TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Apolloniovy a Pappovy úlohy řešené v GeoGebře

Bakalářská práce

Studijní program: B1101 Matematika
Studijní obory: Matematika se zaměřením na vzdělávání
Informatika se zaměřením na vzdělávání

Autor práce: **Kristýna Vacková**
Vedoucí práce: Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Liberec 2020

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Zadání bakalářské práce

Apolloniovy a Pappovy úlohy řešené v GeoGebře

Jméno a příjmení:	**Kristýna Vacková**
Osobní číslo:	P17000277
Studijní program:	B1101 Matematika
Studijní obory:	Matematika se zaměřením na vzdělávání Informatika se zaměřením na vzdělávání
Zadávající katedra:	Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Akademický rok:	**2018/2019**

Zásady pro vypracování:

Cíl práce:
Cílem bakalářské práce je představit pojmy Apolloniova a Pappova úloha. Sestavit přehled těchto úloh. Ve stručnosti popsat přístupy některých významných matematiků k řešení Apolloniových úloh v různých obdobích vývoje matematiky. V podobě dynamických appletů vytvořených v programu GeoGebra ukázat možná řešení Apolloniových a Pappových úloh v pojetí dnešní matematiky. Následně vytvořit elektronickou GeoGebra knihu obsahující sestavené dynamické applety Apolloniových a Pappových úloh.

Rozsah grafických prací:
Rozsah pracovní zprávy:
Forma zpracování práce: tištěná/elektronická
Jazyk práce: Čeština

Seznam odborné literatury:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Biographies/Apollonius.html
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Biographies/Pappus.html
https://www.jstor.org/stable/27956431?seq=1#metadata_info_tab_contents
Holubář, J.: O methodách rovinných konstrukcí (Úloha Apolloniova a úlohy příbuzné). JČMF, Praha 1940. (http://dml.cz/dmlcz/402960).
Odvárko, O. a kol.: Metody řešení matematických úloh (skriptum). MFF UK, SPN, Praha 1977.
KISELEV, A. P.: Kiselev's geometry. Book I. – Planimetry (adapted from Russian by Alexander Givental). Sumizdat 2006. 248 p. ISBN 978-0977985203.
Hohenwarter, M. – Hohenwarter, J.: Introduction to GeoGebra Version 4.4. Florida Atlantic University, Boca Raton, USA. International GeoGebra Institute 2013.

Vedoucí práce: Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání práce: 16. dubna 2019
Předpokládaný termín odevzdání: 30. dubna 2020

L.S.

prof. RNDr. Jan Picek, CSc.
děkan

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

V Liberci dne 16. dubna 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Jsem si vědoma toho, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitu v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Současně čestně prohlašuji, že text elektronické podoby práce vložený do IS/STAG se shoduje s textem tištěné podoby práce.

Beru na vědomí, že má bakalářská práce bude zveřejněna Technickou univerzitou v Liberci v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů.

Jsem si vědoma následků, které podle zákona o vysokých školách mohou vyplývat z porušení tohoto prohlášení.

1. května 2020 Kristýna Vacková

Poděkování

Děkuji vedoucí mé bakalářské práce Mgr. Daniele Bímové, Ph.D. za odborné a podnětné vedení, věcné připomínky, cenné rady, podporu a velikou trpělivost. Děkuji také za mimořádně vstřícné jednání a za čas, který mi věnovala při tvorbě této bakalářské práce.

Anotace

Tato bakalářská práce se věnuje tématu Apolloniových a Pappových úloh. Cílem této práce je vytvoření přehledu typů Apolloniových a Pappových úloh společně s jejich konstrukcemi. Dalším cílem je vytvoření dynamických apletů konstrukcí jednotlivých typů úloh v softwaru GeoGebra, v nichž se nachází různé alternativy řešení dle uspořádání daných prvků. V práci jsou také zmíněny různé přístupy řešení Apolloniovy úlohy typu ***kkk***, která je jednou z nejvíce řešených úloh z uvedených typů.

Klíčová slova

Apolloniovy úlohy; Pappovy úlohy; GeoGebra; bod; přímka; kružnice; tečna; kruhová inverze

Annotation

This bachelor thesis focuses on Apollonius's problems and Pappos's problems. This bachelor thesis aim is to create an overview of types of Apollonius's and Pappos's problems together with their constructions. The next aim of the thesis is to create dynamic applets of the constructions of the individual types of problems in the software GeoGebra, in which there are various alternatives of solutions according to the ordering of given elements. In this thesis there are also mentioned different approaching of solving Apollonius's problem of the type ***kkk***, which is one of the most solved Apollonius's problems.

Keywords

Apollonios's problem; Pappos's problem; GeoGebra; point; straight-line; circle; tangent; circular inversion

Obsah

Seznam obrázků

Seznam použitých zkratek a symbolů

Značení	**Význam**
MBDV	Množina bodů daných vlastností
KI (ω, S)	Kruhová inverze s řídicí kružnicí ω a středem S kruhové inverze
$p \equiv AB$	Přímka p zadaná body A a B
k (S, $\|AB\|$)	Kružnice se středem S a poloměrem rovným velikosti úsečky AB
$p \perp q$	Přímka p je kolmá k přímce q
$p \parallel q$	Přímka p je rovnoběžná s přímkou q
$A \in p$	Bod A náleží přímce p
$k \cap p$	Průnik kružnice k s přímkou p
$v(p, x) = 2$ cm	Vzdálenost přímky p od přímky x je 2 cm

Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá tématem Apolloniových a Pappových úloh. Tyto úlohy jsou zde popsány a pro každou úlohu je vytvořen aplet v softwaru GeoGebra, dále se práce zabývá různými přístupy k řešení Apolloniovy úlohy typu ***kkk***.

Práce je uvedena stručnými informacemi o životech a dílech dvou řeckých matematiků Apollonia z Pergy a Pappose Alexandrijského. V další části práce jsou zmíněny důležité poznatky užitečné pro konstrukce řešení Apolloniových nebo Pappových úloh. Tato kapitola je do práce zařazena z toho důvodu, že při řešení Apolloniových a Pappových úloh je užito i metody zvané kruhová inverze. Základní principy této metody jsou popsány v této kapitole. Dále je představen software GeoGebra, který je neoddělitelnou součástí této práce, protože právě v tomto softwaru byly vytvořeny veškeré aplety Apolloniových a Pappových úloh pro tuto práci. Na kapitolu zabývající se GeoGebrou navazuje kapitola s přehledem Apolloniových a Pappových úloh, každá úloha obsahuje zadání, rozbor úlohy, popis konstrukce, odkaz na aplet a diskuzi řešení. V textu práce je u každé úlohy uveden pouze jeden způsob uspořádání prvků a jedno řešení, další možnosti uspořádání prvků jsou k nalezení ve veřejné Geogebra knize, které je dostupná na linku https://www.geogebra.org/m/amcex3ar. Poslední částí práce jsou zmíněné přístupy k řešení některých Apolloniových úloh, v této části je ve stručnosti popsán život autora a jeho způsob řešení příslušné úlohy.

Práce je určena pro všechny, kteří chtějí porozumět tématu Apolloniových nebo Pappových úloh, nebo chtějí názorně vidět konstrukce řešení těchto úloh. Vzhledem k tomu, že práce také obsahuje několik geometrických poznatků, které jsou zde vysvětleny, lze práci využít i jako výukový materiál při výkladu témat kruhová inverze nebo množiny bodů daných vlastností.

Téma Apolloniových a Pappových úloh jsem si zvolila, protože mi přišlo velmi zajímavé a velmi se mi líbila představa práce se softwarem GeoGebra, který mi dal možnost vytvoření apletů, které mohou být jistě používány kdykoli, když bude potřeba názorná ukázka různých způsobů řešení Apolloniových a Pappových úloh.

1 Život Apollonia a Pappose

V této kapitole jsou představeny životy a díla významných matematiků, kteří se do historie vepsali zejména zajímavými matematickými objevy, jako jsou Apolloniovy a Pappovy úlohy.

1.1 Apollonius z Pergy

Apollonius z Pergy byl řecký matematik, geometr a astronom známý také jako „Velký geometr“. Žil na pomezí 3. a 2. století př. n. l. v Řecku. Byl jeden z prvních žáků Euklida a současníkem Archiméda. [15] ([4], str. 75)

Obrázek 1: Apollonius z Pergy

O životě tohoto „Velkého geometra“ se toho moc neví. Vše, co se o něm v dnešní době dozvídáme, pochází z předmluvy jednoho ze dvou jeho dochovaných děl nebo z informací, které se dochovaly od Pappose.[15]

Narodil se ve městě jménem Perga (dnešní Murtina/Murtana v Antalyi v Turecku). Studoval v Alexandrii, kde studoval pod žáky Euklida. [15]

Jeho nejvýznamnějším dílem je *Kónika,* dílo o kuželosečkách. O Apolloniových úlohách jako takových se dozvídáme skrze Pappovo dílo *Mathématikai synagogai,* protože se žádné původní znění těchto úloh nedochovalo. [15]

Ve skutečnosti nejsou známy způsoby řešení těchto úloh samotným Apolloniem, ale předpokládá se, že dokázal vymyslet i obecné řešení. Pravděpodobně je toto řešení takové, jaké uveřejnil Francois Viete v roce 1600. [9]

1.1.1 Zajímavosti

Apollonius se také zajímal o astronomii a věřil, že se planety pohybují kolem Země.

Jeho dílo „*Kónika*“ bylo doceněno až později, protože až Newton zjistil, že tělesa ve vakuu v gravitačním poli se pohybují po kuželosečkách. [20]

Kráter Apollonius na Měsíci byl pojmenován podle Apollonia z Pergy a to roku 1935. [19]

Apollonius zavedl pojem souřadnic a spolu s Archimedem, který zavedl představu nekonečna, vystavěli tyto neskutečně důležité pojmy pro současnou vyšší matematiku. ([4], str. 75)

1.2 Pappos Alexandrijský

Pappos z Alexandrie byl řecký matematik, filozof, astronom a geometr žijící koncem 3. a začátkem 4. století našeho letopočtu. [16]

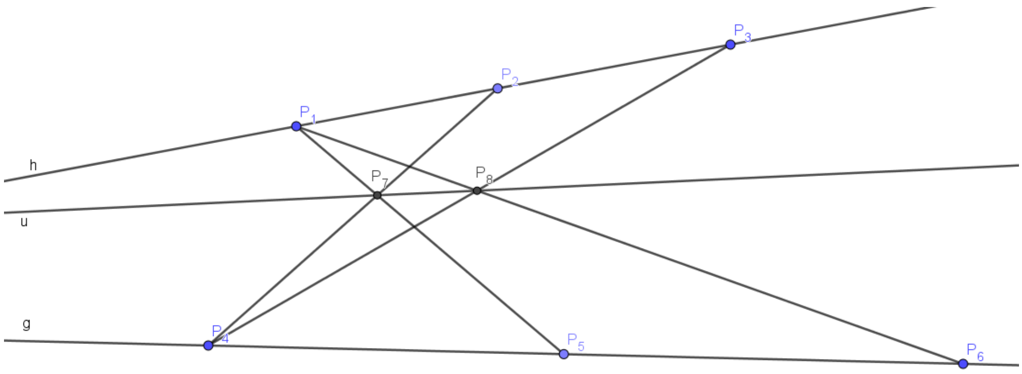
Obrázek 2: Pappos Alexandrijský

Ani o tomto matematikovi toho není mnoho známo, jeho významným dílem je *Mathématikai synagogai* - Matematická sbírka, která je rozdělena do osmi knih. Popisuje v nich zajímavé úlohy řeckých matematiků, ke kterým přidává svoji vlastní myšlenku. Tato sada knih obsahuje významné informace o starověké matematice, především o geometrii. [16]([2], str. 189)

1.2.1 Zajímavosti

Jedna z Pappových vět bývá citována jako základ moderní projektivní geometrie. [16]

Tato věta říká: Máme dané různoběžné přímky g a h. Pokud body P_1 až P_6 leží po třech po řadě na přímkách h a g, pak úsečky P_1P_5, P_2P_4 a P_3P_4, P_1P_6 vytvoří průsečíky P_7 a P_8, které budou ležet na přímce u. Přímka u bývá také nazývána jako Pappova přímka. [11]



Obrázek 3: Pappova věta

2 Důležité poznatky pro řešení Apolloniových a Pappových úloh

Tato kapitola obsahuje základní poznatky z geometrie, jichž se využívá při řešení Apolloniových a Pappových úloh. Jsou jimi například množiny bodů daných vlastností, mocnost bodu ke kružnici, stejnolehlost, sestrojení tečen k jedné kružnici, ale i ke dvěma kružnicím, kruhová inverze a cykly.

2.1 Množina bodů daných vlastností

Definice: Nechť je dána množina *M* všech bodů v rovině, které mají danou vlastnost *V*, potom množina *M* všech bodů dané vlastnosti *V* je množina takových bodů, které splňují následující dvě podmínky:

1. Každý bod množiny *M* má danou vlastnost *V*.
2. Každý bod roviny, který má danou vlastnost *V*, je bodem množiny *M* ([22]; str. 17-20.)

Konkrétní příklady množin bodů daných vlastností: Množina všech bodů, které mají od daného bodu *S* stále stejnou vzdálenost *r*, je kružnice, nebo množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou různých bodů *A*, *B* ležících v rovině, je osa úsečky *AB*.

Užitím množiny bodů daných vlastností lze řešit Apolloniovy úlohy typů ***BBB*** a ***ppp*** a také Pappovy úlohy typů ***BpT*** a ***BkT***.

2.2 Mocnost bodu ke kružnici

Definice: Nechť je dána kružnice k (S, r) a bod M je libovolně zvolený bod. Označme $v \geq 0$ jeho vzdálenost od středu S, potom číslo $m = v^2 - r^2$ nazýváme mocnost bodu M ke kružnici k. ([22], str. 20)

Mocnost bodu M ke kružnici k označujeme m (M, k).

Konkrétní příklady využití: Nalezení potenčního středu alespoň tří kružnic.

Pomocí mocnosti bodu ke kružnici se například řeší Apolloniova úloha typu ***BBp***.

2.3 Stejnolehlost

Definice: Nechť je dán pevný bod S a reálné číslo $k \neq 0$. Geometrickou příbuznost (afinitu) v rovině nazveme stejnolehlost, pokud platí:

Bodu S se přiřadí opět bod S a bodu X, který je různý od bodu S, bod X', přitom pro jeho vzdálenost od bodu S platí: $|SX'| = k \cdot |XS|$. Pokud je $k > 0$, pak bod X' leží na polopřímce SX, a pro $k < 0$ leží bod X' na opačné polopřímce k polopřímce SX. ([22], str. 27)

Střed, vzor a obraz jsou ve stejnolehlosti kolineární body. ([22] str. 27)

Konkrétní příklady využití: „Užíváme ji při řešení těch konstrukčních úloh, u nichž je možno podmínky, které má hledaný geometrický útvar splňovat, rozdělit na dvě části: první skupina podmínek určuje tvar, druhá určuje velikost a polohu hledaného obrazce." [20]

Užitím stejnolehlosti lze řešit některé Apolloniovy úlohy dle uspořádání prvků, např. úlohy typů ***ppk, Bpp***, ale také Pappova úloha typu ***kpT***.

2.3.1 Body inverzně sdružené

„Body inverzně sdružené" je důležitý pojem pro alternativní řešení Apolloniovy úlohy typu ***kkk*** dle Fouchého.

Definice: Označme Q, resp. O vnější, resp. vnitřní střed stejnolehlosti kružnic k_1, k_2. Nechť přímka procházející bodem Q nebo O protíná kružnici k_1 ve dvou bodech A_1, B_1 a kružnici k_2 v bodech B_2, A_2. Pak říkáme, že bod A_2 stejnolehlý s bodem B_1 je inverzně sdružený s bodem A_1.

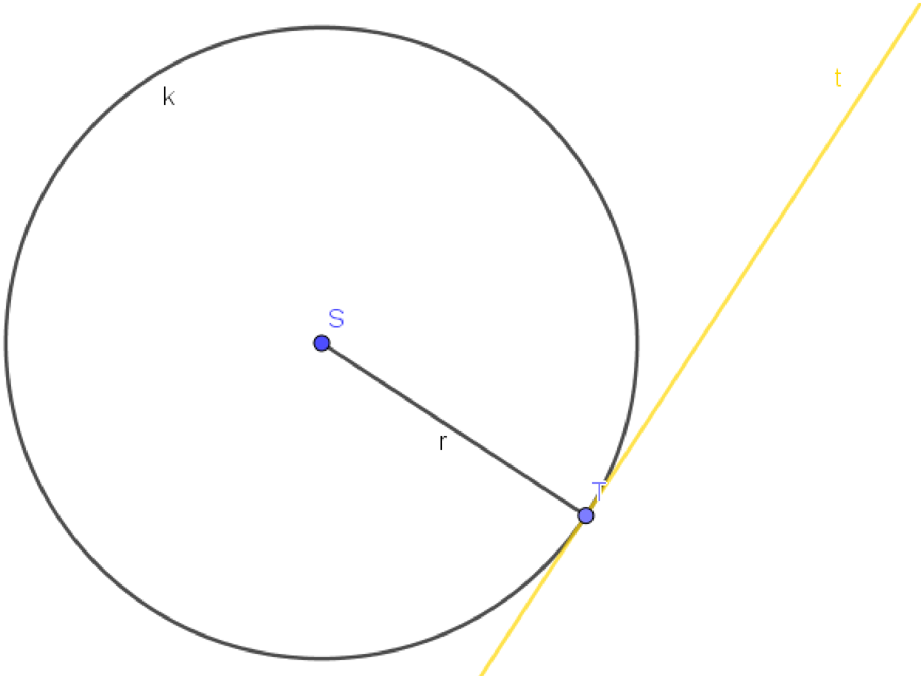
2.4 Tečny ke kružnicím

Tečna ke kružnici je taková přímka, která se kružnice dotýká právě v jednom bodě, tedy má s kružnicí právě jeden společný bod.

Konstrukce tečny ke kružnici / kružnicím:

a) k jedné kružnici:
   1) libovolná tečna ke kružnici k (S, r)
      i. T; T libovolný bod na kružnici k

ii. t; $t \perp ST \wedge T \in t$



Obrázek 4: Libovolná tečna ke kružnici s bodem dotyku T

2) z konkrétního bodu M ke kružnici k (S, r)

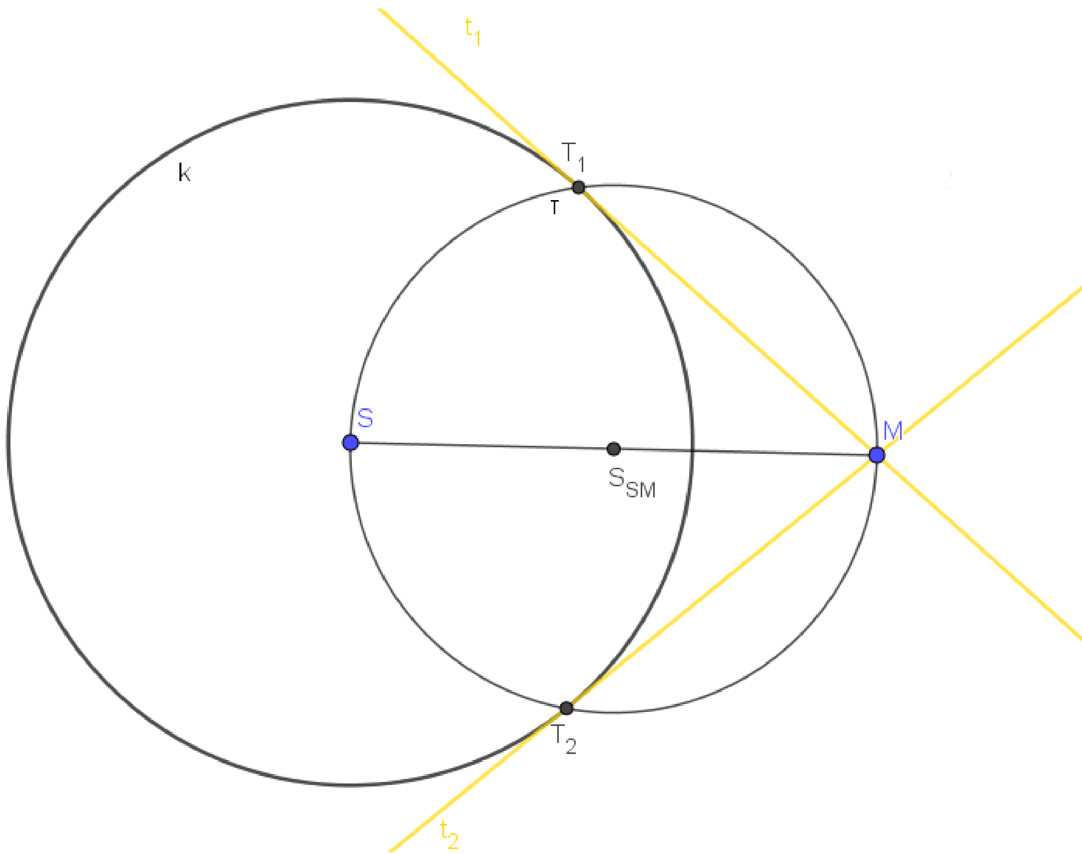
i. S_{SM}; S_{SM} střed úsečky SM

ii. τ; τ $(S_{SM}; |MS_{SM}|)$

iii. T_1, T_2; T_1, $T_2 \in k \cap \tau$

iv. t_1; $t_1 \equiv T_1M$

t_2; $t_2 \equiv T_2M$



Obrázek 5: Tečny z bodu M ke kružnici k

b) ke dvěma kružnicím k (S, r_k), l (Q, r_l)

1) které se nedotýkají

i. X; X libovolný bod na k (S, r_k)

ii. R; $r \parallel XS \land Q \in r$

iii. X', X''; $X', X'' \in r \cap l$

iv. m_1; $m_1 \equiv XX''$

m_2; $m_2 \equiv XX'$

v. M_1; $M_1 \in m_1 \cap \leftrightarrow SQ$

M_2; $M_2 \in m_2 \cap \leftrightarrow SQ$

vi. S_{M_1Q}; S_{M_1Q} střed úsečky QM_1

S_{M_2Q}; S_{M_2Q} střed úsečky QM_2

S_{M_2S}; S_{M_2S} střed úsečky SM_2

S_{M_1S}; S_{M_1S} střed úsečky SM_1

vii. τ_1; τ_1 (S_{M_1Q}, $|S_{M_1Q}M_1|$)

τ_2; τ_2 (S_{M_2Q}, $|S_{M_2Q}M_2|$)

τ_3; τ_3 $(S_{M_2S}, |S_{M_2S}M_2|)$

τ_4; τ_4 $(S_{M_1S}, |S_{M_1S}\, M_1|)$

viii. T_1, T_2; $T_1, T_2 \in \tau_4 \cap k$

T_3, T_4; $T_3, T_4 \in \tau_1 \cap l$

T_5, T_6; $T_5, T_6 \in \tau_3 \cap k$

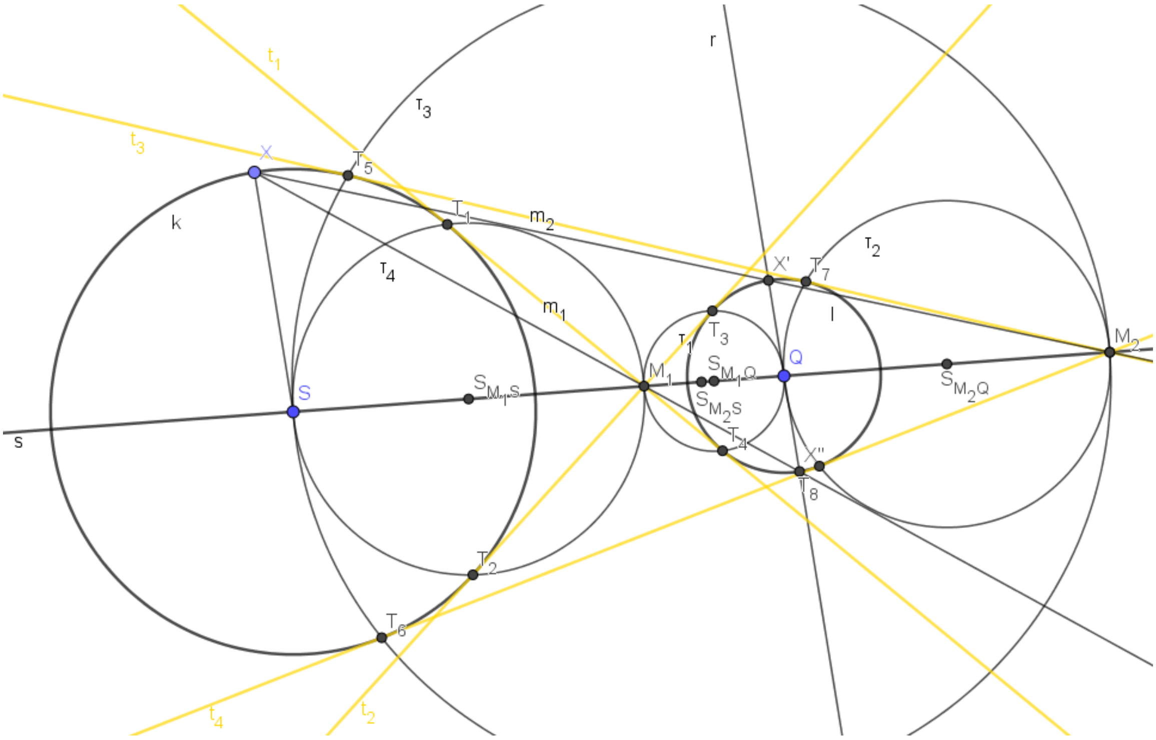
T_7, T_8; $T_7, T_8 \in \tau_2 \cap l$

ix. t_1; $t_1 \equiv M_1T_4$

t_2; $t_2 \equiv M_1T_3$

t_3; $t_3 \equiv M_2T_7$

t_4; $t_4 \equiv M_2T_8$



Obrázek 6: Tečny ke dvěma kružnicím k, l

2) které se dotýkají právě v jednom bodě T

i. X; X libovolný bod na kružnici l (Q, r_l)

ii. r; $r \parallel QX \wedge S \in r$

iii. X', X''; $X', X'' \in r \cap k$

iv. m; $m \equiv XX'$

m_2; $m_2 \equiv XX''$

v. M; $M \in m \cap \leftrightarrow SQ$

vi. S_{MS}; S_{MS} střed úsečky MS

S_{QM}; S_{QM} střed úsečky QM

vii. τ_1; τ_1 $(S_{MS}, |S_{MS}M|)$

τ_2; τ_2 $(S_{QM}, |S_{QM}M|)$

viii. T_1, T_2; $T_1, T_2 \in k \cap \tau_1$

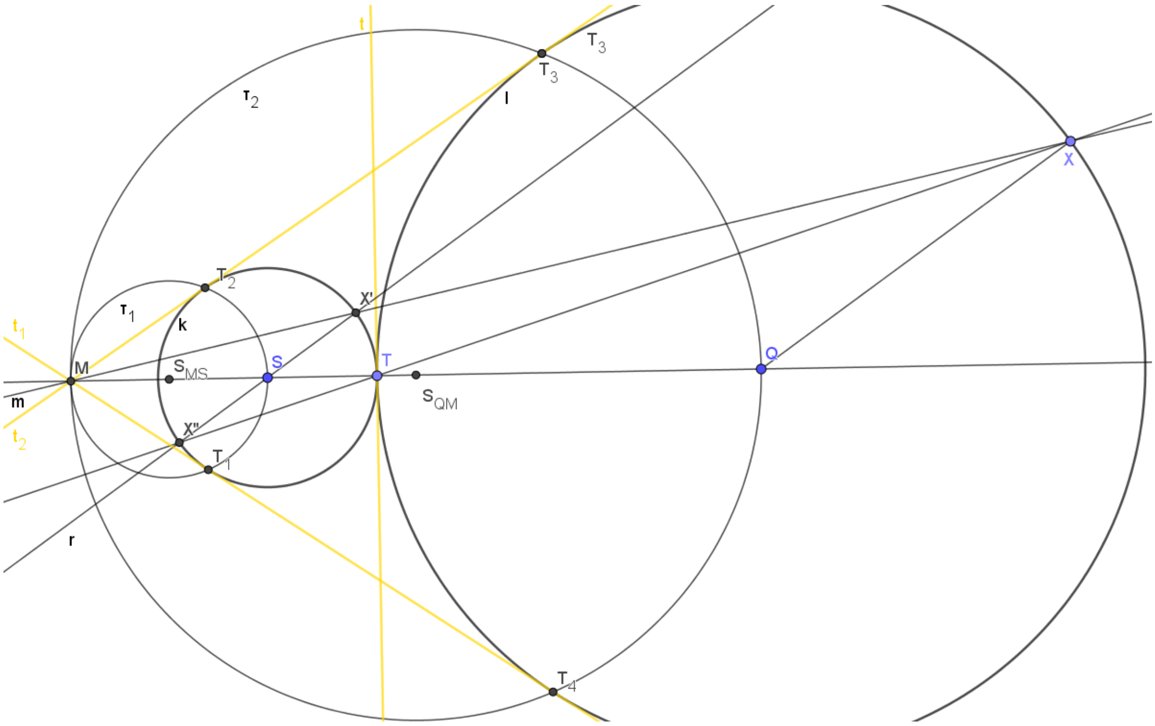
T_3, T_4; $T_3, T_4 \in l \cap \tau_2$

ix. t_1; $t_1 \equiv MT_1$

t_2; $t_2 \equiv MT_2$

x. T; $T \in k \cap \leftrightarrow SQ$

xi. t; $t \perp \leftrightarrow SQ \wedge T \in t$



Obrázek 7: Tečny ke dvěma kružnicím k, l, které se dotýkají v jednom bodě T

3) které se protínají ve dvou bodech K, L

i. X; X libovolný bod na kružnici l (Q, r_l)

ii. r; $r \parallel QX \wedge S \in r$

iii. X', X''; $X', X'' \in r \cap k$

iv. m; $m \equiv XX'$

v. M; $M \in m \cap \leftrightarrow SQ$

vi. S_{MS}; S_{MS} střed úsečky MS

S_{QM}; S_{QM} střed úsečky MQ

vii. τ_1; τ_1 (S_{MS}, $|S_{MS}M|$)

