Česká zemědělská univerzita v Praze

Provozně ekonomická fakulta

Katedra systémového inženýrství

Bakalářská práce

Optimalizace dopravních tras mezi firmou a jejími zákazníky

Kryštof Kučera

ČESKÁ ZEMĚDĚLSKÁ UNIVERZITA V PRAZE

Provozně ekonomická fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Kryštof Kučera

Ekonomika a management
Provoz a ekonomika

Název práce

Optimalizace dopravních tras mezi firmou a jejími dodavateli a zákazníky

Název anglicky

Optimization of Transportation Routes between a Chosen Company and Its Clients

---

Cíle práce

Nalezení optimální trasy mezi firmou Kratochvíl, spol. s.r.o. a jejími odběrateli. Firma rozváží zboží pomocí své vlastní přepravy, přičemž vozidla vyjíždějí a vracejí se do stejného místa.

Metodika

Práce bude rozdělena na dvě části a to na část teoretickou a praktickou.

V teoretické části bude popsána problematika dopravních úloh, jejich rozdělení a řešení.

V praktické části bude vybranými metodami zpracována konkrétní dopravní úloha firmy "Kratochvíl, spol. s.r.o.". Výsledek bude porovnán s dosavadním počínáním firmy a případným doporučením.

Doporučený rozsah práce

30 – 40 stran

Klíčová slova

Optimalizace tras, Logistika, Dopravní úloha, Okružní dopravní problém, Aproximační metody

---

Doporučené zdroje informací

BROŽOVÁ, H. – HOUŠKA, M. – ČESKÁ ZEMĚDĚLSKÁ UNIVERZITA V PRAZE. PROVOZNĚ EKONOMICKÁ FAKULTA. *Základní metody operační analýzy.* Praha: Česká zemědělská univerzita v Praze, Provozně ekonomická fakulta ve vydavatelství Credit, 2002. ISBN 80-213-0951-2.

OUDOVÁ, Alena. Logistika: základy logistiky. Aktualizované 2. vydání. Prostějov: Computer Media, 2016. ISBN 978-80-7402-238-8.

SVOBODA, V. – ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE. DOPRAVNÍ FAKULTA. *Dopravní logistika.* Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN 80-01-02914-.

ŠUBRT, T. *Ekonomicko-matematické metody.* Plzeň: Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk, s.r.o., 2015. ISBN 978-80-7380-563-0.

Předběžný termín obhajoby

2020/21 LS – PEF

Vedoucí práce

RNDr. Petr Kučera, Ph.D.

Garantující pracoviště

Katedra systémového inženýrství

Elektronicky schváleno dne 29. 10. 2020	Elektronicky schváleno dne 5. 11. 2020
doc. Ing. Tomáš Šubrt, Ph.D.	**Ing. Martin Pelikán, Ph.D.**
Vedoucí katedry	**Děkan**

V Praze dne 09. 11. 2020

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci " Optimalizace dopravních tras mezi firmou a jejími zákazníky" jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou citovány v práci a uvedeny v seznamu použitých zdrojů na konci práce. Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že jsem v souvislosti s jejím vytvořením neporušil autorská práva třetích osob.

V Praze dne 15.03.2021 ______________________________

Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval panu RNDr. Petru Kučerovi, Ph.D. za rady, konzultace a odborné vedení práce. Dále bych rád poděkoval společnosti Kratochvíl, spol. s.r.o., zejména jejímu řediteli za poskytnutí potřebných podkladů a svým rodičům za podporu během celého studia.

Optimalizace dopravních tras mezi firmou a jejími zákazníky

Abstrakt

Cílem bakalářské práce je optimalizace dopravní trasy mezi společností Kratochvíl, spol. s.r.o. a jejími zákazníky sídlícími v Praze a Středočeském kraji. První část práce obsahuje popis logistiky, dále je pojednáno o lineárním programování, distribučních problémech a jejich kategoriích, mezi které spadá i okružní dopravní problematika. Jsou též vysvětleny různé metody řešení dopravních úloh. Druhá část práce obsahuje samotné nalezení rozvozové trasy pomocí metody nejbližšího souseda a Vogelovy aproximační metody. V závěru je shrnutí výsledků a jejich interpretace vedení společnosti Kratochvíl.

Klíčová slova: Logistika, Doprava, Optimalizace, Okružní dopravní problém, Metoda nejbližšího souseda, Vogelova aproximační metoda

Optimization of Transportation Routes between a Chosen Company and Its Clients

Abstract

The subject of this bachelor´s thesis is to optimize transport routes between the Kratochvíl company and its customers, residing mainly in Prague and Central Bohemian region. The first part of thesis looks into general description of logistics, linear programming, and transportation theory, more precisely the traveling salesman problem. Chosen methods which can solve the problem can be also find in the first part. The second part consists of finding the optimal distributional route of the Kratochvíl company. Nearest neighbor algorithm and Vogel approximation method are applied to solve the problem. The conclusion summarizes the results, and the results are presented to the CEO of the company.

Keywords: Logistics, Transportation, Optimization, Traveling Salesman Problem, Nearest neighbor algorithm, Vogel approximation method

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam příloh

1 Úvod

Optimalizace dopravních tras mezi firmou a jejími zákazníky se zabývá nalezením ideálního spojení, kterým by bylo možné realizovat dopravu. Všechna místa by šla sice zásobovat napřímo cestou dodavatel – zákazník, ovšem uspořádání všech zákazníků do jednoho rozvozového okruhu je pro dodavatele mnohem hospodárnější.

Distribuční problémy zabývající se tvorbou a aproximací okružních cest bývají označovány jako problémy obchodního cestujícího. Tyto typy úloh modelů lineárního programování mají své specifické metody řešení, které si kladou za cíl minimalizovat náklady firmy vynaložené na dopravu.

Pro tuto práci byla vybrána firma Kratochvíl, spol. s.r.o., která sídlí ve Slaném, odkud dopravuje svým zákazníkům, sídlícím ve Středočeském kraji a Praze, světelné zdroje a jiný elektromateriál.

Společnost se zabývá velkoobchodem a na realizaci většiny distribuce si najímá externí firmy. Menší pravidelné zákazníky však zásobuje svépomocí a právě rozvoz produktu po těchto malých odběratelích bude předmětem optimalizace.

2 Cíl práce a metodika

2.1 Cíl práce

Cílem práce je naleznout optimální rozvozovou trasu, kterou společnost Kratochvíl, spol. s.r.o. zásobuje své zákazníky elektromateriálem. Cílem optimalizace bude minimalizovat délku okruhu, do kterého budou zařazeni všichni odběratelé společnosti tak, aby zásobování proběhlo v rámci jednoho okruhu. Okruh bude začínat i končit ve stejném místě, kterým je sídlo firmy Kratochvíl.

2.2 Metodika

Teoretická část práce bude popisovat problematiku související s optimalizací dopravní trasy. Budou v ní poznatky o logistice, základech lineárního programování a distribučních úlohách. Informace budou čerpány z odborné literatury, převážně ze skript.

Praktická část se bude zabývat řešením dopravního problému použitím dvou vybraných metod, přesněji metodou nejbližšího souseda a Vogelovou aproximační metodou.

Nalezené výsledky budou zhodnoceny, srovnány s dosavadním počínáním firmy Kratochvíl a případně bude společnosti doporučeno, jak trasu optimalizovat.

3 Teoretická východiska

3.1 Logistika

3.1.1 Vznik a vývoj logistiky

Původ slova logistika je odvozován od řeckého slova *logisticon*, které pochází ze slova *logos* – což znamená *řeč, slovo, myšlenka* nebo také *rozum*. Pojem *logisticon* je tedy chápán jakožto *důmysl* či *rozum*. Logistika byla od svého vzniku až do padesátých let dvacátého století vnímána jako obor spjatý především s vojenstvím. (Oudová 2016)

Leontos VI., byzantský císař žijící na přelomu devátého a desátého století, ve svém díle „Souhrný výklad vojenského umění" nabízí jedno z prvních vymezení oboru logistiky. Podle něj bylo úkolem logistiky například obstarat prostředky pro financování vojska, dobře jej vybavit nebo dělat všechna vojenská rozhodnutí s dostatečným předstihem.

Tuto spojitost logistiky s armádou dokládá i dílo „Náčrt vojenského umění" od švýcarského generála, který pojem logistika odvozuje od funkce ve francouzské armádě „maréchal des logis". Náplní oné funkce bylo zorganizovat uložení a utáboření jednotek. (Stehlík & Kapoun 2008)

V padesátých letech dvacátého století se logistika začala rozvíjet jako vědní disciplína a nacházela uplatnění i v oborech nezabývajících se armádní problematikou. Tento rozvoj úzce souvisí s rapidním zvýšením výrobních kapacit. Zvětšení objemu produkce začalo klást více nároků na distribuci vyrobených statků. Během padesátých let se proměnila také podnikatelská koncepce z prodejní na marketingovou. Zatímco v prodejní koncepci byl vyráběn malý sortiment statků ve velkých množstvích, marketingová koncepce se snažila o rozšíření nabídky a palety služeb. Tato změna výrobní politiky také zvýšila nároky na distribuci výrobků a zdrojů. Logistika se nezabývá pouhou dopravou materiálu nebo výrobku z místa na místo. Mezi její úlohy patří i řízení zásob, řízení a organizace skladů či optimalizace materiálových toků výrobním procesem. (Gros 1994)

3.1.2 Charakteristika logistiky

Definicí tohoto vědního oboru existuje hned několik. Například Pernica (2005, s. 142.) logistiku charakterizuje jako *„disciplínu, která se zabývá slaďováním (koordinací,* *synchronizací a celkovou optimalizací) všech aktivit v rámci samoorganizujících se systémů, jejichž zřetězení je nezbytné k pružnému a hospodárnému dosažení konečného efektu“.*

Podle Schulteho (1994, s. 13.) je logistika „*integrované plánování, formování, provádění a kontrolování hmotných a s nimi spojených informačních toků od dodavatele do podniku, uvnitř podniku a od podniku k odběrateli.“*

Na základě těchto definic je možno logistiku chápat jako obor, jehož cílem je starat se o správný chod několika faktorů. Toto pravidlo je označováno jako „5 S“ logistiky. Tedy Správné zboží ve Správném množství na Správném místě ve Správný čas za Správnou cenu. (Oudová 2016)

3.2 Lineární programování

3.2.1 Charakteristika lineárního programování

Lineární programování je disciplína, která se zabývá otázkou: S jakou intenzitou realizovat procesy v systému tak, aby byly dodrženy všechny předem stanovené podmínky a aby byl výstup realizace co nejoptimálnější? Ve všech matematických funkcích, které vyjadřují vztahy v těchto modelech, se vyskytují polynomy nejvýše prvního stupně, proto se o těchto modelech referuje jako o lineárních. Výraz programovaní nesouvisí s programováním v oboru IT. Tento termín je možné chápat jako plánování neboli vytváření různých scénářů dopadů rozhodnutí. (Jablonský 2002)

3.2.2 Vybrané komponenty lineárního programování

Modely se používají při optimalizačních procesech, kdy se snaží najít matematický extrém lineární **účelové funkce** $z(x)$. Hledaným extrémem funkce (pakliže takový extrém existuje) může být maximum, je-li účelová funkce vyjádřením například zisku či tržeb. Minimum se hledá, pokud je třeba snižovat náklady nebo ujeté kilometry. Lineární optimalizační modely mají své uplatnění v různých typech úloh jsou jimi například:

- Optimalizace výrobní struktury, ve které je cílem nalézt ideální vyráběná množství při dodržení výrobních kapacit.
- Alokační problémy, které jsou skupinou úloh řešící otázku: jakým způsobem vynaložit zdroje na nákup určitých objektů?

- Směšovací problémy, kde je cílem nalézt ideální poměr mísení, například krmných směsí.
- Problémy dělení materiálů, které se zabývají tím, jak ve výrobním procesu optimalizovat dělení surovin tak, aby byly minimalizovány ztráty a zároveň bylo zajištěno požadované množství.
- Distribuční problémy, ve kterých je cílem optimalizovat distribuci produktu.

(Brožová a Houška 2008)

Lineární fukce s obecným předpisem $y = ax + b,\ a, b \in R \wedge a \neq 0$ nemá extrém. Lineární funkce má extrém pouze tehdy, je-li konstantní (a=0) nebo pokud je omezena na definičním oboru. Modely LP, ve kterých je účelová funkce konstantní, nemají smysl řešit, neboť jakékoli rozhodnutí (změna hodnoty proměnné x) nebude mít na hodnotu účelové funkce žádný vliv. Aby bylo možné hledat extrémy, musí se tedy do modelu přidat komponenty omezující definiční obor účelové funkce. Tyto komponenty se nazývají **omezující podmínky**.

