VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

ROVNICE NELINEÁRNÍ DIFUZE
NONLINEAR DIFFUSION EQUATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE — RADEK POLÁŠEK
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — prof. RNDr. JAN FRANCŮ, CSc.
SUPERVISOR

BRNO 2015

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky
Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Radek Polášek

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Rovnice nelineární difuze

v anglickém jazyce:

Nonlinear diffusion equations

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Vedle lineární rovnice difuze existují různé nelineární rovnice difuze, jejich řešení mají odlišné vlastnosti.

Cíle bakalářské práce:

Cílem práce formulovat různé typy nelineárních rovnic difuze, jejich fyzikální interpretace a na konkrétních příkladech ilustrovat odlišné vlastností jejích řešení.

Seznam odborné literatury:

M. Fila, J. Filo: Kvalitatívna analýza vybraných úloh nelineárnej difúzie, Sborník 13. semináře z parciálních diferenciálních rovnic, JČSMF a VŠSE v Plzni, Plzeň 1989.

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jan Franců, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 11.11.2014

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
Děkan fakulty

Abstrakt
Práce se věnuje různým typům difuzních rovnic. Difuzní rovnice jsou odvozeny pro různé předpoklady prostředí. Blíže je pak popsáno Barenblattovo řešení rovnice pomalé difuze, na kterém jsou demonstrovány jeho vlastnosti.

Summary
This work is focused on various types of diffusion equations. The diffusion equations are derived for various assumptions of media. We describe in detail Barenblatt solution for slow diffusion equation, whose features are demonstrated.

Klíčová slova
Rovnice difuze, Barenblattovo řešení

Keywords
Diffusion equation, Barenblatt solution

POLÁŠEK, R.*Rovnice nelineární difuze.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 17 s. Vedoucí prof. RNDr. Jan Franců, CSc.

Prohlašuji, že tuto bakalářskou práci jsem vytvořil samostatně pod vedením svého vedoucího. Veškeré zdroje práce jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Radek Polášek

Velké poděkování si zaslouží prof. RNDr. Jan Franců, CSc., pod jehož vedením byla práce napsána, za ochotu, pomoc a motivaci do práce.

Radek Polášek

Obsah

1 Úvod **2**

2 Odvození difuzních rovnic **3**
2.1 Odvození obecné rovnice difuze . . . 3
2.2 Rovnice lineární difuze . . . 4
2.3 Rovnice rychlé difuze . . . 5
2.4 Rovnice pomalé difuze . . . 5

3 Příklady řešení difuzních rovnic **7**
3.1 Explicitní řešení rovnice pomalé difuze . . . 7
3.2 Rovnice pomalé difuze se zdroji látky . . . 12
3.3 Řešení rovnice lineární difuze . . . 14

4 Závěr **15**

5 Seznam použitých symbolů **17**

1. Úvod

Difuzní rovnice jsou součástí teorie parciálních diferenciálních rovnic. Pojmem difuzní rovnice nazýváme typ parabolických rovnic, ve kterých se proměnná vyskytuje v první časové derivaci a ve druhých prostorových derivacích. Neznámou funkcí $u(\mathbf{x}, t)$ zde bývá koncentrace sledované látky v místě $\mathbf{x}$ a čase t. Základem difuzních rovnic je jejich fyzikální tvar

$$u_t + \operatorname{div}(\mathbf{w}) = f,$$

kde $\mathbf{w}$ je difuzní tok látky a f reakční člen. Konečný tvar rovnice je poté určen závislostí difuzního toku $\mathbf{w}$ na koncentraci u. Nejznámější difuzní rovnicí je lineární rovnice vedení tepla

$$u_t = \Delta u + f,$$

která popisuje lineární difuzi.
Difuzními rovnicemi je možné modelovat i další jevy v přírodě, spadající do oblasti fyziky, chemie, geologie nebo i biologie. V populační biologii se difuzní rovnice používá pro modelování šíření populace do prostoru. V těchto případech je neznámou množství populace na jednotce prostoru. Rovnice, která tento jev popisuje, už ovšem lineární není.
Z rovnic nelineární difuze se budeme zabývat rovnicí rychlé difuze a rovnici pomalé difuze. Obě tyto rovnice mají tvar

$$u_t = \Delta(u^\sigma),$$

kde σ je kladný parametr, který pro rovnici rychlé difuze nabývá hodnot z intervalu $(0, 1)$ a pro rovnici pomalé difuze je $\sigma > 1$. V práci se budeme věnovat převážně rovnici pomalé difuze, protože o rovnici rychlé difuze zatím není mnoho dostupných literárních zdrojů.
V práci budou tyto difuzní rovnice odvozeny, nejdříve ve svém základním fyzikálním tvaru a poté podle předpokladů prostředí upraveny na konečný tvar. Dále budou na Barenblattově řešení rovnice pomalé difuze demonstrovány vlastnosti řešení rovnice pomalé difuze, a to jak pro rovnici bez reakčního členu, tak i s ním. Demonstrace vlastností bude podpořena názorným grafickým znázorněním řešení s vývojem v čase.

2. Odvození difuzních rovnic

2.1. Odvození obecné rovnice difuze

Uvažujme oblast Ω v prostoru reprezentující prostředí, v němž difunduje určitá látka. Neznámá $u(\mathbf{x}, t)$ popisuje koncentraci, tedy množství sledované látky v jednotce objemu v místě $\mathbf{x}$ a čase t. Celkové množství látky v objemu V je určeno koncentrací $M = \int_V u \,\mathrm{d}x$.
Pro libovolný objem V v časovém intervalu $I = (t_\alpha, t_\beta)$ označme:

ΔM ... přírůstek množství látka v objemu V za časový interval I,

M_S ... množství látky, které během časového intervalu I difunduje z objemu přes povrch $S = \partial V$,

M_f ... množství látky, které jsme do objemu V během časového intervalu I dodali, nebo které tam vzniklo.

