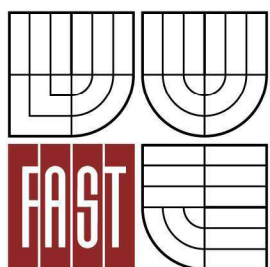


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ
ÚSTAV GEODÉZIE

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF GEODESY

UŽITÍ ASTRONOMICKÉ NIVELACE PRO VYTVÁŘENÍ MODELŮ KVAZIGEOIDU

USE OF ASTRONOMICAL LEVELLING FOR QUASIGEOID MEDELING

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Bc. JOSEF JURČÍK

VEDOUcí PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. RADOVAN MACHOTKA, Ph.D.

BRNO 2012



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní program	N3646 Geodézie a kartografie
Typ studijního programu	Navazující magisterský studijní program s prezenční formou studia
Studijní obor	3646T003 Geodézie a kartografie
Pracoviště	Ústav geodézie

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Diplomant	Bc. Josef Jurčík
Název	Užití astronomické nivelace pro vytváření modelů kvazigeoidu
Vedoucí diplomové práce	Ing. Radovan Machotka, Ph.D.
Datum zadání diplomové práce	30. 11. 2011
Datum odevzdání diplomové práce	25. 5. 2012
V Brně dne 30. 11. 2011	

.....
doc. Ing. Josef Weigel, CSc.
Vedoucí ústavu

.....
prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc.
Děkan Fakulty stavební VUT

Podklady a literatura

Hampacher, Miroslav; Radouch, Vladimír. Teorie chyb a vyrovnávací počet 2. druhé. Praha

Vykutil, J. Vyšší geodézie. 1. vyd. Praha: Kartografie, 1982

Hofmann-Wellenhof B. and Moritz H., 2005. Physical Geodesy, SpringerWienNewYork, Wien.

Torge W., 2001. Geodesy, de Gruyter, Berlin.

Zásady pro vypracování

Užitím metody astronomické nivelace vypočtete převýšení kvazigeoidu mezi zadanými astro-geodetickými body. V případě plošně rozmístěných bodů určete převýšení vyrovnáním a určete charakteristiky přesnosti vstupních i vyrovnaných veličin. V případě lineárního rozmístění bodů určete přesnost výsledných převýšení přibližnou metodou.

Předepsané přílohy

Licenční smlouva o zveřejňování vysokoškolských kvalifikačních prací

.....
Ing. Radovan Machotka, Ph.D.
Vedoucí diplomové práce

Abstrakt

Práce pojednává o užití astronomické nivelace pro vytváření modelů kvazigeoidu. Hlavními vstupními daty jsou složky astronomicko-geodetických tížnicových odchylek určené v bodech sítí AGNES a VEVEŘÍ. Tato data jsou vyrovnávána v sítích a je určován relativní průběh kvazigeoidu. V literatuře [4] se pro zpracování dat tohoto typu používá zjednodušené řešení. Práce se snaží najít nejkompaktnější řešení vyrovnání bez zjednodušení. Výsledky jednotlivých metod jsou porovnány.

Klíčová slova

astronomická nivelace, Delaunayova triangulace, geoid, korelace, kvazigeoid, normála k elipsoidu, referenční elipsoid, složky astronomicko-geodetické tížnicové odchylky, tížnice, vyrovnání podmínkových měření, vyrovnání zprostředkujících měření

Abstract

My master's thesis deals with use of astronomical levelling for creation of quasigeoid models. The basic input dates are componets of astronomical-geodetic deflections of the vertical in points, which are determined on AGNES and VEVEŘÍ nets. The dates are adjust for determination of relative quasigeoid. In literature [4], there is simplified solution for adjustment of this dates. The thesis looks for the most comprehensive solutions of adjustment without simplification. The solutions are compared.

Keywords

adjustment by elements, astronomical levelling, componets of astronomical-geodetic deflection of the vertical, condition adjustment, correlation, Delaunay triangulation, ellipsoidal normal, geoid, plumb line, quasigeoid, reference ellipsoid

Bibliografická citace

JURČÍK, Josef. *Užití astronomické nivelace pro vytváření modelů kvazigeoidu*. Brno, 2012. 75 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav geodézie. Vedoucí práce Ing. Radovan Machotka, Ph.D.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 25. 5. 2012

.....
podpis autora

Poděkování:

Touto cestou bych chtěl poděkovat vedoucímu mé diplomové práce Ing. Radovanu Machotkovi, Ph.D. nejen za užitečné konzultace a korekce, ale i za komplexně otevřený přístup při řešení problémů, které byly s touto prací spojeny.

Velký dík patří také mé rodině za hmotnou i nehmotnou podporu po celou dobu mého studia.

Obsah

1	ÚVOD	9
2	NÁHRADNÍ PLOCHY TÍHOVÉHO POLE ZEMĚ	11
2.1	GEOID	11
2.2	KVAZIGEOID	12
2.3	GLOBÁLNÍ ELIPSOID	15
3	TEORIE VÝŠEK	16
3.1	TEORETICKÝ UZÁVĚR NIVELAČNÍHO POŘADU	16
3.2	GEOPOTENCIÁLNÍ KÓTY A DYNAMICKÉ VÝŠKY	17
3.3	ORTOMETRICKÉ VÝŠKY	18
3.4	NORMÁLNÍ VÝŠKY	19
3.5	NORMÁLNÍ MOLODĚNSKÉHO VÝŠKY	20
3.6	ELIPSOIDICKÁ VÝŠKA A PROBLÉM NIVELACE GPS	21
4	TÍŽNICOVÉ ODCHYLKY	22
4.1	GEOMETRICKÝ VÝZNAM SLOŽEK ASTRONOMICKO-GEODETICKÝCH TÍŽNICOVÝCH ODCHYLEK	22
4.2	URČENÍ ASTRONOMICKO-GEODETICKÉ TÍŽNICOVÉ ODCHYLKY V AZIMUTU	25
5	URČOVÁNÍ PRŮBĚHU GEOIDU A KVAZIGEOIDU	26
5.1	MOTIVACE	26
5.2	ZÁKLADNÍ PŘEHLED METOD URČENÍ PRŮBĚHU KVAZIGEOIDU	27
5.3	ASTRONOMICKÁ NIVELACE	28
5.3.1	<i>Astronomická nivelace na geoidu</i>	28
5.3.2	<i>Astronomická nivelace na kvazigeoidu</i>	29
6	TRIANGULARIZACE	31
6.1	KONVEXNÍ A OBEČNÝ OBAL MNOŽINY BODŮ	31
6.2	TRIANGULACE A JEJÍ ZÁKLADNÍ KRITÉRIA KVALITY	31
6.3	GREEDYHO TRIANGULACE	32
6.4	DELAUNAYOVA TRIANGULACE	33
7	PŘEHLED UŽITÝCH METOD VYROVNÁNÍ	34
7.1	VYROVNÁNÍ ZPROSTŘEDKUJÍCÍCH MĚŘENÍ	34
7.1.1	<i>Výpočet vyrovnaných hodnot</i>	34
7.1.2	<i>Charakteristiky přesnosti</i>	36
7.2	VYROVNÁNÍ PODMÍNKOVÝCH MĚŘENÍ	37
7.2.1	<i>Výpočet vyrovnaných hodnot</i>	37
7.2.2	<i>Charakteristiky přesnosti</i>	38
7.3	VYROVNÁNÍ KORELOVANÝCH MĚŘENÍ	39
8	URČOVÁNÍ ASTRONOMICKÝCH ZEMĚPISNÝCH SOUŘADNIC	40
8.1	ZÁKLADNÍ METODIKA URČENÍ ASTRONOMICKÝCH ZEMĚPISNÝCH SOUŘADNIC	40
8.2	UŽITÁ METODA ASTRONOMICKÉHO MĚŘENÍ; SYSTÉM MAAS-1	42
9	POŘÍZENÍ A PŘEDZPRACOVÁNÍ DAT	44
9.1	POŘÍZENÍ DAT	44
9.2	CHARAKTERISTIKA VYHODNOCOVANÝCH LOKALIT	45
9.3	PŘEDZPRACOVÁNÍ DAT	47

10	ZPRACOVÁNÍ DAT	49
10.1	VOLBA VYHODNOCOVANÉ PLOCHY.....	49
10.2	TRIANGULARIZACE VYHODNOCOVANÝCH SÍTÍ	51
10.3	STANOVENÍ ZPŮSOBŮ VÝPOČTU	54
10.4	VYROVNÁNÍ SÍTÍ.....	57
10.4.1	<i>Vyrovnnání sítě VEVEŘÍ</i>	57
10.4.1.1	<i>Vyrovnnání dle zprostředkujících se zanedbáním korelace</i>	57
10.4.1.2	<i>Vyrovnnání dle zprostředkujících s uvážením korelace</i>	58
10.4.1.3	<i>Vyrovnnání podmíkových měření</i>	58
10.4.2	<i>Vyrovnnání sítě AGNES</i>	59
10.4.3	<i>Vyrovnnání pokusných sítí VEVEŘÍ 2345 a VEVEŘÍ 2</i>	59
10.5	VÝSLEDNÉ HODNOTY A JEJICH POROVNÁNÍ	61
10.5.1	<i>Pokusné sítě VEVEŘÍ 2345 a VEVEŘÍ 2</i>	61
10.5.2	<i>Sít VEVEŘÍ</i>	62
10.5.3	<i>Sít AGNES</i>	64
11	ZÁVĚR	66
	SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	68
	SEZNAM TABULEK	70
	SEZNAM OBRÁZKŮ	70
	SEZNAM ZKRATEK	71
	SEZNAM SYMBOLŮ	72
	SEZNAM SYMBOLŮ Z UŽITÉHO VYROVNÁVACÍHO POČTU	74
	SEZNAM ELEKTRONICKÝCH PŘÍLOH	75

1 ÚVOD

Určování výšek bodů je problematika, která již několik století provází geodetické aplikace. Výška je veličinou, která nám doplňuje polohové souřadnice bodů na přesnou lokalizaci předmětu v prostoru.

Máme-li prostorový souřadnicový systém, jehož počátek ztotožníme se středem matematického tělesa globálně aproximujícího zemi, lze jednoduše popsat vztažnou výšku k tomuto tělesu. Mezi stávajícími globálními referenčními tělesy prakticky bez výjimek převládá dvouosý rotační elipsoid. Výšku nad elipsoidem určíme, promítneme-li po normále určovaný bod na elipsoidickou plochu a délku od plochy elipsoidu k bodu po této normále změříme. Z dnešního pohledu by se tedy mohlo zdát určování výšek výhradně matematickou a geometrickou záležitostí.

Technologie GNSS, která je již v dnešní době brána jako něco samozřejmého, byla po dlouhá století jen snovou představou nejen geodetů, ale i odborníků z jiných vědních disciplín. Veškerá měření byla dříve plně spjata se zemským povrchem. Pokud geometři chtěli získat výšku bodu, bylo potřeba nejprve zvolit hladinu, od které se výška bude měřit a dále linii, po které výšku změříme. To vedlo k definici pojmů geoid a tížnice, později k praktičtějšímu pojmu kvazi-geoid.

Máme tedy dva druhy výšek. Fyzikální výšky a jejich teorii, které jsou dnes používány prakticky po celé Zemi a na druhé straně výšky elipsoidické, jejichž získání je v dnešní době jednodušší. V logické návaznosti na tuto skutečnost vyvstává problém převádění výšek mezi těmito dvěma typy systémů. Pro jejich převod se fyzikální plochy modelují.

Existuje více způsobů, jak vytvářet modely fyzikálních ploch a následně získávat hodnoty korekcí. V této diplomové práci se budu zabývat metodou astronomické nivelace. Tato metoda nám umožňuje, díky předpokladu lineárního průběhu fyzikálních ploch na relativně malém území, vytvářet model referenční plochy pro normální Moloděnského výšky – kvazi-geoidu.

Hlavními vstupními daty k diplomové práci byly relativní astronomicko-geodetické tížnicové odchylky v bodech sítí AGNES a VEVEŘÍ a elipsoidické souřadnice těchto bodů v systému ETRS 89.

V diplomové práci bylo potřeba navrhnout nejkompexnější řešení vyrovnání plošné astronomicko-nivelační sítě pro určování relativních výšek kvazigeoidu. Nejprve bylo potřeba nadefinovat plochu, na které bude síť vyrovnána. Na dané ploše bylo třeba síť vhodně triangularizovat. Dále bylo potřeba zvolit vhodnou metodu vyrovnání, která by řešila specifiku vstupních dat. Bylo provedeno vyrovnání a výsledky byly zanalyzovány a porovnány s hodnotami získanými z různých druhů výpočtů.

Postupu zpracování odpovídá i členění kapitol této práce. Kapitoly 2-8 popisují teoretický základ, který bylo potřeba k mé práci zpracovat. Kapitoly 9 a 10 pak popisují vypracování úlohy na daných sítích.

V druhé kapitole se seznámíme s náhradními plochami, kterými je popisován skutečný tvar Země. Ve třetí kapitole vyřešíme základní pojmy z teorie výšek. Čtvrtá kapitola bude věnována tížnicovým odchýlkám a v kapitole páté se budeme zabývat metodami určování průběhu geoidu a kvazigeoidu. V šesté kapitole probereme způsoby triangularizace sítí. V sedmé kapitole se seznámíme s obecným postupem při užitých metodách vyrovnání. Osmá kapitola bude pojednávat o určování astronomických zeměpisných souřadnic.

V deváté kapitole se budeme věnovat přípravě dat. Stěžejní je kapitola desátá, která se zabývá vlastním zpracováním.

2 NÁHRADNÍ PLOCHY TÍHOVÉHO POLE ZEMĚ

2.1 Geoid

Součet gravitačního potenciálu V a potenciálu odstředivé síly Q je v určitém bodě roven konstantní hodnotě, kterou nazýváme tíhovým potenciálem W .

$$(2.1) \quad W = V + Q$$

Místa o stejné hodnotě potenciálu tvoří hladinové plochy, pro které platí

$$(2.2) \quad W = \text{konst.}$$

Přírůstek potenciálu je závislý na směru, ve kterém změna nastává. Ve směru tečny k hladinové ploše je nulový, ve směru k ploše kolmému (směr vnější normály) je maximální. V jakémkoli jiném směru je přírůstek potenciálu roven průmětu maximálního stoupání do směru vnější normály. Budeme-li odlehlost hladinových ploch podél této normály měřit, bude její velikost rovna

$$(2.3) \quad dn = -\frac{dW}{|\vec{g}|},$$

kde $|\vec{g}|$ je absolutní hodnota vektoru tíhového zrychlení. Pro zjednodušení můžeme element normály dn nahradit elementárním převýšením dh a docházíme k základnímu vzorci

$$(2.4) \quad dW = -gdh,$$

který nazýváme Brunsovým teorémem. Tento vztah je základem pro teorii fyzikálních výšek.

Odlehlost konečně vzdálených hladinových ploch o tíhových potenciálech W_A a W_B měřená podél silokřivky tíhového pole, která všechny hladinové plochy kolmo protíná, je tedy dle Brunsova teorému (2.4) rovna

$$(2.5) \quad W_B - W_A = \Delta W_{AB} = \int_A^B dW = -\int_A^B |\vec{g}| dh.$$

Při aplikaci věty o střední hodnotě integrálního součtu dostaneme

$$(2.6) \quad -\Delta W_{AB} = \int_A^B g dh = \bar{g} dh = \bar{g} \Delta h_{AB}.$$

$$(2.7) \quad \Delta h_{AB} = -\frac{\Delta W_{AB}}{\bar{g}},$$

kde \bar{g} je střední hodnota intenzity tíhového pole na úseku mezi uvažovanými hladinovými plochami. Tuto hodnotu nelze získat měřením, ale pouze za určitých zjednodušených podmínek odhadnout.

Aby bylo možné definovat plochu geoidu je třeba z množiny všech hladinových ploch vybrat právě takovou plochu

$$(2.8) \quad W = W_0 = \text{konst.},$$

kteřá se nejvíce ztotožňuje s povrchem reálné Země. Tato plocha je realizována jako střední hladina vody ve světovém oceánu, která modelově prochází i pod kontinenty a je všude kolmá k silokřivkám tíhového pole Země. Tím docházíme k definici hladinové plochy geoid. Od geoidu pak měříme nadmořské výšky. [14]

2.2 Kvazigeoid

Z kapitoly 2.1 *Geoid* vyplývá, že nadmořská výška H nad geoidem realizovaná je závislá na neznámém rozložení hustot mezi geoidem a reálným povrchem Země. Elipsoidická výška h je tedy rovna součtu ortometrické výšky H nad geoidem a odlehlosti geoidu N od elipsoidu podle vztahu

$$(2.9) \quad h = H + N.$$

Ortometrická výška H je závislá na hodnotě \bar{g} , dle vzorce (3.13). Tato hodnota musí být určena pomocí redukcí, protože nelze měřit tíhové zrychlení uvnitř hmoty Země. Vidíme tedy, že klasický přístup k těmto fyzikálním problémům musí nutně vytvářet hypotézy o hustotách a rozložení hmoty Země.

V roce 1945 přišel Moloděnský s teorií, která odstraňovala nepřesnosti způsobené hypotézami. Základní úvahou byla právě myšlenka, že výšku h nelze přesně určit z nepřesných veličin H a N . Moloděnský navrhl novou rovnici

$$(2.10) \quad h = H_Q + \zeta,$$

kde sice ani H_Q ani ζ nemají žádný fyzikální význam, lze je ovšem přesně vypočítat z měření na povrchu Země. Jedinečnost Moloděnského teorie spočívá v řešení úlohy pro fyzický povrch Země, na kterém jsou prováděny geometrická a gravimetrická měření, a pro který lze určovat tíhové anomálie.

Vyjděme nyní z rovnice

$$(2.11) \quad H_Q = \frac{W_0 - W}{\bar{\gamma}},$$

kteřá nám představuje normální Moloděnského výšku (viz. kapitola 3.5 *Normální Moloděnského výšky*). Vztah (2.11) lze dle Brunsova teoremu (2.4) upravit jako

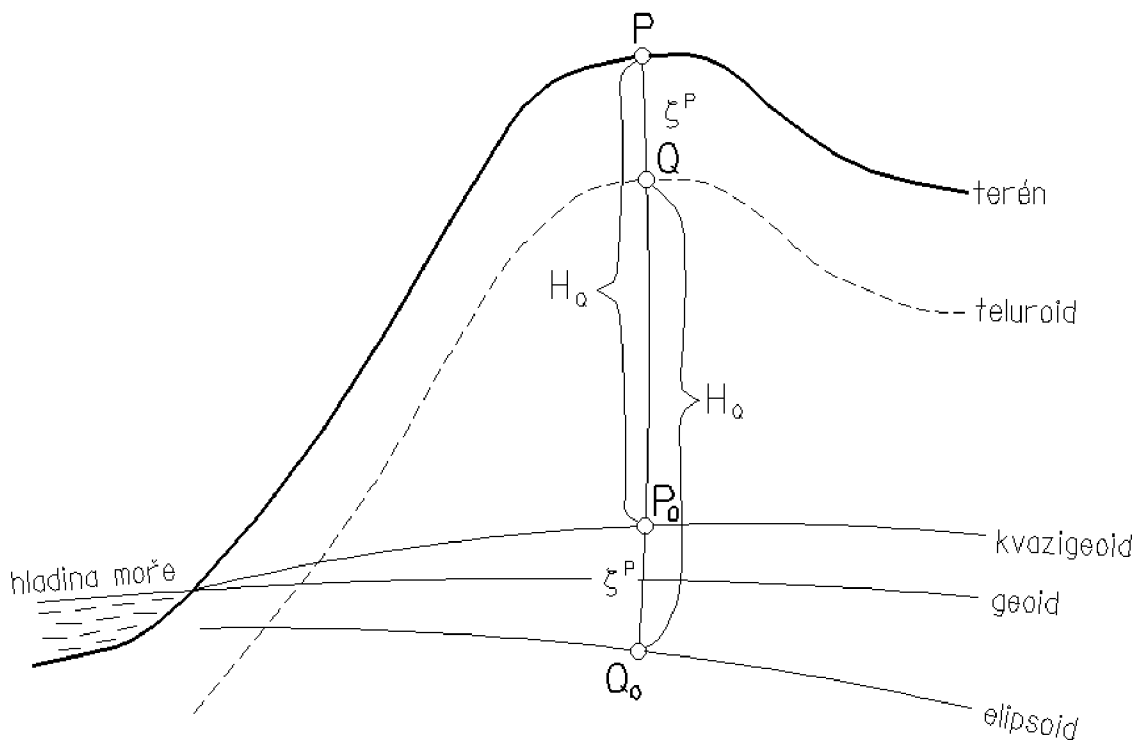
$$(2.12) \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{H_Q} \int_0^{H_Q} \gamma dH_Q.$$

Zamysleme se nad výpočtem $\bar{\gamma}$, což je střední hodnota normálního tíhového zrychlení podél normální tížnice. Pokud s dostatečnou přesností považujeme tíhové pole za normální, lze využít vztahu pro bod ve vnějším normálním tíhovém poli

$$(2.13) \quad \bar{\gamma} = \gamma_0 \left[1 - \left(1 + \frac{e'^2}{2} + m' - e'^2 \sin^2 \varphi \right) \frac{H_Q}{a} + \frac{H_Q^2}{a^2} \right],$$

kde γ_0 je normální tíhové zrychlení na elipsoidu, e' je druhá excentricita elipsoidu, φ je geodetická šířka, a hlavní poloosa elipsoidu a m' je poměr odstředivého a gravitačního zrychlení na rovníku. Z daného vyplývá, že $\bar{\gamma}$ je sice závislá na H_Q , ale nikoli těsně. Proto stačí znát H_Q s nižší přesností, což bývá prakticky splněno.