Omezující podmínky zachycují vazby v systému mohou být vnitřní či vnější. Vnější vazby (exogenní) jsou zpravidla zachycovány třemi typy podmínek.

1. Kapacitní – podmínky, ve kterých je určena hranice (například výrobních kapacit), kterou není možné přečerpat
2. Požadavkové – podmínky udávající spodní hranici, které je nutno dosáhnout (například množství živin v krmné směsi)
3. Určující – podmínky přesně stanovující požadavek, který má exaktní hodnotu

Vnitřní (endogení) vazby v systému jsou zachyceny podmínkami bilančními či poměrovými.

1. Bilanční podmínky slouží k tomu, aby množství nějakého produktu přesahovalo (nebo naopak nepřesahovalo) množství jiného produktu.
2. Poměrové podmínky určují poměr, který musí jednotlivé prvky zachovávat.

Omezující podmínky jsou přesně určeny maticí technickoekonomických koeficientů. Technickoekonomické koeficienty „*popisují vliv každé jednotky jednotlivých procesů v dané podmínce, a jednotlivé kapacity, požadavky nebo možné bilanční nerovnováhy či poměry*“. (Brožová a Houška 2008, s. 56.)

3.2.3 Matematická formulace modelu lineárního programování

Obecný model má tři, resp. čtyři prvky. Jsou jimi vektor proměnných x, omezující podmínky, účelová (kriteriální) funkce a podmínky nezápornosti.
Cílem je nalézt extrém účelové funkce.

$$z(x) = c^T x \rightarrow MIN/MAX$$

V modelu jsou dány omezující podmínky

$$Ax \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b$$

při podmínkách nezápornosti:

$$x \geq 0$$

Kde platí:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je vektor proměnných

$z(x) = c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ je účelová funkce

$c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ je vektor cen nebo sazeb proměnných

$A=(a_{ij})$ je matice technickoekonomických koeficientů

$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ je vektor pravých stran soustavy omezujících podmínek

$x \geq 0$ jsou podmínky nezápornosti, $x_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n$

(Brožová a Houška 2008)

3.3 Distribuční problémy

Distribuční úlohy tvoří specifickou kategorii úloh lineárního programování. Mezi tyto úlohy patří například jednostupňové, dvoustupňové, přiřazovací nebo okružní dopravní úlohy. Různé typy úloh mají svá formulační specifika, která umožňují tyto problémy řešit různými metodami. (Šubrt, a kol 2015)

3.3.1 Jednostupňové dopravní úlohy

Jednostupňové dopravní úlohy (JDÚ) se zabývají problematikou přepravy homogenního produktu od dodavatelů ke spotřebitelům tak, aby prostředky vynaložené na dopravu byly co nejmenší. Mezi další předpoklady JDÚ patří, že přeprava je realizována stejným druhem dopravního prostředku, že mezi spotřebitelem a dodavatelem existuje právě jedna cesta, po které je možné převézt neomezené množství produktu a že náklady vynaložené na přepravu jsou přímo úměrné množství přepravovaného produktu. (Šubrt, a kol 2015)

3.3.1.1 Formulace jednostupňové dopravní úlohy

Všechny komponenty JDÚ se dají zanést do dopravní tabulky. Ke konstrukci dopravní tabulky je nutné mít zadanou nenulovou množinu dodavatelů a spotřebitelů i s jejich kapacitami, resp. požadavky. Každá JDÚ musí mít m dodavatelů (D_1, D_2, …, D_m) s kapacitami (a_1, a_2, …, a_m) a n spotřebitelů (S_1, S_2, …, S_n) s požadavky (b_1, b_2, …, b_n). Musí být vyčísleny ceny (sazby) za jednotku převezeného produktu, c_{ij} je sazba za převezení jednotky produktu mezi dodavatelem D_i a spotřebitelem S_j. Množství přepravovaného materiálu mezi dodavatelem D_i a spotřebitelem S_j se značí jako x_{ij}. Cílem úlohy je nalézt množství přepravovaného produktu, při kterém bude cena přepravy co nejnižší. (Šubrt, a kol 2015)

Obrázek 1: Dopravní tabulka

	Spotřebitelé				Kapacity dodavatelů a_i
Dodavatelé	S_1	S_2	…	S_n	
D_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
D_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
D_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Požadavky spotřebitelů b_j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Zdroj: (Šubrt, a kol 2015, s. 79.)

3.3.1.2 Řešení jednostupňových dopravních úloh

Postup řešení JDÚ je založen na principu hledání výchozího (bazického) řešení a jeho následnou optimalizaci, dokud výsledek nebude optimální.

1. Vyváženost dopravní úlohy

V prvním kroku je třeba dodržet podmínku vyváženosti dopravní úlohy. Kvůli této podmínce je nutné zařídit, aby celková kapacita dodavatelů byla stejná jako celkové požadavky spotřebitelů. Pokud tato rovnost neplatí, přidává se do úlohy fiktivní dodavatel nebo spotřebitel s kapacitou či požadavkem, který odpovídá absolutní hodnotě rozdílu celkových kapacit a celkových požadavků. Sazby fiktivních dodavatelů či spotřebitelů jsou nulové. (Šubrt, a kol 2015)

Tabulka 1: Vyváženost dopravní úlohy

Varianta 1	Varianta 2	Varianta 2
$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$	$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$	$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$
Není třeba přidávat fiktivní dodavatele či spotřebitele, protože dopravní úloha je vyvážená.	Do úlohy se přidává fiktivní spotřebitel s kapacitou $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$	Do úlohy se přidává fiktivní dodavatel s kapacitou $a_{m+1} = \left\lvert \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \right\rvert$

Zdroj: (Šubrt, a kol 2015) - vlastní zpracování

2. Nalezení bazického řešení

Bazickým řešením v JDÚ je chápáno řešení, ve kterém je počet kladných proměnných (počet nalezených tras) o jednu menší, než součet počtu dodavatelů s počtem spotřebitelů, tedy pokud je počet kladných proměnných roven $m+n-1$. Nalezení bazického řešení se může provést různými metodami, například metodou severozápadního rohu, indexovou metodou nebo Vogelovou aproximační metodou. (Brožová a Houška 2008)

Metoda severozápadního rohu je velmi jednoduchá metoda, spočívající v postupném naplňování kapacit (požadavků) z levého horního rohu dopravní tabulky. Tento postup slouží k zjištění bazického řešení, které bude ovšem velmi vzdáleno od optima.

Na začátku této metody je třeba vybrat pole x_{ij}, které bude mít co nejnižší koeficienty ij. Tomuto poli je přiřazena hodnota proměnné, která bude rovna menší z hodnot kapacity nebo požadavku daného dodavatele, resp. spotřebitele. Poté jsou přepočítány kapacity ($a_i=a_i-x_{ij}$) a kapacity ($b_j=b_j-x_{ij}$). Dodavatel, případně spotřebitel, který má vyčerpanou kapacitu či požadavek je vyškrtnut z dopravní tabulky. Postup se celý opakuje od výběru pole x_{ij} s nejmenší hodnotou koeficientů ij. Poslední iterace nastává ve chvíli, kdy jsou vyčerpány všechny kapacity a všechny požadavky. (Brožová a Houška 2008)

Indexová metoda obsazuje buňky podle výhodnosti sazeb. V dopravní tabulce je nalezena nejnižší hodnota sazby c_{ij} a ta je obsazena nejvyšším možným počtem převáženého produktu. Při hledání nejnižší sazby c_{ij} se ignorují fiktivní dodavatelé a spotřebitelé, přestože je jejich sazba nulová, tedy nejvýhodnější. Tato přeprava se nikdy neuskuteční, proto se obsazuje jako poslední. Pokud existuje více stejně výhodných sazeb, je obsazena ta buňka, které je za stávající situace možné přiřadit větší množství převáženého produktu. Po obsazení buňky se přepočítávají kapacity i požadavky a opakováním metody je obsazena dopravní tabulka. (Šubrt, a kol 2015)

Vogelova aproximační metoda (VAM) je nejpoužívanější metodou zejména proto, že poskytuje řešení velmi blízké optimálnímu. Metoda severozápadního rohu vůbec nezvažuje cenové koeficienty přepravy a indexová metoda vybírá sice nejlepší sazby, ale nebere v potaz, které cenové koeficienty bude nutné na konci obsadit. VAM nepracuje s absolutními hodnotami cenových koeficientů, nýbrž s jejich diferencemi. Diferencí se rozumí rozdíl mezi nejvýhodnější a druhou nejvýhodnější sazbou. Tuto hodnotu je možné chápat jako minimální jednotkovou ztrátu, která by vznikla, kdyby nebyla využita nejlepší sazba.

Na začátku postupu této metody jsou stanoveny sloupcové a řádkové diference, které jsou rozdílem nejvýhodnější a druhé nejvýhodnější sazby v daném řádku či sloupci. Ze všech diferencí je vybrána ta nejvyšší, neboť představuje největší ztrátu, kterou je nutné minimalizovat. V příslušném sloupci či řádku nejvyšší diference je vybrána nejvýhodnější sazba a kapacita (požadavek) této buňky je vyčerpána. Dodavatelé či spotřebitelé s vyčerpanými kapacitami či požadavky jsou vyškrtnuti. Následně se přepočítají kapacity, požadavky a diference. Tento postup je opakován do vyčerpání všech kapacit a požadavků.

Pakliže existují dvě nejvyšší diference, je vybrána ta, která má nejnižší cenový koeficient. Pokud by byly stejné i cenové koeficienty, je vybírána ta buňka, pro kterou je součet sloupcové a řádkové diference větší. (Brožová a Houška 2008)

3. Test optimality

Při testu optimality se ukazuje, zda existuje lepší řešení, nebo zda je stávající řešení optimem. Jako první se určí $m + n$ hodnot duálních proměnných u_i a v_j. Při vyčíslování hodnot proměnných jsou uvažována pouze obsazená pole. Za jednu neznámou u_i či v_j je zvolena hodnota, obvykle se volí nula a je přiřazena neznámé, která má ve svém příslušném řádku nebo sloupci nejvíce obsazených polí. Zbylé hodnoty proměnných jsou stanoveny dle vztahu $u_i + v_j = c_{ij}$. V dalším kroku je zkoumáno, zda pro všechna neobsazená pole platí vztah $u_i + v_j < c_{ij}$. Pokud tyto nerovnice platí, je řešení považováno za optimální. Pokud ne, přistupuje se k poslednímu kroku, kterým je přechod na lepší řešení. (Kosková 2004)

4. Přechod na lepší řešení

Přechod na lepší řešení, neboli změna bazického řešení, je v JDÚ prováděna pomocí Dantzingových uzavřených obvodů. Dantzingův uzavřený obvod je v dopravní tabulce znázorněn lomenou čarou začínající v neobsazené buňce, která je zařazována do řešení, tedy v buňce pro kterou platí, že je hodnota $u_i + v_j - c_{ij}$ největší. Obvod začíná v již zmíněném neobsazeném poli, láme se v obsazených buňkách a vrací se zpět do výchozího místa. Pole, ve kterých se křivka láme, jsou označena střídavě znamínky + a -, přičemž výchozímu bodu je přiřazeno znaménko +. Z míst, která jsou označena znamínkem -, je vybrána nejmenší hodnota x_{ij} a ta je přičtena do buněk označených znamínkem + a odečtena od všech buněk označených znamínkem -. Tímto způsobem se nepřekročí kapacity ani požadavky a je vytvořeno nové řešení, které opět prochází testem optimality. (Šubrt, a kol 2015)

3.3.2 Okružní dopravní problém

3.3.2.1 Formulace okružního dopravního problému

Okružní dopravní problematika se zabývá otázkou, jakým způsobem při výjezdu z výchozího bodu objet několik míst, aby na každém bylo zastaveno právě jednou, vrátit se zpět do výchozího bodu a přitom optimalizovat jistý faktor dopravy, obvykle ujetou vzdálenost nebo čas.

