



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATEMATICKÉ MODELY V OBLASTI STRATEGICKÉHO ROZHODOVÁNÍ

MATHEMATICAL MODELS IN STRATEGIC DECISION-MAKING

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Lukáš Khýr

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Martin Pavlas, Ph.D.

BRNO 2020

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	Bc. Lukáš Khýr
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	Ing. Martin Pavlas, Ph.D.
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Matematické modely v oblasti strategického rozhodování

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V průmyslu je stále častěji uvažováno o inteligentním dynamickém plánování procesů. Zajímavou oblastí se jeví úlohy svozu odpadů ve spolupráci s alokací kapacit a pokročilým monitoringem. Diplomová práce využije údaje GPS o bytové zástavbě pro optimální rozmístění sběrných nádob s ohledem na docházkovou vzdálenost a ekonomiku svozu. Výsledky budou provázány s VRP algoritmy vyvíjenými na ÚPI. Hlavní cíle práce jsou motivovány výzkumným projektem Strategické partnerství pro environmentální technologie a produkci energie (OP VVV DMS SPETEP – Strategic Partnership for Environmental Technologies and Energy Production SPETEP – 29218). Práce bude pravidelně konzultována s odborníkem v oblasti optimalizace z ÚM (RNDr. Pavel Popela, Ph.D.).

Cíle diplomové práce:

Studium teoretických poznatků v oblasti celočíselného lineárního programování.
Formulace matematického modelu pro vybranou aplikaci.
Implementace matematického modelu do vhodného softwaru.
Analýza citlivosti a příprava dat pro VRP algoritmy.

Seznam doporučené literatury:

WILLIAMS, H. P. Model building in mathematical programming. 5. vydání. John Wiley and Sons, New York. 2013.

WOLSEY, L. A. Integer programming. John Wiley and Sons. 1998.

GHIANI, G., LAPORTE, G., MUSMANNO, R. Introduction to Logistics Systems Planning and Control. John Wiley and Sons, New York. 2004.

NEVRLÝ, V. Modely a metody pro svozové úlohy. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 48 s.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato diplomová práce je zaměřena na tvorbu matematického modelu sloužícího k navrhování rozmístění sběrných míst pro různé frakce komunálního odpadu s přihlédnutím na docházkovou vzdálenost, ekonomickou náročnost a využití alokovaných kapacit. Součástí práce je taktéž vytvořený skript pro generování vstupní datové sady pro aplikovaný model ze základních vstupních údajů, kterými jsou adresní body s populací a GSP souřadnicemi. Model byl implementován v programu GAMS a skript byl napsán formou VBA v programu Microsoft Excel. Model byl využit v případové studii konkrétního města. Dále jsou v této práci analyzovány výsledky jednokriteriálních i vícekriteriálních přístupů.

Summary

This master thesis deals with various mathematical models, which can be used for designing the location of collection points for various fractions of municipal waste with consideration of walking distance, economic demands and utilization of allocated capacities. Scripts for generating input datasets for applied models from basic input data, which are address points with population and GPS coordinates, is also included in the thesis. The model was implemented in GAMS and the script was written in VBA in Microsoft Excel. Model was used in case study. Results of single and multi-criteria approaches are analyzed and compared.

Klíčová slova

komunální odpad, pozice sběrných míst, případová studie, vícekriteriální optimalizace, docházková vzdálenost, ekonomická náročnost, MILP, nastavení CPLEX

Keywords

municipal waste, location of collection points, case study, multiobjective optimization, walking distance, economic strain, MILP, CPLEX settings

KHÝR, Lukáš. Matematické modely v oblasti strategického rozhodování. Brno, 2020. 69s. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/121551>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Ing. Martin Pavlas, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Bc. Lukáš Khýr

Děkuji svému vedoucímu Ing. Martinu Pavlasovi, Ph.D., dále Ing. Radovanu Šomplákovi, Ph.D. a Ing. Vlastimíru Nevrlému za cenné rady, ochotu, vstřícnost a poskytnutý čas při konzultacích.

Bc. Lukáš Khýr

Obsah

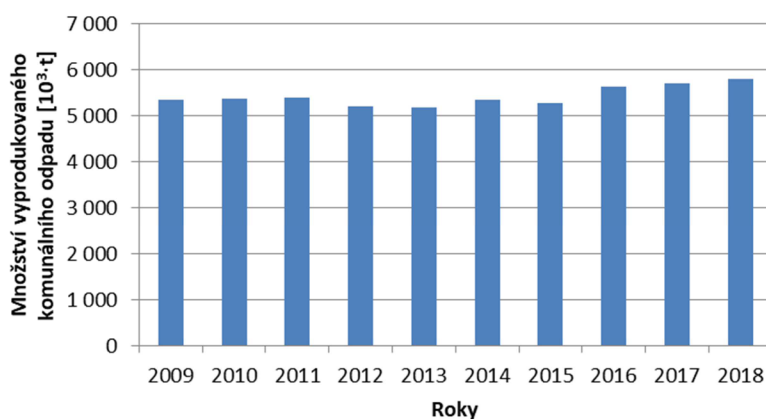
Úvod	2
1 Celočíselné lineární programování	7
1.1 Základní metody pro řešení celočíselných úloh	8
1.2 Vybrané základní typy úloh.....	9
1.3 Metody vícekriteriální optimalizace.....	12
2 Přehled literatury	14
3 Model.....	16
3.1 Definice úlohy	16
3.2 Představení modelu	16
4 Zpracování dat.....	21
5 Případová studie	23
5.1 Jednokriteriální úlohy	24
5.2 Vícekriteriální úlohy.....	30
5.2.1 Zohlednění dvou kritérií	30
5.2.2 Zohlednění čtyř kritérií.....	42
5.3 Závislost mezi docházkovými vzdálenostmi.....	46
5.4 Metoda ϵ -omezení	47
6 Výpočtová náročnost.....	54
6.1 Nastavení parametrů řešiče.....	54
Diskuse výsledků a doporučení.....	58
Závěr.....	62
Literatura	63
Seznam použitých zkratk.....	67
Seznam obrázků	68
Seznam tabulek.....	69

Úvod

Množství lidmi produkovaného odpadu vzrůstá ruku v ruce s hospodářským růstem, rozvojem průmyslu a s narůstáním populace na naší planetě. Současně s tím se zvyšuje potřeba správně s vyprodukovaným odpadem nakládat. Především by měla být podporována snaha omezit v co největší míře dopad na životní prostředí.

Komunálním odpadem (KO) se podle zákona č. 185/2001 o odpadech, § 4, ve znění pozdějších předpisů, rozumí veškerý odpad vznikající na území obce při činnosti fyzických osob, a který je uveden jako KO v Katalogu odpadů, s výjimkou odpadů vznikajících u právnických osob nebo fyzických osob oprávněných k podnikání. Dle vyhlášky č. 321/2014 Sb. je obec povinna zajistit celoročně sběr biologických odpadů rostlinného původu (v období od 1. listopadu do 31. března následujícího kalendářního roku může obec přizpůsobit nastavení četnosti svozu klimatickým podmínkám a množství produkovaných biologických odpadů). Dále je obec povinna zajistit celoročně místa pro oddělené soustředování odpadů papíru, plastů, skla a kovů. Alespoň dvakrát ročně musí obec určit místo k soustředování nebezpečných odpadů ve stanovených termínech. Většina obcí řeší sběr pomocí tzv. sběrných hnízd (donáškový systém). Pouze nepatrné procento obcí využívá tzv. svoz „door-to-door“. Nevytříděné složky končí v nádobách na směsný odpad, a dle Katalogu odpadů se jedná o směsný komunální odpad (SKO).

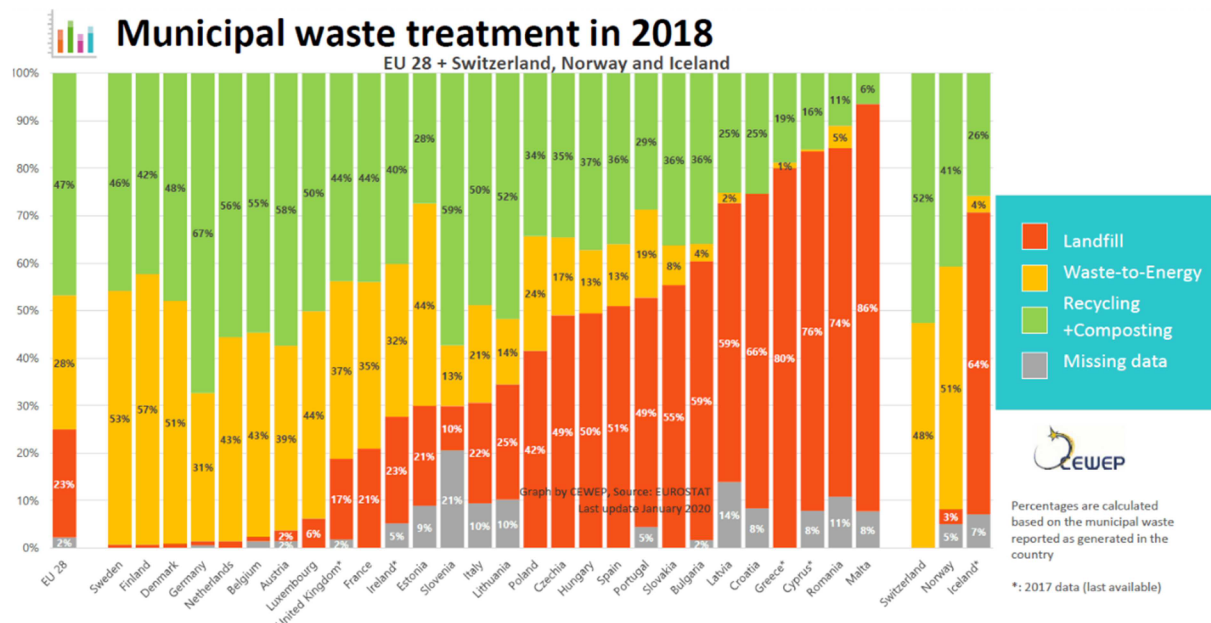
Aktuální situace v České republice (dále ČR) v oblasti KO není ve smyslu efektivního nakládání nijak příznivá (46 % odpadu se ukládá skládkováním). Přehled produkce KO na obr. 1 byl vytvořen na základě veřejně přístupných dat z ISOH (Informační Systém Odpadového Hospodářství, [1]). Je vidět, že trend produkce odpadu v posledních letech roste a v roce 2018 bylo v ČR vyprodukováno 5 782 tisíc tun KO. Produkce KO přepočtena na obyvatele činí $544 \text{ kg} \cdot \text{os}^{-1}$. Roční produkce SKO pro rok 2018 byla 2 807 tisíc tun, což činí 48,6 % celkové produkce KO v ČR.



Obr. 1: Množství vyprodukovaného komunálního odpadu pro roky 2009–2018.

Produkce KO na obyvatele je dlouhodobě vyšší ve Středočeském kraji a Praze, což pravděpodobně souvisí s koncentrací služeb. Také produkce SKO je v obou krajích vyšší. Naopak nejnižší produkce KO při normování na obyvatele byla v Karlovarském kraji.

Většina KO (50,3 %) je v ČR využita materiálově (38,6 %) nebo energeticky (11,7 %). Při odstraňování KO dominuje skládkování, ke kterému dochází ve 46 % množství, což v případě roku 2018 činilo 2 658 tisíc tun KO. Na obr. 2 můžeme vidět porovnání nakládání s KO v ČR a ostatních státech EU. Je nutné zmínit, že přesto, že se jedná o oficiální data, jsou zde menší odchylky od oficiálních hodnot uváděných ministerstvem životního prostředí, berme tedy obr. 2 pouze pro přibližnou představu o situaci v EU.