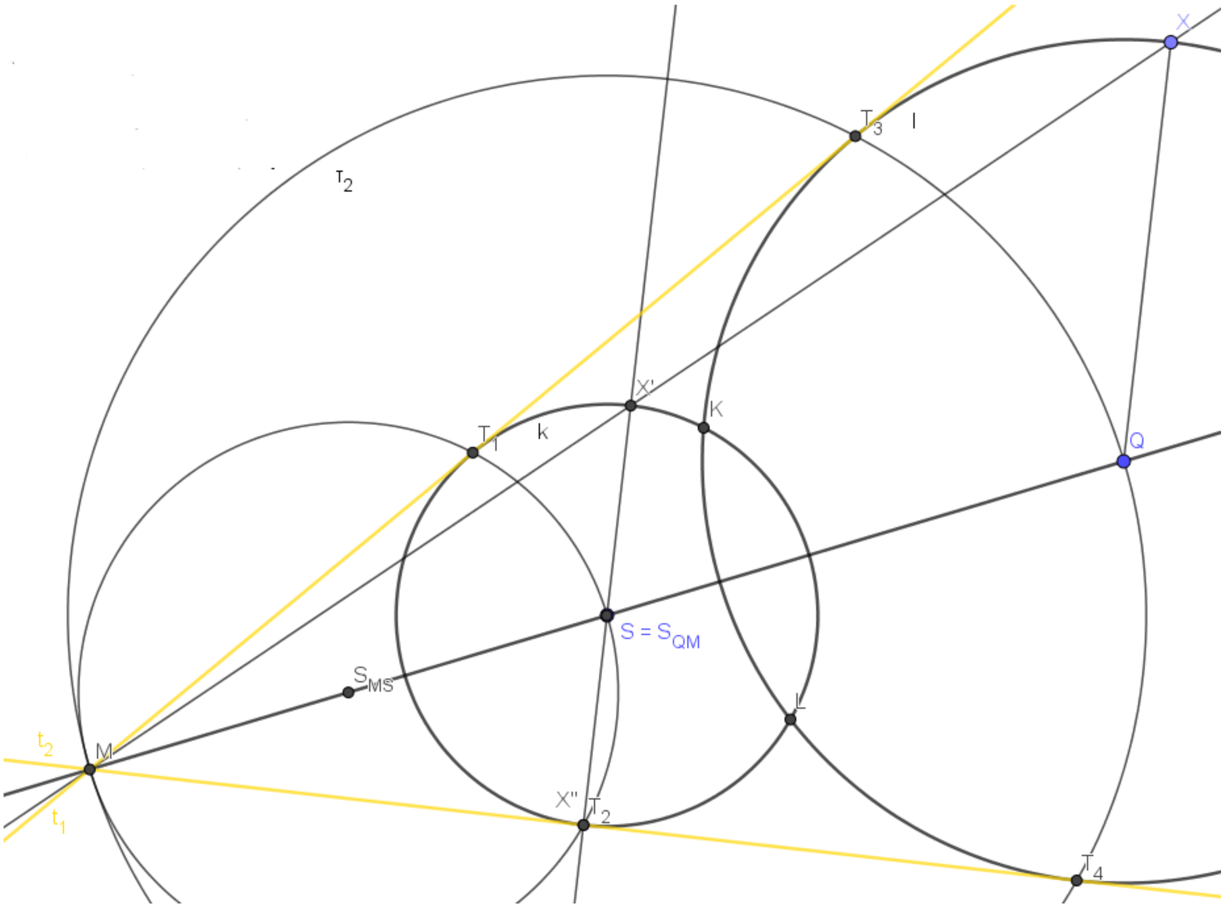
τ_2; τ_2 (S_{QM}, $|S_{QM}Q|$)

viii. T_1; T_2; T_1, $T_2 \in k \cap \tau_1$

T_3; T_4; T_3, $T_4 \in l \cap \tau_2$

ix. t_1; $t_1 \equiv MT_1$

t_2; $t_2 \equiv MT_2$



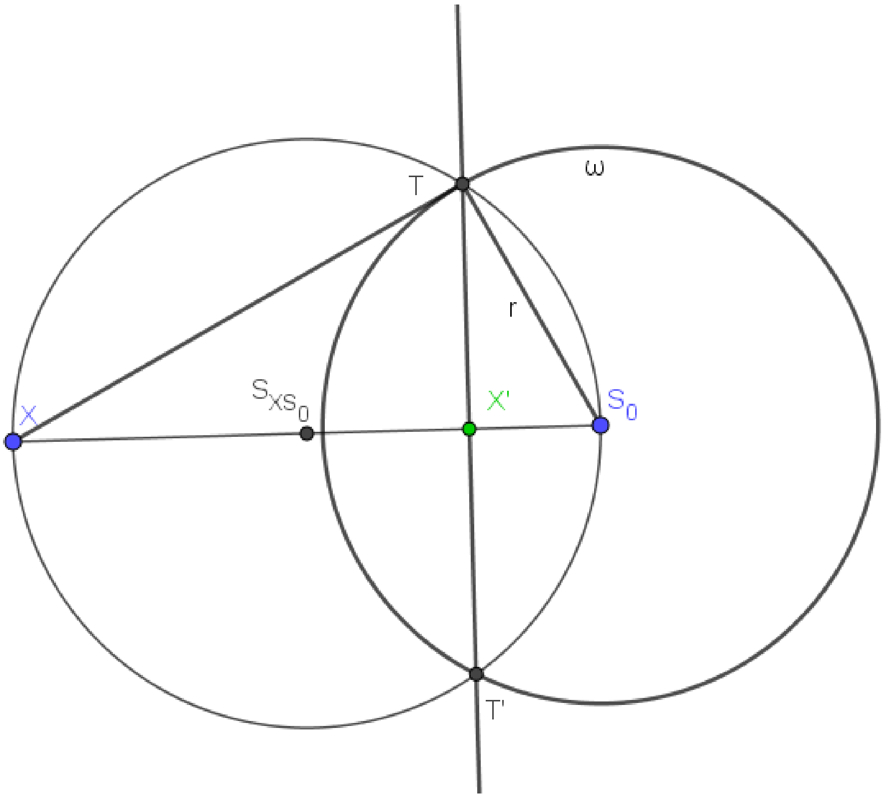
Obrázek 8: Tečny ke dvěma kružnicím k, l, které se protínají v bodech K a L

Konkrétní příklady využití: Využívá se u kruhové inverze.

2.5 Kruhová inverze

Definice: „Je dána řídicí kružnice ω se středem S_0 a poloměrem r. Kruhová inverze je zobrazení, které každému bodu X přiřazuje bod X' polopřímky S_0X tak, že platí $|S_0X| \cdot |S_0X'| = r^2$. Bod S_0 nemá obraz definován.“ [23]

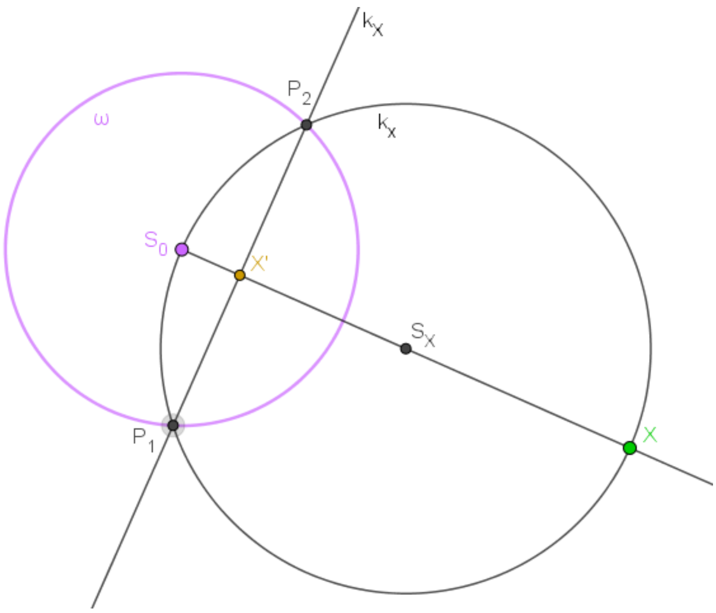
Poznámky: „Někdy také říkáme, že bod S_0 se zobrazí, jako nevlastní bod roviny.“ [23] Konstrukce bodu X' v kruhové inverzi plyne z Euklidovy věty o odvěsně pravoúhlého trojúhelníku: „Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a úseku přepony k této odvěsně přilehlé.“ [18]



Obrázek 9: Zobrazení bodu X v kruhové inverzi

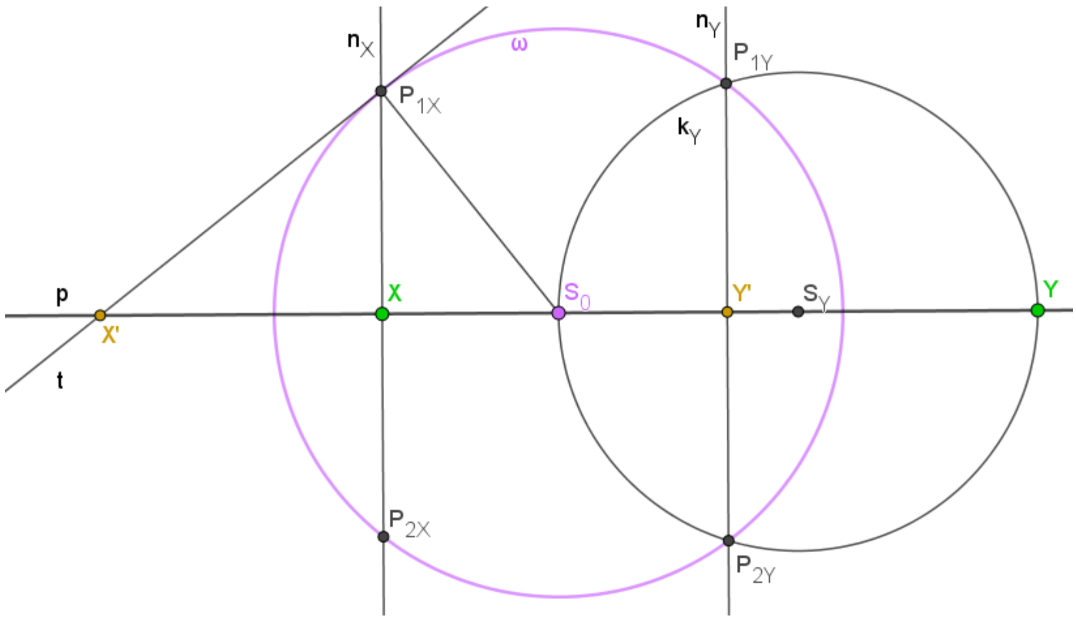
2.5.1 Základní věty kruhové inverze

Věta 1. Vnitřní body určující kružnice ω (S_0, r) se zobrazí na vnější body této kružnice a naopak, vnější body se zobrazí na její vnitřní body. [10]



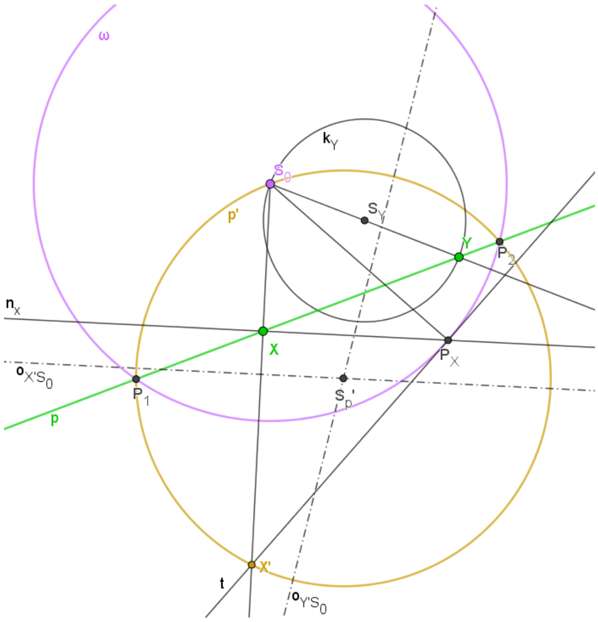
Obrázek 10: Zobrazení vnějšího bodu X v kruhové inverzi

Věta 2. Body přímky procházející středem inverze S_0 se zobrazují opět na tuto přímku s výjimkou středu S_0. [10]



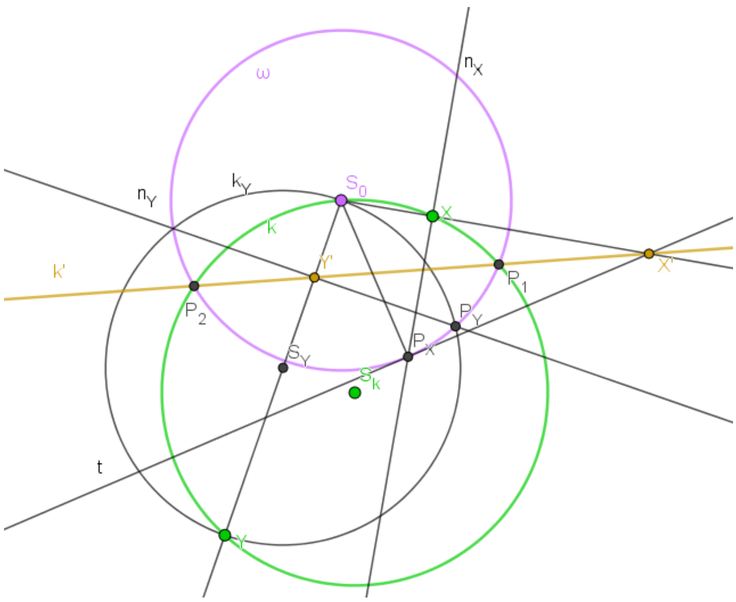
Obrázek 11: Zobrazení přímky p procházející středem inverze S_0 v kruhové inverzi

Věta 3. Obrazem přímky *p*, která neprochází středem inverze S_0, je kružnice *p'* procházející středem S_0 kromě bodu S_0. [10]



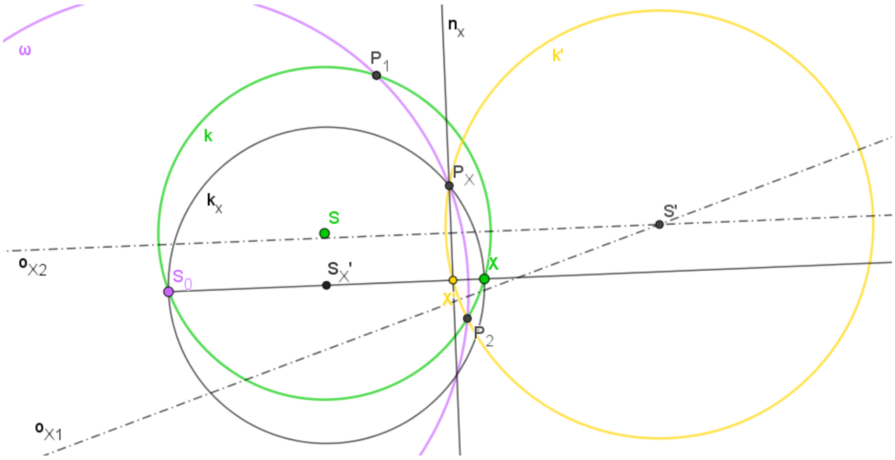
Obrázek 12: Zobrazení přímky p na kružnici p' v kruhové inverzi

Věta 4. Obrazem kružnice k (S_k, $|S_kS_0|$) procházející středem inverze S_0 (kromě bodu S_0) je přímka *k'*, která neprochází středem inverze S_0. [10]



Obrázek 13: Zobrazení kružnice k na přímku k' v kruhové inverzi

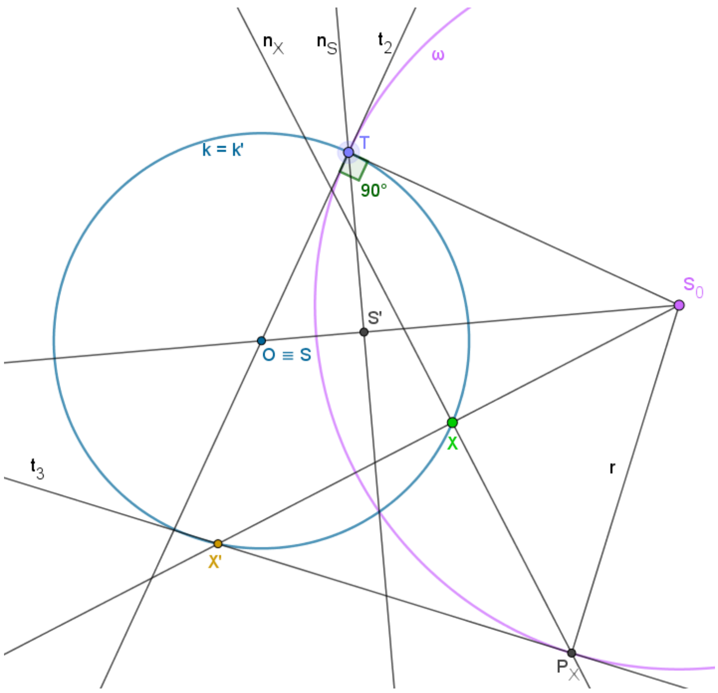
Věta 5. Obrazem kružnice *k* (*S*, *r*), která neprochází středem inverze S_0 je kružnice *k'*. [10]



Obrázek 14: Zobrazení kružnice k na kružnici k' v kruhové inverzi

Věta 6. Nutnou a postačující podmínkou, aby kružnice *k* se středem *S*, různá od určující kružnice *ω* (S_0, *r*), byla v kruhové inverzi samodružná, je, aby ortogonálně protínala určující kružnici *ω* dané inverze. [10]

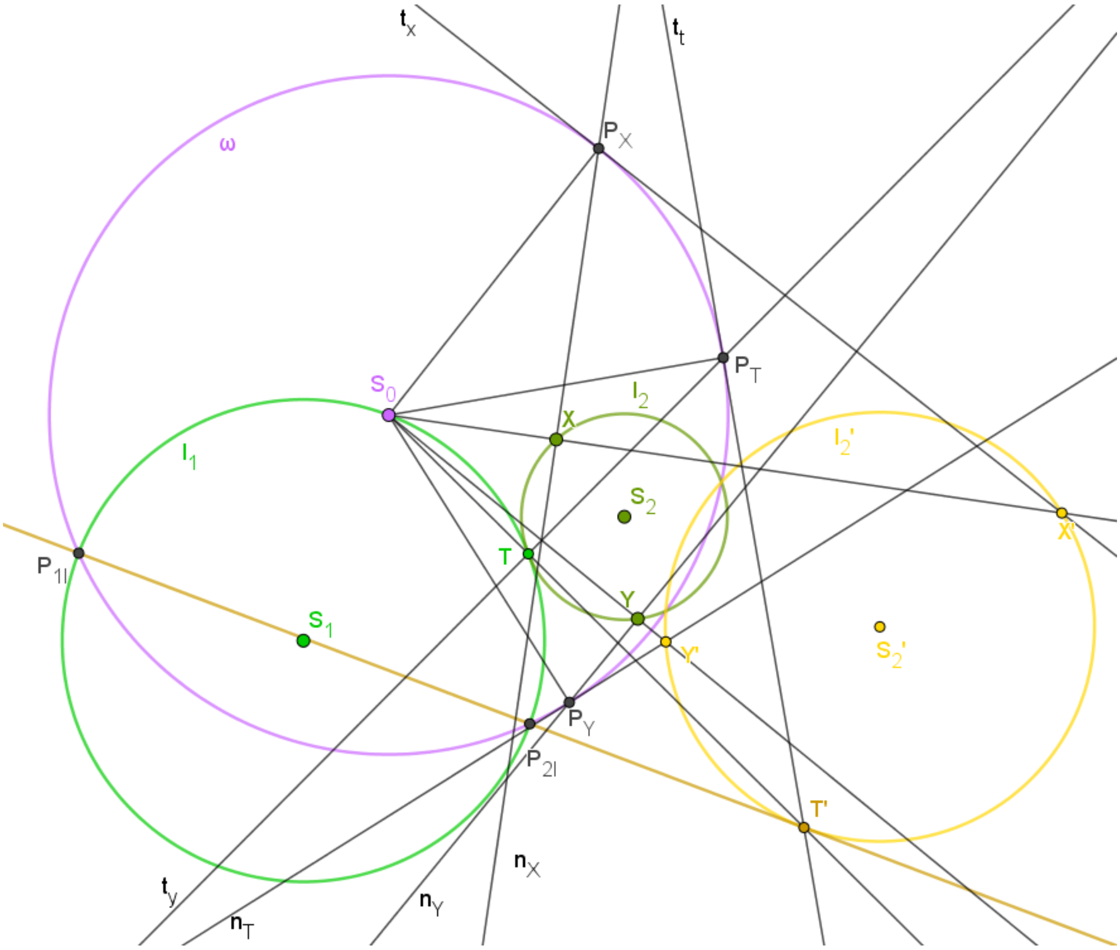
Poznámka: Otrogonální protínání dvou kružnic znamená, že tečny sestrojené v jejich společném bodě jsou navzájem kolmé. [8]



Obrázek 15: Nutná a postačující podmínka samodružné kružnice v kruhové inverzi

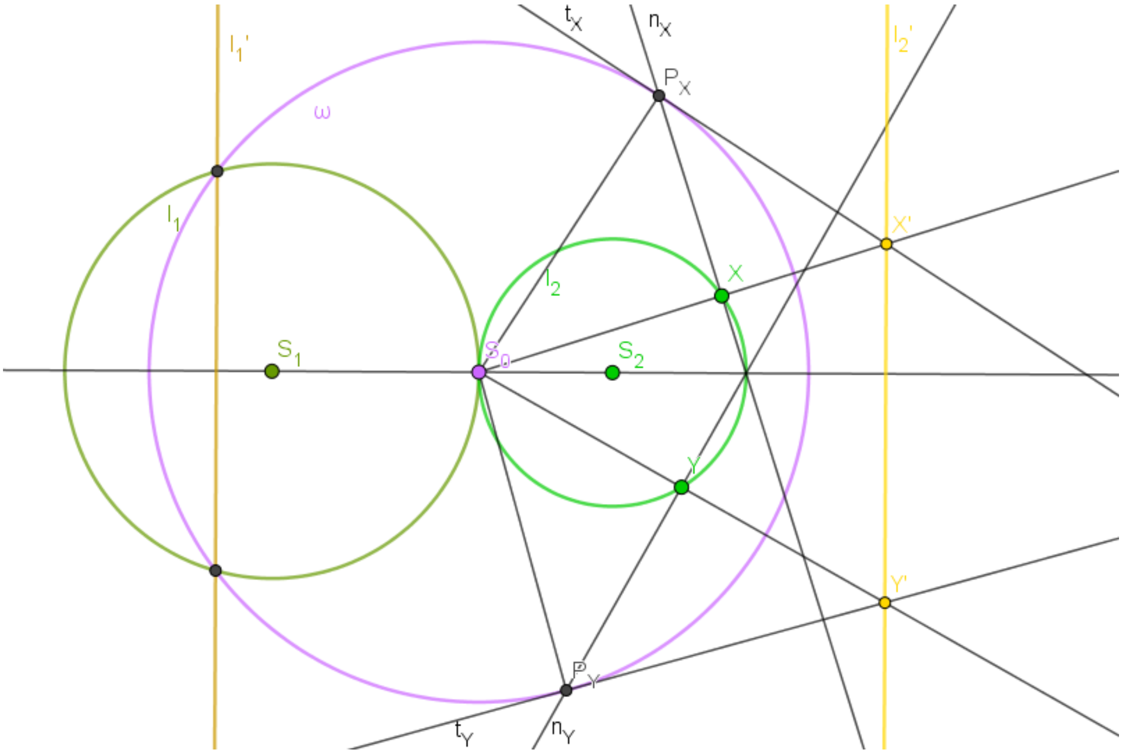
Věta 7. Nechť jsou l_1, l_2 dvě kružnice nebo přímka a kružnice, které se dotýkají. Potom:

a) Jestliže se dotýkají v bodě $T \neq S_0$, kde S_0 je střed kruhové inverze, potom se dotýkají i jejich obrazy v bodě T', který je obrazem bodu T. [10]



Obrázek 16: Zobrazení kružnic l_1 a l_2, které se dotýkají v bodě T, v kruhové inverzi

b) Jestliže se dotýkají ve středu inverze S_0, potom jsou jejich obrazem přímky $l_1{}' \parallel l_2{}'$ [10]



Obrázek 17: Zobrazení kružnic l_1 a l_2, které se dotýkají ve středu inverze S_0, v kruhové inverzi

Poznámka: V zápisech konstrukcí se bude užívat označení KI (ω, S_0, $X \rightarrow X'$). Toto označení říká, že se užívá kruhové inverze (KI) s řídicí kružnicí ω, která má střed v bodě S_0, zobrazující bod X na bod X'.

2.6 Cyklus

Pojem cyklus neboli orientovaná kružnice zavedl francouzský matematik Edmond Laguerre, který se narodil 9. dubna v roce 1834 v Bar-le-Duc, kde také umřel 14. dubna v roce 1886. ([9] str. 19)[17]

Každé kružnici lze dát dva smysly (tyto smysly jsou navzájem opačné), dle kterých lze otáčením bodu kružnici vytvořit. Takto vznikne orientovaná kružnice, tedy kružnice se smyslem, kterou nazveme cyklus. ([9] str. 19)

Poznámka: Cyklem se znaménkem „+“, tedy s kladným smyslem otáčení, rozumíme kružnici orientovanou proti směru hodinových ručiček. ([9], str. 19)

Analogicky cyklem se znamínkem „-“, tedy se záporným smyslem otáčení, rozumíme kružnici orientovanou po směru hodinových ručiček.

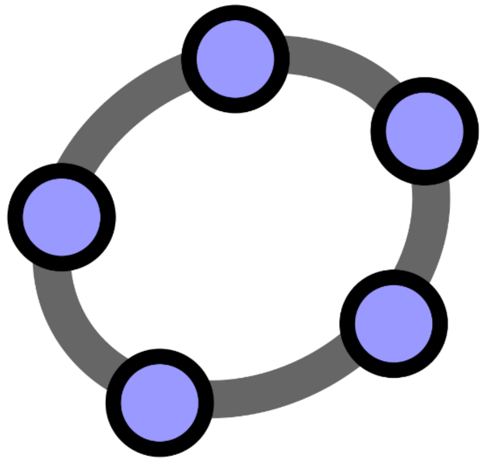
2.6.1 Základní věty v souvislosti s cykly

Věta o cyklech a chordálách: Jestliže se dva cykly dotýkají současně dvou jiných cyklů, pak chordála jedné dvojice dotykových cyklů prochází středem podobnosti druhé dvojice cyklů. ([10], str. 23)

Věta o poloze pólu chordály: Pól chordály dvou kružnic vzhledem ke kružnici třetí, která se prvních dvou dotýká, leží na spojnici dotykových bodů. ([9], str. 22)

Věta o dotýkajících se cyklech: Dotýká-li se cyklus dvou daných cyklů, pak spojnice dotykových bodů prochází středem podobnosti daných cyklů. ([9], str. 20)

3 GeoGebra



Obrázek 18: Ikona GeoGebry

„Open-source“ GeoGebra je dynamický matematický vzdělávací program, který sjednocuje oblasti geometrie, algebry, tabulkového procesoru, grafů, statistiky a analýzy do jednoho snadno použitelného balíčku. [5]

Tento vzdělávací program dostal mnoho ocenění v Evropě, ale také v USA. [5]

GeoGebru lze využívat jako software v počítači, ale také existuje možnost ji využívat ve webovém prostředí na internetu. Aplikaci pro počítač lze propojit s online verzí na internetu a poté je možné přímo z počítačového softwaru nahrávat vytvořené projekty na internet, kde mohou (ale nemusí) být přístupné i jiným uživatelům, např. jako výukový materiál. Materiály lze zpřístupnit buď veřejně, tzn. v tomto případě budou materiály přístupné komukoli, kdykoli a kdekoli s přístupem na internet, nebo pomocí odkazu. Takovým projektům se říká „aplety“, ty je možné seskupit do tzv. GeoGebra knihy ve webovém rozhraní programu GeoGebra v profilu registrovaného uživatele.

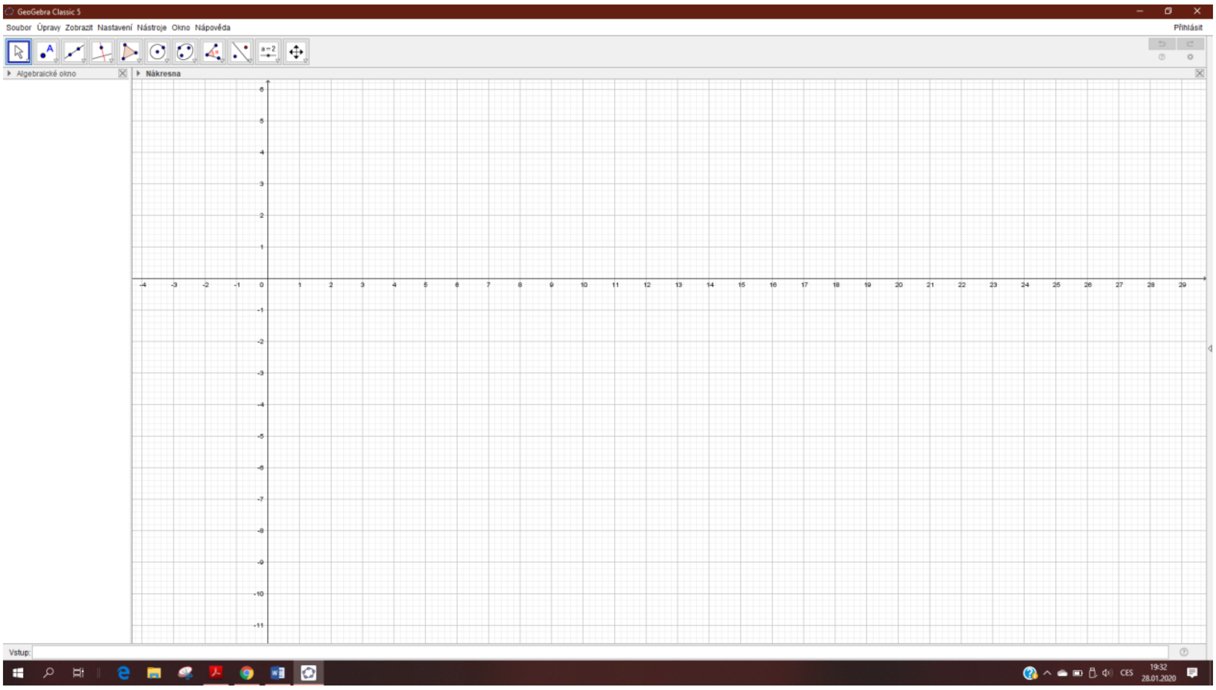
3.1 Stručné představení programu

Neoddělitelnou součástí této práce je program GeoGebra, a proto jsou v této kapitole představeny jeho internetová verze, ale i verze pro počítač.

