



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

VÝZNAMNOST TAHOVÝCH NAPĚTÍ PŘI OHYBU PRUTU SE ZABRÁNĚNOU PODÉLNOU DEFORMACÍ

SIGNIFICANCE OF TENSILE STRESSES IN A BENDED BEAM WITH CONSTRAINED AXIAL
DEFORMATION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jonatan Wolf

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Jonatan Wolf**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.**
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Významnost tahových napětí při ohybu prutu se zabráněnou podélnou deformací

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Při zabránění podélné deformace ohýbaného prutu se úloha určení jeho napjatosti stává staticky neurčitou a její exaktní analytické řešení je značně obtížné. Vzhledem k tomu, že toto řešení je silně nelineární, tak do určité hodnoty zatížení a deformace je dopad této statické neurčitosti na napjatost a následně bezpečnost prutu poměrně malý. Cílem práce je na základě literární rešerše a vlastních výpočtů stanovit limity pro praktickou použitelnost staticky určitého řešení pro zvolený případ geometrie, materiálu, uložení a zatížení prutu, a to pro případ konstantní i proměnné teploty prutu.

Cíle bakalářské práce:

Provést rešerši literatury se zaměřením na nelinearitu podélné deformace prutu při jeho ohybu. Pro zvolený případ geometrie, materiálu, uložení a zatížení prutu určit výpočtem závislost napětí od ohybového momentu a normálové síly na zatížení. Posoudit významnost obou složek napětí u zvoleného prutu v závislosti na velikosti silového a teplotního zatížení.

Seznam doporučené literatury:

Janíček, Ondráček, Vrbka, Burša: Mechanika těles, PPI. Skriptum VUT v Brně, CERM, 2004
Gere, Timoshenko: Mechanics of materials, Springer, 2002.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Závěrečná práce se zabývá významností tahových napětí vzniklých při ohybu prutu se zabráněnou podélnou deformací. Tento problém je řešen především exaktními výpočty tahových napětí pro různé geometrie, materiály a velikosti zatížení prutů. Řešení je provedeno numericky s využitím programu MATLAB. Výsledkem této práce je posouzení významnosti tahového napětí a porovnání s jinými napětími, konkrétně s teplotním napětím. Jedním z dílčích výsledků práce je i určení hraniční hodnoty štíhlosti prutu pro dané ohybové napětí, pro kterou se stává toto tahové napětí významným.

Klíčová slova

Vazbová nelinearita, tahové napětí, ohyb prutu, posuv podpory, teplotní napětí, zabráněná podélná deformace, štíhlost prutu, numerické řešení

Abstract

Bachelor's thesis deals with the significance of tension stresses produced by the bending of a beam with avoided longitudinal deformation. This problem is mainly solved by exact calculations of tensile stresses for different kinds of geometry, materials and the size lateral loads of the beam. The solution is done numerically using the MATLAB program. The result of this work is the assessment of tensile stress significance and comparison with other stresses, namely temperature stress. One of the partial results of the work is also the determination of the limit value of the slenderness of the beam for the given bending stress for which this tensile stress becomes significant.

Keywords

Binding non-linearity, tensile stress, beam bending, support displacement, temperature stress, prevented longitudinal displacement, slenderness, numerical solution

Bibliografická citace

WOLF, J. *Významnost tahových napětí při ohybu prutu se zabráněnou podélnou deformací*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 44s. Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D..

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Významnost tahových napětí při ohybu prutu se zabráněnou podélnou deformací vypracoval samostatně s použitím odborné literatury, pramenů uvedených na seznamu, který tvoří přílohu této práce, a na základě konzultací s vedoucím.

26. května 2017

.....
Jonatan Wolf

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat prof. Ing. Jířímu Buršovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady, připomínky a komentáře poskytované po celou dobu zpracovávání této bakalářské práce.

Obsah

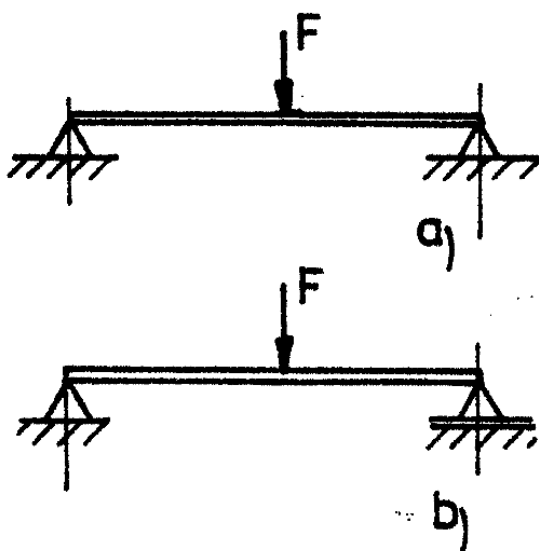
1	Úvod	11
2	Úvod do nelinearity prutů	12
3	Vazbová nelinearita prutu s pevnými podporami	13
3.1	Odhad významnosti tahového napětí	15
4	Řešení tahové síly a napětí	16
4.1	Volba zadaných veličin	16
4.2	Výpočet a srovnání napětí	19
4.3	Kontrola splnění podmínek	24
4.4	Vliv tuhosti rámu, poddajnost vazeb	25
4.5	Vliv ohybového napětí	26
4.6	Vliv materiálu prutu	28
4.7	Vliv tvaru příčného průřezu	31
5	Závěr	33
6	Seznam použitých zdrojů	34
7	Seznam použitých zkratk a symbolů	35
8	Seznam příloh	36
9	Přílohy	37

1 Úvod

V technické praxi jsou v mnoha konstrukcích používány pruty, proto je jejich význam nejen ve strojírenství velmi velký. Při jejich studiu narazíme na mnoho problémů, přičemž jedním z nich je vazbová nelinearita. K jedné z vazbových nelinearit dochází při ohybu prutu se zabráněnou podélnou deformací, což znamená, že prut je zavazben z obou stran pevnou podporou (obr. 1a).

V praxi je ovšem téměř výhradně používán případ, kdy je na jedné straně je jedna pevná podpora nahrazena posuvnou podporou (obr. 1b). Často, a to nejen při studiu, dochází k tomu, že je myšleno toto uložení s posuvnou podporou, ale kreslí se uložení s pevnými podpěrami na obou stranách. Mezi oběma variantami je však podstatný rozdíl. V důsledku ohybu prutu dochází k posuvu pohyblivé podpory a zkrácení vzdálenosti mezi vazbami. Pokud ovšem zamezíme pohybu vazby, dochází ke vzniku tahového napětí.

Při studiu je dosud považována záměna obou zmíněných případů za velkou chybu, ovšem jak velké chyby se ve skutečnosti dopouštíme? Proto se budeme v následujících kapitolách zabývat výpočtem a posouzením významnosti tohoto tahového napětí.



Obr. 1 prut na dvou podporách

a) obě podpory pevné

b) jedna posuvná a jedna pevná podpora

Převzato z [1]

2 Úvod do nelinearity prutů

Vypracováno podle [1]

Většinu úloh zabývajících se pruty se snažíme řešit pomocí lineární pružnosti prutů především díky jednoduchosti řešení. Lineární pružnost znamená, že mezi charakteristikami vnějšího zatížení, napjatostí a deformací je lineární závislost. Toto označujeme jako pružnost prutů I.

Toto řešení je možné za následujících předpokladů:

- jsou splněny prutové předpoklady
- materiál je Hookeovský
- namáhání je jednoduché
- vychází se z prvku uvolněného v nedeformovaném stavu
- charakteristiky vazeb nezávisí na napjatosti a deformaci
- průhyby u ohybu jsou malé ($w^2 \ll 1$)
- vnější silové působení je nezávislé na napjatosti a deformaci.

Pokud některý z těchto předpokladů není splněn, může to způsobit nelineární chování prutů, tedy že mezi charakteristikami vnějšího zatížení, napjatostí a deformací není lineární závislost (pružnost prutů II). Stále se však jedná o pruty, proto předpokládáme splnění prutových předpokladů. Nelineární chování můžeme rozdělit do následujících skupin:

- materiálová – pro materiál neplatí Hookeův zákon, ale je např. pružně plastický
- geometrická – při uvolňování prvku musíme uvažovat změnu jeho geometrie
- ohybová – veličinu w^2 nelze zanedbat vzhledem k 1
- vazbová – při zatěžování se podstatně mění charakteristiky vazeb nebo vazba způsobuje nelinearitu řešení úlohy
- napjatostní – charakteristiky napjatosti pro popis mezních stavů jsou nelineární funkcí jednotlivých napětí
- zatěžovací – zatížení je závislé na napětí a deformaci

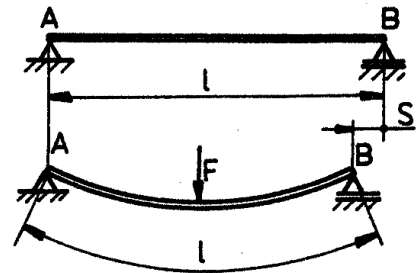
Studium a řešení nelineárních úloh je značně náročnější než úloh lineárních, zejména protože nelinearity:

- podstatně zvyšují operační složitost
- přinášejí nové typy chování, které se u lineárních úloh nevyskytovaly
- vyžadují více vstupních údajů a mají náročnější algoritmy
- vyžadují širší znalosti matematiky, především však hlubší promyšlení a pochopení

3 Vazbová nelinearita prutu s pevnými podporami

Vypracováno podle [1]

Nyní se budeme zabývat pouze vazbovými nelinearitami, a to konkrétně případem prutu s pevnými podporami na obou koncích (obr. 1b). Uvažujme ovšem nejdříve případ, kdy je prut podepřen na jedné straně pevnou a na druhé posuvnou podporou (obr. 1a). Díky pohyblivosti podpory je zajištěno, že v bodech střednice prutu je nulové napětí, což zajišťuje, že se střednice neprotahuje ani nezkracuje. Vlivem ohybu prutu dojde k posuvu pohyblivé podpory s (obr. 2). Pro malé průhyby $w' \ll 1$ a pro $s \ll l$ byl odvozen vztah (3.1) pro posuv podpory s :



Obr. 2 prut s pohyblivou podporou. Převzato z [1]

$$s = \int_0^{\frac{l}{2}} w'^2 dx \quad (3.1)$$

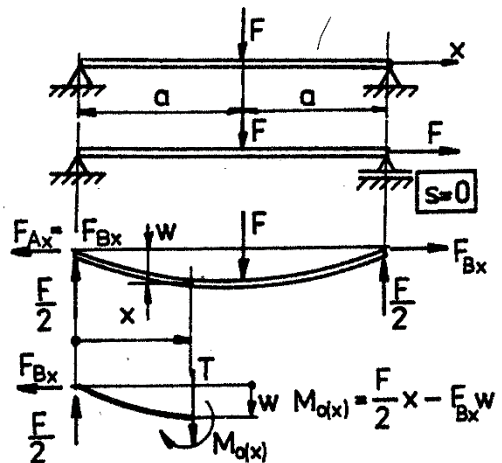
Nyní budeme uvažovat případ s pevnými podporami na obou koncích. Protože je zabráněno posuvu podpor, musí se zvětšovat délka střednice, a proto musí být nenulové tahové napětí ve střednici $N \neq 0$. Zavedeme vazbovou deformační podmínku $s = 0$, k jejímuž vyjádření je třeba určit natočení w' (3.1).