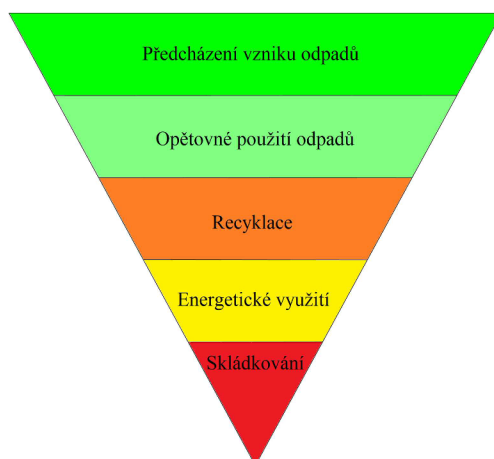


Zdroj: <https://www.cewep.eu/wp-content/uploads/2020/01/CEWEP-Municipal-Waste-Treatment-2018-1024x576.png>

Obr. 2: Srovnání nakládání s komunálním odpadem v EU.¹

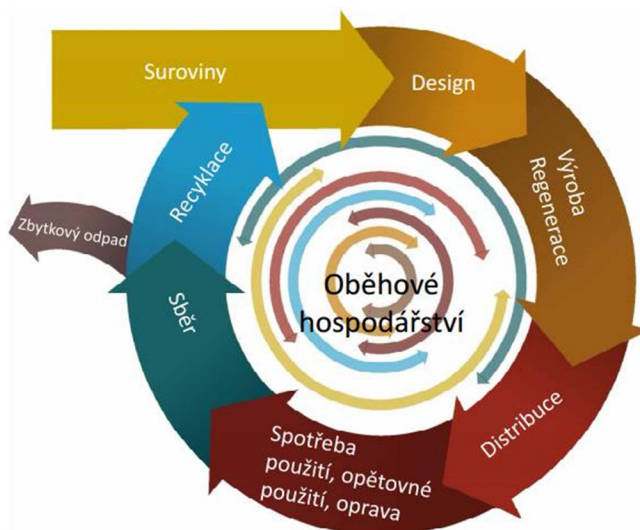
ČR se při nakládání s odpady řídí hierarchií, která je uvedena v základním právním dokumentu o odpadovém hospodářství. Tím je zákon č.185/2001 Sb., Zákon o odpadech a o změně některých dalších zákonů, ve znění pozdějších předpisů. Hierarchie nakládání s odpady, ilustrována na obr. 3, je uvedena v tomto zákoně, §9a, odstavec 1. V tomto zákoně je uvedeno, že prioritou by měla být snaha předcházet vzniku odpadů. Sem patří například omezení plýtvání, zodpovědné chování spotřebitelů, snaha o alternativní způsoby využití výrobků atd. Samozřejmě není možné dosáhnout toho, aby odpad nevznikal. Druhým stupněm hierarchie je zpracování a opětovné použití odpadu. Sem spadají snahy o to, aby byly výrobky nebo alespoň jejich části opětovně využity k účelu, pro jaký byly vyrobeny. Příkladem jsou vratné skleněné láhve, nabíjecí baterie atd. Na dalším stupni se objevuje recyklace, což je proces, při kterém dochází k přepracování odpadu za účelem znovuvyužití materiálu jako druhotné suroviny ve výrobním procesu. Mezi poslední dvě varianty nakládání s odpady, které jsou v hierarchii uvedeny, patří alternativní využití odpadu a uložení odpadu na skládku (skládkování). Do alternativního využití odpadu spadá například energetické využití odpadu pro získání elektrické energie a tepla. I když je skládkování nejméně chtěné zpracování odpadu, je skoro polovina KO skládkována.

¹Municipal waste treatment in 2018 – Nakládání s komunálním odpadem v roce 2018
Landfill – Skládkování, Waste-to-energy – Energetické využití,
Recycling + Composting – Recyklace + Kompostování, Missing data – Chybějící data



Obr. 3: Hierarchie nakládání s odpady.

Až do nedávné minulosti bylo k odpadovému hospodářství (OH) přistupováno spíše jako k tzv. lineárnímu schématu. To zahrnuje získání přírodních surovin, jejich zpracování a následně výrobu produktů, dále jejich nákup, využití spotřebiteli a nakonec hromadění odpadu. Následky takového přístupu mohou být patrné například ve velkém úbytku přírodních zdrojů, nebo ve zvětšujícím se objemu nevyužitého odpadu. Nyní se k OH snaží přistupovat spíše jako k tzv. oběhovému hospodářství, jehož cílem je v co největší míře opětovně využít již vytěžené suroviny a vyrobené materiály (z produktů se nemá stát odpad, ale nový zdroj pro další výrobu) a tím minimalizovat nezpracovaný odpad, viz ilustrace na obr. 4. Od roku 2014 je koncept oběhového hospodářství přímo součástí evropské legislativy.

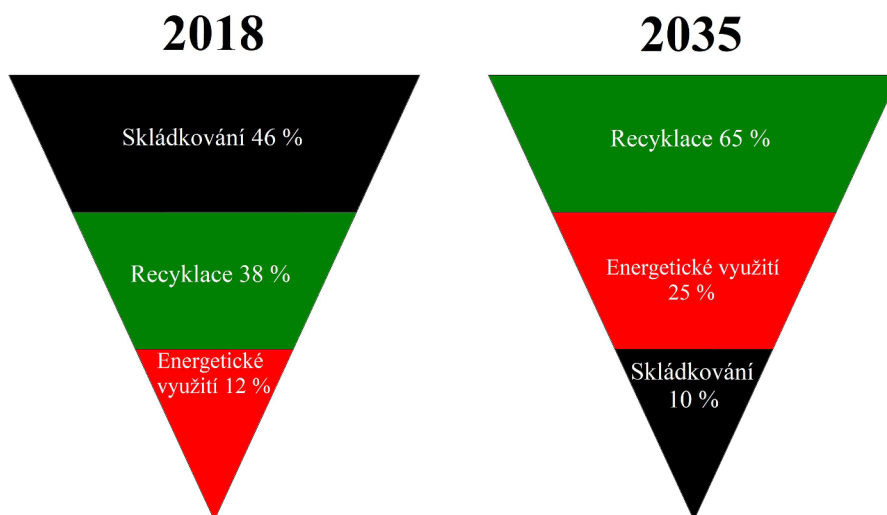


Zdroj: <https://www.euroskop.cz/gallery/86/25824-cdk.jpg>

Obr. 4: Ilustrace oběhového hospodářství.

V lednu 2021 by měla vstoupit v účinnost nová odpadová legislativa, která mimo jiné pracuje s požadavky EU na zpracování KO. Jedním z nových cílů je mít úroveň přípravy k opětovnému použití a recyklace KO nejméně na 55 % celkové hmotnosti KO vyprodukovaných na území ČR. Tuto úroveň následně zvýšit na 60 % do roku 2030 a na 65 % do roku 2035. Nejvýše 10 % z celkové hmotnosti vyprodukovaných KO by mělo být v roce 2035 ukládáno na skládky. Dále nejvýše 25 % z celkové hmotnosti KO by se mělo využívat energeticky. Zákon o odpadech také počítá s tím, že by měl v roce 2030 vejít v platnost zákaz skládkování recyklovatelných a využitelných odpadů. Jedním z nástrojů pro dosažení cílů je například zvyšování poplatků za skládkování využitelného odpadu (v roce 2025 by měla být cena až trojnásobná oproti nynější situaci).

V připravovaném novém zákoně se také objevují cíle navržené pro obce. Jedná se převážně o třídící cíle (důležité pro další nakládání s odpadem – recyklace a jiné). Do roku 2025 by mělo být 60 % KO obce roztříděno (2030 – 60 %, 2035 – 65 %). S ohledem na čistotu a obsah vytríděného materiálu v barevných kontejnerech jsou cíle na tříděný sběr vyšší než skutečné cíle na recyklaci KO.



Obr. 5: Aktuální (2018) a plánované (2035) nakládání s komunálním odpadem.

Z úvodní části textu vyplývá, že se v současné době zvyšuje důraz na efektivní nakládání s odpady a na přiblížení se oběhovému hospodářství, čímž snížíme dopad na životní prostředí. Dosažení tohoto cíle v nemalé míře závisí na naší schopnosti recyklovat. Předpokladem recyklace je třídění vhodných frakcí obyvateli, tzn. oddělené shromažďování nebo primární separace. Aby bylo možné zapojení co největší části populace, je potřeba najít způsob, jak třídění odpadu udělat pro obyvatele co nejpřívětivější nebo motivační. Některé z motivačních přístupů využívají práci s poplatkem za popelnice (každá fyzická osoba platí poplatek za provoz systému shromažďování a odstraňování KO v obci, v níž má trvalý pobyt). V současné době se probírají nové možnosti systému sběru, jako je například PAYT (pay as you throw) – platí se pouze za vyhozené množství odpadu, přičemž je zpoplatněno množství SKO a odděleně shromažďované frakce jsou zdarma. Alternativou mohou být podobné systémy, které motivují občany vrácením určité částky z poplatku za správné a kvalitní třídění. Ovšem tyto systémy jsou zatím pouze v testovací fázi a o rizicích s nimi spojených pojednává například [2].

Současným trendem je postupné zavádění nových komodit, které je nutné odděleně shromažďovat. Probíhají také projekty intenzifikace sítě sběrných nádob, kdy se přidávají nové sběrné nádoby. Na druhou stranu svaz všech odpadů stojí nemalé prostředky a náklady se zvyšují s počtem nádob i počtem komodit, které se sváží. IURMO (Institut pro udržitelný rozvoj měst a obcí) uvádí, že od roku 2008 došlo k nárůstu nákladů na hospodaření s KO v obcích ČR na hodnotu 936,8 Kč·obyvatel⁻¹ (vyplývá z poslední analýzy pro rok 2017).

Proto je v současnosti velice důležité zabývat se metodikou rozmístění sběrných míst a alokování správných kapacit pro různé frakce odpadu. Díky tomu budeme schopni vytvořit sběrnou síť, která bude přívětivá jak pro občany (dostatečné kapacity na správných místech, aby k nim měli občané blízko), ale také bude udržitelná jak po stránce finanční, tak po stránce časové náročnosti svazu. Při efektivně vytvořené síti sběrných míst můžeme docílit zvýšení míry třídění, tím i míry recyklace a tak snížit ekologickou náročnost KO. Proto bude navržen model (viz kap. 3), který bude sloužit pro navrhování efektivní sítě. Model bude mít charakter MILP (mixed integer linear program), proto bude pozornost v následujícím textu zaměřena nejprve na uvedení problematiky celočíselného lineárního programování, základních metod

řešení a základních typů úloh. Dále bude uveden příslušný model včetně popisu jednotlivých parametrů a omezení. Tento model je dále využit v případové studii, kde budou analyzovány a porovnávány výsledky řešených úloh.

1 Celočíselné lineární programování

Pozornost bude nejprve věnována základním vlastnostem jako je linearita či celočíselnost úlohy, dále základním modelům a jejich vlastnostem a neopomeneme ani metody řešení těchto úloh. Problematika této části textu je rozebírána v [3], [4], [5], [6].

Obecná formulace úlohy matematického programování je ve tvaru:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x), \\ \text{za podm.} & x \in M, \end{array}$$

kde $f(x)$ je účelová funkce a M je množina přípustných řešení. Pokud účelová funkce a podmínky minimalizace mají určité vlastnosti, pak tato úloha matematického programování může nést různé přívlastky: lineární, nelineární, celočíselné, parametrické atd. Pokud jsou účelová funkce $f(x)$ i omezení vymezující množinu M lineární (v proměnné x), pak se jedná o úlohu lineárního programování (LP – *linear programming*). Lineární programování se vyznačuje například tím, že je konvexní (každý lokální extrém je i globální).

Široká třída praktických aplikací může být modelována s využitím celočíselných proměnných a lineárních omezení. Jestliže jsou všechny proměnné celočíselné, označuje se úloha jako úloha ryze celočíselného programování (PIP – *pure integer programming*). Stejně tak se může jednat o úlohu binárního programování, pokud jsou proměnné pouze binární.

Běžnější je využití spojitých proměnných současně s celočíselnými. Potom se mluví o smíšeném celočíselném programování (MILP – *mixed integer linear program*). Reálné problémy jsou často popsány nelineárními závislostmi, což je v současné době nutné řešit pomocí specifických přístupů. Proto se někdy přistupuje ke zjednodušení do podoby celočíselných úloh, které zachovají alespoň částečně charakter reálné úlohy. MILP má své využití také takřka v každé oblasti, kde je nutné uvažovat celočíselnost. Celočíselné proměnné mohou představovat množství, které může být pouze celočíselné (nemůžeme například vyrobit 2,8 auta nebo zaměstnat 1,8 lidí). Druhou možností je reprezentace rozhodnutí (postavit nebo nepostavit určité zařízení). V těchto aplikacích bývají proměnné binární.

V matematické rovině zahrnují celočíselné modely (IP – *integer programs*) při řešení mnohonásobně více kalkulací než LP modely s podobnou velikostí. Obtížnost celočíselných problémů ve srovnání se spojitými problémy (s reálnými nebo racionálními čísly) je dobře známa i v ostatních oblastech matematiky. LP modely zahrnující tisíce proměnných mohou být s využitím moderních řešících programů téměř jistě vyřešeny v rozumném čase, podobná situace ovšem neplatí pro IP modely. Při vytváření modelu IP existuje možnost, že pro větší úlohu nebude možné vyřešit tento problém v reálném čase. V tab. 1 je uveden přehled základních typů modelů, souvisejících s problematikou.

