálu na vlastní a nevlastní určitý integrál provedl ve své habilitační práci Georg Friedrich Bernhard Riemann.

Definice 7. Nechť funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $\langle a, x\rangle$ pro všechna $x > a$ a existuje konečná $\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, pak tuto limitu nazveme nevlastním integrálem 1. druhu a píšeme

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 4. Obdobně definujeme nevlastní integrál 1. druhu vzhledem k dolní mezi

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jedná-li se o nevlastní integrál vzhledem k dolní i k horní mezi, pak lze tento integrál vyjádřit jako součet dvou integrálů, z kterých je jeden nevlastní vzhledem k dolní mezi a druhý je nevlastní k horní mezi.

Definice 8. Nechť funkce f je definovaná na omezeném intervalu $\langle a, b)$ a není omezená na žádném levém okolí bodu b, existuje-li konečná $\lim\limits_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, pak tuto limitu nazveme nevlastním integrálem 2. druhu a píšeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 5. Obdobně definujeme nevlastní integrál 2. druhu vzhledem k dolní mezi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže se jedná o nevlastní integrál, který obsahuje nevlastní integrál prvního i druhého druhu, pak takový integrál rozdělíme na součet dvou integrálů, ze kterých je každý nevlastním integrálem právě jednoho druhu.

Můžeme se setkat s odlišnými názvy nevlastních integrálů, kdy nevlastní integrál prvního druhu bývá nazýván jako *nevlastní integrál vlivem meze* a nevlastní integrál druhého druhu jako *nevlastní integrál vlivem funkce*.

Příklad 14. [Děmidovič, př. 2342] Vypočtěte nevlastní integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

Řešení: Nejprve si vypočítáme primitivní funkci

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \begin{vmatrix} a=-x \\ \mathrm{d}a=-\mathrm{d}x \end{vmatrix} = -\int \frac{\mathrm{d}a}{(2+a)\sqrt{1+a}} = \begin{vmatrix} b=\sqrt{1+a} \\ a=b^2-1 \\ \mathrm{d}b=\frac{1}{2\sqrt{a+1}}\mathrm{d}a \end{vmatrix} =$$

$$= -\int \frac{2}{b^2+1}\,\mathrm{d}b = -2\arctan b = -2\arctan\sqrt{1+a} = -2\arctan\sqrt{1-x}$$

a nyní výslednou primitivní funkci $-2\arctan\sqrt{1-x}$ dosadíme zpět do nevlastního integrálu

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1^-}\left[-2\arctan\sqrt{1-x}\right]_0^t =$$

$$= -2\arctan 0 + 2\arctan 1 = 0 + 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Příklad 15. [Děmidovič, př. 2341] Vypočtěte nevlastní integrál $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Nejprve si rozložíme zlomek $\frac{x^2+1}{x^4+1}$ na parciální zlomky

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{x^2+1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)} = \frac{t_2+t_1x}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{t_4+t_3x}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

Odtud vyjádříme $x^2+1 = (t_2+t_1x)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (t_4+t_3x)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ a úpravou získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
1 &= t_2 + t_4,\\
0 &= t_1 + \sqrt{2}t_2 + t_3 - \sqrt{2}t_4,\\
1 &= \sqrt{2}t_1 + t_2 - \sqrt{2}t_3 + t_4,\\
0 &= t_1 + t_3.
\end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic je $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = 0$, $t_4 = \frac{1}{2}$. Po dosazení do nevlastního integrálu obdržíme

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^{t} \left(\frac{1}{2(x^2-\sqrt{2}x+1)} + \frac{1}{2(x^2+\sqrt{2}x+1)} \right) \mathrm{d}x,$$

nevlastní integrál lze rozdělit na součet dvou nevlastních integrálů se stejnými mezemi a provedeme vytknutí konstanty $\frac{1}{2}$, tzn.