3.1.1 Program v počítači

Počítačový software GeoGebra je výbornou podpůrnou aplikací, která má mnoho využití. Je vhodným pomocníkem ve výuce, lze ji jednoduše používat při objasnění pojmů, ale také může být skvělou alternativou propojení výuky matematiky a informatiky. Velká výhoda tohoto programu je, že je propojena se svou internetovou verzí, kde lze vytvořené aplety ukládat, ale kde je také lze promítat a sdílet.

V následujících odstavcích bude počítačová verze GeoGebry představena.



Obrázek 19: Prostředí GeoGebry v počítačové verzi softwaru

Obrázek 19 ukazuje, že největší část prostředí programu GeoGebra po jeho spuštění zabírá grafické okno, které se označuje nákresna. Nákresna představuje dvourozměrnou průmětnu a v programu GeoGebra jsou tyto nákresny dvě. Tento program obsahuje kromě nich mimo jiné také tzv. 3D náhled. Mezi všemi těmito nákresnami lze přecházet pomocí záložky zobrazit, anebo pouhým kliknutím levého tlačítka myši do příslušné nákresny.

Hned pod panelem záložek můžeme vidět lištu nástrojů. Pod jednotlivými zobrazenými ikonami nástrojů se schovávají i další nástroje. Jejich přehled se zobrazí kliknutím na značku malého trojúhelníku nacházející se v pravém dolním rohu každé ikony. Například průsečík budeme intuitivně hledat pod ikonou bodu apod.

Podél levé strany v obrázku 19 můžeme vidět tzv. algebraické okno, v němž se ukládají všechny (i skryté) objekty, které jsme při konstrukci apletu zobrazili v nákresně, resp. v 3D náhledu. Objekty jsou zde zaznamenány a lze jim měnit jejich vlastnosti, jako například umístění, velikost apod.

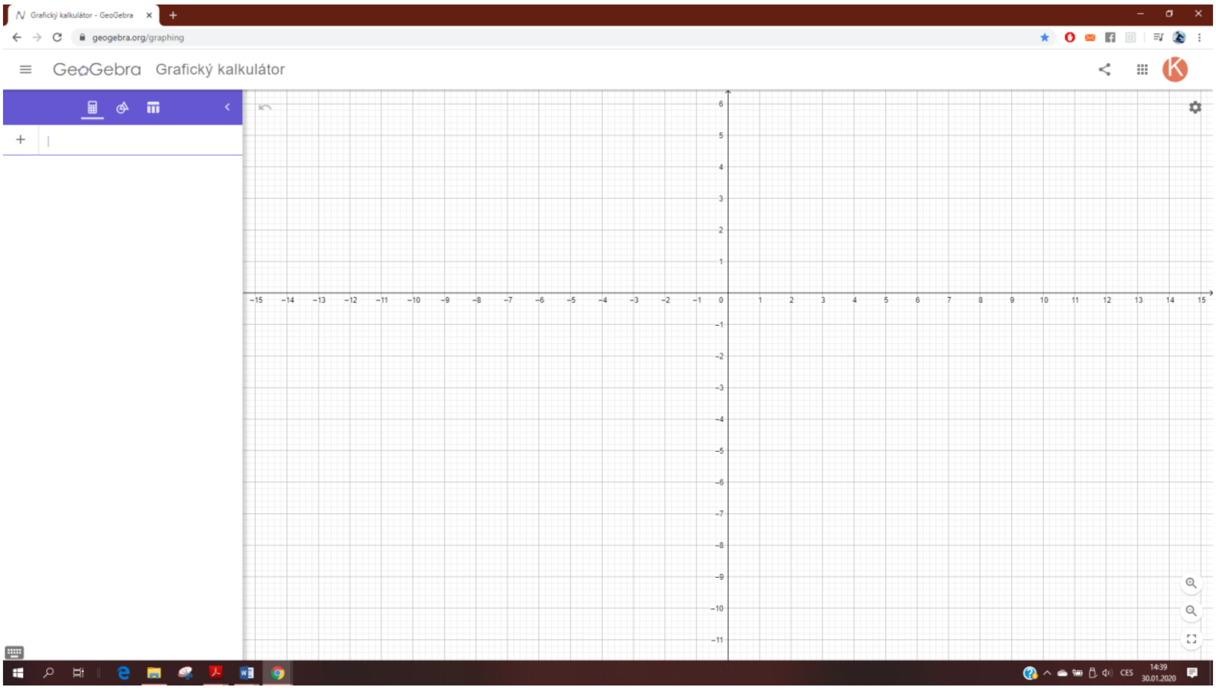
Těsně nad spodní lištou vidíme vstupní pole. Objekty není nutné zadávat pouze pomocí nástrojů, ale v okamžiku, kdy chceme zadat např. nějakou křivku pomocí její parametrické či implicitní rovnice, můžeme k jejímu zadání použít vstupní pole a křivka se automaticky do nákresny (3D náhledu) prokreslí.

Po spuštění programu se v nákresně automaticky zobrazí osy *x*, *y* a mřížka. Pokud by osy a mřížka překážely nějaké geometrické představě, lze je skrýt. Někdy je potřeba měnit i vlastnosti některých objektů, např. osu úsečky chceme nastavit čerchovaně, to lze v plovoucím okně vlastností objektů změnit. Toto plovoucí okno obsahuje vlastnosti právě vybraných objektů a lze jej uchytit i přímo v pracovním okně.

3.1.2 Program ve webovém prohlížeči

GeoGebru ve webovém prohlížeči najdeme pod linkem: www.geogebra.org/graphing, čímž se dostaneme do velmi podobného prostředí jako u počítačového programu.

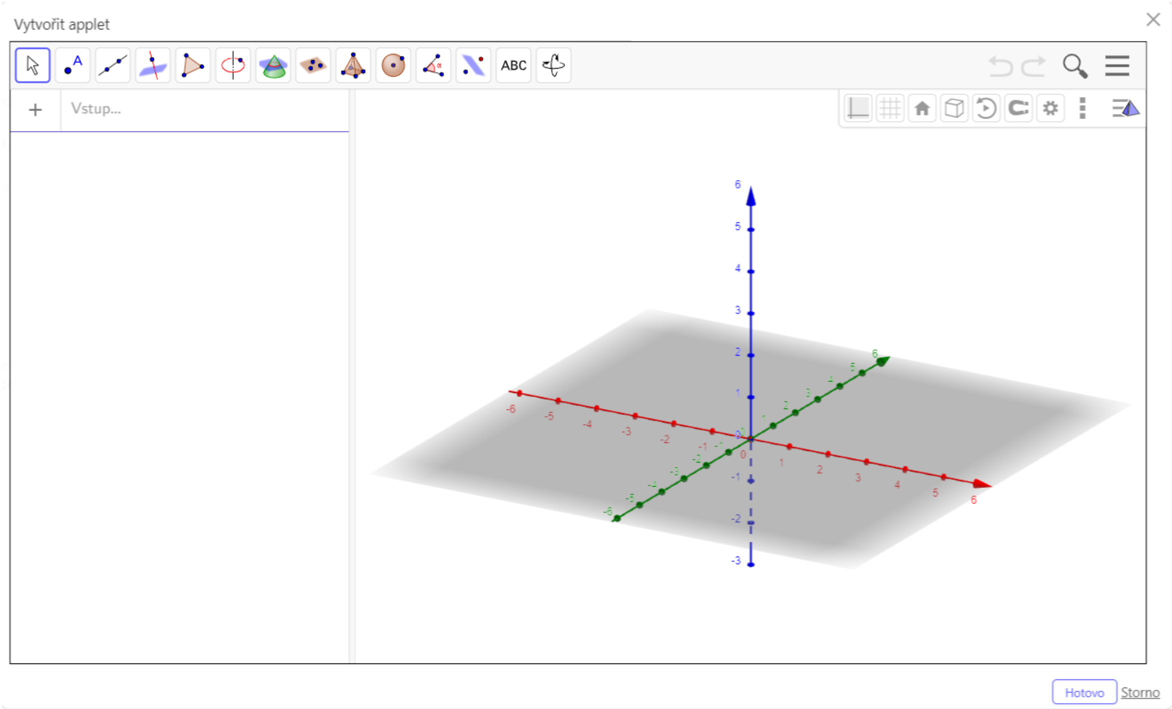
Pro práci v této verzi není třeba, aby byl uživatel zaregistrovaný a přihlášený. Pokud však chce uživatel práci uložit, je třeba, aby byl přihlášený ke svému GeoGebra účtu.



Obrázek 20: Prostředí GeoGebry ve webovém prohlížeči

Na obrázku 20 je vidět, že grafické okno je podobné jako v obrázku 19. Mřížka i osy se dají skrýt stejným způsobem. Prostředí programu ve webovém prohlížeči se liší v nástrojích, které jsou v této verzi v modré liště v levé části prostředí programu.

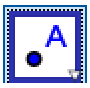
Přecházení mezi grafy, 3D prostředím je zde trochu jiné oproti počítačové verzi programu. Je zapotřebí využít možnosti vytvořit aplet a poté v možnostech vyznačených třemi tečkami pod sebou v pravé části nahoře pod symbolem lupy přepnout nebo vybrat možnost 3D prostředí nebo nákresny. Algebraické okno funguje i jako vstupní pole.



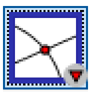
Obrázek 21: Prostředí GeoGebry ve webovém prohlížeči II

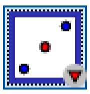
3.1.3 Nástroje využívané při tvorbě apletů

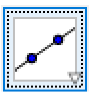
Následuje přehled nástrojů programu GeoGebra, které byly využity při tvorbě apletů zařazených do této práce.

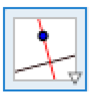


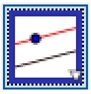
Vytvoření bodu – libovolně umístěného na pracovní ploše


Vytvoření průsečíku

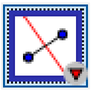

Střed mezi dvěma body


Vytvoření přímky definované dvěma body (pokud body nejsou vytvořené, vytvoří se)

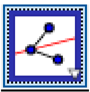

Sestrojení kolmice daným bodem k dané přímce



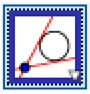
Sestrojení rovnoběžky daným bodem s danou přímkou



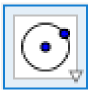
Vytvoření osy úsečky



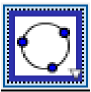
Vytvoření osy úhlu definovaného dvěma přímkami / úsečkami / polopřímkami



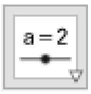
Sestrojení tečny z daného bodu k dané kružnici



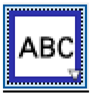
Vytvoření kružnice s daným středem a vedené daným bodem



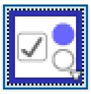
Vytvoření kružnice definované trojicí nekolineárních bodů (Apolloniova úloha typu ***BBB***)



Vytvoření posuvníku



Textové pole



Zaškrtávací okénko

4 Přehled Apolloniových a Pappových úloh řešených v GeoGebře

Všechny vytvořené aplety pro Apolloniovy a Pappovy úlohy jsou vloženy do GeoGebra knihy, která vytváří sbírku těchto úloh. Knihu lze nalézt na odkaze: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar.

4.1 Apolloniovy úlohy

Apolloniovy úlohy jsou geometrické příklady, které na základě tří daných objektů hledají kružnici či kružnice daných vlastností, tj. kružnici procházející daným bodem, resp. body, dotýkající se dané přímky, resp. přímek nebo dané kružnice, resp. kružnic. Tyto úlohy mají nanejvýše 8 obecných řešení.

Pro každý typ Apolloniovy úlohy je vytvořen aplet obsahující alespoň jednu možnou metodu řešení daného typu úlohy. Řešení úloh jsou v apletech propojena s tzv. zaškrtávacím políčkem. Jednotlivé kroky řešení příslušného typu úlohy jsou propojeny s posuvníkem a jsou tedy postupně zobrazovány pohybem tohoto posuvníku. Pohybem posuvníku ale i tzv. volných objektů si uživatel může vyzkoušet, kdy daný typ úlohy má či nemá řešení.

U každé Apolloniovy úlohy je provedena diskuse jejího řešení. Ta se nachází také v příslušném apletu v sestavené GeoGebra knize.

Následuje představení jednotlivých typů Apolloniových úloh:

4.1.1 Typ *BBB* – bod, bod, bod

U tohoto typu úlohy jsou zadané tři body A, B, C. Úkolem je sestrojit kružnici k, která prochází třemi danými body.

Rozbor úlohy: Tato úloha má právě jeden způsob řešení a to pomocí metody „množina bodů daných vlastností“ (MBDV).

Jestliže body A, B a C neleží na jedné přímce, jedná se ve své podstatě o konstrukci kružnice opsané trojúhelníku ABC, přičemž střed hledané kružnice je průsečík os stran AB, BC, AC trojúhelníku ABC.

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/qdkabact

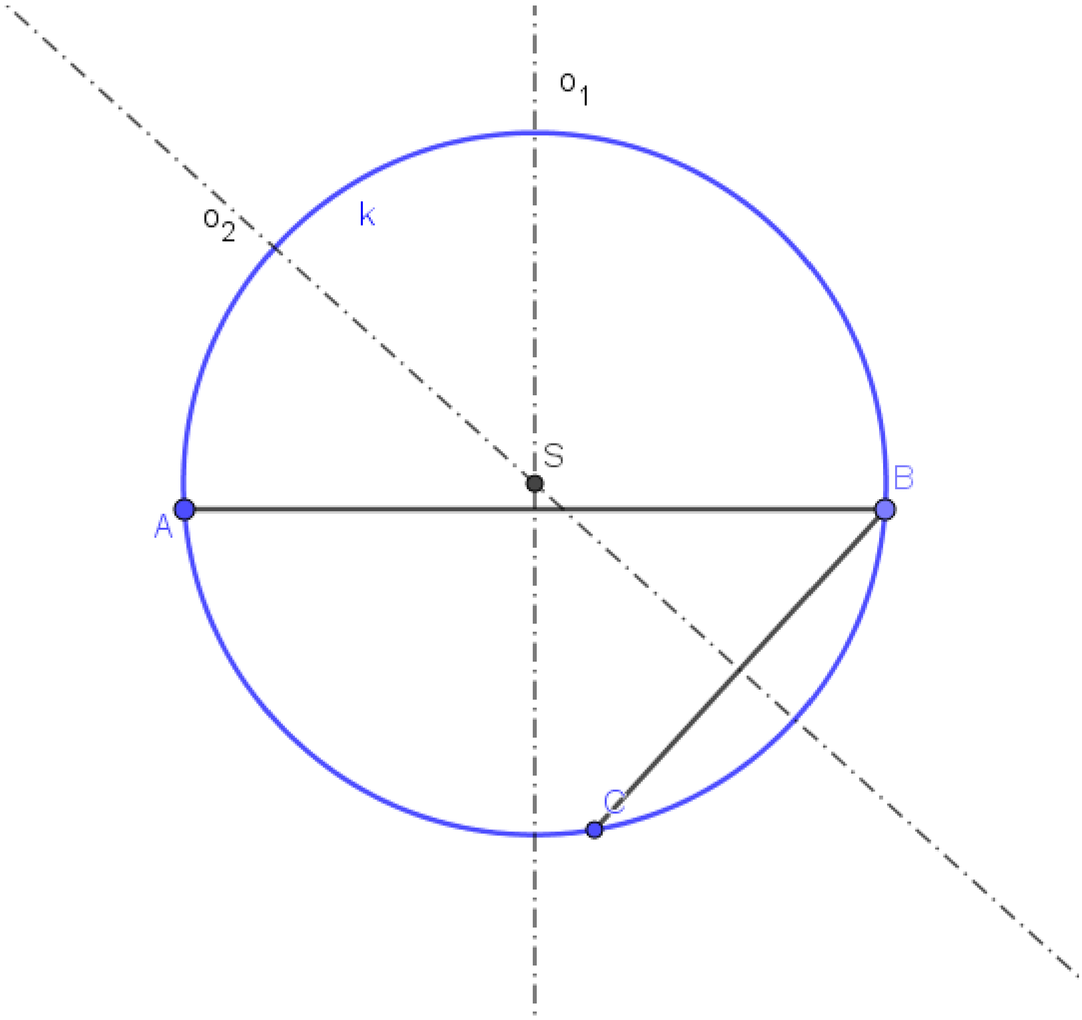
Symbolický zápis:

1. o_1; *o_1 je osa úsečky AB*

2. *o_2; o_2 je osa úsečky BC*
3. *S; $S \in o_1 \cap o_2$*
4. *k; k (S, |SA|)*

Poznámka: Pro konstrukci středu S není třeba hledat osu o_3, konstrukce osy o_3 může sloužit jako kontrola přesnosti rýsování.

Konstrukce:



Obrázek 22: Apolloniova úloha typu BBB

Diskuse řešení: Počet řešení této úlohy je závislý na umístění daných bodů *A, B* a *C* v rovině. Pokud body *A, B, C* neleží na jedné přímce, pak má úloha právě jedno řešení. V opačném případě úloha řešení nemá.

4.1.2 Typ *BBp* – bod, bod, přímka

U tohoto typu úlohy jsou zadané dva body A, B a přímka p. Úkolem je sestrojit kružnici k, která prochází body A, B a dotýká se přímky p.

Rozbor: Na základě umístění daných prvků v rovině tato úloha může a nemusí mít řešení.

Tato úloha má více způsobů řešení. Pokud úlohu budeme řešit pomocí MBDV, bude mít úloha pouze jedno řešení. Pokud však použijeme mocnosti bodu ke kružnici nebo kruhové inverze, pak bude mít úloha dvě řešení.

Dále ukážeme řešení této úlohy pomocí kruhové inverze:

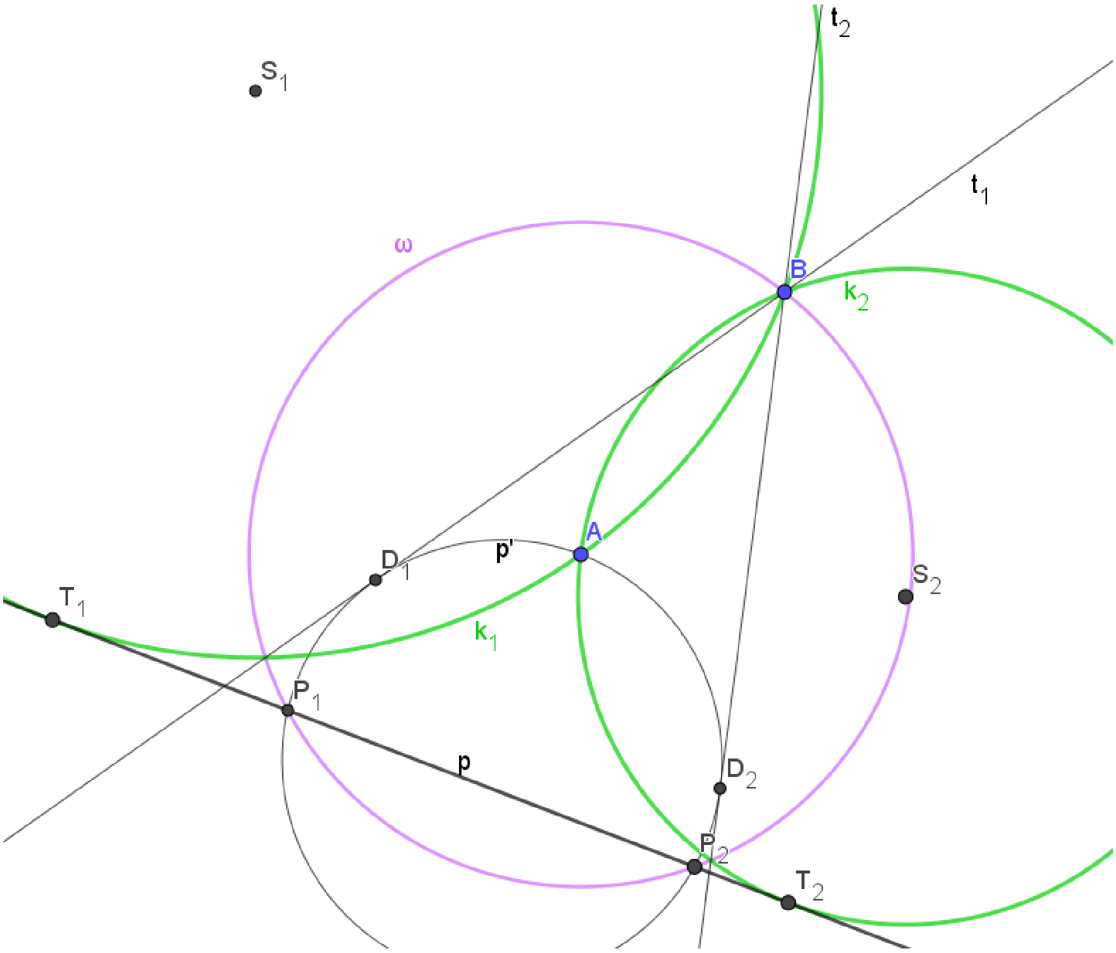
Řídicí kružnici ω kruhové inverze určíme tak, aby měla střed v bodě A a její poloměr byl roven velikosti $|AB|$. Poté pomocí kruhové inverze s řídicí kružnicí ω $(A, |AB|)$ převedeme přímku p na kružnici p', nalezneme tečny t_1, t_2 ke kružnici p' sestrojené z bodu B. Nakonec tečny t_1 a t_2 pomocí dané kruhové inverze zobrazíme na kružnice k_1 a k_2. Přitom k_1 a k_2 jsou hledané kružnice procházející body A, B a dotýkající se přímky p.

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/mgargz6d

Symbolický zápis konstrukce: Následuje ukázka řešení úlohy pomocí kruhové inverze

1. ω; ω $(A, |AB|)$
2. p'; KI $(\omega, A, p \to p')$
3. t_1, t_2 jsou společné tečny ke kružnici p' z bodu B
4. k_1, k_2; KI $(\omega, A, t_1 \to k_1, t_2 \to k_2)$

Konstrukce:



Obrázek 23: Apolloniova úloha typu BBp

Diskuse řešení: Úloha může mít právě jedno řešení, ale nanejvýše dvě.

Tato úloha má jedno řešení právě tehdy, když body *A* a *B* tvoří přímku, která je rovnoběžná s přímkou *p*. Dvě řešení bude mít v případě, když bude přímka, která prochází body *A* a *B*, různoběžná s přímkou *p*. V okamžiku, kdy jeden z bodů *A*, *B* leží na přímce *p*, z Apolloniovy úlohy typu ***BBp*** se stává Pappova úloha typu ***BpT***. Úloha nebude mít řešení, pokud body *A*, *B* budou ležet na přímce *p*, anebo pokud body *A*, *B* budou ležet v navzájem opačných polorovinách určených přímkou *p*.

4.1.3 Typ *BBk* – bod, bod, kružnice

Jsou dány body *A*, *B* a kružnice *k*. Úkolem je nalezení kružnice *k‘* tak, aby procházela body *A*, *B* a dotýkala se kružnice *k*.

Rozbor: Tato úloha má více způsobů řešení, vhodný způsob volíme podle uspořádání zadaných prvků.

Pokud body A a B neleží na kružnici k, můžeme úlohu řešit pomocí MBDV a potenčního středu nebo pomocí kruhové inverze. Toto rozložení prvků má dvě řešení. Jestliže buď bod A, nebo bod B leží na kružnici k, řeší se úloha pomocí MBDV a má právě jedno řešení.

Následuje popis řešení úlohy pomocí potenčního středu:

Středy výsledných kružnic budou ležet na ose o úsečky AB. Nejprve vytvoříme pomocnou kružnici k_p, jejíž střed S_p je libovonný bod osy úsečky AB a která prochází body A a B, tj. bude splňovat 1. podmínku. Důsledkem toho můžeme nalézt potenční střed P kružnic k a k_p jako průsečík chordály $p \equiv AB$ kružnice k_p a hledané kružnice a chordály s kružnic k_p a k. Z potenčního středu P sestrojíme tečny t_1 a t_2 ke kružnici k, jejich body dotyku T_1 a T_2 s danou kružnicí k získáme jako průsečíky Thaletovy kružnice sestrojené nad průmětem PS. Středy S_1 a S_2 hledaných kružnic k_1 a k_2 získáme po řadě jako průsečíky polopřímek T_1S a ST_2 s osou úsečky AB. Sestrojíme kružnice k_1 $(S_1, |S_1T_1|)$ a k_2 $(S_2, |S_2T_2|)$.

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/jexszru2

Symbolický zápis konstrukce:

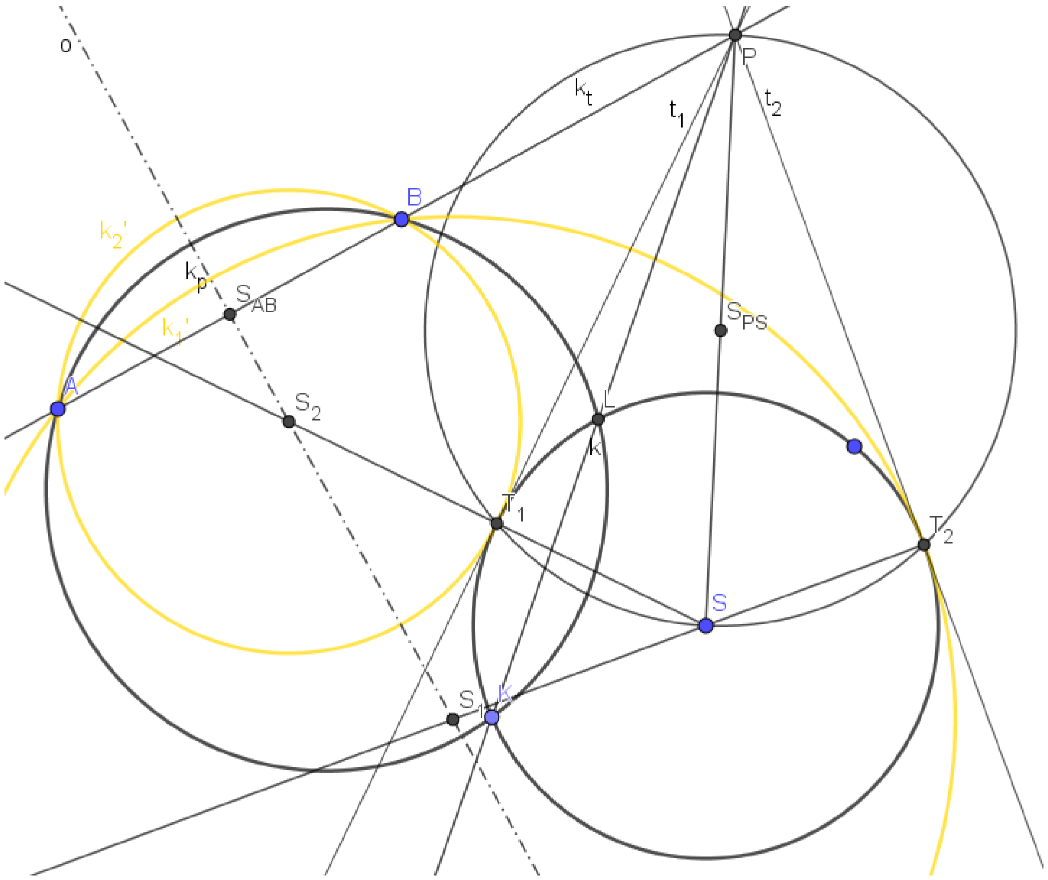
1. p; $p \equiv AB$
2. o; osa úsečky AB
3. S_p; $S_p \in o$, libovolný bod
4. k_p; k_p $(S_p, |S_pA|)$ (musí splňovat 1. podmínku, tj. procházet body A a B)
5. $E; F; E, F \in k_p \cap k$
6. $S; s \equiv EF$
7. P; $P \in p \cap s$ *(potenční střed)*
8. S_{PS}; střed úsečky PS
9. k_t; k_t $(S_{PS}, |S_{PS}S|)$
10. $T_1, T_2; T_1, T_2 \in k_t \cap k$
11. $t_1, t_2; t_1 \equiv PT_2, t_2 \equiv PT_1$
12. $S_1; S_1 \in o \cap T_1S$

    $S_2; S_2 \in o \cap ST_2$

13. k_1; $k_1\,(S_1, |S_1T_1|)$

k_2; $k_2\,(S_2, |S_2T_2|)$

Konstrukce:



Obrázek 24: Apolloniova úloha typu BBk

Diskuse řešení: Tento typ úlohy má nanejvýše dvě řešení.

Pokud oba body *A* a *B* leží na kružnici *k*, nebo pokud jeden z bodů *A*, *B* leží vně a druhý uvnitř kružnice *k*, úloha nemá řešení. Pokud jeden z bodů leží na kružnici *k* a druhý ne, úloha bude mít právě jedno řešení a stává se z ní Pappova úloha typu ***BkT***. Úloha má dvě řešení pokud body *A* a *B* neleží na kružnici *k*.

4.1.4 Typ *Bpp* – bod, přímka, přímka

Je dán bod *B* a dvě přímky *q* a *p*. Úkolem je sestrojení takové kružnice *k*, která se bude dotýkat současně obou přímek *q* a *p* a zároveň procházet bodem *B*.

Rozbor: Tato úloha má více způsobů řešení. Způsob řešení volíme dle uspořádání zadaných prvků.

Pokud jsou zadané přímky p a q různoběžné a bod B neleží na žádné z nich, pak se úloha s takto rozmístěnými prvky dá řešit pomocí stejnolehlosti nebo pomocí kruhové inverze.