Tab. 1: Přehled některých základních typů modelů matematického programování.

Lineární programování (LP)		Ryze celočíselné programování (PIP)		Smíšené celočíselné lineární programování (MILP)	
min	$c^T x$	min	$c^T x$	min	$c^T x + d^T y$
za podm.	$Ax \leq b$	za podm.	$Ax \leq b$	za podm.	$Ax + Gy \leq b$
	$x \geq 0$		$x \geq 0$		$x \geq 0$
			$x \in \mathbb{Z}$		$y \geq 0$
					$y \in \mathbb{Z}$

1.1 Základní metody pro řešení celočíselných úloh

Na rozdíl od LP, pro které existuje například univerzální algoritmus simplexové metody, u IP žádný tak univerzální algoritmus neexistuje. Pro řešení IP existuje mnoho algoritmů, ty jsou ale různě efektivní pro různé typy úloh. Většina algoritmů řešících IP využívá při řešení alespoň jednu z níže uvedených metod.

Metody řezání rovin (*Cutting planes methods*)

Tyto metody lze využít pro obecné MIP problémy. U těchto metod se při řešení IP problému nejprve řeší problém LP, který dostaneme zanedbáním požadavků na celočíselnost. Tento přechod k LP je znám jako LP relaxace. Pokud je výsledné řešení LP celočíselné, pak je toto optimum i optimem IP. Pokud celočíselné není, pak jsou přidána nová omezení (řezná rovina) a problém je pomocí LP relaxace řešen znovu. Tento cyklus se opakuje dokud není nalezeno celočíselné řešení, nebo dokud se neprokáže, že takové řešení neexistuje. První algoritmus tohoto typu popsal Gomory v roce 1958, viz [7].

Metody systematického vyčíslení (*Enumerative methods*)

Tato skupina metod se používá pro speciální třídu problémů – binární PIP (proměnné jsou pouze celočíselné a mohou nabývat pouze hodnot 0,1). Teoreticky existuje pouze konečné (i když může být extrémně velké) množství možných řešení těchto problémů. Spočítat všechna řešení by pro velké úlohy bylo náročné, ovšem pomocí stromového prohledávání lze při postupném počítání řešení systematicky vyloučit ostatní možnosti řešení jako neoptimální nebo neuskutečnitelné (tzn. není nutné je počítat). Skupina těchto metod se pro úzkou skupinu problémů ukázala být velice účinná. Nejznámější z algoritmů spadající pod tyto metody je pravděpodobně Balasův aditivní algoritmus (*Balas's additive algorithm*), který byl popsán například v [8].

Pseudo-booleovy metody (*Pseudo-boolean methods*)

V některých pokusech o nalezení účinné metody řešení IP byla snaha využít podobnosti mezi booleovou algebrou (viz [9]) a binárními PIP problémy (proměnné jsou pouze celočíselné a mohou nabývat pouze hodnot 0,1). Při těchto pokusech bylo vyvinuto množství algoritmů, které jsou velice úspěšné pro dosti úzkou skupinu problémů. Jak již bylo naznačeno, tento přístup k IP problematice se od ostatních výrazně liší. Myšlenka těchto metod je, že omezení problému není vyjádřeno jako rovnice nebo nerovnice, ale je vyjádřeno prostřednictvím booleovy algebry. V některých případech to může poskytnout velmi stručné prohlášení o omezeních, ale v ostatních případech to situaci nijak nezlepší. Tyto metody byly vyvinuty Hammerem a jsou popsány v [10], [11].

Metody větví a mezí (*Branch and bound methods*)

Tyto metody se osvědčily při řešení praktických MIP problémů. Někdy bývají tyto metody klasifikovány jako metody systematického vyčíslení. Stejně jako u metody řezání rovin je IP problém řešen nejprve jako LP s ignorováním podmínek na celočíselnost. Pokud je řešení LP celočíselné, je dosaženo optima i u IP. V opačném případě se provede prohledávání stromu. Podrobnější popis lze nalézt například v [5]. Tato metoda je často kombinována s ostatními metodami pro dosažení ještě vyšší účinnosti. Velice účinná se ukázala být kombinace s metodou řezání rovin. Tato kombinace je někdy označována jako metoda větví a řezů (*branch and cut method*).

Heuristiky

Jak již bylo zmíněno, řešení problémů matematického programování exaktními metodami může být z časového i paměťového hlediska příliš náročné. Proto jsou častou volbou heuristiky, které se používají nejen v celočíselných úlohách, ale všude tam, kde klasické metody nejsou příliš účinné. Mohou sloužit jednak k nalezení nějakého základního řešení (a to když mají klasické metody problém nějaké najít a dále již mohou být klasické metody účinné), nebo pro řešení celého problému matematického programování. Hlavní výhodou těchto metod je tedy jejich účinnost tam, kde klasické metody selhávají nebo jsou příliš pomalé. Ovšem heuristiky mají i své nevýhody. Jednou z nich je, že nemáme žádnou informaci o přesnosti nalezených řešení, což může být problém. Proto je často vhodné využít kombinaci heuristik s klasickými metodami. Mezi neznámější typy algoritmů patří například *swarm intelligence*, *simulated annealing*, *evolutionary algorithms*. Další typy algoritmů a jejich podrobnější popis je uveden v [12]. Jeden z nejvýznamnějších algoritmů použitelný pro MILP je *polishing algorithm*, který patří mezi evoluční algoritmy. Při výpočtech v případové studii se tento algoritmus ukázal být velkým přínosem (viz kapitola 6). Ovšem k jeho použití je nutné mít alespoň nějaké základní řešení daného problému. Základní myšlenka algoritmu je založena na zlepšení řešení pomocí prohledávání sousedních uzlů, více informací o tomto algoritmu lze nalézt v [13], [14].

1.2 Vybrané základní typy úloh

Při tvorbě vlastního modelu představeného v kapitole 3.2 bylo využito znalostí o základních typech problémů, jejich vlastnostech a účinných technikách jejich řešení. Tyto základní problémy jsou řešeny například v [5], [6], [15], [16], [17]. Zde uvedeme některé z nich.

Set covering problem

Tyto problémy získaly své jméno z následujícího typu abstraktního problému. Máme sadu objektů, které označujeme jako množinu S . Dále máme třídu \mathcal{S} podmnožin S . Každý člen z této třídy \mathcal{S} má přiřazenou hodnotu, která představuje jeho cenu. Snahou je „pokrýt“ všechny členy S pomocí minimální ceny za použití členů z \mathcal{S} . Proměnné δ_i mají následující interpretaci:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{pokud je } i\text{-tý člen pokryt,} \\ 0 & \text{v opačném případě.} \end{cases}$$

Příslušný model vypadá následovně:

$$\min \sum_{i \in I} \delta_i c_i \quad (1.2.1)$$

$$\text{za podm. } \sum_{i \in I} x_{i,j} \delta_i \geq 1 \quad \forall j \in J, \quad (1.2.2)$$

$$\delta_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \quad (1.2.3)$$

Pomocí rovnice (1.2.2) je zabezpečeno, že každý prvek S je pokryt alespoň jednou. Parametr c_i představuje cenu i -tého prvku a $x_{i,j}$ určuje které prvky S pokryje i -tý prvek \mathcal{S} .

Takto sestavený model má důležité vlastnosti:

(v1): Cílem je minimalizace za podmínek, které mají podobu nerovnosti „ \geq “.

(v2): Všechny koeficienty na pravé straně nerovnic (RHS – right hand side) jsou 1.

(v3): Všechny koeficienty na levé straně nerovnic jsou 0 nebo 1.

Binární PIP modely s výše uvedenými třemi vlastnostmi jsou označovány jako set covering problems. Existují také zobecněné varianty tohoto problému. Pokud je vlastnost (v2) opomenutá a pro některé koeficienty RHS povolujeme celá kladná čísla větší než 1, získáme vážený problém, tzv. *weighted set covering problem*. Další zobecnění, ke kterému někdy dochází, je při opomenutí vlastností (v2) i (v3) tak, abychom umožnili maticové koeficienty 0 nebo ± 1 . To vede k obecnému problému, tzv. *generalized set covering problem*. Jedna z možných aplikací je tvorba harmonogramu pro posádky letů. Množství dalších aplikací této problematiky je uvedeno například v Balas a Padberg (1975). *Set covering problems* jsou dobře řešitelné pomocí metody větví a mezí (*branch and bound method*), nicméně pro tyto problémy byly vyvinuty speciální algoritmy. Některé z nich jsou uvedeny například v Garfinkel a Nemhauser (1972).

Mezi podobné problémy patří například *set packing problems*, *set partitioning problems*. Hlavním rozdílem mezi modely těchto problémů jsou použité nerovnosti u omezení. *Set packing problems* využívají „ \leq “ a „ $=$ “ jsou obsaženy u *set partitioning problems*.

The assignment problem

V této úloze je úkolem přiřadit n pracovníků k n úkolům. Cílem je maximalizovat celkovou kompetenci k daným úkolům. Kompetence je určována podle času, který je potřebný k vykonání úkolu. Pracovník i zvládne úkol j za čas $t_{i,j}$. Problém budeme prezentovat jako minimalizaci celkového času potřebného na zvládnutí všech úkolů (viz účelová funkce 1.2.4). Tento problém je možné interpretovat i jako dopravní problém s n zdroji o produkci 1 a n místy s vtokem 1.

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} t_{i,j} x_{i,j}, \quad (1.2.4)$$

$$\text{za podm. } \sum_{j \in J} x_{i,j} = 1 \quad \forall i \in I, \quad (1.2.5)$$

$$\sum_{i \in I} x_{i,j} = 1 \quad \forall j \in J, \quad (1.2.6)$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \quad (1.2.7)$$

Proměnná nabývá svých hodnot následovně,

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pokud je } i\text{-tý člověk přiřazen k práci } j, \\ 0 & \text{v opačném případě.} \end{cases}$$

Rovnice (1.2.5) zabezpečuje, že každý pracovník vykonává právě jednu úlohu. Rovnice (1.2.6) zabezpečuje, že každá úloha je vykonávána právě jedním pracovníkem. Tuto úlohu není nutné formulovat jako IP. Při formulaci této úlohy jako LP (vynechání podmínky (1.2.7)) a následném řešení je optimem celočíselné řešení. Tento problém tedy můžeme řešit například známým simplexovým algoritmem, nicméně pro tento typ úlohy existují specializované

algoritmy. Nejznámější je algoritmus známý jako Maďarská metoda (*Hungarian method*) a je popsán například v Kuhn (1955).

P-median problem

Uvažujme problém plánování polohy zařízení. Mohou to být například nemocnice, restaurace, školy, hasičské stanice atd. K vyřešení tohoto problému existuje celá řada různých modelů. *P-median problem* je specifickým typem modelu využívaným pro tyto problémy. V tomto modelu chceme umístit p zařízení, aby se minimalizovala průměrná vzdálenost mezi uzly a místy, kde byla zařízení umístěna. U tohoto modelu neexistují v zařízeních žádná omezení kapacity (na rozdíl od *vertex p-center problem*).

Problém se dá popsat také pomocí grafu $G = (I, J, E)$. Uzly (místa s poptávkou) reprezentuje sada vrcholů $i \in I$. Místa k možnému umístění zařízení jsou dána jinou sadou vrcholů $j \in J$. Hraný $e_{i,j} \in E$ směřují pouze od vrcholů $i \in I$ k vrcholům $j \in J$. Hranám $e_{i,j}$ se přiřadí kladné váhy $d_{i,j} > 0$ představující vzdálenost mezi vrcholy i a j . Velikost poptávky v uzlu i představuje kladný parametr h_i . Cílem je umístit p zařízení tak, aby se minimalizovala vzdálenost mezi uzly a jejich servisními zařízeními.

