



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

## CHOVÁNÍ BUBLIN VE SLOUPCI KAPALINY

DESCRIPTION OF BUBBLE BEHAVIOR IN LIQUID COLUMN

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Filip Münster

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.

BRNO 2016



# Zadání bakalářské práce

Ústav:	Energetický ústav
Student:	<b>Filip Münster</b>
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	<b>doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Chování bublin ve sloupci kapaliny

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V přesycené kapalině vystavené nižšímu okolnímu tlaku vznikají bubliny, jejichž chování podléhá základním fyzikálním zákonům a rovnicím (stavová rovnice, druhý Newtonův zákon, atd.) Cílem bakalářské práce je popis chování bubliny s využitím základních rovnic mechaniky, hydromechaniky a termomechaniky a srovnání s pozorováním za pomoci rychlokamery.

### Cíle bakalářské práce:

1. Úvod, formulace problému, definice pojmů
2. Sestavení matematického modelu
3. Návrh experimentu a jeho realizace
4. Srovnání modelu a exp. výsledků

### Seznam literatury:

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. : Fyzika, VUTIUM, 2007

Loth, E. : Particles, Drops and Bubbles: Fluid Dynamics and Numerical Methods. Cambridge University Press, London, 2010

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

---

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Bakalářská práce se zabývá popisem chování bublin v kapalině. V první části jsou uvedeny základní pojmy a síly, které ovlivňují jejich pohyb, tvar a chování. Druhá část se věnuje odvození vztahů pro matematický model pohybu bubliny a jeho realizaci. V poslední části je tento model porovnán s experimentem.

## **ABSTRACT**

This bachelor's thesis describes behavior of bubbles in liquid column. In the first part are introduced basic terms and forces which influence the motion, shape and behavior of the bubble. The second part is devoted to derivation of relations for mathematical model of the bubble motion and the model realization. In the last part the model is compared with experiment.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

bublina, Reynoldsovo číslo, Stokesův zákon, vztah Hadamard-Rybczynski, difuze, konečná rychlost

## **KEYWORDS**

bubble, Reynold's number, Stokes law, Hadamard-Rybczynski equation, diffusion, terminal velocity

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

MÜNSTER, F. Chování bublin ve sloupci kapaliny. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 66 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.

# PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Chování bublin ve sloupci kapaliny vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených na seznamu, který tvoří přílohu této práce.

27. května 2016

.....

Filip Münster

## **PODĚKOVÁNÍ**

Rád bych tímto poděkoval panu Bronislavu Kusému a Ing. Martinu Hudcovi za pomoc při přípravě experimentu a doc. Ing. Janu Jedelskému, Ph.D. za zapůjčení laserové stěny. Především bych chtěl poděkovat doc. Ing. Pavlu Rudolfovi, Ph.D. za cenné připomínky a rady při vypracování této bakalářské práce.



# OBSAH

<b>ÚVOD.....</b>	<b>11</b>
<b>1 ZÁKLADNÍ POJMY A PŘEDPOKLADY .....</b>	<b>12</b>
1.1 POVRCHOVÉ NAPĚTÍ .....	14
1.1.1 <i>Tlak uvnitř bubliny.....</i>	<i>15</i>
<b>2 MATEMATICKÝ POPIS POHYBU BUBLIN.....</b>	<b>16</b>
2.1 PODOBNOSTNÍ ČÍSLA .....	16
2.1.1 <i>Reynoldsovo číslo.....</i>	<i>16</i>
2.1.2 <i>Weberovo číslo.....</i>	<i>17</i>
2.1.3 <i>Bondovo a Mortonovo číslo .....</i>	<i>17</i>
2.2 SÍLY PŮSOBÍCÍ NA BUBLINU .....	18
2.2.1 <i>Vztlková síla .....</i>	<i>19</i>
2.2.2 <i>Odporová síla.....</i>	<i>20</i>
2.2.3 <i>Povrchové síly způsobené zrychlením.....</i>	<i>26</i>
2.2.4 <i>Konečná rychlost.....</i>	<i>27</i>
<b>3 TVARY A TRAJEKTORIE BUBLIN .....</b>	<b>29</b>
<b>4 BUBLINY V PŘESYCENÉM ROZTOKU .....</b>	<b>31</b>
4.1 NUKLEACE BUBLIN .....	31
4.2 ROVNICE RŮSTU BUBLINY .....	32
<b>5 MATEMATICKÝ MODEL POHYBU BUBLINY.....</b>	<b>35</b>
5.1 SÍLY ZAHRNUTÉ V MODELU .....	35
5.2 ODVOZENÍ VZTAHU PRO HMOTNOST BUBLINY .....	36
5.3 ODVOZENÍ VZTAHU PRO MĚNÍCÍ SE POLOMĚR.....	37
5.4 ODVOZENÍ POHYBOVÉ ROVNICE BUBLINY .....	38
5.5 REALIZACE V PROGRAMU MATLAB .....	39
5.6 VÝSTUP MATEMATICKÉHO MODELU .....	40
5.6.1 <i>Počáteční fáze pohybu .....</i>	<i>40</i>
5.6.2 <i>Pohyb z hloubky 10 m .....</i>	<i>41</i>
5.6.3 <i>Porovnání se vztahem Hadamard-Rybczynski.....</i>	<i>41</i>
5.6.4 <i>Změna průměru důsledkem difuze.....</i>	<i>41</i>
<b>6 EXPERIMENT .....</b>	<b>43</b>
6.1 BUBLINY VODÍKU VE VODĚ.....	43
6.1.1 <i>Použitá zařízení.....</i>	<i>43</i>
6.1.2 <i>Průběh experimentu .....</i>	<i>44</i>

6.1.3	<i>Výsledky experimentu</i> .....	44
6.2	BUBLINY CO <sub>2</sub> V PŘESYCENÉ KAPALINĚ .....	48
6.2.1	<i>Použitá zařízení</i> .....	48
6.2.2	<i>Průběh experimentu</i> .....	48
6.2.3	<i>Výsledky experimentu</i> .....	49
6.3	ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ .....	52
<b>7</b>	<b>ZÁVĚR</b> .....	<b>54</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ</b> .....	<b>56</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ</b> .....	<b>58</b>
	<b>SEZNAM PŘÍLOH</b> .....	<b>60</b>

## ÚVOD

Bubliny v kapalině jsou důležitou součástí mnoha přírodních i průmyslových procesů a lidských aktivit. Příkladem může být var kapalin, flotace, fermentace, přesycené kapaliny a mnoho dalších. Flotace se využívá například k úpravě pitné vody, kde se na bubliny vlivem povrchového napětí vážou nečistoty.

Běžně se člověk setkává s přesycenou kapalinou ve formě sycených nápojů, ze kterých se bubliny při vystavení atmosférickému tlaku vylučují. Základem všech aplikací je relativní pohyb mezi bublinou a okolní kapalinou.

Obsahem této práce je matematický popis vzniku a chování bublin, sestavení matematického modelu jejich pohybu a porovnání modelu s experimentem.

# 1 ZÁKLADNÍ POJMY A PŘEDPOKLADY

Aby bylo možné popsat chování bublin, je nutné nejprve definovat základní pojmy. Tato kapitola čerpá ze zdroje [6].

Bublina je definována jako malé těleso ponořené v souvislé fázi, kterou je kapalina. Předpokládá se osamocená bublina, jejíž vliv na okolní kapalinu je zanedbatelný a jednotlivé bubliny mezi sebou neinteragují. Používané veličiny budou odlišeny indexy. Bubliny budou označovány indexem „b“ (např.  $\rho_b$  vnitřní hustota bubliny). Okolní prostředí bude značeno indexem „k“ (např.  $\mu_k$  jako dynamická viskozita kapaliny).

Pro určení velikosti bubliny se užívá průměr ( $d_b$ ) nebo poloměr ( $r_b$ ). Ty souvisí s objemem bubliny ( $V_b$ ), která se předpokládá jako kulová. Vztah mezi těmito veličinami je následující:

$$V_b = \frac{4}{3} \pi r_b^3 \quad [\text{m}^3] \quad (1.1)$$

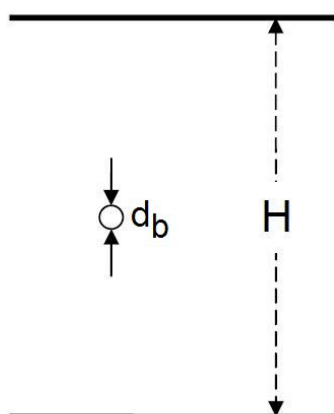
$$d_b \equiv 2 \cdot r_b = \left( \frac{6V_b}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \quad [\text{m}] \quad (1.2)$$

Povrch bubliny  $S_b$ , která má kulový tvar, se vypočte dle tohoto vztahu:

$$S_b = 4\pi r_b^2 \quad [\text{m}^2] \quad (1.3)$$

Základním parametrem prostředí, ve kterém se bublina pohybuje, je hloubka nádoby ( $H$ ). Její velikost je v porovnání s parametrem  $H$  zanedbatelná.

$$d_b/H \rightarrow 0 \quad (1.4)$$



Obr. 1.1 Porovnání rozměrů bubliny vůči rozměru okolí [6]

Hmotnost ( $m_b$ ) a objem bubliny poslouží k definici její hustoty:

$$\rho_b \equiv \frac{m_b}{V_b} \quad [\text{kg.m}^{-3}] \quad (1.5)$$

Pro další výpočty je užitečné definovat poměr hustoty bubliny ku hustotě okolní kapaliny ( $\rho_k$ ) jako relativní hustotu  $\rho^*$ :

$$\rho^* = \frac{\rho_b}{\rho_k} \quad [-] \quad (1.6)$$

Na základě tohoto poměru lze rozlišit částice s vysokou relativní hustotou, pro které platí  $\rho^* \gg 1$  a částice s nízkou relativní hustotou, pro které platí  $\rho^* \ll 1$ . Částice s vysokou relativní hustotou obecně zahrnují kapky a pevné částice v plynu, které padají ve směru tíhové síly, zatímco částice s nízkou relativní hustotou jsou obecně bubliny v kapalině a stoupají proti směru tíhové síly.

Dalším důležitým parametrem je relativní viskozita, definována jako:

$$\mu^* = \frac{\mu_b}{\mu_k}, \quad [-] \quad (1.7)$$

kde  $\mu_b$  je dynamická viskozita bubliny a  $\mu_k$  je dynamická viskozita okolní kapaliny. Relativní viskozita se chová podobně jako relativní hustota – pro pevné částice a kapky v plynu platí  $\rho^* \gg 1$  a  $\mu^* \gg 1$  a pro plynné bubliny v kapalině platí  $\rho^* \ll 1$  a  $\mu^* \ll 1$ .

Pro určení sil je třeba definovat různé rychlosti. Rychlosti v blízkosti povrchu bubliny jsou:

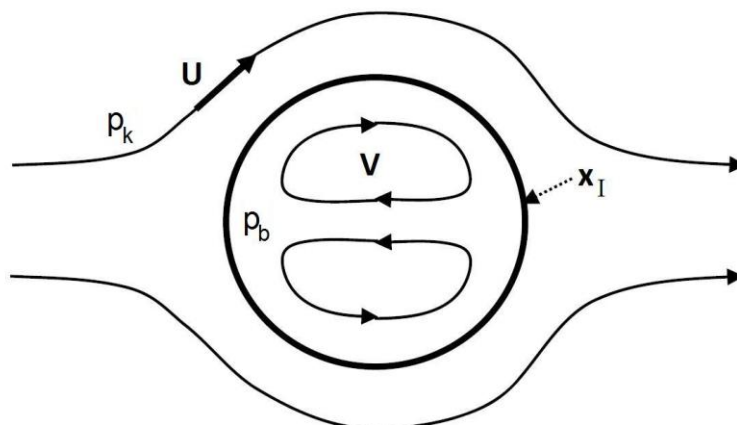
$$\mathbf{U} \equiv \text{rychlost vně bubliny zahrnující změnu} \quad (1.8)$$

v blízkosti povrchu

$$\mathbf{V} \equiv \text{rychlost uvnitř bubliny zahrnující rotaci} \quad (1.9)$$

a recirkulaci

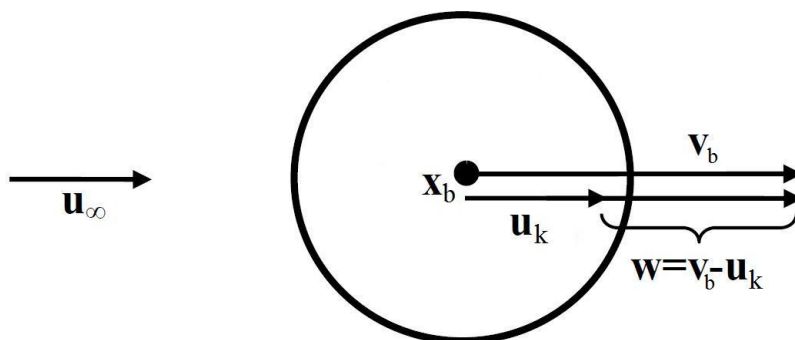
Tyto rychlosti jsou znázorněny na obr. 1.2. Rychlost  $\mathbf{U}$  je definována vně bubliny a má směr proudnice okolo bubliny a zahrnuje tok spojený s jejím pohybem. Naopak rychlost  $\mathbf{V}$  je definována uvnitř bubliny a popisuje veškeré vnitřní pohyby, např. recirkulaci. Dalšími parametry jsou tlaky: Tlak okolní kapaliny v místě bubliny ( $p_k$ ) a tlak uvnitř bubliny ( $p_b$ ).



Obr. 1.2 Schéma rychlosti a tlaku v okolní kapalině ( $U$ ,  $p_k$ ), uvnitř bubliny ( $V$ ,  $p_b$ ) a rozhraní  $x_I$  mezi kapalinou a bublinou. [6]

Pro analýzu pohybu je nutné definovat ještě další rychlosti. Tyto rychlosti, znázorněné na obr. 1.3, jsou vztažené k těžišti bubliny. Rychlost bubliny  $v_b$  se vztahuje k pohybu těžiště  $x_b$ , které se nachází uprostřed bubliny. Dále je také definována rychlost okolní kapaliny v místě těžiště bubliny ( $u_k$ ) a rychlost kapaliny v místě vzdáleném od bubliny  $u_\infty$ . Relativní rychlost bubliny vůči rychlosti kapaliny  $w$  je definována jako rozdíl těchto dvou rychlostí:

$$w = v_b - u_k \quad [\text{m}\cdot\text{s}^{-1}] \quad (1.10)$$



Obr. 1.3 Rychlosti v těžišti bubliny [6]

## 1.1 Povrchové napětí

Dalším důležitým znakem je povrchové napětí ( $\sigma$ ), které může ovlivnit tvar bublin a má vliv na tlak uvnitř bubliny. Kapalina se na rozhraní s jinou látkou vyznačuje jinými vlastnostmi než ve zbytku svého objemu. Toto rozhraní se jeví, jako by bylo potaženo tenkou, napjatou vrstvou. Příčinou vzniku povrchového napětí jsou síly působící mezi molekulami kapaliny. Uvnitř kapaliny je každá molekula ze všech stran obklopena dalšími a jejich přitažlivé mezimolekulární síly ( $F_m$ ) se vyrovnají. Na rozhraní jsou ovšem molekuly z jedné strany obklopeny jinými molekulami.

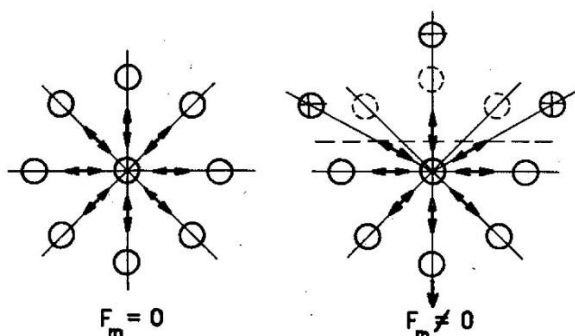
To způsobí, že mezimolekulární síly ve směru kolmém na rozhraní nejsou vyrovnány. Tyto případy jsou znázorněny na obr. 1.4. Mezimolekulární síly působí pouze na velmi malou vzdálenost, a proto se nerovnováha projevuje jen v tenké vrstvě kapaliny na rozhraní, která je jednu až dvě vrstvy molekul široká. Rovnováha sil se dosáhne přemístěním vrstvy na rozhraní, čímž se změní energie. [6][7]

Povrchové napětí  $\sigma$  je definováno jako energie vrstvy molekul kapaliny  $E_{pn}$  na rozhraní s jinou látkou, vztažená na jednotku plochy rozhraní  $S_{pn}$ :

$$\sigma = \frac{E_{pn}}{S_{pn}} \quad [\text{J.m}^{-2} = \text{N.m}^{-1}] \quad (1.11)$$

Druhou definicí povrchového napětí je, že se jedná o výsledný účinek kohezních sil  $F_{pn}$  mezi molekulami kapaliny s jinou látkou, vztažený na jednotku délky rozhraní  $l$ : [7]

$$\sigma = \frac{F_{pn}}{l} \quad [\text{N.m}^{-1}] \quad (1.12)$$



Obr. 1.4 Mezimolekulární síly uvnitř a na povrchu kapaliny [7]

### 1.1.1 Tlak uvnitř bubliny

Povrchové napětí na zakřiveném povrchu bubliny způsobuje zvýšení tlaku uvnitř bubliny. Tato změna je obecně dána Young-Laplaceovou rovnicí a označuje se jako Laplaceův tlak:

$$p_b - p_k = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad [\text{Pa}] \quad (1.13)$$

kde  $r_1$  a  $r_2$  jsou poloměry ve dvou kolmých osách tělesa.

Pro případ kulové bubliny, kdy  $r_1 = r_2$ , pro zvýšení tlaku uvnitř bubliny platí [1]:

$$P_b - P_k = \frac{2\sigma}{R_b} \quad [\text{Pa}] \quad (1.14)$$

## 2 MATEMATICKÝ POPIS POHYBU BUBLIN

Tato kapitola se zabývá charakteristikou podobnostních čísel a popisem sil působících na bublinu.