Nyní se pokusme nastínit, jakým způsobem lze Moloděnského výšku a kvazigeoid interpretovat. Vyjděme z toho, že bod P na fyzickém povrchu Země má jistý tíhový potenciál $W(P)$ a zároveň jistý normální potenciál $U(P)$, pro které obecně platí $W(P) \neq U(P)$. Na normále k elipsoidu však jistě existuje bod Q , pro který platí $W(P) = U(Q)$. Normální tíhový potenciál v bodě Q je roven reálnému tíhovému potenciálu v bodě P . Normální výška H_Q bodu P tedy není nic jiného, než výška bodu Q nad elipsoidem, jak lze vidět na *Obr. 1*.



Obr. 1: Interpretace Moloděnského koncepte, upraveno [13]

Množina bodů Q , na kterých se vždy normální tíhový potenciál U bude rovnat reálnému tíhovému potenciálu W v bodech P , vytváří plochu, která se nazývá teluroid. Odpovídající si body P a Q budou ležet vždy na stejné normále k elipsoidu. Kdyby byl tíhový potenciál W všude roven normálnímu tíhovému potenciálu U , potom by body P a Q splynuly a teluroid by splynul s fyzickým povrchem Země. Normální Moloděnského výšky H_Q by byly rovny výškám elipsoidickým h . Tyto potenciály se ovšem obecně nerovnají a vzniká

$$(2.14) \quad \zeta(P) = h(P) - H_Q(P) = h(P) - h(Q),$$

což je výšková anomálie ζ .

Nyní definujeme Fayovu tíhovou anomálii Δg_F jako rozdíl mezi reálným tíhovým zrychlením na zemském povrchu a normálním tíhovým zrychlením na teluroidu.

$$(2.15) \quad \Delta g_F = g(P) - \gamma(Q)$$

Normální tíhové zrychlení γ přesuneme z elipsoidu, pomocí redukce na volném vzduchu směrem nahoru, na teluroid. Tíhové anomálie na volném vzduchu jsou nyní vztaženy k zemskému povrchu nikoli ke geoidu.

Výškovou anomálii ζ lze z Brunsova teorému (2.4) vyjádřit jako

$$(2.16) \quad \zeta = \frac{W(P) - U(P)}{\gamma} = \frac{T(P)}{\gamma},$$

kde $T(P)$ je poruchový potenciál v bodě P . Výškové anomálie ζ můžeme vynést na elipsoid. Dostaneme tak povrch, který je na mořích totožný s geoidem a všude jinde ke geoidu blízký. Tento povrch nazveme kvazigeoidem. Povrch kvazigeoidu nebude hladinovou plochou. [2]

2.3 Globální elipsoid

V první aproximaci je možné Zemi nahradit koulí. Výhodnější se však ukázalo aproximovat Zemi druhým stupněm; rotačním elipsoidem. Tíhové pole elipsoidu (normální tíhové pole) je jednoduše matematicky spočítatelné. I když Země není přesně elipsoidického tvaru, odchylky skutečného tíhového pole od normálního tíhového pole jsou velmi malé. Tyto odchylky nazveme poruchové tíhové pole. Jeho průběh může být považován za lineární. Rozdělení tíhového pole Země na normální a poruchové značně zjednodušuje problémy s jeho určením. Hladinový rotační elipsoid je tedy ekvipotenciální plochou normálního tíhového pole a představuje normální formu geoidu. Hladinový elipsoid má tvar

$$(2.17) \quad U_0 = konst.,$$

což koresponduje s geoidem dle (2.8).

Funkce normálního potenciálu je kompletně popsána pomocí:

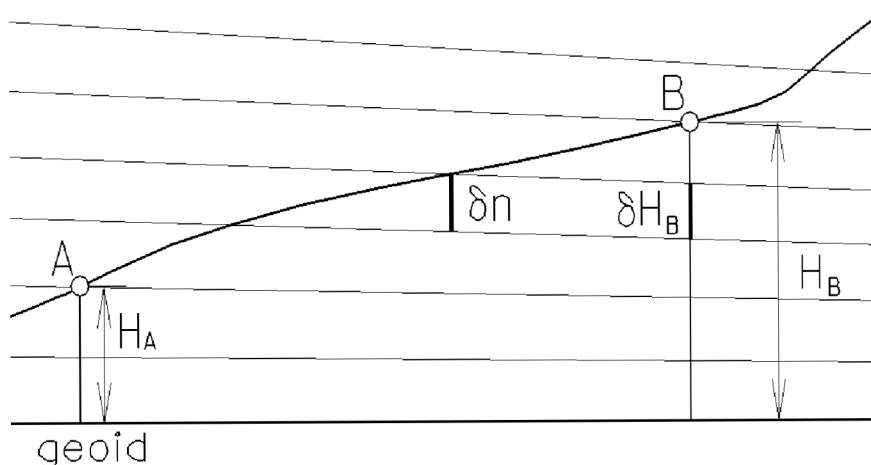
1. Tvaru elipsoidu, daném hlavními poloosami
2. Hmotnosti Země M
3. Úhlové rychlosti rotace Země ω [4]

V České republice se na základě [3], pracuje ve dvou systémech, které užívají globální elipsoidy a elipsoidické výšky. Prvním je systém WGS84 realizovaný na elipsoidu WGS84, ve kterém pracuje systém GPS. Druhým je systém ETRS 89 na elipsoidu GRS80, který je fixovaným světovým referenčním systémem ITRS pro Evropu.

3 TEORIE VÝŠEK

3.1 Teoretický uzávěr nivelačního pořadu

Uzavřeme-li nivelační pořad, algebraický součet měřených převýšení nebude obecně přesně roven nule. Důvodem je převýšení δn v místě nivelační sestavy, které je rozdílné od odpovídajícího převýšení δH_B vlivem sbíhavosti hladinových ploch, jak lze vidět na *Obr. 2*.



Obr. 2: Vliv sbíhavosti hladinových ploch na výsledné převýšení; převzato [4]

Pro změnu tíhového potenciálu mezi hladinami platí dle Brunsova teoremu (2.4)

$$(3.1) \quad -\delta W = g \delta n = g' \delta H_B,$$

kde g je tíhové zrychlení na nivelovaném bodě a g' je tíhové zrychlení na tížnici k bodu B . Vidíme tedy, že

$$(3.2) \quad \delta H_B = \frac{g}{g'} \delta n \neq \delta n.$$

Pro rozdíl tíhových potenciálů v bodech A, B bude platit

$$(3.3) \quad W_B - W_A = - \int_A^B g dn.$$

Integrál lze při vzdálenostech v nivelačních sestavách nahradit sumou.

$$(3.4) \quad W_B - W_A = - \sum_A^B g dn.$$

Integrál (3.3) je nezávislý na integrační cestě, protože různé nivelační pořady, které spojují body A a B dávají stejné výsledky. To jednoznačně vyplývá z faktu, že tíhový potenciál W je pouze funkcí polohy, a proto každému bodu odpovídá jediná hodnota W . Nivelujeme-li zpět na bod A , výsledný integrál musí být roven nule.

$$(3.5) \quad \oint g \delta n = W_A - W_A = 0$$

Suma diferenciálních nivelačních převýšení ovšem obecně nulová není

$$(3.6) \quad \oint dn \neq 0$$

Pro určení jednoznačných hodnot výšek je třeba kombinovat nivelační a tíhová data. [4]

3.2 Geopotenciální kóty a dynamické výšky

Nechť O je bod na mořské hladině reprezentující geoid. Nechť A je bod, který je spojen s bodem O nivelačním pořadem. Pak lze určit rozdíl mezi potenciálem na geoidu a potenciálem v bodě A jako

$$(3.7) \quad \int_O^A g dn = W_0 - W_A = C_A.$$

Takto je definovaná geopotenciální kóta bodu A .

Geopotenciální kóta je nezávislá na konkrétním nivelačním pořadu, který byl použit pro spojení bodu A s mořskou hladinou. Totéž platí pro všechny body na téže hladině. Geopotenciální kóta je měřená v geopotenciálních jednotkách $g.p.u.$, kde

$$(3.8) \quad 1g.p.u. = 1000 gal.m.$$

Pokud bychom uvažovali $g \approx 0,98kgal$, dostaneme po zjednodušení vzorce (3.7)

$$(3.9) \quad C \approx gH \approx 0,98H.$$

Geopotenciální kóty jsou tedy téměř rovny nadmořským výškám v metrech.

Geopotenciální kóty byly přijaty na kongresu IAG ve Florencii v roce 1955. Jejich význam se osvědčil při snaze o porovnání výšek evropských referenčních systémů v EUVN.

Dříve byly používány dynamické výšky, které jsou definovány jako

$$(3.10) \quad H_{dyn} = \frac{C}{\gamma_0},$$

kde γ_0 je normální tíže pro libovolnou standardní zeměpisnou šířku. Dynamické výšky se liší od geopotenciálních kót pouze v měřítku a jednotce. Podělení konstantou γ_0 pouze převádí geopotenciální kóty na délkové jednotky. Od koncepce dynamických výšek se již upustilo a dnes jsou geopotenciální kóty preferovány před dynamickými výškami. [4]

3.3 Ortometrické výšky

Nechť P_0 je průsečík geoidu a tížnice procházející bodem P . Nechť C je geopotenciální kóta a H ortometrická výška, která je délkou části tížnice mezi body P a P_0 . Integrujeme-li podél tížnice P_0P , dostaneme

$$(3.11) \quad C_P = \int_0^P g dH.$$

Diferenciál převýšení ortometrické výšky dH lze nahradit diferenciálem převýšení dh . Pro explicitní vyjádření H , upravíme triviálně vzorec (3.11) na

$$(3.12) \quad C_P = H_P \frac{1}{H_P} \int_0^P g dh = \bar{g} H_P,$$

kde \bar{g} vyjadřuje hodnotu tíže podél tížnice P_0P . Z výrazů (3.11), (3.12) vyplývá, že

$$(3.13) \quad H_P = \frac{C_P}{\bar{g}} = \frac{1}{\bar{g}} \int_0^P g dh,$$

což umožňuje vypočítat H_P jen, když je průměrná tíže \bar{g} známá. Tíže \bar{g} je sice závislá na H_P , ale nikoli silně. [4]

Pro určení hodnoty průměrné tíže \bar{g} navrhli různí autoři různá řešení na základě rozdílných hypotéz o rozložení hmoty ve vrstvě mezi zemským povrchem a geoidem. Například Helmert hledal hodnotu \bar{g} na základě úvahy, že vrstva mezi bodem na povrchu Země a geoidem má konstantní hustotu 2670 kgm^{-3} a lze jí modelovat pomocí Bouguerovy redukce $0,1119 \cdot 10^{-5} H_{[m]}$. Hodnotu g naměřenou na povrchu přenáší pomocí vertikálního

gradientu normálního tíhového pole $-0,3086 \cdot 10^{-5} H_{[m]}$ do bodu o výšce $H/2$. Helmertovu ortometrickou výšku bodu P pak lze zapsat jako

$$(3.14) \quad H_p^{Hel} = \frac{C_p}{g_p + 0,424 \cdot 10^{-5} H_p},$$

kde H_p stačí znát jen na několik málo cifer.[2]

3.4 Normální výšky

V minulosti byly informace o tíhovém zrychlení na zemském povrchu získávány komplikovaně. Ve vzorci pro ortometrickou výšku (3.13) tedy nebylo možné určit zrychlení g ani průměrné zrychlení \bar{g} . Předpokládejme tedy, že gravitační pole Země je normální; tíhový potenciál W je roven normálnímu tíhovému potenciálu U , skutečné tíhové zrychlení g je rovno normálnímu tíhovému zrychlení γ , poruchový potenciál T je nulový. Za těchto předpokladů lze vypočítat jakési pseudoortometrické výšky, které budeme nazývat výšky normální a značit H^* . Pokud za těchto úvah dosadíme do vzorce (3.13) získáme

$$(3.15) \quad H_p^* = \frac{1}{\bar{\gamma}} \int_0^P \gamma dh.$$

Tyto vzorce mohou být vypočítány přesně, protože normální potenciál U je určen jednoduchou analytickou funkcí.

Dosadíme-li do vztahu (3.15) rovnost $\gamma = \bar{\gamma} + \gamma - \bar{\gamma}$, dostaneme výraz

$$(3.16) \quad H_p^* = \int_0^P dh + \frac{1}{\bar{\gamma}} \int_0^P (\gamma - \bar{\gamma}) dh.$$

$$(3.17) \quad K_p^* = \frac{1}{\bar{\gamma}} \int_0^P (\gamma - \bar{\gamma}) dh$$

Výraz (3.17) je normální ortometrická korekce, která je korekcí nivelačního měření ze sbíhavosti hladinových ploch.[4], [15]

3.5 Normální Moloděnského výšky

Jak již bylo zmíněno v kapitole 2.2 *Kvazigeoid*, vytvořil Moloděnský teorii, která odstraňuje realizační problémy koncepce geoidu. Základní součástí tohoto řešení je definice výšek, které jsou založeny jen na veličinách vnějšího gravitačního pole. Výšky jsou pak produktem pouze tíhového měření na zemském povrchu a nivelace. Na základě Moloděnského teorie lze výšku bodu A definovat, jako

$$(3.18) \quad H_Q^A = \frac{C_A}{\bar{\gamma}} = \frac{1}{\bar{\gamma}} \int_0^A g dh$$

a nazvat normální Moloděnského výškou, která je měřená od kvazigeoidu. Střední hodnota normálního tíhového zrychlení $\bar{\gamma}$ bývá prakticky určena z předpokladu, že jde o hodnotu uprostřed úseku normální tížnice mezi referenčním elipsoidem a teluroidem, kterou lze určit s dostatečnou přesností ze vzorce

$$(3.19) \quad \bar{\gamma} = \gamma_0 - 0,1543 \cdot 10^{-5} H_Q,$$

kde $\bar{\gamma}$ je sice závislá na H_Q , ale nikoli těsně. Stačí tedy výšku znát přibližně na několik málo cifer. Dosadíme-li do vzorce (3.18) identitu $g = \gamma + (g - \gamma)$, dostaneme vztah

$$(3.20) \quad H_Q^P = \frac{1}{\bar{\gamma}} \int_0^P \gamma dh + \frac{1}{\bar{\gamma}} \int_0^P (g - \gamma) dh,$$

kde prvním členem na pravé straně je normální ortometrická výška H^* a druhým členem je korekce z vlivu tíhových anomálií. $(g - \gamma)$ je tíhová anomálie na volném vzduchu neboli Fayova anomálie Δg_F . [15]

3.6 Elipsoidická výška a problém nivelace GPS

Elipsoidická výška h je definována jako vzdálenost bodu od elipsoidu měřená podél kolmice od elipsoidu k tomuto bodu, která je kladná směrem nahoru nebo vně elipsoidu. Je třeba dodat, že se používá pouze jako součást trojrozměrného elipsoidického souřadnicového systému a nikdy samostatně. [12]

Geometrická nivelace je velmi časově náročný proces, proto je v dnešní době požadováno určení výšky bodu technologií GNSS. Základem je jednoduchá rovnice

$$(3.21) \quad H = h - N.$$

Tato rovnice spojuje ortometrické výšky H , elipsoidické výšky h a zvlnění geoidu N . Když jsou dva z parametrů známé, lze třetí dopočítat. Když tedy určíme h pomocí GNSS, a když existuje vhodná digitální mapa zvlnění geoidu N , pak lze získat ortometrickou výšku téměř okamžitě.

GNSS měření se dá aplikovat i na modelování geoidu. Pokud máme měřenou elipsoidickou výšku h a zároveň ortometrickou výšku H danou nivelačním a gravimetrickým měřením, pak lze modelovat zvlnění geoidu pomocí vzorce

$$(3.22) \quad N = h - H.$$

Podobné úvahy můžeme použít, nahradíme-li ortometrickou výšku H Moloděnského výškou H_Q a zvlnění geoidu N výškovou anomálií kvazigeoidu ζ . [4]

Tato aplikace je nám bližší, jelikož dle [3] je našim závazným výškovým referenčním systémem Balt po vyrovnání, který pracuje s Moloděnského výškami.

4 TÍŽNICOVÉ ODCHYLKY

Tížnicové odchylky můžeme rozdělit na dva typy; odchylky astronomicko-geodetické a gravimetrické. Toto rozdělení vychází ze způsobu získání veličin vstupujících do jejich výpočtu. Gravimetrické tížnicové odchylky jsou tedy počítány z anomálií tíže např. dle [8], zatímco astronomicko-geodetické tížnicové odchylky vychází z astronomických a geodetických měření. Porovnáním obou metod se zabývá např. [7]. V mojí práci využívám pouze astronomicko-geodetické tížnicové odchylky, a proto se dále budu zabývat pouze jejich popisem.

4.1 Geometrický význam složek astronomicko-geodetických tížnicových odchylek

Na bodě L sestrojíme pomocnou kouli o jednotkovém poloměru dle *Obr. 3*. Necht' n^e je normála k elipsoidu procházející bodem L a protínající jednotkovou kouli v elipsoidickém zenitu Z . Necht' t je tečna k tížnici procházející bodem L a protínající jednotkovou kouli v astronomickém zenitu Z' . Necht' P je průsečík jednotkové sféry a spojnice \overline{LP} je rovnoběžná s osou rotace Země. Body L, Z, P pak určují rovinu geodetického meridiánu; body L, Z', P určují rovinu meridiánu astronomického.

Oblouk \overline{ZP} je roven $(90^\circ - \varphi)$, kde φ je elipsoidická šířka; oblouk $\overline{Z'P}$ je $(90^\circ - \varphi')$, kde φ' je astronomická šířka bodu L . Úhel $\angle ZPZ' = d\lambda$ je rozdíl astronomického a elipsoidického meridiánu bodu L a také rozdíl astronomické a elipsoidické délky tohoto bodu

$$(4.1) \quad d\lambda = \lambda' - \lambda.$$

Rovina kolmá ke geodetickému meridiánu, procházející astronomickým zenitem Z' , protne meridián v bodě Q . Oblouk $\overline{ZQ} = \xi$ je meridiánová složka, $\overline{Z'Q} = \eta$ je příčná složka tížnicové odchylky Θ .