K formulaci okružní dopravní úlohy je třeba konečná, nenulová množina míst *M*, které je potřeba navštívit.

$$M = \{m_1, m_2, \dots., m_k\}$$

Dále jsou potřeba sazby (vzdálenost, čas nebo náklady) existující pro každé dva prvky z množiny *M*.

$$c_{ij}, \forall i, j \in \{1, .., k\}$$

Cílem je uspořádat prvky množiny M tak, aby se každý v množině objevil právě jednou a součet jednotlivých sazeb spojení byl co nejmenší. Nechť je výsledná posloupnost prvků označena indexy *i1, i2, …, ik*. Hodnota sazeb okruhu (z) se spočte jako

$$z = \sum_{j=1}^{k-1} c_{ij,ij+1} + c_{ik,i1}$$

(Brožová a Houška 2008)

Okružní dopravní úlohu lze formulovat i za pomocí teorie grafů. Grafem *G* rozumíme dvojici *V* a *E*, tedy dvojici uzlů (*V*) a hran (*E*). *G*=(*V*, *E*). Uzly grafu budou místa, která je třeba dopravně obstarat. Množina *V* by měla obsahovat alespoň tři prvky, aby úloha dávala smysl. Hrany grafu reprezentují cesty mezi jednotlivými místy. Každá hrana musí být ohodnocena nezápornou sazbou symbolizující faktor, který má být optimalizován, nejčastěji vzdálenost, čas nebo náklady. (Kučera 2009)

3.3.2.2 Typy okružních dopravních problémů

Okružní dopravní problémy mají různé charakteristiky, podle kterých se dělí. Dle jejich kategorie se následně přistupuje k jejich řešení.

Dělení podle způsobu procházení

- Problém obchodního cestujícího je úloha, ve které je cílem projet množinu míst (uzlů) tak, aby každé místo bylo navštíveno pouze jednou.
- Může však být cílem projít všechny cesty (hrany), takto formulovaná úloha se nazývá problém čínského listonoše.

(Brožová a Houška 2008)

Podle počtu okruhů

- Jednookruhové dopravní úlohy jsou nejjednodušší, neboť obsluha všech míst se má realizovat v jednom okruhu.
- Víceokruhové dopravní úlohy jsou takové, do kterých již vstupují různé časové, kapacitní či jiné omezující podmínky. Kvůli zavedení těchto omezení není možné dopravu realizovat v jednom dopravním okruhu a je nutné tvořit více okruhů.

(Šubrt, a kol 2015)

Podle sítě cest

- Problém s úplnou sítí cest je označení pro úlohy, ve kterých mezi každými dvěma místy existuje přímé spojení, tedy aby pro každou dvojici uzlů existovala hrana. Nechť je množina míst *M* konečná a má *n* prvků, aby měl graf úplnou síť musí existovat $\binom{n}{2}$ hran. Má-li graf úplnou síť, maticový zápis sazeb hran vytvoří čtvercovou symetrickou matici.

$$V = \{v_1, v_2, \dots., v_n\}$$

$$E = \left\{e_1, e_2, \dots., e_{\binom{n}{2}}\right\}$$

$$n \in N$$

- Problém s neúplnou sítí cest je úloha, ve které neexistuje mezi každými místy přímá cesta. Všechny uzly jsou sice spojeny, ale někdy cesta vede přes jeden další uzel. Pro počet hran tedy platí, že je menší než $\binom{n}{2}$ kdy n je počet prvků množiny uzlů.

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_{(k)}\} \; k < \binom{n}{2}$$

$$n, k \in N$$

(Získal a Havlíček 2010)

Obrázek 2: Druhy sítí grafu

Zdroj:(Získal a Havlíček 2010, s. 67.)

3.3.2.3 Metody řešení jednookruhových problémů a jejich klasifikace

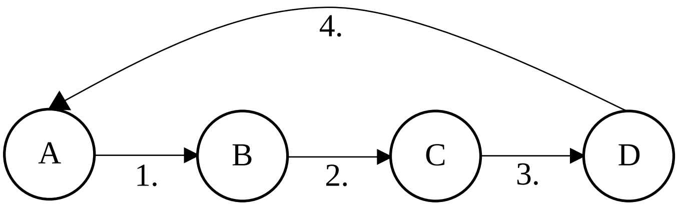
Pro řešení jednookruhových úloh se v praxi používají aproximační metody. Tyto metody nenacházejí přesné matematické optimum, ale pouze řešení, které se mu blíží. Výsledky aproximačních metod je možné považovat za optimální z ekonomického hlediska. Pro výpočet přesného matematického optima neexistuje žádný efektivní algoritmus kvůli složitosti výpočtu. S počtem míst, které je třeba dopravně obsloužit, exponenciálně roste počet omezujících podmínek, které musí být zohledňovány.

Vstupní data pro řešení okružních dopravních problémů bývají zadána maticí sazeb. Matice sazeb je čtvercová matice, ve které jsou rozvozová místa zachycena jak v řádku, tak ve sloupci a jednotlivým místům jsou přiřazeny sazby (vzdálenosti, čas či náklady). (Brožová a Houška 2008)

Aproximační metody pro řešení jednookruhových dopravních problémů bývají rozdělovány podle způsobu jakým tvoří řešení.

- **Metody vytvářející řešení** jsou metody, které z neuspořádané množiny prvků vytvoří uspořádanou a ta je považována za výsledek. Tyto metody tvoří výsledek od začátku z „ničeho“.
    - Metody se **sekvenčním** postupem tvoření řešení. Tyto metody postupují lokálně, tedy začínají v jednom místě, ze kterého plynule navazují na místo další a z něj na místo další, dokud nevytvoří celý okruh a poslední cestou bude trasa na výchozí místo. Výhodou tohoto typu metod je rychlost a výpočetní jednoduchost, ale jejich výsledky jsou obecně horší než při použití metod s paralelním postupem.

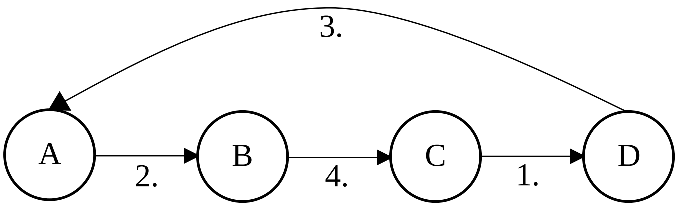
Obrázek 3: Sekvenční postup tvorby řešení



(Vlastní zpracování)

-
    - Metody s **paralelním** postupem tvoření řešení jsou metody postupující globálně. Průběžné řešení netvoří jednu cestu, ale více nespojitých cest, které se postupně spojují v jeden okruh.

Obrázek 4: Paralelní postup tvorby řešení



(Vlastní zpracování)

- **Metody zlepšující řešení** pracují na principu optimalizace již předem určeného okruhu. Původní okruh je zkonstruován buď metodou vytvářející řešení, nebo je vybrán náhodně.

(Kučera 2009)

3.3.2.4 Metoda nejbližšího souseda

Nejjednodušší metoda řešení jednookruhového dopravního problému se nazývá metoda nejbližšího souseda, jak název napovídá je založena na principu hledání nejkratší cesty z jednoho místa do druhého. Je to metoda vytvářející řešení sekvenčním způsobem. Na začátku postupu je určeno výchozí místo, ze kterého je hledána nejkratší (časově či nákladově nejúspornější – záleží, co matice sazeb reprezentuje) spojení do jiného místa. Z takto vybraného místa se opět nalezne nejkratší trasa, která ovšem předčasně neukončuje okruh. Posledním krokem je cesta vedoucí zpět do výchozího bodu.

Aby byla tato metoda vypovídající je třeba každé místo zvolit jako výchozí a nalézt jemu příslušný okruh. Pro *n* míst by tedy mělo být nalezeno *n* okruhů, i když se nevylučuje, že některé okruhy mohou být duplicitní. (Šubrt, a kol 2015)

Během řešení je používán takzvaný „hladový algoritmus", tedy princip při kterém je do řešení zařazována ta nejlepší sazba („sousto") z momentálního výběru tras a poté se k nim už nevrací. Problém však je, že takový postup na začátku vybírá nejlepší trasy, ale nijak nezohledňuje jaké na konci zbývají. Během posledních pár kroků již tato metoda nemá moc na výběr a trasy, které zbyly mohou být značně nevýhodné. Výhodou těchto algoritmů je jejich rychlost a snadné zpracování. (Kučera 2009)

Postup řešení v matici sazeb

1. Je dána čtvercová matice sazeb o rozměru n x n. V řádku je zvoleno výchozí místo M_1.
2. V řádku výchozího místa M_1 je nalezena nejvýhodnější sazba. Místo ve sloupci, kterému náleží tato nejnižší sazba (M_2) je zařazeno do okruhu za místo výchozí.
3. Je vyškrtnut celý řádek u M_1 a celý sloupec u M_2, tím již nebude možné vybrat trasu vedoucí z výchozího místa ani trasu do místa zahrnovaného do řešení. Je třeba také vyškrtnout sazbu, která by předčasně ukončovala okruh, tedy trasu z M_2 do M_1. M_2 je pro další krok považováno za výchozí místo.
4. Postup je opakován tak dlouho, dokud okruh nebude uzavřen. Poslední cesta tedy povede z M_n do M_1.

Tento postup se provede pro všechna z *n* míst, kdy je každé na začátku považováno za výchozí. Pokud je matice symetrická, tedy platí-li, že transponovaná matice sazeb je rovna původní matici, postup končí a je možné porovnat výhodnosti jednotlivých okruhů a vybrat ten nejlepší.

Pokud matice sazeb není symetrická, je třeba hledat trasu i „pozpátku", tedy hledat nejnižší sazby ve sloupcích. (Brožová a Houška 2008)

3.3.2.5 Vogelova aproximační metoda

Vogelova aproximační metoda (VAM) někdy bývá nazývána jako metoda ztrát a je využívanou metodou k řešení okružních dopravních problémů. Princip metody je již nastíněn v kapitole 3.3.1.2 Řešení jednostupňových dopravních úloh.

Metoda (VAM) pracuje s diferencemi, tedy rozdíly mezi nejvýhodnější a druhou nejvýhodnější sazbou. Tento rozdíl představuje ztrátu (proto také metoda ztrát), kterou by výsledný okruh utrpěl, kdyby nejnižší sazba nebyla zahrnuta do řešení.

Postup VAM

1. V matici sazeb jsou pro všechny řádky i sloupce kvantifikovány diference. Je-li matice sazeb symetrická, budou na začátku sloupcové a řádkové diference shodné a budou tedy existovat alespoň dvě nejvyšší. Je tedy vhodné řešení rozvětvit, aby byly obě varianty propočteny, i když je možné, že obě poukazují na stejný okruh pouze projetý v opačném pořadí.
2. Po stanovení nejvyšší diference je v příslušném řádku či sloupci nalezena nejnižší sazba c_{ij}. Příslušná cesta vedoucí z místa i do místa j je zařazena do řešení.
3. V dalším postupu se již neuvažuje (symbolicky bývá vyškrtnut) celý i-tý řádek, j-tý sloupec a sazba, která vede k uzavření okruhu dříve, než jsou do něj zařazena všechna místa.
4. Jsou přepočítány diference a postup se opakuje do té doby, kdy zbudou poslední dvě sazby, které se zahrnou do řešení. (Kučera 2009)

4 Praktická část

4.1 Představení podniku

Společnost Kratochvíl, spol. s.r.o. byla založena ve Slaném roku 1991. Původně se zabývala distribucí akumulátorů a kapesních svítilen. Tento sortiment byl záhy rozšířen o světelné zdroje a svítidla. V současné době se firma kromě velkoobchodu zaměřuje též na projektování a zhotovování průmyslového osvětlení. Mezi známější stavby, ve kterých je možné spatřit osvětlení realizované firmou Kratochvíl, patří jeden terminál Letiště Václava Havla nebo obchodní centrum Metropole Zličín. (Kratochvíl, spol. s.r.o. 2018)

Společnost provádí distribuci elektromateriálu dvojím způsobem. Na většinu přepravy si najímá externí firmy, ale zavážení pravidelných menších zákazníků provádí vlastním skříňovým vozem.