Dále je popsáno řešení úlohy pomocí kruhové inverze:

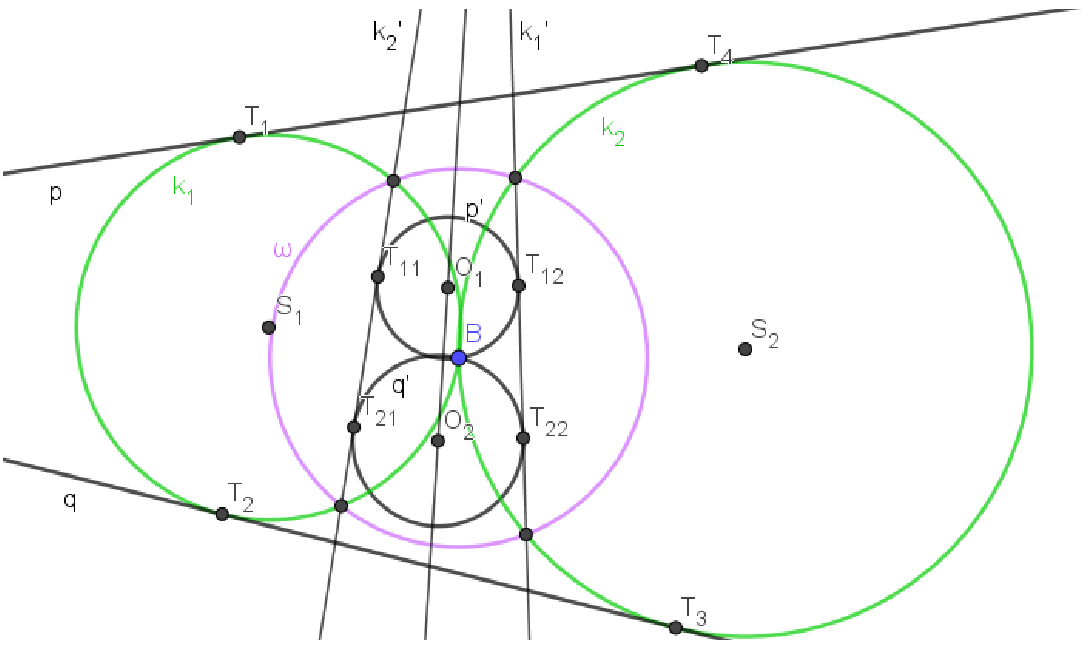
Řídicí kružnice ω se středem kruhové inverze v bodě B má libovolný poloměr. Přímky p a q se v dané kruhové inverze zobrazí na kružnice p' a q'. Ke kružnicím p' a q' nalezneme tečny k_1' a k_2'. Tečny k_1'a k_2' pomocí kruhové inverze se středem B a s řídicí kružnicí ω zobrazíme na hledané kružnice k_1 a k_2.

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar#material/zuaf8qqb

Symbolický zápis konstrukce: Pomocí kruhové inverze

1. ω, ω (B, r)
2. p', q'; KI (ω, B, $p \rightarrow p'$, $q \rightarrow q'$)
3. k_1', k_2'; k_1', k_2' jsou společné tečna ke kružnicím p', q'
4. k_1, k_2; KI (ω, B, $k_1' \rightarrow k_1$, $k_2' \rightarrow k_2$)

Konstrukce:



Obrázek 25: Apolloniova úloha typu Bpp

Diskuse řešení:

Úloha nemá žádné řešení:

- Pokud přímky p a q jsou navzájem rovnoběžné a pokud současně bod B leží vně pásu vytvořeného přímkami p a q.
- Pokud jsou přímky p a q různoběžné a bod B je průsečíkem.

Úloha má právě 1 řešení:

- Pokud jsou přímky p a q navzájem rovnoběžné a pokud bod B leží na jedné ze dvou daných přímek. (Pappova úloha typu ***ppT***)

Úloha má 2 řešení:

- Pokud jsou přímky p a q navzájem rovnoběžné a pokud bod B leží uvnitř pásu vytvořeného přímkami p a q.
- Pokud jsou přímky p a q různoběžné a bod B leží právě na jedné ze dvou zadaných přímek. (Pappova úloha typu ***ppT***)
- Pokud jsou přímky p a q různoběžné a bod B neleží na žádné ze zadaných přímek.

4.1.5 Typ *Bpk* – bod, přímka, kružnice

Je dán bod B, přímka p a kružnice k (S, r_k). Úkolem je sestrojení kružnice l, která prochází bodem B, dotýká se současně přímky p a kružnice k.

Rozbor: Tato úloha má více způsobů řešení. Způsob řešení se volí dle uspořádání zadaných prvků.

Pokud se zadaná přímky p a kružnice k dotýká v bodě T a bod B neleží na žádné z nich, ani uvnitř kružnice k, pak se úloha řeší pomocí kruhové inverze.

Následuje řešení pomocí kruhové inverze:

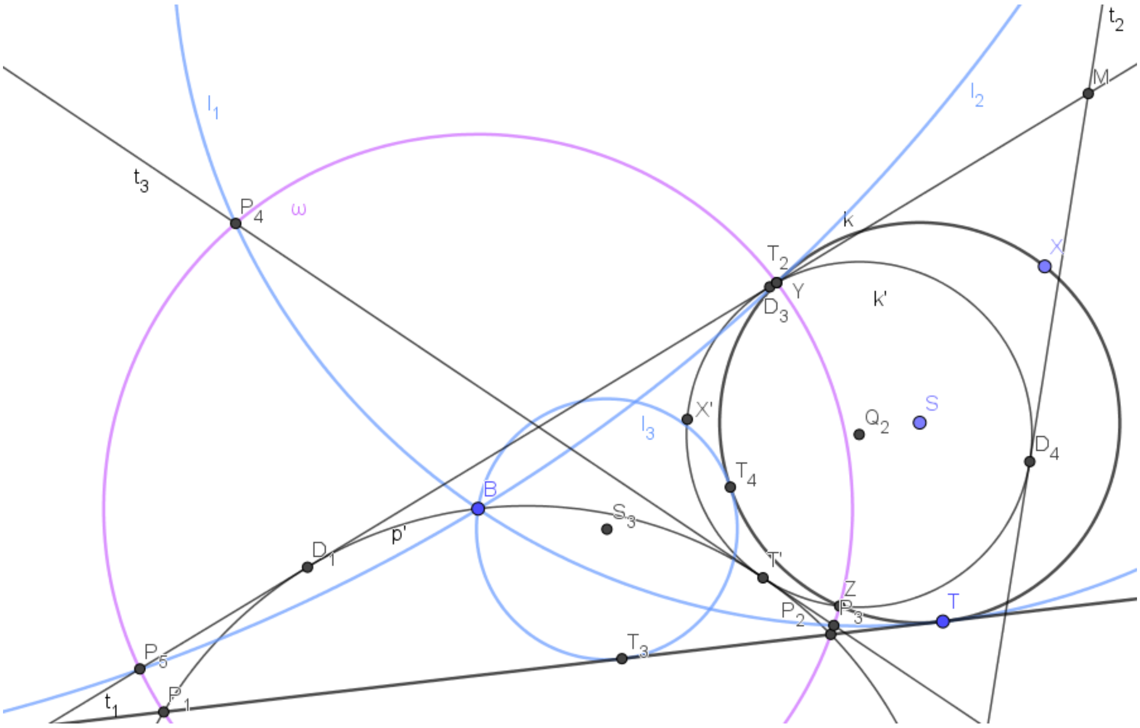
Řídicí kružnice ω se středem kruhové inverze v bodě B má libovolný poloměr. Přímka p a kružnice k se v dané kruhové inverze zobrazí na kružnice p‘ a k‘. Ke kružnicím p‘ a k‘ nalezneme tečny t_1, t_2 a t_3. Tečny t_1, t_2 a t_3 pomocí kruhové inverze se středem B a s řídicí kružnicí ω zobrazíme na hledané kružnice l_1, l_2 a l_3.

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar#material/msck42dw

Symbolický zápis konstrukce:

1. ω; $\omega\ (B, r_k)$
2. p'; $KI\ (\omega, B, p \rightarrow p')$
3. k'; $KI\ (\omega, B, k \rightarrow k')$
4. t_1, t_2, t_3; jsou společné tečny ke kružnicím p', k'
5. k_1, k_2; KI $(\omega, B, t_1 \rightarrow l_1, t_2 \rightarrow l_2, t_3 \rightarrow l_3)$

Konstrukce:



Obrázek 26: Apolloniova úloha typu Bpk

Diskuse řešení:

Úloha nemá žádné řešení:

- Pokud bod *B* je společným bodem přímky *p* a kružnice *k* a přitom přímka *p* je sečnou kružnice *k*.
- Pokud spolu přímka *p* a kružnice *k* nemají žádný společný bod a bod *B* leží uvnitř kružnice *k*.
- Pokud spolu přímka *p* a kružnice *k* nemají žádný společný bod a bod *B* leží v opačné polorovině určené přímkou *p*, než ve které leží kružnice *k*.

Úloha má 1 řešení:

- Pokud je přímka *p* tečnou kružnice *k* a bod *B* leží uvnitř kružnice *k*. (Pappova úloha typu ***kkT***)
- Pokud je přímka *p* tečnou kružnice *k* a bod *B* leží v opačné polorovině určené přímkou *p*, než ve které leží kružnice *k*. (Pappova úloha typu ***kkT***)

Úloha má 2 řešení:

- Pokud bod *B* náleží přímce *p*, ale nenáleží kružnici *k*. (Pappova úloha typu ***kpT***)
- Pokud bod *B* náleží kružnici *k*, ale nenáleží přímce *p*. (Pappova úloha typu ***pkT***)
- Pokud je přímka *p* sečnou kružnice *k* a bod *B* nenáleží ani přímce *p*, ani kružnici *k*.

Úloha má 3 řešení:

- Pokud je přímka *p* tečnou kružnice *k* a bod *B* leží v téže polorovině určené přímkou *p*, jako leží kružnice *k*.

Úloha má 4 řešení:

- Pokud spolu přímka *p* a kružnice *k* nemají žádný společný bod a bod *B* leží v téže polorovině určené přímkou *p*, jako leží kružnice *k*.

Úloha má nekonečně mnoho řešení:

- Pokud bod *B* je společným bodem přímky *p* a kružnice *k* a přímka *p* je přitom tečnou kružnice *k*.

4.1.6 Typ *Bkk* – bod, kružnice, kružnice

Jsou dány dvě kružnice k_1 (S_1, r_1) a k_2 (S_2, r_2) a bod *B*. Úkolem je nalezení takové kružnice, která se dotýká daných dvou kružnic k_1 a k_2 a prochází bodem *B*.

Rozbor: Tato úloha má více způsobů řešení. Způsob řešení volíme dle uspořádání prvků.

Pokud jsou kružnice k_1 a k_2 soustředné a bod *B* leží v mezikruží kružnic k_1 a k_2, pak úlohu řešíme pomocí metody množiny bodů daných vlastností. V případě, že nemají žádný společný bod a bod B leží vně obou daných kružnic k_1 a k_2, pak je možné řešit tento typ úlohy pomocí kruhové inverze.

Následuje popis řešení úlohy pomocí kruhové inverze:

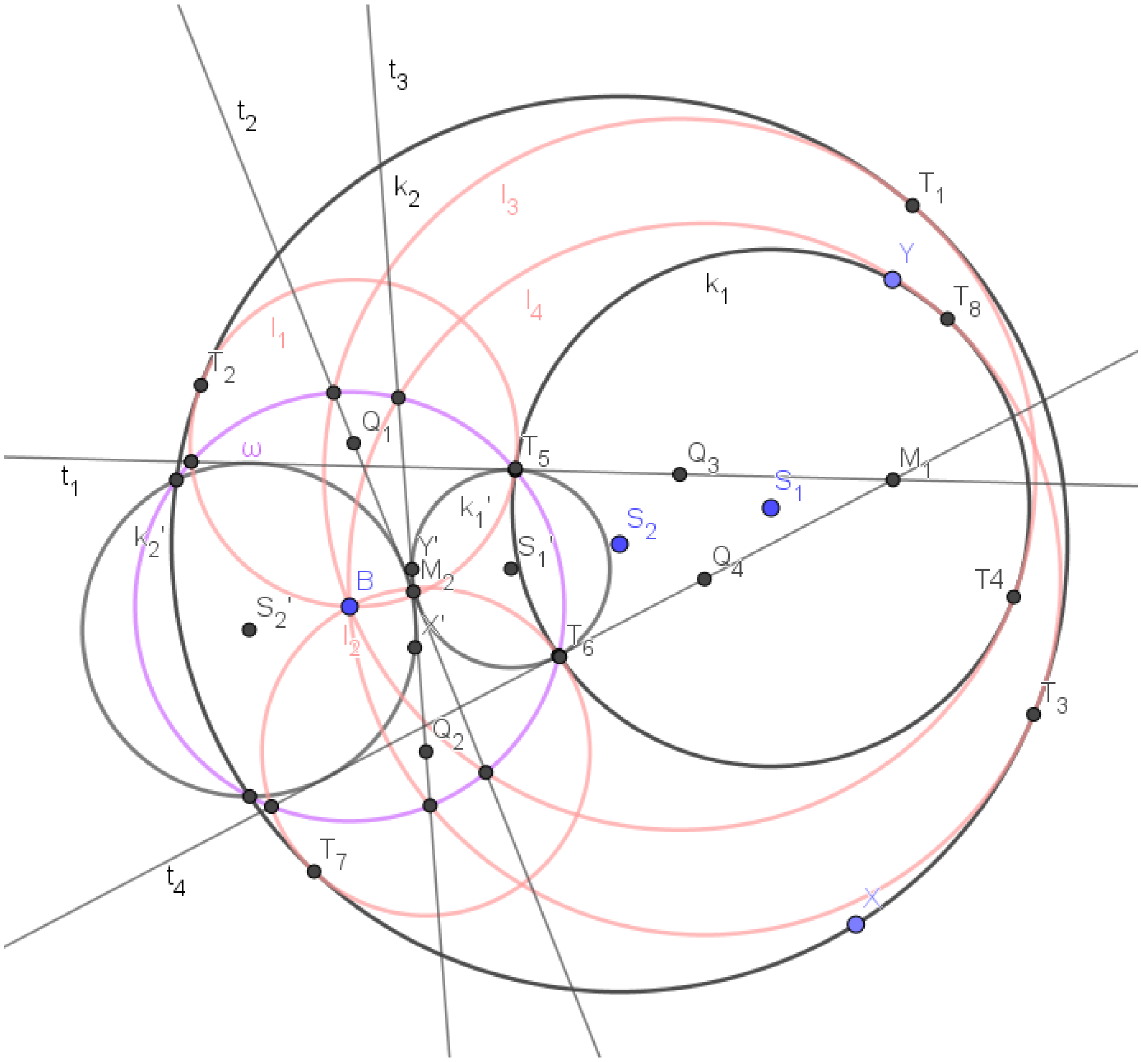
Jsou dané kružnice k_1 a k_2, které nejsou soustředné, přitom ale kružnice k_1 leží uvnitř kružnice k_2 Dále je dán bod B, který je vnějším bodem kružnice k_1 a současně vnitřním bodem k_2. Řídicí kružnici ω volíme tak, aby měla střed v bodě B a protínala obě kružnice k_1 a k_2. Dále pomocí kruhové inverze s řídící kružnicí ω a středem B zobrazíme kružnice k_1 a k_2 na kružnice k_1' a k_2'. K nově vzniklým kružnicím k_1' a k_2' nalezneme tečny t_1, t_2, t_3 a t_4. Tečny pomocí dané kruhové inverze zobrazíme na hledané kružnice l_1, l_2, l_3 a l_4.

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar#material/cqcfwzhx

Symbolický zápis konstrukce: Pomocí kruhové inverze

1. ω; ω (B, r)
2. k_1', k_2'; KI $(\omega, B, k_1 \rightarrow k_1', k_2 \rightarrow k_2')$
3. t_1, t_2, t_3, t_4; t_1, t_2, t_3, t_4 jsou společné tečna ke kružnicím k_1' a k_2'
4. l_1, l_2, l_3, l_4; KI $(\omega, B, t_1 \rightarrow l_1, t_2 \rightarrow l_2, t_3 \rightarrow l_3, t_4 \rightarrow l_4)$

Konstrukce:



Obrázek 27: Apolloniova úloha typu Bkk

Diskuse řešení:

Úloha nemá žádné řešení:

- Pokud kružnice k_1, k_2, kde $r_1 < r_2$, jsou soustředné a bod B leží uvnitř kružnice k_1 nebo vně kružnice k_2 .
- Pokud jsou kružnice k_1, k_2, kde $r_1 < r_2$, nesoustředné, kružnice k_1 leží uvnitř kružnice k_2 a bod B leží uvnitř kružnice k_1 nebo vně kružnice k_2.
- Pokud se kružnice k_1, k_2 protínají a bod B je jedním z průsečíků těchto dvou kružnic.

- Pokud kružnice k_1, k_2 nemají žádný společný bod a ani jedna z nich neleží uvnitř druhé a bod B leží uvnitř jedné z nich.

Úloha má 1 řešení:

- Pokud kružnice k_1, k_2 mají vnitřní dotyk a bod B leží na jedné z nich. (Pappova úloha typu ***kkT***)
- Pokud kružnice k_1, k_2 mají vnější dotyk a bod B leží na jedné z nich. (Pappova úloha typu ***kkT***)

Úloha má 2 řešení:

- Pokud jsou kružnice k_1, k_2, kde $r_1 < r_2$, jsou soustředné a bod B leží na jedné z nich. (Pappova úloha typu ***kkT***)
- Pokud jsou kružnice k_1, k_2, kde $r_1 < r_2$, nesoustředné, kružnice k_1 leží uvnitř kružnice k_2 a bod B leží na jedné z nich. (Pappova úloha typu ***kkT***)
- Pokud se kružnice k_1, k_2 protínají a bod B leží na jedné z nich. (Pappova úloha typu ***kkT***)
- Pokud se kružnice k_1, k_2 protínají a bod B je vnějším bodem obou kružnic.

Úloha má 3 řešení:

- Pokud kružnice k_1, k_2 mají vnitřní dotyk a bod B není bodem žádné z nich.
- Pokud kružnice k_1, k_2 mají vnější dotyk a bod B není bodem žádné z nich.

Úloha má 4 řešení:

- Pokud kružnice k_1, k_2 leží vedle sebe a bod B leží mimo obou zadaných kružnic.
- Pokud jsou kružnice k_1, k_2, kde $r_1 < r_2$, nesoustředné, kružnice k_1 leží uvnitř kružnice k_2 a bod B je vnější bod kružnice k_1 a současně vnitřní bod kružnice k_2.
- Pokud jsou kružnice k_1, k_2, kde $r_1 < r_2$, soustředné a bod B leží v mezikruží zadaných kružnic.

Úloha má nekonečně mnoho řešení:

- Pokud kružnice k_1, k_2 mají vnější dotyk a bod B je bodem dotyku těchto kružnic.

- Pokud kružnice k_1, k_2 mají vnitřní dotyk a bod B je bodem dotyku těchto kružnic.

4.1.7 Typ *ppp* – přímka, přímka, přímka

Jsou dány tři přímky g, f, h. Úkolem je narýsovat kružnici tak, aby se dotýkala současně všech tří daných přímek.

Rozbor: Tato úloha má více způsobů řešení. Způsob řešení volíme dle uspořádání zadaných prvků.

Následuje popis řešení úlohy pomocí MBDV:

Zadané přímky se protínají ve třech bodech. Úloha se řeší v tomto případě pomocí MBDV. První kružnici, která se společně dotýká všech tří přímek, nalezneme snadno, jedná se o kružnici vepsanou trojúhelníku, jehož strany leží na daných přímkách a jehož vrcholy jsou průsečíky přímek. Střed kružnice trojúhelníka vepsané sestrojíme jako průsečík os vnitřních úhlů trojúhelníku. Přitom ramena těchto úhlů splývají s danými přímkami. Sestrojíme-li ještě osy vnějších úhlů trojúhelníku, pak průsečíky vždy dvou os vnějších úhlů s osou třetího vnitřního úhlu tvoří středy hledaných kružnic. Poloměr výsledných kružnic nalezneme pomocí kolmic k_k, k_l, k_n, k_m spuštěných k přímkám g, h, f. Průsečíky kolmic s přímkami g, h, f jsou body dotyku. Poloměry výsledných kružnic jsou vzdálenosti sestrojených středů K, L, M, N od přímek g, h, f.

Poznámka: Kružnice l, m, n se nazývají kružnice trojúhelníku připsané.

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/gkamneww

Symbolický zápis konstrukce:

1. A; $A \in h \cap f$
   B; $B \in g \cap f$
   C; $C \in g \cap h$
2. o_3, o_5; o_3, o_5 jsou osy úhlů tvořených přímkami f, g
   o_1, o_4; o_1, o_4 jsou osy úhlů tvořených přímkami f, h
   o_2, o_6; o_2, o_6 jsou osy úhlů tvořených přímkami g, h
3. L; $L \in o_1 \cap o_3$
   K; $K \in o_2 \cap o_4$

N; $N \in o_1 \cap o_6$

M; $M \in o_3 \cap o_6$

4. k_l; $k_l \perp f \wedge L \in k_l$

   k_m; $k_m \perp g \wedge M \in k_m$

   k_n; $k_n \perp h \wedge N \in k_n$

   k_k; $k_k \perp g \wedge K \in k_k$

5. T_1; $T_1 \in k_l \cap f$

   T_2; $T_2 \in k_m \cap g$

   T_3; $T_3 \in k_n \cap h$

   T_4; $T_4 \in k_k \cap g$

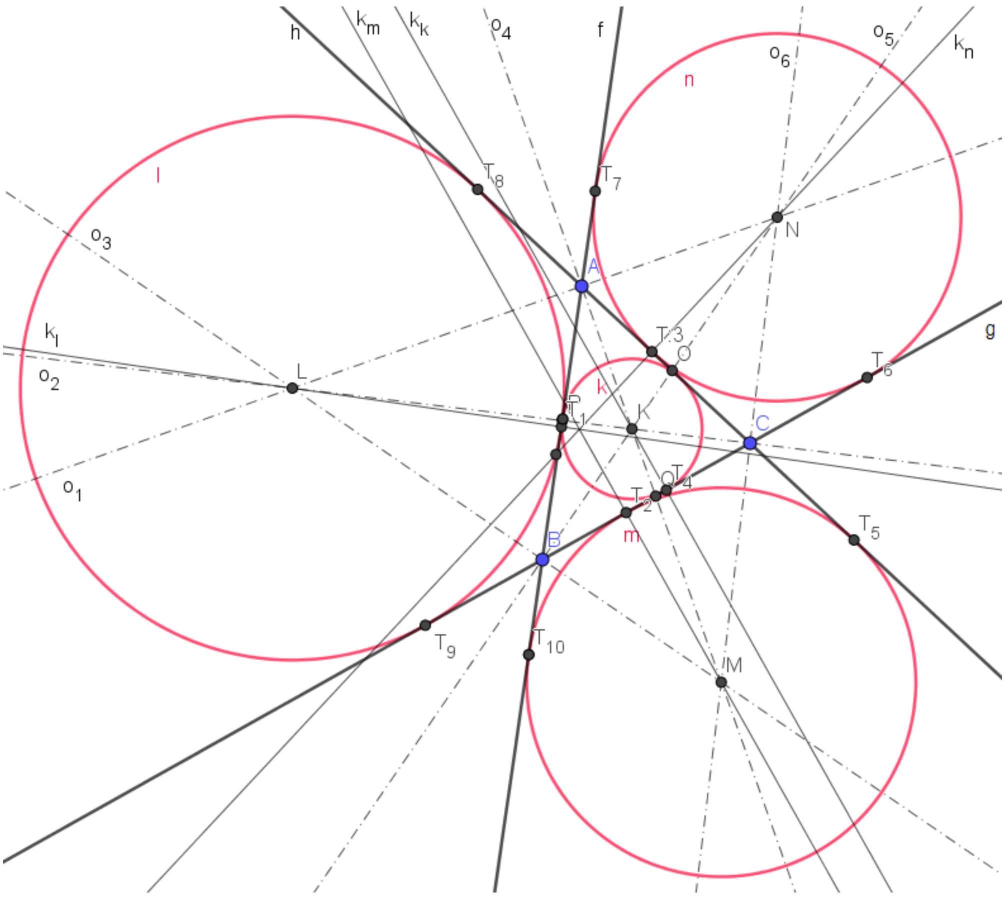
6. l; $l\,(L, |LT_1|)$

   k; $k\,(K, |KT_4|)$

   m; $m\,(M, |MT_2|)$

   n; $n\,(N, |NT_3|)$

Konstrukce:



Obrázek 28: Apolloniova úloha typu ppp

Diskuze řešení:

Úloha má 0 řešení:

- Pokud jsou přímky p_1, p_2, p_3 navzájem rovnoběžné různé.
- Pokud se přímky p_1, p_2, p_3 protínají právě v jednom bodě.

Úloha má 2 řešení:

- Pokud jsou přímky p_1 a p_2 navzájem rovnoběžné a přímka p_3 je obě protíná.

Úloha má 4 řešení:

- Pokud se přímky p_1, p_2, p_3 protínají ve třech různých bodech.

4.1.8 Typ *ppk* – přímka, přímka, kružnice

Jsou dány dvě přímky p, q a kružnice k (S, r). Úkolem je nalezení takové kružnice l, která se dotýká současně obou přímek p, q a také kružnice k.

Rozbor: Tato úloha má více způsobů řešení. Způsob řešení volíme dle uspořádání prvků.

Následuje popis řešení úlohy pomocí stejnolehlosti:

Předpokládáme, že přímky p a q jsou různoběžné a kružnice k nemá s přímkami žádný společný bod. Úloha s takto rozloženými prvky se řeší pomocí stejnolehlosti.

Středy výsledných kružnic budou ležet na ose o úhlu sevřeného přímkami p a q a obsahujícího danou kružnici k. Sestrojením tečen t_1, t_2, t_3 a t_4 ke kružnici k, přičemž t_1 a t_2 jsou rovnoběžné s přímkou p a t_3, t_4 jsou rovnoběžné s přímkou q. Průsečíkem tečen t_1, t_4 je bod P' a průsečíkem tečen t_2, t_3 je bod P''. Přímky PP', PP'' protnou kružnici k v bodech dotyku T_1, T_2, T_3, T_4 hledaných kružnic s danou kružnicí k.

Střed Q_1 výsledné kružnice l_1 je průsečík osy o a přímky $s_1 \equiv ST_1$, resp. střed Q_2 kružnice l_2 je průsečík osy o a přímky $s_2 \equiv ST_2$, střed Q_3 kružnice l_3 je průsečík osy o a přímky $s_3 \equiv ST_3$, střed Q_4 kružnice l_4 je průsečík osy o a přímky $s_4 \equiv ST_4$.

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar#material/q7stnrjd

Konstrukce:

1. P; $P \in p \cap q$
2. o; osa úhlů sevřených přímkami p a q a obsahujícího danou kružnici k
3. t_1, t_2; tečny ke kružnici k a zároveň rovnoběžky s p

   t_3, t_4; tečny ke kružnici k a zároveň rovnoběžky s q
4. P'; $P' \in t_1 \cap t_4$

   P''; $\mathrm{P}'' \in t_2 \cap t_3$
5. T_1, T_2; $T_1, T_2 \in k \cap PP'$

   T_3, T_4; $T_3, T_4 \in k \cap PP''$
6. s_1; $s_1 \equiv ST_1$

   s_2; $s_2 \equiv ST_2$

   s_3; $s_3 \equiv ST_3$

   s_4; $s_4 \equiv ST_4$
7. Q_1; $Q_1 \in s_1 \cap o$

   Q_2; $Q_2 \in s_2 \cap o$

   Q_3; $Q_3 \in s_3 \cap o$

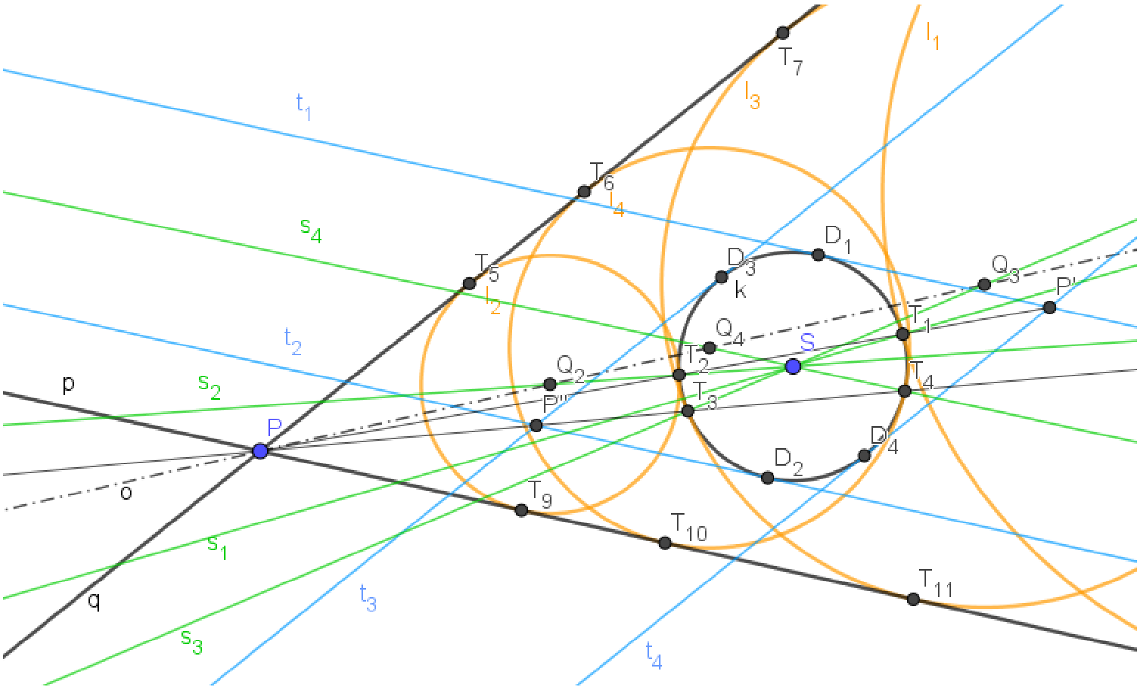
   Q_4; $Q_4 \in s_4 \cap o$
8. l_1; $l_1\ (Q_1, |Q_1T_1|)$

   l_2; $l_2\ (Q_2, |Q_2T_2|)$

   l_3; $l_3\ (Q_3, |Q_3T_3|)$

   l_4; $l_4\ (Q_4, |Q_4T_4|)$

Konstrukce:



Obrázek 29: Apolloniova úloha typu ppk

Diskuse řešení:

Úloha nemá žádné řešení:

- Pokud jsou přímky *p, q* navzájem rovnoběžné a kružnice *k* leží vně pásu, který tvoří přímky *p, q*.

Úloha má 1 řešení:

- Pokud jsou přímky *p, q* navzájem rovnoběžné a jedna z přímek je tečnou kružnice *k*, jejíž střed leží mimo pás určený přímkami *p, q*.

Úloha má 2 řešení:

- Pokud jsou přímky *p, q* navzájem rovnoběžné a jedna z přímek je sečnou kružnice *k*.
- Pokud jsou přímky *p, q* rovnoběžné a obě přímky jsou tečnami kružnice *k*.

Úloha má 3 řešení:

- Pokud jsou přímky *p, q* navzájem rovnoběžné a jedna z přímek je tečnou kružnice *k*, jejíž střed leží uvnitř pásu určeného přímkami *p, q*.

Úloha má 4 řešení:

- Pokud jsou přímky p, q navzájem rovnoběžné a obě jsou sečnami kružnice k.
- Pokud jsou přímky p, q navzájem rovnoběžné a kružnice k leží uvnitř pásu jimi určeného.
- Pokud jsou přímky p, q různoběžné a kružnice k nemá se zadanými přímkami žádný společný bod.
- Pokud jsou přímky p, q různoběžné a přímka p nebo přímka q je tečnou kružnice k. (Pappova úloha typu ***ppT***)
- Pokud jsou přímky p, q různoběžné a přímka p nebo přímka q je sečnou kružnice k.