Rovnici (4.2) lze přepsat pomocí (4.4) jako

$$(4.7) \quad 1 = \operatorname{tg} \varphi' \cot g(\varphi + \xi)$$

$$(4.8) \quad [\operatorname{tg}(\varphi + \xi) = \operatorname{tg} \varphi'] \Leftrightarrow [\varphi + \xi = \varphi'].$$

Z uvedeného získáváme vztah pro meridiánovou tížnicovou odchylku

$$(4.9) \quad \xi = \varphi' - \varphi.$$

Stejně tak lze zjednodušit rovnici (4.3) pomocí (4.5), (4.6). Získáváme pak

$$(4.10) \quad \eta = (\lambda' - \lambda) \cos \varphi'.$$

Při úvaze, že s dostatečnou přesností k výsledné odchylce η je $\varphi' \approx \varphi$, můžeme psát:

$$(4.11) \quad \eta = (\lambda' - \lambda) \cos \varphi.$$

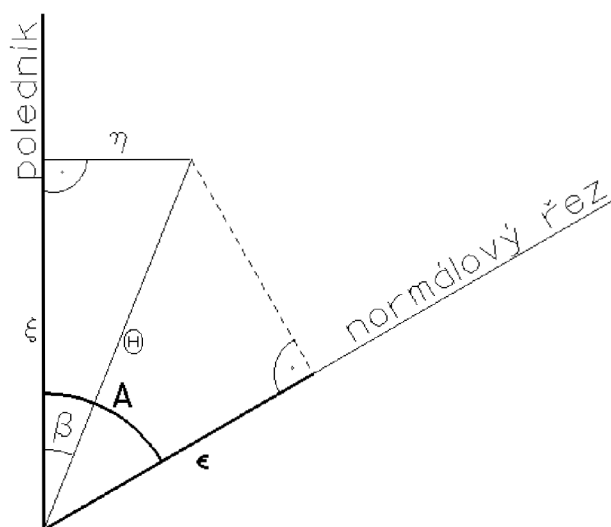
Dle Obr. 3 lze vzorec pro celkovou tížnicovou odchylku Θ odvodit z tučně vyznačeného sférického trojúhelníku $Z'ZQ$, který můžeme považovat za trojúhelník rovinný. Při aplikaci tohoto zjednodušení

$$(4.12) \quad \Theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Změní-li se geodetický elipsoidický systém, změní se také geodetické elipsoidické souřadnice a v důsledku toho také hodnoty tížnicových odchylek. Proto lze konstatovat, že astronomicko-geodetické tížnicové odchylky jsou hodnoty relativní, závislé na geodetickém systému. Kladná hodnota složky ξ tížnicové odchylky v meridiánu znamená odklon tížnice k jihu, kladná hodnota složky η odklon tížnice k západu. Budeme-li předpokládat, že se tížnicové odchylky od místa k místu mění plynule a lineárně, můžeme interpolací určit přibližné hodnoty tížnicových odchylek pro libovolné body uvnitř sítě určených bodů. [13]

4.2 Určení astronomicko-geodetické tížnicové odchyšky v azimutu

V geodetických výpočtech ovšem potřebujeme znát hodnoty tížnicových odchyšek v libovolném normálovém řezu o azimutu A . Tato složka je vždy rovna průmětu celkové odchyšky Θ do roviny daného normálového řezu.



Obr. 4: Tížnicová odchyška v daném azimutu; upraveno [13]

Podle Obr. 4 je

$$(4.13) \quad \varepsilon = \Theta \cos(A - \beta); \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\eta}{\xi}; \quad \xi = \Theta \cos \beta; \quad \eta = \Theta \sin \beta; \quad \Theta = \frac{\eta}{\sin \beta} = \frac{\xi}{\cos \beta}.$$

Po úpravách pak dostaneme vztah pro složku tížnicové odchyšky v normálovém řezu o azimutu A .

$$(4.14) \quad \varepsilon = \xi \cos A + \eta \sin A \quad [13]$$

5 URČOVÁNÍ PRŮBĚHU GEOIDU A KVAZIGEOIDU

5.1 Motivace

Určováním průběhu těchto fyzikálních ploch rozumíme vynášení hodnot odlehlostí od matematicky definovaného tělesa. Tímto matematicky definovaným tělesem je určitý globální rotační elipsoid.

V době před počátkem GNSS byla všechna měření pevně spojena se zemským povrchem nebo mu byla blízka. Tato měření často pokrývala rozsáhlá území, většinou daná hranicemi států, avšak jednotlivá diskrétní měření byla limitována dohledností. Díky umění geodetů minulých věků byla měření navazována a řešena komplexně, i když k tomu musela být mnohdy použita jen určitá přiblížení.

Klasickým příkladem byl problém výšek. Jak již bylo naznačeno, nastal problém dle kapitoly 3.1 *Teoretický uzávěr nivelačního pořadu*. Výšky vypočítané pouze z nivelace byly nejednoznačné. Díky tomu byla zpracována kompletní teorie výšek.

Na území našeho státu se historicky užívaly dva hlavní typy výšek. Starším byl jaderský výškový systém užívající normálních výšek se základním bodem v Terstu. Novějším je baltský výškový systém pracující s výškami podle Moloděnského koncepce se základním bodem v Kronštadu.

V dnešní době je určování souřadnic majoritní záležitostí GNSS. Výsledkem tohoto určení jsou pravoúhlé prostorové souřadnice nebo souřadnice vztažené k elipsoidu; dostáváme tedy výšky elipsoidické. Základním problémem tedy je, jak dostat s potřebnou přesností výšky v Baltu po vyrovnání, který je pro ČR závazným výškovým referenčním systémem [3], a zároveň využít rychlosti a komfortu, který GNSS přináší?

Řešením je vytváření modelů nulových referenčních ploch výškových systémů tak, že jsou vztaženy k příslušnému referenčnímu elipsoidu. Omezíme-li se na území naší republiky, vytváříme nulovou plochu kvazigeoidu na elipsoid GRS 80, popř. WGS 84.

5.2 Základní přehled metod určení průběhu kvazigeoidu

Metody vytváření modelů nulové referenční plochy kvazigeoidu můžeme jednoduše rozdělit na dvě kategorie. V té první využíváme astronomická měření nebo tíhová data. Klasickým postupem je astronomická nivelace na kvazigeoidu využívající primárně astronomických měření; gravimetrická data jsou využívána pro výpočty redukci viz. kapitola 5.3.2 *Astronomická nivelace na kvazigeoidu*. Touto metodou se budeme v diplomové práci podrobněji zabývat.

Protože v literatuře např. [13] je považováno tíhové měření za časově ekonomičtější, byla navržena metoda astronomicko-gravimetrické nivelace, která využívá většího množství tíhových dat. Astronomická data jsou pořizována jen v opěrných bodech. Předpokladem této metody je možnost interpolovat astronomicko-geodetické tížnicové odchylky na mezilehlých bodech z odchylek gravimetrických.

Do této kategorie bychom zařadili také ryze gravimetrickou metodu. Toto řešení vychází z výpočtu anomálií výšek z tíhových dat. Potřebné tíhové anomálie se v tomto případě zpravidla interpolují z tíhových modelů; např.[8]. Tato problematika, stejně jako astronomicko-gravimetrická nivelace není obsahem práce, proto lze odkázat na [7].

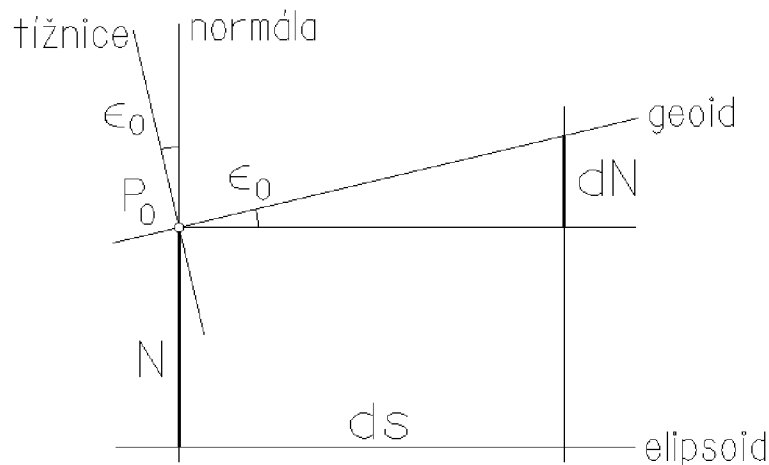
V druhé kategorii využíváme přímo měření GNSS. Jak jsme uvedli kapitole 3.6 *Elipsoidická výška a problém nivelace GPS*, máme-li elipsoidickou výšku h a Moloděnského výšku H_Q , danou z předchozího niveláčnického měření, pak lze výškovou anomálii vypočítat, jako

$$(5.1) \quad \zeta = h - H_Q.$$

5.3 Astronomická nivelace

Astronomická nivelace je jednou z metod, jejíž pomocí se dá modelovat lokální průběh geoidu nebo, v případě této práce, kvazigeoidu. Jejím podkladem jsou astronomická a geodetická měření, ze kterých získáváme astronomicko-geodetické tížnicové odchylky. Pro kvazigeoid užíváme navíc gravimetrická data pro zavádění korekcí z tíže.

5.3.1 Astronomická nivelace na geoidu



Obr. 5: Schéma astronomické nivelace na geoidu; převzato [4]

Na Obr. 5 vidíme princip geoidické astronomické nivelace. Je zřejmé, že

$$(5.2) \quad dN = -\varepsilon_0 ds,$$

kde ε_0 představuje odchylku elipsoidické normály od tížnice na geoidu. Integrováním výrazu mezi dvěma body (A, B) získáme rozdíl mezi jejich odlehlostmi geoidu

$$(5.3) \quad N_B - N_A = -\int_A^B \varepsilon_0 ds.$$

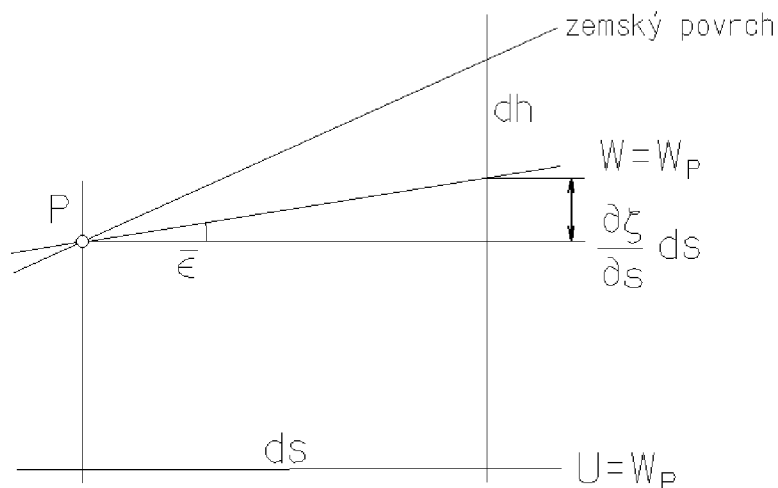
Předpokládáme-li lineární průběh, což lze při vzdálenostech mezi body (A, B) v řádech jednotek kilometrů předpokládat s dostatečnou přesností, lze výraz (5.3) upravit na

$$(5.4) \quad N_B - N_A = -\frac{\varepsilon_{0A} + \varepsilon_{0B}}{2} s_{AB}. [4]$$

5.3.2 Astronomická nivelace na kvazigeoidu

Odpovídající vztah pro výškovou anomálii kvazigeoidu je založen na vzorci (5.5) ilustrovaném na Obr. 6.

$$(5.5) \quad d\zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial s} ds + \frac{\partial\zeta}{\partial h} dh$$



Obr. 6: Schéma astronomické nivelace na kvazigeoidu; převzato [4]

Protože zemský povrch není hladinová plocha, máme navíc ve vzorci (5.5) také vertikální část $\frac{\partial\zeta}{\partial h} dh$ k horizontální části $\frac{\partial\zeta}{\partial s} ds$, s jejíž obdobou jsme se setkali u astronomické nivelace na geoidu. V analogii ke vzorci (5.2) máme horizontální část

$$(5.6) \quad \frac{\partial\zeta}{\partial s} = -\bar{\varepsilon},$$

Kde $\bar{\varepsilon}$ značí tížnicovou odchylku na zemském povrchu.

Je třeba zdůraznit velmi důležitou diferenci. Při nivelaci na geoidu pracujeme s tížnicovými odchylkami ε na geoidu, zatímco u kvazigeoidického pojetí používáme odchylky $\bar{\varepsilon}$ na zemském povrchu.

V analogii ke vztahům (4.9), (4.11), (4.14) lze zapsat

$$(5.7) \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\xi} \cos A + \bar{\eta} \sin A$$

$$(5.8) \quad \bar{\xi} = \varphi' - \bar{\varphi}$$

$$(5.9) \quad \bar{\eta} = (\lambda' - \bar{\lambda}) \cos \varphi,$$

kde $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ jsou složky tížnicové odchylky v povrchovém bodě, φ', λ' jsou astronomické a $\bar{\varphi}, \bar{\lambda}$ elipsoidické souřadnice na povrchu Země. Při výpočtu je potřeba uvážit vliv zakřivení normální tížnice. Vycházíme přitom z měřených elipsoidických souřadnic φ, λ . Vliv tížnice je popsán redukcemi souřadnic

$$(5.10) \quad \delta\varphi_{normal} = -0,17'' h_{[km]} \sin 2\varphi$$

$$(5.11) \quad \delta\lambda_{normal} = 0.$$

Z vypočtených redukcí získáme povrchové elipsoidické souřadnice $\bar{\varphi}, \bar{\lambda}$ jako

$$(5.12) \quad \bar{\varphi} = \varphi - \delta\varphi_{normal}$$

$$(5.13) \quad \bar{\lambda} = \lambda - \delta\lambda_{normal}.$$

Z daného je patrné, že normální tížnice má zakřivení pouze ve směru meridiánu. Vliv zakřivení je v našich zeměpisných šířkách nezanedbatelný, neboť výraz (5.10) nabývá maxima pro $\varphi = 45^\circ$.

Pro svislou část můžeme dle [4] psát

$$(5.14) \quad \frac{\partial\zeta}{\partial h} = -\frac{\Delta g_F}{\gamma} = -\frac{g - \gamma}{\gamma}.$$

Vztah (5.5) nyní můžeme přepsat jako

$$(5.15) \quad d\zeta = -\bar{\epsilon} ds - \frac{g - \gamma}{\gamma} dh.$$

Integrováním mezi body (A, B), získáme

$$(5.16) \quad \zeta_B - \zeta_A = -\int_A^B \bar{\epsilon} ds - \int_A^B \frac{\Delta g_F}{\gamma} dh.$$

Čitatel Δg_F reprezentuje Fayovu anomálii.

V úvahách analogickým k (5.4) lze výraz linearizovat. Získáváme pak

$$(5.17) \quad \zeta_B - \zeta_A = -\frac{\bar{\epsilon}_A + \bar{\epsilon}_B}{2} s_{AB} - \frac{\Delta g_{FA} + \Delta g_{FB}}{2\gamma} h_{AB}. [4]$$

6 TRIANGULARIZACE

Problém řešení triangularizace sítí je spjat s množstvím vědních oborů s matematicko-geometrickým základem. Tento problém vyvstává všude tam, kde je potřeba spojovat diskrétní body do trojúhelníků. Klasickou geodetickou aplikací je užití triangulace při tvorbě digitálních modelů terénu. V tomto případě máme měřené výšky na bodech vhodně popisující průběh terénu. Pomocí triangularizace se snažíme tyto body vhodně spojovat, aby výsledkem byl model, který co nejlépe odpovídá realitě. V jednotlivých trojúhelnících předpokládáme lineární průběh terénu.

Je-li dána množina bodů, existuje mnoho možností, jak ji triangularizovat. Výběr vhodné triangularizace zajistí vytvoření nejlepší možné triangulace zadaných bodů v souvislosti s jejím účelem. V této kapitole se pokusíme vysvětlit základní pojmy, se kterými se v této diplomové práci při triangularizaci sítí setkáváme. [5]

6.1 Konvexní a obecný obal množiny bodů

Geometrický útvar se nazývá konvexní, jestliže má tuto vlastnost: Jsou-li X , Y libovolné body podmnožiny M , je každý bod úsečky \overline{XY} také bodem množiny M . Za konvexní útvar se také pokládá jednobodová a prázdná množina.

Konvexní obal množiny M je nejmenší konvexní množina obsahující všechny body M . Konvexní obal M je tedy unikátní konvexní mnohoúhelník, jehož vrcholy jsou body z množiny M a tento mnohoúhelník obsahuje všechny body množiny M .

Obecným obalem množiny M budeme rozumět libovolný polygon s uzlovými body patřícími do množiny M ohraničující danou množinu. Žádný bod z M nesmí ležet vně obecného obalu. [5]

6.2 Triangulace a její základní kritéria kvality

Triangulace je rovinným útvarem, což znamená, že její hrany se kříží pouze v uzlových bodech. Každá plocha triangulace kromě jedné neohraničené musí být trojúhelník. Hrany na obalu množiny jsou součástí každé triangulace.

Nechť M je množina n_b nekolineárních bodů v rovině a nechť b značí počet bodů v M , které leží na hranici obalu M . Potom libovolná triangulace má n_t trojúhelníků (6.1) a n_h hran (6.2).

$$(6.1) \quad n_T = 2n_b - 2 - b$$

$$(6.2) \quad n_h = 3n_b - 3 - b$$

Počet trojúhelníků a hran je rovnocenný všem triangulacím na M . [5]

Požadavky na triangularizaci sítě vyplývají z účelu, pro který je daná triangulace určena. Obecně však platí, že je výhodné vytvořit trojúhelníky rovnostranné a nikoliv protáhlé. Pokud je totiž později v trojúhelníku prováděna interpolace, je počítána ze všech jeho vrcholů a je tudíž vhodné, aby vzdálenost k interpolovanému bodu nebyla příliš velká. Z daného vyplývá, že nejpoužívanějšími kritérii kvalit triangulace jsou úhlová optimalnost a minimální suma délek hran. [11]

6.3 Greedyho triangulace

Algoritmus této triangulace se nikdy nevrací a nemění nic v její hotové části. V každém kroku je do triangulace přidána jedna hrana a proces tvorby skončí po dosažení celkového počtu hran.

Greedyho triangulace je složená z nejkratších možných vzájemně se neprotínajících hran, využívá tedy kritéria nejmenší sumy délek hran. Pokud nemají dvě hrany stejnou délku je Greedyho triangulace jednoznačná.

Největší nevýhodou této triangulace je, že v ní není zahrnuto žádné úhlové kritérium, což může vést k tvorbě nevhodných trojúhelníků pro další zpracování.

Algoritmus Greedyho triangulace lze shrnout do čtyř kroků:

- a) vygenerovat všechny možné hrany,
- b) vzestupně seřadit hrany podle délky,
- c) vybrat nejkratší hranu z dosud nezpracovaných hran a přijmout ji do triangulace, pokud neprotíná žádnou z hran již přijatých,
- d) opakovat krok c), dokud není triangulace hotova nebo nezbyvá žádná hrana.[11]

6.4 Delaunayova triangulace

Základním kritériem Delaunayovy triangulace je úhlová optimálnost výsledné sítě. Tato optimálnost se testuje pomocí kritéria dle Thaletovy věty. Delaunayho triangulací nazveme množinu trojúhelníků takovou, kde kružnice opsaná každému trojúhelníku v ní obsaženému neobsahuje žádný jiný bod ve svém vnitřku.

Prakticky při její aplikaci můžeme postupovat tak, že použijeme Greedyho triangulaci jako první přiblížení. V Greedyho triangulaci testujeme generované trojúhelníky na kritérium dle Thaletovy věty. Pokud trojúhelníky vyhovují, jsou v triangulaci ponechány. Pokud kružnice trojúhelníku opsaná obsahuje jiný bod sítě, dochází k tzv. prohození hran. Stávající hrana je označena jako nelegální a je nahrazena hranou novou tak, aby byla splněna podmínka dle Thaletovy věty. O nové nebo schválené hraně pak hovoříme jako o legální. [5]

7 PŘEHLED UŽITÝCH METOD VYROVNÁNÍ

7.1 Vyrovnání zprostředkujících měření

Vyrovnání zprostředkujících měření používáme v případech, kdy se hledané neznámé veličiny neměří přímo, ale určují se prostřednictvím jiných měřených veličin, které jsou s neznámými ve známém vztahu; odtud zprostředkující měření. Předpokladem pro vyrovnání jsou nadbytečná měření. Zprostředkující měření jsou zatížena nevyhnutelnými chybami, které se přenášejí i na odhady neznámých. Vyrovnáním budeme hledat nejspolehlivější hodnoty neznámých, měřených a jejich střední chyby. [1]

7.1.1 Výpočet vyrovnaných hodnot

Nejprve je potřeba zvolit neznámé veličiny, jejichž počet a charakter musí jednoznačně určovat danou situaci. Jejich počet tedy bude odpovídat počtu nutných měření k a nebudou mezi nimi existovat funkční závislosti. Počet měření označme n .

Pro každé provedené zprostředkující měření lze zapsat vztah

$$(7.1) \quad \bar{l}(x^T) = l + v,$$

kde $\bar{l}(x^T)$ je vektor vyrovnaných hodnot, l je vektor měření a v je vektor oprav. Ze vzorce (7.1) získáme opravy jako

$$(7.2) \quad v = \bar{l}(x^T) - l,$$

pro které požadujeme splnění podmínky MNČ

$$(7.3) \quad v^T P v = \min,$$

kde P představuje váhu měření.