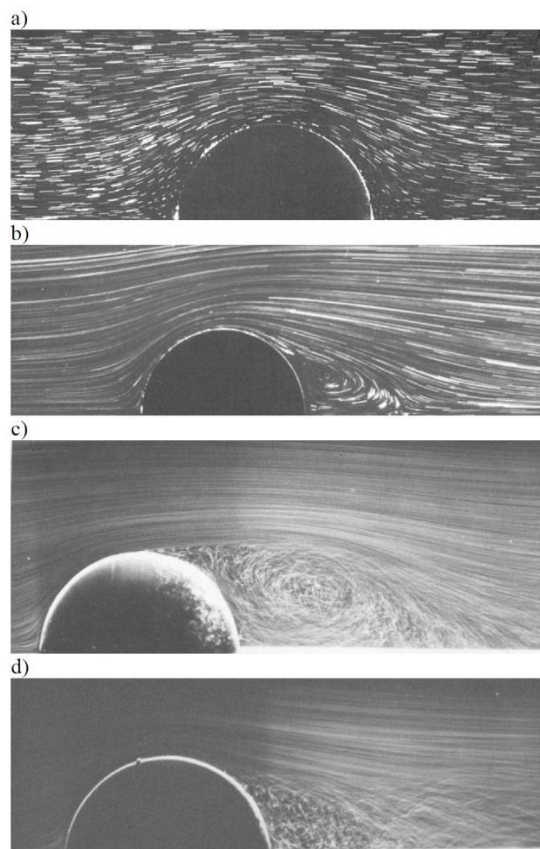
### 2.1 Podobnostní čísla

#### 2.1.1 Reynoldsovo číslo

Reynoldsovo číslo vyjadřuje fyzikální podobnost jevů, které jsou charakteristické setrvačnými a třecími silami od viskozity. Na základě hodnoty  $Re$  lze zjistit režim proudění z hlediska částice, jak je vyobrazeno na obr. 2.1 a určí se vhodná analýza pohybu částice. [6][7]

Dvěma základními režimy proudění je proudění laminární a proudění turbulentní. Přechod mezi těmito režimy je dán kritickým Reynoldsovým číslem  $Re_{krit}$ . Jako jeho hodnota se nejčastěji uvádí  $Re_{krit} = 2\,320$ . Ta ovšem platí pro proudění vody v plně zatopeném potrubí. Hodnota kritického Reynoldsova čísla je pro částice v kapalině odlišná, zpravidla vyšší a závisí na více faktorech. [6]

$$Re_b = \frac{\rho_k |w| d_b}{\mu_k} \quad [-] \quad (2.1)$$



Obr. 2.1 Proudění okolo kulové částice pro různá Reynoldsova čísla [6]



- a) plíživé proudění při  $Re_b = 0,1$ . Proudění je symetrické ve svislém směru a téměř symetrické zleva doprava, bez odtržení proudu (Stokesův režim),
- b) střední proudění při  $Re_b = 56,5$ . Objevuje se odtržení proudu, ale úplav zůstává stabilní, symetrický a laminární,
- c) subkritické proudění při  $Re_b = 15\ 000$ . Dochází k odtržení laminární mezní vrstvy, což vede k turbulentnímu úplavu (Newtonův režim),
- d) superkritické proudění při  $Re_b = 30\ 000$  s turbulizačním drátkem, který je zde umístěn, aby došlo k přechodu mezní vrstvy do turbulentního proudění dříve, než by došlo k oddělení proudu samovolně.

### 2.1.2 Weberovo číslo

Poměr dynamického tlaku k napětí na povrchu je definován Weberovým číslem:

$$We = \frac{\rho_k w^2 d_b}{\sigma} \quad [-] \quad (2.2)$$

Tento parametr velmi dobře koreluje se stupněm deformace bubliny pro velký rozsah Reynoldsova čísla (1 – 10 000):

- $We \ll 1$       bubliny jsou přibližně kulové – poměr poloměrů bubliny ve dvou kolmých osách se blíží 1
- $We \sim 1$       lehké odchylky od kulového tvaru
- $We \gg 1$       velké odchylky od kulového tvaru [6]

### 2.1.3 Bondovo a Mortonovo číslo

Tvar a odpor bublin může být specifikován, pokud je známo Weberovo a Reynoldsovo číslo, která jsou funkcí relativní rychlosti. Nicméně je vhodné uvažovat i deformační parametry, které nezávisí přímo na rychlosti. Toto je možné pouze v případě zvážení podmínky konečné rychlosti (viz kapitola 2.3), takže parametry mohou být založeny na gravitačních proměnných. Konkrétně může být použito Bondovo číslo ( $Bo$ , jinak nazývané Eötvösovo číslo  $Eo$ ) a Mortonovo číslo ( $Mo$ ). Bondovo číslo představuje poměr výsledných gravitačních sil k síle od povrchového napětí:

$$Bo \equiv \frac{g d_b^2 |\rho_b - \rho_k|}{\sigma} \quad [-] \quad (2.3)$$

Gravitační síly nezpůsobují přímo deformaci, ale ovlivňují konečnou rychlost, která určuje deformaci bubliny. Mortonovo číslo je také funkcí rozdílu hustot, ale zahrnuje i závislost na viskozitě okolní fáze.

$$Mo \equiv \frac{g \mu_k^4 |\rho_b - \rho_k|}{\rho_k^2 \sigma^3} \quad [-] \quad (2.4)$$

Mezi těmito čtyřmi parametry je při konečných podmínkách (tj. rychlost bubliny je rovna konečné rychlosti, index „*term*“) následující vztah:

$$\frac{We_{term}^2}{Re_{term}^4} = \frac{Mo}{Bo} \quad [-] \quad (2.5)$$

Konečné Weberovo a Bondovo číslo lze také vyjádřit poměrem vzhledem ke koeficientu odporu  $C_D$  jako:

$$We_{term} = \frac{4Bo}{3C_{D,term}} \quad [-] \quad (2.6)$$

Vyšší Bondova čísla jsou při konečných podmínkách kvalitativně stejné jako vyšší Weberova čísla. Pro tekuté částice v Newtonovském odporovém režimu (konstantní  $C_D$ ) je lineární závislost mezi  $We_{term}$  a  $Bo$ . Nicméně je nutné pamatovat, že tekuté částice, které se nepohybují konečnou rychlostí, musí být charakterizovány  $We$  a  $Re$ . [6]

## 2.2 Síly působící na bublinu

Rovnice popisující pohyb bubliny vycházejí z druhého Newtonova pohybového zákona, který je pro případ bubliny vyjádřený rovnicí (2.7):

$$m_b \mathbf{a}_b = \sum \mathbf{F}, \quad [\text{N}] \quad (2.7)$$

kde  $m_b$  – hmotnost bubliny [kg],  $\mathbf{a}_b$  – zrychlení bubliny [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ],  $\sum \mathbf{F}$  – vektorový součet všech sil působících na bublinu

Pro vyjádření rychlosti a polohy bubliny se využije vztahů (2.8) a (2.9), dle kterých zrychlení je derivací rychlosti podle času a rychlost je derivací polohy dle času: [3]

$$\mathbf{a}_b = \frac{d\mathbf{v}_b}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}_b}{dt^2}, \quad [\text{m}\cdot\text{s}^{-2}] \quad (2.8)$$

$$\mathbf{v}_b = \frac{d\mathbf{x}_b}{dt}, \quad [\text{m}\cdot\text{s}^{-1}] \quad (2.9)$$

kde  $\mathbf{a}_b$  – zrychlení bubliny [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ],  $\mathbf{v}_b$  – rychlost bubliny [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ],  $\mathbf{x}_b$  – poloha bubliny [m],  $t$  – čas [s].

Suma sil působících na bublinu obsahuje hmotnostní sílu ( $\mathbf{F}_{hmotnostní}$ ), která je úměrná hmotnosti částice, povrchovou sílu ( $\mathbf{F}_{povrchová}$ ), která je úměrná velikosti povrchu částice, a kolizní sílu ( $\mathbf{F}_{kolizní}$ ), která zahrnuje působení ostatních částic nebo stěn nádoby, které mohou přijít do kontaktu s částicí.

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_{hmotnostní} + \mathbf{F}_{povrchová} + \mathbf{F}_{kolizní} \quad [\text{N}] \quad (2.10)$$

Mezi hmotnostní síly ( $\mathbf{F}_{\text{hmotnostní}}$ ) patří síla tíhová, setrvačná, odstředivá aj. Zde je ekvivalentní s tíhovou silou ( $\mathbf{F}_g$ ), která působí ve směru tíhového zrychlení ( $\mathbf{g}$ ).

$$\mathbf{F}_{\text{hmotnostní}} \approx \mathbf{F}_g = m_b \mathbf{g} \quad [\text{N}] \quad (2.11)$$

Ostatní hmotnostní síly, jako např. elektromagnetické síly, jsou zanedbatelné. Protože je uvažována izolovaná bublina, kolizní síly ( $\mathbf{F}_{\text{kolizní}}$ ) jsou nulové.

Povrchová síla pro kulovou bublinu se dá rozložit na lineární součet různých nezávislých dynamických sil následovně:

$$\mathbf{F}_{\text{povrchová}} = \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_H + \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_{Br} + \mathbf{F}_{VT} \quad [\text{N}] \quad (2.12)$$

kde jednotlivé síly jsou:

- odporová ( $\mathbf{F}_D$ ), která působí proti relativní rychlosti,
- vztlaková síla ( $\mathbf{F}_L$ ) působící ve směru proti tíhovému zrychlení,
- síla virtuální hmotnosti ( $\mathbf{F}_V$ ), která je způsobena relativním zrychlením bubliny vůči kapalině,
- historická síla ( $\mathbf{F}_H$ ), která se týká nestabilního napětí kolem bubliny,
- napětí kapaliny ( $\mathbf{F}_S$ ) způsobena dynamickým napětím kapaliny mimo bublinu,
- Brownův pohyb ( $\mathbf{F}_{Br}$ ) od jednotlivých molekulárních interakcí,
- termoforéza ( $\mathbf{F}_{VT}$ ), která je důsledkem molekulárních interakcí ve směru teplotního gradientu.

Jelikož povrchovou sílu uvažujeme pro podmínky kontinua, tak termoforéza a Brownův pohyb může být zanedbán. Taktéž může být zanedbán vztlak částice způsobený Magnusovým jevem, protože rotace bubliny se uvažuje nulová.

Výsledné silové působení na bublinu [6]:

$$m_b \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_H + \mathbf{F}_S \quad [\text{N}] \quad (2.13)$$

### 2.2.1 Vztlaková síla

Na těleso ponořené do kapaliny působí tlakové síly ve třech směrech, které jsou na sebe kolmé. Výslednice vodorovných tlakových sil je z obou stran stejně velká, ale opačného smyslu, takže se síly ve vodorovném směru vyruší. Ve svislém směru bude působit na zvolený objem tělesa  $dV$  svislá složka tlakové síly. Její velikost je dána součtem tlakových sil na plošky  $dS_y$ . Na horní část tělesa působí tlaková síla  $d\mathbf{F}_1 = \rho_k \mathbf{g} h_1 dS_y$ , podobně na spodní část působí síla  $d\mathbf{F}_2 = \rho_k \mathbf{g} h_2 dS_y$ . Výslednice tlakové síly je potom:

$$d\mathbf{F}_y = d\mathbf{F}_2 - d\mathbf{F}_1 = \rho_k \mathbf{g} (h_2 - h_1) dS_y = \rho_k \mathbf{g} h d_p S_y = \rho_k \mathbf{g} dV \quad [\text{N}] \quad (2.14)$$

Integrací rovnice (2.14) se dostane výsledná vztlaková síla pro částici (bublínu) ponořenou do kapaliny:

$$\mathbf{F}_L = \rho_k \mathbf{g} V_b \quad [\text{N}] \quad (2.15)$$

Tato síla je známá jako Archimédův zákon, který zní: Na těleso ponořené do kapaliny působí vztlaková síla rovná tíze kapaliny tělesem vytlačené.

Na základě velikostí sil  $\mathbf{F}_L$  a  $\mathbf{F}_g$  mohou obecně nastat tři případy:

$F_L < F_g$	tíha tělesa je větší než vztlaková síla a těleso klesá ke dnu
$F_L = F_g$	tíha tělesa je v rovnováze se vztlakovou silou a těleso se v kapalině vznáší
$F_L > F_g$	tíha tělesa je menší než vztlaková síla a těleso se vznáší směrem k hladině [7]

## 2.2.2 Odporová síla

Odporová síla vzniká z tlakových a viskozních napětí, které působí na povrch bubliny. Tato síla působí proti relativnímu pohybu bubliny, takže vektor  $\mathbf{F}_D$  má opačný směr než vektor rychlosti  $\mathbf{w}$ . Na základě Reynoldsova čísla je možno zjistit režim proudění, jak je znázorněno na obr. 2.1 a určit odpovídající analýzu: [6]

### Plíživé proudění: Stokesův zákon

Při malých rychlostech, kdy  $Re_b \rightarrow 0$ , zůstává proudění plně přímknuté k částici (viz obr. 2.1a). Tento stav se nazývá „plíživé proudění“ a dominance viskozity způsobuje, že smyková napětí působí daleko od povrchu částice. Pro tento stav odvodil Stokes ustálenou odporovou sílu, která působí na nehybnou nerotující částici ( $\mathbf{V} = \mathbf{v} = 0$ ), zanedbávající gravitaci a stlačitelnost kapaliny.

Odporová síla je rozdělena na dvě části – tlakovou a viskózní. Tlaková část odporové síly lze zapsat následovně:

$$F_{tlaková} = 2\pi r_b \mu_k \mathbf{U}_\infty \quad [\text{N}] \quad (2.16)$$

Tato síla se nazývá tlakový odpor. Druhou částí je síla, která se nazývá třecí odpor a je dvojnásobná než tlakový odpor:

$$F_{třecí} = 4\pi r_b \mu_k \mathbf{U}_\infty \quad [\text{N}] \quad (2.17)$$

Celková odporová síla je součtem těchto dvou sil. Tyto síly jsou odvozeny pro částici, která je v klidu. Lze je však zobecnit pro částici, která se pohybuje neměnnou rychlostí  $\mathbf{v}$ .

Když referenčním bodem bude těžiště částice  $x_b$ , rychlosti v těchto vztazích se vyjádří jako relativní rychlost částice  $U_\infty - v_b = -w$  (za předpokladu, že proudění je rovnoměrné, tedy  $u_k = U_\infty$ ).

Celková odporová síla, která se označuje jako Stokesův odpor je tedy dána následujícím vztahem:

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{F}_{tlaková} + \mathbf{F}_{třecí} = -6\pi r_b \mu_k \mathbf{w} = -3\pi d_b \mu_k \mathbf{w} \quad [\text{N}] \quad (2.18)$$

Pro vyjádření odporové síly jako bezrozměrné veličiny se zavádí součinitel odporu  $C_D$ , který se definuje jako poměr celkového odporu ku součinu průřezu ( $A = \pi d_b^2/4$ ) a dynamického tlaku ( $p_{dyn} = \frac{1}{2} \rho_k w^2$ ):

$$C_D \equiv \frac{F_D}{\frac{1}{8} \pi d_b^2 \rho_k w^2} \quad [1] \quad (2.19)$$

Odporovou sílu lze tedy obecně zapsat pomocí součinitele odporu následovně:

$$\mathbf{F}_D = \frac{1}{8} \pi d_b^2 \rho_k w^2 C_D \quad [\text{N}] \quad (2.20)$$

Součinitel odporu pro Stokesův zákon je s využitím rovnic (2.1) a (2.19) následující:

$$C_{D,Stokes} = \frac{3\pi d_b \mu_k w}{\frac{1}{8} \pi \rho_k d_b^2 w^2} = \frac{24}{Re_b} \text{ pro } Re_b \rightarrow 0 \quad [-] \quad (2.21)$$

Jiným způsobem, jak lze charakterizovat odpor, je vyjádřit jej bezrozměrně poměrem odporové síly ku Stokesovu odporu:

$$f \equiv \frac{F_D}{-3\pi d_b \mu_k w} \quad [-] \quad (2.22)$$

Tento poměr se nazývá Stokesův korekční faktor a ve výpočtu odporové síly je zahrnut takto:

$$\mathbf{F}_D = -3\pi d_b \mu_k f \mathbf{w} \quad [\text{N}] \quad (2.23)$$

Z rovnic (2.18) a (2.22) vyplývá, že Stokesův korekční faktor pro Stokesův zákon je roven 1. [6]

### Odpor pro tekuté částice:

Bubliny v kapalině (příp. kapky v plynu) mohou zahrnovat i vnitřní recirkulaci, jak je zachyceno na obr. 2.2 a obr. 2.3. To vede k tomu, že na povrchu se může objevit tečná rychlost, která snižuje odpor. Pokud je rozhraní mezi bublinou a kapalinou čisté (tzn. vliv nečistot je zanedbatelný) a Reynoldsovo číslo pro bublinu se blíží nule ( $Re_b \rightarrow 0$ ), existuje analytické řešení. Předpoklady pro toto řešení jsou:

- konstantní povrchové napětí (platné pro neznečistěné podmínky bez teplotních gradientů)
- zanedbatelná viskozita částice (platí pro bubliny)
- zanedbatelná radiální rychlost (platí při konstantním průměru).

Toto analytické řešení se nazývá vztah Hadamard-Rybczynski a byl oběma nezávisle odvozen v r. 1911.