Podle zákona zachování látky uvažujeme následující bilanci látky:

$$\Delta M = M_f - M_S.$$

Jednotlivé hmotnosti vyjádříme pomocí koncentrace u:

$$\Delta M = M_{t_\beta} - M_{t_\alpha} = \int_V [u(\mathbf{x}, t_\beta) - u(\mathbf{x}, t_\alpha)] \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_I \int_V \frac{\partial u}{\partial t} \,\mathrm{d}\mathbf{x} \,\mathrm{d}t,$$

$$M_S = \int_I \int_S w(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t) \,\mathrm{d}S \,\mathrm{d}t,$$

$$M_f = \int_I \int_V f(\mathbf{x}, t) \,\mathrm{d}\mathbf{x} \,\mathrm{d}t,$$

kde f je daná (známá) funkce určující množství dodávané látky vztažené na jednotku objemu a jednotku času. Veličina w je tok difundující látky, tedy množství látky, které projde jednotkou plochy za jednotku času. Difuzní tok w závisí na místě $\mathbf{x}$, čase t a taky na normále $\mathbf{n}$ uvažované plochy. Lze odvodit, že $w = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$, kde $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ je vektor toků ve směrech souřadných os x_1, x_2, x_3.
S využitím Gauss-Ostrogradského vzorce získáme:

$$M_S = \int_I \int_{\partial V} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \;\, \mathrm{d}S \,\mathrm{d}t = \int_I \int_V \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\mathbf{x} \,\mathrm{d}t.$$

Pak podle zákona zachování látky platí:

$$\int_I \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial x_i} - f \right) \mathrm{d}\mathbf{x} \,\mathrm{d}t = 0. \tag{2.1}$$

K dalšímu kroku budeme potřebovat větu o limitě průměru:
Lemma: Nechť f je spojitá veličina v okolí bodu x. Pak platí:

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} f(x) \,\mathrm{d}x = f(x).$$

Rovnost (2.1) podělíme délkou intervalu I a mírou objemu V. V přechodu k limitě pro $|I| \to 0$ a $|V| \to 0$ podle předchozího lemmatu získáme rovnost

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial x_i} - f = 0. \tag{2.2}$$

Rovnici je také možné zapsat ve tvaru

$$u_t + \operatorname{div}(\mathbf{w}) = f. \tag{2.3}$$

Dále se tvar rovnice bude odvíjet od závislosti difuzního toku $\mathbf{w}$ na koncentraci u. Zcela obecně platí, že difuzní tok je nějakou obecnou funkcí místa, koncentrace a gradientu koncentrace, tedy $\mathbf{w} = g(\mathbf{x}, u, \nabla u)$. Pokud je prostředí homogenní, odpadá závislost na místě $\mathbf{x}$ a $\mathbf{w} = g(u, \nabla u)$.

2.2. Rovnice lineární difuze

Uvažujme, že prostředí je izotropní, homogenní a nehybné. V tomto případě je vztah mezi difuzním tokem w a koncentrací u popsán Fickovým zákonem difuze, který má tvar

$$w(\mathbf{n}) = -D \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i,$$

kde D je konstanta difuzivity.

Do rovnice (2.2) dosadíme za difuzní tok $\mathbf{w}$ závislost z Fickova zákona.Získáme tak rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - f = 0.$$

Pro součet druhých derivací u podle prostorových proměnných použijeme elegantnější zápis pomocí Laplaceova operátoru Δ a členy se záporným znaménkem převedeme na pravou stranu. Získáme tak rovnici

$$u_t = D\Delta u + f,$$

což je **rovnice lineární difuze**. Vhodnou lineární transformací časové i prostorové veličiny (normalizací) je možné dosáhnout toho, že konstanta difuzivity D nabude hodnoty 1. Získáme tak rovnici v bezrozměrném tvaru

$$u_t = \Delta u + f, \tag{2.4}$$

která je známá také jako rovnice vedení tepla.
Linearitu rovnice nám zaručil lineární konstituční vztah mezi difuzním tokem w a gradientem koncentrace u.

2.3. Rovnice rychlé difuze

S difuzí se můžeme setkat i ve fyzice plazmatu. I zde je možné nalézt závislost mezi difuzním tokem w a koncentrací u. Přijdeme tak k rovnici

$$u_t = \Delta(u^\sigma) + f, \quad \sigma \in (0,1). \tag{2.5}$$

Tuto rovnici budeme nazývat **rovnicí rychlé difuze**. Poznamenejme, že tato rovnice již není lineární.

2.4. Rovnice pomalé difuze

Uvažujme nyní homogenní plyn proudící homogenním pórovitým prostředím. Předpokládejme, že stavová rovnice plynu má tvar

$$\gamma = \gamma_0\, p^\alpha, \tag{2.6}$$

kde $\gamma = \gamma(\mathbf{x}, t)$ je hustota plynu, $p = p(\mathbf{x}, t)$ je jeho tlak a γ_0 je fyzikální konstanta. Hodnota parametru α závisí na charakteru toku, $\alpha = 1$ pro izotermický, pro adiabatický $\alpha \in (0,1)$.
Proudění plynu je charakterizováno zákonem zachování hmoty

$$\zeta\gamma_t = -\mathrm{div}\ (\gamma\overline{v}) \tag{2.7}$$

a Darcyho zákonem

$$\overline{v} = -\frac{k}{\mu}\ \mathrm{grad}\ p\ , \tag{2.8}$$

kde $\overline{v}$ je difuzní rychlost, μ je viskozita plynu, ζ je pórovitost prostředí a k permeabilita prostředí. Všimněme si, že rovnice (2.7) je podobného tvaru jako (2.3) a kombinací rovnic (2.6) a (2.8) jsme schopni získat konstituční vztah mezi difuzní rychlostí $\overline{v}$ a koncentrací γ. Dosazením (2.8) do (2.7) získáme:

$$\zeta\gamma_t = -\mathrm{div}\ [\gamma\left(-\frac{k}{\mu}\right)\ \mathrm{grad}\ p] = \frac{k}{\mu}\ \mathrm{div}\ (\gamma\ \mathrm{grad}\ p).$$