Trasa převzatá pro praktickou část se skládá z jedenácti zákazníků. Tyto zákazníky společnost Kratochvíl zásobuje pravidelně každé pondělí. Zbytek týdne se dodávky liší podle objednávek jiných zákazníků a jejich rozvoz se plánuje operativně s malým časovým předstihem. Pondělní rozvozový okruh má celkem 11 zastávek, kde je třeba vyložit zboží. Po přidání výchozího místa, kterým je sídlo společnosti Kratochvíl, existuje 12 míst, které je třeba zahrnout do matice sazeb, jsou to konkrétně adresy:

1. Slaný, Bienerova 1532 (sídlo společnosti Kratochvíl)
2. Kladno / Kročehlavy, Kosmonautů 2326
3. Čestlice, U Makra 130
4. Praha 13, Sluneční náměstí 2583/12
5. Beroun, U Archivu 1925
6. Rakovník, Luženská 2610
7. Kamenné Žehrovice, Karlovarská třída 390
8. Praha 12, Sofijské náměstí 3401
9. Dolní Břežany, Na Račanech
10. Jeneč, Průmyslová
11. Stochov, Osvobození 540
12. Čestlice, Lipová 281

4.2 Matice sazeb

Po zanesení všech adres do matice a vyhledání vzdáleností mezi jednotlivými místy byla vytvořena čtvercová symetrická matice sazeb o velikosti 12 x 12. Vzdálenosti byly určeny pomocí serveru *Mapy.cz* a jsou uvedeny v kilometrech.

Tabulka 2: Matice sazeb

Matice sazeb (Km)	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li
Slaný	-	14,4	50,4	31,6	37,3	33,9	16,7	41,3	47,8	23,3	15	52
Kladno	14,4	-	44,1	24,3	25,1	34,3	9,6	35	40	11,3	15,1	45,6
Čestlice u Makra	50,4	44,1	-	22,9	46,2	72,7	49,4	14,4	13,8	33,2	54,3	1,9
Praha 13	31,6	24,3	22,9	-	25,3	53,9	30,6	12,7	19,6	14,6	35,5	24,4
Beroun	37,3	25,1	46,2	25,3	-	39,5	25,3	37,1	38,7	22,1	30	49
Rakovník	33,9	34,3	72,7	53,9	39,5	-	24,7	64,4	69,4	41	21,4	75
Kamenné Žeh.	16,7	9,6	49,4	30,6	25,3	24,7	-	42,2	47,2	17	5,6	52,8
Praha 12	41,3	35	14,4	12,7	37,1	64,4	42,2	-	8,3	25,5	46,6	15,1
Dolní Břežany	47,8	40	13,8	19,6	38,7	69,4	47,2	8,3	-	29,3	51,7	12,5
Jeneč	23,3	11,3	33,2	14,6	22,1	41	17	25,5	29,3	-	22,8	35,9
Stochov	15	15,1	54,3	35,5	30	21,4	5,6	46,6	51,7	22,8	-	56
Čestlice Lipová	52	45,6	1,9	24,4	49	75	52,8	15,1	12,5	35,9	56	-

Společnost tento okruh realizuje následujícím způsobem:

(Slaný)→(14,4 km)→(Kladno)→(9,6 km)→(Kamenné Žehrovice)→(5,6 km)→(Stochov) →(21,4 km)→(Rakovník)→(39,5 km)→(Beroun)→(25,3 km)→(Praha 13) →(12,7 km) →(Praha 12)→(8,3 km)→(Dolní Břežany)→(12,5 km)→(Čestlice, Lipová) →(1,9 km) →(Čestlice, u Makra)→(33,2 km)→(Jeneč)→(23,3 km)→(Slaný)

Takto realizovaný okruh je 207,7 km dlouhý.

4.3 Metoda nejbližšího souseda

4.3.1 Vzorová trasa

Tabulka 3: Metoda nejbližšího souseda – Krok první

Krok 1.	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li
Slaný	-	14,4	~~50,4~~	~~31,6~~	~~37,3~~	~~33,9~~	~~16,7~~	~~41,3~~	~~47,8~~	~~23,3~~	~~15~~	~~52~~
Kladno	~~14,4~~	-	44,1	24,3	25,1	34,3	9,6	35	40	11,3	15,1	45,6
Čestlice u Makra	50,4	~~44,1~~	-	22,9	46,2	72,7	49,4	14,4	13,8	33,2	54,3	1,9
Praha 13	31,6	~~24,3~~	22,9	-	25,3	53,9	30,6	12,7	19,6	14,6	35,5	24,4
Beroun	37,3	~~25,1~~	46,2	25,3	-	39,5	25,3	37,1	38,7	22,1	30	49
Rakovník	33,9	~~34,3~~	72,7	53,9	39,5	-	24,7	64,4	69,4	41	21,4	75
Kamenné Žeh.	16,7	~~9,6~~	49,4	30,6	25,3	24,7	-	42,2	47,2	17	5,6	52,8
Praha 12	41,3	~~35~~	14,4	12,7	37,1	64,4	42,2	-	8,3	25,5	46,6	15,1
Dolní Břežany	47,8	~~40~~	13,8	19,6	38,7	69,4	47,2	8,3	-	29,3	51,7	12,5
Jeneč	23,3	~~11,3~~	33,2	14,6	22,1	41	17	25,5	29,3	-	22,8	35,9
Stochov	15	~~15,1~~	54,3	35,5	30	21,4	5,6	46,6	51,7	22,8	-	56
Čestlice Lipová	52	~~45,6~~	1,9	24,4	49	75	52,8	15,1	12,5	35,9	56	-

Pro vzorový příklad bylo vybráno výchozí místo Slaný. Ke komplexnímu řešení metodou nejbližšího souseda je však nutné postupně zvolit všechna místa v řádku matice jako výchozí. Je tedy hledána nejkratší cesta ze Slaného, kterou je trasa na Kladno. Musí být tedy vyškrtnuty všechny cesty vedoucí ze Slaného, všechny cesty vedoucí na Kladno a cesta z Kladna do Slaného, která by předčasně uzavírala okruh. V dalším kroku je postup stejný, ale jako výchozí místo je považováno Kladno. Tímto způsobem se průběžné řešení sekvenčně rozšiřuje. Konec řešení nastane v momentě, kdy vybraná trasa povede do Slaného, tedy do místa, které bylo v prvním kroku zvolené jako výchozí.

Průběžné řešení

(Slaný)→(14,4 km)→(Kladno)

Tabulka 4: Metoda nejbližšího souseda – Krok druhý

Krok 2.	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li
Slaný	-	14,4	~~50,4~~	~~31,6~~	~~37,3~~	~~33,9~~	~~16,7~~	~~41,3~~	~~47,8~~	~~23,3~~	~~15~~	~~52~~
Kladno	~~14,4~~	-	~~44,1~~	~~24,3~~	~~25,1~~	~~34,3~~	**9,6**	~~35~~	~~40~~	~~11,3~~	~~15,1~~	~~45,6~~
Čestlice u Makra	50,4	~~44,1~~	-	22,9	46,2	72,7	~~49,4~~	14,4	13,8	33,2	54,3	1,9
Praha 13	31,6	~~24,3~~	22,9	-	25,3	53,9	~~30,6~~	12,7	19,6	14,6	35,5	24,4
Beroun	37,3	~~25,1~~	46,2	25,3	-	39,5	~~25,3~~	37,1	38,7	22,1	30	49
Rakovník	33,9	~~34,3~~	72,7	53,9	39,5	-	~~24,7~~	64,4	69,4	41	21,4	75
Kamenné Žeh.	~~16,7~~	~~9,6~~	49,4	30,6	25,3	24,7	-	42,2	47,2	17	5,6	52,8
Praha 12	41,3	~~35~~	14,4	12,7	37,1	64,4	~~42,2~~	-	8,3	25,5	46,6	15,1
Dolní Břežany	47,8	~~40~~	13,8	19,6	38,7	69,4	~~47,2~~	8,3	-	29,3	51,7	12,5
Jeneč	23,3	~~11,3~~	33,2	14,6	22,1	41	~~17~~	25,5	29,3	-	22,8	35,9
Stochov	15	~~15,1~~	54,3	35,5	30	21,4	~~5,6~~	46,6	51,7	22,8	-	56
Čestlice Lipová	52	~~45,6~~	1,9	24,4	49	75	~~52,8~~	15,1	12,5	35,9	56	-

Průběžné řešení

(Slaný)→(14,4 km)→(Kladno)→(9,6 km)→(Kamenné Žehrovice)

Tabulka 5: Metoda nejbližšího souseda – Krok třetí

Krok 3.	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li
Slaný	-	14,4	~~50,4~~	~~31,6~~	~~37,3~~	~~33,9~~	~~16,7~~	~~41,3~~	~~47,8~~	~~23,3~~	~~15~~	~~52~~
Kladno	~~14,4~~	-	~~44,1~~	~~24,3~~	~~25,1~~	~~34,3~~	9,6	~~35~~	~~40~~	~~11,3~~	~~15,1~~	~~45,6~~
Čestlice u Makra	50,4	~~44,1~~	-	22,9	46,2	72,7	~~49,4~~	14,4	13,8	33,2	~~54,3~~	1,9
Praha 13	31,6	~~24,3~~	22,9	-	25,3	53,9	~~30,6~~	12,7	19,6	14,6	~~35,5~~	24,4
Beroun	37,3	~~25,1~~	46,2	25,3	-	39,5	~~25,3~~	37,1	38,7	22,1	~~30~~	49
Rakovník	33,9	~~34,3~~	72,7	53,9	39,5	-	~~24,7~~	64,4	69,4	41	~~21,4~~	75
Kamenné Žeh.	~~16,7~~	~~9,6~~	~~49,4~~	~~30,6~~	~~25,3~~	~~24,7~~	-	~~42,2~~	~~47,2~~	~~17~~	**5,6**	~~52,8~~
Praha 12	41,3	~~35~~	14,4	12,7	37,1	64,4	~~42,2~~	-	8,3	25,5	~~46,6~~	15,1
Dolní Břežany	47,8	~~40~~	13,8	19,6	38,7	69,4	~~47,2~~	8,3	-	29,3	~~51,7~~	12,5
Jeneč	23,3	~~11,3~~	33,2	14,6	22,1	41	~~17~~	25,5	29,3	-	~~22,8~~	35,9
Stochov	~~15~~	~~15,1~~	54,3	35,5	30	21,4	~~5,6~~	46,6	51,7	22,8	-	56
Čestlice Lipová	52	~~45,6~~	1,9	24,4	49	75	~~52,8~~	15,1	12,5	35,9	~~56~~	-

Průběžné řešení

(Slaný)→(14,4 km)→(Kladno)→(9,6 km)→(Kamenné Žehrovice)→(5,6 km)→(Stochov)

Tabulka 6: Metoda nejbližšího souseda – Krok jedenáctý

Krok 11.	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li
Slaný	-	14,4	~~50,4~~	~~31,6~~	~~37,3~~	~~33,9~~	~~16,7~~	~~41,3~~	~~47,8~~	~~23,3~~	~~15~~	~~52~~
Kladno	~~14,4~~	-	~~44,1~~	~~24,3~~	~~25,1~~	~~34,3~~	9,6	~~35~~	~~40~~	~~11,3~~	~~15,1~~	~~45,6~~
Čestlice u Makra	**50,4**	~~44,1~~	-	~~22,9~~	~~46,2~~	~~72,7~~	~~49,4~~	~~14,4~~	~~13,8~~	~~33,2~~	~~54,3~~	~~1,9~~
Praha 13	~~31,6~~	~~24,3~~	~~22,9~~	-	~~25,3~~	~~53,9~~	~~30,6~~	12,7	~~19,6~~	~~14,6~~	~~35,5~~	~~24,4~~
Beroun	~~37,3~~	~~25,1~~	~~46,2~~	~~25,3~~	-	~~39,5~~	~~25,3~~	~~37,1~~	~~38,7~~	22,1	~~30~~	~~49~~
Rakovník	~~33,9~~	~~34,3~~	~~72,7~~	~~53,9~~	39,5	-	~~24,7~~	~~64,4~~	~~69,4~~	~~41~~	~~21,4~~	~~75~~
Kamenné Žeh.	~~16,7~~	~~9,6~~	~~49,4~~	~~30,6~~	~~25,3~~	~~24,7~~	-	~~42,2~~	~~47,2~~	~~17~~	5,6	~~52,8~~
Praha 12	~~41,3~~	~~35~~	~~14,4~~	~~12,7~~	~~37,1~~	~~64,4~~	~~42,2~~	-	8,3	~~25,5~~	~~46,6~~	~~15,1~~
Dolní Břežany	~~47,8~~	~~40~~	~~13,8~~	~~19,6~~	~~38,7~~	~~69,4~~	~~47,2~~	~~8,3~~	-	~~29,3~~	~~51,7~~	12,5
Jeneč	~~23,3~~	~~11,3~~	~~33,2~~	14,6	~~22,1~~	~~41~~	~~17~~	~~25,5~~	~~29,3~~	-	~~22,8~~	~~35,9~~
Stochov	~~15~~	~~15,1~~	~~54,3~~	~~35,5~~	~~30~~	21,4	~~5,6~~	~~46,6~~	~~51,7~~	~~22,8~~	-	~~56~~
Čestlice Lipová	~~52~~	~~45,6~~	**1,9**	~~24,4~~	~~49~~	~~75~~	~~52,8~~	~~15,1~~	~~12,5~~	~~35,9~~	~~56~~	-

Finální řešení

(Slaný)→(14,4 km)→(Kladno)→(9,6 km)→(Kamenné Žehrovice)→(5,6 km)→(Stochov) →(21,4 km)→(Rakovník)→(39,5 km)→(Beroun)→(22,1 km)→(Jeneč)→(14,6 km) →(Praha 13)→(12,7 km)→(Praha 12)→(8,3 km)→(Dolní Břežany)→(12,5 km) →(Čestlice, Lipová)→(1,9 km)→(Čestlice, U Makra)→(50,4 km)→(Slaný)

4.3.2 Další výsledky

Po zvolení každého místa jako výchozího, z použití metody nejbližšího souseda vyplynulo celkem 12 možných variant okruhů. Dvě varianty však byly duplicitní, a proto jsou uvedeny jen jednou. Stejná řešení nabídla výchozí místa: Čestlice u Makra a Dolní Břežany, stejně jako Rakovník a Stochov. Nejkratší okruh zjištěný metodou nejbližšího souseda je dlouhý 206,7 km a nejdelší 242,8 km.