Předpokladem pro získání jednoduchých rovnic k výpočtu neznámých je lineární tvar rovnic oprav. Linearizaci rovnic oprav provedeme Taylorovým polynomem s vymezením na členy prvního řádu. Tato linearizace nám přináší potřebu zavedení přibližných hodnot neznámých

$$(7.4) \quad x = x^0 + dx,$$

kde x vektor hledaných neznámých, x_0 vektor přibližných hodnot a dx vektor oprav přibližných hodnot.

Po provedení linearizace získáváme

$$(7.5) \quad v = \bar{l}(x^{0T}) + \frac{\partial \bar{l}(x^T)}{\partial x^T} dx - l.$$

Necht' \underline{A} je matice o rozměrech (n, k) , jejíž členy vzniknou jako

$$(7.6) \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{l}_1(x^T)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \bar{l}_1(x^T)}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \bar{l}_n(x^T)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \bar{l}_n(x^T)}{\partial x_k} \end{pmatrix}.$$

V maticové formě, pak můžeme vztah (7.5) zapsat jako

$$(7.7) \quad v = \underline{A}dx + l',$$

$$(7.8) \quad l' = \bar{l}(x^{0T}) - l.$$

Podmínku MNC splníme, jestliže

$$(7.9) \quad \frac{\partial v^T P v}{\partial dx} = \left(\frac{\partial v}{\partial dx^T} \right)^T 2Pv = \underline{A}^T 2Pv = 0.$$

Po dosazení do (7.9) ze vztahu (7.7) získáme

$$(7.10) \quad \underline{A}^T P \underline{A} dx + \underline{A}^T P l' = 0$$

Označme zvykově $\underline{N} = \underline{A}^T P \underline{A}$ a $y = \underline{A}^T P l'$, pak dostaneme často užívaný tvar

$$(7.11) \quad dx = -\underline{N}^{-1} y.$$

Dosazením do vztahu (7.4) získáme vyrovnané neznámé. Dosazením do vzorců (7.1), (7.7), získáme vyrovnané hodnoty měřených veličin. Po vyrovnaní budou veličiny splňovat zprostředkující rovnice i podmínku MNC. [1]

7.1.2 Charakteristiky přesnosti

Základní charakteristikou přesnosti je aposteriorní střední jednotková chyba

$$(7.12) \quad \bar{m}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T P \mathbf{v}}{n - k}},$$

kteřá je základem pro výpočet ostatních charakteristik přesnosti.

Střední chybu vyrovnaných neznámých vypočteme ze vztahu

$$(7.13) \quad \bar{m}_{xi} = \bar{m}_0 \sqrt{Q_{xixi}},$$

kde Q_{xixi} jsou diagonální členy matice váhových koeficientů vyrovnaných neznámých

$$(7.14) \quad Q_x = \underline{N}^{-1}.$$

Pro střední chybu vyrovnaných měření platí

$$(7.15) \quad \bar{m}_{ii} = \bar{m}_0 \sqrt{Q_{i\bar{i}i}},$$

kde $Q_{i\bar{i}i}$ jsou diagonální členy matice váhových koeficientů vyrovnaných měření

$$(7.16) \quad Q_{\bar{i}} = \underline{A} \underline{N}^{-1} \underline{A}^T.$$

Pro střední chyby funkcí neznámých můžeme napsat

$$(7.17) \quad \bar{m}_{fi} = \bar{m}_0 \sqrt{Q_{ffi}},$$

kde Q_{ffi} jsou diagonální členy matice váhových koeficientů funkcí neznámých

$$(7.18) \quad Q_{ff} = F_x \underline{N}^{-1} F_x^T.$$

F_x je matice derivací funkcí neznámých

$$(7.19) \quad F_x = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^T)}{\partial \mathbf{x}^T} \right). [1]$$

7.2 Vyrovnání podmínkových měření

Vyrovnání podmínkových měření lze užít tam, kde jsou měřené veličiny přesně svázány matematickými vztahy. Klasickým ilustrativním případem je nulové převýšení uzavřeného nivelačního polygonu. Pokud máme nadbytečný počet měření, nesplní naměřené hodnoty dané podmínky. Získáváme tedy podmínková měření. K odstranění nesouhlasných hodnot v rovnostech připojíme k veličinám opravy a provedeme vyrovnání, jehož základním předpokladem je právě nadbytečný počet měření. [1]

7.2.1 Výpočet vyrovnaných hodnot

Podmínkové rovnice musí být vzájemně nezávislé. Jejich počet odpovídá počtu nadbytečných měření k . Podmínkové rovnice musí komplexně pokrývat zájmové území; nelze určité hledané veličiny vynechat z podmínek. Je-li dáno n měření l_1, \dots, l_n s váhami p_1, \dots, p_n požadujeme, aby vyrovnané měřené veličiny platilo

$$(7.20) \quad \Omega(\bar{l}^T) = 0,$$

kde $\Omega(\bar{l}^T)$ představují podmínkové rovnice. Naměřené veličiny ovšem tyto podmínky nesplní a vzniká

$$(7.21) \quad \Omega(l^T) = u \neq 0,$$

kde u nazveme uzávěry. Naším úkolem je tedy uzávěry anulovat. Pro jednoznačnost řešení požadujeme splnění podmínky MNČ (7.3).

Dále je třeba linearizovat podmínkové rovnice. Linearizaci rovnic oprav provedeme Taylorovým polynomem s vymezením na členy prvního řádu. Po provedení linearizace a dosazením do vztahu (7.1) získáváme

$$(7.22) \quad \Omega(\bar{l}^T) = \Omega(l^T + v^T) = \Omega(l^T) + \frac{\partial \Omega(\bar{l}^T)}{\partial \bar{l}^T} v.$$

Nechť \bar{A}^T je matice o rozměrech (r, n) , jejíž členy vzniknou jako

$$(7.23) \quad \bar{A}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Omega_1(\bar{l}^T)}{\partial \bar{l}_1} & \dots & \frac{\partial \Omega_1(\bar{l}^T)}{\partial \bar{l}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Omega_r(\bar{l}^T)}{\partial \bar{l}_1} & \dots & \frac{\partial \Omega_r(\bar{l}^T)}{\partial \bar{l}_n} \end{pmatrix}.$$

Přetvořené podmínkové rovnice lze nyní zapsat jako

$$(7.24) \quad \overline{A}^T v + u = 0.$$

Po zavedení podmínky MNČ dostáváme rovnice oprav

$$(7.25) \quad v = P^{-1} \overline{A} k_{or},$$

kde k_{or} značí koreláty, jež jsou pomocnými veličinami.

Dosazením (7.25) do (7.24) získáváme:

$$(7.26) \quad \overline{A}^T P^{-1} \overline{A} k_{or} + u = 0$$

Označme zvykově $\overline{N} = \overline{A}^T P^{-1} \overline{A}$, pak

$$(7.27) \quad k_{or} = -\overline{N}^{-1} u$$

Dosazením do výrazu (7.25) získáme opravy. Dosazením do vztahu (7.1) získáme vyrovnané hodnoty měřených veličin. Po vyrovnaní budou veličiny splňovat počáteční podmínky. [1]

7.2.2 Charakteristiky přesnosti

Základní charakteristikou přesnosti je a posteriori střední jednotková chyba

$$(7.28) \quad \overline{m}_0 = \sqrt{\frac{v^T P v}{n - k}} = \sqrt{\frac{v^T P v}{r}},$$

která je základem pro výpočet ostatních charakteristik přesnosti.

Pro střední chybu vyrovnaných měření platí

$$(7.29) \quad \overline{m}_{\bar{i}} = \overline{m}_0 \sqrt{Q_{\bar{i}\bar{i}}},$$

kde $Q_{\bar{i}\bar{i}}$ jsou diagonální členy matice váhových koeficientů vyrovnaných měření.

$$(7.30) \quad Q_{\bar{i}} = P^{-1} - P^{-1} \overline{A} \overline{N}^{-1} \overline{A}^T P^{-1}$$

Pro střední chyby funkcí neznámých můžeme napsat

$$(7.31) \quad \bar{m}_{f_i} = \bar{m}_0 \sqrt{Q_{f_i}},$$

kde Q_{f_i} jsou diagonální členy matice váhových koeficientů funkcí měření

$$(7.32) \quad Q_{ff} = F_l P^{-1} F_l^T - F_l P^{-1} \bar{A} \bar{N}^{-1} \bar{A}^T P^{-1} F_l^T.$$

F_l je matice derivací funkcí měřených veličin

$$(7.33) \quad F_l = \left(\frac{\partial f(\bar{l}^T)}{\partial \bar{l}^T} \right). [1]$$

7.3 Vyrovnání korelovaných měření

O korelovaných měřeních mluvíme v případech, kdy jsou nějakým způsobem vzájemně svázána. Mohou to být například veličiny, které jsou již výsledkem vyrovnání, které způsobilo jejich závislost, nebo měření, na které působil společný fyzikální faktor. Podmínka minimalizace kvadrátů odchylek musí být splněna pro nekorelovaná měření, pro korelovaná měření je nutné tuto podmínku upravit.

V [1] je odvozeno, že není třeba ve formálním označení rozlišovat korelovaná a nekorelovaná měření. Jediným rozdílem je obecně plná matice vah u korelovaných měření oproti diagonální matici vah u měření nekorelovaných.

K určení matice vah u korelovaných měření vedou dvě cesty. Při té první je matice určena jako výsledek předchozího vyrovnání, takže lze tuto matici přímo použít. V druhém případě jsou veličiny svázány určitým faktorem. Matici vah je pak třeba vypočítat přímo ze zákona hromadění chyb pro korelovaná měření jako

$$(7.34) \quad P = (H Q_\lambda H^T)^{-1},$$

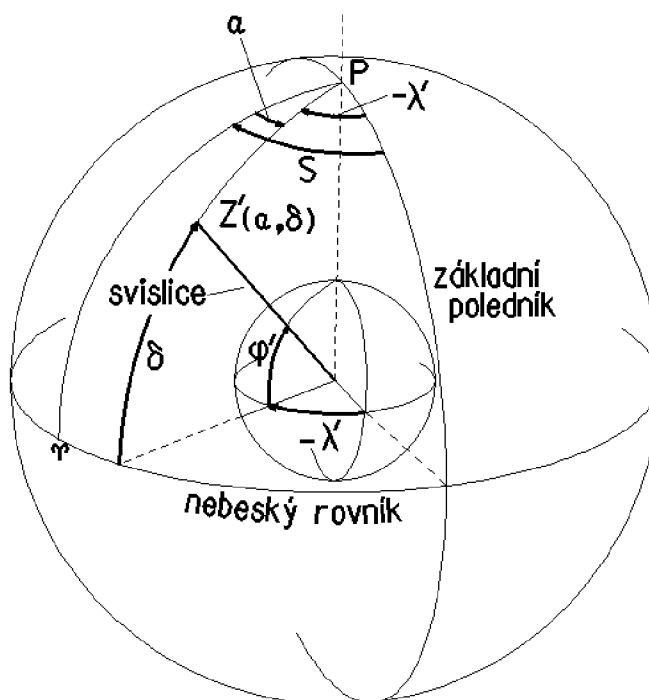
kde Q_λ je známá matice váhových koeficientů původních nekorelovaných hodnot a matice H představuje faktor jejich vzájemné korelace.

$$(7.35) \quad H = \frac{\partial f(\lambda^T)}{\partial \lambda^T} [1]$$

8 URČOVÁNÍ ASTRONOMICKÝCH ZEMĚPISNÝCH SOUŘADNIC

8.1 Základní metodika určení astronomických zeměpisných souřadnic

Úkolem astronomického určení polohy je výpočet astronomické zeměpisné šířky φ' a astronomické zeměpisné délky λ' . Tento úkol lze též chápat jako určení směru svislice vůči zemskému tělesu realizované souřadnicovou soustavou, která je určena osou zemské rotace procházející pólem P a rovinou základního poledníku (soustava zeměpisných souřadnic).



Obr. 7 :Metodika určování astronomických zeměpisných souřadnic; převzato [6]

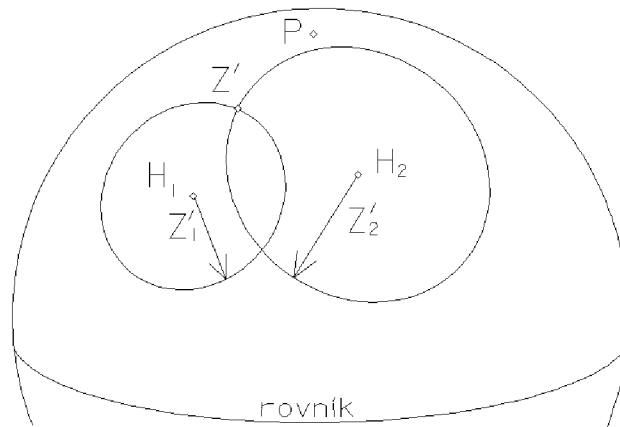
Tuto úlohu pro výpočet převádíme na určení rovníkových souřadnic (rektascenze α a deklinace δ) zenitu Z' . Dle Obr. 7 pak můžeme tyto hodnoty jednoduše převést na námi požadované jako

$$(8.1) \quad \varphi' = \delta,$$

$$(8.2) \quad \lambda' = \alpha - S,$$

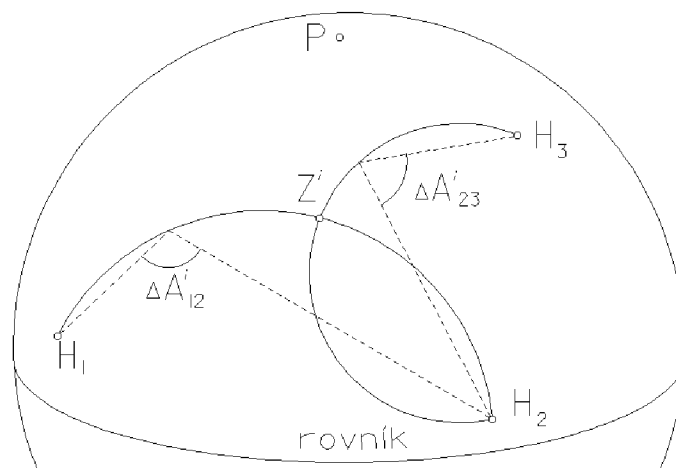
kde S je světový hvězdný čas v momentě měření.

Pokud by hvězda právě procházela zenitem daného stanoviska, daly by se její astronomické zeměpisné souřadnice určit přímo z rovnic (8.1), (8.2). To je však z praktického hlediska nereálný model, a proto se k určení polohy zenitu Z' užívá nepřímých řešení dvojího typu.



Obr. 8: Určení polohy zenitu pomocí měřených zenitových vzdáleností [6]

Prvním typem je řešení polohy zenitu Z pomocí zenitových vzdáleností. Vydeme z Obr. 8 H_1 a H_2 budou hvězdy o známých souřadnicích v druhé rovníkové souřadnicové soustavě promítnuté na nebeskou sféru. Z'_1 a Z'_2 jsou zenitové vzdálenosti změřené ze stanoviska o zenitu Z' . Zenit Z' pak leží v průsečíku kružnic o poloměrech Z'_1 a Z'_2 , opsaných kolem bodů H_1 a H_2 na jednotkové kouli.



Obr. 9: Určení polohy zenitu pomocí měřených vodorovných směrů, upraveno [6]

Druhým typem je řešení polohy zenitu Z' pomocí vodorovných směrů. Vyjdeme nyní z *Obr. 9*. Ze zenitu Z' měříme na tři hvězdy H_1, H_2, H_3 . Získané rozdíly mezi čtením vodorovného kruhu se rovnají rozdílům astronomických azimutů $\Delta A_{12}'$ a $\Delta A_{23}'$. Sestrojíme-li na jednotkové kouli nad spojnicemi H_1, H_2 a H_2, H_3 geometrická místa stejných úhlů $\Delta A_{12}'$ a $\Delta A_{23}'$, pak se tato protínají v zenitu Z' .

Podle daných řešení se metody určení astronomických zeměpisných souřadnic dělí na zenitové a azimutální. Důležité je zde podotknout, že neméně důležité jako je měření patřičných úhlů, je měření přesného času, neboť měřené hvězdné objekty se vzhledem k pozorovateli pohybují. [6]

8.2 Užitá metoda astronomického měření; systém MAAS–1

Pro měření, jehož data jsou zpracovávána v této diplomové práci, byla užitá Metoda párů stejné výšky navržená a používaná v měřicím systému MAAS–1 navrhnutém Ing. Radovanem Machotkou, Ph.D. Tuto metodu bychom zařadili do metod zenitových, které měří páry hvězd ve stejném almukantaratu a opačném azimutu. Je třeba podotknout, že zenitové úhly mezi jednotlivými páry se mohou měnit. Toto je rozdíl oproti měření cirkumzenitálem, reprezentujícím klasickou metodu užívající skupin hvězd či hvězdných páru měřených při průchodu fixním almukantaratem.

Metoda je navržena tak, aby byly co nejvíce eliminovány vlivy způsobené systematickými chybami, jako jsou atmosférická refrakce, chyba v měření času, chyba způsobená měřičem a chyba matematického modelu. Díky rozsáhlým souborům měření jsou do značné míry eliminovány náhodné chyby.

Oproti starším přístrojům pro astronomické určování polohy dle [6] systém využívá moderních technologií časového a snímkového záznamu, stejně tak automatického měření elektronickou totální stanicí. Ve srovnání s moderními systémy měření astronomických souřadnic, kterými jsou zenitové kamery TZK2-D na University of Hannover a DIADEM na ETH Zürich má sice nižší přesnost, avšak jeho výhodou je snazší přenosnost a instalace.

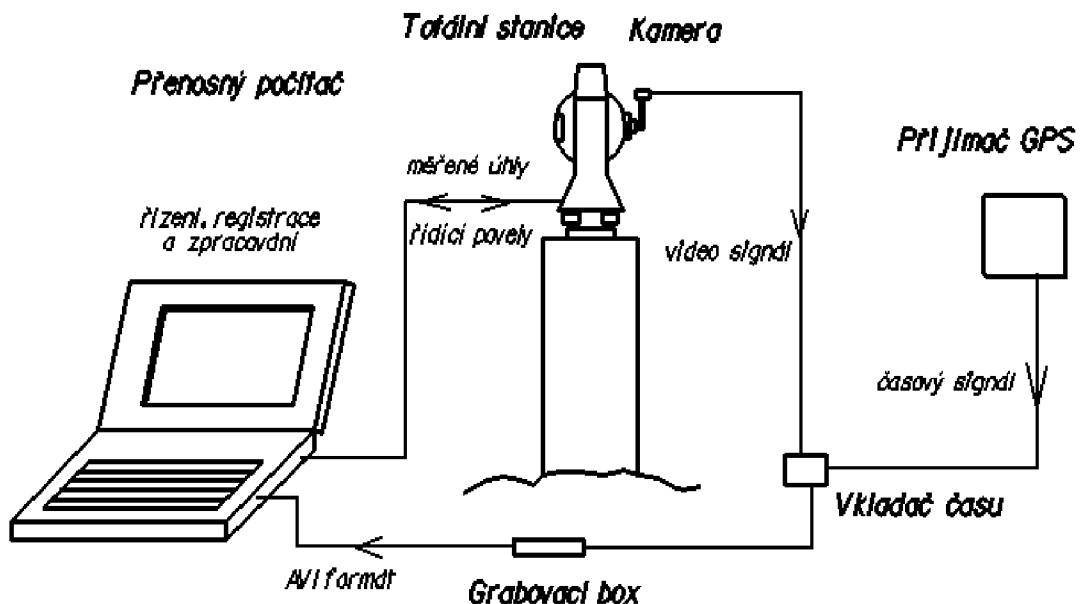
Vliv systematických chyb je zde snížen úhlově přesnou totální stanicí, vhodně zvolenými páry hvězd, automatickou registrací měřených dat, času a automatickým zpracováním.

Základem MAAS-1, je motorizovaná totální stanice Topcon GPT 9001A, jejíž střední chyba směru ve dvou polohách (0,6 mgon) je základem pro přesnost požadovanou astronomickým měřením. Totální stanice je vybavena CCD kamerou, která snímá zorné pole dalekohledu.