Dle vztahu Hadamard-Rybczynski se odporová síla vyjádří dle vztahu (2.24):

$$F_D = -6\pi r_b \mu_k w \frac{2 + 3\mu^*}{3 + 3\mu^*} \quad [\text{N}] \quad (2.24)$$

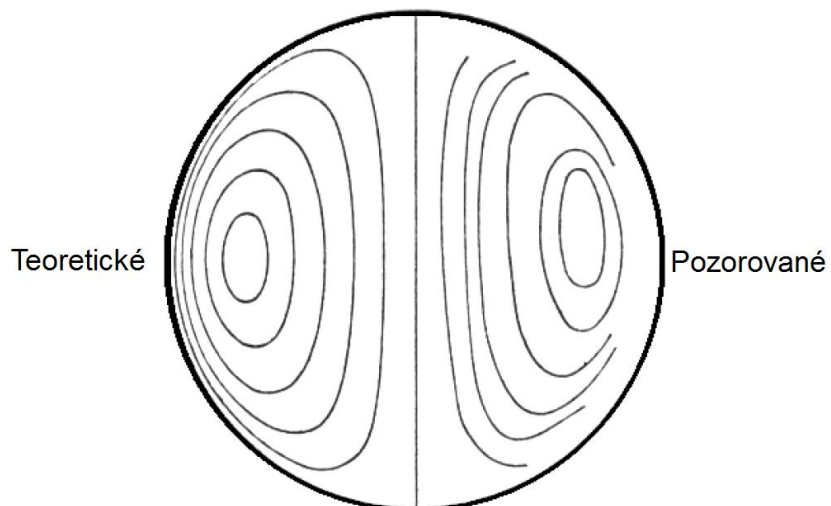
Pokud se definuje Stokesův korekční faktor pro vnitřní cirkulaci ( $f_{\mu^*}$ ) jako poměr odporové síly působící na čistou tekutou kulovou částici (bublinu) ku odporové síle pro pevnou kulovou částici (Stokesův zákon) při  $Re_b \rightarrow 0$ , dostane se:

$$f_{\mu^*} \equiv \frac{F_D(\mu^*, Re_b \rightarrow 0)}{F_D(\mu^* \rightarrow \infty, Re_b \rightarrow 0)} = \frac{2 + 3\mu^*}{3 + 3\mu^*} \quad [-] \quad (2.25)$$

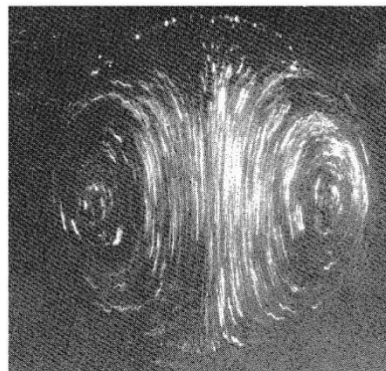
Pro čistou bublinu v kapalině platí, že relativní viskozita je zanedbatelná ( $\mu^* \rightarrow 0$ ). Proto platí:

$$f_{\mu^* \rightarrow 0} = \frac{2}{3} \quad [-] \quad (2.26)$$

Tato skutečnost vede ke zvýšení konečné rychlosti na 1,5 násobek konečné rychlosti pro pevnou částici (nebo bublinu bez vnitřní recirkulace). Nicméně tato změna odporové síly se obvykle pro malé bubliny ve vodě nerealizuje, z důvodu vlivu kontaminantů v systému. [6]



Obr. 2.2 Teoretické a experimentálně pozorované proudnice kapky glycerinu v ricinovém oleji, stav plíživého proudění [6]



Průměr kapky: 1,77 cm  
Rychlost padání: 1,16 cm/s  
Expozice: 0,5 s



Průměr kapky: 1,21 cm  
Rychlost padání: 0,62 cm/s  
Expozice: 1 s

Kapka vody v ricinovém oleji

Obr. 2.3 Vyobrazení vnitřní recirkulace v kapce vody v ricinovém oleji [1]

### Vliv kontaminantů

Stopy povrchově aktivních látek<sup>1</sup> mohou mít na chování kapek a bublin silný vliv. I přes to, že množství nečistot může být velmi malé a nezpůsobí měřitelnou změnu vlastností okolní tekutiny, mohou kontaminanty zamezit vnitřní recirkulaci. To způsobí značný vzrůst odporu a významně sníží celkový přenos tepla a hmoty. Systémy tekutin s vysokým povrchovým napětím, jako plyn s vodou, jsou obzvláště náchylné vůči kontaminantům, především při malých průměrech částic. [1][6]

Pro plně kontaminované podmínky při  $Re_b \rightarrow 0$  dojde k znehybnění rozhraní a recirkulace je eliminována. Nenastane žádné snížení odporu a pro Stokesův korekční faktor bude platit:

$$f_{\mu^*} \approx 1 \quad [-] \quad (2.27)$$

Získat čisté podmínky ve vodě je obtížné, protože koncentrace surfaktantů je obvykle poměrně vysoká. Důvodem je, že mnoho organických látek je dobře rozpustných ve vodě a mají podobný nebo nižší bod varu než voda, a proto jsou těžko odstranitelné. Běžná kohoutková voda je z tohoto pohledu obecně považována za znečištěnou. Vztah mezi čistotou vody a režimem kontaminace je znázorněn v tab. 2.1.

Tab. 2.1 Vztah mezi čistotou vody a režimem kontaminace

Typ vody	Koncentrace surfaktantů (g/l)	$d < 0,7 \text{ mm}$	$0,7 \text{ mm} < d < 5 \text{ mm}$
Kohoutková	$\sim 2 \times 10^{-1}$	Plně kontaminovaná	Plně kontaminovaná
Destilovaná	$\sim 1 \times 10^{-4}$	Plně kontaminovaná	Částečně kontaminovaná
Velmi čistá	$\sim 1 \times 10^{-5}$	Nejsou data	Čistá

Kontaminaci lze částečně snížit destilováním vody, nicméně tímto se neodstraní všechny nečistoty. Další kroky čištění, jako deionizace, reverzní osmóza, ultrafialové světlo, jsou schopny vytvořit velmi čistou vodu. Tímto lze dosáhnout čistých podmínek, ale pouze pro průměry částic 0,7 mm nebo více. [6]

<sup>1</sup>Povrchově aktivní látky (surfaktanty, tenzidy) jsou látky, které mají tendenci se hromadit u mezifázového rozhraní jiných látek. Jedná se typicky o látky s dlouhými molekulami, které mají na jedné straně hydrofilní a na druhé hydrofobní povahu. Příkladem jsou mýdla, soli vyšších mastných kyselin a další látky užívané jako detergenty. [12]



### Koeficient odporu pro vyšší Reynoldsova čísla

Jak již bylo řečeno, Stokesův odpor je vhodný pouze pro plíživé proudění, kdy  $Re_b < 0,1$ . Je to ovšem také jediný režim, pro který lze koeficient odporu vyjádřit analyticky. Pro vyšší  $Re_b$  bylo stanoveno na základě experimentů mnoho empirických nebo poloempirických rovnic pro hodnoty koeficientu odporu. Níže jsou uvedeny některé z nich.

Pro střední hodnoty Reynoldsova čísla ( $0,1 < Re_b < 2\ 000$ ), kdy mezní vrstva zůstává laminární, byly měřením stanoveny následující hodnoty koeficientu odporu:

Putnam (1961) stanovil  $C_D$  jako

$$C_D = \frac{24}{Re_b} + \frac{4}{Re_b^{1/3}} \text{ pro } Re_b < 1000, \quad [-] \quad (2.28)$$

kde první člen je Stokesův odpor a druhým členem je empiricky stanovená korekce pro střední režim. Podobně koeficient odporu stanovil Schiller-Naumann (1933) a jeho hodnoty jsou velmi podobné  $C_D$  stanovenému Putnamem, ale je přesnější a běžněji používaný. [1][6]

$$C_D = \frac{24}{Re_b} (1 + 0,15 Re_b^{0,687}) \text{ pro } Re_b < 1000 \quad [-] \quad (2.29)$$

Tento střední režim se uplatňuje pro bubliny o průměru  $d_b$  v rozmezí 0,7 – 6,5 mm. [9]

Pro obsáhnutí hodnot  $C_D$  i pro vyšší Reynoldsova čísla byl stanoven model Whitem (1991), který je platný i pro subkritický režim:

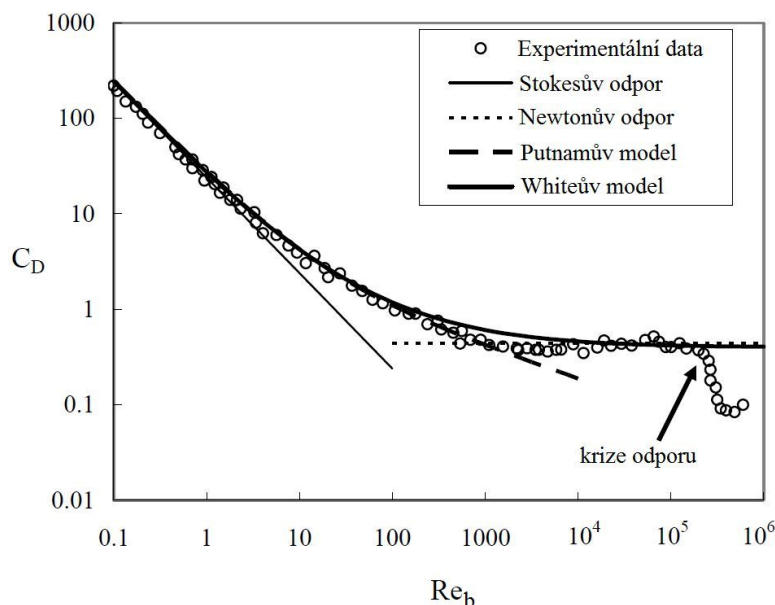
$$C_D = \frac{24}{Re_b} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re_b}} + 0,4 \text{ pro } Re_b < 2 \times 10^5 \quad [-] \quad (2.30)$$

V případě vysokých hodnot Reynoldsova čísla ( $2\ 000 < Re_b < 300\ 000$ ) stanovil Newton koeficient odporu jako konstantní:

$$C_D \approx 0,40 - 0,45 \text{ pro } 2\ 000 < Re_b < 300\ 000 \quad [-] \quad (2.31)$$

V superkritickém režimu ( $Re_b > 300\ 000$ ) se projevuje rapidní pokles koeficientu odporu. Tento jev se nazývá krize odporu.

Závislost koeficientu odporu dle různých modelů na Reynoldsově čísle je zobrazena na obr. 2.4. [1][6]



Obr. 2.4 Závislost koeficientu odporu dle různých modelů na Reynoldsově čísle [6]

### 2.2.3 Povrchové síly způsobené zrychlením

Při pohybu částice v kapalině vznikají v důsledku jejich zrychlení tři typy sil: síla přidané hmotnosti, síla napětí kapaliny a historická síla. [6]

#### Síla přidané (virtuální) hmotnosti

Síla přidané hmotnosti  $F_V$  se zvyšuje, když zrychlení částice je jiné než zrychlení okolní kapaliny, tzn. relativní zrychlení je nenulové ( $d\mathbf{w}/dt \neq 0$ ). Toto relativní zrychlení vyvolá další sílu, protože část okolní kapaliny, která je v blízkosti částice, musí být unášena spolu s částicí se stejným zrychlením. To se děje proto, že skrz povrch částice nemůže procházet hmota, a z toho důvodu je okolní kapalina nucena pohybovat se spolu s částicí. Tato část hmoty okolní kapaliny je označována jako přidaná hmotnost, nebo virtuální hmotnost ( $m_V$ ). Pro pevnou kouli je přidaná hmotnost spojena s hmotností vytlačené kapaliny, kde se definuje součinitel virtuální hmotnosti  $c_V$ , následovně:

$$m_V = c_V m_{k,b} \quad [\text{kg}] \quad (2.32)$$

Síla, potřebná pro zrychlení této přidané hmotnosti při relativním zrychlení částice, je definována jako síla přidané hmotnosti, která může být zapsána takto:

$$\mathbf{F}_V = -m_V \frac{d\mathbf{w}}{dt} = c_V \rho_k V_b \left( \frac{d\mathbf{u}_k}{dt} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \quad [\text{N}] \quad (2.33)$$

Hodnota součinitele virtuální hmotnosti  $c_v$  se obvykle uvažuje  $\frac{1}{2}$ . Pokud zrychlení okolní kapaliny je nulové, vztah pro sílu virtuální hmotnosti pro částici je dán vztahem (2.34): [6]

$$\mathbf{F}_v = -\frac{1}{2}\rho_k V_b \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad [\text{N}] \quad (2.34)$$

## 2.2.4 Konečná rychlost

Jakmile během pohybu bubliny dojde ke stavu, že všechny síly působící na bublinu jsou v rovnováze, začne se pohybovat konstantní rychlostí. Tato rychlost se nazývá konečná rychlost ( $v_t$ ). Konečná rychlost samostatné bubliny je základním parametrem pro systémy pracující s proudy bublin a je nezávislá na počátečních podmínkách. [9][10]

Z hlediska silové rovnováhy musí platit:

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_H + \mathbf{F}_S = 0 \quad (2.35)$$

Síly virtuální hmotnosti ( $\mathbf{F}_v$ ), historická ( $\mathbf{F}_H$ ) a napětí kapaliny ( $\mathbf{F}_S$ ) jsou nulové, jelikož jsou tyto síly způsobeny relativním zrychlením částice vůči kapalině, které je v tomto případě nulové. Rovnice (2.35) se zjednoduší na rovnici (2.36): [6]

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_L = 0 \quad (2.36)$$

## Vyjádření hodnoty konečné rychlosti

Dosazením rovnic (2.11), (2.15) a (2.20) do rovnice 2.36 se dostane rovnice (2.37):

$$m_b \mathbf{g} + \frac{1}{8} \pi d_b^2 \rho_k v_t^2 C_{D,term} + \rho_k \mathbf{g} V_b = 0, \quad (2.38)$$

$$-m_b \mathbf{g} - \frac{1}{8} \pi d_b^2 \rho_k v_t^2 C_{D,term} + \rho_k \mathbf{g} V_b = 0, \quad (2.39)$$

kde  $C_{D,term}$  je součinitel odporu pro konečnou rychlost. Pomocí rovnic (1.1), (1.2) a (1.5) se rovnice (2.39) upraví na tvar (2.40) a vyjádří se konečná rychlost  $v_t$ :

$$-\rho_b \frac{1}{6} \pi d_b^3 g - \frac{1}{8} \pi d_b^2 \rho_k v_t^2 C_{D,term} + \rho_k g \frac{1}{6} \pi d_b^3 = 0 \quad (2.40)$$

$$v_t = \sqrt{\frac{4 |\rho_k - \rho_b| g d_b}{3 \rho_k C_{D,term}}} \quad [\text{m}\cdot\text{s}^{-1}] \quad (2.41)$$

$$v_t = \sqrt{\frac{4 |\rho_k - \rho_b| g d_b}{3 \rho_k C_{D,term}}} \quad [\text{m.s}^{-1}] \quad (2.42)$$

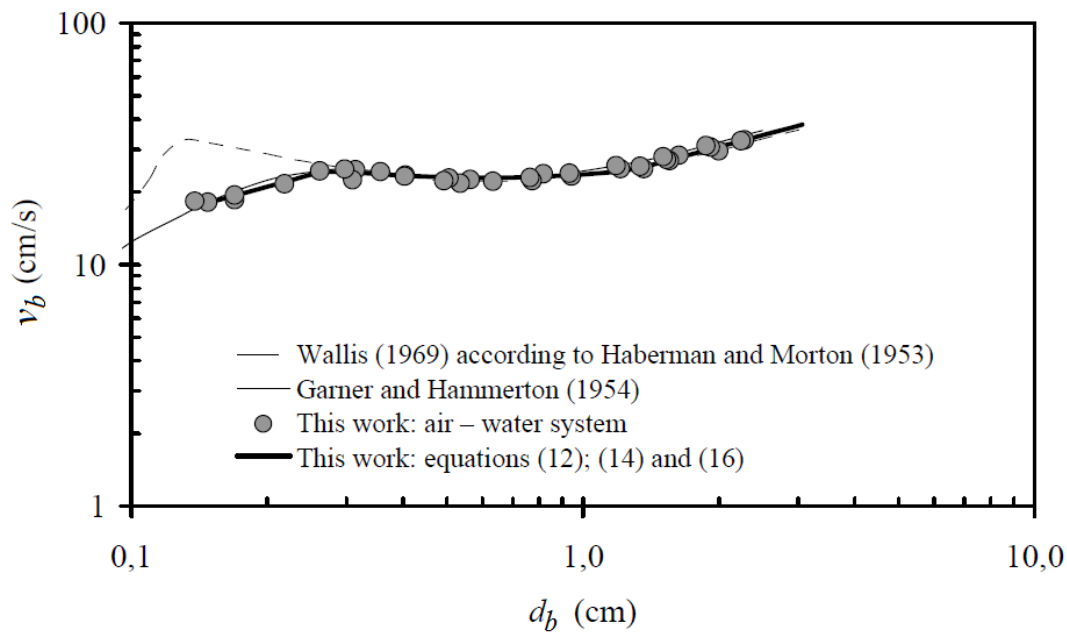
Pro Stokesův odpor, kdy je součinitel odporu  $C_D$  závislý na rychlosti částice, je vztah pro konečnou rychlost bubliny po dosažení rovnice (2.1) a (2.21) tento:

$$v_{t,Stokes} = \frac{(\rho_k - \rho_b) d_b^2 g}{18 \mu_k} \quad [\text{m.s}^{-1}] \quad (2.43)$$

Pokud se bublina chová jako tekutá koule, její rychlost se zvýší dle vztahu Hadamard-Rybczynski o polovinu. Vztah pro tuto konečnou rychlost je následující:

$$v_{t,HR} = \frac{(\rho_k - \rho_b) d_b^2 g}{12 \mu_k} \quad [\text{m.s}^{-1}] \quad (2.44)$$

Na obr. 2.5 je znázorněna závislost konečné rychlosti na průměru bubliny. Rovnice jednotlivých křivek v obrázku jsou uvedeny v [11].

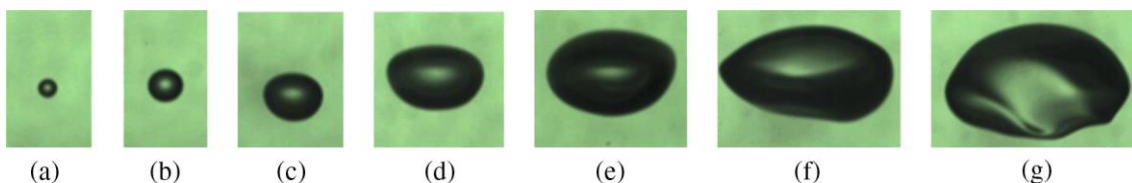


Obr. 2.5 Závislost konečné rychlosti na průměru bubliny. [11]

### 3 TVARY A TRAJEKTORIE BUBLIN

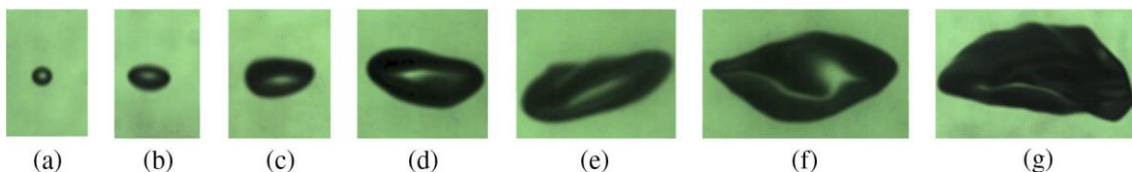
Tvar bubliny, trajektorie a konečná rychlost jsou na sobě závislé a navzájem se ovlivňují. Pokud je průměr bublin dostatečně malý, zůstávají kulové a stoupají vzhůru po přímce. Pokud je jejich průměr větší, začnou se deformovat do tvarů elipsoidu, zploštělého elipsoidu až do nepravidelného tvaru podobného víčku s kmitajícím povrchem. Jejich trajektorie se z přímé změny na klikatou nebo spirálovitou. Ve vodném roztoku glycerinu je tvar bubliny, její trajektorie a rychlost stabilní do určitého jejího průměru. Pro bublinu pohybující se ve vodě je tvar ovlivňován především setrvačnými silami a povrchovým napětím, zatímco vliv viskózních sil může být zanedbán.

Tvar bubliny a poměr stran je také velmi ovlivněn průměrem trysky ( $D_{tr}$ ), ze které je vypouštěna. Když je průměr trysky menší než bublina, její deformace je větší a povrch více osciluje, což vede k menšímu poměru stran a vyšší konečné rychlosti. Naopak pokud je bublina menší než tryska, není natolik rozrušena a její deformace a oscilace povrchu je poměrně malá. Její tvar je potom jednoduchý a zůstává stabilní. Na obr. 3.1 a 3.2 jsou zobrazeny bubliny ve vodě, které byly vypuštěny z velké resp. malé trysky. Obr. 3.3 ukazuje bubliny v prostředí vodného roztoku glycerolu. Jejich tvar se mění z kulovitého do elipsoidu až do kulového víčka a tvar zůstává stabilní bez oscilace povrchu. [5]



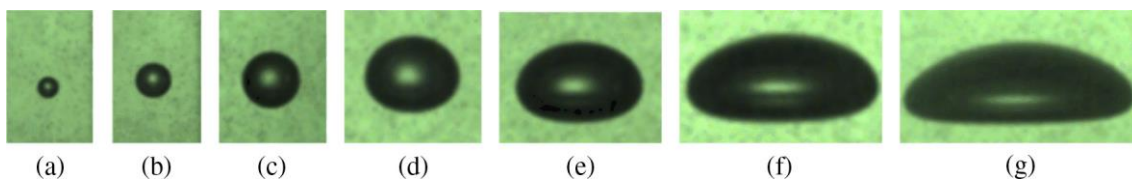
Obr. 3.1 Tvary bublin ve vodě, průměr trysky  $D_{tr} = 9,9$  mm.