Ze stavové rovnice vyjádříme

$$p = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{\alpha^{-1}} = \gamma_0^{-\alpha^{-1}}\ \gamma^{\alpha^{-1}}$$

a dosadíme do předchozího vztahu:

$$\zeta\gamma_t = \frac{k}{\mu}\ \mathrm{div}\ [\gamma\ \mathrm{grad}\ (\gamma_0^{-\alpha^{-1}}\ \gamma^{\alpha^{-1}})],$$

$$\frac{\zeta\mu}{k\gamma_0^{\alpha^{-1}}}\gamma_t = \mathrm{div}\ [\gamma\ \mathrm{grad}\ (\gamma^{\alpha^{-1}})].$$

Postupně budeme upravovat pravou stranu rovnice.

$$\frac{\zeta\mu}{k\gamma_0^{\alpha^{-1}}}\gamma_t = \mathrm{div}\ [\gamma\ \alpha^{-1}\gamma^{\alpha^{-1}-1}\ \mathrm{grad}\ \gamma] = \alpha^{-1}\mathrm{div}\ (\gamma^{\alpha^{-1}}\ \mathrm{grad}\ \gamma) =$$

$$= \alpha^{-1} \sum_i (\alpha^{-1} \gamma^{\alpha^{-1}-1} \gamma_{x_i}\gamma_{x_i} + \gamma^{\alpha^{-1}} \gamma_{x_i x_i})$$

K dalšímu postupu se nám bude hodit spočítat si, čemu se rovná $\Delta(u^{(1+\alpha^{-1})})$:

$$\Delta(u^{(1+\alpha^{-1})}) = \sum_i (1+\alpha^{-1})(\alpha^{-1}u^{(\alpha^{-1}-1)}u_{x_i}u_{x_i} + u^{\alpha^{-1}}u_{x_i x_i}). \tag{2.9}$$

Pokud v našem odvození diferenciální rovnice zavedeme označení $\gamma = u$, okamžitě na pravé straně rovnice vidíme právě odvozený výraz pro $\Delta(u^{(1+\alpha^{-1})})$.

$$\frac{\zeta\mu}{k\gamma_0^{\alpha^{-1}}} u_t = \frac{\alpha^{-1}}{\alpha^{-1}+1} \Delta(u^{1+\alpha^{-1}})$$

Označme nyní $1+\alpha^{-1} = \sigma$ a rovnici volbou vhodných jednotek znormalizujme. Získáme tak rovnici v bezrozměrném tvaru

$$u_t = \Delta(u^\sigma), \tag{2.10}$$

kde $u(x,t)$ je neznámá vyjadřující koncentraci látky v místě x a čase t a $\sigma > 1$. Tuto rovnici nazveme **rovnicí pomalé difuze**.

3. Příklady řešení difuzních rovnic

3.1. Explicitní řešení rovnice pomalé difuze

Nalezení obecného řešení ze třídy diferencovatelných funkcí pro parciální diferenciální rovnice popisující fyzikální děje nebývá většinou možné. Rovnice pomalé difuze je však rovnicí, pro niž bylo nalezeno konkrétní explicitní řešení. Formulujme tedy Cauchyho úlohu. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze jednorozměrnou difuzi, tedy $\mathbf{x} = \mathrm{x} \in \mathbb{R}$. Uvažujeme tedy difuzi v úzké trubici, jejíž průřez můžeme považovat za bod.

Úloha: Buď $\sigma > 1$. Řešte rovnici

$$u_t = (u^\sigma)_{xx} \tag{3.1}$$

s počáteční podmínkou

$$u(x,0) = u_0(x)\ .$$

Nechť a a τ jsou libovolné , ale pevně zvolené, kladné reálné konstanty. Řešení úlohy budiž navrhnuto ve tvaru

$$u(x,t;a,\tau) = \frac{1}{(t+\tau)^{\frac{1}{\sigma+1}}}\left[a^2 - \frac{\frac{\sigma-1}{2\sigma(\sigma+1)}|x|^2}{(t+\tau)^{\frac{2}{\sigma+1}}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}}\ ,$$

kde $[\lambda]_+ = \max\{0,\lambda\}$ je kladná část. Toto řešení se nazývá **Barenblattovo řešení**. Pro zjednodušení zavedeme označení

$$k = \frac{1}{\sigma+1}\ ; C = \frac{k(\sigma-1)}{2\sigma}\ .$$

Navržené řešení pak má tvar

$$u(x,t;a,\tau) = \frac{1}{(t+\tau)^k}\left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}}\ . \tag{3.2}$$