Páry hvězd jsou voleny tak, aby byly měřeny pokud možno bezprostředně po sobě, kvůli zachování stejných atmosférických podmínek. Měří se více párů v jedné rovině. Zaměřují se šířkové a délkové páry (páry v blízkosti místního poledníku a prvního vertikálu) a střídají se počáteční směry (např. jeden pár začíná východní a druhý západní hvězdou). Měření probíhá v zenitových úhlech od 20° do 35°, což je optimální výška vzhledem k chybám přístroje, rychlosti relativního pohybu hvězd a atmosférické refrakci. S vysokou přesností se dbá na podmínku splnění stejných zenitových úhlů v páru, odchylka vertikální roviny páru od příslušné základní roviny může nabývat hodnot v řádu stupňů. Dodržujeme-li postup při vybírání párů hvězd, eliminujeme tím hlavní systematické chyby přístroje, čímž zlepšujeme přesnost danou výrobcem totální stanice.

Čas je přijímán z GPS a vkládán do každého snímku pomocí zařízení KIWI-OSD.

Součástí systému je přenosný počítač. Který slouží jak pro řízení měření, tak pro ukládání a zpracování dat. Podrobný popis systému MAAS-1 lze najít např. v [10].



Obr. 10: Schéma zapojení systému MAAS-1; převzato [10]

Přesnost systému byla testována. Projektovaná střední chyba v určení astronomických souřadnic byla 0,5'' a této přesnosti již bylo dosaženo. [9], [10]

9 POŘÍZENÍ A PŘEDZPRACOVÁNÍ DAT

9.1 Pořízení dat

Pro určení průběhu kvazigeoidu pomocí astronomické nivelace bylo potřeba území vhodně pokrýt body. Na všech bodech bylo potřeba provést astronomické a GPS měření. Dalšími potřebnými údaji pro zpracování byly výšky bodů v BpV a hodnoty Bougerových anomálií v těchto bodech.

Astronomická měření probíhala v lokalitách sítí AGNES a VEVEŘÍ pomocí systému MAAS-1, který byl stručně popsán v kapitole 8.2 *Užitá metoda astronomického měření; systém MAAS-1*. Vyhodnocení měření probíhalo automaticky pomocí softwaru, o kterém je pojednáno např. v [7]

Zaměření bodů pomocí GPS probíhalo na všech bodech sítí AGNES a VEVEŘÍ a to již od roku 2009. Výhodou spojení astronomického a GPS měření je jistě fakt, že při obou aplikacích potřebujeme mít viditelnou značnou část oblohy. Pokud tedy při GPS měření, které je jistě rychlejší a mobilnější, zjistíme velké zakrytí horizontu, je nutné bod ze sítě vyřadit a nahradit vhodnějším.

Zbývá dodat, že nadmořské výšky bodů byly počítány z elipsoidických výšek určených GPS. Bougerovy anomálie byly interpolovány z mapy Bougerových anomálií v měřítku 1: 25 000.

9.2 Charakteristika vyhodnocovaných lokalit

Síť VEVEŘÍ obsahuje 11 bodů. Je situována do oblasti Brno-Veveří a pokrývá území o rozloze 1,1 km². Síť se nachází přibližně mezi rovnoběžkami 49°12'00''-49°12'30'' a poledníky 16°35'00''-16°36'30'' v ETRS 89. Těžiště sítě má souřadnice 49°12'18'' a 16°35'28''. Spojnice nejbližších bodů v síti A1-A2 měří 133 m; spojnice nejvzdálenějších bodů A10-A12 měří 1835 m. Průměrná nadmořská výška lokality v BpV je 266 m, přičemž nejvyšší bod A7 leží ve výšce 306 m a nejnižší bod A10 ve výšce 217 m. Lokalita se nachází v intavilánu v husté zástavbě s výjimkou ploch parků. Většina lokality leží v katastrálním území Veveří, 610372.

Tab. 1: Souřadnice bodů sítě VEVEŘÍ v ETRS 89

Body sítě VEVEŘÍ								
č.b.	el.šířka (ETRS 89)			el. délka (ETRS 89)			výška	
	φ			λ			H _{el}	H _Q
	[°	'	'']	[°	'	'']	[m]	[m]
P1	49	12	21,08263	16	35	34,44354	322,060	277,394
A1	49	12	6,91112	16	35	34,68546	292,817	248,153
A2	49	12	3,48898	16	35	32,74970	313,286	268,609
A3	49	12	14,66194	16	35	20,73419	324,852	280,175
A5	49	12	4,79162	16	35	14,90898	339,455	294,778
A7	49	12	15,14614	16	35	2,43369	350,647	305,954
A8	49	12	21,80337	16	35	13,70693	328,010	283,325
A9	49	12	33,36399	16	35	25,75105	295,212	250,551
A10	49	12	15,41621	16	36	23,70775	262,020	217,343
A11	49	12	35,16766	16	35	54,61819	277,610	232,933
A12	49	12	27,82204	16	34	54,91757	311,937	267,245

Síť AGNES obsahuje 34 bodů. Je situována do oblasti centrální zóny města Brna a pokrývá území o rozloze 37 km² (31 km² je pak vyhodnocovaná plocha viz. kapitola 10.1 Volba vyhodnocované plochy). Síť se nachází přibližně mezi rovnoběžkami 49°11'-49°14' a poledníky 16°33'-16°39' v ETRS89. Těžiště sítě má souřadnice 49°12'21'' a 16°36'18''. Spojnice nejbližších bodů v síti B33-B37 měří 717 m; spojnice nejvzdálenějších bodů B13-B31 měří 8305 m. Průměrná nadmořská výška lokality v BpV je 235 m, přičemž nejvyšší bod B14 leží ve výšce 318 m a nejnižší bod B34 ve výšce 200 m. Lokalita se nachází v intavilánu v zástavbě s výjimkou parkových ploch.

Tab. 2: Souřadnice bodů sítě AGNES v ETRS 89

Body sítě AGNES								
č.b.	el. šířka (ETRS 89)			el. délka (ETRS 89)			výška	
	φ			λ			H_{el}	H_{nadm}
	[° ' '']			[° ' '']			[m]	[m]
B2	49	11	38,33452	16	35	55,87941	333,522	288,845
B3	49	11	43,52371	16	36	59,36694	247,315	202,638
B4	49	12	12,86342	16	37	48,43937	248,104	203,427
B5	49	11	39,16804	16	38	12,61769	247,559	202,882
B6	49	12	5,50731	16	38	37,61203	254,033	209,356
B7	49	12	42,03833	16	38	28,47408	250,170	205,493
B8	49	13	5,00945	16	38	35,83898	252,710	208,033
B9	49	12	31,34600	16	37	16,17500	282,250	237,573
B10	49	12	57,29050	16	36	57,72240	293,490	248,813
B11	49	13	10,25489	16	37	45,70637	296,175	251,498
B12	49	13	30,68979	16	38	43,38002	259,448	214,771
B13	49	13	54,78000	16	38	56,36000	273,181	228,504
B14	49	14	4,73200	16	37	42,80000	363,110	318,433
B15	49	13	23,65300	16	36	58,03200	271,031	226,354
B18	49	13	37,30400	16	35	35,17100	278,918	234,241
B20	49	12	57,73359	16	36	6,69400	259,050	214,373
B21	49	13	16,49200	16	34	59,49600	307,028	262,351
B24	49	13	7,56900	16	33	15,18800	255,680	211,003
B25	49	13	2,01200	16	34	8,60500	278,519	233,842
B26	49	12	32,41300	16	33	18,75200	254,417	209,740
B27	49	12	9,64600	16	34	1,33200	254,606	209,929
B28	49	11	36,59100	16	33	56,89300	254,760	210,083
B30	49	11	54,05700	16	32	53,82400	340,790	296,113
B31	49	10	58,63800	16	33	46,29700	303,540	258,863
B32	49	11	25,37100	16	34	48,68500	260,370	215,693
B33	49	10	59,02968	16	36	3,30552	248,030	203,353
B34	49	11	14,23992	16	37	5,93949	244,530	199,853
B35	49	11	10,44621	16	39	6,56980	285,880	241,203
B36	49	10	58,02081	16	38	14,00341	244,426	199,749
B37	49	10	37,90084	16	35	48,72796	256,766	212,089
A5	49	12	4,79200	16	35	14,90900	337,830	293,153
A9	49	12	33,36360	16	35	25,75090	293,670	248,993
A10	49	12	15,40274	16	36	23,67499	260,420	215,743
A13	49	12	31,92477	16	34	44,99875	304,080	259,403

9.3 Předzpracování dat

Astronomická nivelace na kvazigeoidu je popsána vzorcem (5.17), který lze rozepsat za předpokladu lineárních změn složek tížnicových odchylek ve spojnici jako

$$(9.1) \quad \Delta\zeta_{AB} = -s_{AB} \left(\frac{\bar{\xi}_A + \bar{\xi}_B}{2} \cos A + \frac{\bar{\eta}_A + \bar{\eta}_B}{2} \sin A \right) - \frac{\Delta g_{FA} + \Delta g_{FB}}{2\gamma} h_{AB}.$$

Vstupními daty pro astronomickou nivelaci na kvazigeoidu jsou tedy dle vztahu (9.1) tížnicové odchylky vztažené k zemskému povrchu, Fayovy anomálie, tíhová data normálního tíhového pole, délky, azimuty a převýšení ve spojnicích. V dalším textu stručně uvedeme jejich určení z veličin měřených nebo výpočtem.

Zpracováním měření GPS získáme geodetické zeměpisné souřadnice a elipsoidickou výšku v ETRS 89. Pracujeme-li s normálním tíhovým polem, pracujeme také s normálními tížnicemi, které nemají přímkový průběh jako normály. Při kvazigeodetické koncepci pracujeme s tížnicovými odchylkami na zemském povrchu. Je tedy potřeba opravit geodetické zeměpisné souřadnice o vliv zakřivení normální tížnice dle vzorců (5.10), (5.11), (5.12), (5.13). Výsledné složky tížnicových odchylek vztažených k zemskému povrchu získáme ze vzorců (5.7), (5.8), (5.9).

Členy Δg_{FA} , Δg_{FB} ve vztahu (9.1) reprezentují Fayovy anomálie. K těmto anomáliím se s dostatečnou přesností dostaneme z Bougerových Δg_{Bg} pomocí vzorce

$$(9.2) \quad \Delta g_F = \Delta g_{Bg} + 0,1119 H_Q[m].$$

Pro tento účel byly vypočteny hodnoty Moloděnského výšek pomocí vzorce

$$(9.3) \quad H_Q = h - \zeta,$$

kde $\zeta \approx 44,700m$, což odpovídá hodnotě ζ pro bod TUBO.

Hodnota γ je normální tíhové zrychlení na teluroidu. Prvním krokem stanovení hodnoty γ je výpočet γ_0 , což je normální tíhové zrychlení na elipsoidu, které je dle [4] dáno vztahem

$$(9.4) \quad \gamma_0 = \gamma_a \left(1 + f^* \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} f^2 - \frac{5}{2} f m' \right) \sin^2 2\varphi \right),$$

kde γ_a je normální tíhové zrychlení na rovníku, m' je poměr odstředivého a gravitačního zrychlení na rovníku, f je zploštění elipsoidu a f^* je tíhové zploštění, které je dáno vzorcem

$$(9.5) \quad f^* = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a},$$

kde γ_b je normální tíhové zrychlení na pólu. Na tíhové zrychlení na teluroidu se pak dostaneme dle [4] přepočtem

$$(9.6) \quad \gamma_A = \gamma_0 \left(1 - \frac{2}{a} (1 + f + m' - 2f \sin^2 \varphi) \frac{H_Q}{2} + \frac{3}{a^2} \left(\frac{H_Q}{2} \right)^2 \right),$$

kde a je hlavní poloosa elipsoidu a H_Q je normální Moloděnského výška. Hodnotu γ pak spočítáme jako aritmetický průměr

$$(9.7) \quad \gamma = \frac{\gamma_A + \gamma_B}{2}.$$

Dále bylo potřeba vypočítat délky s a azimuty A mezi body ve spojnicích. K dostatečně přesnému výpočtu budeme elipsoid místně aproximovat koulí o poloměru R , který je roven střednímu poloměru náhradní koule v těžišti síti. Po této aproximaci již lze délky a azimuty jednoduše spočítat pomocí II. ZGÚ na kouli např. dle [13] jako

$$(9.8) \quad s_{AB} = R \arccos(\sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta \lambda_{AB})$$

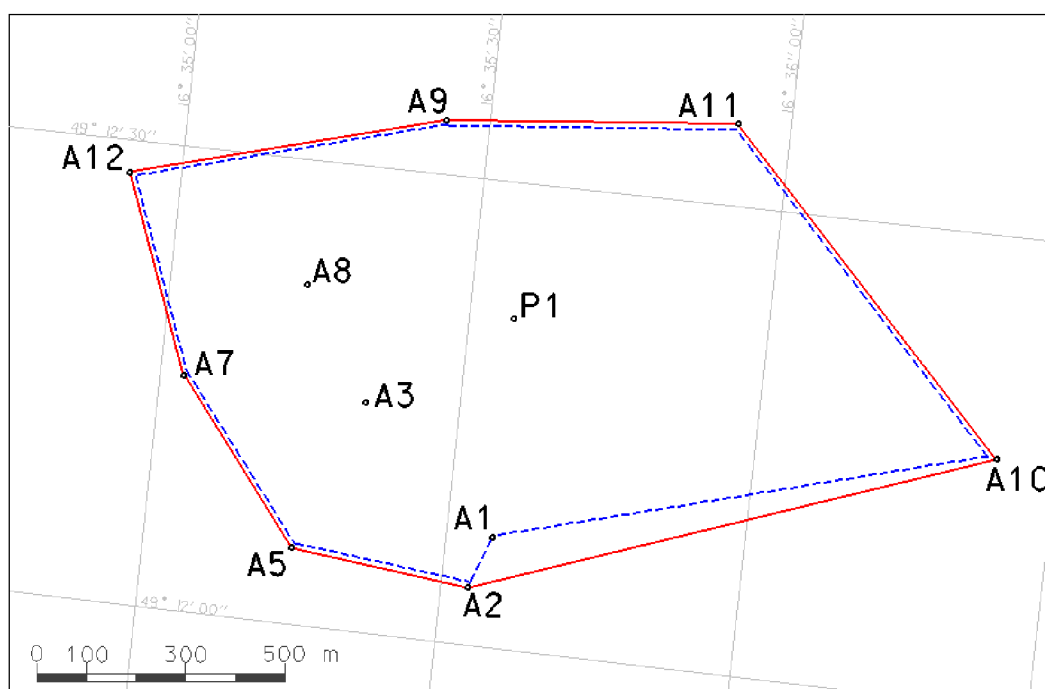
$$(9.9) \quad A_{AB} = \arcsin \left(\cos \varphi_B \frac{\sin \Delta \lambda_{AB}}{\sin \left(\frac{s_{AB}}{R} \right)} \right).$$

Takto předzpracovaná data byla poskytnuta vedoucím práce jako vstupní.

10 ZPRACOVÁNÍ DAT

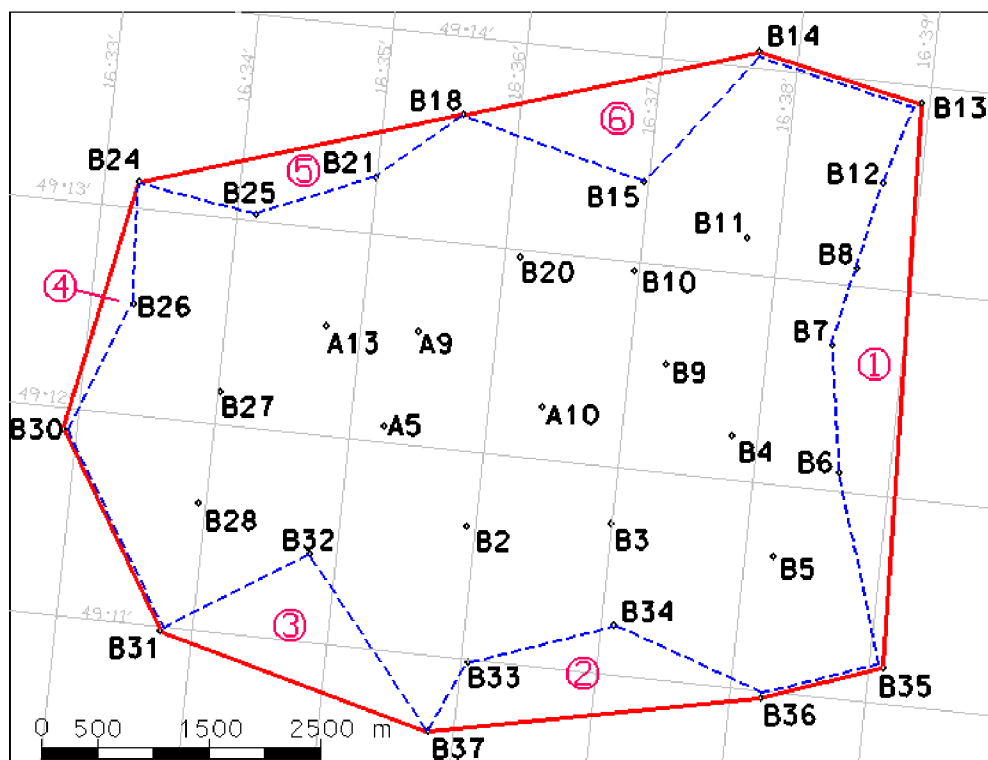
10.1 Volba vyhodnocované plochy

Máme zaměřené body, jejichž triangularizací lze vytvořit síť. Chceme-li výškově vyhodnotit lokalitu ze zaměřovaných bodů, je samozřejmé, že extrapolace je nepřijatelná. Tak tomu bude i v našich sítích, kde výšku reprezentují výškové anomálie ζ . Lze tedy říci, že nejrozsáhlejší možnou vyhodnocovanou lokalitou bude konvexní obal množiny bodů sítě.



Obr. 11: Konvexní a obecný obal sítě VEVEŘÍ

Na Obr. 11 je červeně zaznačen konvexní obal sítě VEVEŘÍ a modře užitá obecná alternativa obalu, jehož použití bude vysvětleno v kapitole 10.4.1.2 *Vyrovnání dle zprostředkujících s uvážením korelace*. Je patrné, že body jsou rozmístěny tak, aby síť mohla být triangularizována do ostroúhlých přibližně rovnostranných trojúhelníků. Výjimkou jsou body A10 a A2. Bod A10 je do této sítě zapojen jako referenční, kvůli jeho poloze blízké těžišti v síti AGNES, bod A2 pak kvůli nejvyšší hodnotě poměrného převýšení k délce spojnice mezi body A1-A2. Poloha těchto bodů tedy není vzhledem k síti optimální, ale jejich zařazení má experimentální opodstatnění. Lze tedy konstatovat, že v síti VEVEŘÍ má smysl vyhodnocovat výsledky na konvexním obalu.



Obr. 12: Konvexní a obecný obal sítě AGNES

Na Obr. 12 je červeně zaznačen konvexní obal sítě AGNES a modře obecný obal sítě, který ohraničoval vyhodnocované pole. Body v této síti jsou rozmístěny tak, aby triangulace mohla být provedena v ostroúhlých, přibližně rovnostranných trojúhelnících v poli ohraničeném obecným obalem sítě. Trojúhelníky vně obecného obalu nezahrnujeme do vyhodnocení ze dvou důvodů. Prvním důvodem jsou triangulační trojúhelníky vně obecné obálky, jejichž tupý úhel by byl větší než $\frac{3}{4}$ úhlu přímého. Spojnice těchto bodů by byla blízká spojnici již existující a neměla by pro výpočet pozitivní přínos. Tento případ nastane v červeně značených zónách 1, 3, 4 a 6 dle Obr. 12. V zónách 2, 5 by bylo toto kritérium splněno, ale reliéf zde nespĺňuje podmínky zjednodušující řešení astronomické nivelace; jeho průběh ve spojnících zde není přibližně lineární. Lze tedy konstatovat, že v síti AGNES má smysl vyhodnocovat výsledky na obecném obalu.

10.2 Triangularizace vyhodnocovaných sítí

Jak již bylo řečeno v kapitole 6 *Triangularizace*, síť lze triangularizovat obecně jakkoliv. Hledáme-li optimální triangulaci, je třeba stanovit kritéria, která musí splňovat. Pro optimalizaci triangularizace použijeme dvě kritéria, jejichž užití si dále vysvětlíme.