(a)  $d_b = 0,83$  mm; (b)  $d_b = 1,51$  mm; (c)  $d_b = 3,10$  mm; (d)  $d_b = 4,67$  mm; (e)  $d_b = 5,93$  mm; (f)  $d_b = 7,42$  mm; (g)  $d_b = 8,93$  mm. [5]



Obr. 3.2 Tvary bublin ve vodě, průměr trysky menší než bublina.

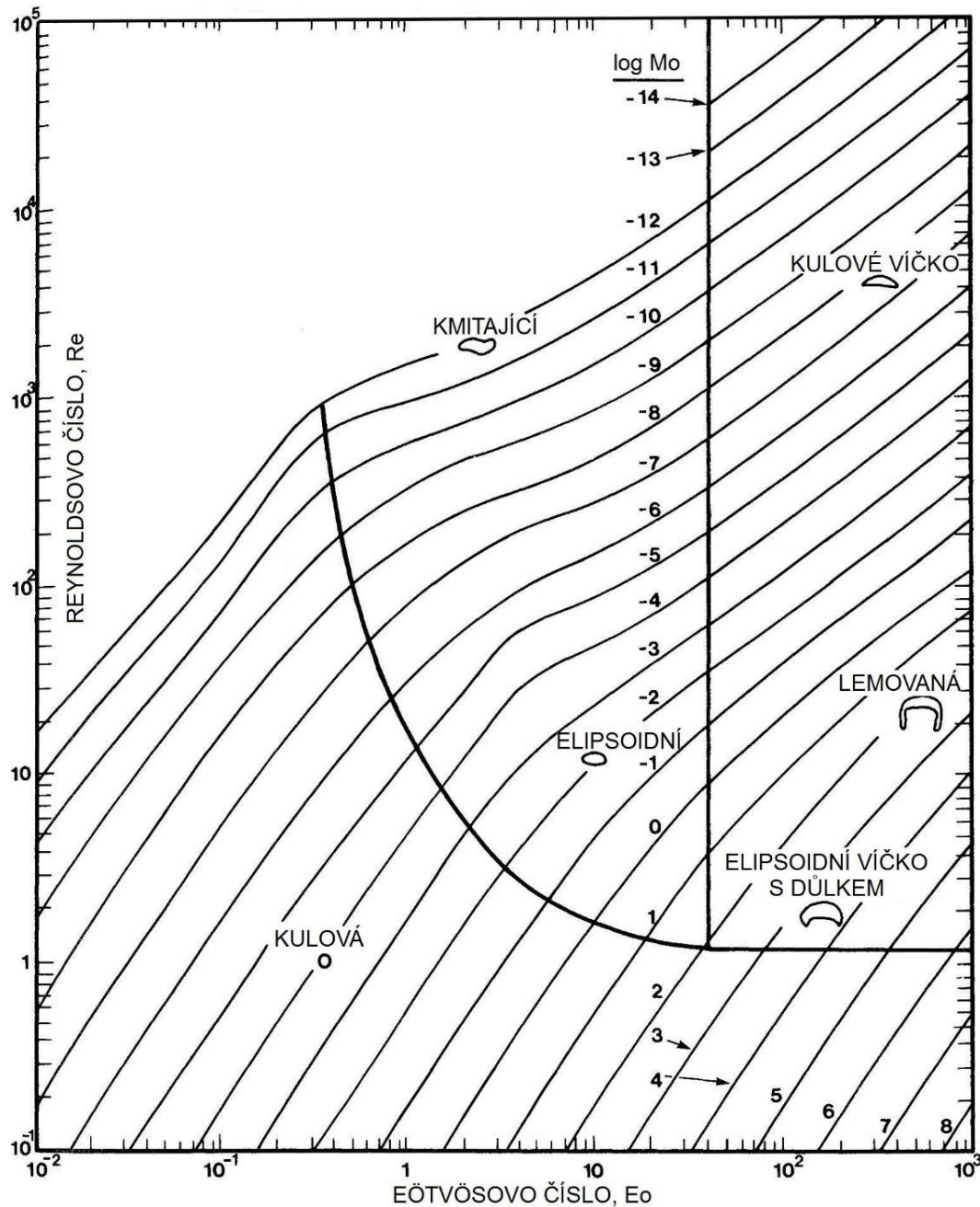
(a)  $D_{tr} = 0,6$  mm,  $d_b = 0,83$  mm; (b)  $D_{tr} = 0,6$  mm,  $d_b = 1,58$  mm; (c)  $D_{tr} = 1,0$  mm,  $d_b = 3,02$  mm; (d)  $D_{tr} = 1,0$  mm,  $d_b = 4,73$  mm; (e)  $D_{tr} = 1,0$  mm,  $d_b = 5,93$  mm; (f)  $D_{tr} = 4,3$  mm,  $d_b = 7,46$  mm; (g)  $D_{tr} = 4,3$  mm,  $d_b = 9,00$  mm. [5]



Obr. 3.3 Tvary bublin ve vodném roztoku glycerolu

(a)  $D_{tr} = 0,6$  mm,  $d_b = 0,86$  mm; (b)  $D_{tr} = 0,6$  mm,  $d_b = 1,51$  mm; (c)  $D_{tr} = 1,0$  mm,  $d_b = 2,88$  mm; (d)  $D_{tr} = 1,0$  mm,  $d_b = 4,76$  mm; (e)  $D_{tr} = 1,0$  mm,  $d_b = 6,03$  mm; (f)  $D_{tr} = 4,3$  mm,  $d_b = 7,52$  mm; (g)  $D_{tr} = 4,3$  mm,  $d_b = 9,61$  mm. [5]

Pro rozdělení pohybujících se bublin dle tvaru je možné použít diagramu. Na obr. 3.4 je diagram znázorňující souvislost mezi Eötvösovým, Mortonovým a Reynoldsovým číslem a tvarem bublin. [1]



Obr. 3.4 Tvary bublin pohybujících se v kapalině [1]

## 4 BUBLINY V PŘESYČENÉM ROZTOKU

Koncentrace  $c$  plynu rozpuštěného v kapalném roztoku při teplotě  $T$  je popsána Henryho zákonem. Tato koncentrace je úměrná parciálnímu tlaku  $p$  tohoto plynu nad kapalinou.

$$c = k_H p \quad [\text{mol}\cdot\text{m}^{-3}] \quad (4.1)$$

Člen  $k_H$  se nazývá Henryho konstanta a je charakteristická pro každou dvojici plyn-kapalina. Se zvyšující se teplotou klesá. Pokud je koncentrace  $c_0$  roztoku plynu v kapalině při tlaku  $p_0$  a teplotě  $T_0$  v termodynamické rovnováze a tento roztok se přivede do nižšího tlaku  $p_s$  a/nebo vyšší teploty  $T_s$ , stane se tento roztok přesyceným. Potom platí rovnováha  $c_s = k_H(T_s)p_s$  při nových podmínkách. Nadbytek rozpuštěného plynu může být popsán pomocí stupně přesycení  $\zeta$ , který je definován:

$$\zeta = \frac{c_0}{c_s} - 1 \quad [-] \quad (4.2)$$

Pro případ přesycení musí platit  $\zeta > 0$ .

Když je roztok přesycený, musí přebytečný plyn z roztoku uniknout, aby opět nastala rovnováha ( $\zeta = 0$ ). V klidné kapalině může toto být zdlouhavý proces, který zahrnuje difuzi skrz volný povrch a tvoření bublinek plynu, které stoupají vzhůru a praskají na povrchu. Příkladem může být sklenice šampaňského, pro kterou přibližně platí  $\zeta \approx 5$  (pro  $c_s$  definované při tlaku  $p_s = 101 \text{ kPa}$ ). Objem 0,1 l takového šampaňského obsahuje přebytek přibližně 0,6 l plynného  $\text{CO}_2$ , které sklenici opustí. Kapalinu opustí ve formě bublin pouze přibližně pětina přebytečného plynu. Zbylá část kapalinu opustí skrz volný povrch.

Hodnota stupně přesycení je u nealkoholických nápojů sycených  $\text{CO}_2$  přibližně rovna dvěma ( $\zeta \approx 2$ ). [2][4]

### 4.1 Nukleace bublin

Aby došlo k samovolné nukleaci bublin při pokojové teplotě, musel by stupeň přesycení být velmi vysoký ( $\zeta > 1000$ ). Růst bublin při nižším stupni přesycení je podmíněn existencí zárodků nukleace, které mají poloměr vyšší nebo rovný kritické hodnotě:

$$R_c = \frac{2\sigma}{p_k \zeta} \quad [\text{m}] \quad (4.3)$$

Koncentrace na povrchu bubliny je dána vztahem (4.4):

$$c_b = k_H \left( p_k + \frac{2\sigma}{R_b} \right), \quad [\text{mol}\cdot\text{m}^{-3}] \quad (4.4)$$

kde člen  $2\sigma/R_b$  značí Laplaceův tlak způsobený zakřiveným rozhraním (viz kapitola 1.2.1). Malé zárodky se rozpustí rychle, protože koncentrace na jejich povrchu je velká ( $c_b > c_0$ ). U velkých bublin je tomu naopak. Dojde k difuzi plynu z kapaliny do bubliny a ta začne růst.

Velikost bubliny, při které se odtrhne ode dna, je definována tzv. Fritzovým poloměrem. K odtržení dojde ve chvíli, kdy se dostanou do rovnováhy síla vztlaková a síla povrchového napětí:

$$R_{Fritz} = \left( \frac{3\sigma R_{pit}}{2\rho g} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad [\text{m}] \quad (4.5)$$

kde  $R_{pit}$  je poloměr důlku, ve kterém bublina roste, a je dán strukturou povrchu materiálu. Zárodky nukleace mohou být suspendované částice, trhliny v nádobě, nebo volné malé bubliny. [2]

## 4.2 Rovnice růstu bubliny

Po určité době od vzniku přesyceného stavu se vytvoří bublina, která začne nevratně růst. Změna poloměru bubliny v čase se dá vyjádřit rovnicí. Níže je uvedeno odvození této rovnice.

Počáteční koncentrace  $c_0$  vyjadřuje koncentraci v nekonečně velké vzdálenosti od bubliny. Tlak uvnitř bubliny lze zapsat následovně:

$$p_b = p_k + \frac{2\sigma}{R_b} \quad [\text{Pa}] \quad (4.6)$$

Koncentrace na povrchu bubliny  $c_b$  je rovna koncentraci nasyceného roztoku plynu při dané teplotě a tlaku. Užitím Henryho zákona se dostane vztah:

$$\frac{c_b}{c_0} = \frac{p_b}{p_k} \quad (4.7)$$

Dosazením vztahu (5.6) do (5.7) se získá:

$$\frac{c_b}{c_0} = 1 + \frac{2\sigma}{p_k R_b} \quad (4.8)$$



Tento vztah lze přepsat dosazením kritického poloměru (4.3) do tvaru:

$$\frac{c_b}{c_0} = 1 + \zeta \frac{R_c}{R_b} \quad (4.9)$$

S využitím vztahů (5.1) a (5.9) se vyjádří rozdíl mezi koncentrací roztoku  $c_s$  a koncentrací v nekonečně velké vzdálenosti od bubliny  $c_0$ , který se chová jako hnací síla růstu bubliny, takto:

$$c_s - c_b = (c_s - c_0) \left(1 - \frac{R_c}{R_b}\right) \quad (4.10)$$

Za předpokladu, že plyn uvnitř bubliny je ideální, lze za využití vztahu (4.6) vyjádřit počet molekul  $N$  v bublině:

$$N = \frac{4\pi R_b^3}{3kT} \left(p_k + \frac{2\sigma}{R}\right), \quad [-] \quad (4.11)$$

kde  $k$  je Boltzmannova konstanta. Rovnice rovnováhy pro počet molekul plynu v bublině vyžaduje, že

$$\frac{dN}{dt} = -4\pi R_b^2 j_R, \quad (4.12)$$

kde pravá strana představuje difuzní tok molekul rozpuštěného plynu směrem k povrchu bubliny. Člen  $j_R$  představuje hustotu difuzního toku a je vyjádřen rovnicí (4.13):

$$j_R = -\frac{D}{R_b} (c_s - c_b), \quad (4.13)$$

kde  $D$  je difuzní koeficient molekul plynu v tekutém rozpouštědle. Typická hodnota  $D = 2 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

Rozpustnost plynu je definována jako bezrozměrná hodnota  $s$  následovně:

$$s \equiv \frac{kT c_0}{p_k}, \quad [-] \quad (4.14)$$

kde  $T [K]$  je termodynamická teplota.

Přepsáním rovnice rovnováhy (4.12) pomocí vztahů (4.2), (4.10), (4.11) a (4.13) se získá rovnice růstu bubliny:

$$\dot{R} = Ds\zeta \left(1 - \frac{R_c}{R_b}\right) \frac{1}{R_b} \left(\frac{1}{1 + \frac{R_\sigma}{R_b}}\right), \quad (4.15)$$

kde  $\dot{R} \equiv dR/dt$  a  $R_\sigma$  je charakteristický poloměr bubliny, definovaný jako:

$$R_\sigma \equiv \frac{4}{3} \frac{\sigma}{p_k} \quad [\text{m}] \quad (4.16)$$

V souladu s (4.15) a protože  $R_b > R_c$ , platí, že  $\dot{R} > 0$ . To koresponduje s monotónním růstem poloměru bubliny v čase. [2]

## 5 MATEMATICKÝ MODEL POHYBU BUBLINY

Matematický model je vytvořen za následujících předpokladů:

- bublina má kulový tvar
- stoupá svisle vzhůru
- nerotuje
- izolovaná od ostatních bublin
- pohyb není ovlivněn stěnami nádoby

### 5.1 Síly zahrnuté v modelu

V modelu jsou zahrnuty následující síly: síla vztlaková  $F_L$ , síla odporová  $F_D$ , síla virtuální hmotnosti  $F_V$  a síla tíhová  $F_g$ . Tyto síly jsou zmíněny již v kapitole 2.2.

Jako odporová síla v tomto modelu je použitý Stokesův odpor, který je vhodný pro malé bubliny ( $d_b < 0,7 \text{ mm}$ ). Bubliny těchto rozměrů budou zkoumány v kapitole 6.

Pro přehlednost jsou vztahy pro tyto síly uvedeny ještě jednou:

**Síla vztlaková:**

$$F_L = \frac{4}{3} \pi \rho_k g R_b^3, \quad [\text{N}] \quad (5.1)$$

kde  $\rho_k$  [ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ] – hustota kapaliny,  $g$  [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ] – tíhové zrychlení,  $R_b$  [m] – poloměr bubliny.

**Síla tíhová:**

$$F_g = m_b g, \quad [\text{N}] \quad (5.2)$$

kde  $m_b$  [kg] – hmotnost bubliny.

**Síla odporová:**

$$F_D = 6\pi\mu R_b v_b, \quad [\text{N}] \quad (5.3)$$

kde  $\mu$  [Pa.s] – dynamická viskozita kapaliny, ve které se bublina pohybuje,  $v_b$  [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ] – rychlost bubliny.

**Síla virtuální hmotnosti**

$$F_V = \frac{1}{2} \rho_k \frac{4}{3} \pi R_b^3 a_b, \quad [\text{N}] \quad (5.4)$$

kde  $a_b$  [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ] – zrychlení bubliny.

Výsledná síla působící na bublinu je dána součtem těchto sil:

$$F_{celk} = F_L - F_D - F_g - F_{\nabla} \quad [\text{N}] \quad (5.5)$$

## 5.2 Odvození vztahu pro hmotnost bubliny

Hmotnost bubliny  $m_b$  se za předpokladu nulové difuze vyjádří za pomoci hustoty a objemu bubliny na počátku pohybu v hloubce  $H$ .

$$m_b = \rho_{b0} V_{b0}, \quad [\text{kg}] \quad (5.6)$$

kde  $\rho_{b0}$  – počáteční hustota bubliny,  $V_{b0}$  – počáteční objem bubliny.

Jelikož se předpokládá, že bublina má tvar koule, její hmotnosti lze zapsat vztahem (1.10):

$$m_b = \rho_{b0} \frac{4}{3} \pi R_{b0}^3, \quad [\text{kg}] \quad (5.7)$$

kde  $R_{b0}$  [m] je počáteční poloměr bubliny. Jedná se o počáteční hodnoty, protože se v průběhu pohybu mění.

Počáteční hustota bubliny  $\rho_{b0}$  se stanoví ze stavové rovnice ideálního plynu následovně:

$$\rho_{b0} = \frac{p_{b0}}{rT} \quad [\text{kg.m}^{-3}] \quad (5.8)$$

Člen  $r$  [ $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ] je měrná plynová konstanta plynu v bublině,  $T$  [K] je termodynamická teplota plynu v bublině. Počáteční tlak  $p_{b0}$  [Pa] v bublině je dán součtem tlaku hydrostatického v místě vzniku bubliny, tlaku působícího na otevřenou hladinu kapaliny a Laplaceova tlaku.

$$p_{b0} = H\rho_k g + p_{atm} + \frac{2\sigma}{R_{b0}} \quad [\text{Pa}] \quad (5.9)$$

$H$  [m] – hloubka pod hladinou, ve které bublina vznikla,  $\rho_k$  [ $\text{kg.m}^{-3}$ ] – hustota okolní kapaliny,  $p_{atm}$  [Pa] – atmosférický tlak,  $\sigma$  [ $\text{N.m}^{-1}$ ] – povrchové napětí na rozhraní mezi plynem v bublině a okolní kapalinou.

Výsledný vztah pro počáteční hustotu bubliny je po dosazení rovnice (5.9) do rovnice (5.8) následující:

$$\rho_{b0} = \frac{H\rho_k g + p_{atm} + \frac{2\sigma}{R_{b0}}}{rT} \quad [\text{kg.m}^{-3}] \quad (5.10)$$

Hmotnost bubliny je tedy dána vztahem (5.11):

$$m_b = \frac{H\rho_k g + p_{atm} + \frac{2\sigma}{R_{b0}}}{rT} \frac{4}{3} \pi R_{b0}^3 \quad [\text{kg}] \quad (5.11)$$

### 5.3 Odvození vztahu pro měnící se poloměr

Hmotnost bubliny zůstává po dobu pohybu konstantní, zatímco její hustota se mění a poloměr zvětšuje, obojí z důvodu snižujícího se hydrostatického tlaku.

$$m_b = \rho_b(x) \frac{4}{3} \pi R_b^3(x), \quad [\text{kg}] \quad (5.12)$$

kde  $\rho_b(x)$  [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ] – hustota plynu v bublině jako funkce polohy,  $R_b(x)$  [m] – poloměr bubliny jako funkce polohy.