Konstanty a a τ budou určeny později. Všimněme si, že daný návrh řešení je v proměnné x osově souměrný podle počátku $x = 0$. Nyní ověřme, že takto navržená funkce je skutečně řešením úlohy (3.1) Označme Ω_+ oblast, na které $u > 0$, a Ω_0 oblast, na které $u \equiv 0$. Na Ω_0 je rovnost $u_t = (u^\sigma)_{xx}$ splněna triviálně. Na Ω_+ platí:

$$(u^\sigma)_x = \sigma\left\{\frac{1}{(t+\tau)^k}\left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}}\right\}^{\sigma-1}\frac{1}{(t+\tau)^k}\,\frac{1}{\sigma-1}\left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}}\frac{-2Cx}{(t+\tau)^{2k}} =$$

$$= \frac{-2C\sigma x}{(\sigma-1)(t+\tau)^{3k}}\,\frac{1}{(t+\tau)^{k(\sigma-1)}}\left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}} =$$

$$= \frac{-2C\sigma x}{(\sigma-1)(t+\tau)^{2k+\sigma k}}\left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}}\ ,$$

$$(u^\sigma)_{xx} = \frac{-2C\sigma}{(\sigma-1)(t+\tau)^{2k+\sigma k}} \left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}} -$$

$$- \frac{-2C\sigma x}{(\sigma-1)(t+\tau)^{2k+\sigma k}} \, \frac{1}{\sigma-1} \left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} \frac{-2Cx}{(t+\tau)^{2k}} =$$

$$= \frac{-2C\sigma}{(\sigma-1)(t+\tau)^{2k+\sigma k}} \left\{ \left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}} - \frac{2C|x|^2}{(\sigma-1)(t+\tau)^{2k}} \left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} \right\} =$$

$$= \frac{-k}{(t+\tau)^{2k+\sigma k}} \left\{ \left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}} - \frac{2C|x|^2}{(\sigma-1)(t+\tau)^{2k}} \left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} \right\},$$

$$u_t = -k \, \frac{1}{(t+\tau)^{k+1}} \left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}} + \frac{1}{(t+\tau)^k} \, \frac{1}{\sigma-1} \left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} \frac{-C|x|^2(-2k)}{(t+\tau)^{2k+1}} =$$

$$= \frac{-k}{(t+\tau)^{k+1}} \left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}} + \frac{2Ck|x|^2}{(\sigma-1)(t+\tau)^{3k+1}} \left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} =$$

$$= \frac{-k}{(t+\tau)^{2k+\sigma k}} \left\{ \left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}} - \frac{2C|x|^2}{(\sigma-1)(t+\tau)^{2k}} \left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} \right\}.$$

Je tedy vidět, že skutečně $u_t = (u^\sigma)_{xx}$ i na oblasti Ω_+. Položme nyní $t = 0$, abychom zjistili, jak pro dané řešení vypadá jeho počáteční podmínka $u_0(x)$.

$$u(x, 0; a, \tau) = \frac{1}{\tau^k} \left[a^2 - \frac{C|x|^2}{\tau^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

Je zřejmé, že

$$u_0(0) = \frac{1}{\tau^k} \, a^{\frac{2}{\sigma-1}}.$$

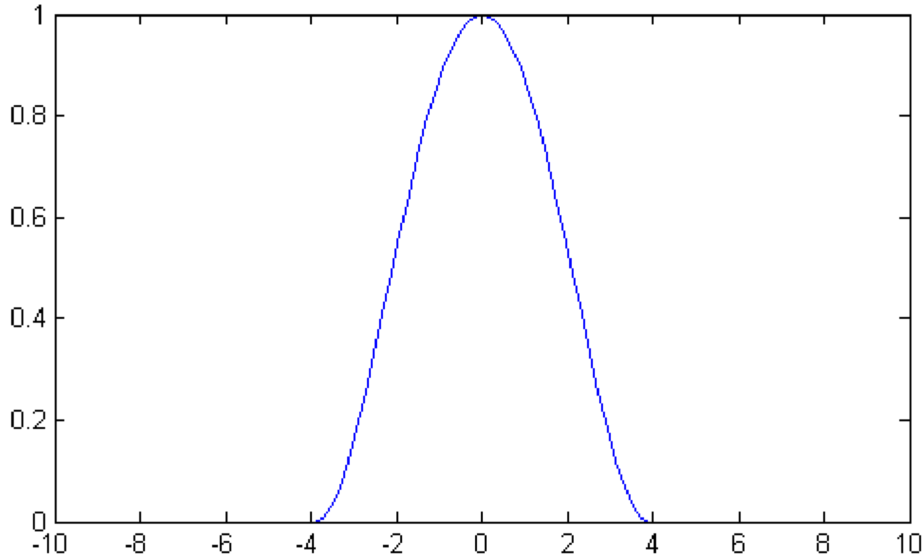
Pro tuto hodnotu zavedeme označení $u_0(0) = \varepsilon$. Dále označme ξ nejmenší kladné x, pro které platí $v_0(x) = 0$, a pokusme se je nalézt. Řešíme tedy rovnici

$$\frac{1}{\tau^k} \left[a^2 - \frac{C|x|^2}{\tau^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}} = 0.$$

$$\frac{C|x|^2}{\tau^{2k}} = a^2$$

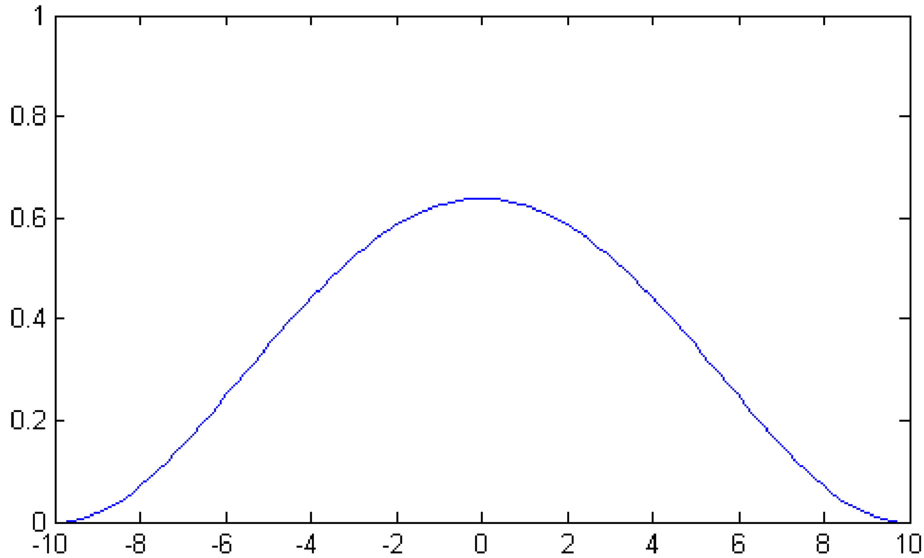
$$x = \frac{a \, \tau^k}{\sqrt{C}} = \xi$$

Pro vykreslení naší počáteční podmínky je potřeba konkrétní hodnota čísla σ a parametrů a a τ. Uvažujme tedy, že $\sigma = 1,5$ a zvolme $a = 1$ a $\tau = 1$.
Pak $\varepsilon = 1$ a $\xi = 3,873$. Podívejme se, jak tato počáteční podmínka vypadá.