Nejprve provedeme částečné uvolnění (obr. 4), protože jde o 1x staticky neurčité uložení. Z rovnic rovnováhy si určíme reakční síly ve vazbách ve směru osy y :

$$F_{Ay} = F_{By} = \frac{F}{2} \quad (3.2)$$

Vyjádříme ohybový moment:

$$M_o(x) = \frac{Fx}{2} - F_{Bx}w \quad (3.3)$$



Obr. 4 částečné uvolnění prutu s pevnými podporami
Převzato z [1]

Abychom získali natočení w' , dosadíme $M_o(x)$ do rovnice průhybové čáry a upravíme:

$$w'' = -\frac{M_o(x)}{EJ} \Rightarrow w'' = -\frac{F}{2EJ}x + \frac{F_{Bx}}{EJ}w \Rightarrow w'' - \frac{F_{Bx}}{EJ}w = -\frac{F}{2EJ}x \quad (3.4)$$

Provedením substituce:

$$p = \sqrt{\frac{F_{Bx}}{EJ}} \Rightarrow w'' - p^2 w = -\frac{F}{2EJ} x \quad (3.5)$$

získáme nehomogenní diferenciální rovnici II. řádu s konstantními koeficienty, jejíž řešení se hledá ve tvaru s hyperbolickými siny a cosiny:

$$w = C_1 \sinh(px) + C_2 \cosh(px) + w_p \quad \text{kde} \quad w_p = Ax; \quad A = \frac{F}{2F_{Bx}} \quad (3.6)$$

Dosazením a derivací získáme:

$$w = C_1 \sinh(px) + C_2 \cosh(px) + \frac{F}{2F_{Bx}} x \quad (3.7)$$

$$w' = C_1 p \cosh(px) + C_2 p \sinh(px) + \frac{F}{2F_{Bx}} \quad (3.8)$$

Vyjádříme koeficienty C_1 a C_2 dosazením podmínek:

$$\begin{aligned} x = 0, w = 0 \\ x = \frac{l}{2}, w' = 0 \end{aligned} \Rightarrow C_1 = -\frac{F}{2F_{Bx} p \cosh\left(\frac{pl}{2}\right)} \quad C_2 = 0 \quad (3.9)$$

Čímž získáme výsledné rovnice pro průhyb a natočení:

$$w = -\frac{F \sinh(px)}{2F_{Bx} p \cosh\left(\frac{pl}{2}\right)} + \frac{F}{2F_{Bx}} x \quad (3.10)$$

$$w' = -\frac{F \cosh(px)}{2F_{Bx} \cosh\left(\frac{pl}{2}\right)} + \frac{F}{2F_{Bx}} \quad (3.11)$$

Dosazením podmínek $x = \frac{l}{2}$ pro průhyb a $x = 0$ pro natočení získáme rovnice pro maximální průhyb a natočení:

$$w = -\frac{F \tanh\left(\frac{pl}{2}\right)}{2F_{Bx} p} + \frac{Fl}{4F_{Bx}} \quad (3.12)$$

$$w' = -\frac{F}{2F_{Bx} \cosh\left(\frac{pl}{2}\right)} + \frac{F}{2F_{Bx}} \quad (3.13)$$

Rovnici pro natočení (3.11) dosadíme do rovnice pro zkrácení S (3.1) a získáme:

$$S = \int_0^{\frac{l}{2}} \left(-\frac{F}{2F_{Bx}} \frac{\cosh(px)}{\cosh\left(\frac{pl}{2}\right)} + \frac{F}{2F_{Bx}} \right)^2 dx \quad (3.14)$$

Po úpravě:

$$S = \frac{1}{4} \left(\frac{F}{F_{Bx}} \right)^2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(-\frac{\cosh(px)}{\cosh\left(\frac{pl}{2}\right)} + 1 \right)^2 dx \quad (3.15)$$

Integrací a dosazením vazbové deformační podmínky $s = 0$ získáme rovnici:

$$\frac{1}{8} \left(\frac{F}{F_{Bx}} \right)^2 \left[\frac{\frac{\sinh(pl)}{2p} + \frac{l}{2}}{\cosh^2\left(\frac{pl}{2}\right)} - \frac{4 \sinh\left(\frac{pl}{2}\right)}{p \cosh\left(\frac{pl}{2}\right)} + l \right] = 0, \text{ kde } p = \sqrt{\frac{F_{Bx}}{EJ}} \quad (3.16)$$

Tato rovnice je konečná v dostupné literatuře [1]. Je však třeba si uvědomit, že v této rovnici není započteno prodloužení střednice prutu způsobené silou F_{Bx} , které je rovno:

$$\Delta l = \frac{Nl}{ES} = \frac{4F_{Bx}l}{E\pi d^2} \quad (3.17)$$

Po úpravě získáme finální rovnici:

$$\frac{1}{8} \left(\frac{F}{F_{Bx}} \right)^2 \left[\frac{\frac{\sinh(pl)}{2p} + \frac{l}{2}}{\cosh^2\left(\frac{pl}{2}\right)} - \frac{4 \sinh\left(\frac{pl}{2}\right)}{p \cosh\left(\frac{pl}{2}\right)} + l \right] - \frac{4F_{Bx}l}{E\pi d^2} = 0, \text{ kde } p = \sqrt{\frac{F_{Bx}}{EJ}} \quad (3.18)$$

z níž je třeba určit F_{Bx} . Explicitní vyjádření je velmi složité i pro matematické programy, nicméně pro konkrétní hodnoty je možné sílu F_{Bx} spočítat. Operační složitost je však vysoká, proto byl pro výpočty v kapitole 4 použit program MATLAB R2015b.

Známe-li tahovou sílu F_{Bx} , vyjádříme si vztah pro jí způsobené tahové napětí:

$$\sigma_t = \frac{F_{Bx}}{S} = \frac{4F_{Bx}}{\pi d^2} \quad (3.19)$$

Výhodou tohoto odvození je, že pomocí něj dostaneme přesný výpočet tahové síly a tahového napětí, nevýhodou je velká matematická a operační náročnost.

3.1 Odhad významnosti tahového napětí

Vypracováno podle [2]

Protože je výpočet síly F_{Bx} operačně složitý, je problém této vazbové nelinearity řešen v literatuře [2] jiným přístupem. Není zde snaha nalézt přesnou hodnotu síly F_{Bx} , ale pouze vytvořit odhad její velikosti a vyhodnotit její důležitost.

Proto na rozdíl od předchozího postupu nebyla rovnice průhybové čáry pro průhyb stanovena exaktně z diferenciální rovnice průhybové čáry, ale pouze aproximována funkcí:

$$w(x) = -\frac{4\delta x(l-x)}{l^2} \quad (3.20)$$

kde δ je maximální průhyb uprostřed prutu.

Derivací této rovnice získáme rovnici pro natočení:

$$w'(x) = -\frac{4\delta(l-2x)}{l^2} \quad (3.21)$$

kterou dosadíme do rovnice (3.1) pro posuv podpor s :

$$s = \int_0^{\frac{l}{2}} w'^2 dx \Rightarrow s = \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{4\delta(l-2x)}{l^2} \right)^2 dx \quad (3.22)$$

Po integraci dostaneme:

$$s = \frac{8\delta^2}{3l} \quad (3.23)$$

Tahová síla potřebná k prodloužení prutu o tuto hodnotu je rovna:

$$F_{Bx} = \frac{sES}{l} = \frac{8ES\delta^2}{3l^2} \quad (3.24)$$

Potom tahové napětí od této síly je:

$$\sigma_t = \frac{F_{Bx}}{S} = \frac{8E\delta^2}{3l^2} \quad (3.25)$$

Tato rovnice může sloužit dobře pro odhad tahového napětí při daném poměru δ/l , ale pro výpočet napětí při daných hodnotách geometrie a zatížení už tak vhodná není, více se tímto budeme zabývat v kapitole 4.

4 Řešení tahové síly a napětí

4.1 Volba zadaných veličin

Nyní můžeme začít se skriptem pro výpočet síly F_{Bx} a jí způsobeného napětí v programu MATLAB. Výpočet budeme provádět pro zvolený případ geometrie, materiálu a zatížení. Zvolme si tedy prut kruhového průřezu o délce $l=1\text{m}$. Materiálem bude ocel s následujícími vlastnostmi: hustota $\rho=7850\text{kg/m}^3$, modul pružnosti v tahu $E=207\text{GPa}$, součinitel teplotní roztažnosti $\alpha=1,2 \cdot 10^{-5}\text{K}^{-1}$. Průměr prutu d a zátěžná síla F nemohou být voleny libovolně, průměr bude zvolen tak, abychom mohli zanedbat vliv posouvajících sil, síla F bude volena tak, aby spočtené výsledky měly praktické využití.


```

clc; clear all; %vymaže všechny předchozí výpočty a uložené proměnné
syms G          %zavede symbolickou proměnnou G=Fbx

%zadání vstupních parametrů
l=1;            %délka prutu
E=207*10^9;    %modul pružnosti v tahu
Ro=7850;       %hustota
ALFA=1.2*10^-5; %součinitel teplotní roztažnosti
deltaT=20;     %rozdíl teplot
NAPETI=300*10^6; %požadované ohybové napětí

```

Příloha A, řádek 1-10, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

Volba průměru prutu

Při odvození rovnic byl zanedbán vliv posouvajících sil. Abychom jej mohli zanedbat, musí být poměr $\frac{d}{l} \leq 0,2$, čímž se dle výpočtu dopoušíme chyby $\frac{d}{6l} = 3,3\%$. Jako maximální průměr si tedy zvolme $d_{\max}=0,2\text{m}$ a minimální průměr $d_{\min}=0,001\text{m}$, čímž zahrneme to výpočtu téměř všechny v praxi používané štíhlosti prutů. Dále si zvolme 50 kroků výpočtu, bude tedy provedeno 50 výpočtů pro průměry v daném rozsahu. Počet kroků byl zvolen tak, aby nám zajistil dostatečnou jemnost například při vykreslování grafů. Pro každý počítaný průměr je spočítán kvadratický moment k ose y dle rovnice:

$$J_y = \frac{\pi d^2}{64} \quad (4.1)$$

```

Dmin=0.001;    %minimální průměr prutu
Dmax=0.2;     %maximální průměr prutu
krok=50;      %počet kroků výpočtu
Dkrok=(Dmax-Dmin)/krok; %velikost jednoho kroku

n=1;
for d=Dmin:Dkrok:Dmax; %cyklus pro průměry Dmin až Dmax
    J=(pi*d^4/64);    %osový kvadratický moment Jy pro daný průměr
end

```

Příloha A, řádek 12-19, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

Volba zátěžné síly

Chceme-li určit významnost tahové síly F_{Bx} , není vhodné porovnávat její hodnoty s hodnotami ostatních sil (zátěžnou, tíhová atd.), ale je vhodné porovnat jimi způsobená napětí. Proto budeme při zatěžování prutu volit zátěžnou sílu F tak, aby výsledné ohybové napětí dosahovalo námi zvolené hodnoty. Zvolme si tedy ohybové napětí $\sigma_o=300\text{MPa}$, což je v praxi běžně dosahovaná hodnota. Vyjádřeme si rovnici pro ohybové napětí:

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} = \frac{8Fl - 32F_{Bx}W}{\pi d^3} \quad (4.2)$$

z níž určíme rovnicí pro zátěžnou sílu F :

$$F = \frac{\sigma_o \pi d^3 + 32F_{Bx}W}{8l} \quad (4.3)$$

jejíž přesné vyjádření je však komplikováno tím, že závisí na mimo jiné na síle F_{Bx} a průhybu w , které opět závisí na zátěžné síle F . Proto není možné určit sílu F explicitním výpočtem. Vytvoříme si tedy nejdříve její odhad, který budeme tak dlouho upřesňovat, dokud nebude odchylka požadovaného a vypočteného ohybového napětí přijatelná.

Odhad síly F vytvoříme zanedbáním vlivu síly F_{Bx} na ohyb prutu. Tím však dostaneme zátěžnou sílu, která je mnohem menší než požadovaná, pro vylepšení odhadu tedy ještě vynásobíme číslem 25:

$$F = \frac{25\sigma_o\pi d^3}{8l} \quad (4.4)$$

Dopočteme si sílu F_{Bx} z rovnice (3.18) a maximální průhyb w z rovnice (3.12), z nichž určíme ohybové napětí σ_o a odchylku od požadovaného napětí. Poté si vytvoříme cyklus, který bude probíhat, dokud nebude odchylka od požadovaného napětí menší než maximální dovolená odchylka 0,1MPa. Byla zvolena právě tato hodnota, protože je řádově menší než ohybové napětí, ke kterému se vztahuje (stovky MPa) a proto se dopouštíme jen zanedbatelné chyby. Pokud by byla zvolena menší, znamenalo by to větší operační náročnost výpočtu a tím i delší čas výpočtu.