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^{t} \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^{t} \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Oba jmenovatele upravíme na čtverec

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^{t} \frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^{t} \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}$$

a dále aplikujeme substituce

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}=\begin{vmatrix} a=x-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mathrm{d}a=\mathrm{d}x\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{t-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}a}{a^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}=\begin{vmatrix} u=x+\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{t-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}a}{2a^2+1}+\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{t+\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+\frac{1}{2}}=\begin{vmatrix} b=\sqrt{2}a \\ \mathrm{d}b=\sqrt{2}\mathrm{d}a\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{t\to\infty}\int\limits_{-1}^{\sqrt{2}t-1}\frac{\mathrm{d}b}{b^2+1}+$$

$$+\lim_{t\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{t+\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}u}{2u^2+1}=\begin{vmatrix} v=\sqrt{2}u \\ \mathrm{d}v=\sqrt{2}\mathrm{d}u\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{t\to\infty}\int\limits_{-1}^{\sqrt{2}t-1}\frac{\mathrm{d}b}{b^2+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{t\to\infty}\int\limits_{1}^{\sqrt{2}t+1}\frac{\mathrm{d}v}{v^2+1}.$$

Odtud už lze lehce dopočítat primitivní funkci

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{t\to\infty}\left[\arctan b\right]_{-1}^{\sqrt{2}t-1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{t\to\infty}\left[\arctan v\right]_{1}^{\sqrt{2}t+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lim_{t\to\infty}(\arctan(\sqrt{2}t-1))+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lim_{t\to\infty}(\arctan(\sqrt{2}t+1))-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

4. Aplikace integrálního počtu v ekonomii

Integrální počet nabízí širokou paletu možností při řešení problémů v reálném světě, je využíván především ve vědních oborech, například ve fyzice, matematice, statistice, ekonomii a v mnoha dalších.

V této kapitole se podíváme na aplikaci integrálního počtu v ekonomii, konkrétně v oblasti celkových a mezních veličin, dále budeme pokračovat investicemi a tvorbou kapitálu, současnou hodnotou cash-flow a na závěr se zaměříme na Domarův model růstu.

4.1. Celkové a mezní veličiny

Celkové a mezní veličiny spadají do ekonomické **teorie mezního (marginálního, hraničního) užitku**, která se zabývá změnami nabídky a poptávky. Základy této teorii položili Carl Menger a William Stanley Jevons. Úloha o nalezení celkové veličiny prostřednictvím mezní veličiny je jednou z nejčastěji řešených úloh pomocí neurčitého integrálu v oblasti ekonomie.

Mezní veličina je přírůstková veličina a vyjadřuje změnu celkové veličiny při velmi malé změně proměnné. Mezní veličina je vyjádřena jako derivace celkové veličiny $f(x)$ podle proměnné x, tzn.

$$\text{mezní veličina } = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x},$$

kde předpokládáme, že celkové i mezní veličiny jsou spojité.

Z předchozího textu a vztahu mezi diferenciálním a integrálním počtem vyplývá, že celkovou veličinu $f(x)$ získáme integrací mezní veličiny

$$f(x) = \int \text{mezní veličina}\,\mathrm{d}x.$$

Mezních veličin existuje nespočet a proto si uvedeme pouze jedny z nejužívanějších:

- mezní náklady $MC = \dfrac{\mathrm{d}TC}{\mathrm{d}Q}$,
- mezní příjem $MR = \dfrac{\mathrm{d}TR}{\mathrm{d}Q}$,
- mezní užitek $MU = \dfrac{\mathrm{d}TU}{\mathrm{d}x}$,
- mezní sklon ke spotřebě $mpc = \dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Y}$,
- mezní sklon k úsporám $mps = \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}Y}$,

kde jsou TC celkové náklady, TR celkové příjmy, Q celková produkce, TU celkový užitek, x statek, Y důchod, C spotřeba a S úspora.

V jiných literaturách se můžeme setkat se zaměněním pojmu mezní veličiny s pojmem *marginální veličiny*, ale jedná se stále o tutéž mikroekonomickou veličinu.

Příklad 16. [Chiang, str. 464] Nechť je zadaná marginální funkce důchodu:
a) $R'(Q) = 28Q - e^{0,3Q}$,
b) $R'(Q) = 10(1+Q)^{-2}$.
Najděte v jednotlivých případech celkovou funkci důchodu $R(Q)$.
Řešení:
ad a) $R(Q) = \displaystyle\int R'(Q)\,\mathrm{d}Q = \int (28Q - e^{0,3Q})\,\mathrm{d}Q = 28\int Q\,\mathrm{d}Q - \int e^{0,3Q}\,\mathrm{d}Q =$

$$= \left| \begin{matrix} t = 0,3Q \\ \mathrm{d}t = 0,3\,\mathrm{d}Q \\ \mathrm{d}Q = \frac{1}{0,3}\,\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = 28\frac{Q^2}{2} - \frac{1}{0,3}\int e^t\,\mathrm{d}t = 14Q^2 - \frac{10}{3}e^t = 14Q^2 - \frac{10}{3}e^{0,3Q} + c, c \in \mathbb{R}$$