Obrázek 3.1: Počáteční podmínka $u_0(x)$

Volbou parametrů a a τ můžeme vhodně měnit tvar naší počáteční podmínky. Hodnota ε zde totiž vyjadřuje "výšku"a ξ zase "šířku"počáteční podmínky. Chceme-li tedy vytvořit počáteční podmínku určitého tvaru, můžeme se pokusit přiblížit se jí nastavením parametrů ε a ξ pomocí vhodně zvolených hodnot a a τ. Jako demonstraci zvolme tentokrát $a = 1,1$ a $\tau = 8$.
Pak $\varepsilon = 0,637$ a $\xi = 9,788$. Pro porovnání si tuto počáteční podmínku vykresleme.

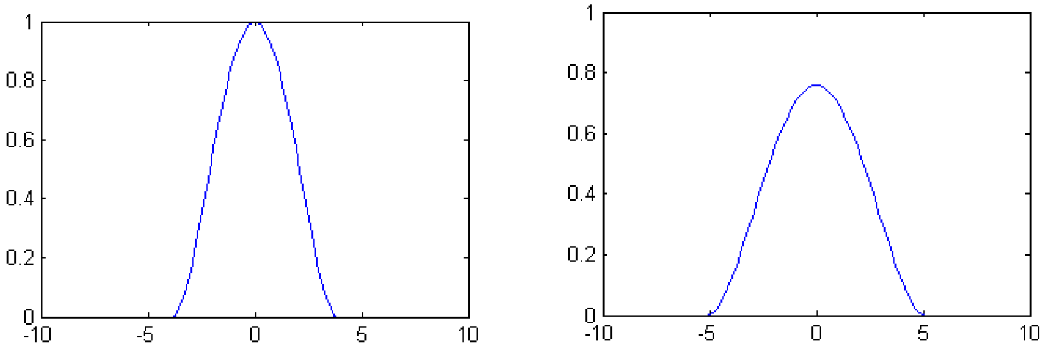


Obrázek 3.2: Počáteční podmínka $u_0(x)$ pro $a = 1,1$ a $\tau = 8$

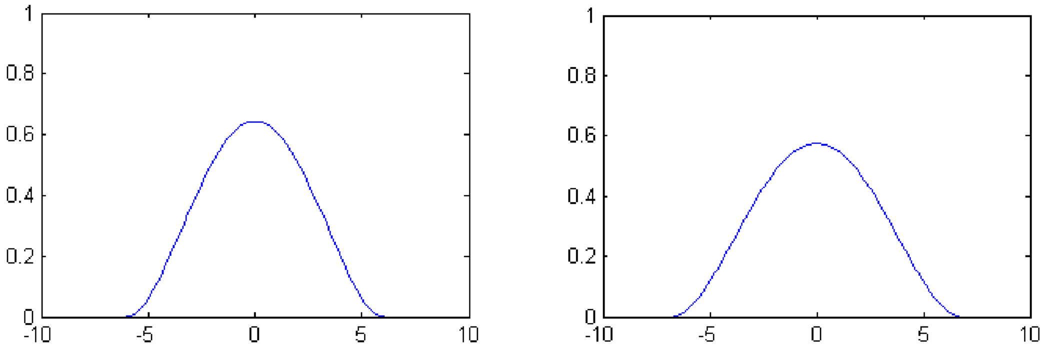
Chceme-li vytvořit počáteční podmínku, která odpovídá zadaným hodnotám ε a ξ, je potřeba vyjádřit parametry a a τ v závislosti na ε a ξ.

$$a = (\varepsilon\xi\sqrt{C})^{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}}; \quad \tau = \frac{\xi^2 C}{\varepsilon^{\sigma-1}}$$

Zůstaňme nyní u příkladu, kde $a = 1$ a $\tau = 1$, a podívejme se, jak se bude řešení v čase vyvíjet.



Obrázek 3.3: $t = 0$ a $t = 1$



Obrázek 3.4: $t = 2$ a $t = 3$

Vidíme, že z míst s nenulovou koncentrací se látka šíří do míst s nižší koncentrací. Oblast, ve které je nenulová koncentrace, se postupně zvětšuje. Množství látky v celém prostoru zůstává nezměněné, tedy platí $\int_{\mathbb{R}} u \, \mathrm{d}x = M = konst.$

Barenblattovo řešení ovšem nemůžeme považovat za klasické řešení, protože pro $\sigma > 2$ neexistují $(u^\sigma)_{xx}$ ani u_t pro ty hodnoty (x, t), pro které platí $a^2(t+\tau)^{2k} = C|x|^2$, tedy na hranici Ω_+ a Ω_0. Bude tedy potřeba zavést pojem slabého řešení.

Definice: Funkci $u(x, t)$ nazveme slabým řešením úlohy (3.1), pokud

1. u je omezená, spojitá a nezáporná v Ω_+
2. u^σ má ohraničenou slabou derivaci podle x na Ω_+
3. u splňuje integrální identitu

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \left((u^\sigma)_x \, v_x - u v_t \right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \; v(x, 0) \, \mathrm{d}x,$$

pro všechny $v \in C^1(\Omega_+)$ takové, že $v \equiv 0$ pro velké $|x|$ a t.