První kritérium vychází přímo ze vzorce pro astronomickou nivelaci na kvazigeoidu

$$(9.1) \quad \Delta\zeta_{AB} = -s_{AB} \left(\frac{\bar{\xi}_A + \bar{\xi}_B}{2} \cos A + \frac{\bar{\eta}_A + \bar{\eta}_B}{2} \sin A \right) - \frac{\Delta g_{FA} + \Delta g_{FB}}{2\gamma} h_{AB}.$$

Při rozboru přesnosti převýšení anomálií výšky budeme považovat délky, azimuty, výškové převýšení a hodnotu normálního tíhového zrychlení jako přesné hodnoty, což si vzhledem k jejich potřebné přesnosti můžeme dovolit. Vidíme například, že s chybou určení délky 10 cm při tížnicové odchylce 10'' vznikne chyba 0,005 mm, která zásadně neovlivňuje naši výslednou přesnost. Pokud aplikujeme zákon hromadění pravých chyb, které budeme značit pro přehlednost χ pak

$$(10.1) \quad \chi_{\Delta\zeta_{AB}} = -\frac{1}{2} s_{AB} \left[\cos A (\chi_{\bar{\xi}_A} + \chi_{\bar{\xi}_B}) + \sin A (\chi_{\bar{\eta}_A} + \chi_{\bar{\eta}_B}) \right] - \frac{h_{AB}}{2\gamma} (\chi_{\Delta g_A} + \chi_{\Delta g_B}).$$

Přejdeme-li nyní na střední chyby, pak

$$(10.2) \quad m_{\Delta\zeta_{AB}}^2 = \frac{1}{4} s_{AB}^2 \left[\cos^2 A (m_{\bar{\xi}_A}^2 + m_{\bar{\xi}_B}^2) + \sin^2 A (m_{\bar{\eta}_A}^2 + m_{\bar{\eta}_B}^2) \right] + \frac{h_{AB}^2}{4\gamma^2} (m_{\Delta g_A}^2 + m_{\Delta g_B}^2).$$

Uvažujme střední chyby složek tížnicových odchylek jako stejně přesné.

$$(10.3) \quad m_{\bar{\xi}_A}^2 = m_{\bar{\xi}_B}^2 = m_{\bar{\eta}_A}^2 = m_{\bar{\eta}_B}^2 = m_{\bar{\xi},\bar{\eta}}^2$$

Stejně tak uvažujme stejnou přesnost jednotlivých Fayových anomálií.

$$(10.4) \quad m_{\Delta g_A}^2 = m_{\Delta g_B}^2 = m_{\Delta g}^2$$

Uvážením identit (10.3), (10.4) získáváme pro kvadrát střední chyby převýšení anomálie výšky

$$(10.5) \quad m_{\Delta\zeta_{AB}}^2 = \frac{1}{4} s_{AB}^2 \left[\cos^2 A (2m_{\bar{\xi},\bar{\eta}}^2) + \sin^2 A (2m_{\bar{\xi},\bar{\eta}}^2) \right] + \frac{h_{AB}^2}{2\gamma^2} m_{\Delta g}^2 = \frac{1}{2} s_{AB}^2 m_{\bar{\xi},\bar{\eta}}^2 + \frac{h_{AB}^2}{2\gamma^2} m_{\Delta g}^2 = a_1 + a_2.$$

Nyní se zamysleme nad vlivem jednotlivých členů na přesnost výsledné anomálie výšky. Pro člen a_1 budeme uvažovat $m_{\xi, \eta} = 0,3''$. Do výpočtu bude vstupovat chyba

$$(10.6) \quad a_1 = 1,1 * 10^{-12} s_{AB}^2.$$

Pro člen a_2 budeme uvažovat $m_{\Delta g} = 5 \mu ms^{-2}$ a $\gamma = 9,8 ms^{-2}$. Maximální sklon v lokalitách je 4%, pak $h_{AB} = s_{AB} / 25$. Tento člen pak vstupuje do výpočtu chybou

$$(10.7) \quad a_2 = 2,1 * 10^{-16} s_{AB}^2.$$

Pokud členy a_1 a a_2 odmocníme a dosadíme do poměru, dojdeme k závěru

$$(10.8) \quad \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \approx 72.$$

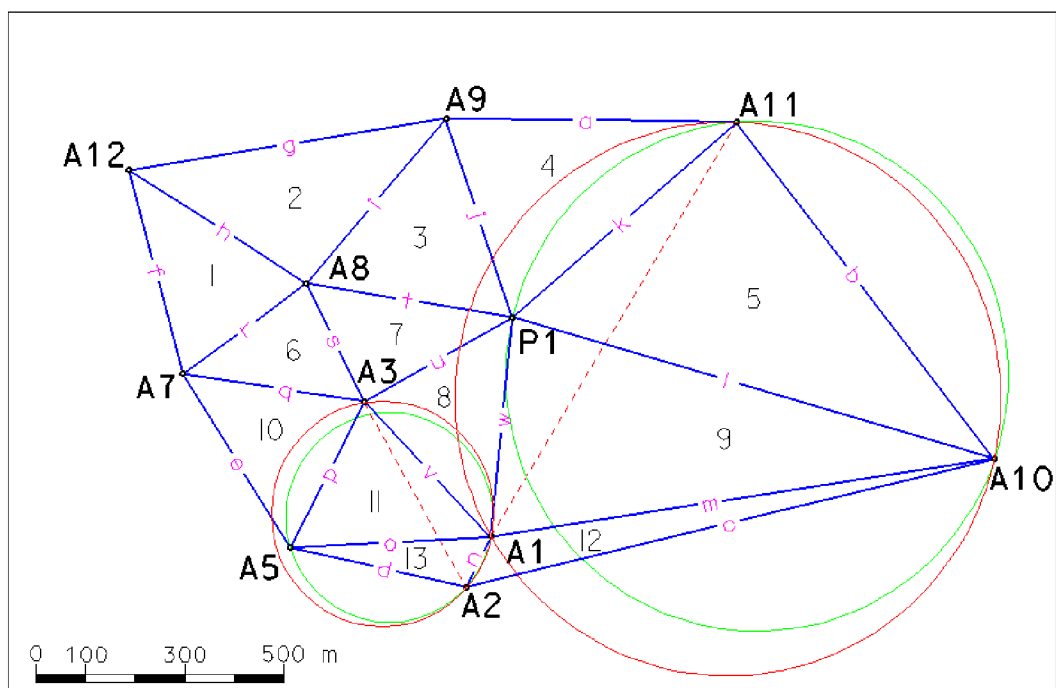
Pro naši práci se tedy zamyslíme pouze nad vlivem složky obsahující délku a azimut. Optimalizaci triangularizace z hlediska převýšení lze považovat za méně významnou. Proto prvním kritériem bude posuzováno dle vzorce

$$(10.9) \quad m_{\Delta \zeta_{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}} s_{AB} m_{\xi, \eta}.$$

Ze vztahu (10.9) je patrné, že prvním kritériem pro optimalizaci triangularizace bude kritérium nejmenšího součtu délek v triangulaci.

Druhým kritériem bude úhlová optimálnost sítě. Při volbě tohoto kritéria vycházíme z myšlenky, že spojnice by měly být voleny tak, aby co nejkompaktněji pokrývali určenou plochu sítě. Pokud by totiž úhly v trojúhelnících byly blízké 0° , spojnice by pokrývaly přibližně stejné vyhodnocované území a byly by silně korelované.

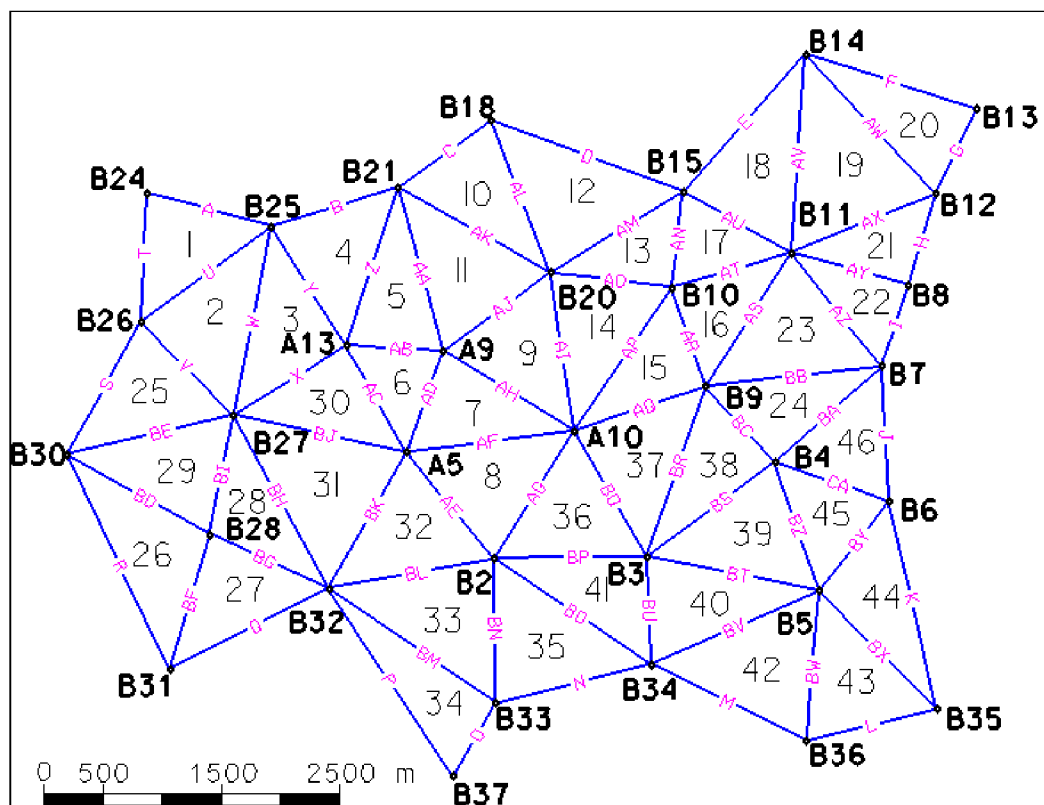
Pro triangularizaci sítí byla použita Delaunayova triangulace, ve které jsou obsažena obě výše zmíněná kritéria. Triangularizace byla provedena ve dvou krocích. Nejprve byla provedena triangulace dle Greedyho. Byly vypočítány délky všech spojnic v síti a následně byly spojnice do sítě přidávány od nejkratších tak, aby byla vždy zachována rovinnost sítě. Výpočty a vyhodnocení spojnic lze nalézt v *Příl. 4*. Tato síť pak byla testována na kritérium úhlové optimality pomocí Thaletovy věty. Pokud byla spojnice nelegální, docházelo k prohazování hran (viz. 6.4 *Delaunayova triangulace*). Následně byla triangulace sítě porovnána s triangulací v programu *GEUS*. Výsledné triangulace se shodovaly.



Obr. 13: Triangulace síť VEVEŘÍ

Na Obr. 13 vidíme triangulaci síť VEVEŘÍ na 13 trojúhelníků a 23 spojnic. Červenou přerušovanou čarou je zaznačena hrana A1-A11, která vznikla z Greedyho triangulace, ale neprošla kritériem úhlové optimálnosti. Byla nahrazena hranou l (P1-A10). Červenou barvou jsou také ilustrativně naznačeny kružnice opsané trojúhelníkům s nelegální hranou; zelenou kružnice trojúhelníků s legálními hranami. Spojnice byly označeny písmeny a-w, trojúhelníky čísly 1-13. Toto označení slouží pro lepší orientaci ve výpočetních protokolech v programu *Excel*.

Na Obr. 14 vidíme triangulaci síť AGNES na 46 trojúhelníků a 79 spojnic. Při triangularizaci této síť se řešení dle Greedyho rovnalo Delaunayově. Nebylo tedy potřeba prohazovat žádné hrany; všechny hrany Greedyho triangulace byly legální. Spojnice byly označeny písmeny A-CA, trojúhelníky čísly 1-46. Toto označení bylo zvoleno opět v souvislosti s výpočetním programem *Excel*.



Obr. 14: Triangulace síť AGNES

10.3 Stanovení způsobů výpočtu

Při vyrovnání sítě je v dnešní době jednoznačně preferováno vyrovnání zprostředkujících měření. Jeho obrovskou výhodou je jednoduchá algoritmizace nezávislá na podmínkách, které jsou ze sítě extrahovány.

V literatuře [4] je uveden způsob síťového řešení astronomické nivelace. Tento způsob je založený na výpočtu převýšení anomálií výšek ζ ve spojnicích a vyrovnání sítě jako nivelační. Síť je fixována na jeden pevný bod a váhy jsou voleny jako

$$(10.10) p_{AB} = \frac{1}{s_{AB}}.$$

Tento výpočet ovšem nezohledňuje korelaci jednotlivých spojnic. Matice vah P tedy reálně není diagonální, ale obecně plná. K matici P se tedy musíme dostat pomocí zákona hromadění vah pro korelovaná měření (7.34), který jsme uvedli v kapitole 7.3 *Vyrovnání korelovaných měření*. Matice Q_z reprezentuje váhové koeficienty nekorelovaných veličin, což jsou v našem případě složky tížnicových odchylek.

Jejich měření bylo považováno za stejně přesné, proto je matice Q_z jednotková. Matice H (10.11), (10.12) reprezentuje korelaci jednotlivých spojnic v síti.

$$(10.11) H = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta \zeta_{AB}}{\partial \xi_A} & \frac{\partial \Delta \zeta_{AB}}{\partial \eta_A} & \dots & \frac{\partial \Delta \zeta_{AB}}{\partial \xi_Z} & \frac{\partial \Delta \zeta_{AB}}{\partial \eta_Z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \zeta_{YZ}}{\partial \xi_A} & \frac{\partial \zeta_{YZ}}{\partial \eta_A} & \dots & \frac{\partial \zeta_{YZ}}{\partial \xi_Z} & \frac{\partial \zeta_{YZ}}{\partial \eta_Z} \end{pmatrix}$$

$$(10.12) H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} s_{AB} \cos A_{AB} & -\frac{1}{2} s_{AB} \sin A_{AB} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2} s_{YZ} \cos A_{YZ} & -\frac{1}{2} s_{YZ} \sin A_{YZ} \end{pmatrix}.$$

Je zřejmé, že korelace spojnic, které nemají žádný společný bod, budou nulové. Ostatní jsou závislé jak na vzdálenostech, tak na azimutech. Dosadíme-li takto vzniklou matici vah do výše uvedeného výpočtu dle zprostředkujících, získáme vyrovnané anomálie výšek ζ bodů sítě, ve kterých bude zohledněna korelace spojnic.

Řešení dle zprostředkujících s uvážením korelace přináší dva zásadní problémy. Prvním problémem je za jakých podmínek bude možno síť takto vyrovnat. Druhým je fakt, že se vyrovnávají výsledná převýšení anomálií výšek ζ a nedocházíme přímo k charakteristikám přesnosti měřených veličin, kterými jsou složky astronomicko-geodetických tížnicových odchylek. Na oba problémy se pokusme najít řešení.

V astronomické síti jsou na každém bodě měřené dvě veličiny; meridiánová složka ξ a příčná složka μ tížnicové odchylky. Z toho vyplývá, že počet měřených veličin je dvakrát větší, než je počet bodů. Počet hran v triangulaci je dán vzorcem (6.2).

Uvažujme nyní vytváření pseudoměřených veličin, což jsou v našem případě převýšení anomálií výšek ζ . Počet těchto převýšení bude roven počtu hran v triangulaci. Za určitých okolností ovšem bude jistě počet hran větší než počet měřených veličin. V této situaci dojde k singularitě součinu matic HH^T . Matici vah P , která by vznikla její inverzí tedy nelze vypočítat. Nelze-li vytvořit plnou matici vah, nelze za daných podmínek síť vyrovnat. Ptejme se dále, za jakých podmínek bude možné vypočítat matici vah P ?

Nechť $2n_b$ je počet měřených veličin a n_h počet hran. Aby šlo úlohu vyřešit, musí platit

$$(10.13) \quad 2n_b \geq n_h \Rightarrow 2n_b \geq 3n_b - 3 - b; n_b \leq b + 3.$$

Z daného jednoznačně vyplývá, že síť lze tímto způsobem vyrovnat za předpokladu, že počet vnitřních bodů sítě je menší nebo roven 3.

Při doposud zmíněných variantách vyrovnání dle zprostředkujících jsme vždy pracovali s pseudoměřenými veličinami. Ptejme se nyní, zda je možné vyrovnané anomálie výšky ζ určit přímo z měřených tížnicových odchylek a užít přitom vyrovnání zprostředkujících měření?

Při vyrovnání klasických geodetických veličin, jako je například délkové měření v síti sestavujeme matematické vztahy pro měřenou veličinu např.

$$(10.14) \quad s_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}.$$

Těmito vztahy vždy explicitně vyjadřujeme měřené veličiny pomocí veličin určených a konstant. V našem případě je situace složitější. Mějme základní rovnici astronomické nivelace na kvazigeoidu

$$(10.15) \quad \Delta\zeta_{AB} = -s_{AB} \left(\frac{\bar{\xi}_A + \bar{\xi}_B}{2} \cos A_{AB} + \frac{\bar{\eta}_A + \bar{\eta}_B}{2} \sin A_{AB} \right) + k_{gr},$$

kde k_{gr} je člen obsahující Fayovy anomálie, normální zrychlení a převýšení. Tento člen budeme s dostatečnou přesností považovat za bezchybný. Pokud bychom z rovnice (10.15) vyjádřili jednu složku tížnicové odchylky, pak nám stále bude záviset na dalších třech složkách. Obdobně by tomu bylo, kdybychom vycházeli ze dvou rovnic převýšení vycházejících ze stejného bodu a ty se snažili matematicky redukovat. Zjistíme tedy, že se nelze tímto způsobem dopracovat k explicitnímu vyjádření tížnicové odchylky pomocí určených převýšení anomálií výšky ζ .

Vzorce pro ζ máme pouze ve formě implicitní. Na této formě je založeno vyrovnání podmínkových měření. Sestavíme-li podmínkové rovnice v uzavřených trojúhelnících, můžeme astronomické tížnicové odchylky vyrovnat a z nich vypočítat převýšení a hodnoty ζ v síti. Máme-li trojúhelník ΔABC , bude pro něj platit uzávěrová podmínka (10.16).

(10.16)

$$\begin{aligned} & -s_{AB} \left(\frac{\bar{\xi}_A + \bar{\xi}_B}{2} \cos A_{AB} + \frac{\bar{\eta}_A + \bar{\eta}_B}{2} \sin A_{AB} \right) + k_{grAB} - s_{BC} \left(\frac{\bar{\xi}_B + \bar{\xi}_C}{2} \cos A_{BC} + \frac{\bar{\eta}_B + \bar{\eta}_C}{2} \sin A_{BC} \right) + k_{grBC} \\ & - s_{CA} \left(\frac{\bar{\xi}_C + \bar{\xi}_A}{2} \cos A_{CA} + \frac{\bar{\eta}_C + \bar{\eta}_A}{2} \sin A_{CA} \right) + k_{grCA} = 0 \end{aligned}$$

Tyto podmínky jistě půjde sestavit pro každý trojúhelník v síti. Vyrovnání podmínkových měření lze tedy užít v astronomicko-nivelačních sítích bez omezení v závislosti napočtu vnitřních bodů sítě.

10.4 Vyrovnání sítí

10.4.1 Vyrovnání sítě VEVEŘÍ

Síť VEVEŘÍ byla vyrovnána třemi způsoby. Nejprve byla vyrovnána dle zprostředkujících jako nivelační síť se zanedbáním korelace převýšení výškových anomálií ζ . Poté byla redukována vyrovnána dle zprostředkujících s plnou maticí vah. Nakonec byla vyrovnána dle podmínkových s užitím trojúhelníkových podmínek.

10.4.1.1 Vyrovnání dle zprostředkujících se zanedbáním korelace

Obecný tvar zprostředkujících rovnic byl

$$(10.17) \Delta\zeta_{AB} = \zeta_B - \zeta_A.$$

Těchto rovnic bylo 23, stejně jako pseudoměřených převýšení anomálií výšky. Relativní výška bodu A_{10} byla stanovena na 0,0000 m. Bod A_{10} byl tedy pevný. Zbýlých 10 bodů přinášelo 10 nutných měření. Počet nadbytečných veličin r byl tedy 13, stejně jako počet trojúhelníků v síti.

Při zanedbání korelace jsme po linearizaci Taylorovým polynomem získávali opravy ve tvaru

$$(10.18) v_{\Delta\zeta_{AB}} = (1)d\zeta_B + (-1)d\zeta_A + (\Delta\zeta_{AB0} - \Delta\zeta'_{AB}),$$

kde je $\Delta\zeta_{AB0}$ je přibližná hodnota převýšení vypočtená z přibližných souřadnic A a B . Člen $\Delta\zeta'_{AB}$ reprezentuje pseudoměřená hodnota převýšení vypočtená z měřených složek tížnicových odchylek. Členy matice plánu A nabývaly hodnot 1;-1;0.