Vztah pro  $\rho_b(x)$  se vyjádří na základě vztahu (5.10) pro počáteční hustotu bubliny:

$$\rho_b(x) = \frac{h(x)\rho_k g}{rT} + \frac{p_{atm}}{rT} + \frac{2\sigma}{rTR_b(x)}, \quad [\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}] \quad (5.13)$$

$$h(x) = H - x, \quad [\text{m}] \quad (5.14)$$

kde  $x$  – dráha bubliny [m],  $h(x)$  – hloubka, ve které se bublina nachází v závislosti na dráze [m].

Dosazením rovnic (5.12) a (5.13) do rovnice (5.12) se dostane následující vztah:

$$m_b = \left( \frac{H\rho_k g}{rT} - \frac{x\rho_k g}{rT} + \frac{p_{atm}}{rT} + \frac{2\sigma}{rTR_b(x)} \right) \frac{4}{3} \pi R_b^3(x) \quad [\text{kg}] \quad (5.15)$$

Roznásobením, následným vykrácením a vytknutím hledaného poloměru se získá následující vztah pro hmotnost bubliny:

$$m_b = R_b^3(x) \left( \frac{H\rho_k g}{rT} \frac{4}{3} \pi + p_{atm} \frac{4}{3} \pi - \frac{\rho_k g}{rT} \frac{4}{3} \pi x \right) + R_b^2(x) \frac{8\sigma\pi}{3rT} \quad [\text{kg}] \quad (5.16)$$

Pro lepší přehlednost se provede substituce konstantních členů:

$$A = \frac{H\rho_k g}{rT} \frac{4}{3} \pi \quad (5.17a)$$

$$B = p_{atm} \frac{4}{3} \pi \quad (5.17b)$$

$$C = \frac{\rho_k g}{rT} \frac{4}{3} \pi \quad (5.17c)$$

$$D = \frac{8\sigma\pi}{3rT} \quad (5.17d)$$

Převedením všech členů na levou stranu se dostane obecná kubická rovnice, jejímž řešením je hledaný poloměr bubliny  $R_b(x)$  [m]:

$$R_b^3(A + B - Cx) + R_b^2 D - m_b = 0 \quad (5.18)$$

Jelikož se jedná o obecnou kubickou rovnici, lze ji řešit buďto za pomoci Cardanových vzorců nebo pomocí výpočetního programu. Výsledný vztah pro  $R_b(x)$  získaný programem Matlab je následující:

$$R_b = \left( \frac{m_b}{-2Cx + 2A + 2B} - \frac{1}{27} \frac{D^3}{(-Cx + A + B)^3} + \sqrt{\left( \frac{m_b}{-2Cx + 2A + 2B} - \frac{1}{27} \frac{D^3}{(-Cx + A + B)^3} \right)^2 - \frac{1}{729} \frac{D^6}{(-Cx + A + B)^6}} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{D}{-3Cx + 3A + 3B} + \frac{1}{9} \frac{D^2}{\left( \frac{m_b}{-2Cx + 2A + 2B} - \frac{1}{27} \frac{D^3}{(-Cx + A + B)^3} + \sqrt{\left( \frac{m_b}{-2Cx + 2A + 2B} - \frac{1}{27} \frac{D^3}{(-Cx + A + B)^3} \right)^2 - \frac{1}{729} \frac{D^6}{(-Cx + A + B)^6}} \right)^{\frac{1}{3}} (-Cx + A + B)^2} \quad [\text{m}] \quad (5.19)$$

## 5.4 Odvození pohybové rovnice bubliny

Z druhého Newtonova zákona a rovnic (2.8) a (2.9) se získá diferenciální rovnice (5.20):

$$\frac{dv_b}{dt} = \frac{d^2 x_b}{dt^2} = \frac{F_{celk}}{m_b}, \quad (5.20)$$

kde  $v_b$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] je rychlost bubliny a  $x_b$  [m] je dráha bubliny.

Dosazením jednotlivých sil a vztahu pro hmotnost bubliny (5.16) do rovnice (5.20) a následným vykrácením se dostane následující diferenciální rovnice:

$$\frac{dv_b}{dt} = \frac{\rho_k g}{\rho_{b0} R_{b0}^3} R_b^3 - \frac{9}{2} \frac{\mu}{\rho_{b0} R_{b0}^3} R_b v_b - g - \frac{1}{2} \frac{\rho_k}{\rho_{b0} R_{b0}^3} R_b^3 a_b \quad (5.21)$$

Tuto rovnici lze za užití vztahů (2.8) a (2.9) přepsat do tvaru:

$$\frac{d^2 x_b}{dt^2} = \frac{\frac{\rho_k g}{\rho_{b0} R_{b0}^3} R_b^3 - \frac{9}{2} \frac{\mu}{\rho_{b0} R_{b0}^3} R_b \frac{dx_b}{dt} - g}{1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_k}{\rho_{b0} R_{b0}^3} R_b^3} \quad (5.22)$$

Rovnice (5.22) je obecná diferenciální rovnice druhého řádu, jejímž řešením se získá poloha bubliny v závislosti na čase. Aplikováním rovnic (2.8) a (2.9) na řešení se dostane průběh rychlosti a zrychlení bubliny.

Tato rovnice není řešitelná analyticky. Je nutné přistoupit k řešení některou numerickou metodou.

## 5.5 Realizace v programu Matlab

Řešení a celkový výstup modelu je vytvořen v programu Matlab. Diferenciální rovnice je řešena pomocí funkce „ode45“. Ta je založena na explicitní Runge-Kuttově metodě s proměnným krokem, která využívá metodu 4. a 5. řádu pro odhad chyby a úpravu velikosti výpočetního kroku.

Základními vstupními parametry do modelu jsou:

- počáteční průměr bubliny
- počáteční hloubka
- interval řešení
- časový krok řešení
- tolerance pro funkci ode45

Časový krok řešení a tolerance pro funkci ode45 jsou parametry, které ovlivňují přesnost a stabilitu řešení. Obě hodnoty je nutné pro každý průměr bubliny odladit, aby řešení bylo stabilní a zároveň časová náročnost výpočtu nebyla příliš velká.

Dalšími vstupními veličinami jsou fyzikální parametry. Potřebné fyzikální parametry pro tento model jsou uvedeny v tab. 5.1. Hodnoty jsou čerpané z [4] a [8].

Tab. 5.1 Fyzikální parametry

Název parametru	Typická hodnota	Jednotka
teplota	293,15	K
atmosférický tlak	101 325	Pa
hustota kapaliny	voda: 998,2	kg.m <sup>-3</sup>
tíhové zrychlení	9,81	m.s <sup>-2</sup>
povrchové napětí	voda-vzduch: 0,073	N.m <sup>-1</sup>
měrná plynová konstanta	vzduch: 287,041 vodík: 4121,735 CO <sub>2</sub> :188,965	J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
dynamická viskozita kapaliny	voda: 993,4×10 <sup>-6</sup>	Pa.s
Pro přesycenou kapalinu:		
rozpuštěnost plynu v kapalině	CO <sub>2</sub> ve vodě: 7,07×10 <sup>-4</sup>	-
stupeň přesycení	2	-
difuzní koeficient	2×10 <sup>-9</sup>	m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>

V programu Matlab byl vytvořen skript, jehož výstupem je po zadání výše uvedených parametrů pět matic s hodnotami: čas [s], poloha [m], rychlost [m.s<sup>-1</sup>], zrychlení [m.s<sup>-2</sup>] a poloměr bubliny [m]. Tyto hodnoty mohou být zpracovány libovolným způsobem.

## 5.6 Výstup matematického modelu

Výstupem modelu jsou grafy polohy, rychlosti, zrychlení a poloměru bubliny v závislosti na čase. V této části budou ukázány některé zajímavé výsledky. Fyzikální parametry jsou shodné s tabulkou 5.1.

Maximální hodnoty polohy, rychlosti, zrychlení, poloměru a podobnostních čísel  $We$ ,  $Re$  a  $Bo$  jsou zapsány přímo v grafech.

### 5.6.1 Počáteční fáze pohybu

Tab. 5.2 Vstupní parametry 1

počáteční průměr bubliny [mm]:	počáteční hloubka [m]:	interval řešení [s]:	časový krok řešení [s]:	tolerance pro funkci ode45 [-]:
0,5	1	0 – 0,1	1×10 <sup>-4</sup>	1×10 <sup>-6</sup>

V grafech (v příloze 1) lze vidět, že se bublina zpočátku pohybuje s poměrně velkým zrychlením, které zároveň velmi rychle klesá, a konečné rychlosti dosáhne již



za 0,05 s. Bublina za dobu 0,1 s urazí 0,013 m a její poloměr se v řádu mikrometrů nezmění.

Čas dosažení konečné rychlosti je závislý na velikosti bubliny. Čím je počáteční průměr bubliny větší, tím dříve je konečné rychlosti dosaženo.

### 5.6.2 Pohyb z hloubky 10 m

Tab. 5.3 Vstupní parametry 2

počáteční průměr bubliny [mm]:	počáteční hloubka [m]:	interval řešení [s]:	časový krok řešení [s]:	tolerance pro funkci ode45 [-]:
0,5	10	0 – 62	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-6}$

Z grafů (v příloze 2) lze vidět, jaký vliv na rychlost má měnící se poloměr bubliny v důsledku snižujícího se hydrostatického tlaku s klesající hloubkou. I přesto, že konečná rychlost bubliny o průměru 0,5 mm je  $0,135 \text{ m.s}^{-1}$ , rychlost bubliny vlivem rostoucího průměru stále stoupá. Ta na konci pohybu činí  $0,211 \text{ m.s}^{-1}$  a průměr bubliny se zvětší o 0,126 mm.

### 5.6.3 Porovnání se vztahem Hadamard-Rybczynski

Tab. 5.4 Vstupní parametry 3

počáteční průměr bubliny [mm]:	počáteční hloubka [m]:	interval řešení [s]:	časový krok řešení [s]:	tolerance pro funkci ode45 [-]:
0,5	1	0 – 4,8	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-6}$

Grafy průběhů rychlosti, polohy a průměru bubliny, které jsou uvedeny v příloze 3, ukazují rozdíl hodnot při užití Stokesova odporu a odporu dle vztahu Hadamard-Rybczynski, pro který je Stokesův korekční faktor  $f = \frac{2}{3}$ . To má za následek (jak je vysvětleno v kapitole 2) zvýšení rychlosti a konečné rychlosti na 1,5násobek.

### 5.6.4 Změna průměru důsledkem difuze

Tab. 5.5 Vstupní parametry 4

počáteční průměr bubliny [mm]:	počáteční hloubka [m]:	interval řešení [s]:	časový krok řešení [s]:	tolerance pro funkci ode45 [-]:
0,5	viz tab. 5.7		$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-6}$

V případě přesycené kapaliny roste průměr bubliny nejen kvůli snižujícímu se hydrostatickému tlaku, ale i vlivem difuze rozpuštěného plynu do bubliny. Tato změna průměru je dána rovnicí (5.15). Vlivem difuze plynu do bubliny se zvyšuje i hmotnost bubliny. Pro řešení jsou nutné další tři parametry, uvedené v tab. 5.6.

Tab. 5.6 Vstupní parametry pro kapalinu přesycenou CO<sub>2</sub>

rozpustnost CO <sub>2</sub> ve vodě [-]:	stupeň přesycení [-]:	difuzní koeficient [m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]:
$7,07 \times 10^{-4}$	5	$2 \times 10^{-9}$

Změna průměru vlivem difuze je velmi malá a výrazněji se projeví až při vysokých hodnotách stupně nasycení a delších časech. V tab. 5.7 jsou uvedeny hodnoty změny poloměru vlivem difuze pro výše zmíněné podmínky v závislosti na počáteční hloubce a čase pohybu.

Tab. 5.7 Změna průměru bubliny ( $D_{b0} = 0,5 \text{ mm}$ ) vlivem difuze

Počáteční hloubka [m]:	Doba pohybu [s]:	Změna průměru vlivem difuze [ $\mu\text{m}$ ]:	Celková změna průměru [ $\mu\text{m}$ ]:
0,5	3,6	$1,02 \times 10^{-1}$	8,10
1	7,2	$1,99 \times 10^{-1}$	15,96
2	14,0	$3,83 \times 10^{-1}$	31,00
4	26,8	$7,19 \times 10^{-1}$	58,80
6	38,7	1,02	84,12
8	50,2	1,31	107,49
10	61,1	1,58	129,22

## 6 EXPERIMENT

Model pohybu bubliny bylo třeba ověřit experimentem. Ten se skládal ze dvou částí. V první části byly zkoumány bubliny vodíku ve vodě a v druhé části bubliny  $\text{CO}_2$  tvořené difuzí v přesycené kapalině. Fotodokumentace experimentu je uvedena v příloze 4, ukázka snímků z vysokorychlostní kamery je v příloze 5.

### 6.1 Bubliny vodíku ve vodě

Cílem první části experimentu bylo ověřit model pro bublinu, která se pohybuje kapalinou bez difuze. Základním problémem bylo vymyslet způsob vytvoření bublin tak, aby byly přesně definované počáteční podmínky. Jinými slovy, aby bublina začínala svůj pohyb s nulovou rychlostí. Kdyby byla bublina vypouštěna například z injekční stříkačky, její počáteční rychlost by nulová nebyla. To kvůli impulsu, který by byl dodán pohybem pístu injekční stříkačky.

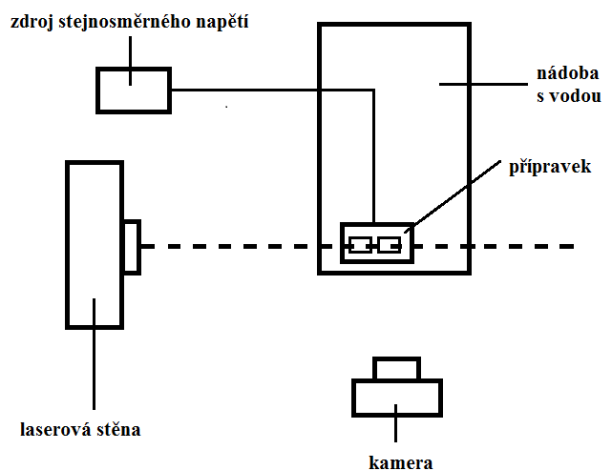
Bubliny byly tvořeny za pomoci elektrolýzy, která probíhala mezi dvěma měděnými elektrodami. Byly sledovány bubliny vodíku  $\text{H}_2$ , které se tvořily na záporné elektrodě.

#### 6.1.1 Použitá zařízení

Při experimentu byla použita tato zařízení:

- nádoba s kohoutkovou vodou
- přípravek na generování bublin
- zdroj stejnosměrného napětí
- laserová stěna
- vysokorychlostní kamera

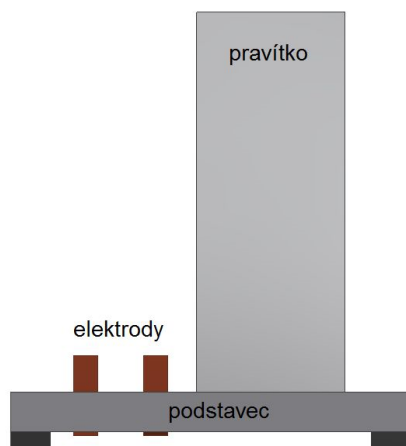
Na obr. 6.1 je zakresleno schéma experimentu.



Obr. 6.1 Schéma experimentu 1

#### Přípravek na generování bublin

Přípravek dle návrhu zkonstruoval pan Bronislav Kusý. Skládá se z podstavce, elektrod, pravítka a elektrických vodičů, které jsou připojeny na elektrody. Nákres přípravku je na obr. 6.2.



Obr. 6.2 Schéma přípravku na generování bublin

### 6.1.2 Průběh experimentu

Generátor bublin byl ponořený ve vodě a napájen stejnosměrným napětím. Za pomoci laserové stěny byla prosvícena rovina v prostoru, kde probíhala tvorba bublin. Výkon laseru byl nastaven na 2 W a zdroj stejnosměrného napětí dodával 2 V. Bubliny byly zaznamenávány vysokorychlostní kamerou, která snímala obraz rychlostí pohybující se okolo 257 snímků/s. Výstupem z kamery jsou snímky o rozlišení 2048×1088 px. Na obr. 6.3 je celá situace zachycena. Další fotografie experimentu jsou v příloze 4.



Obr. 6.3 Fotografie experimentu 1

### 6.1.3 Výsledky experimentu

Z nasnímaných bublin byly vybrány a analyzovány ty, u kterých byla zřetelně vidět jejich počáteční poloha. Bohužel nebylo možné analyzovat pohyb bublin na každém snímku, jelikož při daném rozlišení a frekvenci snímání se poloha bubliny mezi dvěma po sobě jdoucími snímky změní o méně než jeden pixel. Z tohoto důvodu byl analyzován každý desátý snímek. Důsledkem těchto okolností je fakt, že fáze pohybu bubliny před dosažením konečné rychlosti nemohla být dostatečně podrobně

analyzována. Z výsledků experimentu lze proto vyčíst především konečnou rychlost bubliny.

Nejobtížnější fází zkoumání bylo správně stanovit velikost bubliny. Ze snímků nelze s jistotou zjistit kontury bubliny. Vzhledem k rozlišení snímků 0,12 mm/px způsobí změna průměru jako vstupního parametru do modelu o pouhý jeden pixel významnou změnu průběhů zkoumaných veličin. Výsledky jsou proto zkreslené.

Hodnoty jsou aplikovány na výpočtový model, který počítá se Stokesovým odporem. Model s odporem dle vztahu Hadamard-Rybczynski není použit, jelikož použitou kapalinou byla kohoutková voda, ve které je dle tab. 2.1 pro dané podmínky zamezena vnitřní recirkulace v bublině.