Vidíme, že Barenblattovo řešení první dva body splňuje. Ověřme tedy platnost integrální identity z bodu 3.
Zvolme $v = 0$ pro $t = 0$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\ v(x,0)\,\mathrm{d}x = 0$$

a ověřujeme rovnost:

$$0 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^+} ((u^\sigma)_x v_x - uv_t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{\partial V} [(u^\sigma)_x n_x - u\ n_t]\,v\,\mathrm{d}S - \int\int_V [(u^\sigma)_{xx} - u_t]\,v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Víme, že Barenblattovo řešení splňuje rovnici $u_t = (u^\sigma)_{xx}$. Proto druhý integrál bude roven nule. Je tedy potřeba ověřit rovnost

$$\int_{\partial V} [(u^\sigma)_x n_x - u\ n_t]\,v\,\mathrm{d}S = 0 \ \Rightarrow\ (u^\sigma)_x n_x = u\ n_t$$

na hranici ∂V.
Křivku na hranici ∂V označme Γ_S. Tato křivka je charakterizována rovnicí

$$x = \frac{a}{\sqrt{C}}(t+\tau)^k = h(t)\ .$$

Pak tečný vektor křivky Γ_S má tvar $(h'(t),1)$, vektor normály je $(1,-h'(t))$ a jednotkový vektor normály $(\frac{1}{|n|}, \frac{-h'(t)}{|n|}) = (n_x, n_t)$. Chceme tedy ověřit, že na hraniční křivce Γ_S platí rovnost

$$(u^\sigma)_x = -u\ h'(t)\ .$$

$$\frac{-2C\sigma x}{(\sigma-1)(t+\tau)^{2k+\sigma k}}\left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}} = -\frac{1}{(t+\tau)^k}\left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}} h'(t)$$

Ovšem na křivce Γ_S platí $a^2(t+\tau)^{2k} = C|x|^2$, z čehož vyplývá, že $(u^\sigma)_x = 0$ i $u = 0$ a rovnost je tedy splněna. Barenblattovo řešení je proto slabým řešením úlohy (3.1).

Poznámka
Úlohu jsme pro názornost řešili pouze jednorozměrně, tedy $x \in \mathbb{R}$. Barenblattovo řešení je ovšem možné snadno upravit i pro vyšší dimenzi, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, na tvar

$$u(\mathbf{x},t;a,\tau) = \frac{1}{(t+\tau)^k}\left[a^2 - \frac{C|\mathbf{x}|^2}{(t+\tau)^{\frac{2k}{N}}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}}\ .$$

Pak

$$\frac{\partial\,(u^\sigma)}{\partial x_i} = \frac{-2C\sigma x_i}{(\sigma-1)(t+\tau)^{\frac{2k}{N}+\sigma k}}\left[a^2 - \frac{C|\mathbf{x}|^2}{(t+\tau)^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}},$$

$$\Delta\,(u^\sigma) = \frac{-k}{(t+\tau)^{2k+\sigma k}}\left\{\left[a^2 - \frac{C|\mathbf{x}|^2}{(t+\tau)^{\frac{2k}{N}}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}} - \frac{2C|\mathbf{x}|^2}{N(\sigma-1)(t+\tau)^{\frac{2k}{N}}}\left[a^2 - \frac{C|\mathbf{x}|^2}{(t+\tau)^{\frac{2k}{N}}}\right]_+^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}}\right\},$$

$$u_t = \frac{-k}{(t+\tau)^{2k+\sigma k}}\left\{\left[a^2 - \frac{C|\mathbf{x}|^2}{(t+\tau)^{\frac{2k}{N}}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}} - \frac{2C|\mathbf{x}|^2}{N(\sigma-1)(t+\tau)^{\frac{2k}{N}}}\left[a^2 - \frac{C|\mathbf{x}|^2}{(t+\tau)^{\frac{2k}{N}}}\right]_+^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}}\right\}.$$

Opět vidíme, že je splněno $\Delta\,(u^\sigma) = u_t$.

3.2. Rovnice pomalé difuze se zdroji látky

Uvažujme úlohu

$$u_t = (u^\sigma)_{xx} + \mu u \tag{3.3}$$
$$u(x,0) = u_0(x),$$

kde μ je reálný parametr. Interpretujme jeho fyzikální význam: V každém časovém okamžiku v každém místě vznikne (pokud $\mu > 0$) nebo zanikne (pokud $\mu < 0$) množství látky přímo úměrné koncentraci v daném místě. Je tedy zřejmé, že pro $\mu \neq 0$ se celkové množství látky v prostoru v čase mění. Úlohy tohoto typu se vyskytují i v populační biologii, parametr μ zde značí porodnost či úmrtnost. Při $\mu = 0$ se úloha (3.3) degeneruje na úlohu (3.1), kterou splňuje Barenblattovo řešení. Nalezení řešení úlohy (3.3) umožňuje následující věta.

Věta Nechť $w(x,s)$ je řešením úlohy

$$w_s = (w^\sigma)_{xx} \tag{3.4}$$
$$w(x,0) = u_0(x).$$

Pak $u(x,t) = e^{\mu t}\ w(x, \frac{e^{\mu(\sigma-1)t}\ -1}{\mu(\sigma-1)})$ je řešením úlohy (3.3).