Tabulka 7: Metoda nejbližšího souseda – Všechny výsledky

Výchozí místo: Slaný	
Délka okruhu: 213 km	Slaný→ Kladno→ Kamenné Žeh.→ Stochov→ Rakovník→ Beroun→ Jeneč→ Praha 13→ Praha 12→ Dolní Břežany→ Čestlice Lipová→ Čestlice u Makra
Výchozí místo: Kladno	
Délka okruhu: 223,5 km	Slaný→ Jeneč→ Praha 13→ Praha 12→ Dolní Břežany→ Čestlice Lipová→ Čestlice u Makra→ Beroun→ Rakovník→ Kladno→ Kamenné Žeh.→ Stochov
Výchozí místo: Čestlice u Makra + Dolní Břežany	
Délka okruhu: 211,1 km	Slaný→ Rakovník→ Beroun→ Čestlice u Makra→ Čestlice Lipová→ Dolní Břežany→ Praha 12→ Praha 13→ Jeneč→ Kladno→ Kamenné Žeh.→ Stochov
Výchozí místo: Praha 13	
Délka okruhu: 208,8 km	Slaný→ Rakovník→ Beroun→ Praha 13→ Praha 12→ Dolní Břežany→ Čestlice Lipová→ Čestlice u Makra→ Jeneč→ Kladno→ Kamenné Žeh.→ Stochov
Výchozí místo: Beroun	
Délka okruhu: 242,8 km	Slaný→ Praha 13→ Praha 12→ Dolní Břežany→ Čestlice Lipová→ Čestlice u Makra→ Rakovník→ Beroun→ Jeneč→ Kladno→ Kamenné Žeh.→ Stochov
Výchozí místo: Rakovník + Stochov	
Délka okruhu: 215,3 km	Slaný→ Rakovník→ Stochov→ Kamenné Žeh.→ Kladno→ Jeneč→ Praha 13→ Praha 12→ Dolní Břežany→ Čestlice Lipová→ Čestlice u Makra→ Beroun
Výchozí místo: Kamenné Žeh.	
Délka okruhu: 206,7 km	Slaný→ Kladno→ Jeneč→ Praha 13→ Praha 12→ Dolní Břežany→ Čestlice Lipová→ Čestlice u Makra→ Beroun→ Rakovník→ Kamenné Žeh.→ Stochov
Výchozí místo: Praha 12	
Délka okruhu: 212,2 km	Slaný→ Rakovník→ Beroun→ Praha 12→ Dolní Břežany→ Čestlice Lipová→ Čestlice u Makra→ Praha 13→ Jeneč→ Kladno→ Kamenné Žeh.→ Stochov
Výchozí místo: Jeneč	
Délka okruhu: 235,2 km	Slaný→ Praha 13→ Praha 12→ Dolní Břežany→ Čestlice Lipová→ Čestlice u Makra→ Beroun→ Rakovník→ Jeneč→ Kladno→ Kamenné Žeh.→ Stochov
Výchozí místo: Čestlice Lipová	
Délka okruhu: 215,2 km	Slaný→ Rakovník→ Beroun→ Čestlice Lipová→ Čestlice u Makra→ Dolní Břežany→ Praha 12→ Praha 13→ Jeneč→ Kladno→ Kamenné Žeh.→ Stochov

4.4 Vogelova aproximační metoda

4.4.1 Vzorová Trasa

Tabulka 8: Vogelova metoda – Krok první

Krok 1.	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li	Dif
Slaný	-	14,4	50,4	31,6	37,3	33,9	16,7	41,3	47,8	23,3	15	~~52~~	*0,6*
Kladno	14,4	-	44,1	24,3	25,1	34,3	9,6	35	40	11,3	15,1	~~45,6~~	*1,7*
Čestlice u Makra	~~50,4~~	~~44,1~~	-	~~22,9~~	~~46,2~~	~~72,7~~	~~49,4~~	~~14,4~~	~~13,8~~	~~33,2~~	~~54,3~~	1,9	*12*
Praha 13	31,6	24,3	22,9	-	25,3	53,9	30,6	12,7	19,6	14,6	35,5	~~24,4~~	*1,9*
Beroun	37,3	25,1	46,2	25,3	-	39,5	25,3	37,1	38,7	22,1	30	~~49~~	*3*
Rakovník	33,9	34,3	72,7	53,9	39,5	-	24,7	64,4	69,4	41	21,4	~~75~~	*3,3*
Kamenné Žeh.	16,7	9,6	49,4	30,6	25,3	24,7	-	42,2	47,2	17	5,6	~~52,8~~	*4*
Praha 12	41,3	35	14,4	12,7	37,1	64,4	42,2	-	8,3	25,5	46,6	~~15,1~~	*4,4*
Dolní Břežany	47,8	40	13,8	19,6	38,7	69,4	47,2	8,3	-	29,3	51,7	~~12,5~~	*4,2*
Jeneč	23,3	11,3	33,2	14,6	22,1	41	17	25,5	29,3	-	22,8	~~35,9~~	*3,3*
Stochov	15	15,1	54,3	35,5	30	21,4	5,6	46,6	51,7	22,8	-	~~56~~	*9,4*
Čestlice Lipová	52	45,6	~~1,9~~	24,4	49	75	52,8	15,1	12,5	35,9	56	-	*11*
Dif	*0,6*	*1,7*	*12*	*1,9*	*3*	*3,3*	*4*	*4,4*	*4,2*	*3,3*	*9,4*	*11*	

Matice sazeb je před začátkem aproximace symetrická což znamená, že transponovaná matice sazeb je stejná jako původní matice sazeb. Z této vlastnosti matice vyplývá, že i diference u stejných měst budou shodné. Na začátku Vogelovy aproximační metody je třeba zvolit trasu s nejvyšší diferencí. Tyto nejvyšší diference budou vždy alespoň dvě, a proto je třeba obě varianty propočítat. Je sice možné, že vyjde stejná trasa pouze projetá opačným směrem, není to však pravidlem. Zde byla vybrána diference ve sloupci „*Čestlice, Lipová*“.

Trasa s nejnižší sazbou je cesta z „Čestlice, u Makra“ do „Čestlice, Lipová“. Poté co je zvolena tato trasa, musí být z matice vyškrtnuty všechny ostatní cesty z „Čestlice, u Makra“ a všechny cesty do „Čestlice, Lipová“. Dále je také nutné vyřadit cestu, která by předčasně uzavírala okruh, tedy cestu z „Čestlice, Lipová“ do „Čestlice, u Makra“.

Průběžné řešení

(Čestlice, u Makra)→(1,9 km)→(Čestlice, Lipová)

Tabulka 9: Vogelova metoda – Krok druhý

Krok 2.	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li	Dif
Slaný	-	14,4	50,4	31,6	37,3	33,9	16,7	41,3	47,8	23,3	~~15~~	~~52~~	*0,6*
Kladno	14,4	-	44,1	24,3	25,1	34,3	9,6	35	40	11,3	~~15,1~~	~~45,6~~	*1,7*
Čestlice u Makra	~~50,4~~	~~44,1~~	-	~~22,9~~	~~46,2~~	~~72,7~~	~~49,4~~	~~14,4~~	~~13,8~~	~~33,2~~	~~54,3~~	1,9	
Praha 13	31,6	24,3	22,9	-	25,3	53,9	30,6	12,7	19,6	14,6	~~35,5~~	~~24,4~~	*1,9*
Beroun	37,3	25,1	46,2	25,3	-	39,5	25,3	37,1	38,7	22,1	~~30~~	~~49~~	*3*
Rakovník	33,9	34,3	72,7	53,9	39,5	-	24,7	64,4	69,4	41	~~21,4~~	~~75~~	*3,3*
Kamenné Žeh.	~~16,7~~	~~9,6~~	~~49,4~~	~~30,6~~	~~25,3~~	~~24,7~~	-	~~42,2~~	~~47,2~~	~~17~~	**5,6**	~~52,8~~	*4*
Praha 12	41,3	35	14,4	12,7	37,1	64,4	42,2	-	8,3	25,5	~~46,6~~	~~15,1~~	*4,4*
Dolní Břežany	47,8	40	13,8	19,6	38,7	69,4	47,2	8,3	-	29,3	~~51,7~~	~~12,5~~	*5,5*
Jeneč	23,3	11,3	33,2	14,6	22,1	41	17	25,5	29,3	-	~~22,8~~	~~35,9~~	*3,3*
Stochov	15	15,1	54,3	35,5	30	21,4	~~5,6~~	46,6	51,7	22,8	-	~~56~~	*9,4*
Čestlice Lipová	52	45,6	~~1,9~~	24,4	49	75	52,8	15,1	12,5	35,9	~~56~~	-	*2,6*
Dif	*0,6*	*1,7*	*0,6*	*1,9*	*3*	*3,3*	*4*	*4,4*	*4,2*	*3,3*	*9,4*		

Po vyškrtnutí tras z prvního kroku je třeba přepočítat diference a znovu hledat tu s nejvyšší hodnotou. Jsou zde opět dvě stejně velké diference a je třeba, aby se zde řešení větvilo na dvě varianty. V každé bude vybrána jiná diference. V tomto vzorovém příkladu byla vybrána diference ze sloupce „*Stochov*" a trasa s nejnižší sazbou vede z Kamenných Žehrovic do Stochova. Jak je vidět v průběžném řešení, začaly se tvořit dva různé okruhy, protože Vogelova aproximační metoda patří mezi metody tvořící řešení paralelně. Tyto trasy se však postupem času spojí v jeden okruh. Je však nutné na tuto skutečnost pamatovat při vyškrtávání tras, které předčasně uzavírají okruh.

Musí tedy být vyškrtnuty všechny trasy z Kamenných Žehrovic, trasy do Stochova a navíc trasa ze Stochova do Kamenných Žehrovic.