Vytvoříme si koeficient Q jako poměr požadovaného a vypočteného napětí. Tímto koeficientem vynásobíme sílu F . Pokud bylo požadované napětí vyšší než vypočtené, potom bude koeficient $Q > 1$ a zvýší nám zátěžnou sílu F . V opačném případě bude $Q < 1$ a dojde ke snížení zátěžné síly. Pro upravenou zátěžnou sílu F určíme nové hodnoty síly F_{Bx} a průhybu w , vypočte se nové ohybového napětí a odchylka od požadovaného napětí. Pokud bude odchylka větší než maximální dovolená, cyklus proběhne znovu.

```
F = ((NAPETI*pi*d^3)/(8*l))           %odhad zátěžné síly F

p=sqrt(G/(E*J));                       %zadání rovnice pro zkrácení s
A=sinh(p*l);
B=sinh(p*l/2);
C=cosh(p*l/2);
s = F^2*((A/p+1)/(2*C^2)-4*B/(p*C)+1)/(8*G^2)-4*G*l/(E*pi*d^2);

Fbx = solve(s);                        %síla Fbx
p=sqrt(Fbx/(E*J));                     %p pro námi vypočtenou X=Fbx

w=F*(1/2-(tanh(p*l/2)/p))/(2*Fbx);     %průhyb w
OHYB=(8*F*l-32*Fbx*w)/(pi*d^3);       %ohybové nap. pro síly F, Fbx
ODCHYLKA=abs(NAPETI-OHYB);            %odchylka obou napětí

while ODCHYLKA>1*10^5 %cyklus pokud je odchylka větší než 0,1MPa

    Q=NAPETI/OHYB;                      %koeficient upravující zátěžnou sílu F
    F=Q*F                                %provedení úpravy

    %výpočet nových hodnot Fbx, w, ohybového napětí a odchylky
    p=sqrt(G/(E*J));
    s = F^2*((A/p+1)/(2*C^2)-4*B/(p*C)+1)/(8*G^2)-4*G*l/(E*pi*d^2);
    Fbx = solve(s);
    p=sqrt(Fbx/(E*J));
    w=F*(1/2-(tanh(p*l/2)/p))/(2*Fbx);
    OHYB=(8*F*l-32*X*w)/(pi*d^3);
    ODCHYLKA=abs(NAPETI-OHYB);

end                                     %konec cyklu pokud je odchylka menší než požadovaná
```

Príloha A, řádek 21-50, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

Po ukončení cyklu máme spočteny hodnoty sil F , F_{Bx} a průhybu w tak, aby vytvořily zvolené ohybové napětí s přesností $\pm 0,1\text{MPa}$.

4.2 Výpočet a srovnání napětí

Tahové napětí

Přejdeme tedy k výpočtu tahového napětí způsobeného silou F_{Bx} dle rovnice (3.19). Pro porovnání provedeme výpočet tahového napětí také dle rovnice (3.25).

Abychom mohli lépe posoudit významnost tohoto tahového napětí, vyjádříme si pro porovnání velikost ohybového napětí způsobeného vlastní vahou prutu a velikost napětí vzniklého změnou teploty.

Ohybové napětí způsobené vlastní vahou prutu

Tíhové zatížení chápeme jako spojitě zatížení prutu určené rovnicí:

$$q = \frac{\pi d^2 \rho g}{4} \quad (4.5)$$

kde ρ je hustota oceli a g tíhové zrychlení. Abychom mohli vyjádřit napětí způsobené tímto zatížením, musíme vyjádřit jím způsobený maximální ohybový moment. Protože se snažíme posoudit pouze význam tohoto napětí, zanedbáme vzniklou sílu F_{Bx} a její vliv na ohybový moment. Odvodíme tedy nejprve obecně ohybový moment v bodě x :

$$M(x) = F_A x - q \frac{x^2}{2} = \frac{ql}{2} x - q \frac{x^2}{2} = q \left(\frac{l}{2} x - \frac{x^2}{2} \right) \quad (4.6)$$

Poté dosazením $x = \frac{l}{2}$ získáme maximální ohybový moment:

$$M_{max} = q \left(\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{8} \right) = \frac{ql^2}{8} \quad (4.7)$$

A konečně dosazením do rovnice pro ohybové napětí:

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} = \frac{4ql^2}{\pi d^3} = \frac{\rho g l^2}{d} \quad (4.8)$$

získáme výsledný vztah pro ohybové napětí způsobené vlastní vahou prutu.

Napětí vzniklé změnou teploty

Pro vyjádření napětí vzniklého změnou teploty nejdříve porovnejme změnu délky prutu způsobenou vlivem teploty se změnou délky vzniklou působením normálové síly:

$$\Delta l = \alpha * l * \Delta T = \frac{Nl}{ES} \quad (4.9)$$

kde α je součinitel teplotní roztažnosti a ΔT rozdíl teplot. Vyjádřeme normálovou sílu vzniklou působením změny teploty:

$$N = \alpha \Delta T E S \quad (4.10)$$

kteřou dosadíme do rovnice pro napětí:

$$\sigma_t = \frac{N}{S} = \alpha \Delta T E \quad (4.11)$$

Je zřejmé, že napětí způsobené změnou teploty, není závislé na geometrii prutu, ale pouze na materiálu (konstanty α a E) a na rozdílu teplot ΔT , se kterým roste lineárně. Pro výpočet byl definován součinitel teplotní roztažnosti $\alpha=1,2 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$, Youngův modul pružnosti $E=207 \text{GPa}$ (tedy hodnoty běžné feritické oceli) a byla zvolena hodnota rozdílu teplot $\Delta T=20^\circ\text{C}$. Tomuto rozdílu teplot lze v praxi těžko vyhnout, proto je třeba s ním počítat.

```
TAH=4*Fbx/(pi*d^2); %tahové napětí způsobené silou Fbx
TIM=8*E*w^2/(3*l^2); %tahové napětí způsobené silou Fbx dle [2]
TIHA=Ro*9.81*l^2/d; %ohybové napětí způs. vlastní vahou prutu
TEPLO=ALFA*deltaT*E; %napětí způsobené rozdílem teplot
```

Příloha A, řádek 52-55, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

Srovnání napětí

Nyní můžeme přistoupit ke srovnání vypočtených napětí. Pro tento účel si necháme vytvořit řádkové matice, do kterých zapíšeme poměr d/l a příslušná jednotlivá napětí.

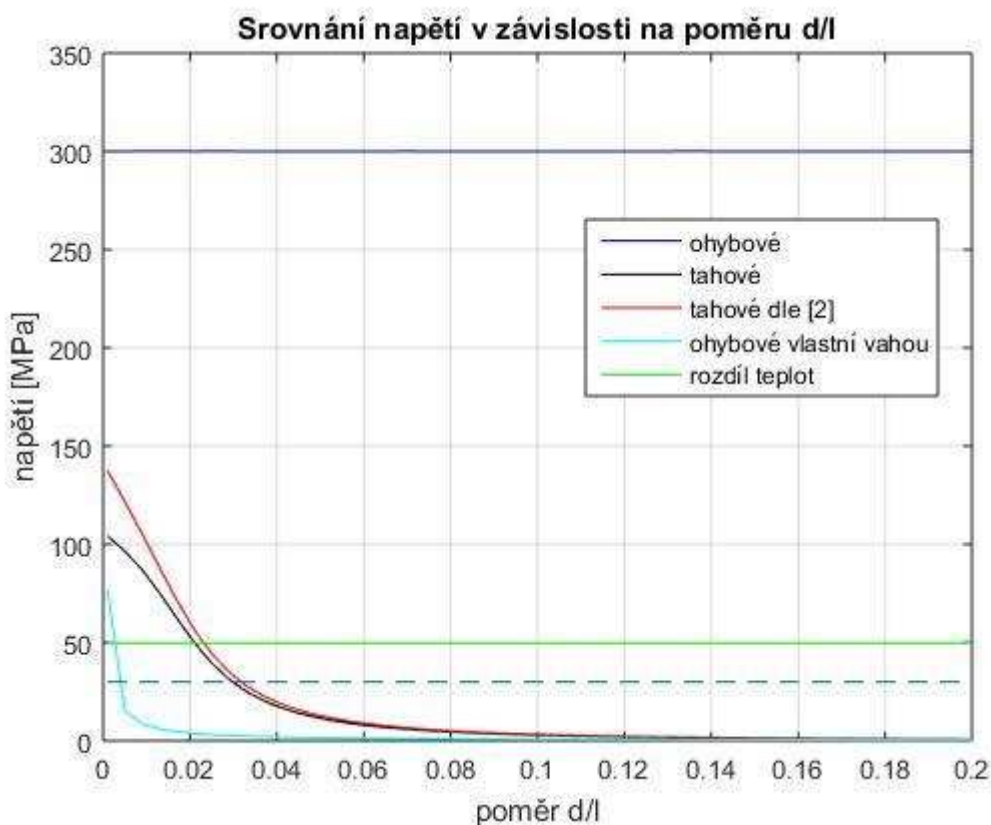
```
%zapsání hodnot do matic
K(1,n)=d/l; %d/l
L(1,n)=OHYB; %ohybové napětí
M(1,n)=TAH; %tahové napětí od síly Fbx
N(1,n)=TIM; %tahové napětí od síly Fbx, dle zdroje [2]
O(1,n)=TIHA; %ohybové napětí vzniklé tíhovou silou
P(1,n)=TEPLO; %tlakové napětí vzniklé rozdílem teplot
R(1,n)=NAPETI/10; %hranice 10% ohybového napětí
S(1,n)=w; %průhyb
n=n+1;

end %konec cyklu výpočtu pro jednotlivé průměry

figure(1) %vytvoření nového okna grafu
plot(K,L,'b',K,M,'k',K,N,'r',K,O,'c',K,P,'g',K,R,'--') %grafy
title('Srovnání napětí v závislosti na poměru d/l') %název grafu
xlabel('poměr d/l') %popis osy x
ylabel('napětí [Pa]') %popis osy y
legend('ohybové', 'tahové', 'tahové dle [2]', 'ohybové vlastní vahou', 'rozdíl teplot') %vytvoření legendy
grid on %zapnutí mřížky
```

Příloha A, řádek 60-79, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

Po vykonání cyklů pro všechny zadané průměry prutu vytvoříme graf závislosti jednotlivých napětí na poměru d/l , tedy na štíhlosti prutu. Na osu x byl záměrně použit poměr d/l místo pouze průměru d , protože se v následujících odstavcích budeme snažit dokázat, že pro kruhový příčný průřez prutu jsou tato napětí pro všechny poměry d/l stejná.



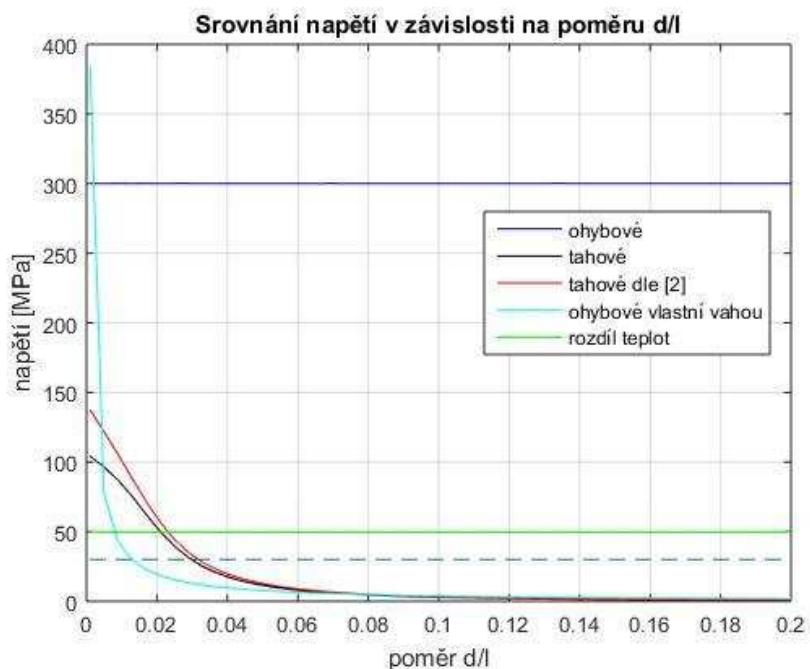
Obr. 4.1 Porovnání velikostí napětí v závislosti na štíhlosti prutu d/l , vytvořeno v programu MATLAB R2015b

Z grafu na obr 4.1 je vidět, že tahové napětí vzniklé působením síly F_{Bx} je významné pro pruty s menším poměrem d/l , tedy pro štíhlé pruty. Jako hraniční hodnotu významnosti tahového napětí si zvolme 10% z ohybového napětí (v grafu čárkovaně). Proto můžeme tvrdit, že pro ocelové pruty kruhového příčného průřezu, délky $l=1\text{m}$ s ohybovým napětím kolem 300MPa lze tahové napětí od síly F_{Bx} zanedbat pro průměry větší než $0,3\text{m}$.

Ohybové napětí způsobené vlastní vahou je pro většinu prutů zanedbatelné, významným se stává pouze u velmi štíhlých prutů. Také můžeme vidět, že napětí způsobené rozdílem teplot $\Delta T=20^\circ\text{C}$ je významné pro všechny pruty, protože je na jejich štíhlosti nezávislé a pro většinu prutů je významnější než tahová napětí způsobené silou F_{Bx} .