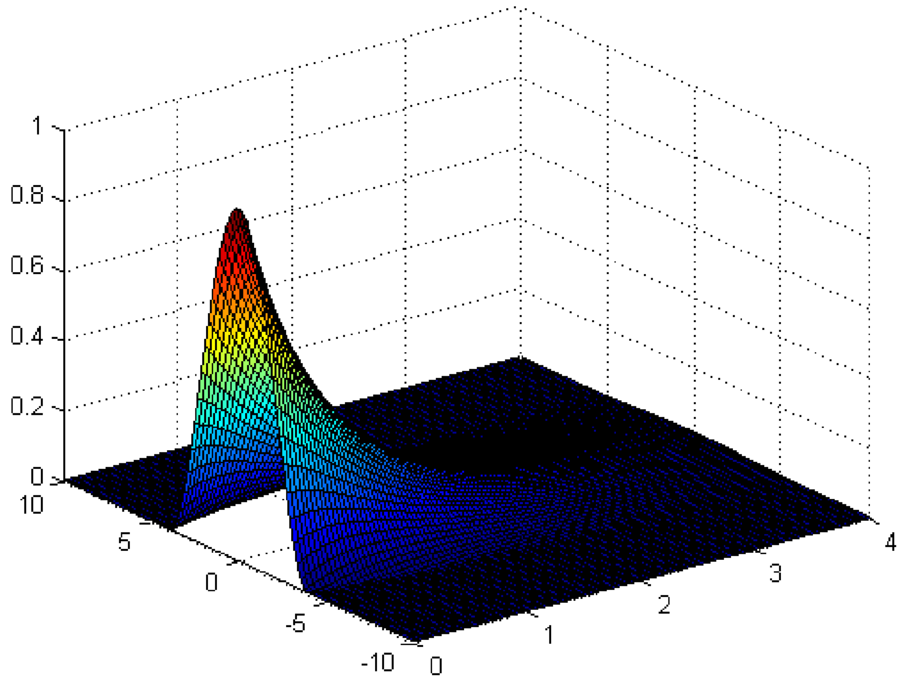
Důkaz:
$u(x,0) = e^{\mu 0}\ w(x, \frac{e^{\mu(\sigma-1)0}\ -1}{\mu(\sigma-1)}) = w(x,0) = u_0(x)$
$u_t = \mu e^{\mu t}\ w(x, \frac{e^{\mu(\sigma-1)t}\ -1}{\mu(\sigma-1)}) + e^{\mu t}\ w_s(x, \frac{e^{\mu(\sigma-1)t}\ -1}{\mu(\sigma-1)})\ e^{\mu(\sigma-1)t} = \mu u + e^{\mu\sigma t}\ (w^\sigma)_{xx} =$
$= \mu u + [(e^{\mu t}\ w)^\sigma]_{xx} = (u^\sigma)_{xx} + \mu x$

□

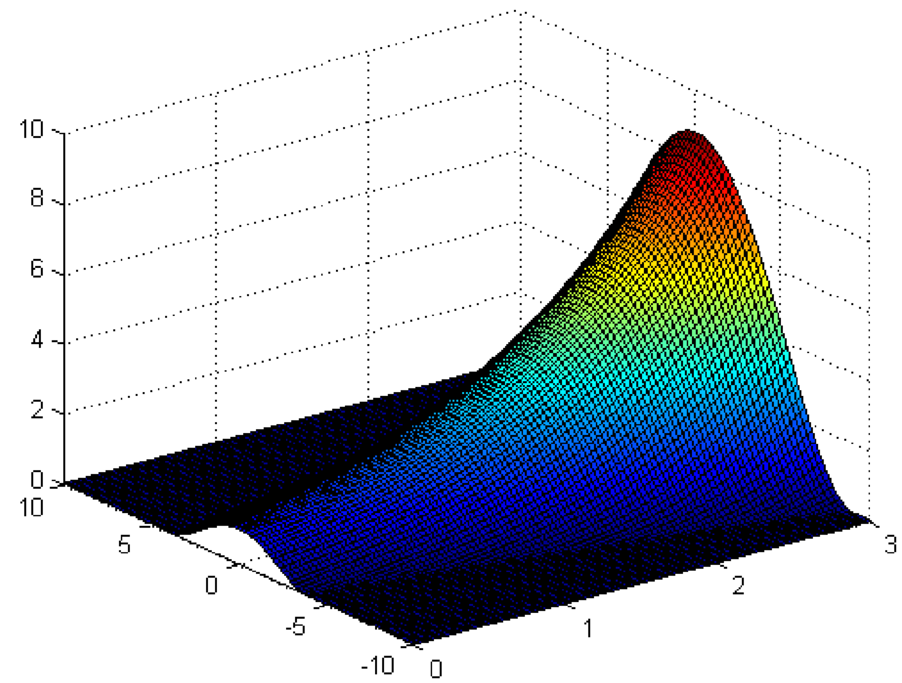
Díky této větě jsme schopni nalézt řešení úlohy (3.3), protože řešení úlohy (3.4) jsme již nalezli, je to Barenblattovo řešení dané vztahem (3.2). Můžeme tedy vyjádřit explicitní řešení úlohy (3.3), které bude ve tvaru

$$u(x,t;a,\tau) = e^{\mu t}\frac{1}{\left(\frac{e^{\mu(\sigma-1)t}-1}{\mu(\sigma-1)}+\tau\right)^k}\left[1-\frac{C|x|^2}{\left(\frac{e^{\mu(\sigma-1)t}-1}{\mu(\sigma-1)}+\tau\right)^{2k}}\right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}}. \tag{3.5}$$

Toto řešení vytváří stejnou počáteční podmínku, jako řešení (3.2), kterou opět můžeme nastavovat pomocí konstant a a τ. Uvažujme nyní, že $\sigma = 1,5$ a zvolme $a = 1$ a $\tau = 1$. Protože řešení úlohy (3.3) máme dané explicitně, nic nám nebrání podívat se, jak vypadá.