Protože zařízení nejsou kapacitně omezena, můžeme předpokládat, že každý uzel je obsluhován jediným zařízením. Pro formulaci celočíselného lineárního programu (ILP) definujeme dvě rozhodovací proměnné. Nejprve definujeme proměnnou

$$Y_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pokud je poptávka v uzlu } i \text{ přiřazena k zařízení } j, \\ 0 & \text{v opačném případě.} \end{cases}$$

Ta popisuje, které uzly i jsou obsluhovány zařízením j . Druhá proměnná je definována níže,

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{pokud je v uzlu } j \text{ postaveno zařízení,} \\ 0 & \text{v opačném případě.} \end{cases}$$

Tato proměnná popisuje místa, ve kterých je umístěno zařízení. Vzhledem k těmto rozhodovacím proměnným můžeme formulovat *p-median problem* jako následující ILP.

$$\min \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} h_i d_{i,j} Y_{i,j}, \quad (1.2.8)$$

$$\text{za podm.} \quad \sum_{j \in J} Y_{i,j} = 1 \quad \forall i \in I, \quad (1.2.9)$$

$$Y_{i,j} - X_j \leq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \quad (1.2.10)$$

$$\sum_{j \in J} X_j = p, \quad (1.2.11)$$

$$X_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in J, \quad (1.2.12)$$

$$Y_{i,j} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J. \quad (1.2.13)$$

Účelová funkce (1.2.8) minimalizuje poptávkově váženou vzdálenost. První omezení (1.2.9) zaručuje, že každý uzel může být obsluhován pouze jedním zařízením. Nerovnost (1.2.10) zaručuje, že aby byl uzel i obsluhován zařízením j , pak musí být zařízení j postaveno. Rovnice (1.2.11) vyžaduje, aby bylo umístěných zařízení právě p . Zbývá dvě omezení (1.2.12) a (1.2.13) zaručují binárnost proměnných.

Další základní typy úloh, jako jsou například *knapsack problem*, *travelling salesman problem*, *transportation problem*, *vertex p-center problem*, *vehicle routing problem* a jiné, lze nalézt v [5], [6], [17], [18], [19], [20].

1.3 Metody vícekriteriální optimalizace

Široké množství různorodých problémů ve strojírenství, průmyslu a mnoha dalších oblastech zahrnuje současnou optimalizaci několika účelových funkcí. Často jsou účelové funkce definovány v nesrovnatelných jednotkách a existuje mezi nimi určitý stupeň konfliktu (hodnota jedné účelové funkce nemůže být zlepšena bez zhoršení jiné). Tyto problémy se nazývají problémy vícekriteriální optimalizace (MOP - *multiobjective optimization problems*).

Uvažujme například přepravní společnost, která má zájem minimalizovat celkovou dobu trvání svých tras, aby zlepšila služby zákazníkům. Na druhé straně chce společnost také minimalizovat počet použitých nákladních vozidel za účelem snížení provozních nákladů. Je zřejmé, že tyto cíle jsou ve vzájemném konfliktu, protože přidání dalších nákladních vozidel zkracuje dobu trvání tras, ale zvyšuje provozní náklady.

Existuje několik přístupů, jak vícekriteriální optimalizaci uchopit. Tyto přístupy jsou popsány v [3] nebo [4]. V této práci zmíníme pouze dvě metody, které byly využity v případové studii.

Metoda váženého součtu

Uvažujme účelové funkce $f_i(x)$ a parametry γ_i , kde $i \in \{1, \dots, n\}$. Dále, S je množina přípustných řešení. Potom metodu váženého součtu můžeme zapsat jako

$$\min \sum_{i=1}^n \gamma_i f_i(x), \quad (1.3.1)$$

$$\text{za podm. } x \in S. \quad (1.3.2)$$

V předpisu (1.3.1) je každé účelové funkci $f_i(x)$ přiřazena váha γ_i , která představuje důraz kladený na minimalizaci účelové funkce $f_i(x)$. Požadavky na váhy jsou následující:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i = 1 \quad \text{a} \quad \gamma_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Tedy váhy musí být kladné a jejich součet musí být roven 1. Je vidět, že pokud bude pouze jedna váha nenulová ($\gamma_i = 1$) pak je minimalizace totožná s jednokriteriální úlohou (minimalizace $f_i(x)$).

Metoda ε -omezení

Další možná technika řešení vícekritériální optimalizace je metoda ε -omezení předložená Chankongem a Haimesem v roce 1983. Podstata tohoto přístupu spočívá ve výběru jednoho kritéria k minimalizaci, zatímco u zbývajících účelových funkcí se omezí jejich maximální hodnoty, kterých mohou nabývat. Uvažujme účelové funkce $f_i(x)$ a parametry ε_i , kde $i \in \{1, \dots, n\}$, a S jako množinu přípustných řešení. Metodu ε -omezení můžeme zapsat jako:

$$\min \quad f_j(x), \quad (1.3.3)$$

$$\text{za podm.} \quad f_i(x) \leq \varepsilon_i \quad \forall i = \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}, \quad (1.3.4)$$

$$x \in S. \quad (1.3.5)$$

Rovnice (1.3.3) zaručuje minimalizaci účelové funkce $f_j(x)$. Podmínka (1.3.4) omezuje hodnoty účelových funkcí $f_i(x)$ na hodnoty menší než ε_i (1.3.4).

2 Přehled literatury

Hlavním cílem optimalizace v námi zkoumané problematice bývá především ekonomický aspekt lokalizačních a alokačních úkolů a to hlavně z důvodu dlouhodobé ekonomické udržitelnosti. Nicméně se řeší i například optimalizace spojená s životním prostředím. Rozsáhlý přehled těchto problémů byl popsán v [21].

Často se při návrhu rozmístění sběrných míst pracuje se vzdáleností ke sběrným místům od producentů odpadu (docházková vzdálenost). Často se tedy využívají výpočetní nástroje založené na GIS (Geographic Information System). Například [22] bere v potaz kromě docházkové vzdálenosti také naplněnost sběrných míst. Dále se zde pracuje s více frakcemi KO a s omezenou maximální vzdáleností využívající také infrastrukturu založenou na GIS. Nově vycházející články zabývající se nakládáním s odpady se v základních myšlenkách příliš neliší. Mezi netradiční řešení patří například vakuové systémy [23]. Odpad vhozený do sběrného místa (turniketu) je pomocí podtlaku přepraven uzavřeným systémem podzemních potrubí do vzdáleného centrálního sběrného terminálu. Práce se věnovala ekonomické stránce vakuového systému a dále byl tento systém porovnán s tradičními systémy sběru odpadu. Některé provedené studie, jako je tomu například v [24], využívají více scénářů. Zde jsou uvažovány 2 scénáře. Hlavní rozdíl mezi těmito scénáři spočívá v tom, že směsný odpad ve scénáři A bude uložen v kontejnerech umístěných u vstupních dveří budov („door-to-door“ systém), zatímco ve scénáři B bude uložen v kontejnerech umístěných podél ulic v maximální vzdálenosti od občanů 30 m (donáškový systém). K navrhování rozmístění sběrných míst se využívají sítě založené na softwaru GIS a při optimalizaci je pozornost věnována především docházkové vzdálenosti.

Trochu jiný pohled na problematiku přináší například [25]. Nově se zde pracuje s náklady spojenými s vybudováním sběrného místa. Problematika byla formulována jako max-min problém. Cílem bylo maximalizovat množství separovaného KO a zároveň minimalizovat náklady spojené se sběrnými místy.

Například v [26] se zohledňovala nejen docházková vzdálenost, ale i počet sběrných míst. Zajímavostí tohoto článku je výpočet založený na vytvořeném heuristickém algoritmu. Někdy se problematika řeší ve dvou fázích. Například ve [27] se v první fázi navrhuje umístění sběrných míst a následně (druhá fáze) se optimalizuje jejich sběr. Kritériem pro první fázi byla pouze docházková vzdálenost. V této práci se uvažovaly různé scénáře pro různá množství sběrných míst, ale nebyl uveden žádný matematický model. V [28] je řešen podobný problém. Dále je zde navržen rychlý a efektivní heuristický algoritmus k identifikaci homogenních zón, které mohou být obsluhovány vždy jedním sběrným vozidlem. Výsledkem je menší opotřebenost vozidel při sběru odpadu. Celková ujetá vzdálenost se v průměru snížila asi o 25%.

Další možností je dívat se na tento problém jako na vícekriteriální úlohu. Například v [29] se používají 4 účelové funkce, z nichž 1 se využívá pro minimalizaci celkových investičních nákladů, a zbylé 3 jsou různým způsobem spojeny s docházkovou vzdáleností. Účelové funkce spojené s docházkovou vzdáleností jsou tyto: první minimalizuje průměrnou docházkovou vzdálenost, zbylé dvě se zabývají „pull“ and „push“ charakteristikami rozhodovacího problému. Tedy minimalizuje se tak, aby co nejméně obyvatel bydlelo příliš blízko a příliš daleko od sběrných míst. Práce [30] se v první účelové funkci shoduje, tedy minimalizuje investiční náklady spojené se sběrnými místy. Druhá použitá účelová funkce je založena na aspektu spokojenosti obyvatelstva (producentů odpadu). K simulaci spokojenosti obyvatelstva se využívají „pull“ and „push“ charakteristiky rozhodovacího problému (jednotlivci nechtějí žít příliš blízko, ale nechtějí žít ani příliš daleko od sběrných míst).

Většina publikací zohledňuje různým způsobem pouze docházkovou vzdálenost. Některé pracují s naplněností sběrných míst, s náklady na vytvoření sběrného místa nebo s počtem sběrných míst. Nicméně žádný z přístupů neodpovídá řešenému zadání (viz 3.1), proto je vyvinut unikátní model pro tyto potřeby.

3 Model

3.1 Definice úlohy

Cílem bylo navrhnout rozmístění sběrných míst pro různé frakce KO s přihlédnutím na docházkovou vzdálenost, ekonomickou náročnost a využití alokovaných kapacit. V modelu jsou tedy zohledněny: docházková vzdálenost, počet sběrných míst, roční náklady, servisní čas, celkové a lokální naplnění sběrných míst. Vstupní data z hlediska města zahrnují pouze adresní místa s GPS souřadnicemi a počtem obyvatel. Pro zbylé nastavení úlohy uživatelem (požadavky na minimální naplněnosti, uvažované kapacity sběrných míst s ročními náklady a jejich servisním časem, svozová frekvence a jiné) je vytvořeno uživatelské prostředí. Chybovost modelu je očekávána nízká, protože do jisté míry přesně odpovídá realitě, pracuje například s různými frekvencemi svozu odpadu, a rozmanitou nabídkou kapacit sběrných míst. Výstupem je návrh rozmístění sběrných míst včetně předpokládaných naplněností sběrných míst.

3.2 Představení modelu

Úloha je modelována jako tok v síti (více o síťových úlohách v [17] nebo [31]). Tato toková konstrukce modelu byla zvolena z důvodu zjednodušení úlohy (nepracuje se přímo s obyvateli, ale s adresními místy), která zajišťuje její řešitelnost v rozumném čase. Model je sestaven s ohledem na 4 hlavní požadavky, které vycházejí z definice úlohy. První souvisí s docházkovou vzdáleností a zbylé tři zastupují ekonomickou náročnost. Konkrétně model pracuje s následujícími kritérii:

- Množstevní docházková vzdálenost – vzdálenost mezi adresními body a kandidáty na umístění sběrných míst násobena množstvím přenášeného odpadu (viz rovnice (3.2.1)).
- Počet rozestavených sběrných míst – ovlivňuje celkový počet kontejnerů a souvisí také s následným svozem (méně sběrných míst indikuje menší náklady na následný svoz), viz rovnice (3.2.2).
- Roční náklady – celkové pořizovací náklady normovány životností sběrných nádob (viz rovnice (3.2.3)).
- Servisní čas – celkový čas potřebný pro manipulaci se sběrnými nádobami (viz rovnice (3.2.4)).

Tato kritéria jsou dále využívána v různých kombinacích pro identifikaci jejich vzájemných závislostí. Používané vícekritériální přístupy se řídí principy metody váženého součtu a metody ϵ -omezení.

Nejdříve je vhodné definovat potřebné množiny, parametry a proměnné, které jsou přehledně uvedeny v tab. 2.

Tab. 2: Definice množin, parametrů a proměnných matematického modelu.