Abychom mohli tvrdit, že výše zmíněná hranice významnosti tahového napětí platí i pro jiné rozměry prutu při zachování jeho štíhlosti d/l , provedeme tentýž výpočet pro změněné hodnoty délky l a průměru d . Proto si zvolme nové hodnoty délky prutu $l=5\text{m}$, minimálního $D_{\min}=0,005\text{m}$ a maximálního průměru $D_{\max}=1\text{m}$. Opět si vytvoříme graf závislosti jednotlivých napětí na poměru d/l .

Porovnáme-li grafy 4.1 a 4.2, je na první pohled zřejmé, že tahové napětí způsobené silou F_{Bx} je při zachování štíhlosti prutu d/l konstantní. Mění se pouze napětí způsobené vlastní vahou prutu, které s rostoucími rozměry prutu roste. Platnost tohoto závěru byla ověřena i pro prut s kruhovým příčným průřezem, ale i pro čtvercový a obdélníkový příčný průřez. Podobně bude platit pravděpodobně i u jiných příčných průřezů, ale v rámci práce již nebylo ověřováno.

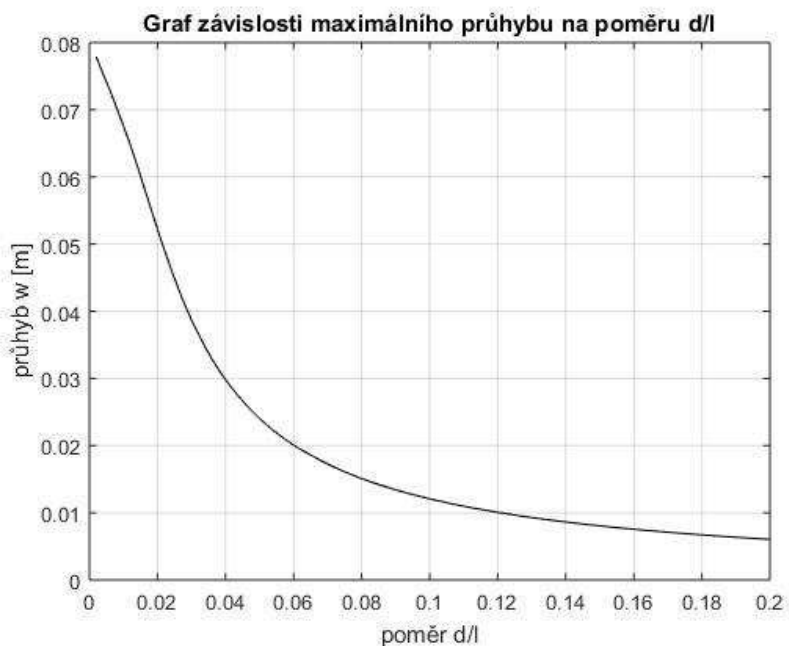


Obr. 4.2 Porovnání velikostí napětí pro změněné rozměry prutu, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

Nyní tedy můžeme tvrdit, že pro ocelové pruty kruhového, čtvercového nebo obdélníkového příčného průřezu s ohybovým napětím kolem 300MPa lze tahové napětí od síly F_{Bx} zanedbat u prutů s poměrem d/l větším než 0,3.

Srovnání metod výpočtu tahového napětí

Nyní si porovnejme vypočtená tahová napětí. Přesně vypočtené hodnoty rovnicí (3.19) jsou v grafu černou barvou, odhad dle rovnice (3.25) je červeně (viz obr. 4.1). Je vidět, že odchylka obou přístupů se zvětšuje s rostoucí štíhlostí prutu, tedy s rostoucím průhybem prutu, viz obr. 4.3.



Obr. 4.3 Závislost maximálního průhybu prutu na poměru d/l , vytvořeno v programu MATLAB R2015b

To je způsobeno tím, že odhad byl vytvořen na základě aproximace průhybové křivky. Abychom viděli, jak moc byla aproximace přesná, vykresleme po délce prutu pro libovolné zatížení průběh průhybu a aproximovanou křivku, pro ilustraci stačí v intervalu $\langle 0; l/2 \rangle$. K tomu použijeme opět program MATLAB a naprogramujeme následující skript.

```

clc; clear all;
syms G

%zadání vstupních parametrů
l=1;
E=2.07*10^11;
d=0.05;
J=(pi*d^4/64);
F=15000;      %zatěžovací síla F

%výpočet síly Fbx, maximálního průhybu wmax
p=sqrt(G/(E*J));
A=sinh(p*l);
B=sinh(p*l/2);
C=cosh(p*l/2);
s = F^2*((((A/p)+1)/(2*C^2))-(4*B/(p*C))+1)/(8*G^2)-
((4*G*l)/(E*pi*d^2));
Fbx = solve(s);
p=sqrt(Fbx/(E*J));
wmax=F*(l/2-(tanh(p*l/2)/p))/(2*Fbx)

n=1;
for x=0:0.01:0.5      %poloha na prutu od 0 do l/2

wa=4*wmax*x*(1-x)/l^2      %průhyb dle aproximace
ws=-(F*sinh(p*x)/(2*Fbx*p*cosh(p*l/2)))+(F*x/(2*Fbx))%skutečný průhyb

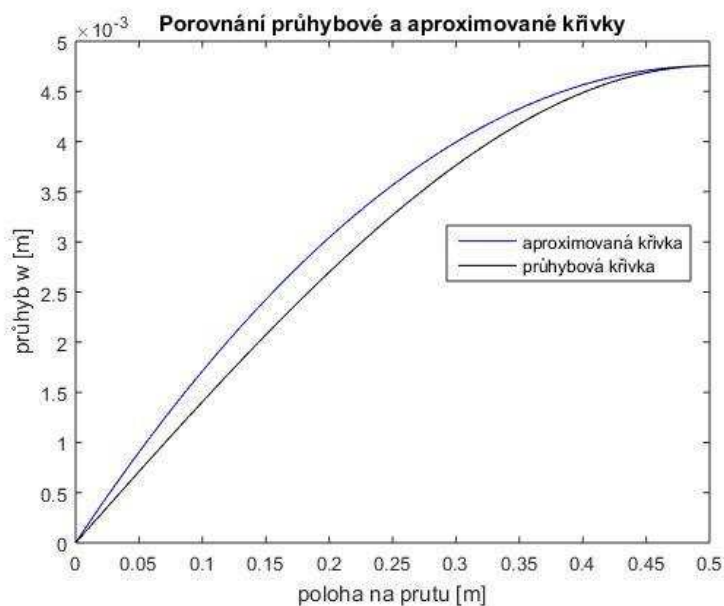
K(1,n)=x
L(1,n)=wa
M(1,n)=ws
n=n+1;
end

%vytvoření grafu
figure
plot (K,L,'b',K,M,'k')
title('Porovnání průhybové a aproximované křivky')
xlabel('poloha na prutu [m]')
ylabel('průhyb w [m]')
legend('aproximovaná křivka', 'průhybová křivka')

```

Příloha B, řádek 1-39, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

V ideálním případě by měla být délka aproximované křivky co nejblíže délce průhybové křivky, aby byly rovny síly potřebné k prodloužení střednice, a tím se rovnala i tahová napětí. Z grafu je však zřejmé, že aproximovaná křivka je delší než skutečná průhybová křivka, což znamená, že střednice prutu byla více protažena. Proto je třeba větší tahové síly, resp. tahového napětí, aproximace je tedy na bezpečné straně. Výpočty ukázaly, že se zvyšujícím se maximálním průhybem roste i rozdíl délek obou křivek, a tedy i chyba odhadovaného tahového napětí.



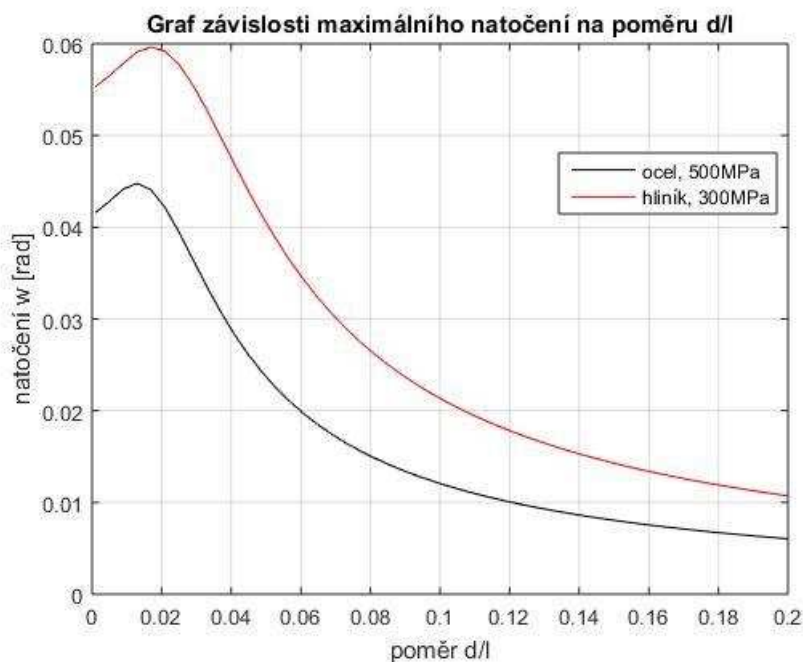
Obr. 4.4 Porovnání průhybové a aproximované křivky, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

4.3 Kontrola splnění podmínek

Při odvozování vztahu pro posuv podpory s bylo uvažováno $s \lll l$. Splnění této podmínky je však jisté, protože je předepsána vazbová deformační podmínka $s = 0$.

Aby byla zachována platnost diferenciální rovnice průhybové čáry $w'' = -\frac{M_0}{EJ}$ musí být splněno, že deformace prutu namáhaného ohybem jsou malé $w'^2 \ll 1$. To platí s vysokou přesností, pokud $w' < 0,1$ rad. Protože budeme v dalších kapitolách zatěžovat prut ocelového průřezu nejvyšším ohybovým napětím 500MPa a hliník 300MPa, zobrazme si pro tuto zátěž závislost maximálního natočení (3.13) na poměru d/l .

Z grafu je vidět, že se maximální natočení ani nepřibližuje maximální povolené hodnotě 0,1rad, proto můžeme tvrdit, že podmínka byla splněna.



Obr. 4.5 Graf závislosti maximálního natočení na poměru d/l pro ocel 500MPa a hliník 300MPa, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

4.4 Vliv tuhosti rámu, poddajnost vazeb

V praxi je nemožné zkonstruovat rám s nekonečnou tuhostí, aby byl naprosto zabráněno posuvu vazeb. Proto uvažujme velmi, který bude 10x tužší než samotný prut a bude umožňovat posuv vazby. Potom posuv vazby bude:

$$u = \frac{F_{Bx}l}{10ES} = \frac{4F_{Bx}l}{10E\pi d^2} \quad (4.12)$$

Dosadíme do rovnice pro posuv vazby (3.18):

$$\frac{1}{8} \left(\frac{F}{F_{Bx}} \right)^2 \left[\frac{\sinh(pl)}{2p} + \frac{l}{2} - \frac{4 \sinh\left(\frac{pl}{2}\right)}{p \cosh\left(\frac{pl}{2}\right)} + l \right] - \frac{4F_{Bx}l}{E\pi d^2} = \frac{4F_{Bx}l}{10E\pi d^2} \quad (4.13)$$

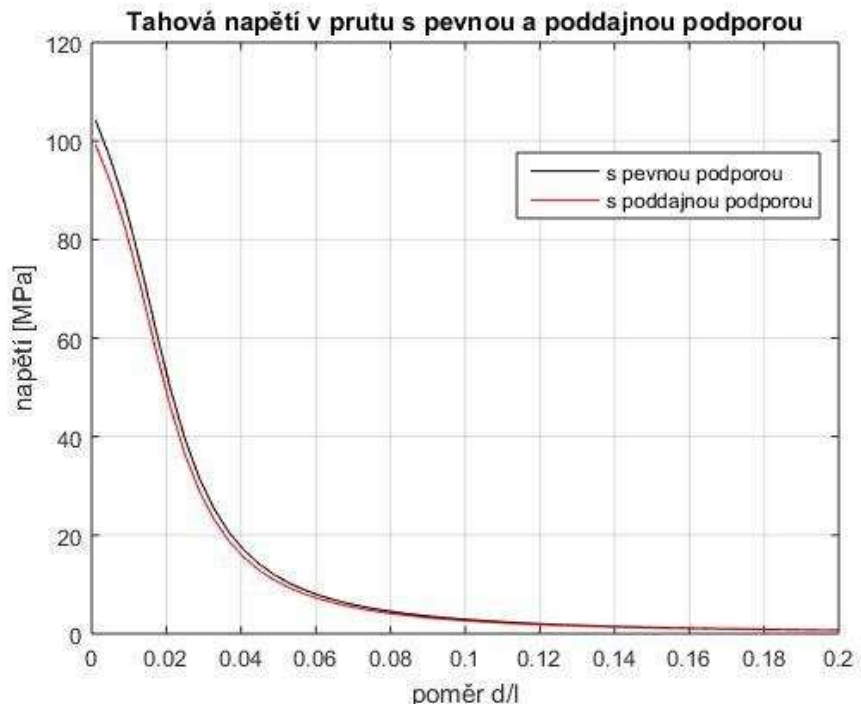
$$\text{kde } p = \sqrt{\frac{F_{Bx}}{EJ}}$$