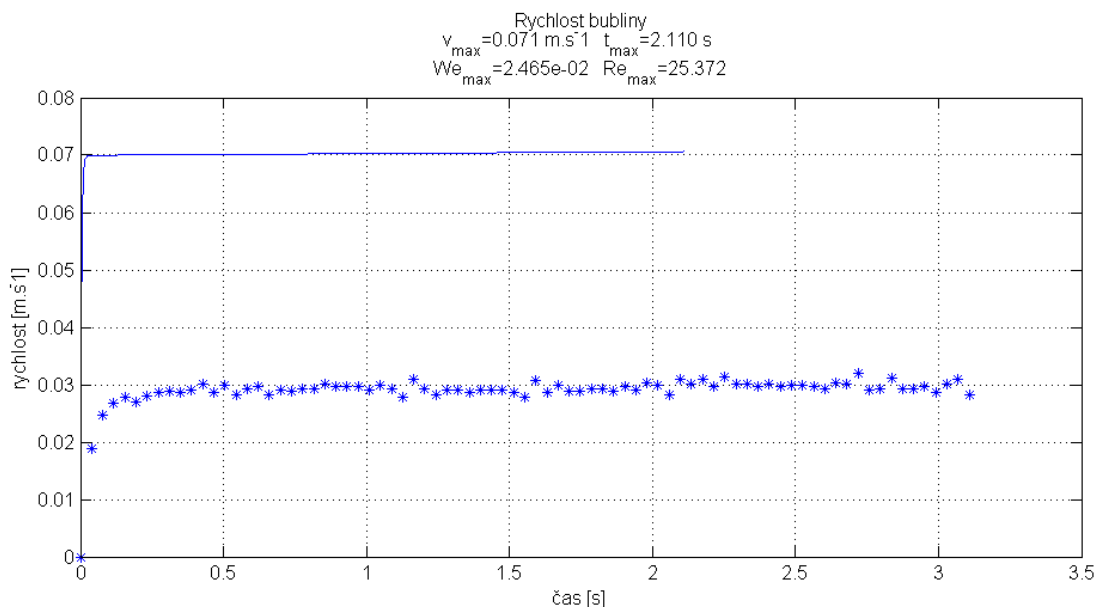
### Bublina 1

Fyzikální parametry jsou stejné jako v tab. 5.1. Parametry bubliny jsou uvedeny v tab. 6.1.

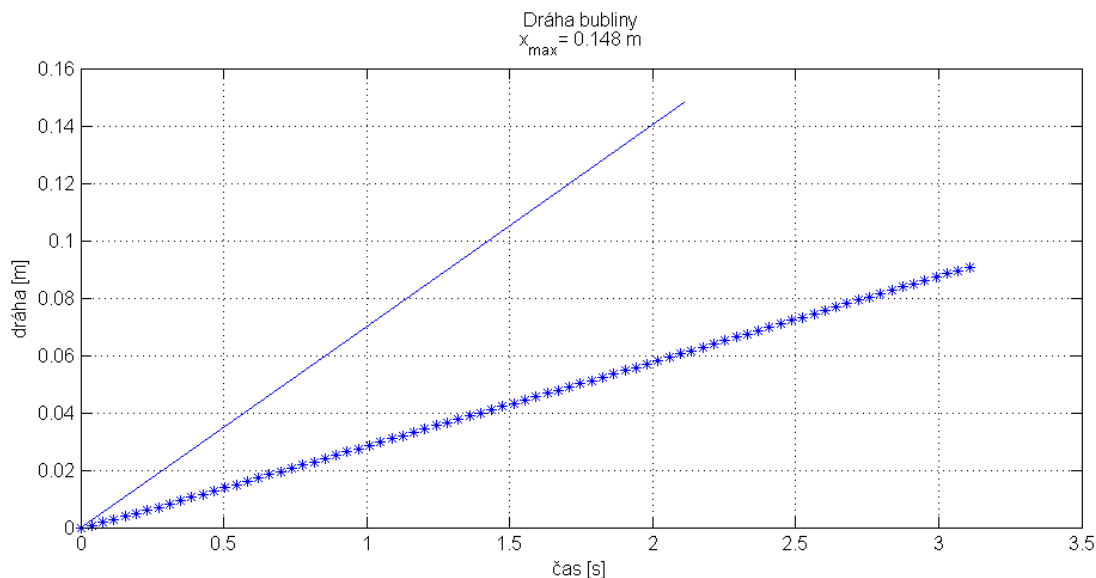
Tab. 6.1 Parametry bubliny 1

počáteční průměr bubliny [mm]:	počáteční hloubka [mm]:	rozlišení snímků [mm/px]:	snímková frekvence kamery [s <sup>-1</sup> ]:	počet analyzovaných snímků:
0,36	148	0,120	257,467	81

Průběhy rychlosti a polohy bubliny jsou na obr. 6.4 a 6.5. V tab. 6.2 jsou zapsány rozdíly mezi výpočtovým modelem a experimentem.



Obr. 6.4 Průběh rychlosti bubliny 1  
 Plná čára – výpočtový model, hvězdičky – naměřená data.



Obr. 6.5 Průběh polohy bubliny 1  
Plná čára – výpočtový model, hvězdičky – naměřená data.

Tab. 6.2 Rozdíly mezi teoretickými a naměřenými hodnotami pro bublinu 1

	Teoretické	Naměřené
Konečná rychlost [ $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ ]:	70,7	29,2
Čas dosažení konečné rychlosti [s]:	0,03	0,15
Doba pohybu k hladině [s]:	2,1	3,1
Konečný průměr bubliny [mm]:	0,361	–
Upravený průměr <sup>2</sup> [mm]:	0,23	–

## Bublina 2

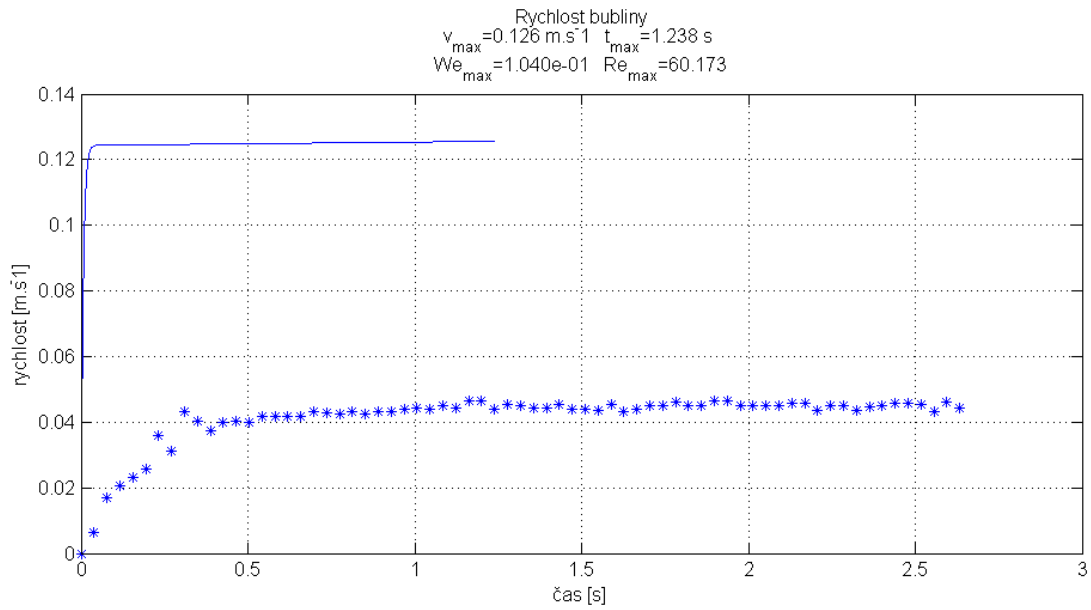
Pro ověření výsledků byla analyzována ještě jedna bublina generovaná elektrolýzou. Fyzikální parametry jsou opět stejné jako v tab. 5.1. Parametry bubliny jsou uvedeny v tab. 6.3.

Tab. 6.3 Parametry bubliny 2

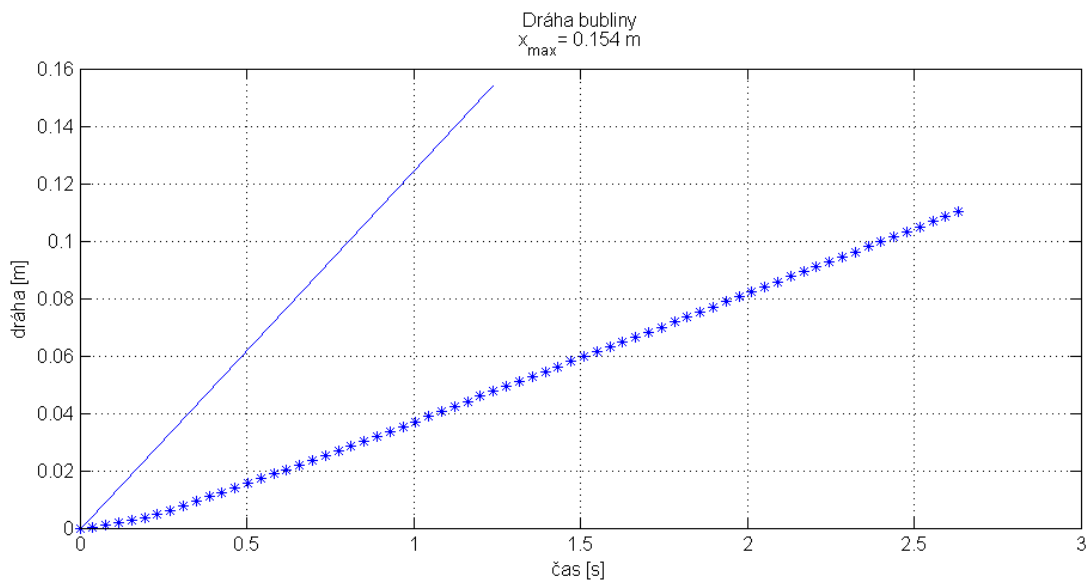
počáteční průměr bubliny [mm]:	počáteční hloubka [mm]:	rozlišení snímků [mm/px]:	snímková frekvence kamery [ $\text{s}^{-1}$ ]:	počet analyzovaných snímků:
0,48	154	0,120	258,198	69

Průběhy rychlosti a polohy bubliny 2 jsou vyobrazeny na obr. 6.6 a 6.7. Rozdíly mezi výpočtovým modelem a experimentem jsou zaznačeny v tab. 6.4.

<sup>2</sup> Upravený průměr značí průměr bubliny, pro který je dle výpočtového modelu konečná rychlost stejná jako naměřená.



Obr. 6.6 Průběh rychlosti bubliny 2  
 Plná čára – výpočtový model, hvězdičky – naměřená data.



Obr. 6.7 Průběh polohy bubliny 2  
 Plná čára – výpočtový model, hvězdičky – naměřená data.

Tab. 6.4 Rozdíly mezi teoretickými a naměřenými hodnotami pro bublinu 2

	Teoretické	Naměřené
Konečná rychlost [ $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ ]:	125,6	44,0
Čas dosažení konečné rychlosti [s]:	0,05	0,3
Doba pohybu k hladině [s]:	1,24	2,63
Konečný průměr bubliny [mm]:	0,482	–
Upravený průměr [mm]:	0,28	–

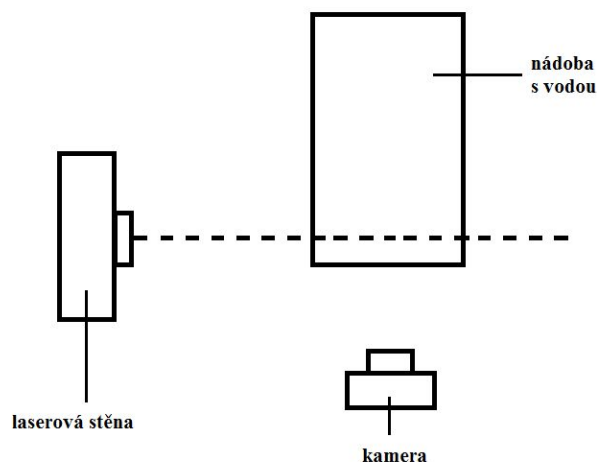
## 6.2 Bubliny CO<sub>2</sub> v přesycené kapalině

V druhé části experimentu byly zkoumány bubliny oxidu uhličitého tvořené difuzí z přesycené kapaliny. Jako kapalina byla použita sycená pitná voda. Stupeň přesycení nebylo možné přesně změřit. Jeho hodnota byla proto zvolena  $\zeta = 2$  (viz kapitola 4).

### 6.2.1 Použitá zařízení

Použitá zařízení byla stejná jako v první části experimentu. Jediným rozdílem je, že bubliny nejsou generovány pomocí elektrolýzy, ale byly vylučovány na dně nádoby vlivem přesycení.

Na obr. 6.1 je zakresleno schéma druhého experimentu.

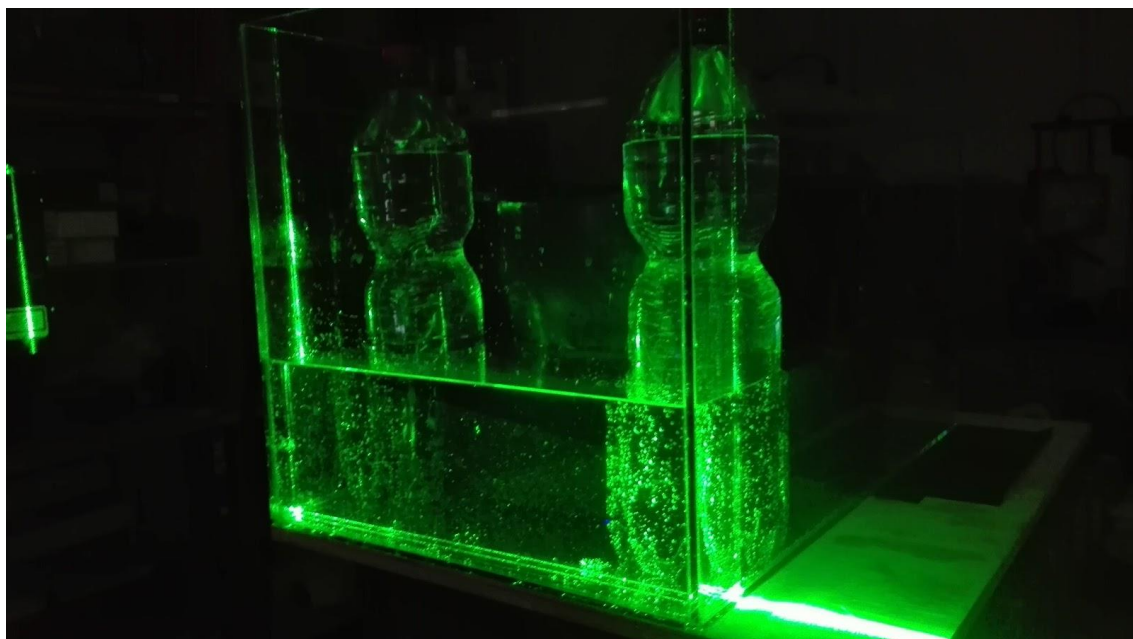


Obr. 6.8 Schéma experimentu 2

### 6.2.2 Průběh experimentu

Do nádoby bylo nalito 9 l sycené vody a umístěny PET lahve a kbelík s vodou pro zvýšení hladiny. Bubliny se tvořily na náhodných místech. Laserová stěna byla proto namířena vždy do roviny, kde se nacházela bublina požadovaných rozměrů ( $D_b \approx 0,5$  mm). Jakmile se bublina uvolnila ode dna a vystoupala k hladině, byl do vody ponořen metr, aby bylo možné zjistit rozlišení (mm/px) v této rovině. Experiment je zachycen na obr. 6.2.





Obr. 6.9 Fotografie experimentu 2

### 6.2.3 Výsledky experimentu

Stejně jako v případě bublin tvořených elektrolýzou nebylo možné analyzovat změnu jejich polohy mezi dvěma po sobě jdoucími snímky. Analyzován byl proto opět každý desátý snímek. Stejně tak nebylo možné přesně stanovit velikost bublin.

Hodnoty jsou aplikovány na výpočtový model, který pracuje se Stokesovým odporem a změnou poloměru vlivem difuze. Tato změna je dle modelu pro danou situaci v řádu jednotek nanometrů. Velikost bublin na dně a u hladiny se na zachycených snímcích neliší. Změna poloměru je za daných podmínek neměřitelná a správnost výpočtu změny poloměru se nepodařilo experimentem ověřit.

Parametry přesycené kapaliny jsou následující:

Tab. 6.5 Parametry přesycené kapaliny při experimentu

rozpustnost CO <sub>2</sub> ve vodě [-]:	stupeň přesycení [-]:	difuzní koeficient [m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]:
$7,07 \times 10^{-4}$	2	$2 \times 10^{-9}$

Ostatní fyzikální parametry vycházejí z tab. 5.1.

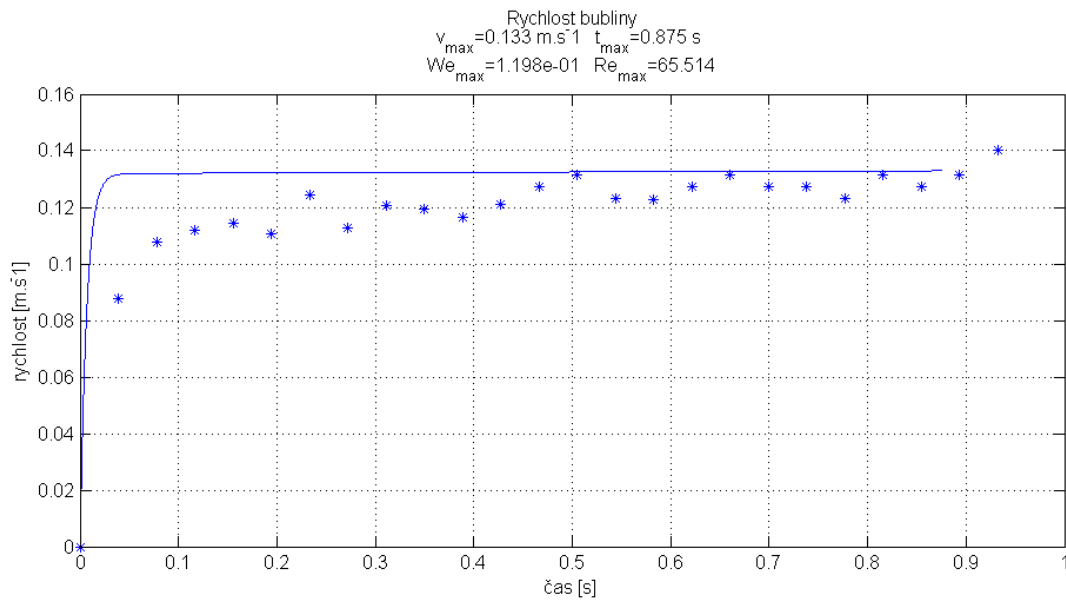
#### Bublina 3

Parametry bubliny jsou uvedeny v tab. 6.6.