Úloha má 6 řešení:

- Pokud jsou přímky p, q různoběžné a kružnice k se dotýká přímky p a protíná přímku q.

Úloha má 8 řešení:

- Pokud jsou přímky p, q různoběžné a kružnice k protíná obě přímky p, q.

4.1.9 Typ *pkk* – přímka, kružnice, kružnice

Jsou dány dvě kružnice k_1 (S, r_1), k_2 (S, r_2) a přímka p. Úkolem je nalézt takovou kružnici l, aby se dotýkala současně obou kružnic k_1, k_2.

Rozbor: Tato úloha má více způsobů řešení. Způsob řešení volíme opět dle zadaných uspořádání prvků.

Následuje popis řešení úlohy pomocí metody MBDV:

Předpokládejme, že jsou zadané kružnice k_1 a k_2, kde $r_1 < r_2$, které jsou soustředné a dále je dána přímka p, která je sečnou kružnice k_2. Přímka p nemá s kružnicí k_1 žádná společný bod. Středy výsledných kružnic budou ležet na kružnici u se středem S a s poloměr 1/2 $(r_1 + r_2)$ a další středy dvou hledaných kružnic budou ležet na kružnici v se středem S a s poloměr 1/2 $(r_2 – r_1)$. Středy hledaných kružnic leží kromě kružnic u, v také na přímkách $p´$ a $p´´$, které jsou rovnoběžné s danou přímkou p. Přitom přímka $p‘$ je od přímky p vzdálena o hodnotu rovnou 1/2 $(r_2 - r_1)$ a přímka $p‘‘$ je od přímky p vzdálena o hodnotu rovnou 1/2 $(r_1 + r_2)$. Průsečíky přímky $p‘$ a kružnice u jsou středy Q_1, Q_2 hledaných kružnic l_1, l_2

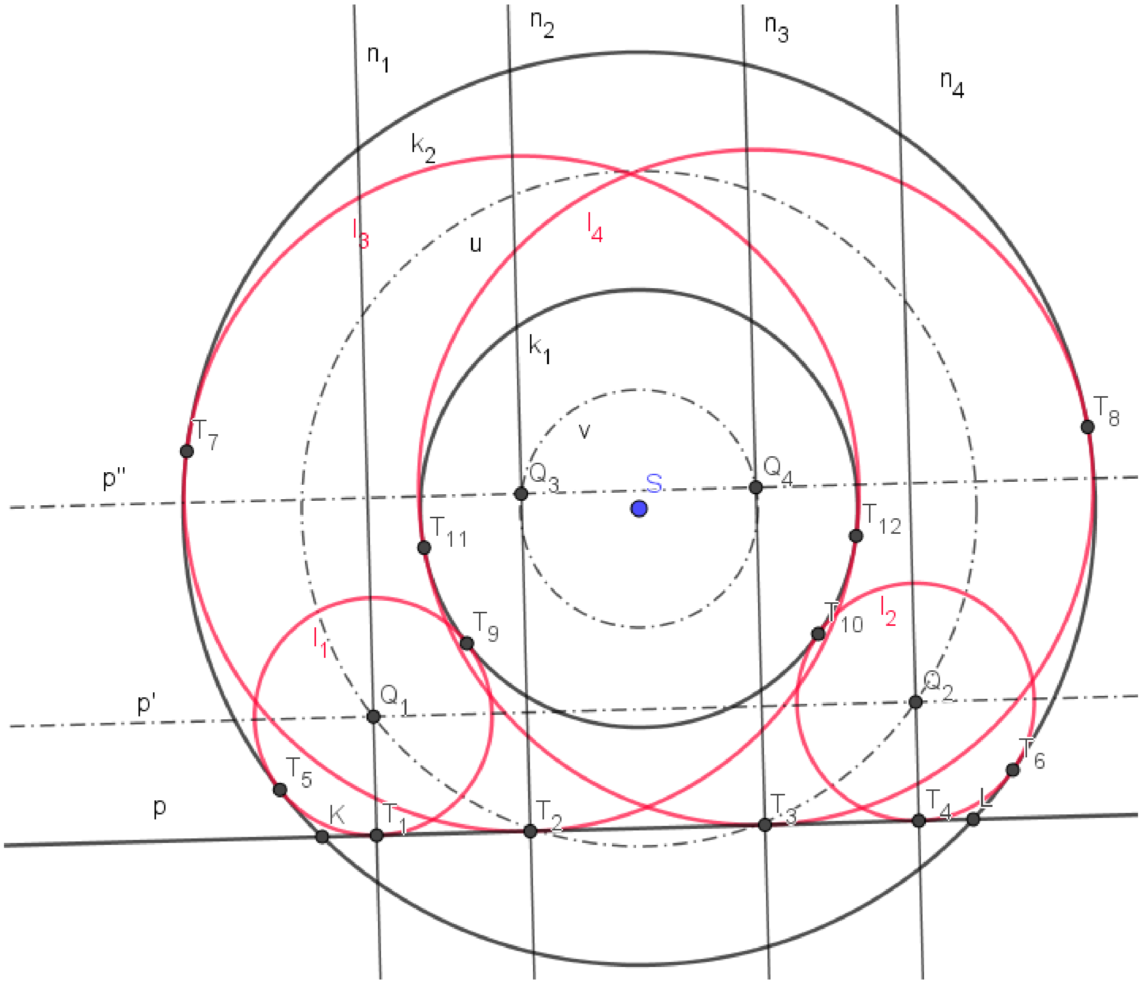
průsečíky přímky p'' a kružnice v jsou středy Q_3 a Q_4 hledaných kružnic l_3, l_4. Poloměr výsledných kružnic nalezneme pomocí kolmic sestrojených k přímce p, vedených jednotlivými sestrojenými středy Q_1, Q_2, Q_3 a Q_4 výsledných kružnic. Průsečíky kolmic a přímkou p jsou body dotyku hledaných kružnic s přímkou p. Poloměry výsledných kružnic jsou tedy vzdálenosti středů kružnic od bodů dotyku ležících na týchž kolmicích.

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar#material/sy79uf3s

Symbolický zápis konstrukce:

1. u, $u\ (S,\ 1/2\ (r_1 + r_2))$
2. v, $v\ (S,\ 1/2\ (r_2 - r_1))$
3. p', $p' \parallel p \wedge v(p, p') = 1/2\ (r2 - r1)$
4. p'', $p'' \parallel p \wedge v(p, p'') = 1/2\ (r1 + r2)$
5. Q_1, Q_2; $Q_1, Q_2 \in u \cap p'$
6. Q_3, Q_4; $Q_3, Q_4 \in v \cap p''$
7. n_1, $n_1 \perp p \wedge Q_1 \in n_1$
   n_2, $n_2 \perp p \wedge Q_3 \in n_2$
   n_3, $n_3 \perp p \wedge Q_4 \in n_3$
   n_4, $n_4 \perp p \wedge Q_2 \in n_4$
8. T_1, $T_1 \in n_1 \cap p$
   T_2, $T_2 \in n_2 \cap p$
   T_3, $T_3 \in n_3 \cap p$
   T_4, $T_4 \in n_4 \cap p$
9. l_1, $l_1\ (Q_1, |Q_1T_1|)$
   l_2, $l_2\ (Q_2, |Q_2T_2|)$
   l_3, $l_3\ (Q_3, |Q_3T_3|)$
   l_4, $l_4\ (Q_4, |Q_4T_4|)$

Konstrukce:



Obrázek 30: Apolloniova úloha typu pkk

Diskuse řešení:

Úloha nemá žádné řešení:

- Pokud jsou kružnice k_1 a k_2 soustředné a přímka p nemá se zadanými kružnicemi žádný společný bod.
- Pokud jsou kružnice k_1 a k_2 nesoustředné, protínají se a přímka p prochází průsečíky obou kružnic.
- Pokud jsou kružnice k_1 a k_2 nesoustředné a pokud leží v navzájem opačných polorovinách určených přímkou p.

Úloha má 4 řešení:

- Pokud jsou kružnice k_1 a k_2 soustředné a přímka p je sečnou alespoň jedné z nich.

Úloha má 8 řešení:

- Pokud nemá přímka p se zadanými kružnicemi žádný společný bod a kružnice k_1 a k_2 jsou nesoustředné a obě leží v jedné polorovině určené přímkou p.

Úloha má nekonečně mnoho řešení:

- Pokud jsou kružnice k_1, k_2 nesoustředné a přímka p má se zadanými kružnicemi právě jeden společný bod.

4.1.10 Typ *kkk* – kružnice, kružnice, kružnice

Jsou dány tři kružnice $k_1 (S_1, r_1)$, $k_2 (S_2, r_2)$, $k_3 (S_3, r_3)$. Úkolem je nalézt takovou kružnici l, která se dotýká všech tří zadaných kružnic současně.

Rozbor: Tato úloha má více způsobů řešení. Způsob řešení znovu volíme dle uspořádání zadaných prvků.

Následuje řešení úlohy pomocí kruhové inverze:

Předpokládejme, že jsou dány dvě kružnice k_1 a k_2 , které se protínají ve dvou bodech L, K a kružnice k_3, které nemá s kružnicemi k_1 a k_2 nemá žádný společný bod. Při daném rozmístění zadaných kružnic se úloha se řeší pomocí kruhové inverze. Řídicí kružnici ω volíme tak, aby měla střed v bodě L a protínala všechny tři zadané kružnice k_1, k_2, k_3. Pomocí kruhové inverze s řídicí kružnicí ω a středem L, zobrazíme kružnice k_1, k_2, k_3 na dvě přímky k_1‘, k_2‘ a na kružnici k_3‘. Úlohu v tuto chvíli můžeme převést na Apolloniovu úlohu typu ***ppk***. Nalezená řešení z Apolloniovy úlohy typu ***ppk*** zobrazíme pomocí kruhové inverze a tím získáváme výsledné kružnice.

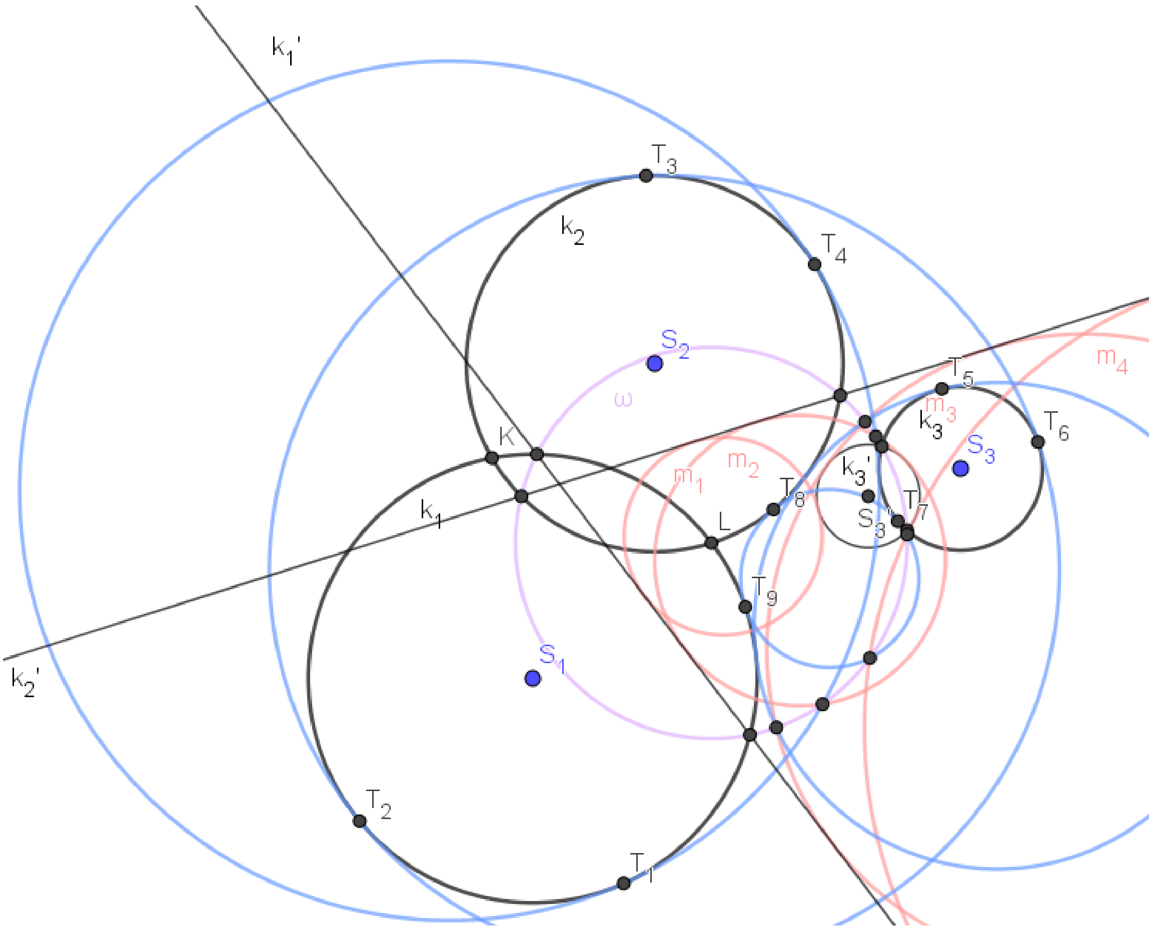
Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar#material/us8bmvy2

Symbolický zápis konstrukce:

1. ω; ω (L, r)
2. k_1‘, k_2‘, k_3‘; KI (ω, L, $k_1 \rightarrow k_1$‘, $k_2 \rightarrow k_2$‘, $k_3 \rightarrow k_3$‘)
3. Převedení úlohy na Apolloniovu úlohu typu ***ppk*** *(růžové kružnice v obrázku č. 31)*

   Vznik kružnic m_1, m_2, m_3, m_4
4. l_1, l_2, l_3, l_4; KI (ω, L, $m_1 \rightarrow l_1$, $m_2 \rightarrow l_2$, $m_3 \rightarrow l_3$, $m_4 \rightarrow l_4$)

Konstrukce:



Obrázek 31: Apolloniova úloha typu kkk

Diskuse řešení:

Úloha nemá žádné řešení:

- Pokud jsou všechny zadané kružnice k_1, k_2, k_3 soustředné.
- Pokud jsou soustředné kružnice k_1 a k_2 a střed kružnice k_3 neleží v mezikruží vytvořeném kružnicemi k_1 a k_2.

Úloha má 4 řešení:

- Pokud jsou kružnice k_1 a k_2 soustředné a kružnice k_3 protíná jednu z kružnic k_1, k_2.
- Pokud jsou kružnice k_1 a k_2 soustředné a kružnice k_3 protíná obě zbývající kružnice.
- Pokud se kružnice k_1, k_2 a k_3 protínají právě v jednom bodě.
- Pokud se protínají kružnice k_1 a k_2 a pokud kružnice k_3 s nimi nemá žádný společný bod.

Úloha má 6 řešení:

- Pokud jsou kružnice k_1 a k_2 soustředné a kružnice k_3 se dotýká buď kružnice k_1 nebo kružnice k_2.

Úloha má 8 řešení:

- Pokud jsou kružnice k_1 a k_2 soustředné a k_3 leží v mezikruží kružnic k_1 a k_2 přičemž nemá s kružnicemi k_1, k_2 žádný společný bod.
- Pokud kružnice k_1, k_2 a k_3 nejsou soustředné a nemají spolu žádný společný bod.

4.2 Pappovy úlohy

Pappovy úlohy mohou být považovány za podúlohy Apolloniových úloh. U Pappových úloh jsou předem dané tři objekty a přitom právě jeden daný bod leží vždy buď na dané přímce, nebo na dané kružnici. Úkolem je opět sestrojit kružnici procházející daným bodem, resp. body a dotýkající se dané přímky v daném bodě dotyku, nebo dané kružnice taktéž v daném bodě dotyku.

4.2.1 Typ *BpT* – bod, přímka, bod dotyku

U této úlohy je zadaný bod B, přímka p a bod T na přímce p. Úkolem je nalézt takovou kružnici k, aby procházela bodem B a aby bod T byl bodem dotyku kružnice k a přímky p.

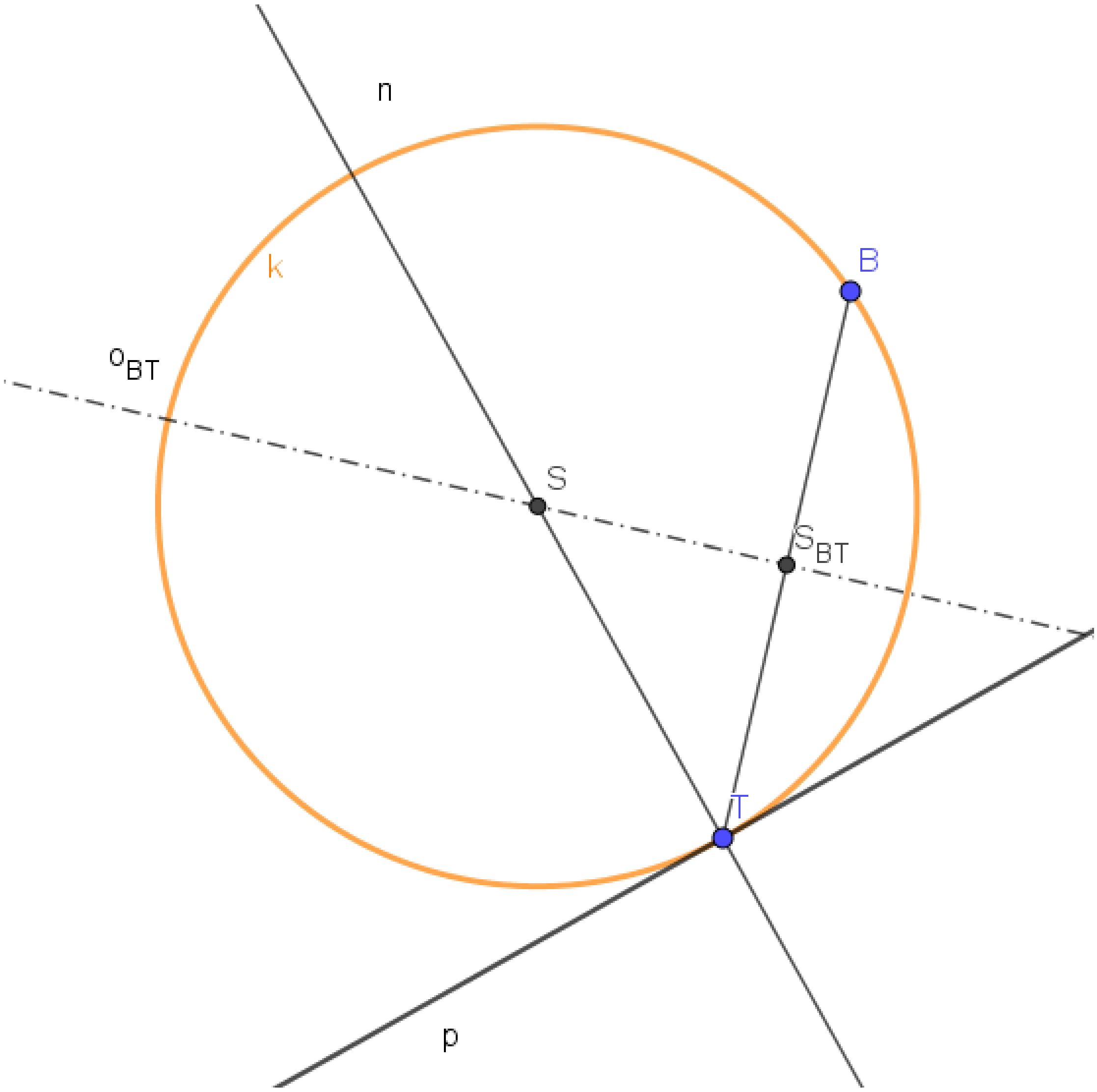
Rozbor: Tato úloha se řeší pomocí MBDV. Střed hledané kružnice nalezneme jako průnik dvou množin. První množinou bude množina všech bodů, které jsou stejně vzdálené od bodů B a T, což je osa úsečky BT. Druhou množinou je množina středů všech kružnic, které procházejí bodem T.

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/grwzhpax

Symbolická zápis konstrukce:

1. $n, n \perp p \wedge T \in n$
2. S_{BT}; střed úsečky BT
3. o_{BT}; osa úsečky BT
4. S; $S \in o_{BT} \cap n$
5. k; $k\ (S, |ST|)$

Konstrukce:



Obrázek 32: Pappova úloha typu BpT

Diskuse řešení: Tato úloha má právě jedno řešení nebo žádné řešení. Žádné řešení nemá v případě, kdy i bod *B* leží přímce *p*, v opačném případě řešení má.

4.2.2 Typ *ppT* – přímka, přímka, bod dotyku

Úkolem v této úloze je najít kružnici *k*, která se dotýká přímek *p* a *q*, a to v bodě *T*, který leží na jedné ze dvou daných přímek.

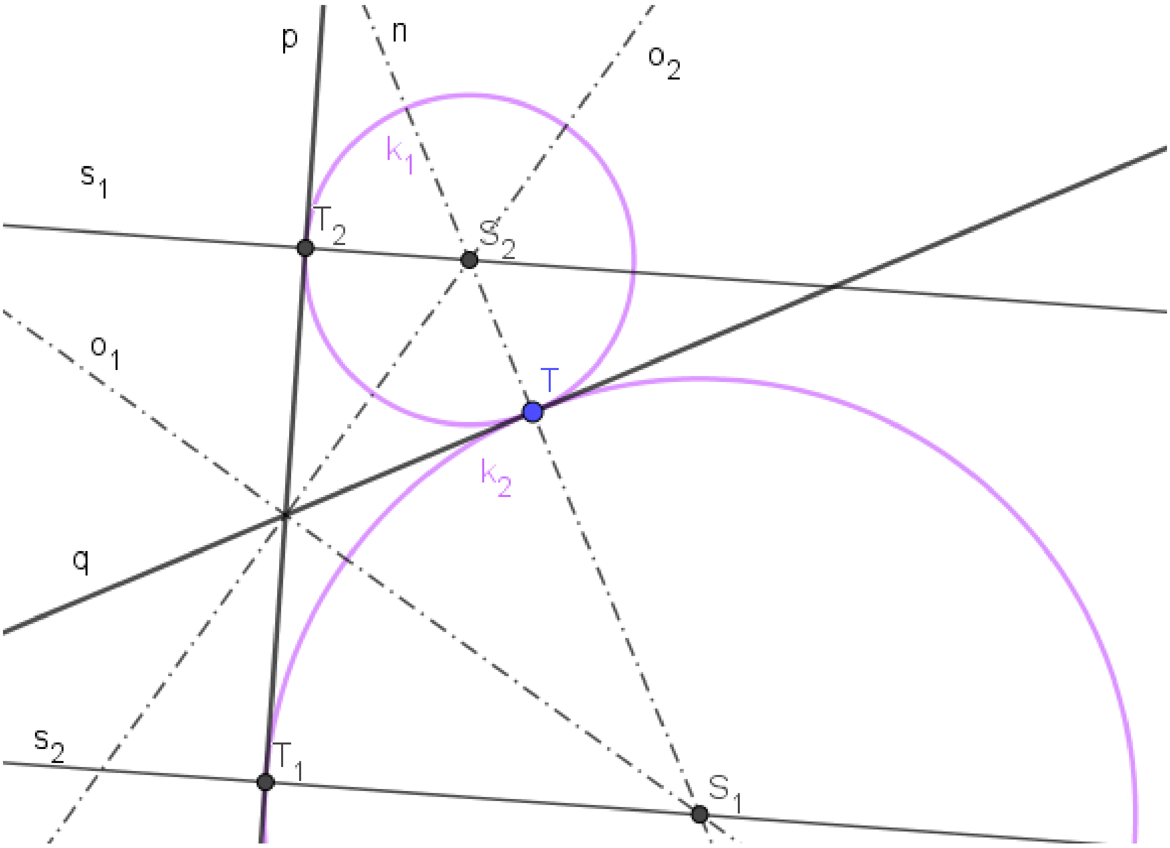
Rozbor: Úloha se řeší pomocí MBDV. Středy hledaných kružnic leží jak na osách úhlů vytvořených přímkami *p* a *q*, tak i na kolmici procházející bodem *T* k přímce, na níž bod *T* leží. Průsečíky os a kolmice jsou středy hledaných kružnic.

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar#material/ksasn7qs

Symbolická zápis konstrukce:

1. N; $n \perp p \wedge T \in n$
2. o_1, o_2; osy úhlů tvořených přímkami p, q
3. S_1; $S_1 \in n \cap o_1$
   S_2; $S_2 \in n \cap o_2$
4. k_1; $k_1\ (S_2, |S_2T|)$
   k_2; $k_2\ (S_1, |S_1T|)$
5. s_1; $s_1 \perp q \wedge S_1 \in s_1$
   s_2; $s_2 \perp q \wedge S_2 \in s_2$
6. T_1; $T_1 \in q \cap s_1$
   T_2; $T_2 \in q \cap s_2$

Konstrukce:



Obrázek 33: Pappova úloha typu ppT

Diskuse řešení: Tento typ úlohy má až dvě řešení a to v případě, pokud přímky p a q jsou různoběžné. Pokud jsou přímky p a q navzájem rovnoběžné, existuje právě jedno řešení.

4.2.3 Typ *kpT* – kružnice, přímka, bod dotyku

Jsou dány kružnice k (S, r) a přímka p, na přímce p je dán bod T. Cílem je sestrojit kružnici l, která se bude dotýkat přímky p v bodě T a také se bude dotýkat kružnice k.

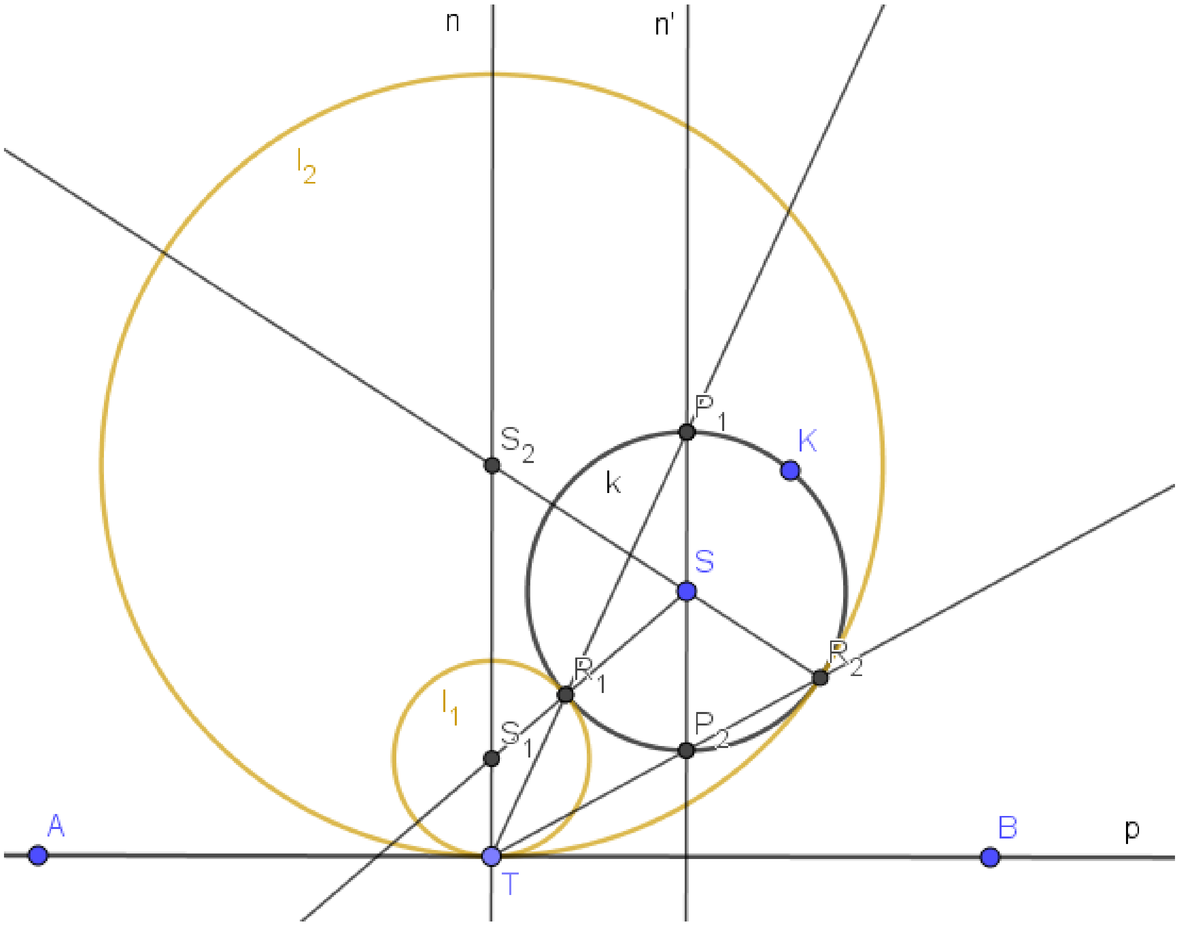
Rozbor: Tato úloha se řeší pomocí stejnolehlosti. Střed hledané kružnice leží na kolmé přímce n k přímce p procházející bodem T. Výsledná kružnice a kružnice k budou mít právě jeden společný bod dotyku. Tento bod dotyku je také střed stejnolehlosti výsledné kružnice a kružnice k. Ve stejnolehlosti se středem stejnolehlosti v bodě dotyku dané kružnice k a výsledné kružnice se zobrazí kružnice k na výslednou kružnici, přímka n na přímku n' a přímka p na přímku p', která má dotyk s hledanou kružnicí. Bod T se zobrazí do bodu P. Střed stejnolehlosti, vzor a obraz jsou ve stejnolehlosti kolineární body. Střed stejnolehlosti R tedy nalezneme jako průsečík kružnice k a přímky TP. Průnikem přímky n a přímky SR získáváme střed hledané kružnice.

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar#material/bz965dmr

Symbolický zápis konstrukce:

1. $n;\ n \perp p \wedge T \in n$
2. $n‘;\ n‘ \perp p \wedge S \in n‘$
3. $P_1, P_2;\ P_1, P_2 \in n‘ \cap k$
4. $R_1;\ R_1 \in P_1T \cap k$
   $R_2;\ R_2 \in P_2T \cap k$
5. $S_1;\ S_1 \in SR_1 \cap n$
   $S_2;\ S_2 \in SR_2 \cap n$
6. $l_1;\ l_1\,(S_1, |S_1T|)$
   $l_2;\ l_2\,(S_2, |S_2T|)$

Konstrukce:



Obrázek 34: Pappova úloha typu kpT

Diskuse řešení: Tato úloha má právě dvě řešení, pokud kružnice *k* a přímka *p* nemají žádný společný bod. Úloha má nejvýše jedno řešení, pokud kružnice *k* protíná přímku *p* a bod *T* leží na přímce *p*.