Po úpravě:

$$\frac{1}{8} \left(\frac{F}{F_{Bx}} \right)^2 \left[\frac{\sinh(pl)}{2p} + \frac{l}{2} - \frac{4 \sinh\left(\frac{pl}{2}\right)}{p \cosh\left(\frac{pl}{2}\right)} + l \right] - \frac{22F_{Bx}l}{5E\pi d^2} = 0, \text{ kde } p = \sqrt{\frac{F_{Bx}}{EJ}} \quad (4.14)$$

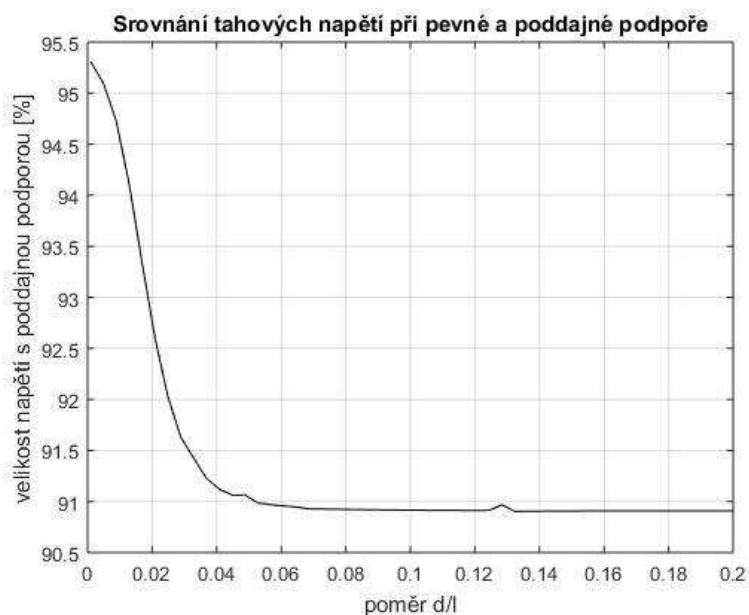
Tahové napětí pro poddajnou podporu získáme opět dosazením získané síly F_{Bx} do rovnice (3.19). Postupovat budeme dle stejného cyklu jako v kapitole 4.2, budeme však počítat pouze tahová napětí (ostatní nás teď nezajímají) a celý cyklus provedeme dvakrát, jednou pro tuhou a podruhé pro poddajnou podporu. Pro porovnání zakresleme do grafu tahové napětí pro ocelový prut kruhového příčného průřezu s i bez poddajné podpory s ohybovým

napětím 300MPa:



Obr. 4.6 Porovnání tahových napětí pro prut s pevnou a poddajnou podporou, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

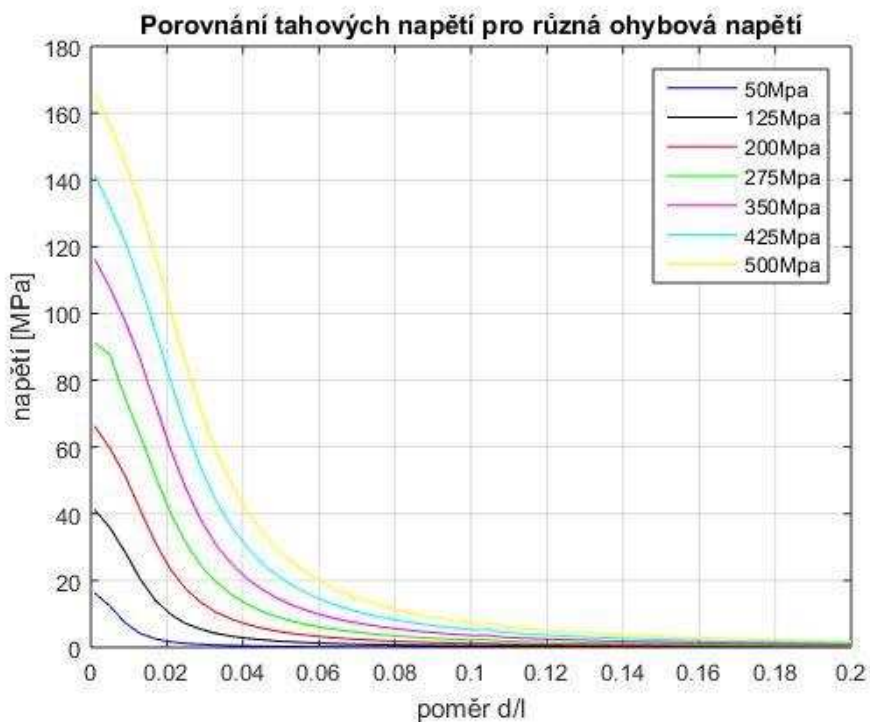
Z grafu na obr. 4.6 je vidět, že pokud nahradíme dokonale tuhou podporu podporou poddajnou, sníží se tahové axiální napětí, avšak pouze o jednotky procent (viz obr. 4.7). Jde o malou odchylku, přesto bychom ní měli počítat, a proto budeme v následující výpočtech vyjadřovat sílu F_{Bx} z rovnice (4.13), protože oproti rovnici (3.19) nám vyjádření nijak nekomplikuje a dává nám přesnější výsledky.



Obr. 4.7 Vyjádření tahového napětí prutu s poddajnou podporou v procentech napětí prutu s pevnou podporou, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

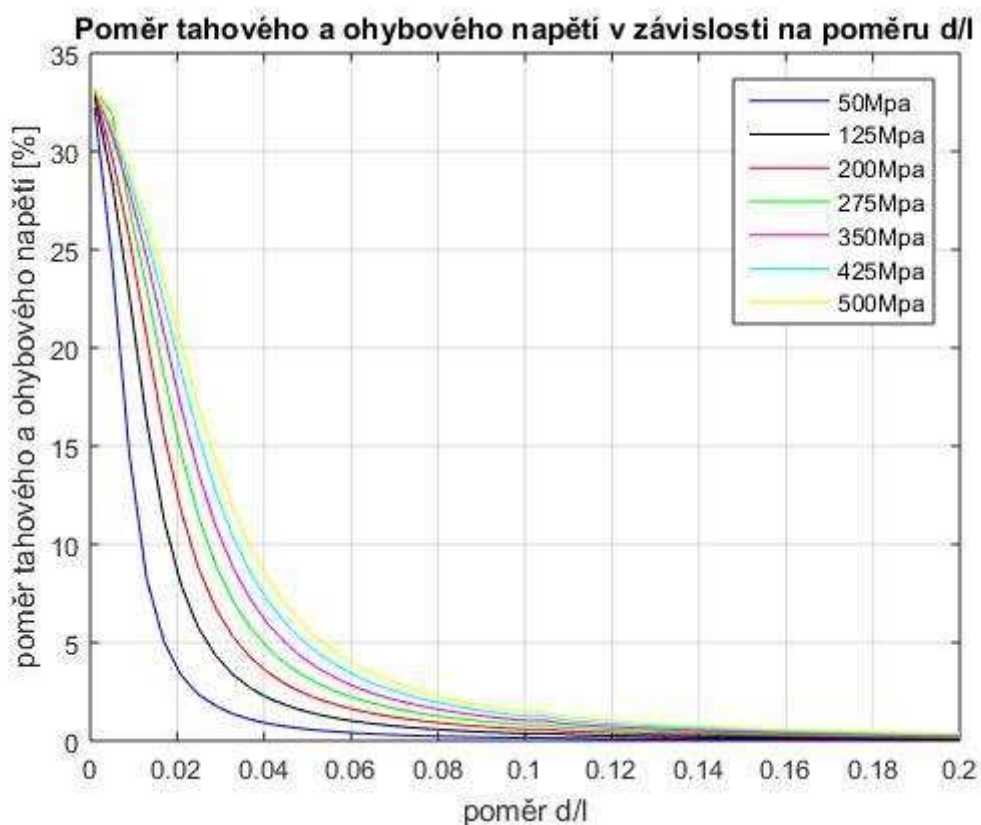
4.5 Vliv ohybového napětí

Nyní se budeme zabývat vlivem velikosti ohybového napětí na tahové napětí způsobené silou F_{Bx} . To budeme určovat pomocí rovnice (3.19) stejným postupem jako v kapitole 4.2, pouze provedeme výpočet pro více hodnot ohybových napětí $\sigma_0 = \{50, 125, 200, 275, 350, 425, 500\}$ MPa ocelového prutu kruhového příčného průřezu.



Obr. 4.8 Porovnání tahových napětí pro různá ohybová napětí, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

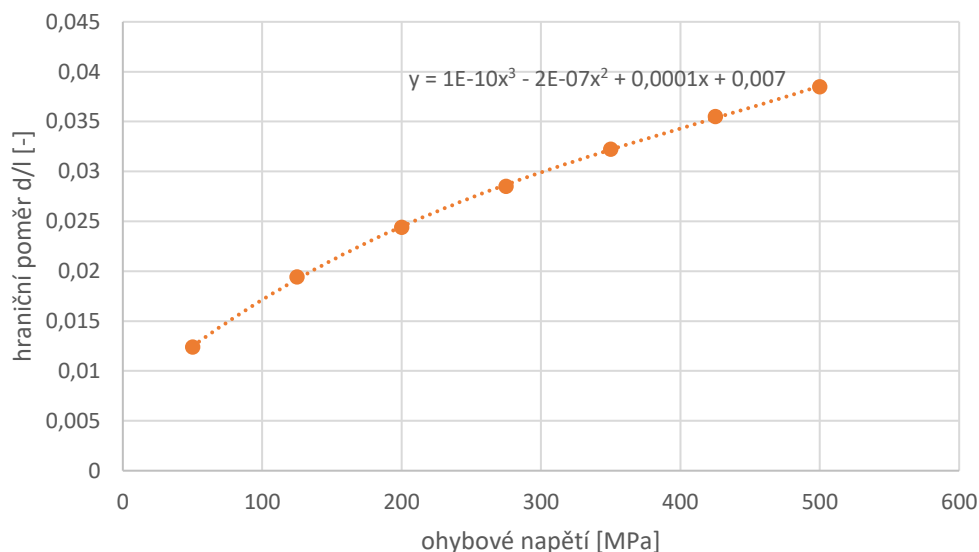
Z průběhu tahových napětí v závislosti na poměru d/l na obr. 4.8 vidíme, že s rostoucím ohybovým napětím roste i napětí tahové. Bylo zvoleno, že tahové napětí se dá považovat za nevýznamné, pokud je menší než 10% ohybového napětí. Proto je v obr. 4.9 zobrazen průběh poměru tahového a ohybového napětí vyjádřeného v procentech v závislosti na poměru d/l .



Obr. 4.9 Graf poměru tahového a ohybového napětí vyjádřeného v procentech v závislosti na poměru d/l , vytvořeno v programu MATLAB R2015b

Z tohoto grafu lze snadno vyčíst pro konkrétní hodnotu ohybového napětí štíhlost prutu, která je na zvolené hranici významnosti tahového napětí. Například pro zatížení prutu ohybovým napětím 125MPa můžeme tvrdit, že tahové napětí se stává významným pro pruty s poměrem $d/l < 0,02$. Odčítání z grafu je však značně nepřesné, navíc nelze hraniční hodnotu poměru d/l odečíst pro libovolné ohybové zatížení, ale pouze pro již vypočtené hodnoty. Proto si vezmeme pro jednotlivá napětí hodnoty poměru d/l takové, že tahové napětí dosahuje 10% ohybového a zobrazme je v závislosti na zatěžujícím ohybovém napětí. Pro tento účel byl použit program Microsoft Excel 2016, do něhož byla exportována data z programu MATLAB. Výsledky jsou na obr. 4.10.