ad b) $R(Q) = \displaystyle\int R'(Q)\,\mathrm{d}Q = \int \frac{10}{(1+Q)^2}\,\mathrm{d}Q = 10\int \frac{\mathrm{d}Q}{(1+Q)^2} = \left| \begin{matrix} t = 1+Q \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}Q \end{matrix} \right| =$

$$= 10\int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = 10\frac{t^{-1}}{-1} = \frac{-10}{t} = \frac{-10}{1+Q} + c, c \in \mathbb{R}$$

Příklad 17. [Chiang, str. 465] Nechť je zadána funkce mezního sklonu k importu $M'(Y) = 0,1$ a informace, že $M = 20$ při $Y = 0$. Najděte funkci importu $M(Y)$.
Řešení:

$$M(Y) = \int M'(Y)\,\mathrm{d}Y = \int 0,1\,\mathrm{d}Y = 0,1Y + c, c \in \mathbb{R}$$

Dosadíme-li do rovnice známé informace, vypočítáme konstantu c.

$$\begin{aligned} M(Y) &= 0,1Y + c \\ 20 &= 0,1 \cdot 0 + c \\ c &= 20 \end{aligned}$$

Konečná funkce importu je $M(Y) = 0,1Y + 20$.

Příklad 18. [Chiang, str. 465] Nechť je zadána funkce mezního sklonu ke spotřebě $C'(Y) = 0,8 + 0,1Y^{\frac{-1}{2}}$ a informace, že $C = Y$ při $Y = 100$. Najděte funkci spotřeby $C(Y)$.
Řešení:

$$C(Y) = \int C'(Y)\,\mathrm{d}Y = \int (0,8 + 0,1Y^{\frac{-1}{2}})\,\mathrm{d}Y = 0,8Y + 0,2\sqrt{Y} + c, c \in \mathbb{R}$$

Dosadíme-li do rovnice známé informace, vypočítáme konstantu c.

$$\begin{aligned} C(Y) &= 0,8Y + 0,2\sqrt{Y} + c \\ 100 &= 0,8 \cdot 100 + 0,2\sqrt{100} + c \\ c &= 100 - 80 - 2 = 18 \end{aligned}$$

Konečná funkce spotřeby je $C(Y) = 0,8Y + 0,2\sqrt{Y} + 18$.

4.2. Investice a tvorba kapitálu

Problematiku investicí a tvorby kapitálu lze řešit jak pomocí neurčitého, tak určitého integrálu. Pomocí určitého integrálu budeme řešit úlohy, kde potřebujeme najít množství kapitálu za určitý časový interval.

Investicí rozumíme část příjmů, které jsou vloženy do kapitálu, konkrétně do dlouhodobých statků, které přinášejí prospěch. Tvorba kapitálu je tvořena na základě investic, kde dochází ke změně základního kapitálu. Předpokladem zde ovšem je úspora peněžních prostředků a jejich následné investování do kapitálu.

Pokud tento proces budeme pozorovat spojitě v čase, lze vyjádřit základní kapitál jako funkci času $K(t)$. Zderivujeme-li funkci základního kapitálu podle proměnné t, dostaneme se k míře tvorby kapitálu. Míra tvorby kapitálu je totožná s mírou toku čisté investice v čase $I(t)$. Platí tedy

$$I(t) \equiv \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}$$

a potom

$$K(t) = \int I(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t.$$

Abychom pochopili rozdíl mezi veličinami $K(t)$ a $I(t)$ je nutné zdůraznit, že kapitál K má akumulující charakter, kdežto investice I je průtokového charakteru. Funkce $K(t)$ odráží množství kapitálu v daném okamžiku a funkce $I(t)$ nás informuje o rychlosti investice za rok nebo určitý časový interval.

Občas se do modelu zahrnou i hrubé investice I_g, které obsahují amortizaci. Pro hrubé a čisté investice platí vztah

$$I_g = I + \delta K,$$

kde δ představuje odpisovou sazbu z kapitálu a δK obměnu investic.

Příklad 19. [Chiang, str. 465] Předpokládejme, že míra investic je popsána funkcí $I(t) = 12t^{\frac{1}{3}}$ a platí $K(0) = 25$.

a) Určete časový průběh základního kapitálu.

b) Určete množství akumulace kapitálu během příslušných časových intervalů $\langle 0, 1 \rangle$ a $\langle 1, 3 \rangle$.