Pokud se přímka *p* bude dotýkat kružnice *k* v bodě *T*, pak má úloha nekonečně mnoho řešení.

4.2.4 Typ *BkT* – bod, kružnice, bod dotyku

V této úloze jsou zadány bod *B*, kružnice *k* (*S*, *r*) a bod *T* na kružnici *k*. Úkolem je nalézt takovou kružnici *k‘*, která bude procházet bodem *B* a která se bude dotýkat kružnice *k* v bodě *T*.

Rozbor: Tato úloha se řeší pomocí MBDV. Sestrojíme-li tečnu v bodě *T* ke kružnici *k*, můžeme úlohu převést na Pappovu úlohu typu ***BpT***.

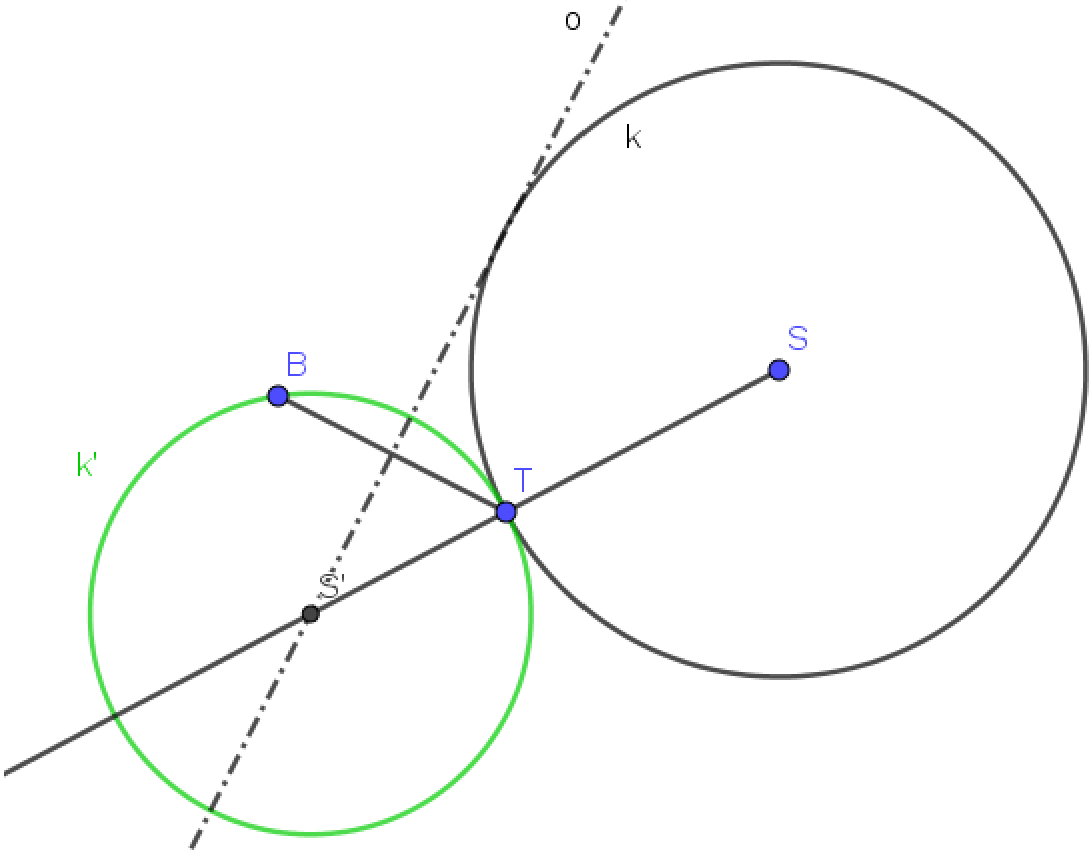
Lze také proložit body T a S přímku p, pak průsečík osy o úsečka BT a přímky $TS \equiv p$ je středem výsledné kružnice.

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar#material/cffd2ahq

Symbolický zápis konstrukce: pomocí MBDV

1. O; osa úsečky TB
2. S'; $S' \in o \cap TS$
3. k'; $k'(S', |S'T|)$

Konstrukce:



Obrázek 35: Pappova úloha typu BkT

Diskuze řešení: Tato úloha má právě jedno řešení a nelze uspořádat zadané prvky tak, aby nešlo úlohu vyřešit.

4.2.5 Typ *pkT* – přímka, kružnice, bod dotyku

Úkolem je nalézt kružnici *l*, která se dotýká zadané přímky *p* a kružnice *k* (*S*, *r*) v bodě *T*.

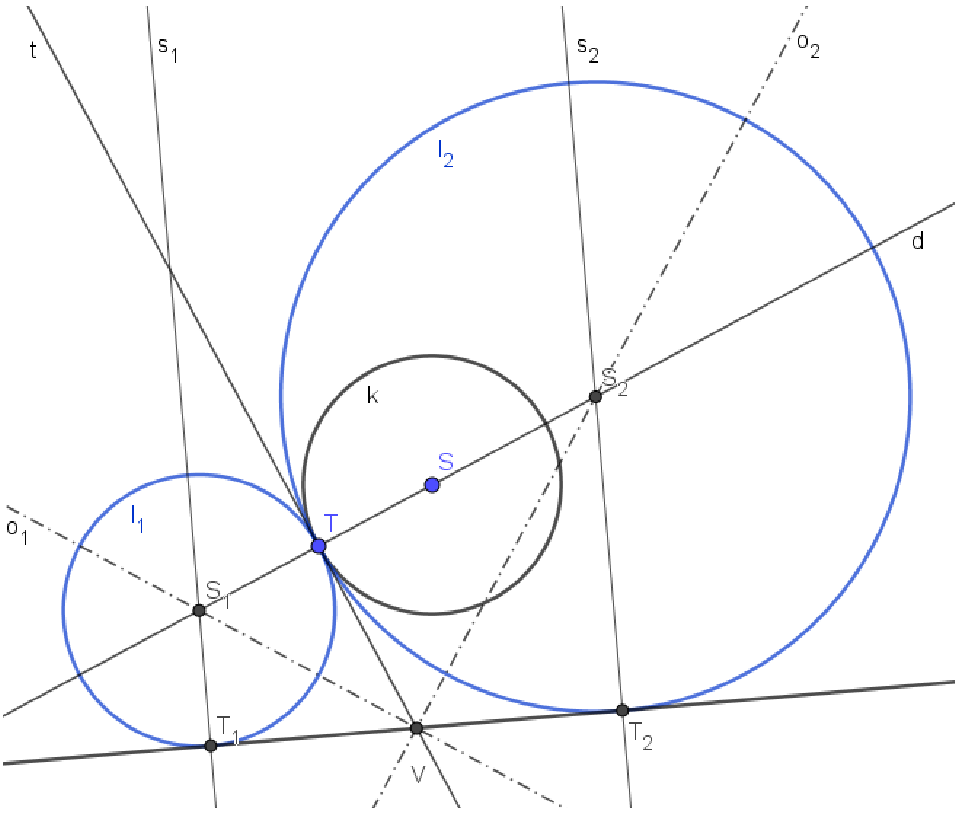
Rozbor úlohy: Úloha se řeší pomocí MBDV. Sestrojíme-li ke kružnici *k* v bodě *T* tečnu, která protne přímku *p*, pak úlohu převedeme na Pappovu úlohu typu ***ppT***.

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar#material/eubyequn

Symbolický zápis konstrukce: pomocí MBDV

1. d; $d \equiv TS$
2. t; $t \perp TS \wedge T \in t$
3. o_1, o_2; osy úhlů určených přímkami *p* a *t*
4. S_1; $S_1 \in o_1 \cap d$
   S_2; $S_2 \in o_2 \cap d$
5. l_1; $l_1\,(S_1, |S_1T|)$
   l_2; $l_2\,(S_2, |S_2T|)$

Konstrukce:



Obrázek 36: Pappova úloha typu pkT

Diskuse řešení: Tato úloha má právě dvě řešení, pokud bod T, neleží na kolmici k přímce p vedeném bodem S. V uvedeném případě má úloha řešení právě jedno.

4.2.6 Typ *kkT* – kružnice, kružnice, bod dotyku

V této úloze jsou zadány dvě kružnice k_1 (S_1, r_1) a k_2 (S_2, r_2). Na jedné z nich je zadaný bod T. Úkolem je sestrojit kružnici dotýkající se obou dvou zadaných kružnic a přitom se jedné z nich dotýkat právě k bodě T.

Rozbor: Úlohu řešíme pomocí stejnolehlosti se středem stejnolehlosti v bodě dotyku dané a hledané kružnice. V našem přípdě jsou středy stejmolehlosti tedy body R_1, R_2. Pokud v bodě $T \in k_1$ sestrojíme tečnu ke kružnici k_1, pak můžeme úlohu převést na řešení Pappovy úlohy typu ***kpT***.

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar#material/rpske2bc

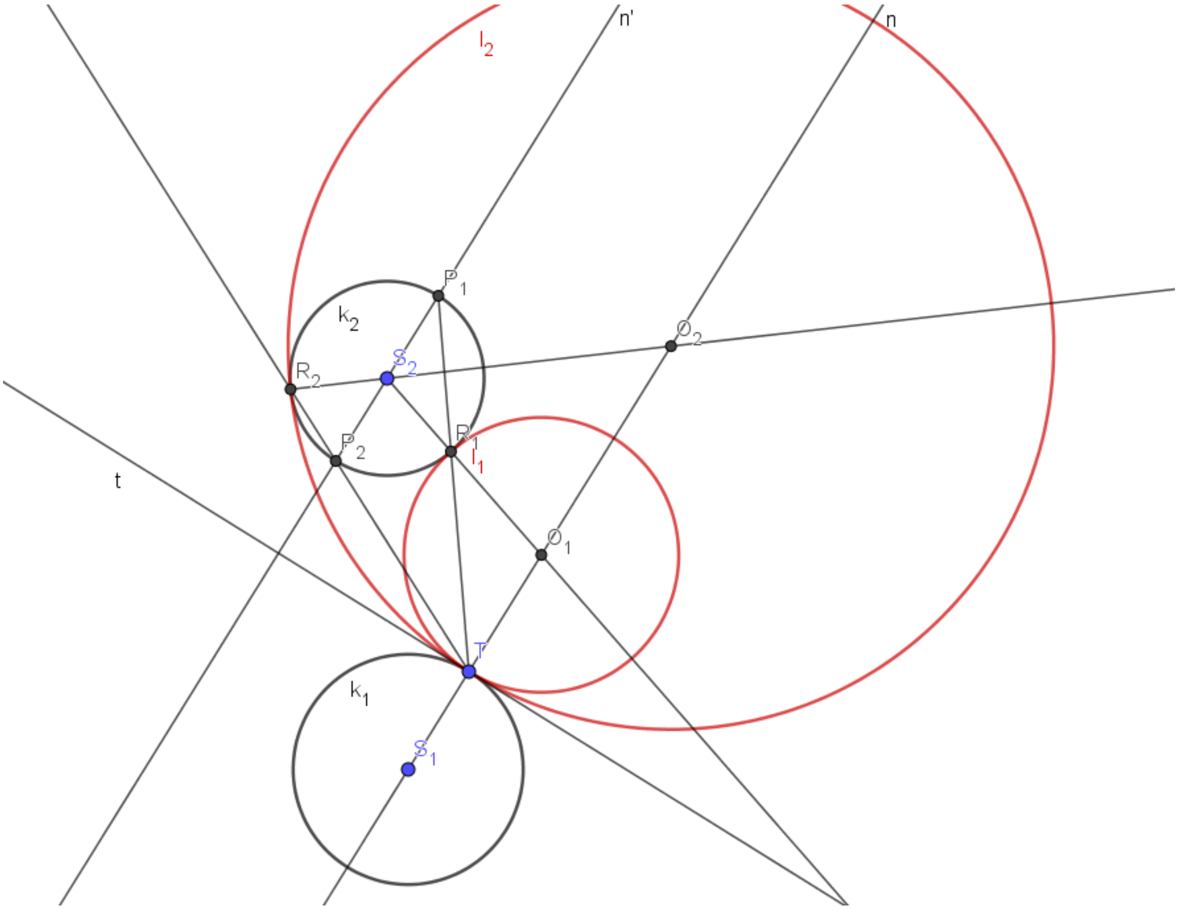
Symbolický zápis konstrukce:

1. n; $n \equiv TS_1$
2. t; $t \perp TS_1 \wedge T \in t$
3. n'; $n' \parallel n \wedge S_2 \in n'$
4. P_1, P_2; $P_1, P_2 \in n' \cap k_2$
5. R_1; $R_1 \in P_1T \cap k_2$
6. R_2; $R_2 \in P_2T \cap k_2$
7. O_1; $O_1 \in S_2R_1 \cap n$

   O_2; $O_2 \in R_2S_2 \cap n$
8. l_1; l_1 $(O_1, |O_1T|)$

   l_2; l_2 $(O_2, |O_2T|)$

Konstrukce:



Obrázek 37: Pappova úloha typu kkT

Diskuse řešení: Úloha má dvě řešení, pokud dané kružnice nemají žádný společný bod. Pokud se dané kružnice například dotýkají v bodě dotyku *T*, pak úloha má nekonečně mnoho řešení. Úloha má jedno řešení, pokud se dané kružnice budou dotýkat a bod *T* bude ležet na jedné ze zadaných kružnic.

5 Přístupy k řešení Apolloniových úloh

Řešením Apolloniových úloh se napříč minulostí zabývala spousta matematiků. Každý se snažil nalézt obecný nebo svůj vlastní způsob, jak tyto úlohy vyřešit. Nejproslavenější úlohou, kterou se snažili vědci (ne nutně matematici či geometři) vyřešit pomocí pravítka a kružítka, je Apolloniova úloha typu ***kkk***, v níž se ke třem kružnicím hledá taková kružnice, která se dotýká všech těchto kružnic.

5.1 Joseph Diez Gergonne

J. D. Gergonne byl francouzský matematik a logik narozený v roce 1771 v Nancy. Zemřel v roce 1859 ve francouzském městě Montpellier. Je autorem obecného systematického řešení Apolloniovy úlohy typu ***kkk***. Jako první vyslovil tento postup a uveřejnil ho v roce 1816. ([12], str. 72)

Vymyslel „nejlepší" řešení výše uvedené Apolloniovy úlohy a také dokázal spoustu dalších způsobů řešení ostatních typů Apolloniových úloh. ([9], str. 14)

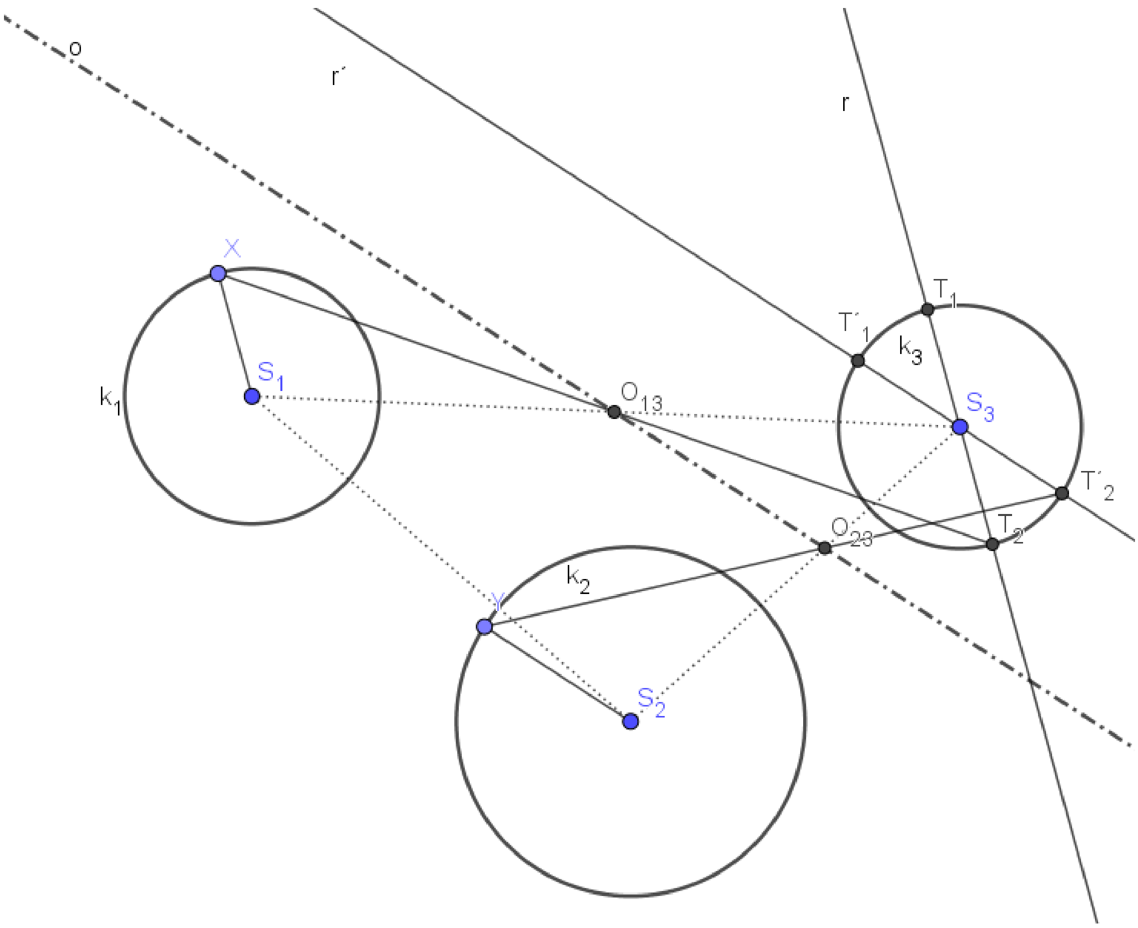
5.1.1 Řešení Apolloniovy úlohy typu *kkk* podle J. D. Gergonna

Rozbor úlohy: Jsou dané tři kružnice $k_i(S_i)$, $i = 1,2,3$, kde S_i je střed kružnice k_i. Tyto kružnice orientujeme v cykly a to v pořadí +, +, -. Pokud se dva vzniklé cykly $c_1(U_1)$, $c_2(U_2)$ dotýkají daných cyklů k_1, k_2, k_3, pak podle věty „*O cyklech a chordálách*" prochází chordála těchto cyklů středy podobnosti dvojic k_1, k_2 a také k_2, k_3 i k_1, k_3, z čehož vyplývá, že se jedná o osu o podobnosti těchto cyklů. Ze zmíněné věty také plyne, že střed podobnosti dvojice cyklů c_1 a c_2 leží na chordále $p_{1,2}$ cyklů k_1, k_2 a také na chordálách $p_{2,3}$ a $p_{1,3}$ *dvojic* cyklů k_2, k_3 a k_1, k_3. To znamená, že střed podobnosti cyklů c_1 a c_2 je potenčním středem P daných cyklů k_1, k_2 a k_3. A proto středy S_1 a S_2 výsledných cyklů c_1 a c_2 leží na kolmici s spuštěné z potenčního středu P daných cyklů k_1, k_2 a k_3 na jejich osu podobnosti. Podle věty „*O poloze pólu chordály*" spojnice dotykových bodů $1, I$ cyklů c_1 a c_2 s cyklem k_1 prochází pólem P_1 osy podobnosti o, která je chordálou cyklů c_1 a c_2 vzhledem k cyklu k_1. Dále podle věty „*O dotýkajících se cyklech*" jde spojnice $1I$ středem podobnosti P dvojice cyklů c_1 a c_2. Také spojnice dotykových bodů výsledných cyklů c_1 a c_2 s cyklem k_2, resp. k_3 spojuje pól P_2, resp. P_3 osy o vzhledem k daným cyklům k_2, resp. k_3 s potenčním středem P. ([9], str. 23 -24)

Poznámka: Bez újmy na obecnosti budeme v následujících obrázcích cykly nahrazovat kružnicemi.

Popis konstrukce: K daným třem cyklům k_1, k_2, k_3 sestrojíme osu o podobnosti a jejich potenční střed P. Dále určíme póly P_i osy o vzhledem k zadaným cyklům. ([10], str. 24)

1) Vnitřní osa podobnosti daných cyklů k_1, k_2, k_3
   a. Vnitřní střed O_{13} podobnosti cyklů k_1 a k_3 sestrojíme následovně:
      1. $X; X \in k_1$ libovolný bod
      2. $r; r \parallel XS_1 \wedge S_3 \in r$
      3. $T_1, T_2; T_1, T_2 \in r \cap k_3$
      4. $O_{13}; O_{13} \in S_1S_3 \cap XT_2$
   b. Obdobně narýsujeme střed O_{23} podobnosti cyklů k_2 a k_3
   c. Body O_{13} a O_{23} tvoří osu o podobnosti



Obrázek 38: J. D. Gergonne – konstrukce osy o podobnosti

2) Potenční střed P

a. Nalezení chordály p_{13} cyklů k_1 a k_3

1. k' libovolný cyklus takový, který protíná cykly k_1 a k_3 vždy ve dvou bodech

2. $P_{11}, P_{12}; \{P_{11}, P_{12}\} \in k' \cap k_1$

   $P_{31}, P_{32}; \{P_{31}, P_{32}\} \in k' \cap k_3$

3. $C; C \in P_{11}P_{12} \cap P_{31}P_{32}$

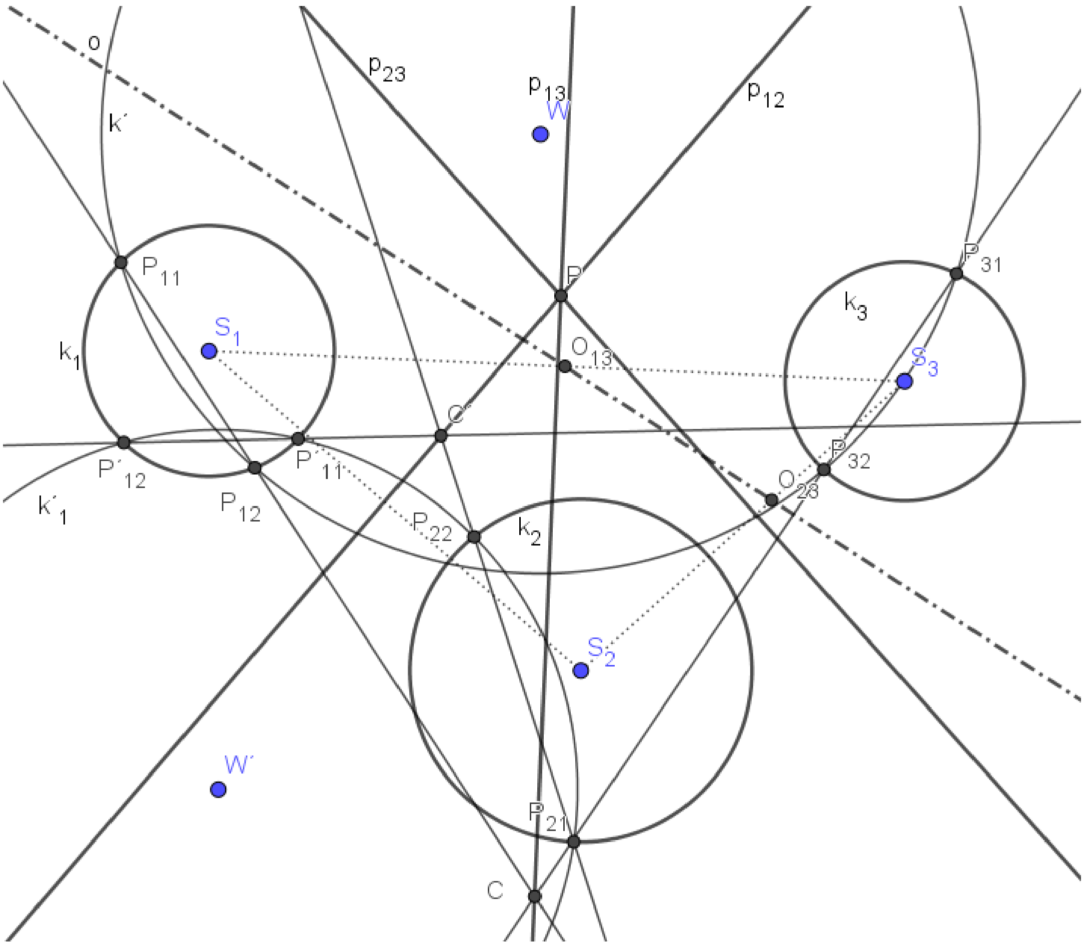
4. $p_{13}; p_{13} \perp S_1S_3 \wedge C \in p_{13}$

b. Obdobně sestrojíme chordálu p_{12} pro cykly k_1 a k_2

c. Obdobně narýsujeme chordálu p_{23} pro cykly k_2 a k_3

Lze také použít jiný postup, průsečíkem chordál p_{12} a p_{13} je již potenční střed P. Chordálu p_{23} lze sestrojit jako kolmici ke spojnici S_2S_3, která prochází bodem P.

d. $P; P \in p_{13} \cap p_{12}$ $(\cap\, p_{23})$



Obrázek 39: J. D. Gergonne – konstrukce potenčního středu P

3) Póly podobnosti osy *o* vzhledem k daným cyklům

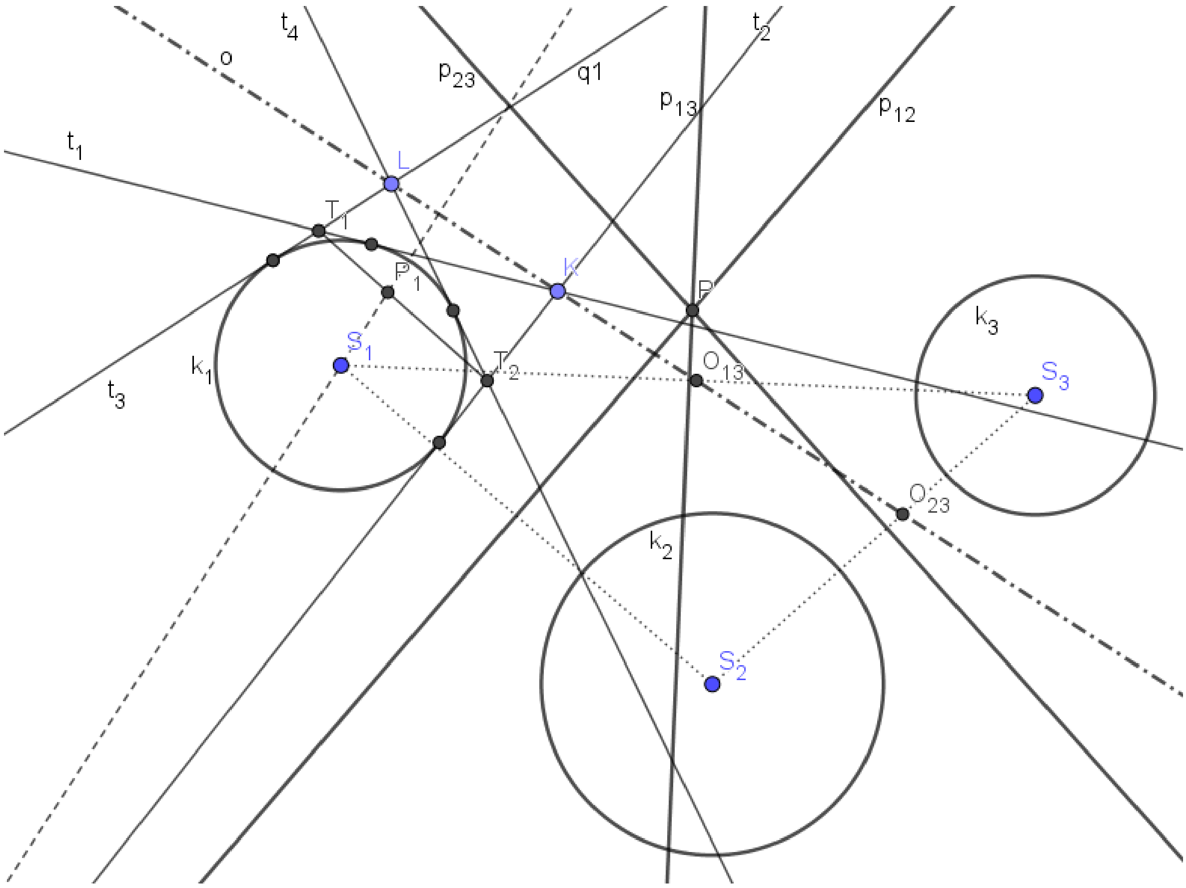
   a. Pól P_1 podobnosti osy o_1 vzhledem k cyklu k_1

      1. $K, L;$ libovolné body, které náleží o
      2. $q_1;\ q_1 \perp o \wedge S_1 \in q_1$
      3. $t_1, t_2;$ tečny ke kružnici k_1 procházející bodem K

         t_3, t_4; tečny ke kružnici k_1 procházející bodem L
      4. $T_1;\ T_1 \in t_1 \cap t_3$

         $T_2;\ T_2 \in t_2 \cap t_4$
      5. $P_1;\ P_1 \in T_1T_2 \cap q_1$

   b. Pól P_2, resp. P_3 podobnosti vzhledem k cyklu k_2, resp. k_3 lze nalézt obdobným způsobem. Pól P_3 je též možné dohledat jako provedení grafické kontroly.