Závislost hraniční hodnoty d/l na ohybovém napětí



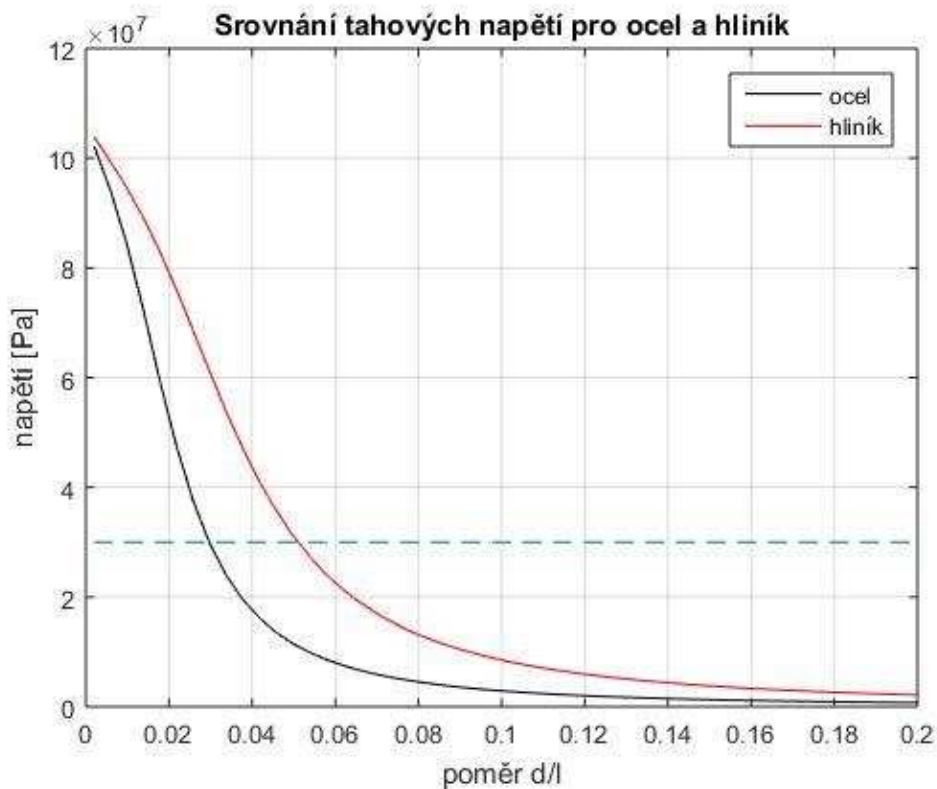
Obr. 4.10 Graf závislosti hraničního poměru d/l na ohybovém napětí, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

$$\frac{d}{l} = 10^{-10}x^3 - 2 * 10^{-7}x^2 + 0,0001x + 0,007 \quad (4.15)$$

Abychom mohli určit hraniční poměr d/l pro libovolné ohybové napětí, proložíme vynesené body křivkou a zobrazíme její rovnici. Při řešení významnosti tahového napětí při ohybu konkrétního prutu kruhového příčného průřezu je tedy nutné pro dané zatížení silou F nejprve spočítat tahovou sílu F_{Bx} pomocí rovnice (3.18) a maximální průhyb prutu z rovnice (3.12). Pomocí těchto hodnot potom zjistit dle rovnice (3.19) ohybové napětí v prutu a poté buď z grafu 4.10 nebo z rovnice (4.15) zjistit hraniční hodnotu poměru d/l, kdy se stává tahové napětí významným. Pokud je poměr počítaného prutu d/l menší než tato hraniční hodnota, je tahové napětí významné a je třeba ho do výpočtů zahrnout.

4.6 Vliv materiálu prutu

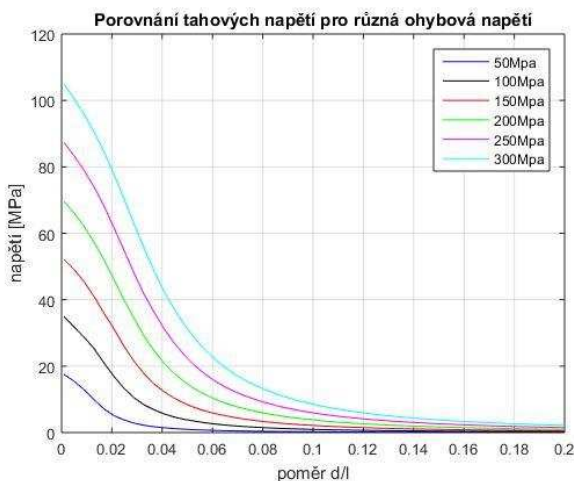
Pro posouzení vlivu materiálu na tahové napětí v prutu si zvolme jiný materiál, například hliník, prut bude stále kruhového příčného průřezu. Nejprve si porovnejme vzniklé tahové napětí pro jedno dané ohybové napětí, například 300MPa.



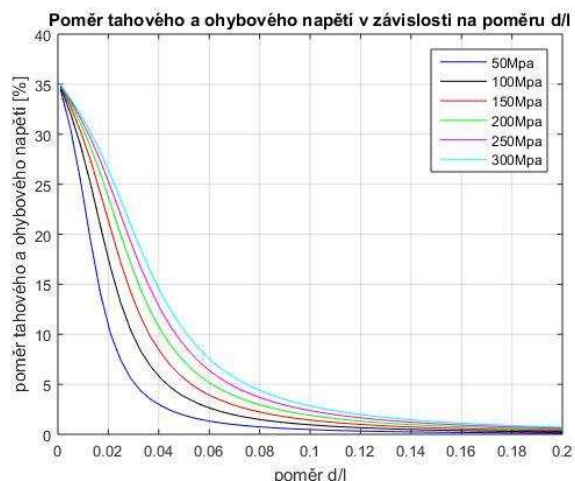
Obr. 4.11 Srovnání tahových napětí pro ocel a hliník pro prut s ohybovým napětím 300 MPa, programu MATLAB R2015b

Z obr. 4.11 je zřejmé, že nižší Youngův modul pružnosti v tahu hliníku způsobil, že vzniklá tahová napětí způsobená zabráněnou podélnou deformací prutu jsou vyšší než u stejného prutu z oceli. Tvar křivek pro ocel a hliník je jiný, proto se pro různé poměry d/l mění i rozdíl mezi tahovými napětími obou materiálů.

Nyní porovnejme tahová napětí pro hliníkový prut s různými ohybovými napětími. Postup výpočtu bude stejný jako v případě oceli, pouze upravíme Youngův modul pružnosti v tahu $E=70\text{MPa}$ a zátěžné ohybové napětí bude pouze do 300 MPa, protože při vyšších hodnotách bychom přesáhli mez kluzu hliníku, a proto by výsledky nebyly pro praktické využití použitelné. Zvolme si tedy ohybová napětí $\sigma_o=\{50, 100, 150, 200, 250, 300,\}\text{MPa}$. Vytvořme si opět grafy tahových napětí a jejich poměru k ohybovému napětí v závislosti na poměru d/l .



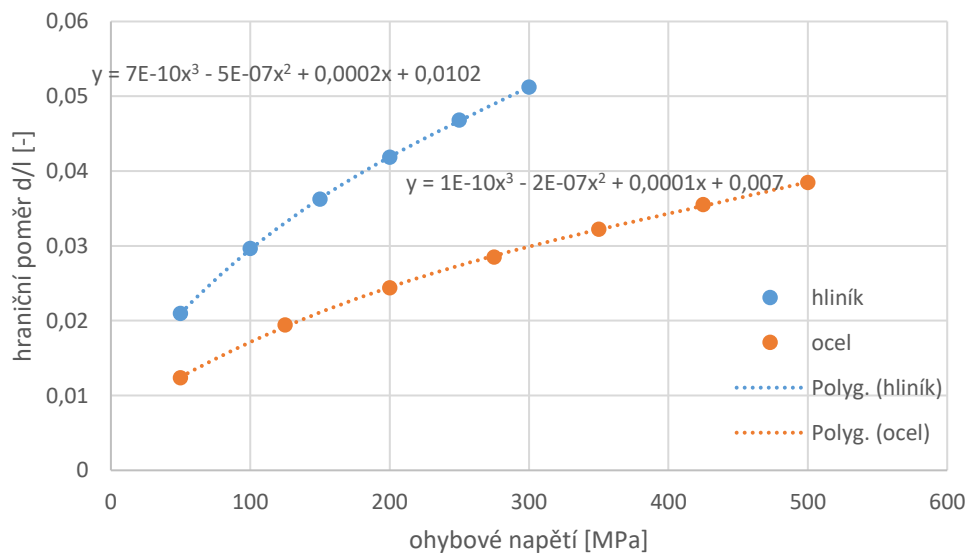
Obr. 4.12 Porovnání tahových napětí pro různá ohybová napětí pro hliníkový prut, vytvořeno v programu MATLAB R2015b



Obr. 4.13 Graf poměru tahového a ohybového napětí vyjádřeného v procentech v závislosti na poměru d/l pro hliník, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

Grafy na obr. 4.12 a 4.13 nám dobře ilustrují průběh tahových napětí v závislosti na poměru d/l, ale jsou velmi podobné jako u oceli, proto se už jimi nebudeme podrobně zabývat.

Závislost hraniční hodnoty d/l na ohybovém napětí



Obr. 4.14 Graf závislosti hraničního poměru d/l na ohybovém napětí pro hliník, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

Analogicky s kapitolou 4.5, kdy byla materiálem prutu ocel, byl vytvořen graf závislosti hraniční hodnoty poměru d/l na zátěžném ohybovém napětí pro hliník. Porovnáme-li tyto grafy, je vidět, že hliník má vyšší hraniční hodnoty pro stejné ohybové napětí než ocel.

Rovnice pro zjištění hraniční hodnoty poměru d/l je následující:

$$\frac{d}{l} = 7 * 10^{-10}x^3 - 5 * 10^{-7}x^2 + 0,0002x + 0,0102 \quad (4.16)$$

Podstatný je i vliv materiálu na teplotní napětí. Hliník má oproti oceli dvojnásobnou hodnotu součinitele teplotní roztažnosti $\alpha=2,4*10^{-5}K^{-1}$, zároveň však téměř třetinovou hodnotu Youngova modulu pružnosti $E=70GPa$. Použitím těchto hodnot a stejného rozdílu teplot $\Delta T=20^{\circ}C$ jako u oceli spočteme teplotní napětí pro hliníkový prut (viz (4.11)). To má hodnotu $\sigma_t=33,6MPa$ což je nižší hodnota než u oceli (pro tu bylo $\sigma_t=50MPa$).

4.7 Vliv tvaru příčného průřezu

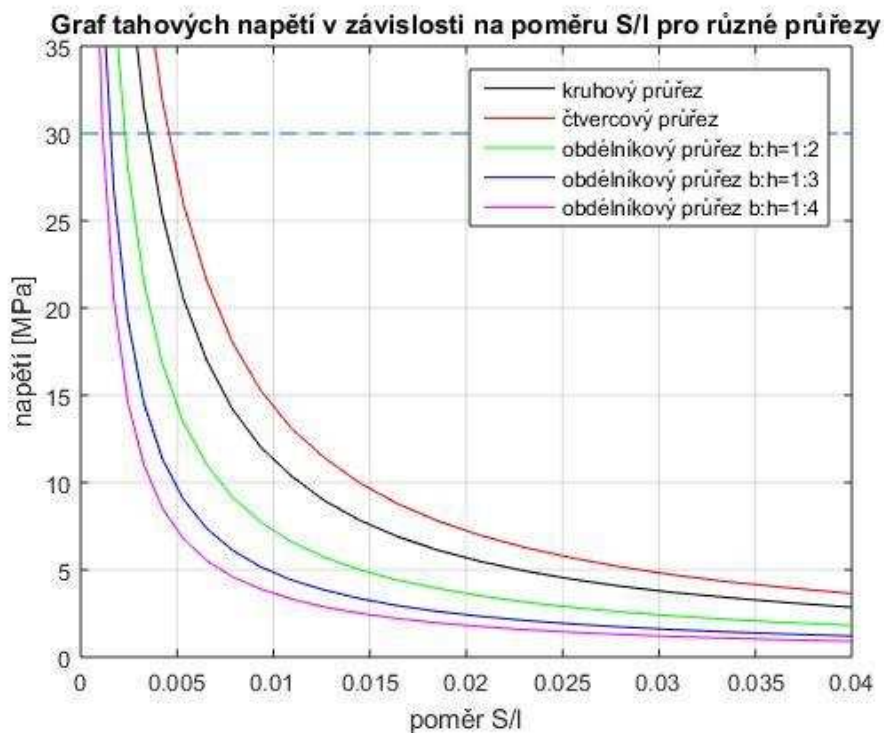
V této kapitole porovnáme vliv tvaru příčného průřezu na tahové napětí vzniklé silou F_{Bx} , konkrétně pro kruhový, čtvercový a tři obdélníkové průřezy s poměry stran $h:b=\{2:1,3:1,4:1\}$. Abychom mohli tahová napětí porovnávat, musí být pro každé dvě porovnávané hodnoty zachován stejný obsah příčného průřezu S , protože tahové napětí je nepřímo úměrné této ploše.