Řešení:

ad a) $K(t) = \displaystyle\int I(t)\,\mathrm{d}t = \int 12t^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = 12\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} = 9t^{\frac{4}{3}} + c, c \in \mathbb{R}$

Nyní srovnáme výši základního kapitálu v čase 0, tedy $t = 0$, a odtud zjistíme výši konstanty c

$$K(0) = 9 \cdot 0 + c,$$

je zjevné, že $c = 25$ a dosadíme zpět do rovnice. Časový průběh základního kapitálu se tedy rovná $K(t) = 9t^{\frac{4}{3}} + 25$.

ad b) K výpočtu zvolíme určitý integrál ve tvaru $\displaystyle\int_a^b I(t)\,\mathrm{d}t$, kde za interval $\langle a, b \rangle$ dosadíme intervaly $\langle 0, 1 \rangle$ a $\langle 1, 3 \rangle$.

Na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ platí

$$K(t) = \int I(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 12t^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = 12\left[\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = 12\left(\frac{3}{4}1^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}0^{\frac{4}{3}}\right) = 12\frac{3}{4} = 9$$

a na intervalu $\langle 1, 3 \rangle$ platí

$$K(t) = \int I(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^3 12t^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = 12\left[\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\right]_1^3 = 12\left(\frac{3}{4}3^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}\right) = 9(3\sqrt[3]{3} - 1).$$

4.3. Současná hodnota cash-flow

V této části využijeme znalostí určitého integrálu při stanovení současné hodnoty cash-flow ve spojitém případě.

Cash-flow představuje pohyb peněžních prostředků za určité období. Současná hodnota je vztažena k referenčnímu datu, které je dopředu dané a v tomto případě leží před všemi platbami. Tudíž se všechny platby musí převádět v čase směrem zpět k referenčnímu datu pomocí diskontního faktoru

$$v = \frac{1}{1+i},$$

kde i představuje úrokovou míru vyjádřenou desetinným číslem. Referenční datum lze chápat jako současnou časovou pozici.

Při omezení se na jednu budoucí hodnotu V existují hodnotové vzorce:

$$A = V(1+i)^{-t} \qquad \textit{diskrétní případ},$$

$$A = Ve^{-rt} \qquad \textit{spojitý případ},$$

kde t označuje počet let a r diskontní roční sazbu.

Nyní však budeme předpokládat tok budoucích hodnot, například sérii výnosů nebo pohledávek v různých časech nebo nákladové výdaje splatné v různých časech.

Pro **diskrétní případ** budeme pro jednoduchost uvažovat tři budoucí příjmy $R_t(t = 1, 2, 3)$, které jsou k dispozici vždy na konci t-tého roku. Současná hodnota budoucích příjmů R_t tedy bude

$$R_1(1+i)^{-1}, \quad R_2(1+i)^{-2}, \quad R_3(1+i)^{-3},$$

kde i reprezentuje roční diskontní sazbu. Tyto vztahy lze přepsat pomocí sumy

$$\pi = \sum_{t=1}^{3} R_t(1+i)^{-t},$$

kde π označuje současnost.

Poznámka 6. Všimněme si, že pro jednu budoucí hodnotu a pro tok budoucích hodnot, je tu pouze rozdíl v tom, že V bylo zaměněno s R_t a ve výpočtu přibyla suma.

Ve **spojitém případě** budeme uvažovat kontinualitu peněžního toku. Jestliže označíme příjmy za rok jako $R(t)$, pak to znamená, že v čase $t = t_1$ je průtok příjmů ročně roven $R(t_1)$ a pro $t = t_2$ je průtok příjmů ročně roven $R(t_2)$. Pokud necháme časový interval dt nekonečně mnohokrát projít každým okamžikem t, pak se výše příjmu v intervalu $\langle t, t + \mathrm{d}t\rangle$ rovná $R(t)\,\mathrm{d}t$. Při trvalém diskontování sazbou r za rok, by měla být současná hodnota rovna $R(t)e^{-rt}\,\mathrm{d}t$.

Pro předchozí diskontní případ, kdy jsme řešili současnou hodnotu tříletého proudu, bychom našli odpověď použitím určitého integrálu

$$\pi = \int_0^3 R(t)e^{-rt}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Poznámka 7. Oproti případu s uvažovanou jednou budoucí hodnotou jsme zde opět zaměnili V s R_t a přidali do výpočtu určitý integrál.