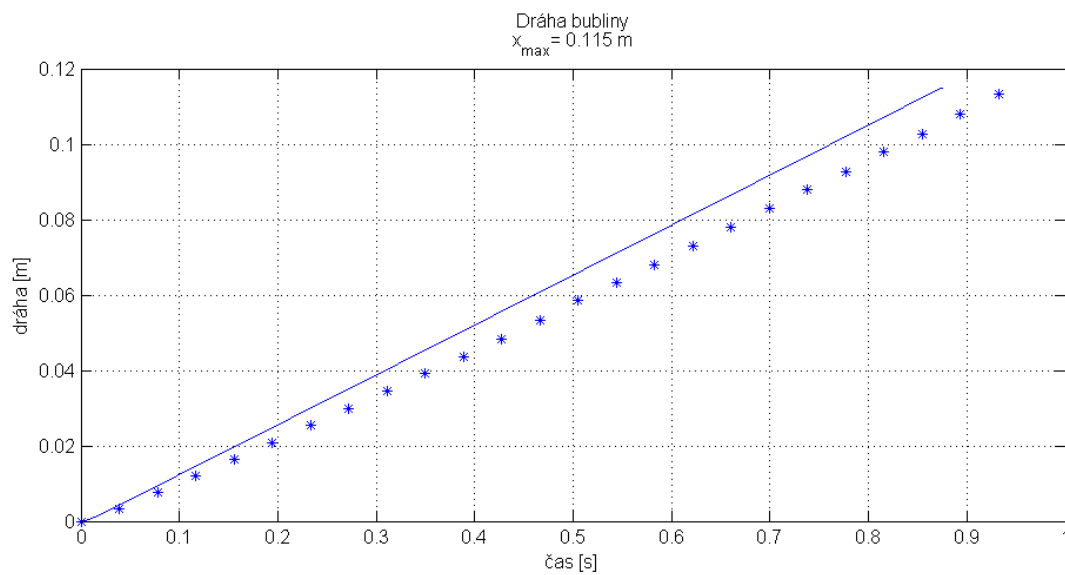
Tab. 6.6 Parametry bubliny 3

počáteční průměr bubliny [mm]:	počáteční hloubka [mm]:	rozlišení snímků [mm/px]:	snímková frekvence kamery [s <sup>-1</sup> ]:	počet analyzovaných snímků:
0,494	115	0,165	257,467	25

Průběh rychlosti a polohy bubliny je znázorněn na obr. 6.10 a 6.11. Rozdíly mezi výpočtovým modelem a experimentem jsou zapsány v tab.6.7.



Obr. 6.10 Průběh rychlosti bubliny 3  
 Plná čára – výpočtový model, hvězdičky – naměřená data.



Obr. 6.11 Průběh polohy bubliny 3  
 Plná čára – výpočtový model, hvězdičky – naměřená data.

Změna průměru bubliny v důsledku difuze je dle výpočtového modelu 9,934 nm.

Tab. 6.7 Rozdíly mezi teoretickými a naměřenými hodnotami pro bublinu 3

	Teoretické	Naměřené
Konečná rychlost [ $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ ]:	132,9	124,3
Čas dosažení konečné rychlosti [s]:	0,05	0,12
Doba pohybu k hladině [s]:	0,875	0,932
Konečný průměr bubliny [mm]:	0,496	–
Upravený průměr [mm]:	0,470	–

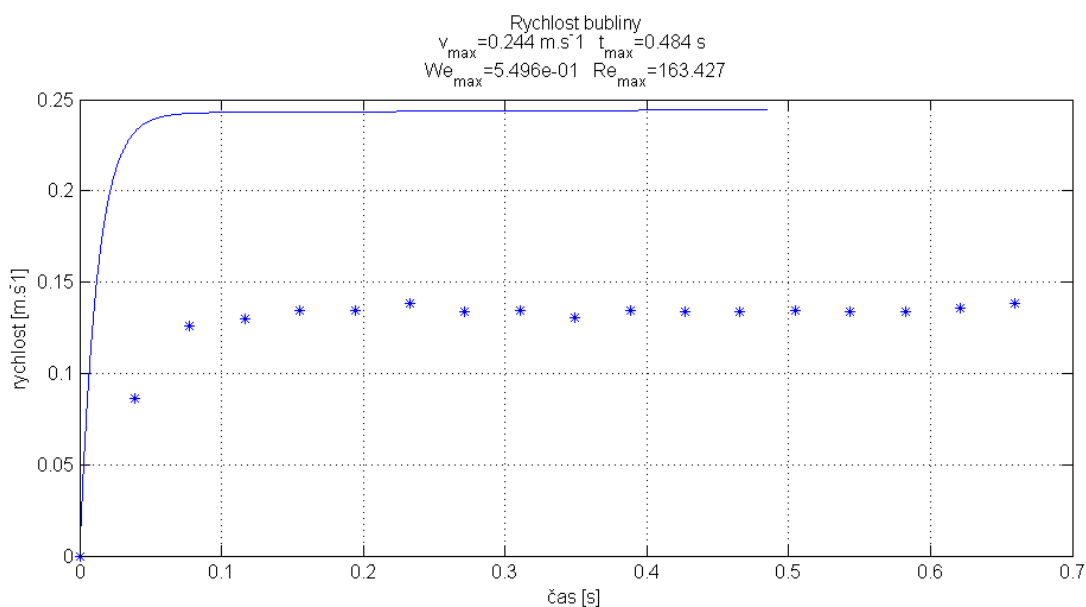
### Bublina 4

Níže je uveden průběh pohybu druhé analyzované bubliny  $\text{CO}_2$ . Její parametry jsou uvedeny v tab. 6.8.

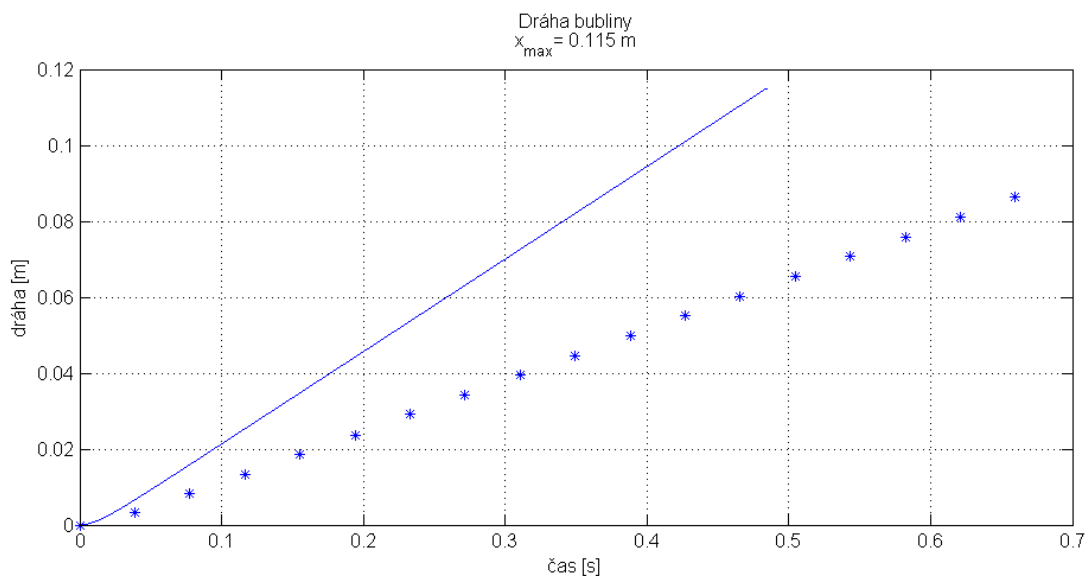
Tab. 6.8 Parametry bubliny 4

počáteční průměr bubliny [mm]:	počáteční hloubka [mm]:	rozlišení snímků [mm/px]:	snímková frekvence kamery [ $\text{s}^{-1}$ ]:	počet analyzovaných snímků:
0,67	115	0,168	257,666	18

Průběhy rychlosti a polohy bubliny 4 jsou vyobrazeny na obr. 6.12 a 6.13. Rozdíly mezi výpočtovým modelem a experimentem jsou zaznačeny v tab. 6.9.



Obr. 6.12 Průběh rychlosti bubliny 4  
 Plná čára – výpočtový model, hvězdičky – naměřená data.



Obr. 6.13 Průběh polohy bubliny 4  
Plná čára – výpočtový model, hvězdičky – naměřená data.

Změna průměru bubliny v důsledku difuze je dle výpočtového modelu 4,059 nm.

Tab. 6.9 Rozdíly mezi teoretickými a naměřenými hodnotami pro bublinu 4

	Teoretické	Naměřené
Konečná rychlost [ $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ ]:	244,5	134,0
Čas dosažení konečné rychlosti [s]:	0,08	0,15
Doba pohybu k hladině [s]:	0,484	0,660
Konečný průměr bubliny [mm]:	0,672	–
Upravený průměr [mm]:	0,50	–

### 6.3 Zhodnocení výsledků

Z výsledků vyplývá, že experimentální hodnoty se od těch vypočtených značně liší. Procentuální vyjádření rozdílu konečných rychlostí je v tab. 6.10.

Tab. 6.10 Rozdíl mezi vypočtenými a naměřenými rychlostmi

		Konečná rychlost [ $\text{mm}/\text{s}$ ]:		Rozdíl [%]:
		Dle modelu:	Dle experimentu:	
Elektrolýza:				
Bublina 1	70,7	29,2	58,70	
Bublina 2	125,6	44	64,97	
Difuze:				
Bublina 3	132,9	124,3	6,47	
Bublina 4	224,2	134	40,23	

Rozdíl hodnot je menší u bublin tvořených difuzí. Kromě faktu, že hodnoty jsou zkráceny chybou při určování rozměrů bublin, mohou být rozdíly způsobeny i jinými faktory. Během pohybu sledovaných bublin dosahují Reynoldsova čísla hodnot v řádu desítek. Stokesův odpor použitý v modelu platí s dostatečnou přesností pouze pro Reynoldsova čísla menší než 1. Je pravděpodobné, že větší rozdíl mezi vypočtenými a experimentálními hodnotami u bublin tvořených elektrolýzou je způsoben tím, že bubliny nestoupají izolovaně. Během elektrolýzy vzniká proud bublin různých velikostí, které se mohou navzájem ovlivňovat. To může být příčinou menší skutečné rychlosti bublin.

V grafech rychlostí lze zřetelně vidět fáze pohybu bubliny, kdy v první fázi zrychluje a po určitém čase se dostane na svoji konečnou rychlost, která zůstává konstantní.

## 7 ZÁVĚR

Cílem této práce bylo popsat chování bublin ve sloupci kapaliny a vytvořit matematický model, který byl porovnán s experimentem.

První dvě kapitoly se zabývají popisem základních pojmů a sil, které na bubliny působí a ovlivňují jejich chování. Jsou definovány pojmy jako povrchové napětí a jeho vliv na tlak uvnitř bubliny a podobnostní čísla, která jsou důležitými parametry při popisu charakteru pohybu bubliny a jejího tvaru. Podrobně jsou objasněny především síly, které na bublinu působí a způsoby stanovení koeficientu odporu jako jednoho z nejdůležitějších parametrů při zkoumání chování bublin. Třetí kapitola se zabývá tvary a trajektoriemi bublin při rozličných podmínkách. Dále se tato práce věnuje bublinám v kapalině přesycené plynem. Jsou objasněny důležité parametry přesycené kapaliny a je odvozen vztah pro výpočet změny poloměru vlivem difuze.

Kapitola pátá je věnována tvorbě matematického modelu pohybu bubliny. Jsou zde odvozeny veškeré vztahy potřebné pro vytvoření tohoto modelu. Výsledným vztahem je diferenciální rovnice, jejímž řešením je průběh polohy bubliny v čase. Tato diferenciální rovnice není řešitelná analyticky a pro řešení byl vytvořen skript v programu Matlab. Výstupem tohoto skriptu jsou grafy průběhu polohy, rychlosti, zrychlení a měnícího se průměru bubliny v čase. Výsledky jsou diskutovány v kapitole 5.6.

Obsahem poslední části této práce je návrh a realizace experimentu, který posloužil k porovnání skutečného pohybu bubliny a výpočtového modelu. Při experimentu byly studovány bubliny vodíku generované pomocí elektrolýzy a bubliny tvořené v přesycené kapalině. Získaná obrazová data byla analyzována a porovnána s vytvořeným matematickým modelem.

Bubliny pohybující se v kapalině jsou důležitou součástí spousty přírodních i průmyslových systémů a tato práce může pomoci k porozumění základních principů chování těchto bublin.



**SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ**

- [1] CLIFT, R., John R. GRACE a Martin E. WEBER. *Bubbles, drops, and particles*. 3rd ed. New York: Academic Press, 1978, 380 s. ISBN 01-217-6950-X.
- [2] ENRÍQUEZ, Oscar R., Christian HUMMELINK, Gert-Wim BRUGGERT, Detlef LOHSE, Andrea PROSPERETTI a Devaraj VAN DER MEER. Growing bubbles in a slightly supersaturated liquid solution. *Review of Scientific Instruments* [online]. 2013, **84**, 065111 [cit. 2016-05-26]. DOI: 10.1063/1.4810852. ISSN 00346748. Dostupné z: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4810852>
- [3] HALLIDAY, David, Robert RESNICK, Jearl WALKER, Jana MUSILOVÁ, Jan OBDRŽÁLEK a Petr DUB. *Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. část 1, Mechanika*. VUTIUM: Prometheus, 2003, 328 s. ISBN 8021418680.
- [4] KUCHMA, A., G. GOR a F. KUNI. Stages of steady diffusion growth of a gas bubble in strongly supersaturated gas-liquid solution. *Colloid Journal* [online]. 0908, **71**(4), 520-528 [cit. 2016-05-26]. DOI: 10.1134/S1061933X09040140. ISSN 1061933X. Dostupné z: <http://dx.doi.org/10.1134/S1061933X09040140>
- [5] LIU, Liu, Hongjie YAN a Guojian ZHAO. Experimental studies on the shape and motion of air bubbles in viscous liquids. *Experimental Thermal and Fluid Science* [online]. Elsevier Inc, 2015, **62**, 109-121 [cit. 2016-05-26]. ISSN 0894-1777. Dostupné z: <http://dx.doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2014.11.018>
- [6] LOTH, Eric. *Particles, Drops and Bubbles: Fluid Dynamics and Numerical Methods*. London: Cambridge University Press, 2010, 775 s.
- [7] NOSKIEVIČ, Jaromír a kol. *Mechanika tekutin*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1987, 354 s. ISBN 04-233-87.
- [8] RAŽNJEVIĆ, Kuzman. *Termodynamické tabulky*. Bratislava: Alfa, 1984, 313 s. ISBN 63-012-83.
- [9] S. BAZ-RODRÍGUEZ, A. AGUILAR-CORONA a A. SORIA. RISING VELOCITY FOR SINGLE BUBBLES IN PURE LIQUIDS. *Revista Mexicana de Ingeniería Química* [online]. 2012, **11**(2), 269-278 [cit. 2016-05-26]. ISSN 16652738. Dostupné z: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=62026895006>
- [10] STEINER, Ladislav a George STANDART. *Tvorba a chování plyných bublin v kapalině*. Praha: Academia, 1966, 60 s. ISBN 21-032-66.



- [11] TALAIA, Mário A. R. Terminal Velocity of a Bubble Rise in a Liquid Column. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering* [online]. World Academy of Science, Engineering and Technology, 2007, **4**(4), 264-268 [cit. 2016-05-26]. Dostupné z: <http://waset.org/publications/8057>
- [12] WICHTERLE, Kamil. *Povrchové/mezifázové napětí v hydrostatice a hydrodynamice*. Praha: Procesní inženýrství, 1997, 36 s. MAPRINT. ISBN 8086059243.

**SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ**

Veličina	Symbol	Jednotka
zrychlení	a	$\text{m.s}^{-2}$
průřez	A	$\text{m}^2$
Bondovo číslo	Bo	-
koncentrace rozpuštěného plynu	c	$\text{mol.m}^{-3}$
koeficient odporu	$C_D$	-
součinitel virtuální hmotnosti	$c_V$	-
difuzní koeficient	D	$\text{cm}^2.\text{s}^{-1}$
průměr	d	m
energie	E	J
Eötvösovo číslo	$E_o$	-
síla	F	N
Stokesův korekční faktor	f	-
tíhové zrychlení	g	$\text{m.s}^{-2}$
hloubka nádoby	H	m
hloubka	h	m
hustota difuzního toku	$j_R$	-
Henryho konstanta	$k_H$	-
délka rozhraní	l	m
hmotnost	m	kg
Mortonovo číslo	$Mo$	-
počet molekul	N	-
tlak	p	Pa
měrná plynová konstanta	r	$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
poloměr	R, r	m
charakteristický poloměr	$R_\sigma$	m
Reynoldsovo číslo	Re	-
povrch	S	$\text{m}^2$
rozpustnost plynu	s	-
čas	t	s
termodynamická teplota	T	K
rychlost vně bubliny	U	$\text{m.s}^{-1}$
rychlost kapaliny v místě těžiště bubliny	$u_k$	$\text{m.s}^{-1}$
rychlost kapaliny v místě vzdáleném od bubliny	$u_\infty$	$\text{m.s}^{-1}$
objem	V	$\text{m}^3$
rychlost uvnitř bubliny	V	$\text{m.s}^{-1}$
rychlost	v	$\text{m.s}^{-1}$
relativní rychlost bubliny	w	$\text{m.s}^{-1}$
Weberovo číslo	We	-
poloha	x	m
dynamická viskozita	$\mu$	Pa.s
relativní viskozita	$\mu^*$	-
hustota	$\rho$	$\text{kg.m}^{-3}$
relativní hustota	$\rho^*$	-
povrchové napětí	$\sigma$	$\text{N.m}^{-1}$
stupeň přesycení	$\zeta$	-

## Indexy

Význam	Symbol
počáteční	0
atmosférický	atm
bublina	b
Brownův pohyb	Br
kritické	c, krit
odporová	D
dynamický	dyn
tíhové	g
historická	H
Hadamard-Rybczynski	HR
kapalina	k
kapalina v místě bubliny	k,b
vztlaková	L
mezimolekulární	m
důlek	pit
rozhraní	pn
napětí kapaliny	S
přesycený	s
termoforéza	∇T
konečné	t, term
tryska	tr
virtuální hmotnost	∇