Výpočet provedeme pro délku prutu $l=1m$, ohybové napětí $300MPa$, průměr prutu kruhového průřezu $d=0,001-0,2m$. Strana čtvercového průřezu bude určena dle rovnice (4.17) a u obdélníkového průřezu dle rovnice (4.18).

$$a = \sqrt{\frac{\pi d^2}{4}} \quad (4.17)$$

$$b = \sqrt{\frac{\pi d^2}{4K}} \quad h = bK \quad (4.18)$$

kde K je poměr stran obdélníkového průřezu h/b . Výpočet tahových napětí byl proveden analogicky jako v kapitole 4.2 a jejich průběhy byly zakresleny do grafu v obr. 4.15.



Obr. 4.15 Srovnání tahových napětí pro různé tvary příčných průřezů, vytvořeno v programu MATLAB R2015b

Z grafu můžeme vyčíst, že tahové napětí prutu s čtvercovým příčným průřezem je vyšší než u prutu kruhového průřezu. Naopak pro obdélníkové průřezy jsou hodnoty tahového napětí nižší než pro kruhový průřez prutu. Kompletní analýza vlivu tvaru příčného průřezu na axiální napětí je však značně komplikovanější, protože do vztahu pro ohybové napětí se promítají různé kvadratické momenty průřezu. Takováto analýza nebyla z časových důvodů provedena a v zadání ani nebyla požadována.

5 Závěr

Cílem závěrečné práce bylo zhodnotit významnost tahového napětí vznikajícího při ohybu prutu se zabráněnou podélnou deformací. V literatuře [1] jsem našel odvození rovnice, ze které bylo třeba vypočítat tahovou sílu F_{Bx} . Ani pomocí matematických programů se nepodařilo explicitně vyjádřit sílu F_{Bx} , což ani nebylo cílem této práce, ale podařilo se ji vyřešit numericky dosazením konkrétních hodnot.

V literatuře [2] jsem našel vztah pro odhad axiálního napětí. Zkoumal jsem rozdílnost obou postupů a dosažených výsledků pro zvolený případ geometrie a materiálu prutu, vztah pro odhad fungoval velmi dobře pro malé průhyby prutu, ovšem se zvětšujícími se průhyby narůstala odchylka od přesně spočtených hodnot. Zabýval jsem se tuhostí rámu, která reálně nemůže být nekonečná, a proto jsem zavedl vazby jako poddajné, ovšem s 10krát větší tuhostí než samotný prut. Vliv na počítané tahové napětí to sice nemělo velký, ale je možné ho do výpočtu zahrnout.

Jednou z nejzásadnějších částí bylo zkoumání vlivu ohybového napětí na tahové napětí, a to pro kruhový příčný průřez. Snažil jsem se nalézt pro dané ohybové napětí hraniční poměr d/l , kdy pro poměry menší než tento se stává tahová síla významnou. Výsledkem je graf závislosti hraničního poměru d/l na ohybovém napětí, lze tedy odečíst hraniční poměr pro libovolné ohybové napětí, navíc byla vytvořena rovnice pro výpočet tohoto hraničního poměru. Vedle základního výpočtu, jehož vstupní hodnoty odpovídaly oceli, bylo totéž provedeno i pro hliník. Totéž lze provést po úpravě skriptu i pro jiné příčné průřezy prutu. Nakonec jsem zkoumal právě vliv příčného průřezu, k vyvození přesných závěrů by však bylo třeba hlubší analýzy.

Celkem jsem vytvořil čtyři skripty v programu MATLAB, první slouží pro porovnání tahových napětí získaných přesným výpočtem i odhadem s napětím vzniklými působením vlastní váhy prutu a teplotním rozdílem. Druhý zobrazuje rozdíl mezi průhybovou čarou a její aproximovanou funkcí dle [2]. Třetí se zabývá vlivem poddajné podpory a čtvrtý vlivem ohybového napětí na tahové napětí v prutu.

Lze konstatovat, že pro vyšetřované příčné průřezy a materiály je pro velkou část běžných prutů tahové napětí vzniklé při ohybu prutu se zabráněnou podélnou deformací nepodstatné. Podstatné může být pro štíhlé pruty zatížené větším ohybovým napětím. Přesto je ve většině případů významně menší než napětí vyvolané rozdíly teplot, kterým se lze v praxi jen těžko vyhnout. Proto je u prutů se zabráněnou podélnou deformací namáhaných ohybem mnohem důležitější se zabývat jejich teplotními napětími, než podélnou silou vyvolanou změnou délky střednice při ohybu prutu. To platí v rozmezí hodnot napětí až do meze kluzu většiny konstrukčních materiálů.

6 Seznam použitých zdrojů

- [1] JANÍČEK, Přemysl. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 802142592X.
- [2] JAMES M. GERE a STEPHEN P. TIMOSHENKO. *Solutions manual, Mechanics of materials*. Boston: Brooks/Cole Engineering, 1985. ISBN 9780534031008.

7 Seznam použitých zkratk a symbolů

a	Rozměr čtvercového příčného průřezu	m
b	Rozměr obdélníkového příčného průřezu	m
C_1, C_2	Integrační konstanty	-
E	Youngův modul pružnosti v tahu	MPa
F	Zatěžující síla	N
F_{Ay}	Reakční síla vazby A ve směru osy y	N
F_{Bx}	Axiální síla vazby B ve směru osy x	N
F_{By}	Reakční síla vazby B ve směru osy y	N
d	Průměr prutu	m
D_{min}	Minimální průměr prutu	m
D_{max}	Maximální průměr prutu	m
h	Rozměr obdélníkového příčného průřezu	m
K	Poměr rozměrů h:b	-
l	Délka prutu	m
Δl	Změna délky prutu (prodloužení/zkrácení)	m
J_y	Kvadratický moment k ose y	m^4
N	Normálová síla	n
M_o	Ohybový moment	Nm
Q	Koeficient upravující sílu F	-
s	Posuv podpory	m
S	Plocha příčného průřezu	m^2
ΔT	Rozdíl teplot	$^{\circ}C$
w	Deformační posuv (průhyb)	m
w'	První derivace posuvu (natočení)	rad
w''	Druhá derivace posuvu (křivost)	m^{-1}
W_o	Modul průřezu v ohybu	m^3
x	Poloha na prutu	m
α	Součinitel teplotní roztažnosti	K^{-1}
δ	Maximální průhyb	m
ρ	Hustota	kg/m^3
σ_o	Ohybové napětí	Pa
σ_t	Tahové napětí	Pa

8 Seznam příloh

Příloha A - skript v jazyce MATLAB pro numerické řešení dle podkapitoly 4.2

Příloha B - skript v jazyce MATLAB pro numerické řešení dle podkapitoly 4.2

Příloha C - skript v jazyce MATLAB pro numerické řešení dle podkapitoly 4.4

Příloha D - skript v jazyce MATLAB pro numerickou integraci dle rovnice 4.5

9 Přílohy

Příloha A

```
1 %porovnání tahových napětí získaných přesným výpočtem a odhadem
2 %s napětím vzniklým působením vlastní vahou a teplotním napětím
3 clc; clear all; %vymaže předchozí výpočty a uložené proměnné
4 syms G %zavede symbolickou proměnnou G=Fbx
5
6 %zadání vstupních parametrů
7 l=1; %délka prutu
8 E=207*10^9; %modul pružnosti v tahu
9 Ro=7850; %hustota
10 ALFA=1.2*10^-5; %součinitel teplotní roztažnosti
11 deltaT=20; %rozdíl teplot
12 NAPETI=300*10^6; %požadované ohybové napětí
13
14 Dmin=0.001; %minimální průměr prutu
15 Dmax=0.2; %maximální průměr prutu
16 krok=50; %počet kroků výpočtu
17 Dkrok=(Dmax-Dmin)/krok; %velikost jednoho kroku
18
19 n=1;
20 for d=Dmin:Dkrok:Dmax; %cyklus pro průměry Dmin až Dmax
21 J=(pi*d^4/64); %osový kvadratický moment Jy pro daný průměr
22
23 F=((25*NAPETI*pi*d^3)/(8*1)) %odhad zátěžné síly F
24
25 p=sqrt(G/(E*J)); %zadání rovnice pro zkrácení s
26 A=sinh(p*l);
27 B=sinh(p*l/2);
28 C=cosh(p*l/2);
29 s = F^2*((A/p+1)/(2*C^2)-4*B/(p*C)+1)/(8*G^2)-4*G*l/(E*pi*d^2);
30
31 Fbx = solve(s); %síla Fbx
32 p=sqrt(Fbx/(E*J)); %p pro námi vypočtenou X=Fbx
33
34 w=F*(1/2-(tanh(p*l/2)/p))/(2*Fbx); %průhyb w
35 OHYB=(8*F^1-32*Fbx*w)/(pi*d^3); %ohybové nap. pro síly F, Fbx
36 ODCHYLKA=abs(NAPETI-OHYB); %odchylka obou napětí
37
38 while ODCHYLKA>1*10^5 %cyklus pokud je odchylka>0,1MPa
39
40 Q=NAPETI/OHYB; %koeficient upravující zátěžnou sílu F
41 F=Q*F %provedení úpravy
42
43 %výpočet nových hodnot Fbx, w, ohybového napětí a odchylky
44 p=sqrt(G/(E*J));
45 s = F^2*((A/p+1)/(2*C^2)-4*B/(p*C)+1)/(8*G^2)-4*G*l/(E*pi*d^2);
46 Fbx = solve(s);
47 p=sqrt(Fbx/(E*J));
48 w=F*(1/2-(tanh(p*l/2)/p))/(2*Fbx);
49 OHYB=(8*F^1-32*Fbx*w)/(pi*d^3);
50 ODCHYLKA=abs(NAPETI-OHYB);
51
```

```

52     end           %konec cyklu pokud je odchylka menší než požadovaná
53
54
55     TAH=4*Fbx/(pi*d^2);    %tahové napětí způsobené silou Fbx
56     TIM=8*E*w^2/(3*l^2);  %tahové nap. způsobené silou Fbx dle [2]
57     TIHA=Ro*9.81*l^2/d;   %ohybové nap. způs. vlastní vahou prutu
58     TEPLO=ALFA*deltaT*E;  %napětí způsobené rozdílem teplot
59
60     W=F*(1-(1/cosh(p*l/2)))/(2*Fbx); %maximální natočení
61     T(1,n)=W;             %zapsání hodnoty natočení W do matice
62
63     %zapsání hodnot do matic
64     K(1,n)=d/l;          %d/l
65     L(1,n)=OHYB/10^6;   %ohybové napětí
66     M(1,n)=TAH/10^6;    %tahové napětí od síly Fbx
67     N(1,n)=TIM/10^6;    %tahové nap. od síly Fbx, dle zdroje [2]
68     O(1,n)=TIHA/10^6;   %ohybové napětí vzniklé tíhovou silou
69     P(1,n)=TEPLO/10^6;  %tlakové napětí vzniklé rozdílem teplot
70     R(1,n)=NAPETI/10^7; %hranice 10% ohybového napětí
71     S(1,n)=w;           %průhyb
72     n=n+1;
73
74 end   %konec cyklu výpočtu pro jednotlivé průměry
75
76 figure(1)           %vložení grafu do okna 1
77 plot (K,L,'b',K,M,'k',K,N,'r',K,O,'c',K,P,'g',K,R,'--') %grafy
78 title('Srovnání napětí v závislosti na poměru d/l') %název grafu
79 xlabel('poměr d/l') %popis osy x
80 ylabel('napětí [MPa]') %popis osy y
81 legend('ohybové', 'tahové', 'tahové dle [2]', 'ohybové vlastní
vahou', 'rozdíl teplot') %vytvoření legendy
82 grid on             %zapnutí mřížky
83
84 figure(2)
85 plot (K,T,'k')
86 title('Graf závislosti maximálního natočení na poměru d/l')
87 xlabel('poměr d/l')
88 ylabel('natočení w [rad]')
89 grid on
90
91 figure(3)
92 plot (K,S,'k')
93 title('Graf závislosti maximálního průhybu na poměru d/l')
94 xlabel('poměr d/l')
95 ylabel('průhyb w [m]')
96 grid on