Nutno poznamenat, že pokud jsou roční příjmy $R(t)$ konstantní, označujeme je konstantou D, která vyjadřuje výši dolarů za rok.

Příklad 20. [Chiang, str. 465] Nechť je spojitý tok příjmů při konstantní rychlosti ve výši \$1000/rok.
a) Jaká bude současná hodnota π, jestliže tok příjmů trvá 2 roky a spojitá diskontní sazba je $0,05$ za rok?
b) Jaká bude současná hodnota π, jestliže tok příjmů končí přesně po 3 letech a diskontní sazba je $0,04$?

Řešení:

ad a) Podle předchozího vztahu (1) vypočítáme určitý integrál s mezemi 0 a y

$$\int_0^y R(t)e^{-rt}\,\mathrm{d}t = \int_0^y De^{-rt}\,\mathrm{d}t = D\int_0^y e^{-rt}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} a = -rt \\ \mathrm{d}a = -r\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{-r}\,\mathrm{d}a \end{matrix}\right| == D\int\limits_0^{-ry} \frac{e^a}{-r}\,\mathrm{d}a =$$

$$= -\frac{D}{r}\left[e^a\right]_0^{-ry} = -\frac{D}{r}\left(e^{-ry} - e^0\right) = -\frac{D}{r}\left(e^{-ry} - 1\right) = \frac{D}{r}\left(1 - e^{-ry}\right).$$

Nyní dosadíme za $D = 1000$, $r = 0,05$ a $y = 2$ a dojdeme k současné hodnotě toku příjmů

$$\pi = \frac{1000}{0,05}\left(1 - e^{-0,05\cdot 2}\right) \doteq \$1903.$$

ad b) Zde bychom stejně jako v předchozím bodě vypočítali neurčitý integrál, po dosazení za $D = 1000$, $r = 0,04$ a $y = 3$, dojdeme k

$$\pi = \frac{D}{r}\left(1 - e^{-ry}\right) = \frac{1000}{0,04}\left(1 - e^{-0,04\cdot 3}\right) \doteq \$2827.$$

4.3.1. Současná hodnota věčného cash-flow

Cash-flow může také trvat věčně a to v případě, že se jedná o vlastnictví věčného dluhopisu nebo o příjmy z nezničitelného majetku, jako jsou pozemky. V tomto případě využíváme nevlastního integrálu a současná hodnota věčného cash-flow je rovna

$$\pi = \int_0^{\infty} R(t)e^{-rt}\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Příklad 21. [Chiang, str. 465] Určete současnou hodnotu věčného peněžního toku při:

a) \$1450 za rok a diskontní sazbě $r = 5\%$,

b) \$2460 za rok a diskontní sazbě $r = 8\%$.

Řešení:

ad a) Podle vztahu (2) vypočítáme neurčitý integrál

$$\int_0^{\infty} R(t)e^{-rt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} De^{-rt}\,\mathrm{d}t = D\int_0^{\infty} e^{-rt}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{l} a = -rt \\ \mathrm{d}a = -r\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{-r}\,\mathrm{d}a \end{array}\right| = D\int_{-\infty}^{0} \frac{e^a}{r}\,\mathrm{d}a =$$

$$= \frac{D}{r}\left[e^a\right]_{-\infty}^{0} = \frac{D}{r}\left(e^0 - \lim_{a\to-\infty} e^a\right) = \frac{D}{r}(1-0) = \frac{D}{r}.$$

Po dosazení $D = 1450$ a $r = 0,05$, vypočteme současnou hodnotu věčného peněžního toku

$$\pi = \frac{1450}{0,05} = \$29000.$$

ad b) Po vzoru předchozího bodu vypočteme neurčitý integrál a dosadíme za $D = 2460$ a $r = 0,08$

$$\pi = \frac{D}{r} = \frac{2460}{0,08} = \$30750.$$

4.4. Domarův model růstu

Po II. světové válce se mnozí ekonomové snažili o dynamizaci Keynesovy *Obecné teorie*, včetně Američana E. D. Domara. Ve 40. letech 20. století Domar zveřejnil svou modelovou teorii růstu, ale v téměř stejný okamžik byla zveřejněna Harrodova teorie růstu. Tyto teorie nezávisle na sobě došly ke stejným závěrům a proto se v literatuře často používá označení Harrod-Domarův model růstu. Tento model je považován za základní makroekonomický model a modeluje hospodářský růst. O něco později následovali modely dynamizace od N. Kaldora, J. Robinsonové a dalších.