Typ	Označení	Popis
Množina		
	$i \in I$	Uzly – potenciální sběrná místa (adresní body)
	$j \in J$	Hrany – spojení adresních bodů
	$k \in K$	Množina typů sběrných míst
	$m, n \in S$	Množina $\{1, 2, 3, 4\}$, slouží pro rozlišení účelových funkcí v Modelu I

Parametr	
p_i	Produkce odpadu v uzlu i [$L \cdot \text{týden}^{-1}$]
$a_{i,j}$	Prvky uzlově hranové incidenční matice A
$b_{i,j}$	Prvky matice B , která je submaticí matice A , kde jsou vynechány hodnoty -1
d_j	Délka hrany j [m]
$c_{i,k}$	Prvky matice definující možné kapacity sběrných míst pro každý uzel i a typ sběrného místa k [L]
$r_{i,k}$	Prvky matice definující roční náklady sběrných míst pro každý uzel i a typ sběrného místa k [Kč·rok $^{-1}$]
$g_{i,k}$	Prvky matice definující čas potřebný pro servis sběrných míst pro každý uzel i a typ sběrného místa k [s]
$f_{i,k}$	Prvky matice definující možné svozové frekvence pro každý uzel i a typ sběrného místa k
U^T	Minimální hodnota naplněnosti všech alokovaných kapacit
U_i^I	Minimální hodnota naplněnosti alokované kapacity pro uzel i
$q_{i,k}$	Pomocný binární parametr sloužící k eliminaci alokované nulové kapacity při sčítání sběrných míst.
w_i	Pomocný binární parametr sloužící k určení, zda na adresním bodě může být sběrné místo
α	Váhový parametr
$\varepsilon_2, \varepsilon_3$	Parametry omezující počet sběrných míst a roční náklady u Modelu V
Proměnné	
x_j	Tok odpadu hranou j
t_i	Zpracování odpadu v uzlu i
$h_{i,k}$	SOS1 proměnná, indikuje specifický typ a frekvenci svozu sběrného místa v uzlu i
z_1	Množstevní docházková vzdálenost
z_2	Celkový počet sběrných míst
z_3	Celkové roční náklady na použité sběrné nádoby
z_4	Čas potřebný pro servisní obsluhu sběrných nádob
z_5	Vyjádření součtu relativních změn od optimálních hodnot dvou kritérií v závislosti na parametru α
z_6	Limitní hodnota relativních změn od optimálních hodnot kritérií
z_7	Celková relativní změna od optimálních hodnot jednotlivých kritérií
Skalár	
z_m^*	Optimální hodnota jednokriteriální úlohy (Model I)

Nyní je možné popsat zvolená kritéria optimalizačních úloh v samostatných rovnicích. Ty jsou následně využity pro formulaci různých modelů a jejich účelových funkcí. Rovnice (3.2.1) sčítá celkovou množstevní docházkovou vzdálenost mezi všemi producenty odpadu. Rovnice (3.2.2) určuje počet sběrných míst. Rovnice (3.2.3) sčítá roční náklady na pořízení sběrných nádob. Rovnice (3.2.4) určuje dobu potřebnou pro servis sběrných míst (čas

potřebný pro vyprázdnění sběrného místa). Rovnice (3.2.5) vyjadřuje součet relativních změn od optimálních hodnot dvou kritérií v závislosti na parametru α (bližší popis viz Model II na str. 19). Rovnice (3.2.6) definuje omezení proměnné z_6 , které je složeno z relativních změn kritérií od jejich optimálních hodnot a rovnice (3.2.7) definuje celkovou relativní změnu od optimálních hodnot jednotlivých kritérií. Nerovnice (3.2.8), (3.2.9) omezují hodnoty z_2 a z_3 na základě pomocných parametrů $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

$$z_1 = \sum_{j \in J} d_j x_j \quad (3.2.1)$$

$$z_2 = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} h_{i,k} q_{i,k} \quad (3.2.2)$$

$$z_3 = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} h_{i,k} r_{i,k} \quad (3.2.3)$$

$$z_4 = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} h_{i,k} g_{i,k} f_{i,k} \quad (3.2.4)$$

$$z_5 = \alpha \cdot z_m / z_m^* + (1 - \alpha) \cdot z_n / z_n^* \quad (3.2.5)$$

$$z_6 \geq z_m / z_m^* \quad \forall m \in S, \quad (3.2.6)$$

$$z_7 = \sum_{m \in S} z_m / z_m^* \quad (3.2.7)$$

$$z_2 \leq \varepsilon_2 \quad (3.2.8)$$

$$z_3 \leq \varepsilon_3 \quad (3.2.9)$$

Následuje výpis okrajových podmínek, které musí být v úloze splněny. Celkový výčet rovnic a nerovnic (3.2.8)–(3.2.16) definuje tzv. oblast přípustných řešení úlohy.

$$\sum_{j \in J} a_{i,j} x_j + p_i - t_i = 0 \quad \forall i \in I, \quad (3.2.10)$$

$$t_i \leq \sum_{k \in K} c_{i,k} f_{i,k} h_{i,k} w_i \quad \forall i \in I, \quad (3.2.11)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} c_{i,k} f_{i,k} h_{i,k} U^T \leq \sum_{i \in I} t_i \quad (3.2.12)$$

$$t_i \geq \sum_{k \in K} c_{i,k} f_{i,k} h_{i,k} U_i^I \quad \forall i \in I, \quad (3.2.13)$$

$$p_i \geq \sum_{j \in J} b_{i,j} x_j \quad \forall i \in I, \quad (3.2.14)$$

$$\sum_{k \in K} h_{i,k} = 1 \quad \forall i \in I, \quad (3.2.15)$$

$$h_{i,k} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \quad (3.2.16)$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in J, \quad (3.2.17)$$

$$t_i \geq 0 \quad \forall i \in I. \quad (3.2.18)$$

Rovnice (3.2.10) představuje bilanční omezení, aby byl všechen vyprodukovaný odpad v uzlu a odpad, který je do uzlu přemístěn, buď zpracován (v tomto případě svezem sběrným vozem) nebo byl přemístěn do jiného uzlu, tj. odpad bude vyhazován do sběrného místa v jiném uzlu. Zpracování v uzlu (t_i) musí být menší než přidělená kapacita v nerovnici (3.2.11). Z důvodu zajištění efektivního využití sběrných nádob je přidáno omezení (3.2.12). To udává minimální celkové naplnění všech kontejnerů. Předchozí omezení doplňuje nerovnice (3.2.13), kde je požadováno minimální naplnění pro každou sběrnou nádobu zvlášť, tj. tzv. individuální naplnění. Množství odpadu proudící po hraně (mezi jednotlivými sběrnými místy) je omezeno produkcí v počátečním uzlu. Produkce p_i se může rozdělit do více sběrných nádob. Tím je vynucena podmínka, že tok nebude pokračovat přes jiné uzly, viz nerovnice (3.2.14). Předchozí tvrzení předpokládá, že bude v uzlu zpracováván přednostně přinesený odpad z jiného uzlu. Tato toková konstrukce modelu byla zvolena z důvodu zjednodušení úlohy, která zajišťuje její řešitelnost v rozumném čase. Pro každé sběrné místo lze navíc vybrat pouze jednu kapacitu. K tomu je využita proměnná $SOS1$, její vlastnost zaručuje rovnice (3.2.15). Rovnice (3.2.16), (3.2.17) a (3.2.18) uvádějí typy proměnných (binární a nezáporná spojitá).

Předchozí text definoval okrajové podmínky úlohy a uvedl uvažovaná kritéria pro následné optimalizační modely.

Model I

$$\begin{array}{ll} \min & z_m, \\ \text{za podm.} & (3.2.10) \text{ až } (3.2.18). \end{array}$$

První model definuje jednokriteriální úlohy. Minimalizujeme vždy pouze jedno z hlavních kritérií, viz rovnice (3.2.1) až (3.2.4). Propojenost volby m s minimalizovaným kritériem a označením účelové funkce je uvedena v tab. 3.

Tab. 3: Souvislosti v modelu I.

Volba m	Minimalizované kritérium
$m = 1$	množstevní docházková vzdálenost (MDV)
$m = 2$	počet sběrných míst (PSM)
$m = 3$	roční náklady (RN)
$m = 4$	servisní čas (SC)

Model II

$$\begin{array}{ll} \min & z_5, \\ \text{za podm.} & (3.2.5), (3.2.10) \text{ až } (3.2.18). \end{array}$$

Pro vícekriteriální úlohy bylo využito druhého modelu, který reprezentuje metodu váženého součtu. Hlavní roli zde hraje rovnice (3.2.5), která využívá konvexní kombinace dvou znormovaných kritérií. V závislosti na volbě m, n může úloha nabývat 6 různých podob (pro $m = n$ by se jednalo o jednokriteriální úlohu). Váhovým parametrem α se určuje preference kritéria pro minimalizaci (pro $\alpha = 0,5$ jsou obě kritéria stejně významná).

Hodnoty z_m^*, z_n^* jsou minima účelových funkcí, kterých bylo dosaženo při řešení jednokriteriálních úloh. V tomto modelu zajišťují stejný význam pro obě zvažovaná kritéria (normování).

Dalším typem využívaných modelů jsou Modely III a IV. V těchto modelech jsou zohledněna všechna uvažovaná kritéria. U obou modelů je cílem omezit negativní vliv vícekritériální úlohy (tj. zhoršení výsledků pro jedno kritérium z důvodu snahy minimalizovat ty ostatní). Pro tento cíl byly využity různé přístupy.

Model III

$$\begin{array}{l} \min \\ \text{za podm.} \end{array} \quad z_6, \quad (3.2.6), (3.2.10) \text{ až } (3.2.18).$$

U modelu III se hledá kompromis mezi jednotlivými kritérii tak, aby u žádného nedošlo k velkému zhoršení oproti výsledkům z jednokriteriální úlohy. Ve výsledku to znamená, že se toto zhoršení minimalizuje pro to kritérium, u kterého je zhoršení nejvýznamnější.

Model IV

$$\begin{array}{l} \min \\ \text{za podm.} \end{array} \quad z_7, \quad (3.2.7), (3.2.10) \text{ až } (3.2.18).$$

Tento model cílí na optimální určení proměnných tak, aby celkové zhoršení oproti výsledkům z jednokriteriální úlohy bylo minimální. Model IV minimalizuje součet všech zhoršení u jednotlivých kritérii oproti jednokriteriální úloze.

Model V

$$\begin{array}{l} \min \\ \text{za podm.} \end{array} \quad z_1, \quad (3.2.8) \text{ až } (3.2.18).$$

Poslední model, který byl sestaven z výše uvedených rovnic a nerovnic je označen jako Model V. Tento model reprezentuje metodu ε -omezení. Parametry $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ omezují počet sběrných míst (ε_2), resp. množství ročních nákladů (ε_3). S přihlédnutím k těmto omezením se minimalizuje MDV.

4 Zpracování dat

Matematický model byl využit pro řešení úlohy s reálnými daty. Ústav procesního inženýrství poskytl reálná data města Tábor. Město Tábor, s rozlohou asi 62 km², je složeno z 15 městských částí. Rozkládá se zde cca 6 000 adresních bodů s přibližně 35 000 obyvateli. Hustota obyvatel činí cca 564 obyvatel·km⁻². Zpracovávaná data obsahovala seznam adresních míst s GPS souřadnicemi a s průměrným počtem obyvatel, viz příklad v tab. 4. Poznamenejme, že počet obyvatel zde není uveden jako celé číslo, protože se jedná o průměrnou hodnotu na jednu bytovou jednotku.

Tab. 4: Základní data – příklad pro vybrané adresní body.