```

Příloha B

```
1 %porovnání průhybové a aproximované křivky
2 clc; clear all;
3 syms G
4
5 %zadání vstupních parametrů
6 l=1;
7 E=2.07*10^11;
8 d=0.05;
9 J=(pi*d^4/64);
10 F=15000; %zatěžovací síla F
11
12 %výpočet síly Fbx, maximálního průhybu wmax
13 p=sqrt(G/(E*J));
14 A=sinh(p*l);
15 B=sinh(p*l/2);
16 C=cosh(p*l/2);
17 s = F^2*(((A/p)+1)/(2*C^2)) - (4*B/(p*C))+1)/(8*G^2) -
18 ((4*G*l)/(E*pi*d^2));
19 Fbx = solve(s);
20 p=sqrt(Fbx/(E*J));
21 wmax=F*(l/2-(tanh(p*l/2)/p))/(2*Fbx)
22
23 n=1;
24 for x=0:0.01:0.5 %poloha na prutu od 0 do l/2
25
26     wa=4*wmax*x*(1-x)/l^2 %průhyb dle aproximace
27     ws=-(F*sinh(p*x)/(2*Fbx*p*cosh(p*l/2)))+(F*x/(2*Fbx)) %skutečný průhyb
28
29 %zadání hodnot do matic
30 K(1,n)=x
31 L(1,n)=wa
32 M(1,n)=ws
33 n=n+1;
34 end
35
36 %vytvoření grafu
37 figure(4)
38 plot(K,L,'b',K,M,'k')
39 title('Porovnání průhybové a aproximované křivky')
40 xlabel('poloha na prutu [m]')
41 ylabel('průhyb w [m]')
42 legend('aproximovaná křivka', 'průhybová křivka')
```

Příloha C

```

1  %Porovnání tahových napětí pro pevnou a poddajnou podporu
2  clc; clear all; %vymaže předchozí výpočty a uložené proměnné
3  syms G          %zavede symbolickou proměnnou Fbx
4
5  l=1;           %délka prutu
6  E=207*10^9;   %modul pružnosti v tahu
7  NAPETI=300*10^6; %požadované napětí
8  Dmin=0.005;   %minimální průměr prutu
9  Dmax=1;       %maximální průměr prutu
10 krok=50;      %počet kroků výpočtu
11 Dkrok=(Dmax-Dmin)/krok; %velikost jednoho kroku
12
13 %cyklus pro pevnou podporu
14 n=1;
15 for d=Dmin:Dkrok:Dmax; %cyklus pro průměry Dmin až Dmax
16     J=(pi*d^4/64); %osový kvadr. moment Jy pro daný průměr
17     F=((25*NAPETI*pi*d^3)/(8*l)) %odhad zátěžné síly F
18
19     p=sqrt(G/(E*J)); %zadání rovnice pro zkrácení s
20     A=sinh(p*l);
21     B=sinh(p*l/2);
22     C=cosh(p*l/2);
23     s=F^2*((A/p+1)/(2*C^2)-4*B/(p*C)+1)/(8*G^2)-4*G*l/(E*pi*d^2);
24
25     Fbx = solve(s); %síla Fbx
26     p=sqrt(Fbx/(E*J)); %p pro námi vypočtenou X=Fbx
27
28     w=F*(1/2-(tanh(p*l/2)/p))/(2*Fbx); %průhyb w
29     OHYB=(8*F*l-32*Fbx*w)/(pi*d^3); %ohybové nap. pro F, Fbx
30     ODCHYLKA=abs(NAPETI-OHYB); %odchylka obou napětí
31
32     while ODCHYLKA>1*10^5 %cyklus pokud je odchylka > 0,1MPa
33         Q=NAPETI/OHYB; %koeficient upravující zátěžnou sílu F
34         F=Q*F %provedení úpravy
35
36         %výpočet nových hodnot Fbx, w, ohybového napětí a odchylky
37         p=sqrt(G/(E*J));
38         s=F^2*((A/p+1)/(2*C^2)-4*B/(p*C)+1)/(8*G^2)-4*G*l/(E*pi*d^2);
39         Fbx = solve(s);
40         p=sqrt(Fbx/(E*J));
41         w=F*(1/2-(tanh(p*l/2)/p))/(2*Fbx);
42         OHYB=(8*F*l-32*Fbx*w)/(pi*d^3);
43         ODCHYLKA=abs(NAPETI-OHYB);
44     end %konec cyklu pokud je odchylka menší než požadovaná
45
46     TAH=4*Fbx/(pi*d^2); %tahové napětí způsobené silou Fbx
47
48     %zapsání hodnot do matic
49     K(1,n)=d/l; %d/l
50     L(1,n)=OHYB/10^6; %ohybové napětí
51     M(1,n)=TAH/10^6; %tahové napětí od síly Fbx
52     n=n+1;
53
54 end %konec cyklu výpočtu pro nepoddajnou podporu
55

```



```

56 %tentýž cyklus pro poddajnou podporu
57 n=1;
58 for d=Dmin:Dkrok:Dmax;
59     J=(pi*d^4/64);
60     F=((25*NAPETI*pi*d^3)/(8*l))
61
62     p=sqrt(G/(E*J));
63     %rovnice pro poddajnou podporu
64     s=F^2*((A/p+1)/(2*C^2)-4*B/(p*C)+1)/(8*G^2)-4.4*G*l/(E*pi*d^2);
65
66     Fbx = solve(s);
67     p=sqrt(Fbx/(E*J));
68
69     w=F*(1/2-(tanh(p*l/2)/p))/(2*Fbx);
70     OHYB=(8*F*l-32*Fbx*w)/(pi*d^3);
71     ODCHYLKA=abs(NAPETI-OHYB);
72
73     while ODCHYLKA>1*10^5
74
75         Q=NAPETI/OHYB;
76         F=Q*F
77
78         p=sqrt(G/(E*J));
79         s=F^2*((A/p+1)/(2*C^2)-4*B/(p*C)+1)/(8*G^2)-4.4*G*l/(E*pi*d^2);
80         Fbx = solve(s);
81         p=sqrt(Fbx/(E*J));
82         w=F*(1/2-(tanh(p*l/2)/p))/(2*Fbx);
83         OHYB=(8*F*l-32*Fbx*w)/(pi*d^3);
84         ODCHYLKA=abs(NAPETI-OHYB);
85
86     end
87     TAH=4*Fbx/(pi*d^2);
88
89     K(1,n)=d/l;
90     L(1,n)=OHYB/10^6;
91     N(1,n)=TAH/10^6;
92     n=n+1;
93
94 end %konec cyklu pro poddajnou podporu
95
96 figure(5)
97 plot(K,M,'k',K,N,'r')
98 title('Tahová napětí v prutu s pevnou a poddajnou podporou')
99 xlabel('poměr d/l')
100 ylabel('napětí [MPa]')
101 legend('s pevnou podporou','s poddajnou podporou')
102 grid on
103
104 figure(6)
105 P=N./M*100;
106 figure(1)
107 plot(K,P,'k')
108 title('Srovnání tahových napětí při pevné a poddajné podpoře')
109 xlabel('poměr d/l')
110 ylabel('velikost napětí s poddajnou podporou [%]')
111 grid on

```

Příloha D

```
1 %porovnání tahových napětí pro různá ohybová napětí
2 clc; clear all; %vymaže předchozí výpočty a uložené proměnné
3 syms G %zavede symbolickou proměnnou Fbx
4
5 l=5; %délka prutu
6 E=207*10^9; %modul pružnosti v tahu
7 Dmin=0.005; %minimální průměr prutu
8 Dmax=1; %maximální průměr prutu
9 krok=(Dmax-Dmin)/50; %krok, po jakých bude průměr volen
10
11 k=1;
12 for NAPETI=50000000:75000000:500000000;
13
14 n=1;
15 for d=Dmin:krok:Dmax; %cyklus pro průměry Dmin až Dmax
16 J=(pi*d^4/64); %osový kvadr. moment Jy pro daný průměr
17 F=((25*NAPETI*pi*d^3)/(8*l)) %odhad zátěžné síly F
18
19 p=sqrt(G/(E*J)); %zadání rovnice pro zkrácení s
20 A=sinh(p*l);
21 B=sinh(p*l/2);
22 C=cosh(p*l/2);
23 s=F^2*((A/p+1)/(2*C^2)-4*B/(p*C)+1)/(8*G^2)-4.4*G*l/(E*pi*d^2);
24
25 X = solve(s); %síla Fbx, X=Fbx
26 p=sqrt(X/(E*J)); %p pro námi vypočtenou X=Fbx
27
28 w=F*(1/2-(tanh(p*l/2)/p))/(2*X); %průhyb w
29 OHYB=(8*F*l-32*X*w)/(pi*d^3); %ohybové napětí od F a Fbx
30 ODCHYLKA=abs(NAPETI-OHYB); %odchylka obou napětí
31
32 while ODCHYLKA>1*10^5 %cyklus dokud odchylka > 0.1Mpa
33
34 Q=NAPETI/OHYB; %koeficient upravující zátěžnou sílu F
35 F=Q*F %provedení úpravy
36
37 %výpočet nových hodnot Fbx, w, ohybového napětí a odchylky
38 p=sqrt(G/(E*J));
39 s=F^2*((A/p+1)/(2*C^2)-4*B/(p*C)+1)/(8*G^2)-4.4*G*l/(E*pi*d^2);
40 X = solve(s);
41 p=sqrt(X/(E*J));
42 w=F*(1/2-(tanh(p*l/2)/p))/(2*X)
43 OHYB=(8*F*l-32*X*w)/(pi*d^3);
44 ODCHYLKA=abs(NAPETI-OHYB);
45
46 end %konec cyklu while
47
48 TAH=4*X/(pi*d^2); %tahové napětí způsobené silou Fbx
49 POMER=TAH/OHYB*100
50
51 W=F*(1-(1/cosh(p*l/2)))/(2*X); %maximální natočení
52 R(1,n)=W; %zapsání hodnoty natočení w do matice
53
54 K(1,n)=d/l; % d/l do matice
55
```

```

56     L(1,n)=OHYB/10^6;           % ohybové napětí do matice
57     M(1,n)=TAH/10^6;           % tahové napětí od síly Fbx do matice
58     Z(1,n)=POMER
59
60     %nalezení bodu kde je tahové napětí 10 ohybového
61     if POMER>10
62         jedna=POMER;
63         dva=d/l;
64         tri=n+1;
65     end
66     if n>tri
67         ctyri=Z(1,tri);
68         pet=K(1,tri);
69         smernice=(pet-dva)/(ctyri-jedna);
70         sest=dva-((jedna-10)*smernice)
71         sedm(1,k)=NAPETI;
72         osm(1,k)=sest;
73     end
74     n=n+1;
75 end %konec cyklu výpočtu pro jednotlivé průměry
76 %nahrání matic pro jednotlivá ohybová napětí
77 if k==1
78     MI=M;
79     ZI=Z;
80 elseif k==2
81     MII=M;
82     ZII=Z;
83 elseif k==3
84     MIII=M;
85     ZIII=Z;
86 elseif k==4
87     MIIII=M;
88     ZIIII=Z;
89 elseif k==5
90     MIIIII=M;
91     ZIIIII=Z;
92 elseif k==6
93     MIIIIII=M;
94     ZIIIIII=Z;
95 elseif k==7
96     MIIIIIIII=M;
97     ZIIIIIIII=Z;
98 end
99
100 k=k+1;
101 end
102
103 figure(7)
104 plot(K,MI, 'b', K,MII, 'k', K,MIII, 'r', K,MIIII, 'g', K,MIIIII, 'm', K,MIIIIII, 'c', K,MIIIIIIII, 'y')
105 title('Porovnání tahových napětí pro různá ohybová napětí')
106 xlabel('poměr d/l')
107 ylabel('napětí [MPa]')
108 legend('50Mpa', '125Mpa', '200Mpa', '275Mpa',
109 '350Mpa', '425Mpa', '500Mpa')
110 grid on

```

```
111 figure(8)
112 plot(K,ZI,'b',K,ZII,'k',K,ZIII,'r',K,ZIIII,'g',K,ZIIIIII,'m',K,ZI
113      IIIII,'c',K,ZIIIIIIII,'y')
114 title('Poměr tahového a ohybového napětí v závislosti na poměru
115      d/l')
116 xlabel('poměr d/l')
117 ylabel('poměr tahového a ohybového napětí [%]')
118 legend('50Mpa', '125Mpa', '200Mpa', '275Mpa',
119        '350Mpa', '425Mpa', '500Mpa')
120 grid on
```