Průběžné řešení

(Čestlice, u Makra)→(1,9 km)→(Čestlice, Lipová)

(Kamenné Žehrovice)→(5,6 km)→(Stochov)

Tabulka 10: Vogelova metoda – Krok třetí

Krok 3.	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li	Dif
Slaný	-	14,4	50,4	31,6	37,3	~~33,9~~	16,7	41,3	47,8	23,3	~~15~~	~~52~~	*2,3*
Kladno	14,4	-	44,1	24,3	25,1	~~34,3~~	9,6	35	40	11,3	~~15,1~~	~~45,6~~	*1,7*
Čestlice u Makra	~~50,4~~	~~44,1~~	-	~~22,9~~	~~46,2~~	~~72,7~~	~~49,4~~	~~14,4~~	~~13,8~~	~~33,2~~	~~54,3~~	1,9	
Praha 13	31,6	24,3	22,9	-	25,3	~~53,9~~	30,6	12,7	19,6	14,6	~~35,5~~	~~24,4~~	*1,9*
Beroun	37,3	25,1	46,2	25,3	-	~~39,5~~	25,3	37,1	38,7	22,1	~~30~~	~~49~~	*3*
Rakovník	33,9	34,3	72,7	53,9	39,5	-	~~24,7~~	64,4	69,4	41	~~21,4~~	~~75~~	*0,4*
Kamenné Žeh.	~~16,7~~	~~9,6~~	~~49,4~~	~~30,6~~	~~25,3~~	~~24,7~~	-	~~42,2~~	~~47,2~~	~~17~~	5,6	~~52,8~~	
Praha 12	41,3	35	14,4	12,7	37,1	~~64,4~~	42,2	-	8,3	25,5	~~46,6~~	~~15,1~~	*4,4*
Dolní Břežany	47,8	40	13,8	19,6	38,7	~~69,4~~	47,2	8,3	-	29,3	~~51,7~~	~~12,5~~	*5,5*
Jeneč	23,3	11,3	33,2	14,6	22,1	~~41~~	17	25,5	29,3	-	~~22,8~~	~~35,9~~	*3,3*
Stochov	~~15~~	~~15,1~~	~~54,3~~	~~35,5~~	~~30~~	**21,4**	~~5,6~~	~~46,6~~	~~51,7~~	~~22,8~~	-	~~56~~	*0,1*
Čestlice Lipová	52	45,6	~~1,9~~	24,4	49	~~75~~	52,8	15,1	12,5	35,9	~~56~~	-	*2,6*
Dif	*0,6*	*3,1*	*0,6*	*1,9*	*3*	*12,5*	*7,1*	*4,4*	*4,2*	*3,3*			

Třetí krok vzorového příkladu má pouze jednu nejvyšší diferenci. Proto je do průběžného řešení vybrána trasa s nejnižší sazbou, tedy cesta ze Stochova do Rakovníka a jsou vyškrtnuty všechny trasy ze Stochova, všechny trasy do Rakovníka a navíc i cesta z Rakovníka do Kamenných Žehrovic, neboť ta předčasně uzavírá jeden ze dvou postupně tvořících se okruhů.

Průběžné řešení

(Čestlice, u Makra)→(1,9 km)→(Čestlice, Lipová)

(Kamenné Žehrovice)→(5,6 km)→(Stochov)→(21,4 km)→(Rakovník)

Tabulka 11: Vogelova metoda – Krok čtvrtý

Krok 4.	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li	Dif
Slaný	-	~~14,4~~	50,4	31,6	37,3	~~33,9~~	16,7	41,3	47,8	23,3	~~15~~	~~52~~	*2,3*
Kladno	**14,4**	-	~~44,1~~	~~24,3~~	~~25,1~~	~~34,3~~	~~9,6~~	~~35~~	~~40~~	~~11,3~~	~~15,1~~	~~45,6~~	*1,7*
Čestlice u Makra	~~50,4~~	~~44,1~~	-	~~22,9~~	~~46,2~~	~~72,7~~	~~49,4~~	~~14,4~~	~~13,8~~	~~33,2~~	~~54,3~~	1,9	
Praha 13	~~31,6~~	24,3	22,9	-	25,3	~~53,9~~	30,6	12,7	19,6	14,6	~~35,5~~	~~24,4~~	*1,9*
Beroun	~~37,3~~	25,1	46,2	25,3	-	~~39,5~~	25,3	37,1	38,7	22,1	~~30~~	~~49~~	*3*
Rakovník	~~33,9~~	34,3	72,7	53,9	39,5	-	~~24,7~~	64,4	69,4	41	~~21,4~~	~~75~~	*0,4*
Kamenné Žeh.	~~16,7~~	~~9,6~~	~~49,4~~	~~30,6~~	~~25,3~~	~~24,7~~	-	~~42,2~~	~~47,2~~	~~17~~	5,6	~~52,8~~	
Praha 12	~~41,3~~	35	14,4	12,7	37,1	~~64,4~~	42,2	-	8,3	25,5	~~46,6~~	~~15,1~~	*4,4*
Dolní Břežany	~~47,8~~	40	13,8	19,6	38,7	~~69,4~~	47,2	8,3	-	29,3	~~51,7~~	~~12,5~~	*5,5*
Jeneč	~~23,3~~	11,3	33,2	14,6	22,1	~~41~~	17	25,5	29,3	-	~~22,8~~	~~35,9~~	*3,3*
Stochov	~~15~~	~~15,1~~	~~54,3~~	~~35,5~~	~~30~~	21,4	~~5,6~~	~~46,6~~	~~51,7~~	~~22,8~~	-	~~56~~	
Čestlice Lipová	~~52~~	45,6	~~1,9~~	24,4	49	~~75~~	52,8	15,1	12,5	35,9	~~56~~	-	*2,6*
Dif	*8,9*	*3,1*	*0,6*	*1,9*	*3*		*7,1*	*4,4*	*4,2*	*3,3*			

Ve čtvrtém kroku se objeví pouze jedna nejvyšší diference poukazující na cestu, kterou je trasa z Kladna do Slaného. Musí se zakázat všechny cesty vedoucí z Kladna a všechny vedoucí do Slaného. Trasa „Kladno – Slaný“ tvoří již třetí nespojitý okruh a je nutné vyškrtnout cestu, která by jej předčasně uzavírala, tedy „Slaný – Kladno“.

Průběžné řešení

(Čestlice, u Makra)→(1,9 km)→(Čestlice, Lipová)

(Kamenné Žehrovice)→(5,6 km)→ (Stochov)→(21,4 km)→(Rakovník)

(Kladno)→(14,4 km)→(Slaný)

V pátém až desátém kroku je jen jedna nejvyšší diference. Jsou tedy vybrány příslušné trasy a ty, co by uzavíraly předčasně okruh, jsou vyškrtnuty. V šestém kroku se výběrem cesty ze Slaného do Kamenných Žehrovic spojily dva okruhy, a proto trasa předčasně uzavírající okruh vede z Rakovníka do Jenče.

Tabulka 12: Vogelova metoda – Krok pátý

Krok 5.	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li	Dif
Slaný	-	~~14,4~~	50,4	31,6	37,3	~~33,9~~	16,7	41,3	47,8	~~23,3~~	~~15~~	~~52~~	*6,6*
Kladno	14,4	-	~~44,1~~	~~24,3~~	~~25,1~~	~~34,3~~	~~9,6~~	~~35~~	~~40~~	~~11,3~~	~~15,1~~	~~45,6~~	
Čestlice u Makra	~~50,4~~	~~44,1~~	-	~~22,9~~	~~46,2~~	~~72,7~~	~~49,4~~	~~14,4~~	~~13,8~~	~~33,2~~	~~54,3~~	1,9	
Praha 13	~~31,6~~	~~24,3~~	22,9	-	25,3	~~53,9~~	30,6	12,7	19,6	14,6	~~35,5~~	~~24,4~~	*1,9*
Beroun	~~37,3~~	~~25,1~~	46,2	25,3	-	~~39,5~~	25,3	37,1	38,7	22,1	~~30~~	~~49~~	*3*
Rakovník	~~33,9~~	~~34,3~~	72,7	53,9	39,5	-	~~24,7~~	64,4	69,4	41	~~21,4~~	~~75~~	*5,2*
Kamenné Žeh.	~~16,7~~	~~9,6~~	~~49,4~~	~~30,6~~	~~25,3~~	~~24,7~~	-	~~42,2~~	~~47,2~~	~~17~~	5,6	~~52,8~~	
Praha 12	~~41,3~~	~~35~~	14,4	12,7	37,1	~~64,4~~	42,2	-	8,3	25,5	~~46,6~~	~~15,1~~	*4,4*
Dolní Břežany	~~47,8~~	~~40~~	13,8	19,6	38,7	~~69,4~~	47,2	8,3	-	29,3	~~51,7~~	~~12,5~~	*5,5*
Jeneč	~~23,3~~	**11,3**	~~33,2~~	~~14,6~~	~~22,1~~	~~41~~	~~17~~	~~25,5~~	~~29,3~~	-	~~22,8~~	~~35,9~~	*3,3*
Stochov	~~15~~	~~15,1~~	~~54,3~~	~~35,5~~	~~30~~	21,4	~~5,6~~	~~46,6~~	~~51,7~~	~~22,8~~	-	~~56~~	
Čestlice Lipová	~~52~~	~~45,6~~	~~1,9~~	24,4	49	~~75~~	52,8	15,1	12,5	35,9	~~56~~	-	*2,6*
Dif		*13*	*0,6*	*1,9*	*3,2*		*0,3*	*4,4*	*4,2*	*7,5*			

Tabulka 13: Vogelova metoda – Krok šestý

Krok 6.	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li	Dif
Slaný	-	~~14,4~~	~~50,4~~	~~31,6~~	~~37,3~~	~~33,9~~	**16,7**	~~41,3~~	~~47,8~~	~~23,3~~	~~15~~	~~52~~	*14,9*
Kladno	14,4	-	~~44,1~~	~~24,3~~	~~25,1~~	~~34,3~~	~~9,6~~	~~35~~	~~40~~	~~11,3~~	~~15,1~~	~~45,6~~	
Čestlice u Makra	~~50,4~~	~~44,1~~	-	~~22,9~~	~~46,2~~	~~72,7~~	~~49,4~~	~~14,4~~	~~13,8~~	~~33,2~~	~~54,3~~	1,9	
Praha 13	~~31,6~~	~~24,3~~	22,9	-	25,3	~~53,9~~	~~30,6~~	12,7	19,6	14,6	~~35,5~~	~~24,4~~	*1,9*
Beroun	~~37,3~~	~~25,1~~	46,2	25,3	-	~~39,5~~	~~25,3~~	37,1	38,7	22,1	~~30~~	~~49~~	*3,2*
Rakovník	~~33,9~~	~~34,3~~	72,7	53,9	39,5	-	~~24,7~~	64,4	69,4	~~41~~	~~21,4~~	~~75~~	*1,5*
Kamenné Žeh.	~~16,7~~	~~9,6~~	~~49,4~~	~~30,6~~	~~25,3~~	~~24,7~~	-	~~42,2~~	~~47,2~~	~~17~~	5,6	~~52,8~~	
Praha 12	~~41,3~~	~~35~~	14,4	12,7	37,1	~~64,4~~	~~42,2~~	-	8,3	25,5	~~46,6~~	~~15,1~~	*4,4*
Dolní Břežany	~~47,8~~	~~40~~	13,8	19,6	38,7	~~69,4~~	~~47,2~~	8,3	-	29,3	~~51,7~~	~~12,5~~	*5,5*
Jeneč	~~23,3~~	11,3	~~33,2~~	~~14,6~~	~~22,1~~	~~41~~	~~17~~	~~25,5~~	~~29,3~~	-	~~22,8~~	~~35,9~~	
Stochov	~~15~~	~~15,1~~	~~54,3~~	~~35,5~~	~~30~~	21,4	~~5,6~~	~~46,6~~	~~51,7~~	~~22,8~~	-	~~56~~	
Čestlice Lipová	~~52~~	~~45,6~~	~~1,9~~	24,4	49	~~75~~	~~52,8~~	15,1	12,5	35,9	~~56~~	-	*2,6*
Dif			*0,6*	*6,9*	*11,8*		*8,6*	*4,4*	*4,2*	*7,5*			

Průběžné řešení

(Čestlice, u Makra)→(1,9 km)→(Čestlice, Lipová)

(Jeneč)→(11,3 km)→(Kladno)→(14,4 km)→(Slaný)→(16,7 km)→(Kamenné Žehrovice)→(5,6 km)→(Stochov)→(21,4 km)→(Rakovník)