Adresa	Průměrný počet obyvatel	Zeměpisná šířka	Zeměpisná délka
Vožická 620	2,05	49,4173	14,6973
Na Zahradách 220	4,10	49,4187	14,6460
Jaselská 2327	26,65	49,4217	14,6490
Jaselská 2324	51,25	49,4216	14,6501
Havanská 2826	82,01	49,3919	14,6789

V rámci preprocessingu se tato data zpracovala v programu Microsoft Excel. Pomocí VBA (Visual Basic for Applications) byla vytvořena vstupní datová sada pro následné řešení úlohy v programu GAMS (General Algebraic Modeling System). Zpracování dat zahrnuje následující procesy. Výše uvedené modely aplikované na reálná data města Tábor představují rozsáhlé problémy, které jsou časově náročné na řešení, a v některých případech může být úloha dokonce v rozumném čase neřešitelná. Za účelem zjednodušení modelu se přistoupilo k vhodné přípravě dat. Nejprve byl stanoven počet adresních míst, která se berou v úvahu. Ve většině případů se bude pracovat s celým městem, ale pokud by město bylo moc velké, pak by bylo nutné uvažovat pouze menší územní celky jako jsou např. městské části. Popis vazeb mezi jednotlivými adresními body je zajištěn pomocí incidenční matice. Při jejím generování se pracuje se všemi adresními body. Výstupem je orientovaná hrana mezi každou uspořádanou dvojicí adresních bodů. K adresnímu bodu nemusí být přiřazena populace, je tedy možné pracovat například s místy, kde by bylo vhodné místo pro sběrnou síť uvažovat nebo těmi místy, kde již sběrné místo existuje. Stejně tak lze vhodným zadáním sady kapacit (viz níže) zařídit, aby se v nějakém adresním bodě sběrné místo vytvořilo. Tímto způsobem vzniká značné množství hran. Stejně tak délka vzniklých hran může být ve spoustě případů z pohledu pěší docházky příliš velká. Z tohoto důvodu bylo zvoleno omezení na rozumnou maximální délku hrany, která redukuje celkový počet hran. Podobným způsobem byl zvolen i maximální počet hran, které bude mít každé adresní místo k dispozici (kam je možné vyprodukovaný odpad odnést). Pro zajištění efektivního využití sběrných míst byla do úlohy přidána omezení pro minimální naplnění sběrných nádob. První takové omezení představuje požadavek na minimální naplnění každé z kapacit sběrných míst (jaká minimální část kapacity každého sběrného místa musí být naplněna). Druhým omezením je požadavek na minimální naplnění všech kapacit (jaká minimální část celkové kapacity sběrných míst musí být naplněna). Pokud nastane situace, že z adresního místa nevede žádná hrana (hrany s velkou délkou jsou odfiltrovány), pak je požadavek na individuální naplnění kapacity u tohoto adresního místa ignorován. Nedílnou součástí vstupu uživatele je také možnost vytvoření různých sad uvažovaných sběrných míst a jejich svozových frekvencí pro různá adresní místa (na základě populace). Týdenní produkce každého adresního bodu i je

vypočítána podle následujícího vzorce (pro srozumitelnost jsou parametry obsažené ve výpočtu pojmenovány textovou formou):

$$p_i = \frac{\text{populace}_i \cdot \text{týdenní_produkce}}{\text{sypná_hmotnost}} \left[\frac{\text{L}}{\text{týden}} \right] \quad (3.2.19)$$

Roční produkce a sypná hmotnost se pro různé frakce liší. Sypná hmotnost může být navíc rozdílná pro různý typ zástavby.

5 Případová studie

Pro potřeby případové studie bylo zvoleno město Tábor. Do úlohy budou zahrnuty všechny adresní body, tj. cca 6 000 adresních míst. Počet hran z adresního bodu byl omezen na 20 nejkratších s maximální délkou 200 m. Minimální naplněnost jednotlivých kapacit byla stanovena na 30 % a celková naplněnost je požadována na 70 %. Problematika rozmístění sběrných nádob byla řešena pro plasty. Produkce plastu je uvažována $9 \text{ kg} \cdot \text{os}^{-1} \cdot \text{r}^{-1}$ se sypanou hmotností $0,06 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Dále se uvažovalo 7 různých typů sběrných míst, jejichž kapacity udává tab. 5.

Tab. 5: Možnosti kapacit pro sběrná místa.

Možnosti kapacit sběrných míst [L]						
0	120	240	480	720	1 100	2 200

Aby bylo možné využít kapacitu kontejnerů efektivně, a splnit požadavky na naplnění sběrných míst je nutné uvažovat pro různé typy zástaveb různé možnosti svozové frekvence. Městská zástavba byla rozdělena podle počtu obyvatel na dva typy zástaveb (0 až 8 obyvatel a 9 a více obyvatel) a celkem bylo vyžito tři různých frekvencí svozu odpadu (1x za týden, 1x za 2 týdny, 1x za 4 týdny), viz tab. 6. Ve městě Tábor mají jasnou převahu zástavby s maximálně 8 obyvateli, takových míst je 5 236 (88 % ze všech adresních bodů, 38 % z celkové populace). Zástaveb s větším počtem obyvatel je 718 (12 % ze všech adresních bodů, 62 % z celkové populace).

Tab. 6: Frekvence svozu sběrných nádob dle počtu obyvatel.

Počet obyvatel	Možnosti frekvence svozu	
0 až 8	1x za 4 týdny	1x za 2 týdny
9 a více	1x za 2 týdny	1x za týden

Sběrná místa jsou složena z jedné či více sběrných nádob. Sběrné nádoby použité pro vytvoření sběrných míst o uvažovaných kapacitách jsou uvedeny v tab. 7.

Tab. 7: Složení sběrných míst ze sběrných nádob.

Sběrná místa [L]	Sběrné nádoby [L]
120	1x 120
240	1x 240
480	2x 240
720	3x 240
1 100	1x 1 100
2 200	2x 1 100

Hlavní charakteristiky sběrných nádob, z nichž jsou složena sběrná místa, lze v zaokrouhlené podobě vidět v tab. 8. Použité hodnoty týkající se životnosti, pořizovacích nákladů a servisního času byly převzaty z [32]. Roční náklady sběrných nádob se získaly jako podíl pořizovacích nákladů a životnosti. U uvedeného servisního času se předpokládá, že nádoba je volně dostupná a je umístěna v těsné blízkosti místa, kam může dojet svozové vozidlo.

Tab. 8: Hlavní charakteristiky sběrných nádob.

Kapacita [L]	Pořizovací náklady [Kč]	Životnost [r]	Servisní čas [s]	Roční náklady [Kč·r ⁻¹]
120	900	8	35	112
240	1 200	8	35	150
1 100	6 800	5	90	1 358

Další část textu se bude zabývat úlohou alokace kapacit. Cílem bude najít optimální řešení různých modelů (viz výše). Získaná řešení budou podrobena analýze se zaměřením na různá hlediska. Mezi hlavní kritéria kvality řešení patří MDV, počet sběrných míst, roční náklady a servisní doba.

5.1 Jednokriteriální úlohy

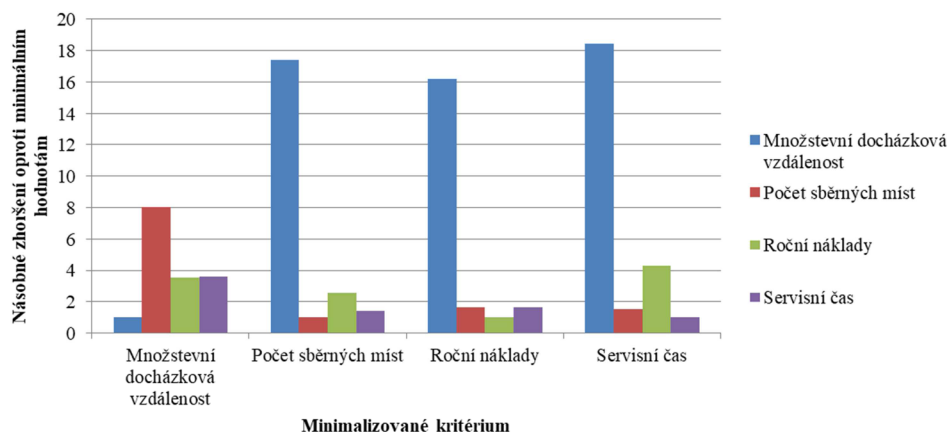
V této části textu budou řešeny úlohy, ve kterých se bude minimalizovat účelová funkce s ohledem pouze na jedno kritérium. Při řešení jednokriteriálních úloh se využil Model I. V závislosti na směru minimalizace (kritérium optimalizace) se využily účelové funkce (3.2.1) až (3.2.4). V této chvíli byly uvažovány všechny adresní body jako potenciální místa pro umístění sběrných nádob. Parametr w_i tedy obsahoval pouze hodnoty 1.

Tento typ úloh (minimalizace v jednom směru) může mít za následek extrémně vysoké hodnoty v jiné oblasti zájmu (ostatní kritéria). Typickým příkladem tohoto jevu je minimalizace MDV, kdy jsme schopni tuto vzdálenost mít velice nízkou, ovšem platíme za to velkým PSM. Naopak, pokud by byl minimalizován PSM, nutným důsledkem bude nárůst MDV. Tento jev je přehledně zobrazen v grafu na obr. 6. Na ose x lze vidět kritérium minimalizace a na ose y je zobrazeno zhoršení daného kritéria (MDV, PSM, RN, SC) oproti jeho minimální dosažitelné hodnotě. Lze si zde povšimnout, že při minimalizaci PSM, RN nebo SC dochází k nízkému nárůstu zbývajících dvou kritérií, ovšem ve všech třech případech došlo k více než 15násobnému zhoršení kritéria MDV. Při minimalizaci MDV naopak došlo k více než 8násobnému zvýšení PSM. Nebýt tohoto výrazného zvětšení, mohlo by se jevit toto řešení jako uspokojivé ve všech ohledech. Stejně tak i při minimalizaci RN došlo k nízkému navýšení SC i PSM, nicméně obrovský nárůst MDV působí nepříznivě i pro tuto účelovou funkci.

Z grafu na obr. 6 je možné vyčíst, že rozptyl násobků hodnot kritérií je dosti různý. MDV dosahuje pro některé účelové funkce až cca 18násobku, kdežto PSM jen cca 8násobku, RN a SC pouze cca 4násobku.

Poznámka

Je nutné zmínit, že se v úlohách požaduje minimální naplnění alespoň 30 %. To má za následek, že při minimalizaci MDV byla převážně jedno-kontejnerová sběrná místa umístěna skoro ke každému druhému adresnímu bodu (viz obr. 10). Díky tomu mohlo dojít ke značnému zminimalizování MDV, a proto dochází při minimalizaci ostatních kritérií k tak výrazným násobkům MDV. Pokud by bylo požadováno naplnění jednotlivých kapacit např. alespoň 60 %, pak by pravděpodobně byla minimalizovaná hodnota MDV vyšší (sběrná místa by nebyla umístěována tak často), a tudíž by její násobky při minimalizaci ostatních kritérií nebyly tak vysoké (pro 30 % až 18násobek, pro 60 % výrazně méně). Samozřejmě má požadavek na minimální naplnění vliv i na ostatní kritéria, ale při minimalizaci MDV je největší snaha využít omezení minimální naplněnosti.



Obr. 6: Porovnání účelových funkcí podle hlavních kritérií.

Další aspekt, který je velmi zajímavý, souvisí s typem sběrných nádob a frekvencí svozu. Z pohledu kapacity sběrných míst byly zvoleny následující hodnoty: 120, 240, 480, 720, 1 100 a 2 200 L. Každé sběrné místo je složeno z kombinace sběrných nádob o kapacitách 120, 240 a 1 100 L. Než budou zobrazeny konkrétní výsledky, je vhodné uvést vazbu objemu sběrných nádob na roční náklady a servisní čas, viz tab. 9. Tabulka vznikla vzájemným podělením údajů z tab. 8.

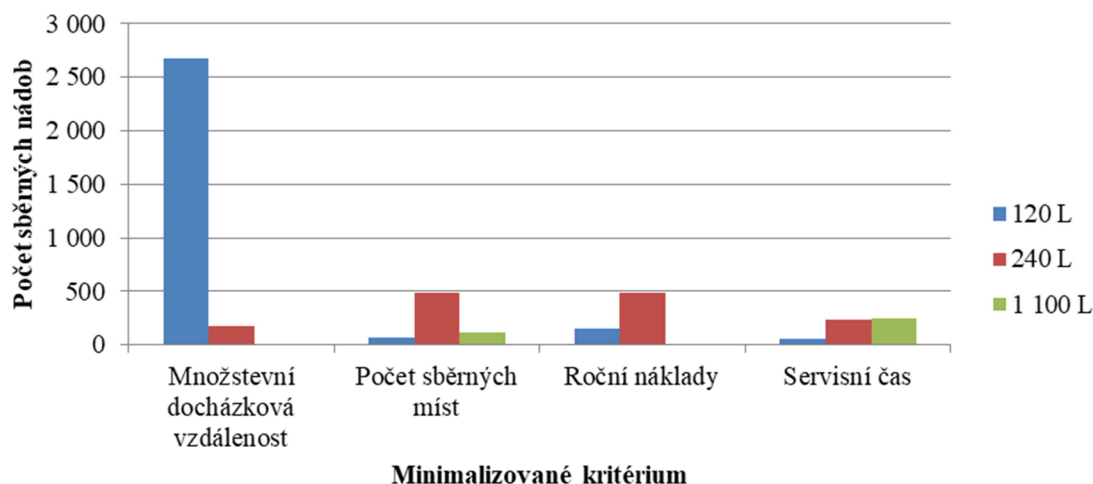
Tab. 9: Vazba objemu sběrných nádob na roční náklady a servisní čas.