Evsey David Domar žil v letech 1914-1997 a byl zástupcem keynesiánské školy, která věří, že zvyšování objemu peněz vede ke snižování nezaměstnanosti.

Nejdříve si představíme veličiny, se kterými budeme v následujícím textu pracovat:

- Velkým písmenem I budeme označovat investice. Pod pojmem investice si představíme tu část příjmu (důchodu), která je vložená do kapitálu. Investicím jsme se již věnovali v předchozím textu, konkrétně v kapitole 4.2.

- Písmeno Y označuje důchod, nebo-li příjem.

- Malé písmeno s je mezní sklon k úsporám, který vyjadřuje reakci úspor na změnu disponibilního důchodu. Pokud bychom chtěli zjistit celkovou výši výdajů, užijeme výdajový multiplikátor, který bude označen zlomkem $\frac{1}{s}$. Výdajový multiplikátor vyjadřuje vztah mezi velikostí původního výdaje a následný přírůstkem celkových výdajů.

- Kapitál je označen písmenem K, kterým rozumíme vše, co je vkládané do výroby za účelem vzniku další hodnoty.
- κ značí kapacitu nebo potencionální výstup průtoku za rok.
- ρ nám bude vyjadřovat kapacitu kapitálu.

Po zavedení označení a představení veličin vyslovíme **základní požadavky na model**:

- Změna v rychlosti přílivu investic za rok $I(t)$ bude mít dvojí vliv a to na agregátní poptávku a na výrobní kapacitu ekonomiky.
- Při zvýšení $I(t)$ se zvýší rychlost příjmů za rok $Y(t)$, kde $Y(t) = I(t)\frac{1}{s}$ a s vyjadřuje mezní sklon k úsporám. Předpoklad, že $I(t)$ představuje výdajový tok, který ovlivňuje rychlost příjmového toku $Y(t)$, nás opravňuje k tvrzení, že
$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\frac{1}{s}. \tag{3}$$
- Kapacitní efekt investic se měří jako změna v rychlosti potenciálního výstupu, který dokáže ekonomika vyprodukovat. Za předpokladu, že je kapacita kapitálu konstantní, můžeme psát
$$\frac{\kappa}{K} = \rho,$$
kde κ značí kapacitu nebo potencionální výstup průtoku za rok a ρ označuje kapacitu kapitálu. Ekonomika je potenciálně schopná vyprodukovat roční produkt nebo příjem ve výši $\kappa \equiv \rho K$ dolarů, kde $K(t)$ označuje zásoby kapitálu v čase t. Rovnici $\kappa \equiv \rho K$ nazýváme jako produkční funkci a vyplývá odtud, že $d\kappa = \rho\ dK$ a tedy platí
$$\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}t} = \rho\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \rho I. \tag{4}$$

V Domarově modelu růstu je rovnovážná situace v případě, že je výrobní kapacita plně využita. Pokud chceme dosáhnout rovnováhy, je nutné, aby se agregátní poptávka přesně rovnala potencionálnímu výstupu vyrobeného v roce, kdy platí $Y = \kappa$. Jestliže začínáme v rovnovážném stavu, je nutné požadavek snížit na rovnost příslušných změn kapacity a celkové poptávky, aby platilo

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}t}. \tag{5}$$

Největší problém v tomto modelu je, **jak stanovit časový průběh investice $\boldsymbol{I(t)}$, abychom dosáhli rovnováhy za všech okolností.**
Dosadíme-li vztahy (3) a (4) do rovnice (5) dostaneme vztah

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\frac{1}{s} = \rho I \quad \text{nebo} \quad \frac{1}{I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \rho s, \tag{6}$$

ze kterého bychom měli být schopni najít rovnováhu nebo požadovaný časový průběh investice.