Tabulka 14: Vogelova metoda – Krok sedmý

Krok 7.	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li	Dif
Slaný	-	~~14,4~~	~~50,4~~	~~31,6~~	~~37,3~~	~~33,9~~	16,7	~~41,3~~	~~47,8~~	~~23,3~~	~~15~~	~~52~~	
Kladno	14,4	-	~~44,1~~	~~24,3~~	~~25,1~~	~~34,3~~	~~9,6~~	~~35~~	~~40~~	~~11,3~~	~~15,1~~	~~45,6~~	
Čestlice u Makra	~~50,4~~	~~44,1~~	-	~~22,9~~	~~46,2~~	~~72,7~~	~~49,4~~	~~14,4~~	~~13,8~~	~~33,2~~	~~54,3~~	1,9	
Praha 13	~~31,6~~	~~24,3~~	22,9	-	~~25,3~~	~~53,9~~	~~30,6~~	12,7	19,6	14,6	~~35,5~~	~~24,4~~	1,9
Beroun	~~37,3~~	~~25,1~~	46,2	25,3	-	~~39,5~~	~~25,3~~	37,1	38,7	~~22,1~~	~~30~~	~~49~~	3,2
Rakovník	~~33,9~~	~~34,3~~	~~72,7~~	~~53,9~~	**39,5**	-	~~24,7~~	~~64,4~~	~~69,4~~	~~41~~	~~21,4~~	~~75~~	14,4
Kamenné Žeh.	~~16,7~~	~~9,6~~	~~49,4~~	~~30,6~~	~~25,3~~	~~24,7~~	-	~~42,2~~	~~47,2~~	~~17~~	5,6	~~52,8~~	
Praha 12	~~41,3~~	~~35~~	14,4	12,7	~~37,1~~	~~64,4~~	~~42,2~~	-	8,3	25,5	~~46,6~~	~~15,1~~	4,4
Dolní Břežany	~~47,8~~	~~40~~	13,8	19,6	~~38,7~~	~~69,4~~	~~47,2~~	8,3	-	29,3	~~51,7~~	~~12,5~~	5,5
Jeneč	~~23,3~~	11,3	~~33,2~~	~~14,6~~	~~22,1~~	~~41~~	~~17~~	~~25,5~~	~~29,3~~	-	~~22,8~~	~~35,9~~	
Stochov	~~15~~	~~15,1~~	~~54,3~~	~~35,5~~	~~30~~	21,4	~~5,6~~	~~46,6~~	~~51,7~~	~~22,8~~	-	~~56~~	
Čestlice Lipová	~~52~~	~~45,6~~	~~1,9~~	24,4	~~49~~	~~75~~	~~52,8~~	15,1	12,5	35,9	~~56~~	-	2,6
Dif			0,6	6,9	11,8			4,4	4,2	7,5			

Tabulka 15: Vogelova metoda – Krok osmý

Krok 8.	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li	Dif
Slaný	-	~~14,4~~	~~50,4~~	~~31,6~~	~~37,3~~	~~33,9~~	16,7	~~41,3~~	~~47,8~~	~~23,3~~	~~15~~	~~52~~	
Kladno	14,4	-	~~44,1~~	~~24,3~~	~~25,1~~	~~34,3~~	~~9,6~~	~~35~~	~~40~~	~~11,3~~	~~15,1~~	~~45,6~~	
Čestlice u Makra	~~50,4~~	~~44,1~~	-	~~22,9~~	~~46,2~~	~~72,7~~	~~49,4~~	~~14,4~~	~~13,8~~	~~33,2~~	~~54,3~~	1,9	
Praha 13	~~31,6~~	~~24,3~~	22,9	-	~~25,3~~	~~53,9~~	~~30,6~~	12,7	19,6	~~14,6~~	~~35,5~~	~~24,4~~	1,9
Beroun	~~37,3~~	~~25,1~~	~~46,2~~	**25,3**	-	~~39,5~~	~~25,3~~	~~37,1~~	~~38,7~~	~~22,1~~	~~30~~	~~49~~	11,8
Rakovník	~~33,9~~	~~34,3~~	~~72,7~~	~~53,9~~	39,5	-	~~24,7~~	~~64,4~~	~~69,4~~	~~41~~	~~21,4~~	~~75~~	
Kamenné Žeh.	~~16,7~~	~~9,6~~	~~49,4~~	~~30,6~~	~~25,3~~	~~24,7~~	-	~~42,2~~	~~47,2~~	~~17~~	5,6	~~52,8~~	
Praha 12	~~41,3~~	~~35~~	14,4	~~12,7~~	~~37,1~~	~~64,4~~	~~42,2~~	-	8,3	25,5	~~46,6~~	~~15,1~~	4,4
Dolní Břežany	~~47,8~~	~~40~~	13,8	~~19,6~~	~~38,7~~	~~69,4~~	~~47,2~~	8,3	-	29,3	~~51,7~~	~~12,5~~	5,5
Jeneč	~~23,3~~	11,3	~~33,2~~	~~14,6~~	~~22,1~~	~~41~~	~~17~~	~~25,5~~	~~29,3~~	-	~~22,8~~	~~35,9~~	
Stochov	~~15~~	~~15,1~~	~~54,3~~	~~35,5~~	~~30~~	21,4	~~5,6~~	~~46,6~~	~~51,7~~	~~22,8~~	-	~~56~~	
Čestlice Lipová	~~52~~	~~45,6~~	~~1,9~~	~~24,4~~	~~49~~	~~75~~	~~52,8~~	15,1	12,5	35,9	~~56~~	-	2,6
Dif			0,6	6,9				4,4	4,2	10,9			

Průběžné řešení

(Čestlice, u Makra)→(1,9 km)→(Čestlice, Lipová)

(Jeneč)→(11,3 km)→(Kladno)→(14,4 km)→(Slaný)→(16,7 km)→(Kamenné Žehrovice)→(5,6 km)→(Stochov)→(21,4 km)→(Rakovník)→(39,5 km)→(Beroun) →(25,3 km)→(Praha 13)

Tabulka 16: Vogelova metoda – Krok devátý

Krok 9.	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li	Dif
Slaný	-	~~14,4~~	~~50,4~~	~~31,6~~	~~37,3~~	~~33,9~~	16,7	~~41,3~~	~~47,8~~	~~23,3~~	~~15~~	~~52~~	
Kladno	14,4	-	~~44,1~~	~~24,3~~	~~25,1~~	~~34,3~~	~~9,6~~	~~35~~	~~40~~	~~11,3~~	~~15,1~~	~~45,6~~	
Čestlice u Makra	~~50,4~~	~~44,1~~	-	~~22,9~~	~~46,2~~	~~72,7~~	~~49,4~~	~~14,4~~	~~13,8~~	~~33,2~~	~~54,3~~	1,9	
Praha 13	~~31,6~~	~~24,3~~	~~22,9~~	-	~~25,3~~	~~53,9~~	~~30,6~~	**12,7**	~~19,6~~	~~14,6~~	~~35,5~~	~~24,4~~	*6,9*
Beroun	~~37,3~~	~~25,1~~	~~46,2~~	25,3	-	~~39,5~~	~~25,3~~	~~37,1~~	~~38,7~~	~~22,1~~	~~30~~	~~49~~	
Rakovník	~~33,9~~	~~34,3~~	~~72,7~~	~~53,9~~	39,5	-	~~24,7~~	~~64,4~~	~~69,4~~	~~41~~	~~21,4~~	~~75~~	
Kamenné Žeh.	~~16,7~~	~~9,6~~	~~49,4~~	~~30,6~~	~~25,3~~	~~24,7~~	-	~~42,2~~	~~47,2~~	~~17~~	5,6	~~52,8~~	
Praha 12	~~41,3~~	~~35~~	14,4	~~12,7~~	~~37,1~~	~~64,4~~	~~42,2~~	-	8,3	~~25,5~~	~~46,6~~	~~15,1~~	*6,1*
Dolní Břežany	~~47,8~~	~~40~~	13,8	~~19,6~~	~~38,7~~	~~69,4~~	~~47,2~~	~~8,3~~	-	29,3	~~51,7~~	~~12,5~~	*5,5*
Jeneč	~~23,3~~	11,3	~~33,2~~	~~14,6~~	~~22,1~~	~~41~~	~~17~~	~~25,5~~	~~29,3~~	-	~~22,8~~	~~35,9~~	
Stochov	~~15~~	~~15,1~~	~~54,3~~	~~35,5~~	~~30~~	21,4	~~5,6~~	~~46,6~~	~~51,7~~	~~22,8~~	-	~~56~~	
Čestlice Lipová	~~52~~	~~45,6~~	~~1,9~~	~~24,4~~	~~49~~	~~75~~	~~52,8~~	~~15,1~~	12,5	35,9	~~56~~	-	*2,6*
Dif			*0,6*					*4,4*	*4,2*	*3,8*			

Tabulka 17: Vogelova metoda – Krok desátý

Krok 10.	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li	Dif
Slaný	-	~~14,4~~	~~50,4~~	~~31,6~~	~~37,3~~	~~33,9~~	16,7	~~41,3~~	~~47,8~~	~~23,3~~	~~15~~	~~52~~	
Kladno	14,4	-	~~44,1~~	~~24,3~~	~~25,1~~	~~34,3~~	~~9,6~~	~~35~~	~~40~~	~~11,3~~	~~15,1~~	~~45,6~~	
Čestlice u Makra	~~50,4~~	~~44,1~~	-	~~22,9~~	~~46,2~~	~~72,7~~	~~49,4~~	~~14,4~~	~~13,8~~	~~33,2~~	~~54,3~~	1,9	
Praha 13	~~31,6~~	~~24,3~~	~~22,9~~	-	~~25,3~~	~~53,9~~	~~30,6~~	12,7	~~19,6~~	~~14,6~~	~~35,5~~	~~24,4~~	
Beroun	~~37,3~~	~~25,1~~	~~46,2~~	25,3	-	~~39,5~~	~~25,3~~	~~37,1~~	~~38,7~~	~~22,1~~	~~30~~	~~49~~	
Rakovník	~~33,9~~	~~34,3~~	~~72,7~~	~~53,9~~	39,5	-	~~24,7~~	~~64,4~~	~~69,4~~	~~41~~	~~21,4~~	~~75~~	
Kamenné Žeh.	~~16,7~~	~~9,6~~	~~49,4~~	~~30,6~~	~~25,3~~	~~24,7~~	-	~~42,2~~	~~47,2~~	~~17~~	5,6	~~52,8~~	
Praha 12	~~41,3~~	~~35~~	14,4	~~12,7~~	~~37,1~~	~~64,4~~	~~42,2~~	-	~~8,3~~	~~25,5~~	~~46,6~~	~~15,1~~	*6,1*
Dolní Břežany	~~47,8~~	~~40~~	~~13,8~~	~~19,6~~	~~38,7~~	~~69,4~~	~~47,2~~	~~8,3~~	-	29,3	~~51,7~~	~~12,5~~	*15,5*
Jeneč	~~23,3~~	11,3	~~33,2~~	~~14,6~~	~~22,1~~	~~41~~	~~17~~	~~25,5~~	~~29,3~~	-	~~22,8~~	~~35,9~~	
Stochov	~~15~~	~~15,1~~	~~54,3~~	~~35,5~~	~~30~~	21,4	~~5,6~~	~~46,6~~	~~51,7~~	~~22,8~~	-	~~56~~	
Čestlice Lipová	~~52~~	~~45,6~~	~~1,9~~	~~24,4~~	~~49~~	~~75~~	~~52,8~~	~~15,1~~	**12,5**	~~35,9~~	~~56~~	-	*23,4*
Dif			*0,6*						*4,2*	*6,6*			

Průběžné řešení

(Čestlice, u Makra)→(1,9 km)→(Čestlice, Lipová)→(12,5 km)→(Dolní Břežany)

(Jeneč)→(11,3 km)→(Kladno)→(14,4 km)→(Slaný)→(16,7 km)→(Kamenné Žehrovice)→(5,6 km)→(Stochov)→(21,4 km)→(Rakovník)→(39,5 km)→(Beroun) →(25,3 km)→(Praha 13) →(12,7 km)→(Praha 12)

Tabulka 18: Vogelova metoda – Krok jedenáctý

Krok 11.	Sla	Kla	ČuM	Pr. 13	Ber	Rak	Žeh	Pr. 12	Bře	Jen	Sto	Č.Li	Dif
Slaný	-	~~14,4~~	~~50,4~~	~~31,6~~	~~37,3~~	~~33,9~~	16,7	~~41,3~~	~~47,8~~	~~23,3~~	~~15~~	~~52~~	
Kladno	14,4	-	~~44,1~~	~~24,3~~	~~25,1~~	~~34,3~~	~~9,6~~	~~35~~	~~40~~	~~11,3~~	~~15,1~~	~~45,6~~	
Čestlice u Makra	~~50,4~~	~~44,1~~	-	~~22,9~~	~~46,2~~	~~72,7~~	~~49,4~~	~~14,4~~	~~13,8~~	~~33,2~~	~~54,3~~	1,9	
Praha 13	~~31,6~~	~~24,3~~	~~22,9~~	-	~~25,3~~	~~53,9~~	~~30,6~~	12,7	~~19,6~~	~~14,6~~	~~35,5~~	~~24,4~~	
Beroun	~~37,3~~	~~25,1~~	~~46,2~~	25,3	-	~~39,5~~	~~25,3~~	~~37,1~~	~~38,7~~	~~22,1~~	~~30~~	~~49~~	
Rakovník	~~33,9~~	~~34,3~~	~~72,7~~	~~53,9~~	39,5	-	~~24,7~~	~~64,4~~	~~69,4~~	~~41~~	~~21,4~~	~~75~~	
Kamenné Žeh.	~~16,7~~	~~9,6~~	~~49,4~~	~~30,6~~	~~25,3~~	~~24,7~~	-	~~42,2~~	~~47,2~~	~~17~~	5,6	~~52,8~~	
Praha 12	~~41,3~~	~~35~~	**14,4**	~~12,7~~	~~37,1~~	~~64,4~~	~~42,2~~	-	~~8,3~~	~~25,5~~	~~46,6~~	~~15,1~~	
Dolní Břežany	~~47,8~~	~~40~~	~~13,8~~	~~19,6~~	~~38,7~~	~~69,4~~	~~47,2~~	~~8,3~~	-	**29,3**	~~51,7~~	~~12,5~~	
Jeneč	~~23,3~~	11,3	~~33,2~~	~~14,6~~	~~22,1~~	~~41~~	~~17~~	~~25,5~~	~~29,3~~	-	~~22,8~~	~~35,9~~	
Stochov	~~15~~	~~15,1~~	~~54,3~~	~~35,5~~	~~30~~	21,4	~~5,6~~	~~46,6~~	~~51,7~~	~~22,8~~	-	~~56~~	
Čestlice Lipová	~~52~~	~~45,6~~	~~1,9~~	~~24,4~~	~~49~~	~~75~~	~~52,8~~	~~15,1~~	12,5	~~35,9~~	~~56~~	-	
Dif													

V jedenáctém kroku zůstávají poslední dvě cesty, které budou zařazeny do řešení. Jedna z nich spojuje dva paralelně se tvořící okruhy průběžného řešení v jeden a druhá uzavírá okruh.