Váhy byly voleny dle vzorce (10.10). Vyrovnání dále probíhalo dle kapitoly 7.1 Vyrovnání zprostředkujících měření. Výpočet vyrovnání obsahuje Příl. 3.

10.4.1.2 Vyrovnání dle zprostředkujících s uvážením korelace

Při uvážení korelace byla očekávána plná matice vah vypočtená dle kapitoly 7.3 *Vyrovnání korelovaných měření*. Její výpočet ovšem zkolaboval (viz. Příl. 5), protože byla porušena podmínka o maximálním počtu vnitřních bodů dle kapitoly 10.3 *Stanovení způsobů výpočtu*. Vnitřní body v této síti byly 4.

Aby bylo možné úlohu vyřešit, bylo potřeba jednu krajní hranu z vyrovnání odstranit a vytvořit obecný obal sítě s třemi vnitřními body. Na základě nejmenší úhlové optimálnosti v trojúhelníku $\Delta A1A2A10$, byla odstraněna hrana $A2A10$, jak vidíme na Obr. 11. Po této úpravě již bylo možné plnou matici vah vypočítat.

Po odstranění spojnice do výpočtu vstupovalo 22 pseudoměření $\Delta\zeta_{AB}$ vypočtených z 22 měřených složek tížnicových odchylek. Počet nadbytečných veličin se tedy snížil na 12. Dále vyrovnání probíhalo dle kapitoly 7.1 *Vyrovnání zprostředkujících měření*. Výpočet vyrovnání obsahuje Příl. 2.

10.4.1.3 Vyrovnání podmíkových měření

Nejprve byly sestaveny uzávěrové podmínky typu (10.16). Počet podmínek byl 13, což odpovídalo počtu trojúhelníku, který byl stejný jako počet nadbytečných měření r . Vlivem nepřesností měřených veličin se tyto podmínky obecně nerovnalý rovnat nule. Tím vznikly uzávěry u . Po linearizaci Taylorovým polynomem jsme získali přetvořené podmínkové rovnice (7.24), kde

$$(10.19) \overline{A}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\Delta ABC}}{\partial \xi_A} & \frac{\partial \varphi_{\Delta ABC}}{\partial \eta_A} & \dots & \frac{\partial \varphi_{\Delta ABC}}{\partial \xi_Z} & \frac{\partial \varphi_{\Delta ABC}}{\partial \eta_Z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_{\Delta XYZ}}{\partial \xi_A} & \frac{\partial \varphi_{\Delta XYZ}}{\partial \eta_A} & \dots & \frac{\partial \varphi_{\Delta XYZ}}{\partial \xi_Z} & \frac{\partial \varphi_{\Delta XYZ}}{\partial \eta_Z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-s_{AB} \cos \alpha_{AB} - s_{CA} \cos \alpha_{CA}}{2} & \frac{-s_{AB} \sin \alpha_{AB} - s_{CA} \sin \alpha_{CA}}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{-s_{YZ} \cos \alpha_{YZ} - s_{ZX} \cos \alpha_{ZX}}{2} & \frac{-s_{YZ} \sin \alpha_{YZ} - s_{ZX} \sin \alpha_{ZX}}{2} \end{pmatrix}$$

Toto naznačení výpočtu je symbolické a značí, že pokud bod a jemu příslušná tížnicová odchylka nebyla součástí trojúhelníku, byl člen nulový. V opačném případě nabývaly členy hodnot dle matice (10.19). Matice \overline{A} měla rozměry (22;13).

Matice vah P byla jednotková, neboť byla uvažována stejná přesnost měřených složek tížnicových odchylek. Dále vyrovnání probíhalo dle kapitoly 7.2 *Vyrovnání podmínkových měření*. Výpočet vyrovnání obsahuje *Příl. 1*.

10.4.2 Vyrovnání sítě AGNES

Síť AGNES byla vyrovnána dle zprostředkujících pseudoměřených převýšení anomálií výšek se zanedbáním korelace a metodou podmínkového vyrovnání.

Síť AGNES obsahovala 34 bodů, na kterých bylo provedeno 68 nezávislých měření. Počet spojnic v této síti byl 79. Bod $A10$, který se nacházel poblíž těžiště sítě, byl určen jako pevný a jeho výška byla stanovena na 0,0000 m. Nutných měření bylo tedy 33, stejně jako určovaných bodů. Počet trojúhelníků byl 46, což odpovídalo počtu nadbytečných veličin.

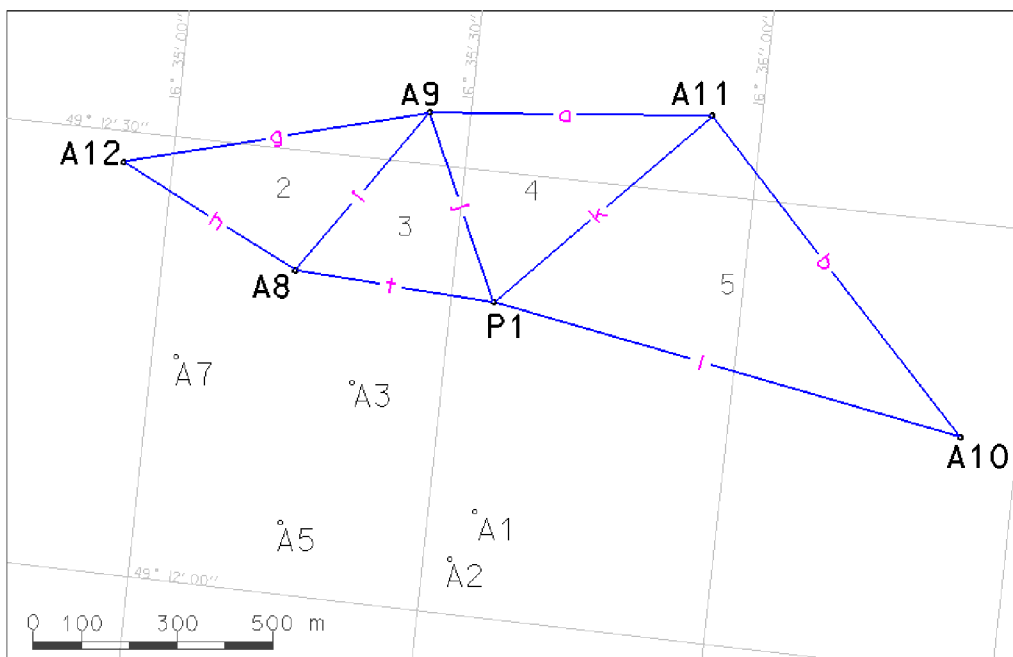
Z celkových 34 bodů sítě AGNES bylo 14 vnitřních a 20 bodů leželo na obecné obálce této sítě. Z daného vyplývá, že byla výrazně porušena podmínka dle vztahu (10.13) o maximálním počtu vnitřních bodů. Vyrovnání dle zprostředkujících s plnou maticí vah by přicházelo v úvahu pouze tehdy, pokud by bylo zrušeno 11 hran na okraji sítě. Toto narušení by ovšem zásadně snížilo možnou rozlohu vyhodnocované plochy. Proto se v tomto případě od zprostředkujícího vyrovnání s plnou maticí vah upustilo.

Užitá vyrovnání byla provedena stejným způsobem jako v kapitole 10.4.1 *Vyrovnání sítě VEVEŘÍ*. Výpočet vyrovnání obsahují *Příl. 1* a *Příl. 3*.

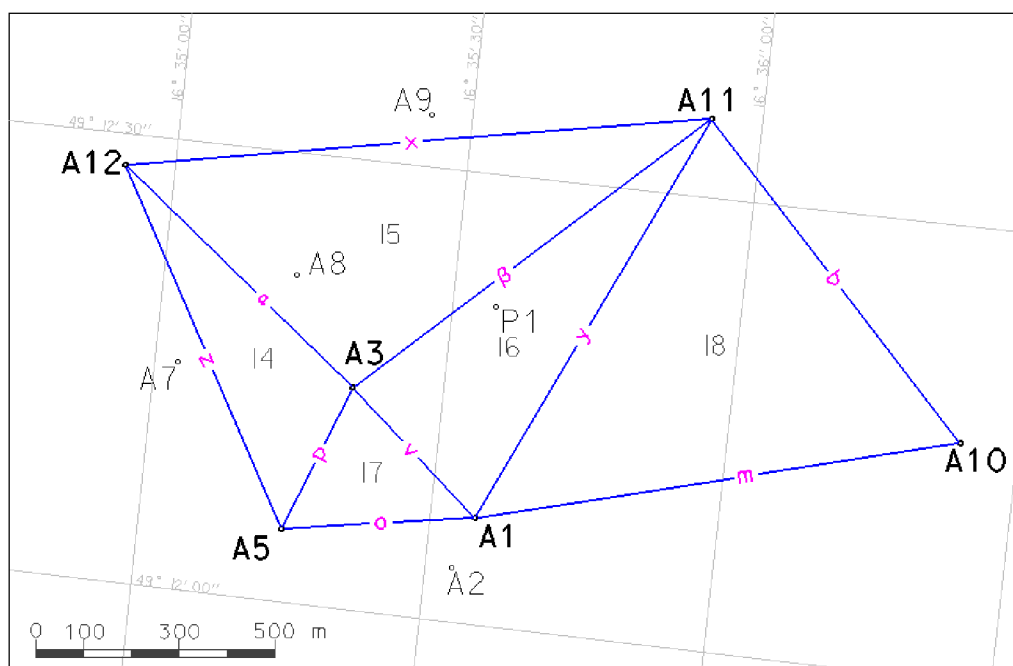
10.4.3 Vyrovnání pokusných sítí VEVEŘÍ 2345 a VEVEŘÍ 2

Tyto sítě byly experimentálně extrahovány ze sítě VEVEŘÍ. Byly vyrovnány metodou zprostředkujícího měření s plnou maticí vah a vyrovnáním podmínkovým měření. Cílem dvojího vyrovnání bylo dokázat shodnost výsledků obou rovnocenných metod.

Síť VEVEŘÍ 2345 vznikla z trojúhelníků původní sítě VEVEŘÍ se stejným označením. Greedyho triangulace se dle *Příl. 4* sítě shodovala s Delaunayovou (viz. *Obr 15*). Pevný bod byl opět $A10$. Počet měřených veličin byl 12, počet pseudoměřených převýšení anomálií výšek 9. Počet nutných měření byl 5, počet nadbytečných pak 4. Síť neměla vnitřní bod. Výpočet vyrovnání obsahují *Příl. 1* a *Příl. 2*.



Obr. 15: Zobrazení sítě VEVEŘÍ 2345 v kontextu sítě VEVEŘÍ



Obr. 16: Zobrazení sítě VEVEŘÍ 2 v kontextu sítě VEVEŘÍ

Síť VEVEŘÍ 2 vznikla z vybraných bodů původní sítě VEVEŘÍ. Greedyho triangulace sítě (viz. Příl. 4) se shodovala s Delaunayovou (viz. Obr. 16). Trojúhelníky byly označeny čísly 14-18 v návaznosti na síť VEVEŘÍ. Nové spojnice byly doplněny pomocným označením. Pevný bod byl opět A10. Počet měřených veličin byl 12, počet pseudoměřených převýšení anomálií výšek 10. Počet nutných měření byl 5, počet nadbytečných 5. Síť měla jeden vnitřní bod. Výpočet vyrovnání obsahují Příl. 1 a Příl. 2.

10.5 Výsledné hodnoty a jejich porovnání

10.5.1 Pokusné sítě VEVEŘÍ 2345 a VEVEŘÍ 2

Jak již bylo řečeno, tyto sítě byly vyrovnány metodou vyrovnání zprostředkujících měření s plnou maticí vah a vyrovnáním podmínkových měření. Předpokladem byla rovnocennost obou řešení a tudíž stejné výsledky.

Z *Tab. 3* a *Tab. 4* je patrné, že oběma metodami bylo dosaženo stejných výsledků. Z daného vyplývá, že byl experimentálně potvrzen předpoklad o rovnocennosti užitých řešení.

Tab. 3: Výsledky vyrovnání sítě VEVEŘÍ 2345

sít' VEVEŘÍ 2345					
Bod	Podmínkové vyrovnání s korelací		Zprostředkující vyrovnání		diference obou typů vyrovnání
	Vyrovnaná hodnota [m]	střední chyba [mm]	Vyrovnaná hodnota [m]	střední chyba [mm]	diference vyrovnaných hodnot [mm]
P1	0,0448	0,90	0,0448	0,90	0,00
A8	0,0643	1,08	0,0643	1,08	0,00
A9	0,0549	1,00	0,0549	1,00	0,00
A10	0,0000	0,00	0,0000	0,00	0,00
A11	0,0287	0,82	0,0287	0,82	0,00
A12	0,0822	1,20	0,0822	1,20	0,00

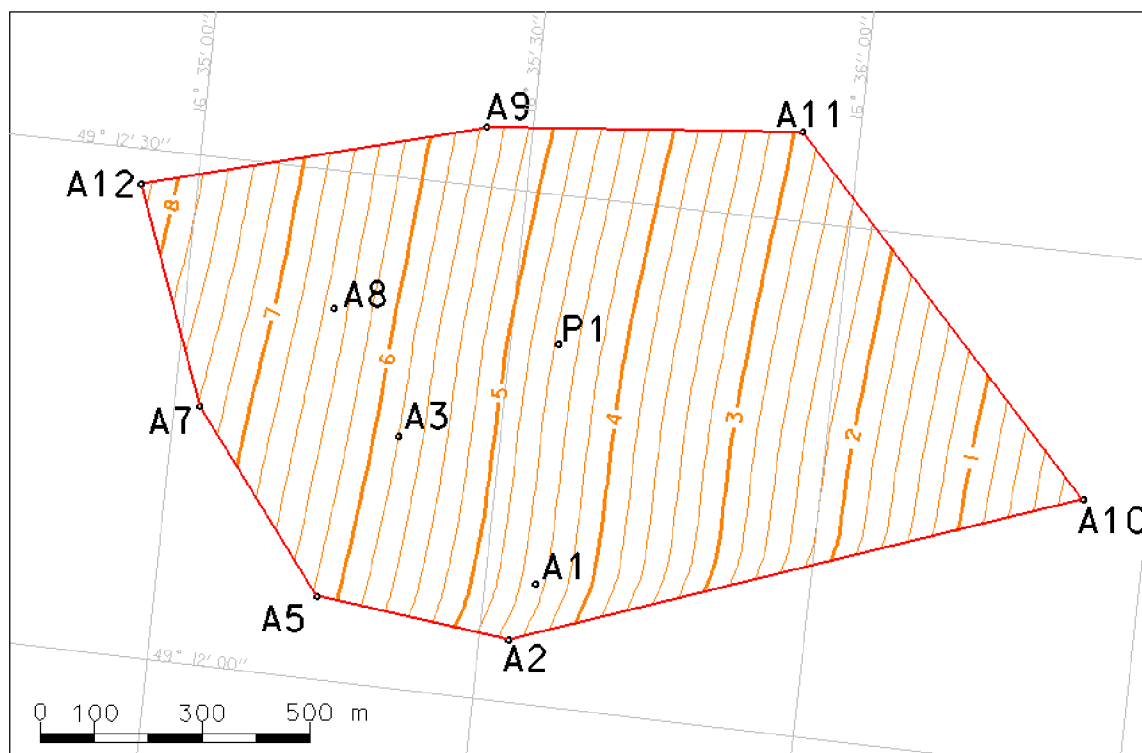
Tab. 4: Výsledky vyrovnání sítě VEVEŘÍ 2

sít' VEVEŘÍ 2					
Bod	Podmínkové vyrovnání s korelací		Zprostředkující vyrovnání		diference obou typů vyrovnání
	Vyrovnaná hodnota [m]	střední chyba [mm]	Vyrovnaná hodnota [m]	střední chyba [mm]	diference vyrovnaných hodnot [mm]
A1	0,0443	0,70	0,0443	0,70	0,00
A3	0,0575	0,77	0,0575	0,77	0,00
A5	0,0610	0,83	0,0610	0,83	0,00
A10	0,0000	0,00	0,0000	0,00	0,00
A11	0,0291	0,63	0,0291	0,63	0,00
A12	0,0822	0,95	0,0822	0,95	0,00

10.5.2 Síť VEVEŘÍ

V Tab. 5 vidíme výsledné hodnoty anomálií výšek z užitých vyrovnání sítě VEVEŘÍ a jejich charakteristiky přesnosti. Z výsledků vyrovnání je patrné, že výsledné hodnoty a charakteristiky přesnosti zprostředkujícího vyrovnání s korelací a podmínkového jsou si podle předpokladu velmi blízké. Drobné difference jsou způsobeny absencí spojnice A2A10 ve zprostředkujícím vyrovnání s korelací, což bylo vysvětleno v kapitole 10.4.1.2 *Vyrovnání dle zprostředkujících s uvážením korelace*.

Účelné je porovnávat hodnoty a střední chyby zprostředkujícího vyrovnání bez korelace a vyrovnání podmínkového. Průměrná absolutní hodnota difference mezi těmito vyrovnáními byla $\Delta\zeta^{pr.abs} = 0,39mm$. Při podělení průměrných hodnot středních chyb získáme $m_{\zeta}^{pr.zpr.} / m_{\zeta}^{pr.pod.} = 0,34$. Z daného je patrné, že charakteristiky přesnosti byly při zanedbání korelace přibližně třikrát optimističtější, než tomu bylo při jejím uvážení. Z podmínkového vyrovnání byla vypočtena střední chyba měřených veličin $m_{\zeta,\eta} = 0,31''$. Z výsledných vyrovnaných převýšení byly interpolovány vrstevnice výškových anomálií v program GEUS dle Obr. 17. Interval hlavních vrstevnic byl zvolen



1cm.

Obr. 17: Průběh anomálií výšek v síti VEVEŘÍ

Tab. 5: Výsledky vyrovnaní sítě VEVEŘÍ

sít' VEVEŘÍ								
typ vyrovnaní	Podmínkové		Zprostředkující nekorelované		Zprostředkující korelované		Diference Podmínkové-nekorelované	Diference Podmínkové-korelované
bod	vyrovnaná hodnota [m]	střední chyba [mm]	vyrovnaná hodnota [m]	střední chyba [mm]	vyrovnaná hodnota [m]	střední chyba [mm]	diference vyrovnaných hodnot [mm]	diference vyrovnaných hodnot [mm]
P1	0,0456	0,75	0,0450	0,25	0,0455	0,72	0,53	0,10
A1	0,0447	0,77	0,0444	0,25	0,0449	0,74	0,34	-0,16
A2	0,0451	0,80	0,0448	0,27	0,0452	0,77	0,32	-0,16
A3	0,0580	0,79	0,0577	0,27	0,0581	0,79	0,36	-0,04
A5	0,0616	0,88	0,0613	0,28	0,0616	0,84	0,22	-0,07
A7	0,0738	0,88	0,0736	0,30	0,0739	0,84	0,28	-0,05
A8	0,0651	0,85	0,0646	0,28	0,0651	0,81	0,43	-0,01
A9	0,0555	0,84	0,0551	0,29	0,0554	0,80	0,37	0,04
A10	0,0000	0,00	0,0000	0,00	0,0000	0,00	0,00	0,00
A11	0,0293	0,72	0,0288	0,28	0,0292	0,69	0,49	0,10
A12	0,0828	0,93	0,0822	0,32	0,0828	0,89	0,51	-0,01

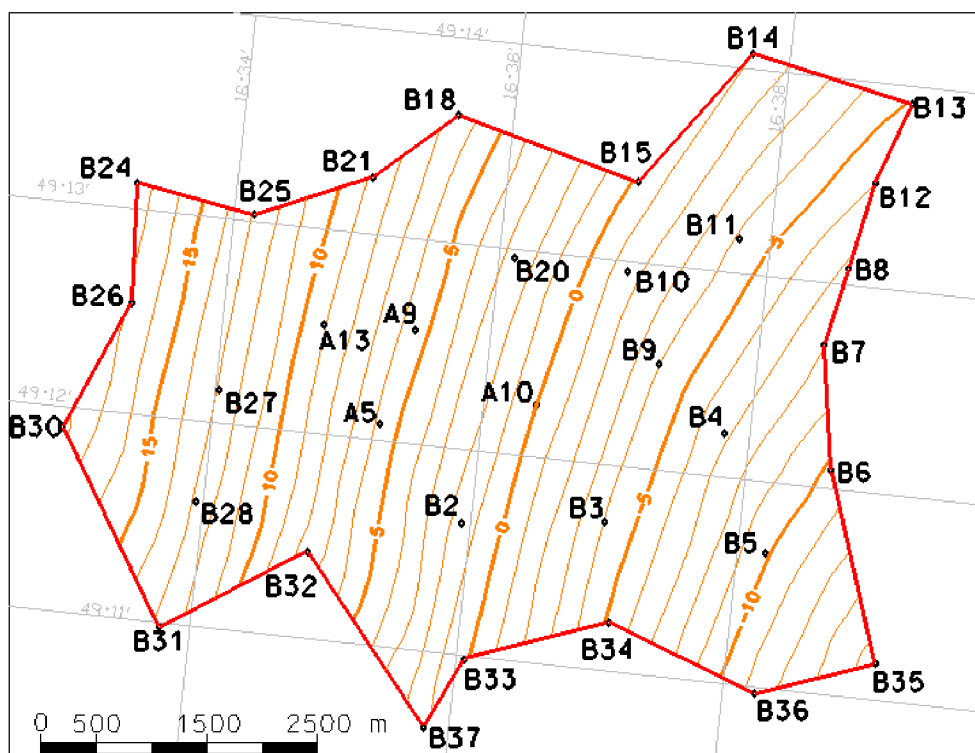
10.5.3 Sít' AGNES

V Tab. 6 vidíme výsledné hodnoty anomálií výšek z vyrovnání sítě AGNES a jejich charakteristiky přesnosti. Z výsledků vyrovnání je patrné, že vyrovnané hodnoty nabývají větších diferencí, než tomu bylo u sítě VEVEŘÍ. Sítě byly vyrovnány na stejné obecné obálce a tak tyto difference odráží pouze postup při vyrovnání.