V tomto případě je řešením integrace obou stran druhé rovnice ze vztahu (6) s ohledem na t. Skutečnost, že obě strany jsou v rovnováze stejné, zajišťuje rovnost integrálů

$$\int \frac{1}{I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \rho s\,\mathrm{d}t,$$

kde ρ a s představují konstanty. Po provedení úprav se dostaneme k

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}I}{I} &= \int \rho s\,\mathrm{d}t \\ \ln|I| &= \rho s t + c \\ e^{\ln|I|} &= e^{\rho s t + c} \\ |I| = e^{\rho s t}e^{c} &= Ae^{\rho s t}, \qquad \text{kde } A \equiv e^{c}. \end{aligned}$$

Pokud bychom uvažovali investici pozitivního charakteru, pak $|I| = I$ a dostali bychom $I(t) = Ae^{\rho s t}$, kde A je libovolná konstanta. Abychom se této libovolné konstanty zbavili, stanovíme $t = 0$, pak $I(0) = Ae^{0} = A$. Potom můžeme psát

$$I(t) = I(0)e^{\rho s t}, \tag{7}$$

kde $I(0)$ označuje počáteční míru investice.

Příklad 22. [Chiang, str. 469] Pokud víte, že konstanta r v exponenciální funkci Ae^{rt} představuje rychlost růstu funkce, aplikujte tuto skutečnost a odvoďte vztah $I(t) = I(0)e^{\rho st}$ bez použití integrace.

Řešení: Ze zadání je patrné $I(t) = Ae^{rt}$. Nyní odvodíme vztah $I(t) = I(0)e^{\rho st}$, kdy se vrátíme v textu ke vztahu (6) a budeme jej upravovat

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{s} = \rho I.$$

Zderivujeme-li investici $I(t)$ podle proměnné t, dojdeme k $rAe^{rt} \cdot \dfrac{1}{s} = \rho I$, kde je zřejmé, že $rAe^{rt} = rI$, můžeme tedy psát $rI \cdot \dfrac{1}{s} = \rho I$. Dále převedeme všechny proměnné na levou stranu a srovnáme s nulou $rI \cdot \dfrac{1}{s} - \rho I = 0$, odtud lze vytknout I a za podmínky $\boldsymbol{I \neq 0}$ vyjádřit r:

$$I(\frac{r}{s} - \rho) = 0,$$

$$\frac{r}{s} = \rho,$$

$$r = \rho s.$$

Pokud dosadíme do původní rovnice $I(t) = Ae^{rt}$ vypočítané r, dokážeme daný vztah

$$I(t) = Ae^{\rho st} = I(0)e^{\rho st},$$

$$I(0) = Ae^0 = A.$$

Příklad 23. [Chiang, str. 469] Dokažte, že i když bude investice ve stejné rovnici $|I| = Ae^{\rho st}$ negativní, na definici libovolné konstanty A se stále nic nezmění a skončíme opět u řešení $I(t) = I(0)e^{\rho st}$.

Řešení: Budeme vycházet z řešení předešlého příkladu, protože zadání se liší jen v detailech.

Ze zadání je patrné $I(t) = -Ae^{rt}$. Dále je postup totožný jako v příkladě 22. Opět tedy zderivujeme investici $I(t)$ podle proměnné t, převedeme proměnné na levou stranu a srovnáme s nulou, vytkneme I a za podmínky $\boldsymbol{I \neq 0}$ vyjádříme r. Na závěr dosadíme do rovnice $I(t) = -Ae^{rt}$ vyjádřené $r = \rho s$ a opět skončíme u stejného řešení

$$I(t) = -Ae^{\rho st} = I(0)e^{\rho st},$$
$$I(0) = -Ae^{0} = -A.$$

Příklad 24. [Chiang, str. 469] Dokažte, že výsledek $I(t) = I(0)e^{\rho st}$ můžeme alternativně získat nalezením a srovnáním určitých integrálů na obou stranách vztahu $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{1}{s} = \rho I$ s ohledem na proměnnou t s limity integrace $t = 0$ a $t = t$.

Řešení: Zlomek $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\dfrac{1}{s} = \rho I$, kde I a $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ jsou funkce proměnné t, upravíme na

$$\frac{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t)}{I(t)} = \rho s.$$

Takto upravený vztah zintegrujeme

$$\int_0^t \frac{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(u)}{I(u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^t \rho s\,\mathrm{d}u$$

a na integrál na levé straně užijeme substituci $\omega = I(u), \mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(u)\mathrm{d}u$, tzn.

$$\int_{I(0)}^{I(t)} \frac{1}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \int_0^t \rho s\,\mathrm{d}u.$$

Dojdeme k

$$[\ln|\omega|]_{I(0)}^{I(t)} = [u\rho s]_0^t\,,$$
$$\ln|I(t)| - \ln|I(0)| = t\rho s - 0,$$
$$\ln\left|\frac{I(t)}{I(0)}\right| = t\rho s,$$

odkud vyjádříme požadovaný vztah

$$I(t) = I(0)e^{\rho st}.$$

Závěr

Cílem práce bylo představit některé aplikace integrálního počtu v ekonomii. V práci jsou uvedeny jak základní pojmy, vlastnosti a vztahy integrálního počtu, tak i ekonomické aplikace neurčitého, určitého i nevlastního integrálu. Aplikací integrálního počtu v ekonomii existuje mnohem více než je zde uvedeno, ale doporučený rozsah této práce nedovoluje věnovat pozornost všem.