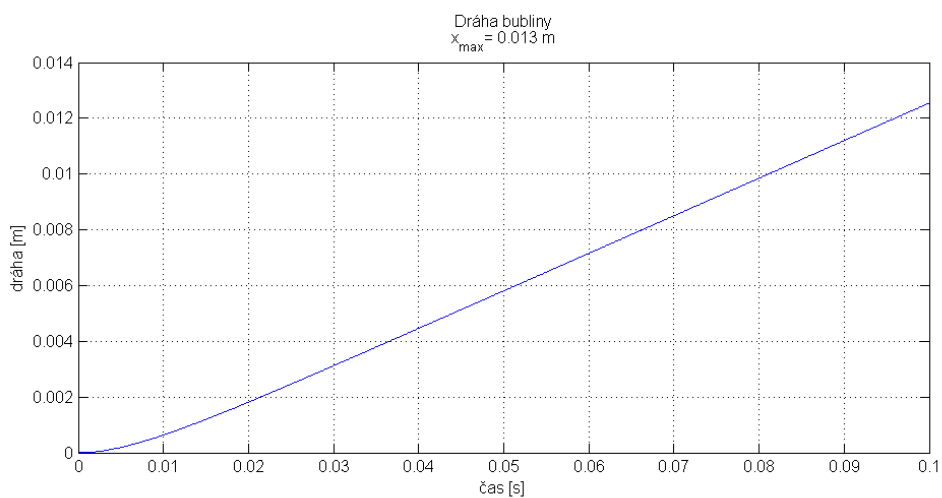
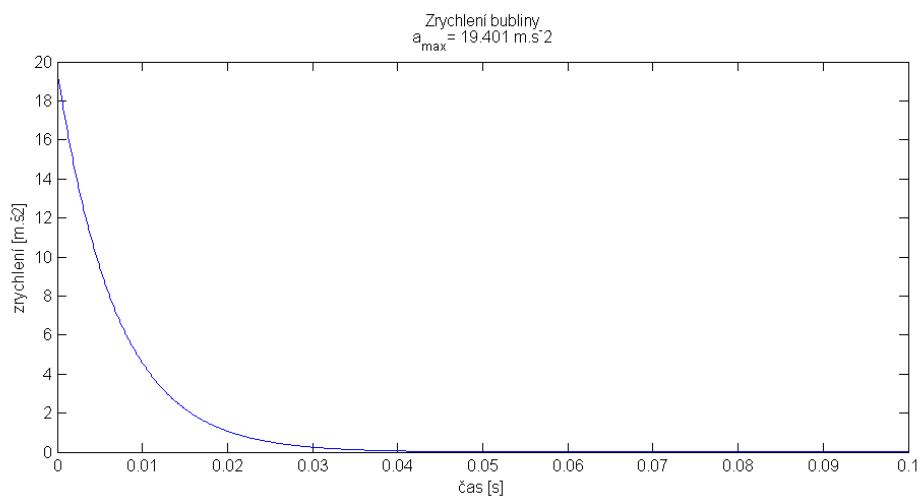
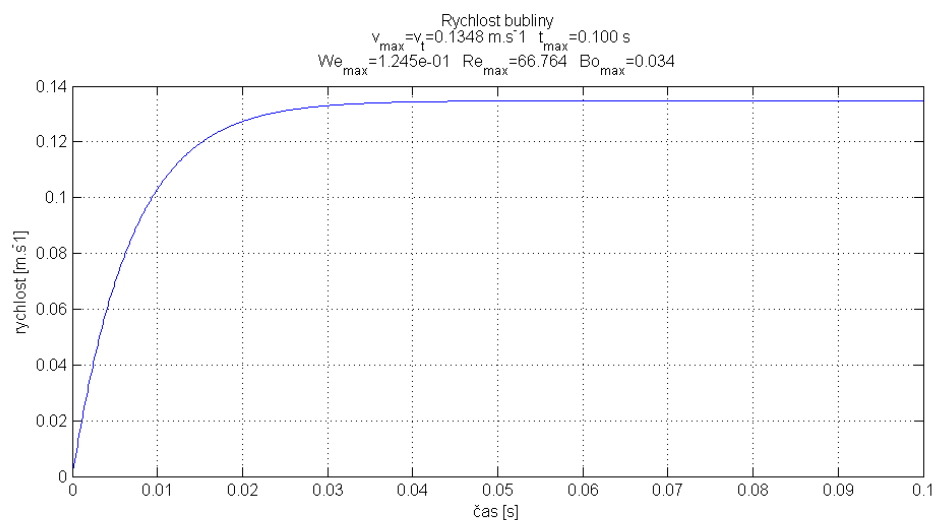
## Fyzikální konstanty

Veličina	Symbol
Boltzmannova konstanta	$k = 1,380662 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

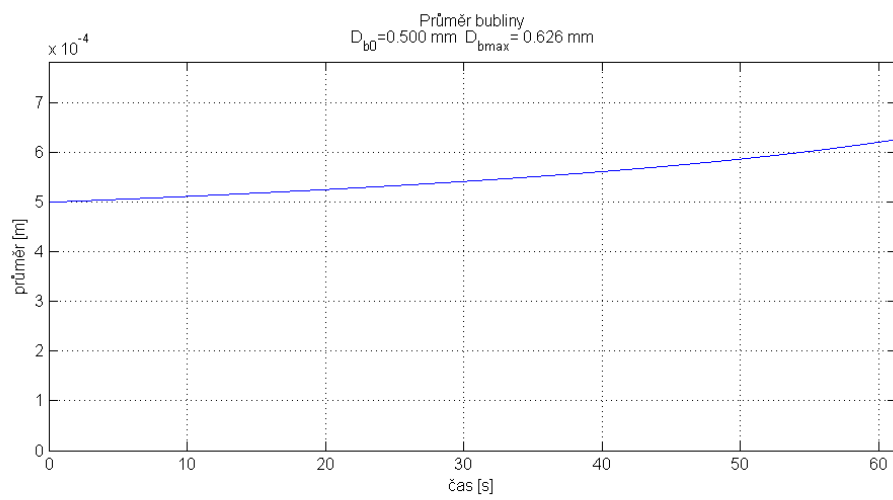
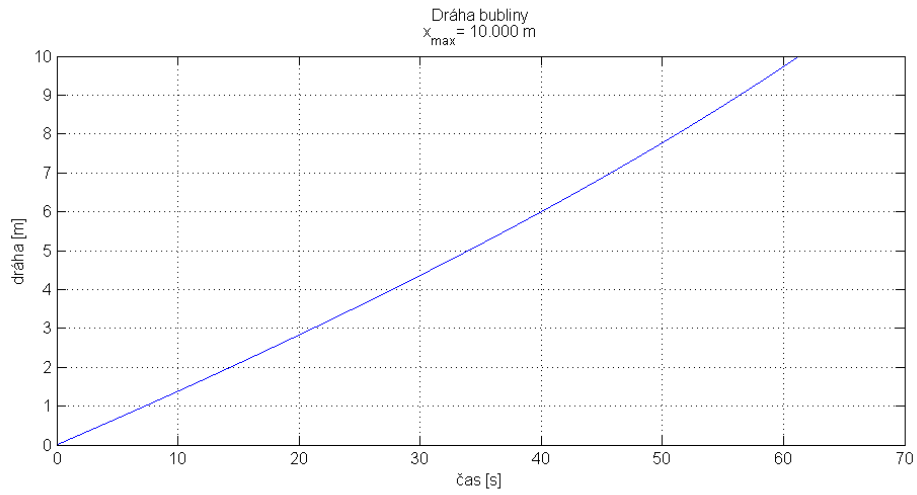
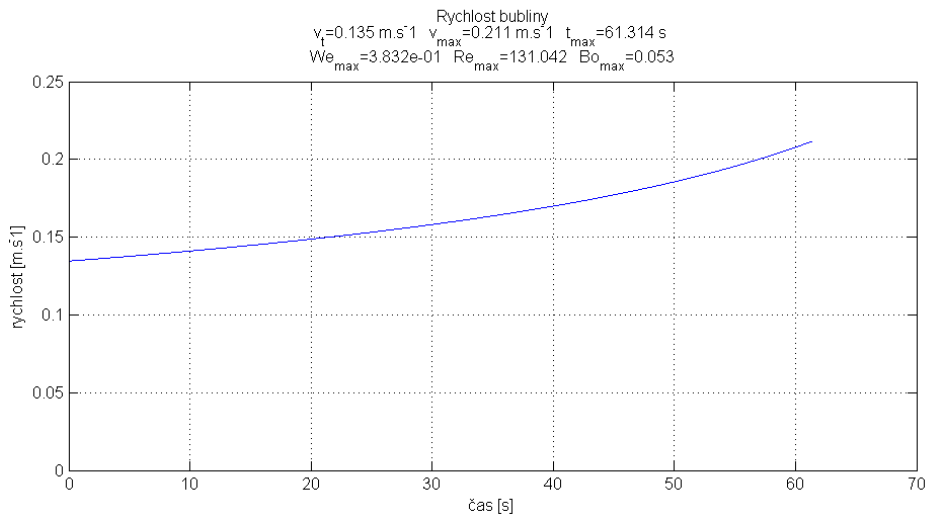
**SEZNAM PŘÍLOH**

- Příloha 1 Počáteční fáze pohybu
- Příloha 2 Pohyb z hloubky 10 m
- Příloha 3 Porovnání se vztahem Hadamard-Rybczinski
- Příloha 4 Fotografie experimentu
- Příloha 5 Snímky z vysokorychlostní kamery

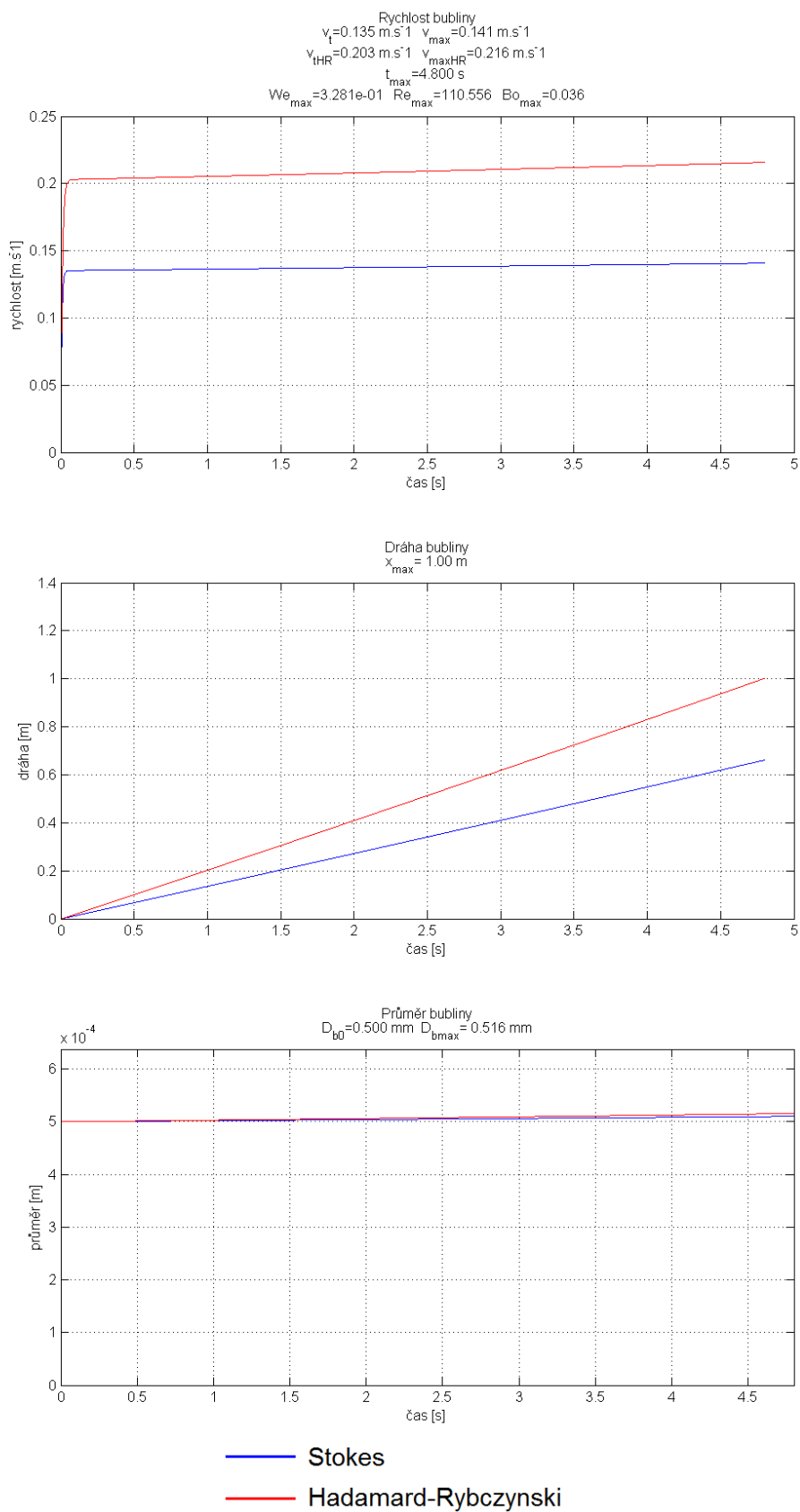
## Příloha 1 Počáteční fáze pohybu



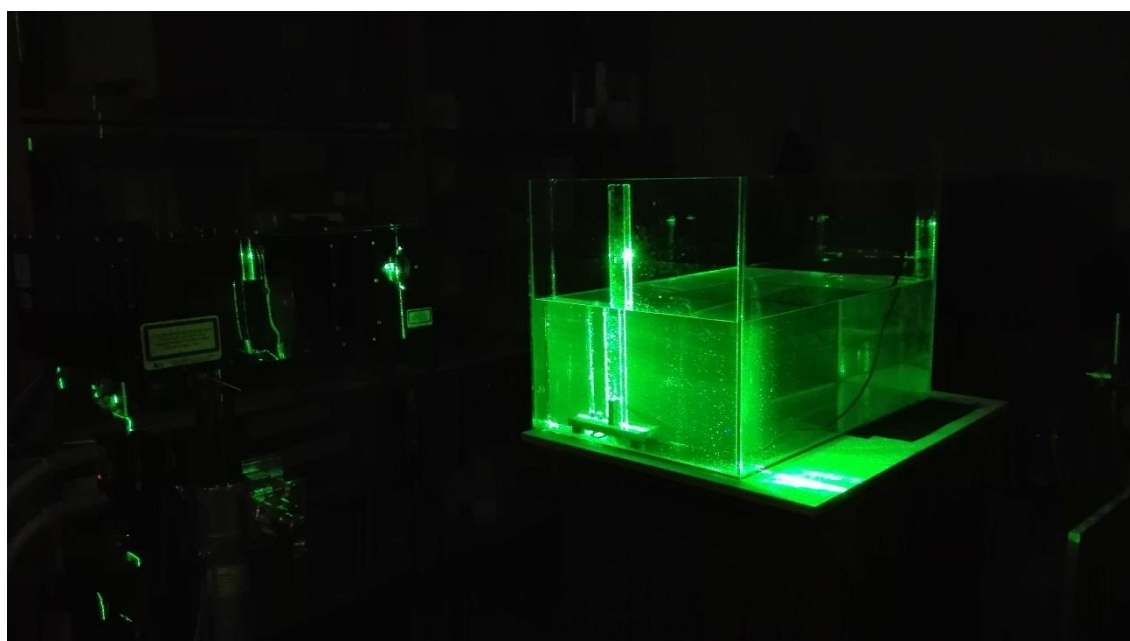
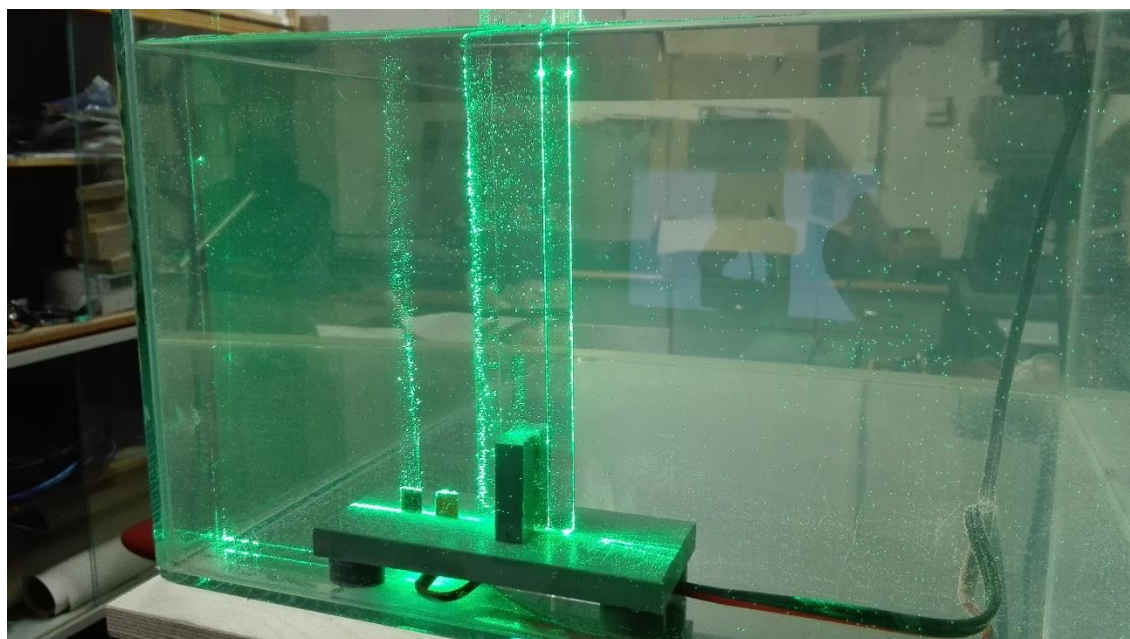
**Příloha 2 Pohyb z hloubky 10 m**



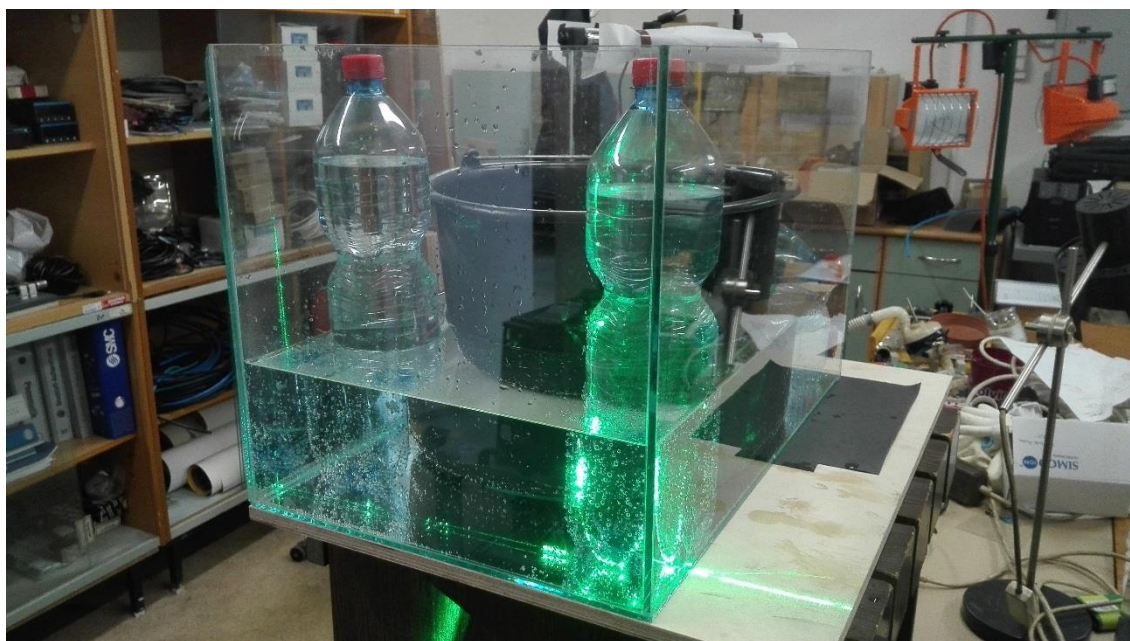
## Příloha 3 Porovnání se vztahem Hadamard-Rybczynski



**Příloha 4 Fotografie experimentu**







**Příloha 5 Snímky z vysokorychlostní kamery**