Obrázek 40: J. D. Gergonne – konstrukce pólu P_1 podobnosti osy o vzhledem k cyklu k_1

Spojnice PP_i , $i = 1,2,3$, protnou cykly k_i, $i = 1,2,3$, v dotykových bodech *1, I* (2, II, resp. 3, III) se dvěma hledanými cykly c_1 a c_2, jejichž středy jsou již snadno dohledatelné. ([10], str. 24)

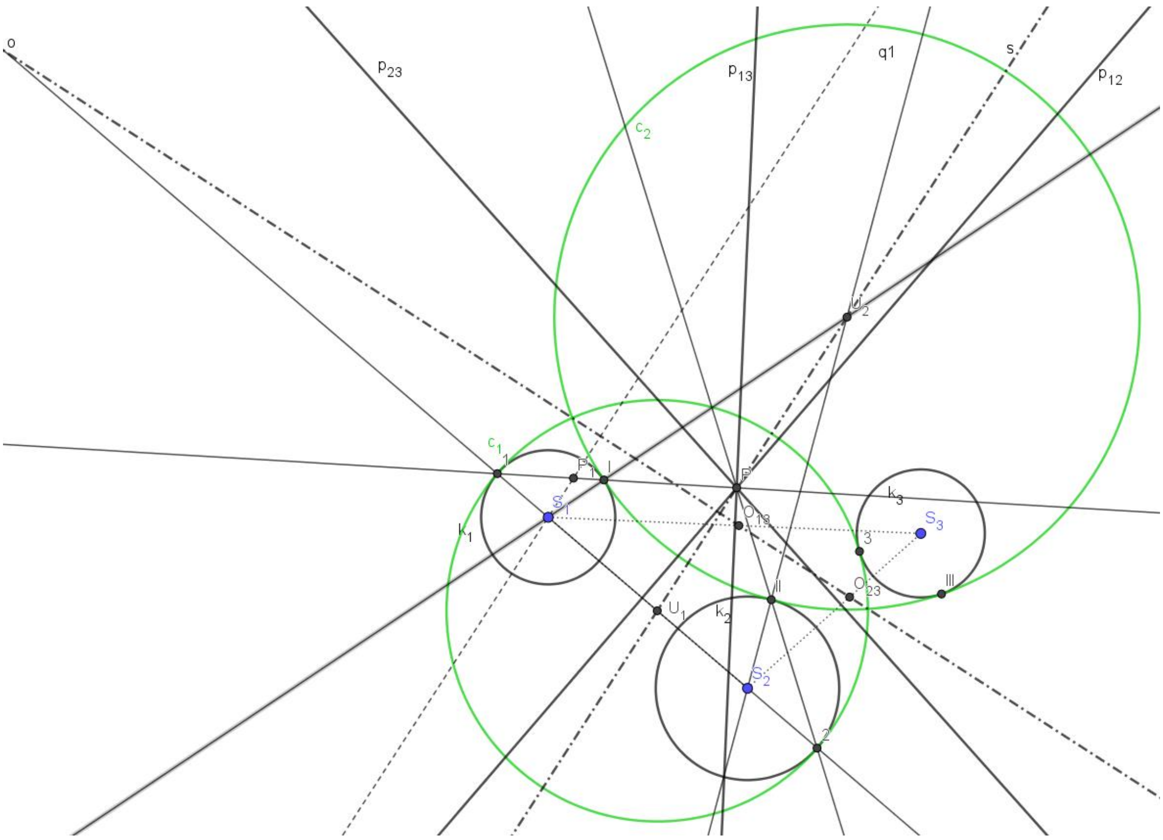
4) Výsledné cykly

   a. První cyklus c_1

      1. $s;\ s \perp o \wedge P \in s$
      2. $1, I;\ 1, I \in \leftrightarrow PP_1 \cap k_1$
      3. $U_1;\ U_1 \in \leftrightarrow 1S_1 \cap s$
      4. $c_1;\ c_1(U_1, |1U_1|)$

   b. Druhý cyklus c_2

      1. $U_2;\ U_2 \in \leftrightarrow S_1I \cap s$
      2. $c_2;\ c_2\ (U_2,|IU_2|)$



Obrázek 41: J. D. Gergonne – konstrukce výsledných cyklů c_1 a c_2

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar#material/y9rzazbt

Diskuse řešení: Tento postup platí pro téměř každé uspořádání kružnic. ([9], str. 28) Pokud však středy všech tří kružnic leží na jedné přímce, pak potenční střed splývá s póly os podobnosti, tímto způsobem nenalezneme žádné řešení úlohy. ([9], str. 30)

5.2 Aloisius E. C. Gaultier

A. E. C. Gaultier byl francouzský katolický kněz a učitel (později i ředitel školy), který se narodil v italském městě Asti kolem roku 1745. Zemřel ve Francii v Paříži 18. září 1818. [3]

Věnoval se principům vzdělávání dětí. V roce 1786 si otevřel svou školu v Paříži, v níž uplatňoval své principy vzdělávání. [3]

Během Francouzské revoluce hledal útočiště v Anglii. V Londýně našel řadu svých bývalých žáků (francouzská šlechta), a proto si otevřel kurzy vzdělávání pro francouzské běžence. Jeho metody vzdělávání byly velmi obdivovány, a proto dostal několik ocenění od představitelů anglických univerzit v Oxfordu nebo v Cambridge.[3]

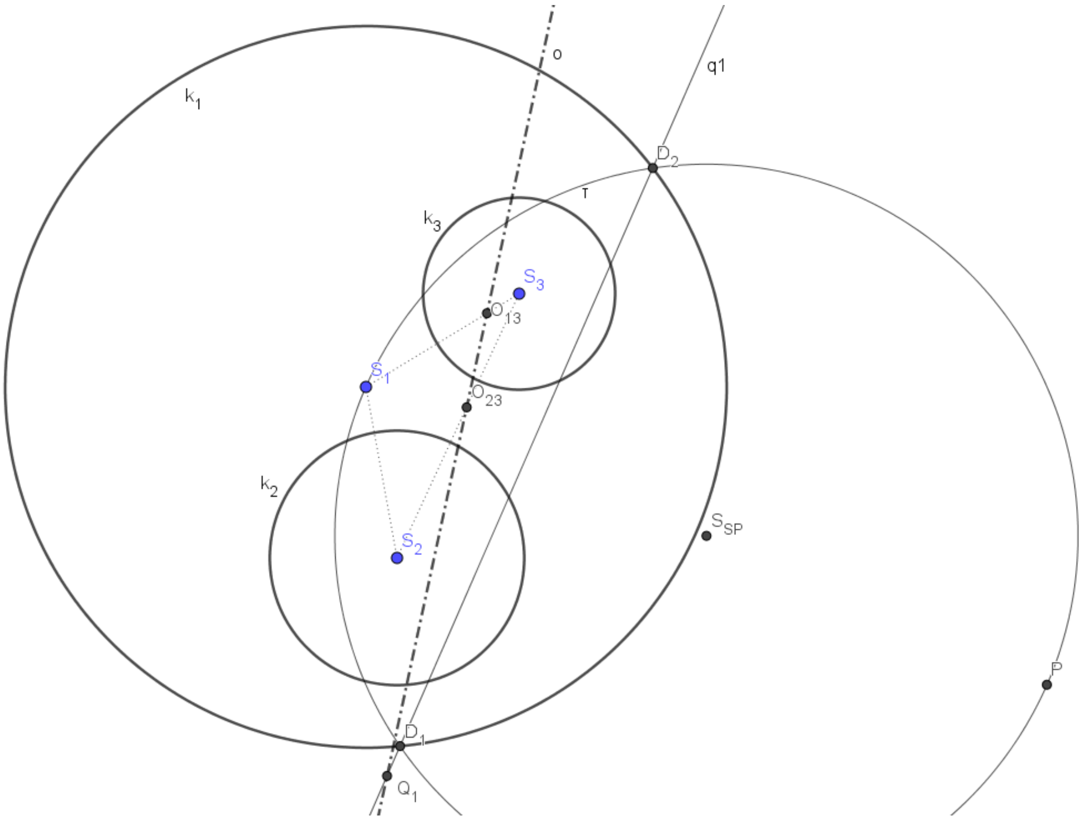
V roce 1801 se vrátil do Francie, kde pokračoval ve vzdělávání dětí. Začal publikovat svá vzdělávací díla do různých periodik. [3] Publikoval také do periodika *„Journal de l'école polytechnique“,* v němž byla v roce 1816 uveřejněna zcela jiná, nová konstrukce Apolloniovy úlohy typu ***kkk***, která vyplývala z řešení Gergonnova. ([9], str. 35) Věnoval se více oborům, proto vydal učebnice pro každou z oblastí primárního vzdělávání.[9]

5.2.1 Řešení Apolloniovy úlohy typu *kkk* podle A. E. C. Gaultiera

Rozbor úlohy: Z obrázku 41 víme: že body P, I, 1 a P_1 leží na jedné přímce, proto se poláry těchto bodů vzhledem ke kružnici k_1 protínají v jediném bodě. Polára bodu P_1 je osa o podobnosti, poláry bodů 1 a I jsou tečny kružnice k_1 v těchto bodech a společným průsečíkem Q_1 těchto tří polár prochází i polára potenčního středu P vzhledem ke kružnici k_1. ([9], str. 35)

Popis konstrukce: Sestrojíme osu o podobnosti daných kružnic k_1 (S_1, r_1), k_2 (S_1, r_1) a k_3 (S_1, r_1), které jsou libovolně orientované, a jejich potenční střed P. Potom určíme na ose o bod Q_1 jako její průsečík s polárou q_1 potenčního středu P vzhledem ke kružnici k_1. Tečny vedené z bodu Q_1 ke kružnici k_1 určí na této kružnici dotykové body I a 1 se dvěma výslednými kružnicemi c_1 a c_2, obdobně lze sestrojit i dotykové body II a 2 kružnice c_1, c_2 s kružnicí k_2, resp. dotykové body III a 3 kružnicec1, c_2 s kružnicí k_3. Lze však také využít středů podobnosti Q_{13}, resp. Q_{23} a pomocí nich sestrojit body *2* a *II*, resp. *3* a *III*. ([9], str. 35-36)

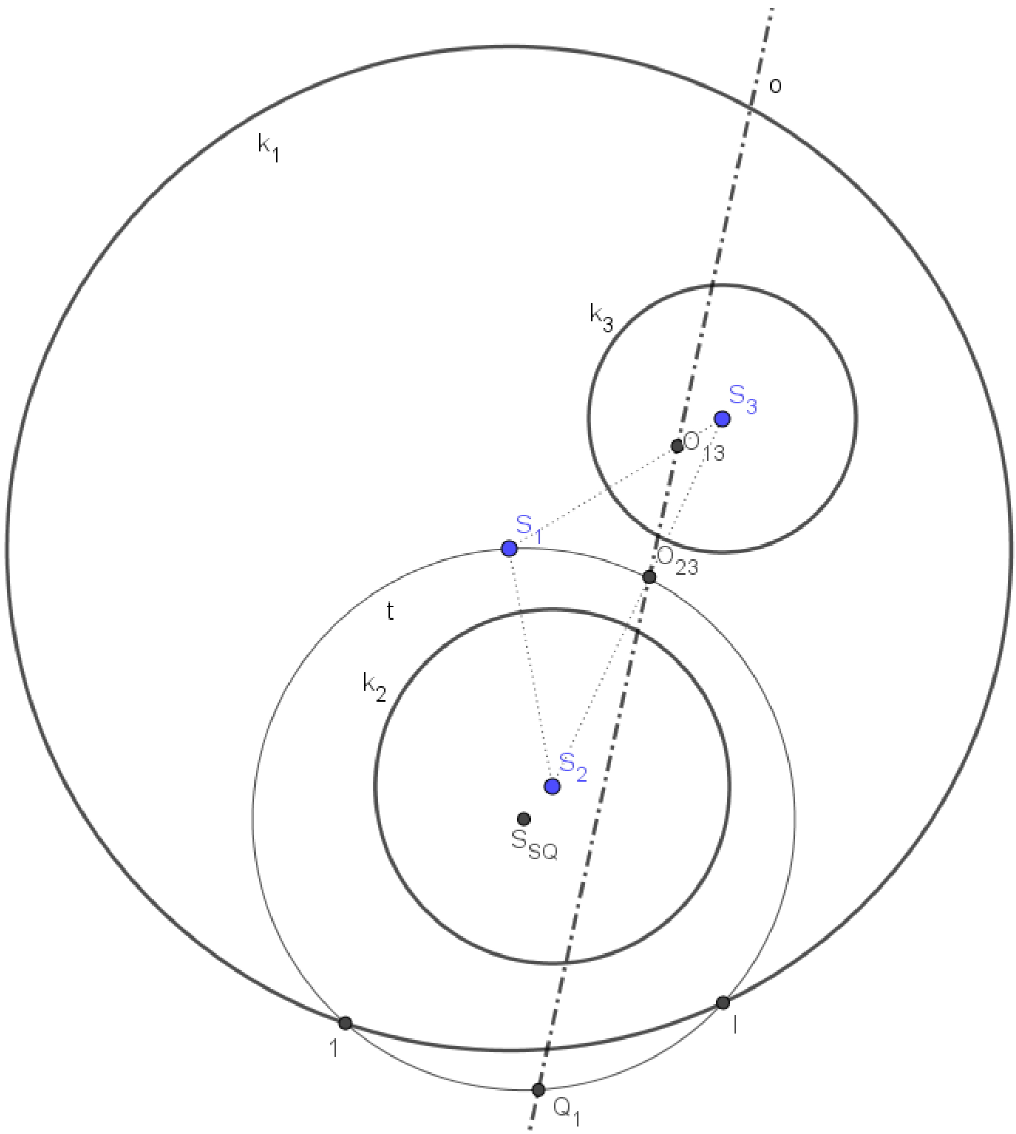
1) – 2) Obdobné jako u řešení podle J. D. Gergonna
3) Konstrukce poláry q_1 ke kružnici k_1 a bodu Q_1
   1. S_{SP}; S_{SP} střed úsečky S_1P
   2. τ; τ (S_{SP}, | $S_{SP}P$|)
   3. D_1, D_2; D_1, $D_2 \in \tau \cap k_1$
   4. q_1; $D_1D_2 \equiv q_1$
   5. Q_1; $Q_1 \in$ o $\cap$ q_1



Obrázek 42: A. E. C. Gaultier – konstrukce poláry q_1 ke kružnici k z bodu P a konstrukce bodu Q_1

4) Sestrojení bodů dotyku *I, 1*

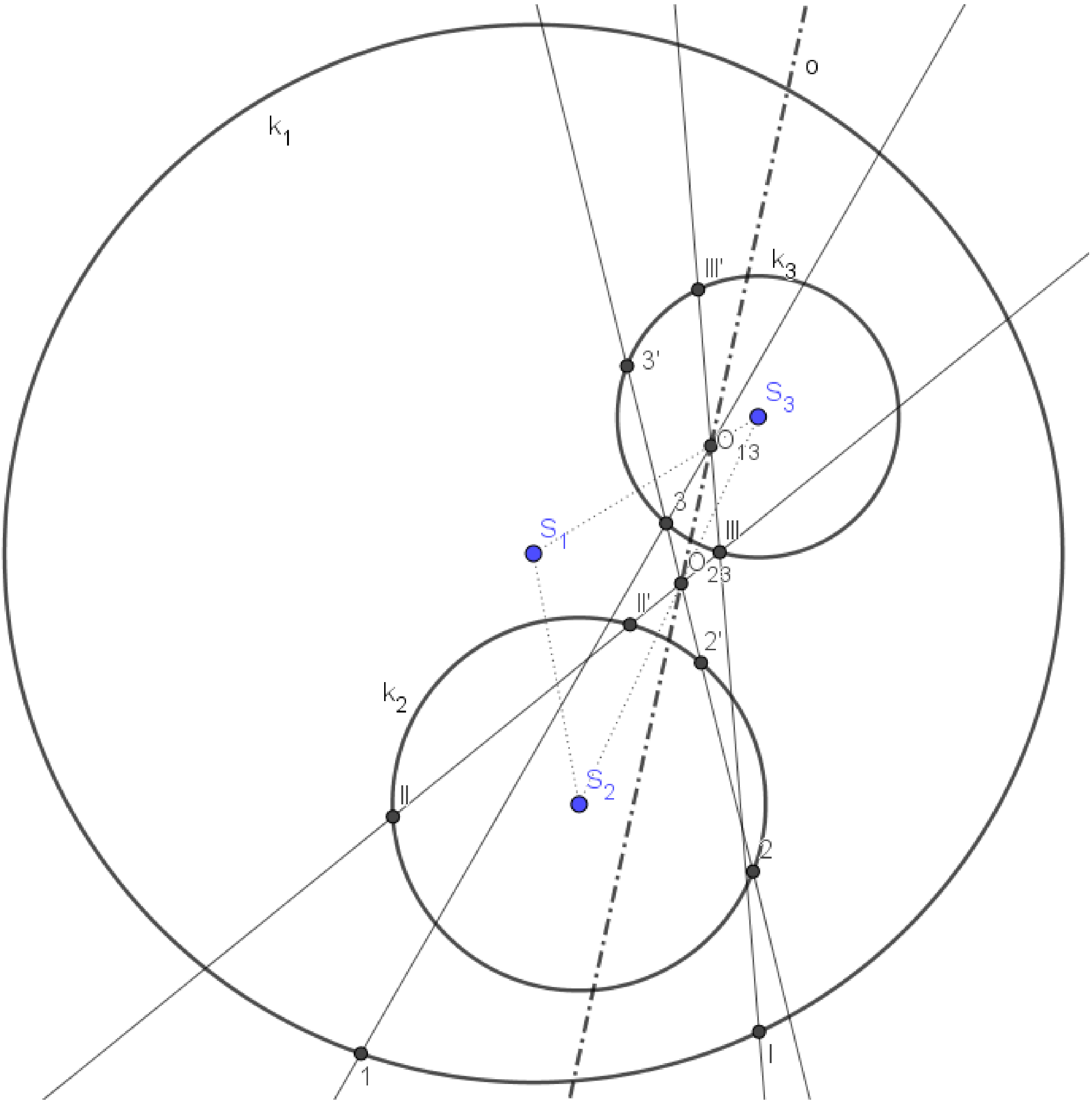
   1. S_{SQ}; S_{SQ} střed úsečky S_1Q_1
   2. t; t (S_{SQ}, $|S_{SQ}Q_1|$)
   3. *1, I*; $1, I \in t \cap k_1$



Obrázek 43: A. E. C. Gaultier – konstrukce bodů dotyku I, 1

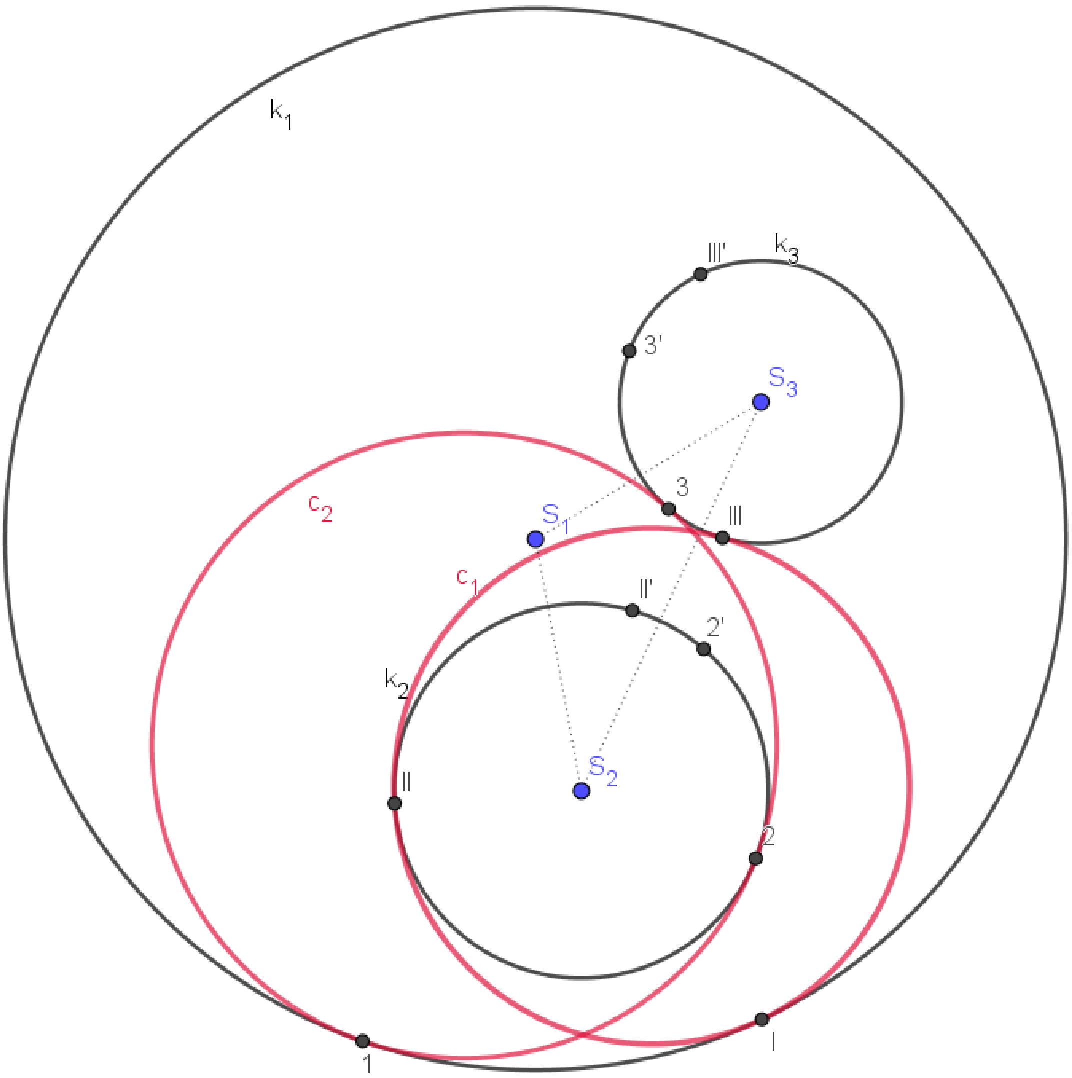
5) Konstrukce bodů dotyku *2*, *II*, *3*, *III*

1. $3,\ 3‘;\ 3, 3‘ \in k_3 \cap 1O_{13}$
2. $2,\ 2‘;\ 2,\ 2‘ \in k_2 \cap 3O_{23}$
3. $III,\ III‘;\ III,\ III‘ \in k_3 \cap IO_{13}$
4. $II,\ II‘;\ II,\ II‘ \in k_3 \cap IIIO_{13}$



Obrázek 44: A. E. C. Gaultier – konstrukce bodů dotyku 2, 3, II, III

6) Konstrukce výsledných kružnic
   1. Apolloniova úloha typu ***BBB*** – daná body *1, 2, 3*
   2. Apolloniova úloha typu ***BBB*** – daná body *I, II, III*



Obrázek 45: A. E. C. Gaultier - konstrukce výsledných kružnic c_1 a c_2

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar#material/fmve2w3c

5.3 Maurice Fouché

Maurice Fouché se narodil v Paříži v roce 1855 a zemřel ve městě Dole (Jura) v roce 1929. Mezi léty 1875 a 1881 byl pomocným astronomem v observatoři v Paříži, byl však propuštěn kvůli závažnému pochybení.[1]

Poté, co byl propuštěn z observatoře, zahájil kariéru učitele matematiky na řadě pařížských středných škol.[1]

Mezi léty 1885 a 1905 publikoval patnáct článků z oblasti analytické geometrie nebo aritmetiky. Podílel se na tvorbě časopisu *Camille Flammarion l'Astronomie* pod pseudonymem Philippe Gérigny. [1] V roce 1892 publikoval také do *Nouvelles Annales de mathématiques.*([9], str. 37)

5.3.1 Řešení Apolloniovy úlohy typu *kkk* podle M. Fouchého

M. Fouché dospěl k obecnější konstrukci, jak najít body Q_i, $i=1,2,3$, a tím i ke společným tečnám výsledných kružnic. ([9], str. 37)

Rozbor: Body dotyku výsledných kružnic c_1, c_2 s danými kružnicemi k_1 (S_1, r_1), k_2 (S_2, r_2), k_3 (S_3, r_3) jsou po dvou inverzně sdružené podle středu podobnosti příslušné dvojice daných kružnic. Zvolme na k_1 libovolný bod N_1 a sestrojme k němu bod N_2 na kružnici k_2, inverzně sdružený bod N_2 podle středu podobnosti O_{12}, dále zkonstruujme na kružnici k_3 bod N_3, který je inverzní k bodu N_2 podle středu podobnosti O_{23} a proložme body N_1, N_2, N_3 kružnici k (S, $|SN_1|$), pak je mocnost bodu O_{12} při proměnném bodu N_1 ke všem kružnicím k stále stejná mocnost, jakož je i stále stejná mocnost bodu O_{23} ke všem kružnicím k. Kružnice k, která je takto určená tvoří tzv. svazek, kterému náleží i dotykové kružnice c_1 a c_2 jako zvláštní případy a také kružnice tzv. orthotomická. Osa o je společnou chordálou výsledných kružnic. Společné sečny, tedy chordály kružnic k zmíněného svazku s danou kružnicí k_1 protínají osu o v jediném bodě Q_1, kterým prochází i společná tečna výsledné kružnice c_1 resp. c_2 s kružnicí k_1 sestrojená v bodě *1* resp. *I*. Obdobným způsobem najdeme k body, Q_2 a Q_3. ([9], str. 37 - 38)

Poznámky:

Svazek - „Množina všech kružnic, které mají společnou chordálu, se nazývá svazek kružnic. Speciálně: Všechny kružnice, které procházejí danými dvěma různými body A, B tvoří svazek kružnic.“ [6]

Orthotomická kružnice – kružnice která náleží svazku kružnic určenému dotykovými kružnicemi a která má s kružnicemi svazku společné dva body na ose o podobnosti. ([9], str. 37)

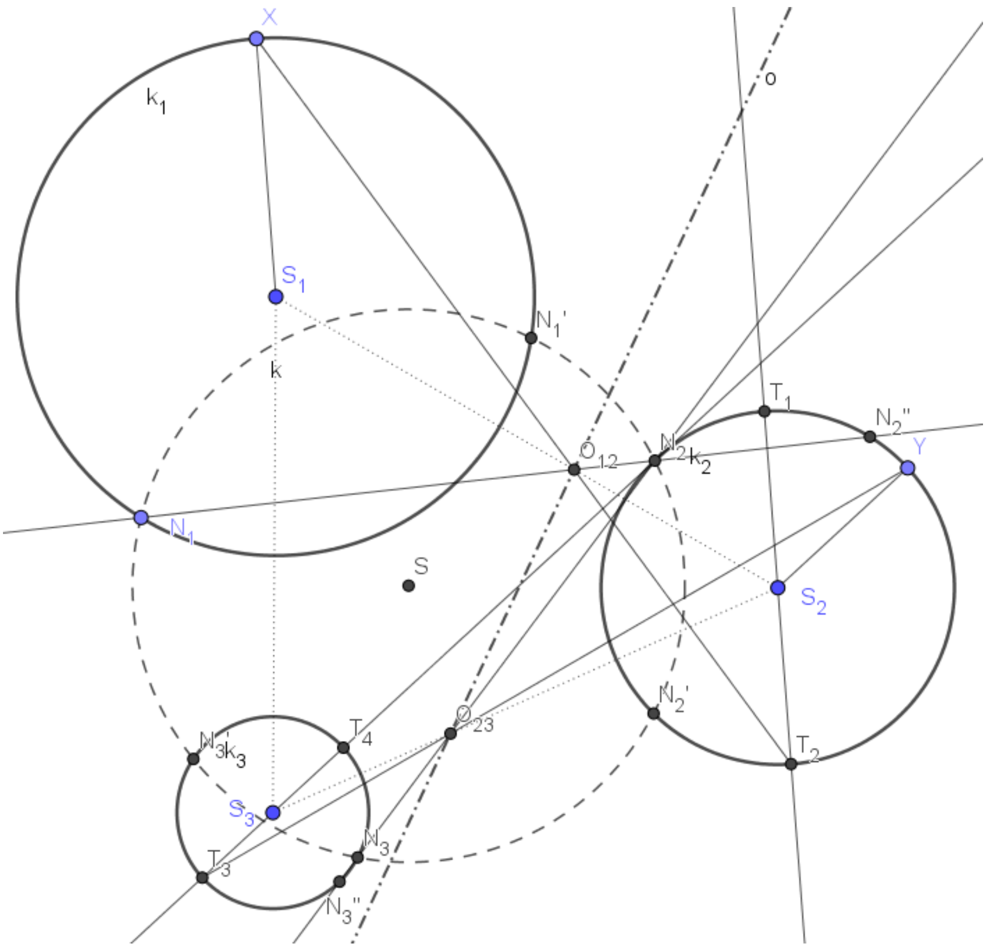
Popis konstrukce: K daným třem kružnicím, orientovaným celkem 4× různě, sestrojíme osu o podobnosti a libovolnou kružnici k. Společná sečna kružnice k například s kružnici k_1 protne osu o v bodě Q_1. Tečny vedené z tohoto bodu ke kružnici k_1 určují na kružnici k_1 body dotyku *I*, *1* dvou hledaných kružnic c_1, c_2. Analogicky je možné sestrojit body dotyku *2, II* kružnice k_2, resp. *3, III* kružnice k_3 s výslednými kružnicemi c_1, c_2. ([9], str. 38)

1) Osa *o* podobnosti a kružnice *k*

   Osa *o* podobnosti se určí stejným způsobem jako u Gergonnova řešení. (viz str. 62)

   Konstrukce kružnice *k*:

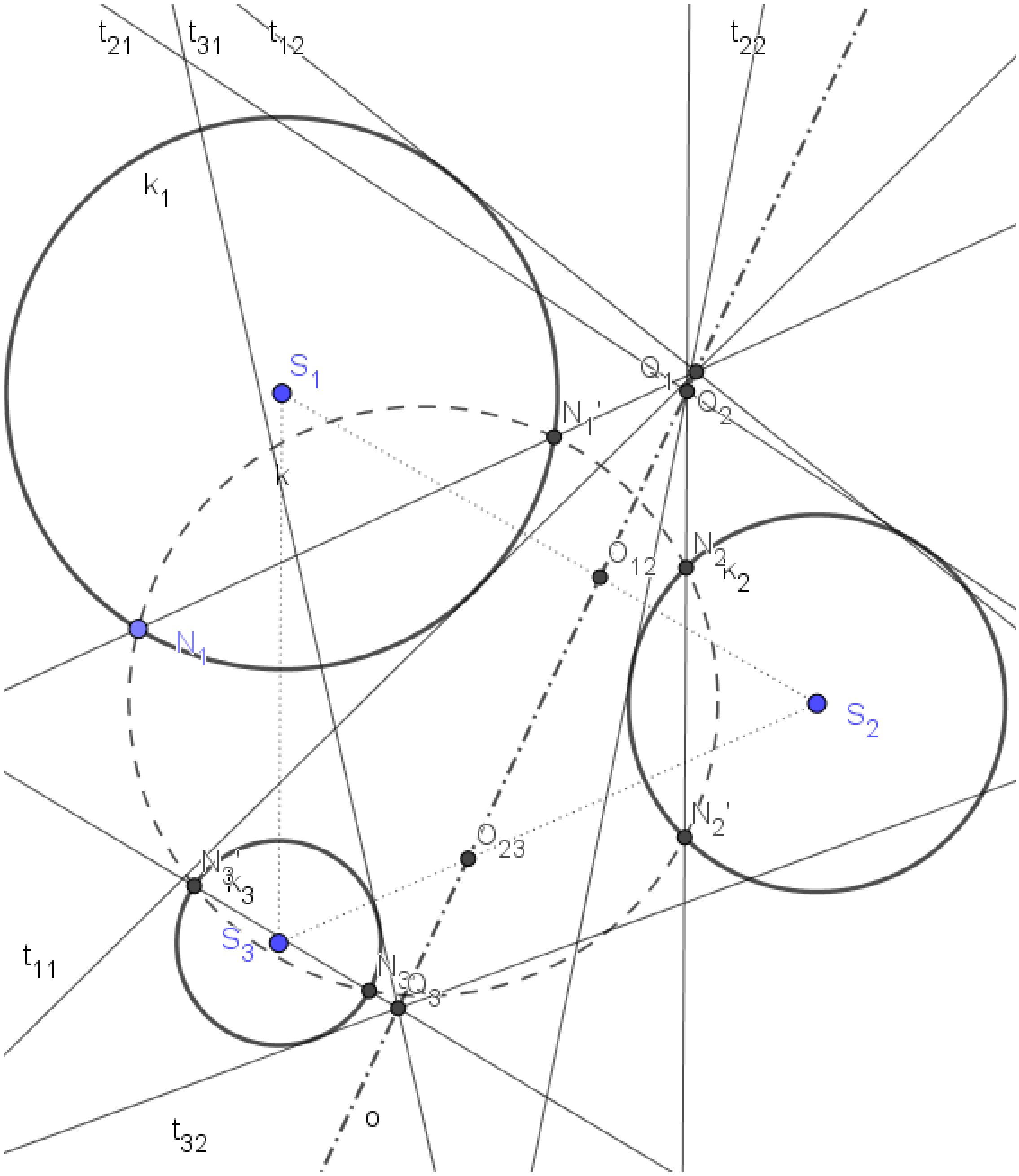
   1. N_1; $N_1 \in k_1$, libovolný bod
   2. N_2; $N_2 \in k_2 \cap N_1O_{12}$
   3. N_3; $N_3 \in k_3 \cap N_2O_{23}$
   4. *k*, úloha převedena na Apolloniovu úlohu typu ***BBB*** – sestrojení kružnice dané body N_1, N_2, N_3
   5. N'_1; $N'_1 \in k_1 \cap k \wedge N'_1 \neq N_1$
   6. N'_2; $N'_2 \in k_2 \cap k \wedge N'_1 \neq N_1$
   7. N'_3; $N'_3 \in k_3 \cap k \wedge N'_1 \neq N_1$