Kapacita [L]	Roční náklady [Kč·r ⁻¹ ·L ⁻¹]	Servisní čas [s·L ⁻¹]
120	0,94	0,29
240	0,62	0,15
1 100	1,23	0,08

Z tab. 9 vyplývá, že při minimalizaci SC bychom měli používat převážně sběrné nádoby s kapacitou 1 100 L (tedy sběrná místa o kapacitách 1 100 L a 2 200 L). A při minimalizaci RN převážně sběrné nádoby o kapacitách 240 L (tedy sběrná místa o kapacitách 240 L, 480 L a 720 L). Další faktor související s volbou velikosti sběrného místa je frekvence svozu.

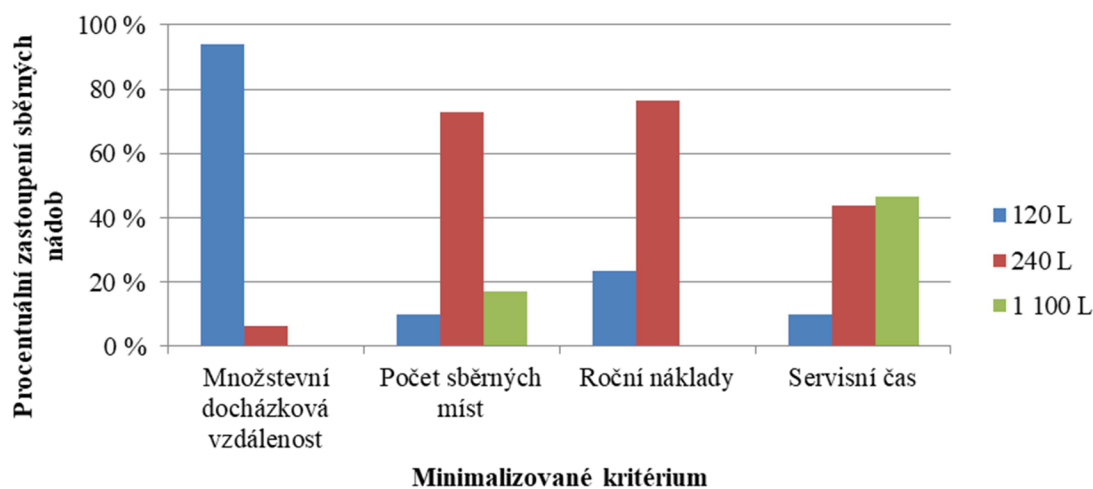
Následující text se bude věnovat výsledkům optimalizačních výpočtů. Následující dva grafy zobrazují počet (obr. 7) a procentuální zastoupení (obr. 8) užitých typů sběrných nádob o daných velikostech pro vybraná sběrná místa. Pomocí dalšího grafu (obr. 9) je ukázána provázanost výsledků pro různá kritéria optimalizace s volbou četnosti frekvence.

Při minimalizaci MDV bylo použito 2 856 sběrných nádob (o 29 více, než je počet rozmístěných sběrných míst, byly tedy použity hlavně jedno-kontejnerové kapacity). Více než 90 % z nich mělo objem 120 L a jen výjimečně byly použity kontejnery větší. V kombinaci se svozovou frekvencí, která byla v cca 75 % 1x za 4 týdny, bylo možno vytvořit velké množství sběrných míst při splnění požadavků na jejich naplnění a tím minimalizovat docházkovou vzdálenost.

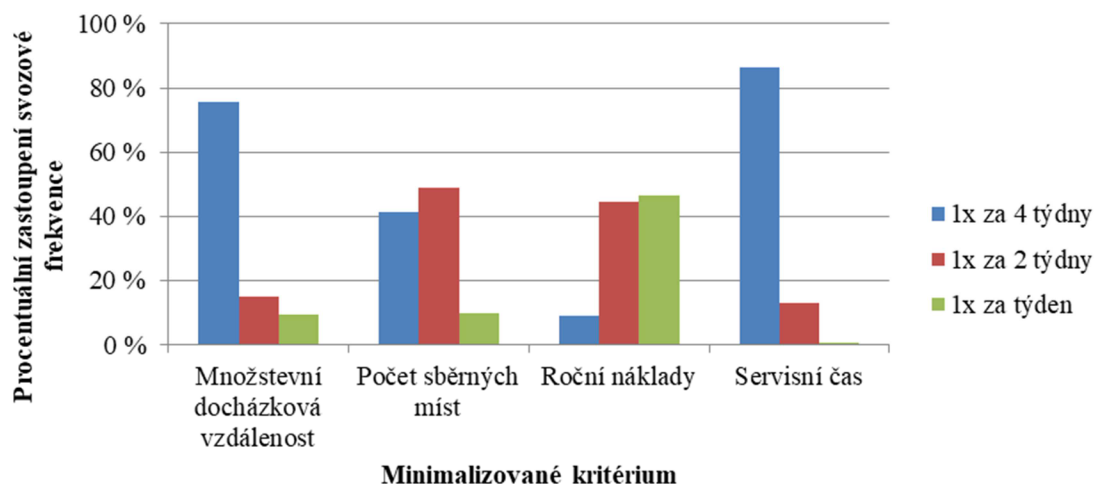


Obr. 7: Počet rozmístěných sběrných nádob.

Dále se minimalizovaly RN. Bylo použito pouze o 48 kontejnerů více, než je počet rozmístěných sběrných míst. Tedy jako v předchozím případě byly použity převážně jedno-kontejnerové kapacity. V grafech na obr. 7, obr. 8 je možné vidět, že se použil většinou objem 240 L (z toho cca 86 % v místě s kapacitou 240 L) a v cca 30 % byl použit objem 120 L. Po nahlédnutí do tab. 9 je možné zjistit, že použití převážně objemu 240 L odpovídá našim představám o minimalizaci ročních nákladů.

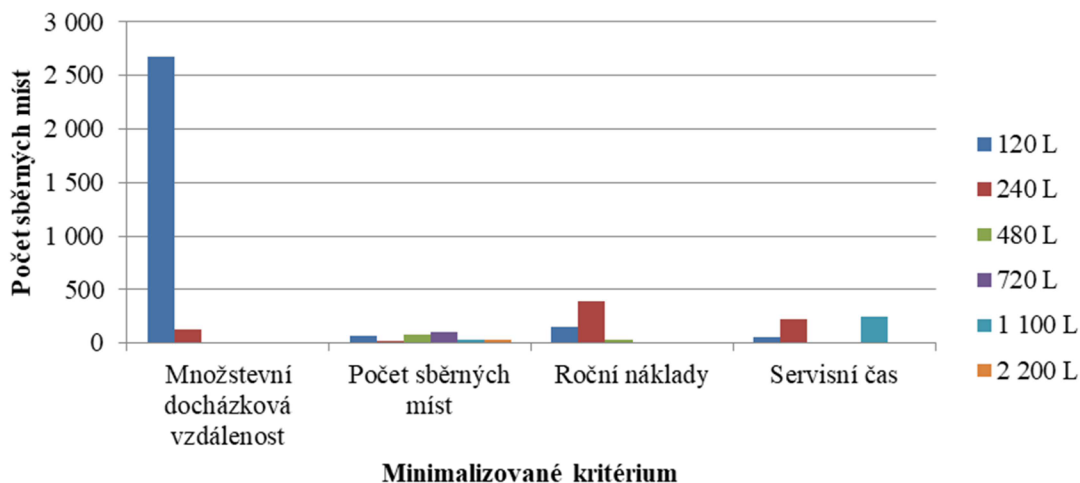


Obr. 8: Procentuální zastoupení rozmístěných sběrných nádob.

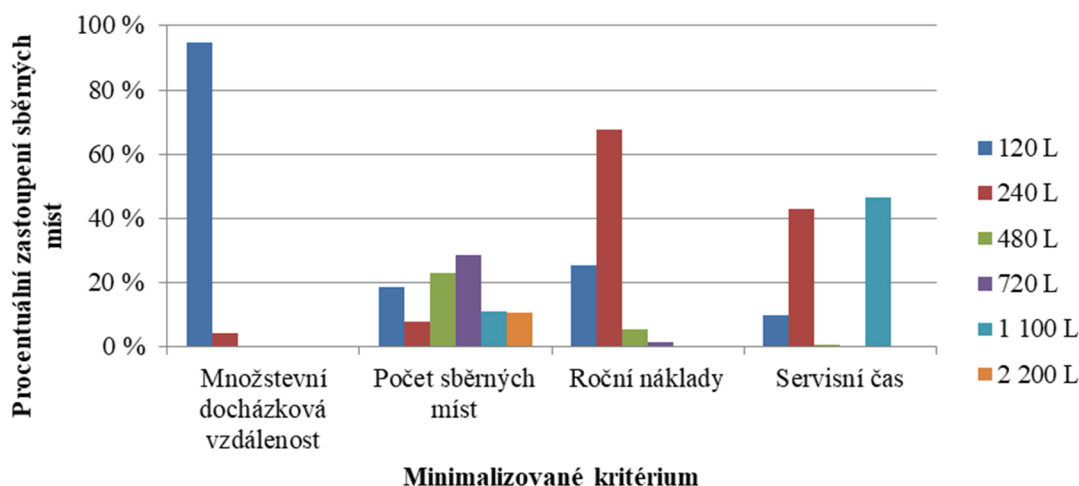


Obr. 9: Frekvence svozu.

Stejně jako v obou předchozích případech, i při minimalizaci SC je rozdíl mezi počtem rozmístěných sběrných míst a počtem použitých sběrných nádob malý. Jsou to pouze 3 sběrné nádoby, tedy i zde jasně převládá použití jedno-kontejnerových kapacit. Nejčastější volbou zde byl objem 1 100 L a to skoro v 50 % případů. Téměř ve 43 % byl použit objem sběrné nádoby 240 L. Více než 85 % sběrných míst je spjato se svozem 1x za 4 týdny. Po nahlédnutí do tab. 9 se volba kapacity 1 100 L jeví přirozenou (nejlepší poměr $s \cdot L^{-1}$, tedy servisní čas jednoho litru kapacity je nejnižší). Je nutné si uvědomit, že týdenní produkce jednoho člověka je pouhých 2,9 L. Je tedy jasné, že kontejner o kapacitě 1 100 L má v tomto případě dosti omezené možnosti použití. Frekvence svozu nehraje roli pouze při dodržení podmínek naplnění, ale je zohledněna přímo v účelové funkci (viz rovnice (3.2.4)). I to vysvětluje tak častou volbu nízké svozové frekvence.



Obr. 10: Počet alokovaných kapacit sběrných míst.



Obr. 11: Procentuální zastoupení alokovaných kapacit sběrných míst.

Posledním minimalizovaným kritériem je PSM. Toto řešení se od všech ostatních odlišuje především téměř dvojnásobným počtem použitých sběrných nádob oproti počtu sběrných míst. Nyní charakteristiky sběrných nádob nehrály hlavní roli a záleželo pouze na kapacitách sběrných míst a na možnostech jejich naplnění. Jasně zde převládá volba 240 L sběrných nádob, z toho asi 62 % bylo ve sběrném místě o celkové kapacitě 720 L. Sběrná místa o objemech 1 100 L a 2 200 L našla skoro stejnou četnost využití a to na 39 a 38 adresních bodech. Ve většině případů byly použity svozové frekvence nižší než 1x týdně.

Všechny volby kapacit sběrných míst můžeme vidět v grafu na obr. 10, obr. 11. Z grafu je patrné, že u každého minimalizovaného kritéria (kromě PSM) převažuje sběrná nádoba, kterou bychom z charakteru kritéria a tab. 9 intuitivně předpokládali. Vymyká se minimalizované kritérium PSM, protože neupřednostňuje žádnou kapacitu. Jak je vidět, každá z kapacit zde v nezanedbatelném množství našla své uplatnění. Jak již bylo zmíněno výše, na řešení daného problému má velký vliv nejen skladba nabízených kapacit sběrných míst, ale také možnost využití různé svozové frekvence. Ve většině případů byly u jednokriteriální úlohy použity jedno-kontejnerové kapacity sběrných míst. Na tom může mít velkou zásluhu analyzovaná frakce odpadu (resp. její produkce). Porovnání hodnot nalezneme v tab. 10. Také je vidět, že nejnižší počet použitých sběrných nádob nezaručuje nejnižší počet sběrných míst a naopak (viz řešení pro minimalizované kritérium PSM vs. RN nebo SC).