Průběžné řešení

(Čestlice, u Makra)→(1,9 km)→(Čestlice, Lipová)→(12,5 km)→(Dolní Břežany)→(29,3 km)→(Jeneč)→(11,3 km)→(Kladno)→(14,4 km)→(Slaný)→(16,7 km)→(Kamenné Žehrovice)→(5,6 km)→(Stochov)→(21,4 km)→(Rakovník)→(39,5 km)→(Beroun) →(25,3 km)→(Praha 13)→(12,7 km)→(Praha 12)→(14,4 km)→(Čestlice, u Makra)

Výsledná trasa je následně upravena tak, aby začínala ve Slaném a je vyčíslena délka tohoto konkrétního okruhu, která činí 205 km.

Finální řešení

(Slaný)→(16,7 km)→(Kamenné Žehrovice)→(5,6 km)→(Stochov)→(21,4 km) →(Rakovník)→(39,5 km)→(Beroun) →(25,3 km)→(Praha 13)→(12,7 km)→(Praha 12) →(14,4 km)→(Čestlice, u Makra)→(1,9 km)→(Čestlice, Lipová)→(12,5 km)→(Dolní Břežany)→(29,3 km)→(Jeneč)→(11,3 km)→(Kladno)→(14,4 km)→(Slaný)

4.4.2 Další výsledky

Jak bylo podotknuto, v prvním a druhém kroku se množina řešení musela zvětšovat kvůli dvěma nejvyšším diferencím. Pro zadanou matici sazeb Vogelova aproximační metoda nabízí celkem čtyři, resp. dva okruhy projeté v obou směrech. *Okruh 1* a *Okruh 3* jsou stejné, jen jsou jejich místa projeta v opačném pořadí, totéž platí pro *Okruh 2* a *Okruh 4*. Po propočítání všech variant byly výsledky zaneseny do tabulky a jednotlivé okruhy byly upraveny tak, aby výjezdním místem bylo vždy Slaný. Nejkratší okruh měří 205 km. Je tedy nejkratším nalezeným okruhem pro pondělní rozvozovou trasu.

Tabulka 19: Vogelova metoda – Všechny výsledky

Okruh 1	
Délka okruhu: 205 km	Slaný→ Kamenné Žeh.→ Stochov→ Rakovník→ Beroun→ Praha 13→ Praha 12→ Čestlice u Makra→ Čestlice Lipová→ Dolní Břežany→ Jeneč→ Kladno→ Slaný
Okruh 2	
Délka okruhu: 207 km	Slaný→ Kladno→ Jeneč→ Dolní Břežany→ Čestlice u Makra→ Čestlice Lipová→ Praha 12→ Praha 13→ Beroun→ Rakovník→ Stochov→ Kamenné Žeh. → Slaný
Okruh 3	
Délka okruhu: 205 km	Slaný→ Kladno→ Jeneč→ Dolní Břežany→ Čestlice Lipová→ Čestlice u Makra→ Praha 12→ Praha 13→ Beroun→ Rakovník→ Stochov→ Kamenné Žeh. → Slaný
Okruh 4	
Délka okruhu: 207 km	Slaný→ Kamenné Žeh.→ Stochov→ Rakovník→ Beroun→ Praha 13→ Praha 12→ Čestlice Lipová→ Čestlice u Makra→ Dolní Břežany→ Jeneč→ Kladno→ Slaný

5 Závěr

Cílem práce bylo nalezení optimálního rozvozového okruhu, kterým společnost Kratochvíl, spol. s.r.o. realizuje distribuci elektromateriálu a porovnání s dosavadním počínáním firmy.

Společnost dosud pořadí, ve kterém budou jednotlivá místa okruhu zásobována, nechávala zcela na rozhodnutí řidiče. Dosavadní trasa vypadala následovně: *Slaný – Kladno – Kamenné Žehrovice – Stochov – Rakovník – Beroun – Praha 13 – Praha 12 – Dolní Břežany – Čestlice, Lipová – Čestlice, u Makra – Jeneč – Slaný* tento okruh je 207,7 kilometrů dlouhý.

Po aplikování vybraných optimalizačních metod pro řešení jednookruhových dopravních úloh vyplynulo několik možných okruhů, z čehož nejlepší byl nalezen Vogelovou aproximační metodou. Nejkratší okruh, měřící 205 km tvoří místa v tomto pořadí: *Slaný – Kamenné Žehrovice – Stochov – Rakovník – Beroun – Praha 13 – Praha 12 – Čestlice u Makra – Čestlice Lipová – Dolní Břežany – Jeneč – Kladno – Slaný.*

Optimální okruh nalezený Vogelovou aproximační metodou a okruh používaný řidičem společnosti Kratochvíl se liší v zařazení zákazníků sídlících na Kladně, Čestlicích a Dolních Břežanech, což ve výsledku činí téměř tříkilometrový rozdíl.

Výsledky práce byly prezentovány řediteli společnosti Kratochvíl, který usoudil, že vzhledem k téměř zanedbatelnému rozdílu dvou tras není nutné do rozvozu zasahovat a firma bude nadále nechávat rozhodnutí, jak objíždět jednotlivá místa plně v kompetenci řidiče.

6 Seznam použitých zdrojů

BROŽOVÁ, Helena a HOUŠKA, Milan. 2008. *Základní metody operační analýzy.* Praha : Česká zemědělská univerzita v Praze - Provozně ekonomická fakulta, 2008. ISBN 978-80-213-0951-7.

GROS, Ivan. 1994. *Logistika.* Praha : Vysoká škola chemicko-technologická, 1994. ISBN 80-7080-216-2.

JABLONSKÝ, Josef. 2002. *Operační výzkum - kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování.* Praha : Professional Publishing, 2002. ISBN 80-86419-23-1.

KOSKOVÁ, Ivanka. 2004. *Distribuční úlohy I.* Praha : Credit, 2004. ISBN 978-80-213-1156-5.

OUDOVÁ, Alena. 2016. *Logistika: Základy logistiky.* Aktualizované 2. vydání. Prostějov : Computer Media, s.r.o., 2016. ISBN 978-80-7402-238-8.

PERNICA, Petr. 2005. *Logistika pro 21. století = (Supply chain management).* Praha : Radix, 2005. Sv. I. ISBN 80-86031-59-4.

SCHULTE, Christof. 1994. *Logistika.* [překl.] Gustav TOMEK a Adolf BAUDYŠ. Praha : Victorica Publishing, 1994. ISBN 80-85605-87-2.

STEHLÍK, Antonín a KAPOUN, Josef. 2008. *Logistika pro manažery.* Praha : Ekopress, 2008. ISBN 978-80-86929-37-8.

ŠUBRT, Tomáš, a další. 2015. *Ekonomicko-matematické metody 2. upravené vydání.* Plzeň : Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk, 2015. ISBN 978-80-7380-563-0.

ZÍSKAL, Jan a HAVLÍČEK, Jaroslav. 2010. *Ekonomicko matematické metody II studijní texty pro distanční studium.* Praha : Česká zemědělská univerzita v Praze - Provozně ekonomická fakulta, 2010. ISBN 978-80-213-0664-6.

Elektronické zdroje:

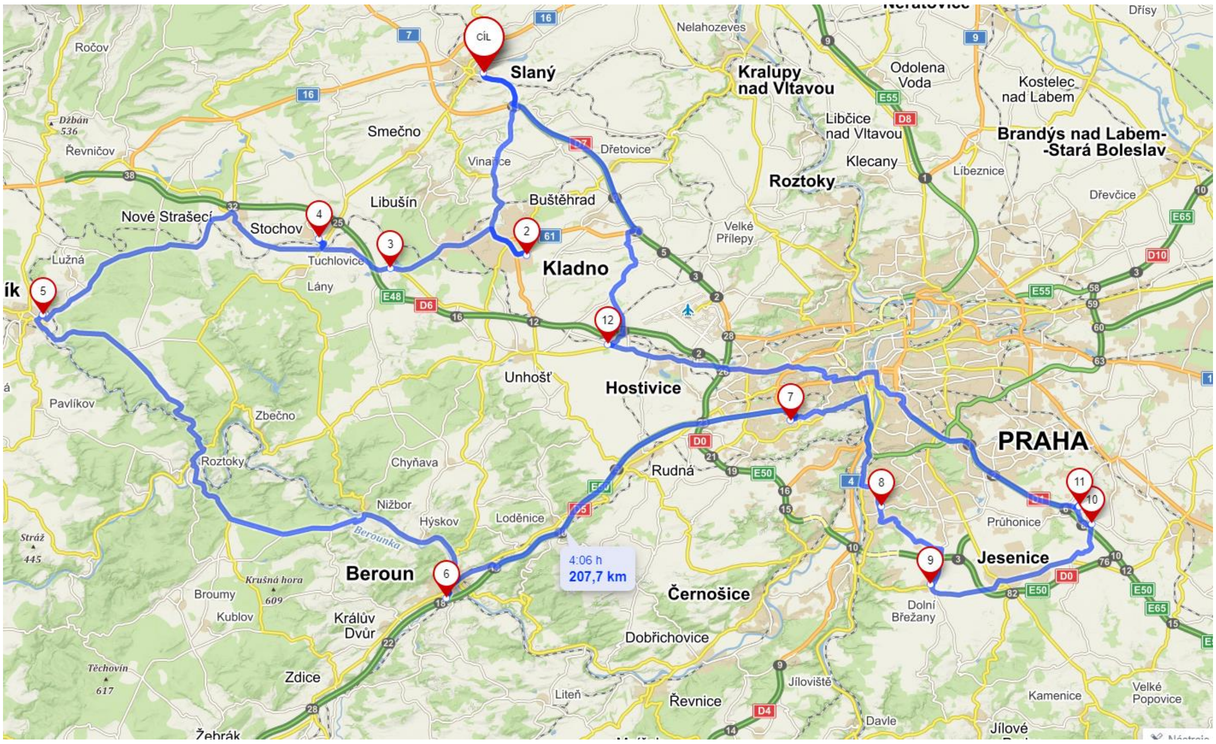
KUČERA, Petr. *Metodologie řešení okružního dopravního problému*.[online]. Praha, 2009, s.122.[cit. 3.01.2021]. Disertační práce. Česká zemědělská univerzita v Praze. HAVLÍČEK, Jaroslav. Dostupné z: https://www.pef.czu.cz/cs/r-7009-veda-a-vyzkum/r-7028-doktorske-studium/r-8125-alumni/r-8136-alumni-2009

Kratochvíl, spol. s.r.o. 2018 [online]. [cit. 2.01.2021]. Dostupné z: https://www.kratochvil-elektro.cz/

Mapy.cz. Mapy.cz [online]. [cit. 29.10.2020]. Dostupné z: https://mapy.cz

7 Přílohy

Příloha 1: Původní okruh realizovaný společností Kratochvíl



Příloha 2: Nový okruh navržený společnosti Kratochvíl