Obrázek 46: M. Fouché – konstrukce kružnice k

2) Body Q_1, Q_2, Q_3 a tečny k příslušným kružnicím z nich, body dotyku

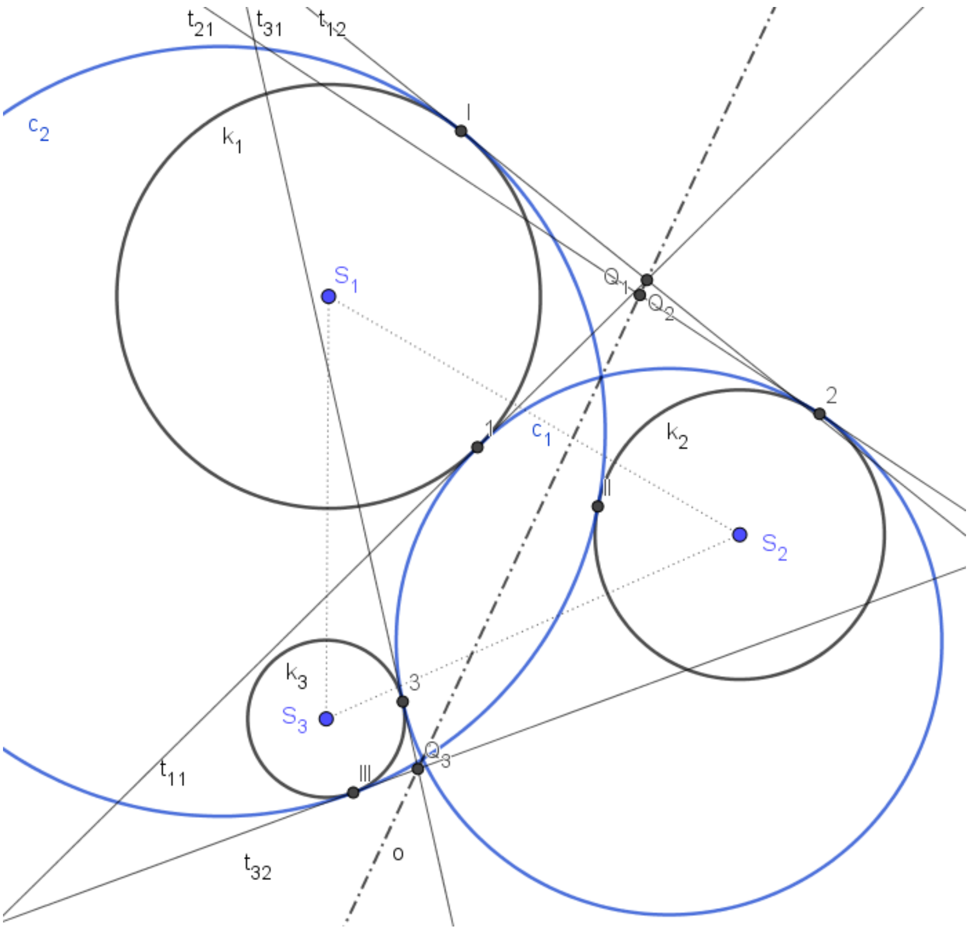
1. Q_1; $Q_1 \in o \cap N_1N_1'$
2. Q_2; $Q_2 \in o \cap N_2N_2'$
3. Q_3; $Q_3 \in o \cap N_3N_3'$
4. t_{11}, t_{12}; jsou tečny ke kružnici k_1 z bodu Q_1
5. t_{21}, t_{22}; jsou tečny ke kružnici k_2 z bodu Q_2
6. t_{31}, t_{32}; jsou tečny ke kružnici k_3 z bodu Q_3



Obrázek 47: M. Fouché – konstrukce bodů Q_1, Q_2, Q_3 a tečen k zadaným kružnicím

3) Výsledné kružnice c_1, c_2

1. *1; 1* $\in t_{11} \cap k_1$
2. *I; I* $\in t_{12} \cap k_1$
3. *2; 2* $\in t_{21} \cap k_2$
4. *II; II* $\in t_{22} \cap k_2$
5. *3; 3* $\in t_{31} \cap k_3$
6. *III; III* $\in t_{32} \cap k_3$
7. c_1; c_1 – Apolloniova úloha typu ***BBB*** – sestrojení kružnice c_1 dané body *1*, *2*, *3*
8. c_2; c_2 – Apolloniova úloha typu ***BBB*** – sestrojení kružnice c_2 dané body *I*, *II*, *III*



Obrázek 48: M. Fouché – konstrukce bodů dotyku a výsledných kružnic c_1, c_2

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar#material/ckjxedaz

Diskuse řešení: U řešení Apolloniovy úlohy typu ***kkk*** podle Gergonna nešlo vyřešit úlohu v případě, pokud středy daných kružnic, ležely na jedné přímce. Když se však k řešení Apolloniovy úlohy typu ***kkk*** použije řešení dle Fouchého, nalezneme řešení i pro případ, kdy středy zadaných kružnic leží na jedné přímce. ([10], str. 39 – 40)

5.4 Frederick Soddy

Frederick Soddy byl anglickým radiochemikem, který se narodil v roce 1877 a zemřel v roce 1956. [13] Je nositelem Nobelovy ceny za chemii (výzkum radioaktivity a izotopů), kterou získal v roce 1921. [14]

F. Soddy se též zabýval Apolloniovou úlohou typu ***kkk***, dokonce o této úloze napsal báseň „*The kiss precise*“, kterou uveřejnil v roce 1936. Tento problém je také znám pod názvem Soddyho kruhy. [21]

5.4.1 Řešení Apolloniovy úlohy typu *kkk* podle F. Soddyho

F. Soddy se zabýval speciálním případem, kdy se tři zadané kružnice po dvou dotýkají. Není však potvrzeno, že by své řešení skutečně zkonstruoval pomocí pravítka a kružítka. [7]

Soddyho řešení vychází z Georgennova řešení, ale můžeme u něch využít i řešení dle Fouchého, protože při řešení využíváme středů stejnolehlostí a osy podobnosti. [7] [23]

Rozbor úlohy: Využijeme-li věty: „*Dotýkají-li se kružnice dvou daných kružnic, pak spojnice dotykových bodů prochází středem stejnolehlosti dvou daných kružnic.*“, [23] pak můžeme lehce sestrojit středy stejnolehlostí E_1, E_2, E_3 a osu *o* podobnosti. Potenční střed *P* leží na tečnách kružnic vedených body, ve kterých se kružnice dotýkají, a hledaná polára je poté spojnice bodů inverzně sdružených. Vychází, že bod *Q* je shodný se středem stejnolehlosti a v současné chvíli můžeme postupovat obvyklým způsobem. [7]

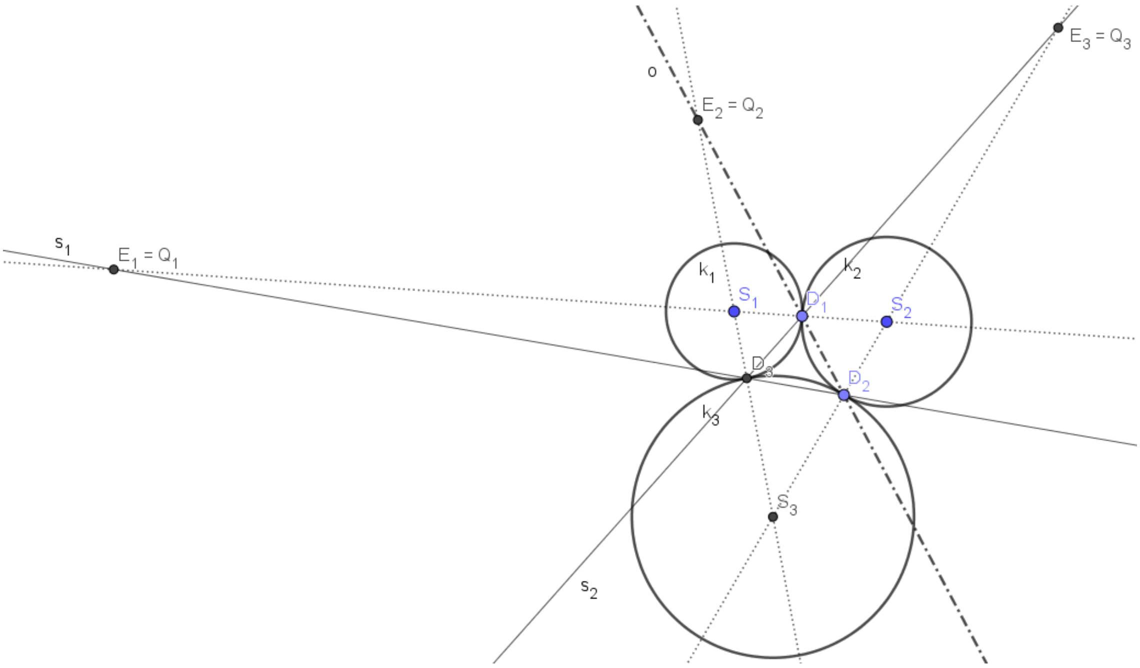
Popis konstrukce: K daným třem kružnicím sestrojíme osu *o* podobnosti a nalezneme středy stejnolehlostí E_1, E_2, E_3 příslušných spojnic bodů dotyků kružnic k1, k2, k3 s odpovídajícími středy, tj. spojnicemi příslušných kružnic. Dále nalezneme potenční středy $Q_1 = E_1$, $Q_2 = E_2$, $Q_3 = E_3$, jimiž vedeme tečny po řadě k daným kružnicím k_1, k_2, k_3. Body dotyku tečen s danými kružnicemi jsou body určující výsledné kružnice c_1, c_2. Postupujeme tedy stejně jako u řešení M. Fouchého.

1) Osa *o* podobnosti a středy stejnolehlostí E_1, E_2, E_3

Osa *o* podobnosti se určí stejným způsobem jako u Gergonnova řešení. (viz str. 62)

Středy stejnolehlostí:

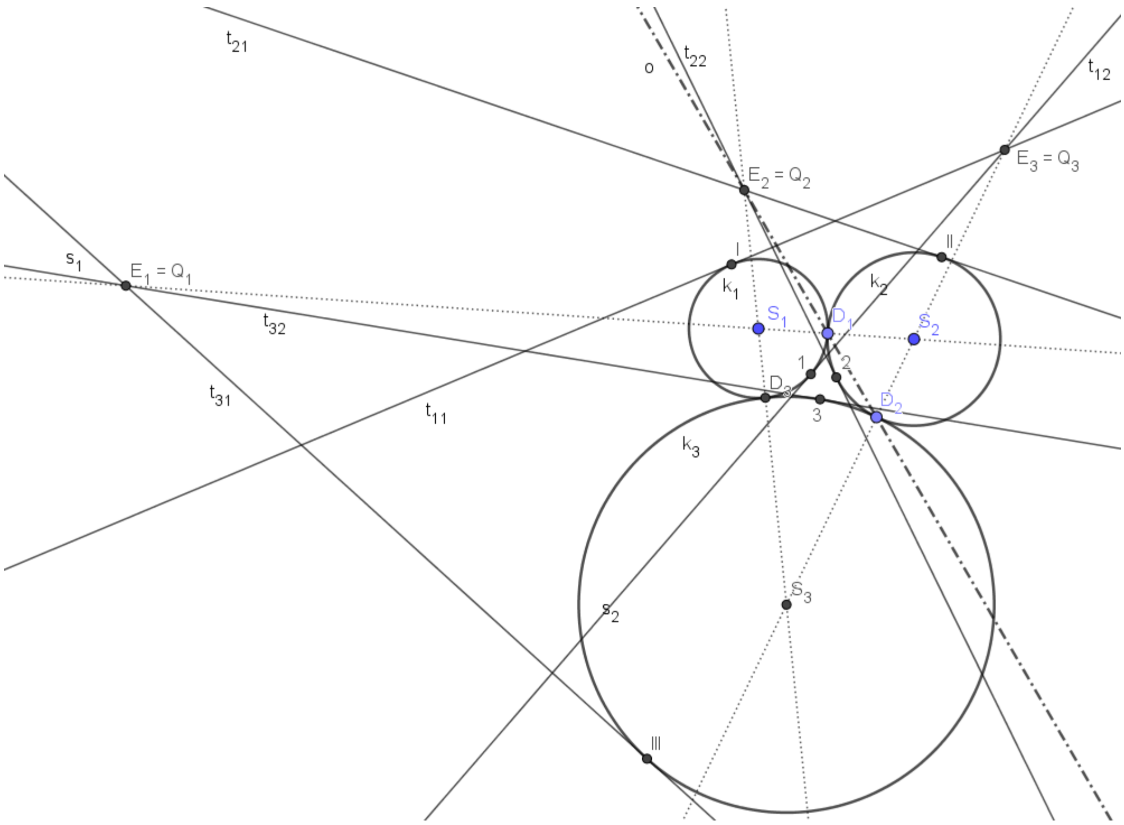
1. E_1; $E_1 \in S_1S_2 \cap D_2D_3$
2. E_2; $E_2 \in S_1S_3 \cap D_1D_2$
3. E_3; $E_3 \in S_2S_3 \cap D_1D_3$



Obrázek 49: F. Soddy - konstrukce osy podobnosti a středů stejnolehlostí

2) Tečny ke kružnicím a body dotyku

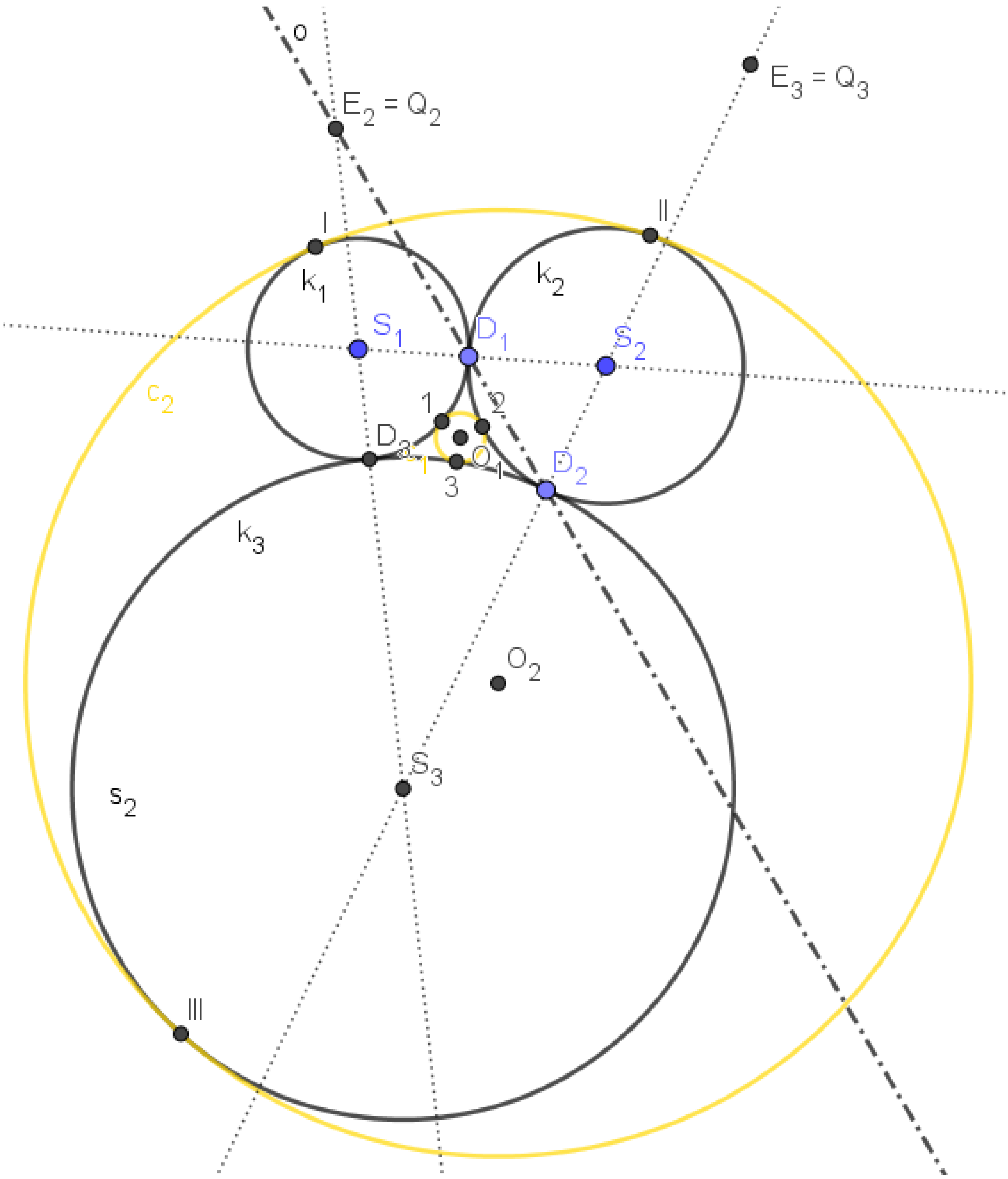
1. t_{11}, t_{12}; jsou tečny ke kružnici k_1 z bodu E_3
2. t_{21}, t_{22}; jsou tečny ke kružnici k_2 z bodu E_2
3. t_{31}, t_{32}; jsou tečny ke kružnici k_3 z bodu E_1
4. $1;\ 1 \in t_{12} \cap k_1$
5. $I;\ I \in t_{11} \cap k_1$
6. $2;\ 2 \in t_{22} \cap k_2$
7. $II;\ II \in t_{21} \cap k_2$
8. $3;\ 3 \in t_{32} \cap k_3$
9. $III;\ III \in t_{31} \cap k_3$



Obrázek 50: F. Soddy - konstrukce tečen ke kružnicím a bodů dotyku

3) Výsledné kružnice

1. c_1, c_1 – Apolloniova úloha typu ***BBB*** – sestrojení kružnice c_1 dané body *1, 2, 3*
2. c_2, c_2 – Apolloniova úloha typu ***BBB*** – sestrojení kružnice c_2 dané body *I, II, III*



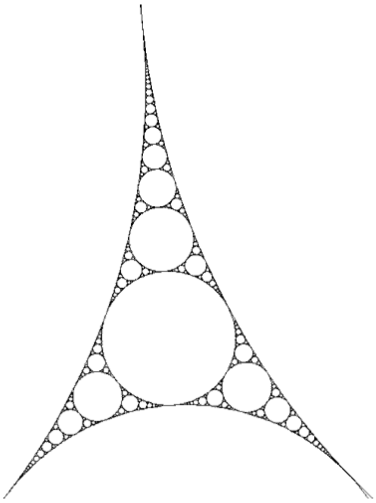
Obrázek 51: F. Soddy - konstrukce výsledných kružnic c_1, c_2

Odkaz na aplet: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar#material/mrkqugpc

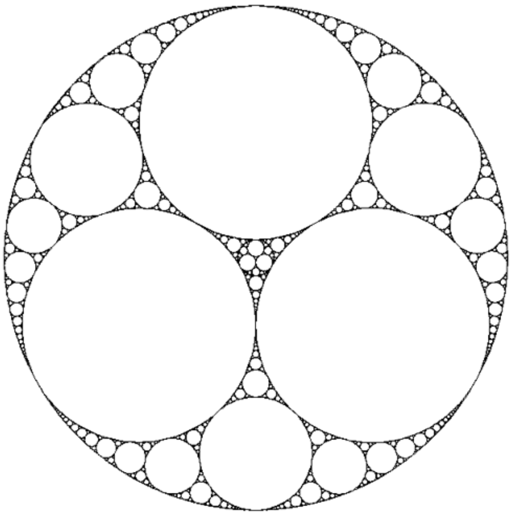
Diskuse řešení: Tato úloha má vzhledem k uspořádání prvků pouze dvě řešení.

5.4.2 Zajímavosti

Pokud budeme výše popsaný Soddyho algoritmus neustále opakovat, získáváme tzv. fraktál. [23]

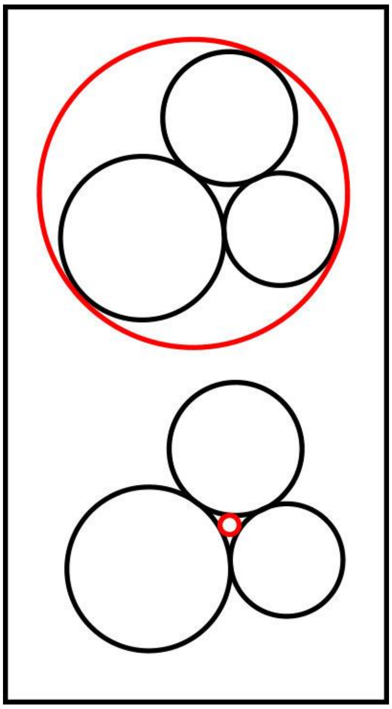


Obrázek 52: Fraktál vytvořený opakováním algoritmu pro nalezení kružnic I



Obrázek 53: Fraktál vytvořený opakováním algoritmu pro nalezení kružnic II

Báseň k Apolloniově úloze typu ***kkk*** s názvem „*The kiss precise*“:



Obrázek 52: Soddyho kruhy

„For pairs of lips to kiss maybe
Involves no trigonometry.
'Tis not so when four circles kiss
Each one the other three.
To bring this off the four must be
As three in one or one in three.
If one in three, beyond a doubt
Each gets three kisses from without.
If three in one, then is that one
Thrice kissed internally.

Four circles to the kissing come.
The smaller are the benter.
The bend is just the inverse of
The distance from the center.
Though their intrigue left Euclid dumb
There's now no need for rule of thumb.
Since zero bend's a dead straight line
And concave bends have minus sign,
The sum of the squares of all four bends
Is half the square of their sum.“ [21]

Závěr

Tato bakalářská práce se zabývá tématem Apolloniových a Pappových úloh. Je uvedena zmínkou, co to vůbec Apolloniovy a Pappovy úlohy jsou, jaké jsou jejich jednotlivé typy V práci je prezentován vždy jen jeden způsob řešení příslušného typu úlohy na základě postavení zadaných prvků, ostatní způsoby řešení jsou zakomponovány v GeoGebra knize s názvem Apolloniovy a Pappovy úlohy volně dostupné na webovém linku: https://www.geogebra.org/m/amcex3ar.

Cílem práce bylo představení pojmů Apolloniových a Pappových úloh a sestavení přehledu těchto úloh. Těchto cílů bylo dosaženo ve čtvrté kapitole práce s názvem „Přehled Apolloniových a Pappových úloh řešených v GeoGebře“. Dalším cílem práce byla tvorba apletů pro jednotlivé Apolloniovy a Pappovy úlohy. Tento cíl byl též splněný, dokonce obohacený o další aplety, které ukazují postupy užití různých metod při konstrukcích řešení Apolloniových úloh jako např. aplety pro vysvětlení základních principů kruhové inverze, nebo aplety ukazující různé přístupy k řešení Apolloniových úloh.

Vypracování této práce mi bylo velkým přínosem, neboť jsem se při její tvorbě seznámila na mnoha pro mě novými pojmy a metodami jako např. s kruhovou inverzí, nebo s pojmem inverzně sdružené body. Nahlédla jsem do zákoutí matematiky, která byla využívána dřívepři řešení Apolloniových úloh jako např. cykly. Zjistila jsem, že česká literatura k tomuto tématu je zastaralá, málo aktualizovaná, a proto mne tato práce motivovala k tomu, abych se tímto tématem zabývala dále.

Myslím si, že jsou nejen text bakalářské práce, ale i dynamické aplety vložené do GeoGebra knihy vhodnou pomůckou při studiu či dokonce hlubším prozkoumávání této tématiky.

Zdroje

Literatura:

[1] Archives Henri Poincaré et al., eds., Henri Poincaré Papers, 2018, *Doc. 3-20, Maurice Fouché,*[online] [vid. 27. 02. 2020]

Dostupné z: http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/chp/text/fouche.html

[2] BABOROVSKÝ J., BAYER E., FRANKENBERGER O., aj. *Ottův slovník naučný: ilustrovaná encyklopaedie obecných vědomostí, XIX. – P – Přehoř.* Praha: J. Otto, 1902.

[3] CATHOLIC ANSWERS, 2020. *Aloisius-Edouard-Camille Gaultier*, [online]. [vid. 24. 02. 2020]

Dostupné z: https://www.catholic.com/encyclopedia/aloisius-edouard-camille-gaultier

[4] COLERUS E. *Od Pythagory k Hilbertovi: dějiny matematiky pro všechny*. Praha: Družstevní práce, 1941, str. 73 – 88.

[5] GEOGEBRA, 2019. *O Programu GeoGebra* [online]. [vid. 11. 10. 2019]

Dostupné z: https://www.geogebra.org/about

[6] GERGELITSOVA Š., *Cesta z roviny do prostoru od vlastností kružnic ke kulové inverzi* [online][vid. 12. 5. 2020]

Dostupné z: https://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/gergelitsova.pdf

[7] GISCH D., RIBANDO J. M., *Apollonius' problem: A study od Solutions nad their Connections*, 2004, American journal of undergraduate research vol. 3 no. 1 (2004)

Dostupné z: http://www.ajuronline.org/uploads/Volume%203/Issue%201/31D-GischArt.pdf

[8] GUSAVE N., IVAKINA A., CHODOROVÁ M., *Kruhové inverze a její aplikace,* Matematika Fyzika Informatika, 25. ročník, Praha: Prometheus, spol. s.r.o., 2016, str. 84 - 89

[9] HOLUBÁR J.. *O metodách rovinných konstrukcí.* Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1940.

[10] LEISCHNER P., *Geometrická zobrazení*, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2010, ISBN 978-80-7394-243-4. str. 93-108

[11] MathPages, *Pappus' Theorem,* [online][vid. 18. 04. 2020]

Dostupné z: https://www.mathpages.com/home/kmath542/kmath542.htm

[12] NÁDENÍK Z., BEČVÁŘ J., 2011. *Moji učitelé geometrie II. Učebnice pro reálky vydávané Jednotou českých matematiků a fyziků před sto lety: Moji učitelé geometrie*. pp. 27–108. Praha: Matfyzpress, 2011. ISBN 978-80-7378-159-0 (str. 72)

[13] NobelPrize.org, Nobel Media AB 2019, 2019. *Frederick Soddy; Biographical* [online].[vid. 30. 10. 2019]

Dostupné z: https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1921/soddy/biographical/

[14] NobelPrize.org, Nobel Media AB 2019, 2019. *The Nobel Prize in Chemistry 1921*[online]. [vid. 30. 10. 2019]

Dostupné z: https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1921/summary/

[15] O'CONNOR J. J., ROBERTSON E. F., 1999. *Apollonius of Perga* [online]. [vid. 11. 10. 2019]

Dostupné z: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Pappus.html

[16] O'CONNOR J. J., ROBERTSON E. F., 1999. *Pappus of Alexandria* [online]. [vid. 11. 10. 2019]

Dostupné z: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Apollonius.html

[17] Pantheon, *Edmond Leguerre*, [online][vid. 11. 07. 2020]

Dostupné z: https://pantheon.world/profile/person/EdmondLaguerre/

[18] POMYKALOVÁ E.. *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*. Praha, Prometheus, spol. s.r.o., 1993. ISBN 80-7196-174-4

[19] REE S. V., 2019. *Krater Apollonius auf der Mondoberfläche* [online]. [vid. 11. 10. 2019]

Dostupné z: https://www.der-mond.org/mondkarte/formation/mondkrater/apollonius/

[20] SEIDLOVA J., *Stejnolehlost.* [online][vid. 27. 04. 2020]

Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/janaseidlova/cad/kapitola2.html

[21] SODDY, F., 1936. *The Kiss Precise*. *Nature 137*, str. 1021 doi:10.1038/1371021a0

[22] URBAN A., *Deskriptivní geometrie 1*, Praha: Státní nakladatelství technické literatury (SNTL), 1965, str. 17-30

[23] VANČURA J. , 2008/2009. *Apolloniovy úlohy*, [online]. [vid. 05. 04. 2020]

Dostupné z: http://www.apolloniovyulohy.webz.cz/

Obrázky:

Obrázek 1: https://greatestgreeks.wordpress.com/2016/09/18/apollonius-of-perga/

Obrázek 2: https://npconti18.wixsite.com/mysite-1/biography

Obrázek 4: https://deskarati.com/wp-content/uploads/2014/09/Soddy-Circles.jpg

Obrázek 5: https://de.cleanpng.com/png-g7k64c/

Obrázek 52: http://www.apolloniovyulohy.webz.cz/vzorce/vzorec49.gif

Obrázek 53: http://www.apolloniovyulohy.webz.cz/vzorce/vzorec50.gif