Integrální počet má v ekonomii nezastupitelnou roli, především určitý integrál. Použitím jeho integračních mezí se dají vyčíslit ekonomické ukazatele za určitý časový interval.

Při psaní práce jsem se potýkala s jediným nedostatkem, a to s malým množstvím literatury v oblasti aplikací integrálního počtu v ekonomii.

Literatura

[1] Děmidovič, Boris Pavlovič: Sbírka úloh a cviční z matematické analýzy, 1. vydání. Brno: Fragment, 2003.

[2] Chiang, Alpha C.: Fundamental Methods of Mathematical Economics, 3. vydání. USA: McGraw-Hill, 1984.

[3] Mošová, Vratislava: Matematická analýza I, 1. vydání. Olomouc: Nakladatelství Olomouc, s.r.o., 2002.

[4] Krátká, Miroslava: Tvorba obrázků pro matematické texty pomocí metapostu. Brno: Masarykova univerzita, 2001.

[5] Martan, F., Rozenský, Z., Brabec, J.: Matematická analýza I, 1. vydání. Praha: SNTL, 1985.

[6] Novák, Vítězslav: Integrální počet v $\mathbb{R}$, 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986.

[7] Schwabik, Š., Šarmanová, P.: Malý průvodce historií integrálu, 1. vydání. Praha: Prometheus, 1996.

[8] Soukupová, J., Hořejší, B., Macáková, L., Soukup, J.: Mikroekonomie, 3. vydání. Praha: Management press, 2003.

[9] Jurečka, Václav: Úvod do ekonomie, 2. vydání. Ostrava: VŠB - Technická univerzita, 2009.

[10] Macáková, Libuše a kolektiv: Mikroekonomie, 8. vydání. Slaný: Melandrium, 2003.

[11] Holman, Robert a kolektiv: Dějiny ekonomického myšlení, 2. vydání. Praha: C. H. Beck, 2001.

[12] Neurčitý integrál [online], dostupné z: http://elearning.math.upol.cz/pluginfile.php/2653/mod_resource/content/3/KMA%20M1_19.pdf [citováno 12.11.2012]

[13] Určitý integrál [online], dostupné z: http://elearning.math.upol.cz/pluginfile.php/2657/mod_resource/content/3/KMA%20M1_22.pdf [citováno 25.11.2012]

[14] Určitý integrál - podmínky integrovatelnosti a vlastnosti [online], dostupné z: http://elearning.math.upol.cz/pluginfile.php/2660/mod_resource/content/3/KMA%20M1_23.pdf [citováno 30.11.2012]

[15] Určitý integrál - výpočet $\mathcal{R}$-integrálu [online], dostupné z: http://elearning.math.upol.cz/pluginfile.php/2661/mod_resource/content/3 /KMA%20M1_24.pdf [citováno 8.12.2012]

[16] Věty o substituci [online], dostupné z: https://www.math.muni.cz/ xschlesi/bakalarka/integraly/sec/22.html, [citováno 4.4.2013]

[17] Primitivní funkce [online], dostupné z: http://aix-slx.upol.cz/ tomecek/vyuka/ma2i/03_prim_fce.pdf, [citováno 4.4.2013]

[18] Dirichletova funkce [online], dostupné z: http://eamos.pf.jcu.cz/amos/kat_inf/externi/kat_inf_64198/kankam00_184/ task_3/14dirichletovafunkce.pdf, [citováno 18.4.2013]

[19] E. D. Domar [online], dostupné z: https://moodle.dce.fel.cvut.cz/pluginfile.php/4899/mod_resource/content/2 /Pred_14bnew.pdf [citováno 22.2.2013]

[20] Teorie mezního užitku [online], dostupné z: http://encyklopedie.vseved.cz/mezn%C3%AD+u%C5%BEitek [citováno 9.4.2013]