Průměrná absolutní hodnota difference mezi zprostředkujícím vyrovnáním bez uvážení korelace a vyrovnáním podmínkovým byla $\Delta\zeta^{pr.abs} = 1,96mm$. Při porovnání průměrných hodnot středních chyb získáváme $m_{\zeta}^{pr.zpr.} / m_{\zeta}^{pr.pod.} = 0,55$. Z daného je patrné, že charakteristiky přesnosti byly při zanedbání korelace přibližně dvakrát optimističtější, než tomu bylo při jejím uvážení. Z podmínkového vyrovnání byla vypočtena střední chyba měřených veličin $m_{\xi,\eta} = 0,52''$.

Z výsledků vyrovnání je patrné, že vyrovnané hodnoty nabývají větších diferencí, než tomu bylo u sítě VEVEŘÍ, což lze přisoudit větší délce spojnic v síti AGNES. Zprostředkující vyrovnání bylo také provedeno v softwaru *Groma*, přičemž výsledky byly identické.

Z výsledných vyrovnaných převýšení byly interpolovány vrstevnice výškových anomálií v program *GEUS*, dle Obr. 18. Interval hlavních vrstevnic byl zvolen 5 cm.



Obr. 18: Průběh anomálií výšek v síti AGNES

Tab. 6: Výsledky vyrovnání sítě AGNES

sít' AGNES					
typ vyrovnání	Podmínkové		Zprostředkující		diference obou typů
bod	vyrovnaná hodnota [m]	střední chyba [mm]	vyrovnaná hodnota [m]	střední chyba [mm]	Diference vyrovnaných hodnot [mm]
A5	0,0581	1,14	0,0605	0,83	-2,37
A9	0,0547	1,02	0,0556	0,83	-1,00
A10	0,0000	0,00	0,0000	0,00	0,00
A13	0,0910	1,60	0,0918	0,95	-0,74
B2	0,0152	1,11	0,0158	0,83	-0,57
B3	-0,0393	1,01	-0,0398	0,83	0,50
B4	-0,0685	1,42	-0,0682	0,96	-0,35
B5	-0,0988	1,94	-0,0974	1,04	-1,42
B6	-0,1021	1,99	-0,1007	1,10	-1,45
B7	-0,0792	1,86	-0,0785	1,01	-0,65
B8	-0,0712	2,20	-0,0706	1,14	-0,60
B9	-0,0392	1,00	-0,0389	0,81	-0,31
B10	-0,0157	1,23	-0,0146	0,83	-1,08
B11	-0,0408	1,81	-0,0390	0,95	-1,81
B12	-0,0603	2,57	-0,0600	1,22	-0,28
B13	-0,0518	2,98	-0,0517	1,46	-0,11
B14	-0,0091	2,69	-0,0064	1,26	-2,65
B15	-0,0018	1,70	-0,0006	0,96	-1,22
B18	0,0660	1,92	0,0629	1,12	3,14
B20	0,0257	1,08	0,0249	0,82	0,84
B21	0,0880	1,84	0,0863	0,98	1,69
B24	0,1765	2,82	0,1759	1,43	0,63
B25	0,1297	2,09	0,1298	1,11	-0,09
B26	0,1683	2,53	0,1677	1,23	0,55
B27	0,1287	2,08	0,1285	1,02	0,17
B28	0,1280	2,30	0,1273	1,19	0,61
B30	0,1821	2,77	0,1822	1,27	-0,17
B31	0,1285	2,95	0,1266	1,35	1,94
B32	0,0774	1,83	0,0779	1,00	-0,55
B33	0,0026	1,78	0,0034	1,10	-0,76
B34	-0,0519	1,56	-0,0520	0,99	0,12
B35	-0,1454	2,88	-0,1439	1,32	-1,50
B36	-0,1139	2,55	-0,1128	1,27	-1,02
B37	0,0106	2,28	0,0120	1,34	-1,32

11 ZÁVĚR

V diplomové práci jsem na základě specifik vstupních veličin řešil postup komplexního zpracování a vyrovnání dat v sítích VEVEŘÍ a AGNES. Tyto postupy jsem se snažil rozvést a interpretovat je v obecném kontextu.

Nejprve jsem nadeřinoval plochu, na které budou sítě vyrovnány. Zamyslel jsem se nad případem, kdy síť můžeme vyrovnávat na konvexním obalu a kdy pracujeme na obalu obecném.

Navrhl jsem metodiku triangularizace tak, aby byla vhodně vytvořena síť na základě optimalizace snížení vlivu nežádoucích chyb spojených s umělým vytvářením spojnic. Byla využita Delaunayova triangulace, jež obsahuje kritérium úhlové optimálnosti a kritérium minimální sumy délek v síti.

Porovnal jsem metody vyrovnání astronomicko-nivelační sítě, kterými byly vyrovnány dle zprostředkujících měření se zanedbáním korelace, vyrovnání zprostředkujících měření s korelací a vyrovnání podmínkových měření. Tato řešení byla aplikována na sítě VEVEŘÍ a AGNES, pomocí nichž jsem se snažil obecně představit výhody a nevýhody jednotlivých vyrovnání. Experimentálně jsem na sítích VEVEŘÍ 2345 a VEVEŘÍ 2 ověřil, že na stejné obálce sítě jsou si vyrovnání zprostředkujících měření s korelací a podmínkové rovny.

Z porovnání výsledků vyrovnání uvedených v *Tab. 5* a *Tab. 6* je patrné, že vyrovnané hodnoty sítě AGNES nabývají větších diferencí, než tomu bylo u sítě VEVEŘÍ. Tato okolnost jistě souvisí s vyšší průměrnou délkou spojnic u sítě AGNES. Z výsledků je také patrné, že rozdíly mezi zjednodušeným, avšak jednoduše algoritmizovatelným řešením a řešením, které vychází ze skutečných vstupních veličin, kterými jsou tížnicové odchylky, jsou pro běžnou geodetickou potřebu zanedbatelné. Pro přesné práce lze ovšem především u sítě AGNES nalézt odchylky, které je třeba uvažovat.

Při analýze výsledných charakteristik přesnosti lze konstatovat, že zanedbání korelace vytváří velmi optimistické hodnoty středních chyb anomálií výšek. Uvážením korelace se dostáváme k hodnotám reálnějším.

Pokud bychom chtěli obecné řešení vyrovnání sítí astronomické nivelace, kterým je vyrovnání dle podmínkových, zavést do praxe, bude potřeba toto řešení algoritmizovat.

Již projekt sítě by měl být takový, aby byla připravena triviální triangularizace dle Delaunayho splňující komplexní a rovnoměrné pokrytí sítě. Dalším krokem by mělo být lexikografické sestavení bodů v síti, ze kterých by vycházela znaménka převýšení v jednotlivých trojúhelnících; postupujeme-li z prvního bodu do druhého, je znaménko převýšení kladné a naopak. Cílem je sestavení matice plánu. Výpočet jejích členů pak podléhá analogickým zákonitostem.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] BÖHM, Josef, Vladimír RADOUCH a Miroslav HAMPACHER. *Teorie chyb a vyrovnávací počet*. Druhé upravené vydání. Praha: Geodetický a kartografický podnik Praha, 1990, 416 s. ISBN 80-701-1056-2.
- [2] CIMBÁLNÍK, Miloš, Antonín ZEMAN a Jan KOSTELECKÝ. *Základy vyšší a fyzikální geodézie*. Vydání první. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2008, 218 s. ISBN 978-80-01-03605-1.
- [3] Česká republika. Nařízení vlády o stanovení geodetických referenčních systémů a státních mapových děl závazných na území státu a zásadách jejich používání. In: *430/2006 Sb.* 2006.
- [4] HOFMANN-WELLENHOF, Bernhard a Helmut MORITZ. *Physical Geodesy*. Austria: Springer Wien New York, 2005. ISBN 10-3-211-23584-1.
- [5] LEIFER, Filip. *Delaunayho triangulace a její aplikace* [online]. Brno, 2006 [cit. 2012-05-09]. Dostupné z: http://uai.fme.vutbr.cz/szz/2006/DP_Leifer.pdf. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce doc. RNDr. Ing. Miloš Šeda, Ph.D.
- [6] KABELÁČ, Josef a Jan KOSTELECKÝ. *Geodetická astronomie 10*. Vydání druhé. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2009, 254 s. ISBN 978-80-01-04322-6.
- [7] KÁRNÍK, Jakub. *Analýza různých metod určování tížnicových odchylek a vytváření modelů kvazigeoidu*. Brno, 2011. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební. Vedoucí práce Ing. Radovan Machotka, Ph.D.
- [8] KOSTELECKÝ, Jan, Pavel NOVÁK a Jaroslav ŠIMEK. VÚGTK. *Výpočet gravimetrických tížnicových odchylek a výšek kvazigeoidu na bodech sítě AGNES*. Zdiby, 2010.
- [9] MACHOTKA, Radovan. Určování astronomických souřadnic - Metoda párů stejné výšky. *Geodetický a kartografický obzor*. Praha: Vesmír, 2005, č. 12.
- [10] MACHOTKA, Radovan a Jiří VONDRÁK. Využití motorizované totální stanice pro automatizaci astronomických měření. *Geodetický a kartografický obzor*. 2009, č. 4.

- [11] STRYCH, Václav. *Triangulace a editování vrstevnic* [online]. Plzeň, 2003 [cit. 2012-05-09]. Dostupné z: http://gis.zcu.cz/studium/dp/2003/Strych__Triangulace_a_editovani_vrstevnic__DP.pdf. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd. Vedoucí práce Prof. Dr. Ing. Ivana Kolingerová.
- [12] VÚGTK. Terminologický slovník zeměměřičství a katastru nemovitostí: Geodézie [online]. 2005 [cit. 2012-05-12]. Dostupné z: [http://www.vugtk.cz/slovník/5356_geodeticcka-vyska--elipsoidicka-vyska-\(h\)](http://www.vugtk.cz/slovník/5356_geodeticcka-vyska--elipsoidicka-vyska-(h))
- [13] VYKUTIL, Josef. *Vyšší geodézie*. První vydání. Praha: Kartografie, 1982, 544 s.
- [14] ZEMAN, Antonín. *Fyzikální geodézie*. Vydání druhé. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2005, 188 s. ISBN 80-010-3118-7.
- [15] ZEMAN, Antonín. *Fyzikální geodézie: Teorie výšek a výškové systémy : doplňkové skriptum*. Vydání druhé. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2008, 83 s. ISBN 978-80-01-04019-5.

SEZNAM TABULEK

Tab. 1: Souřadnice bodů sítě VEVEŘÍ v ETRS 89	45
Tab. 2: Souřadnice bodů sítě AGNES v ETRS 89	46
Tab. 3: Výsledky vyrovnání sítě VEVEŘÍ 2345	61
Tab. 4: Výsledky vyrovnání sítě VEVEŘÍ 2	61
Tab. 5: Výsledky vyrovnání sítě VEVEŘÍ	63
Tab. 6: Výsledky vyrovnání sítě AGNES	65

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Interpretace Moleděnského koncepce, upraveno [13].....	14
Obr. 2: Vliv sbíhavosti hladinových ploch na výsledné převýšení; převzato [4].....	16
Obr. 3 Tížnicová odchylka a její složky; upraveno [13].....	23
Obr. 4: Tížnicová odchylka v daném azimutu; upraveno [13]	25
Obr. 5: Schéma astronomické nivelace na geoidu; převzato [4]	28
Obr. 6: Schéma astronomické nivelace na kvazigeoidu; převzato [4].....	29
Obr. 7 Metodika určování astronomických zeměpisných souřadnic; převzato [6]	40
Obr. 8: Určení polohy zenitu pomocí měřených zenitových vzdáleností [6]	41
Obr. 9: Určení polohy zenitu pomocí měřených vodorovných směrů, upraveno [6]	41
Obr. 10: Schéma zapojení systému MAAS – 1; převzato [10].....	43
Obr. 11: Konvexní a obecný obal sítě VEVEŘÍ.....	49
Obr. 12: Konvexní a obecný obal sítě AGNES	50
Obr. 13: Triangulace sítě VEVEŘÍ.....	53
Obr. 14: Triangulace sítě AGNES	54
Obr. 15: Zobrazení sítě VEVEŘÍ 2345 v kontextu sítě VEVEŘÍ	60
Obr. 16: Zobrazení sítě VEVEŘÍ 2 v kontextu sítě VEVEŘÍ	60
Obr. 17: Průběh anomálií výšek v síti VEVEŘÍ.....	62
Obr. 18: Průběh anomálií výšek v síti AGNES	64

SEZNAM ZKRATEK

Bpv – Balt po vyrovnání

ETH – Švýcarský národní technologický institut (*Eidgenössische Technische Hochschule*)

ETRS – Evropský terestrický referenční systém (*European Terrestrial Reference System*)

EUVN – Mezinárodní výšková referenční síť (*European Vertical Reference Network*)

GNSS – Globální navigační satelitní systémy

GPS – Globální družicový polohový systém (*Global Positioning system*)

IAG – Mezinárodní asociace geodézie (*International Association of Geodesy*)

ITRS – Mezinárodní terestrický referenční systém (*International Terrestrial Reference System*)

MAAS-1 – Motorizovaný automatický astronomický systém

MNČ – metoda nejmenších čtverců

WGS – Světový geodetický referenční systém (*World Geodetic System*)

ZGÚ – Základní geodetická úloha

SEZNAM SYMBOLŮ

A	– geodetický azimut
A'	– astronomický azimut
C	– geopotenciální kóta
V	– gravitační potenciál
H	– ortometrická výška
H^*	– normální výška
H_{dyn}	– dynamická výška
H^{Hel}	– Helmertova ortometrická výška
H_Q	– normální Moloděnského výška
K^*	– normální ortometrická korekce
N	– odlehlost geoidu
M	– hmotnost Země
Q	– potenciál odstředivé síly
R	– poloměr náhradní koule
S	– světový hvězdný čas
T	– poruchový potenciál
U	– normální tíhový potenciál
W	– tíhový potenciál
Z	– elipsoidický zenit
Z'	– astronomický zenit
a	– hlavní poloosa elipsoidu
b	– počet bodů na hranici obalu množiny
e'	– druhá excentricita elipsoidu
f	– zploštění elipsoidu
f^*	– tíhové zploštění
g	– tíhové zrychlení
\bar{g}	– střední hodnota tíhového zrychlení
h	– elipsoidická výška
n^e	– normála k elipsoidu
n_b	– počet bodů v rovině
n_T	– počet trjúhelníků
n_h	– počet hran
m	– střední chyba
m'	– poměr odstředivého a gravitačního zrychlení na rovníku
s	– délka spojnice
t	– tečna k tížnici

α	– rektascenze
β	– úhel mezi poledníkem a tížnicovou odchylkou
γ	– normální tíhové zrychlení
$\bar{\gamma}$	– střední hodnota normálního tíhového zrychlení
γ_0	– normální tíhové zrychlení na elipsoidu
γ_a	– normální tíhové zrychlení na rovníku
γ_b	– normální tíhové zrychlení na pólu
Δg_{Bg}	– Bougerova anomálie
Δg_F	– Fayova anomálie
δ	– deklinace
ε	– tížnicová odchylka v azimutu
$\bar{\varepsilon}$	– tížnicová odchylka v azimutu v povrchovém bodě
ε_0	– tížnicová odchylka v azimutu na geoidu
η	– příčná složka tížnicové odchylky
$\bar{\eta}$	– příčná složka tížnicové odchylky v povrchovém bodě
Θ	– tížnicová odchylka
λ	– elipsoidická délka
λ'	– astronomická délka
ξ	– meridiánová složka tížnicové odchylky
$\bar{\xi}$	– meridiánová složka tížnicové odchylky v povrchovém bodě
φ	– elipsoidická šířka
φ'	– astronomická šířka
ς	– anomálie výšky
χ	– pravá chyba
ω	– úhlová rychlost

SEZNAM SYMBOLŮ Z UŽITÉHO VYROVNÁVACÍHO POČTU

\underline{A}	– matice plánu pro zprostředkující měření
\overline{A}	– matice plánu pro podmínková měření
dx	– vektor oprav přibližných hodnot
F_x	– matice parciálních derivací funkcí neznámých
H	– matice korelace veličin
k	– počet nutných měření
k_{or}	– vektor korelátů
l	– vektor měření
\bar{l}	– vektor vyrovnaných hodnot
l'	– vektor rozdílu přibližných a skutečných hodnot měření
\overline{m}_0	– jednotková střední chyba
\overline{m}_x	– střední chyba neznámých
\overline{m}_l	– střední chyba vyrovnaných měření
\overline{m}_f	– střední chyba funkcí neznámých
\underline{N}	– zvykové označení matice $\underline{A}^T P \underline{A}$
\overline{N}	– zvykové označení matice $\overline{A}^T P \overline{A}$
n	– počet měření
P	– matice vah
p	– váha měření
Q_x	– matice váhových koeficientů vyrovnaných neznámých
Q_l	– matice váhových koeficientů vyrovnaných měřených veličin
Q_{ff}	– matice váhových koeficientů funkcí neznámých
Q_λ	– matice původních nekorelovaných hodnot
r	– počet nadbytečných měření
u	– vektor uzávěrů
v	– vektor oprav
x	– vektor neznámých
x_0	– vektor přibližných hodnot neznámých
y	– zvykové označení vektoru $\underline{A}^T P l'$
Ω	– symbolické označení podmínkových rovnic

SEZNAM ELEKTRONICKÝCH PŘÍLOH

Příl. 1 Podmínková vyrovnání

- *AGNES, podmínkové vyrovnání.xls*
- *VEVEŘÍ, podmínkové vyrovnání.xls*
- *VEVEŘÍ 2, podmínkové vyrovnání.xls*
- *VEVEŘÍ 2345, podmínkové vyrovnání.xls*

Příl. 2 Vyrovnání zprostředkujících měření s korelací

- *VEVEŘÍ, vyrovnání s korelací.xls*
- *VEVEŘÍ 2, vyrovnání s korelací.xls*
- *VEVEŘÍ 2345, vyrovnání s korelací.xls*

Příl. 3 Vyrovnání zprostředkujících měření se zanedbáním korelace

- *AGNES, zanedbání korelace.xls*
- *VEVEŘÍ, zanedbání korelace.xls*

Příl. 4 Výpočty Greedyho triangulace

- *GT, AGNES.xls*
- *GT, VEVEŘÍ.xls*
- *GT, VEVEŘÍ 2.xls*
- *GT, VEVEŘÍ 2345.xls*

Příl. 5 Experimentální výpočet

- *VEVEŘÍ, kolaps výpočtu korelovaného řešení.xls*