Obrázek 3.5: $\mu = -1$



Obrázek 3.6: $\mu = 1$

Na obrázku (3.5) je hodnota parametru $\mu = -1$. Jak vidíme, koncentrace se mírně šíří do prostoru, ovšem zůstane pouze v ohraničené oblasti. Celkové množství látky v prostoru s rostoucím časem klesá. Obrázek (3.6) znázorňuje situaci, kdy $\mu > 0$, konkrétně $\mu = 1$. Ve srovnání s obrázkem (3.5) vidíme, že koncentrace se s časem zvyšuje a látka se postupně (konečnou rychlostí) rozšíří do celého prostoru.

3.3. Řešení rovnice lineární difuze

Vraťme se ještě k rovnici

$$u_t = u_{xx} \ , \tag{3.6}$$

která je známá jako rovnice vedení tepla a popisuje lineární difuzi. Dále uvažujme počáteční podmínku

$$u(x,0) = u_0(x) \ .$$

Řešení rovnice (3.6) je známo a je dané vztahem

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) \, \mathrm{d}y \ . \tag{3.7}$$

Oproti řešení rovnice pomalé difuze je řešení (3.7) charakterizováno nekonečnou rychlostí šíření vzruchů. Jak poznamenal D. G. Aronson: Pokud bychom rovnici vedení tepla brali doslovně, znamenalo by to, že pokud zapálíme zápalku, tak její teplo pocítíme dříve, než vůbec uvidíme světlo. Ovšem řešení rovnice pomalé difuze má konečnou rychlost šíření vzruchů, což je patrné například z obrázku (3.3). Právě díky této konečné rychlosti šíření vzruchů tuto rovnici nazýváme rovnici pomalé difuze.

4. Závěr

Při odvozování difuzních rovnic dojdeme k fyzikálnímu tvaru rovnice

$$u_t + \operatorname{div}(w) = f,$$

kde $u(\mathbf{x}, t)$ je koncentrace látky v místě $\mathbf{x}$ a čase t, w je difuzní tok a f reakční člen. Konečný tvar rovnice je pak dán závislostí difuzního toku w na koncentraci u. Zcela obecně je difuzní tok w nějakou funkcí místa $\mathbf{x}$, koncentrace u a gradientu koncentrace ∇u, tedy $w = g(\mathbf{x}, u, \nabla u)$.
Nejjednodušším příkladem konstitučního vztahu je Fickův zákon difuze, který platí v prostředí, které je homogenní, izotropní a nehybné. Pak difuzní tok závisí pouze na gradientu koncentrace, a to lineárně. Platí

$$w(\mathbf{n}) = -D \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i$$

a získáme tak rovnici lineární difuze ve tvaru

$$u_t = \Delta u + f.$$

K rovnicím nelineární difuze ve tvaru

$$u_t = \Delta(u^\sigma)$$

přijdeme při předpokladech jiného prostředí. Na rovnici rychlé difuze, kde $\sigma < 1$, vedou úlohy z oblasti fyziky plazmatu. Naopak v teorii pórovitých prostředí dojdeme k rovnici pomalé difuze, pro kterou je $\sigma > 1$.
Pro rovnici pomalé difuze existuje explicitní Barenblattovo řešení ve tvaru

$$u(x, t; a, \tau) = \frac{1}{(t+\tau)^k} \left[a^2 - \frac{C|x|^2}{(t+\tau)^{2k}} \right]_+^{\frac{1}{\sigma-1}},$$

kde a a τ jsou libovolné, ale pevně zvolené konstanty,

$$k = \frac{1}{\sigma+1}\ ; C = \frac{k(\sigma-1)}{2\sigma}\ .$$

Na tomto řešení je možné ukázat, že látka se postupně rozšiřuje do prostoru a proudí z míst s vyšší koncentrací do míst s nižší koncentrací.
Barenblattovo řešení je možné upravit, aby splňovalo i rovnici pomalé difuze

$$u_t = (u^\sigma)_{xx} + \mu u$$

s reakčním členem μu, který vyjadřuje, že v prostoru vzniká nebo zaniká nová látka přímo úměrně koncentraci. Pak pro $\mu < 0$ postupně množství látky v prostoru klesá a látka se rozšíří pouze do ohraničené oblasti. Pro $\mu > 0$ se množství látky v prostoru postupně zvětšuje a látka se rozšíří do celého prostoru.
Zajímavou vlastností Barenblattova řešení je jeho vlastnost konečné rychlosti šíření vzruchů. O řešení rovnice lineární difuze, tedy rovnice vedení tepla, je známo, že má nekonečnou rychlost šíření vzruchů. Právě konečná rychlost šíření vzruchů Barenblattova řešení nám dává důvod nazývat rovnici

$$u_t = \Delta(u^\sigma),$$

kde $\sigma > 1$, rovnicí pomalé difuze.

Literatura

[1] FILA, Marek; FILO, Ján: Kvalitatívna analýza vybraných úloh nelineárnej difúzie. In *13. seminář z parciálních diferenciálních rovnic.* Jednota československých matematiků a fyziků, Podhradí nad Dyjí, 1988, editor R. PACHTOVÁ. Plzeň: Rozmnožovna VŠSE Plzeň, 1989, s. 5-17. ISBN 57-561-89

[2] FRANCŮ, Jan: *Parciální diferenciální rovnice.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2013. s. 1 (s.) ISBN: 80-214-2334- X.

[3] KÚTIK, Pavol; MIKULA, Karol: Finite volume schemes for solving nonlinear partial differential equations in financial mathematics. In: *Finite Volumes for Complex Applications VI Problems* & *Perspectives.* Springer Berlin Heidelberg, 2011. p. 643-651.

5. Seznam použitých symbolů

$B(x,r)$	Otevřená koule $B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}:\lvert x-x_0\rvert<r\}$
∇	Gradient $\nabla u=(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\frac{\partial u}{\partial x_N})$
div	Divergence div $u=\sum\limits_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$
Δ	Laplaceův operátor $\Delta u=\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$