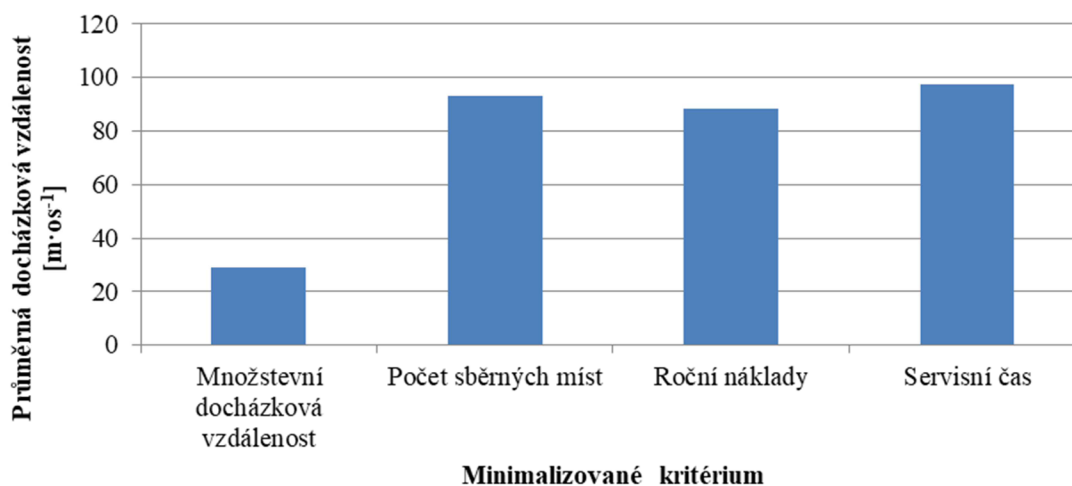
Tab. 10: Porovnání počtu sběrných míst s počtem sběrných nádob.

Kritérium	Minimalizované kritérium			
	Množstevní docházková vzdálenost	Počet sběrných míst	Roční náklady	Servisní čas
Počet sběrných míst [ks]	2 827	351	581	534
Počet sběrných nádob [ks]	2 856	670	629	537

Mezi jedno z posledních zkoumaných kritérií patří docházková vzdálenost. V grafu na obr. 12 je zobrazena průměrná docházková vzdálenost pro různá minimalizovaná kritéria. Před nahlédnutím do grafu je nutno podotknout, že ke každé vzdálenosti mezi adresním bodem a sběrným místem byla připočtena konstanta 25 metrů. Konstanta byla připočtena

převážně kvůli interpretaci výsledků. Průměrná docházková vzdálenost $29 \text{ m}\cdot\text{os}^{-1}$ (při minimalizaci MDV) znamená, že každý má kontejnery víceméně před domem.

Na první pohled je zřejmý značný rozdíl průměrné docházkové vzdálenosti mezi minimalizovanou MDV a ostatními minimalizovanými kritérii. Tento fakt byl očekáván, neboť MDV a docházková vzdálenost spolu úzce souvisí. Průměrná docházková vzdálenost je zde cca $29 \text{ m}\cdot\text{os}^{-1}$, kdežto u zbylých účelových funkcí se tato hodnota pohybuje nad $88 \text{ m}\cdot\text{os}^{-1}$. Nejdále to ke sběrným místům mají obyvatelé při minimalizaci SC, zde musí ke sběrným místům ujít v průměru cca 98 metrů.



Obr. 12: Průměrná docházková vzdálenost pro minimalizovaná kritéria.

Na závěr je uvedena přehledová tab. 11, ve které jsou porovnány konkrétní hodnoty kritérií pro jednotlivá řešení. Je nutno zdůraznit, že byl kladen důraz pouze na minimalizaci jednoho kritéria. Nižší průměrná naplněnost při minimalizaci MDV je intuitivně očekávaná, kdežto při minimalizaci PSM bychom očekávali více než 68 %. Důvodem nižší hodnoty je pravděpodobně snaha kumulovat co největší množství odpadu na jedno místo, ale jsou k dispozici pouze některé kapacity. Pokud jsme schopni na jedno místo nakumulovat 500 L odpadu a jeho rozdělením na 480 L a 20 L (20 L by bylo uskladněno jinde) by muselo vzniknout další sběrné místo, je nutné místo kapacity 480 L využít kapacitu 720 L. Dále je nutné podotknout, že na průměrnou naplněnost sběrných míst nebyl brán zřetel a při pohledu do tabulky je nutné vzít v úvahu také vliv podmínky na minimální naplnění (viz poznámka na str. 24).

Tab. 11: Přehled hodnot kritérií pro jednokritériální úlohu.

Kritérium	Minimalizované kritérium			
	MDV	PSM	RN	SC
Množstevní docházková vzdálenost [$\text{km}\cdot\text{L}\cdot\text{týden}^{-1}$]	388	6 742	6 270	7 150
Počet sběrných míst [ks]	2 827	351	581	534
Roční náklady [$\text{Kč}\cdot\text{r}^{-1}$]	328 751	236 898	88 759	379 405
Servisní čas [$\text{h}\cdot\text{týden}^{-1}$]	10	4	4,5	2,7
Počet kontejnerů [ks]	2 856	670	629	537
Průměrná docházková vzdálenost [$\text{m}\cdot\text{os}^{-1}$]	29	93	89	98
Průměrná naplněnost sběrných míst [%]	63	68	91	89

Pro jednokriteriální úlohu byl použit Model I s různými účelovými funkcemi (minimalizovala se různá kritéria – MDV, PSM, RN, SC). Z grafu na obr. 6 nebo tab. 11 je patrný problém úlohy s více hlavními kritérii. Například MDV je velmi vysoká pro všechny účelové funkce (kromě té, u níž dochází k její minimalizaci). Naopak PSM je pro účelovou funkci minimalizující MDV oproti ostatním účelovým funkcím vysoký. RN (při minimalizaci mají hodnotu $88\,759 \text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$, tedy přibližně $2,5 \text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}\cdot\text{os}^{-1}$) dosáhly nejvyšší hodnoty u účelové funkce minimalizující SC, kde jsou rovny $379\,405 \text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$, tedy v přepočtu $11 \text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}\cdot\text{os}^{-1}$. Výrazně vyšší SC (nejméně o $5,5 \text{ h}\cdot\text{týden}^{-1}$) má oproti ostatním účelovým funkcím funkce minimalizující MDV. Tyto problémy se snažíme omezit pomocí modelů, jejichž účelová funkce bere v potaz více kritérií.

5.2 Vícekriteriální úlohy

Tato kapitola bude zaměřena na modely, jejichž účelová funkce zohledňuje více kritérií. Nejprve se budou v účelové funkci zohledňovat pouze dvě kritéria. Bude zkoumána jejich vzájemná závislost a řešení představující kompromis mezi kritérii budou analyzována z pohledu všech kritérií uvažovaných v této práci. Dále se budou analyzovat řešení získaná pomocí modelů s účelovou funkcí zohledňující všechna hlavní kritéria.

5.2.1 Zohlednění dvou kritérií

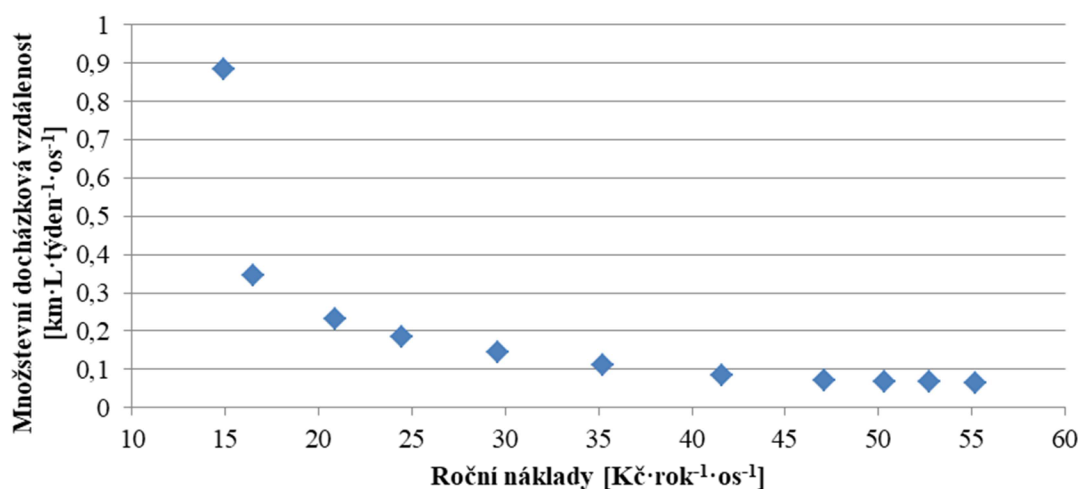
Při zohledňování dvou kritérií budeme používat Model II (viz str. 19). Ze zápisu účelové funkce je patrné, že jsou zde zohledněny proměnné z_m, z_n , které představují hodnoty hlavních kritérií daného řešení (z_1 – množstevní docházková vzdálenost (3.2.1), z_2 – počet sběrných míst (3.2.2), z_3 – roční náklady (3.2.3), z_4 – servisní čas (3.2.4)). Bude zkoumána vzájemná závislost proměnných z_m a z_n . Cílem bude najít kompromis mezi minimalizací dvou kritérií v jednom výpočtu pro všechny možné kombinace. Stejně tak je patrné, že pomocí parametru α se bude měnit váha řídící upřednostňování jednotlivých kritérií. Váhový parametr α se pohybuje v uzavřeném intervalu $\langle 0,1 \rangle$ (pro hodnotu 0 je minimalizováno z_n , pro hodnotu 1 se minimalizuje z_m) s krokem 0,1. Zápisem z_m^* a z_n^* se rozumí hodnoty, kterých bylo dosaženo u jednokriteriální úlohy při minimalizaci z_m a z_n . V účelové funkci jsou hodnoty z_m a z_n normovány pomocí z_m^* a z_n^* , aby se zajistilo, že preferované kritérium při minimalizaci ovlivňuje pouze parametr α .

V dalším textu se vyskytují dva typy grafů, které popisují výsledky výpočtů zaměřených na dvoukriteriální úlohy. Nejdříve bude ukázána vzájemná závislost uvažovaných kritérií (typický graf je uveden např. na obr. 13). Na osách x a y jsou zobrazeny hodnoty z_m a z_n , které jsou normovány na obyvatele. Pokud by se tato analýza prováděla pro více měst, je díky tomuto znormování možné porovnávat výsledky mezi jednotlivými městy. Krajní hodnoty v grafu jsou hodnoty řešení pro $\alpha = 0$ a $\alpha = 1$, tedy pro minimalizaci pouze z_m ($\alpha = 1$, vpravo), respektive z_n ($\alpha = 0$, vlevo).

Kombinace s množstevní docházkovou vzdáleností

Níže je možné vidět první typ grafu pro kombinaci MDV ($m = 1$) a RN ($n = 4$), viz obr. 13. Charakter průběhu závislosti je pro kombinaci MDV se zbylými dvěma kritérii ($n = 2, n = 3$) takřka totožný. Nejprve (zprava) skoro konstantní. Dochází tedy k malým změnám docházkové vzdálenosti, když má druhé kritérium malou váhu, cca $(1 - \alpha) = 0$ až 0,5. Neboli více než 60 % váhy je na docházkové vzdálenosti. Následuje hyperbolická část zakončená skokovou změnou hodnot. U kombinace s RN (viz obr. 13) dochází mezi dvěma levými krajními hodnotami k nejprudší skokové změně (oproti ostatním kombinacím). Tedy při malém snížení nákladů dojde k vysokému navýšení docházkové vzdálenosti. Je nutno

podotknout, že poslední bod zleva je bod, kdy na docházkovou vzdálenost není brán zřetel. Situace by mohla být dosti odlišná, pokud by se minimalizovaly nejprve RN a následně by se za podmínky udržení minimálních RN minimalizovala MDV.



Obr. 13: Vzájemná závislost množstevní docházkové vzdálenosti a ročních nákladů.

Následující text se bude věnovat analýze prostřednictvím druhého typu grafu (obr. 14). Na osu x jsou zasazeny hodnoty parametru α . Na ose y jsou zaznamenány hodnoty řešení normované pomocí z_m^* a z_n^* . Díky tomu je možné porovnat změny řešení pro různě nastavený parametr α . V grafech jsou vždy 3 křivky. Modrá a červená barva reprezentuje normované hodnoty řešení (z_m/z_m^* a z_n/z_n^*). Zelená křivka reprezentuje součtovou funkci F (součet relativních změn bez zahrnutí α). Hodnoty součtové funkce F se vypočítají podle vzorce:

$$F(\alpha) = z_m/z_m^* + z_n/z_n^*$$

(hodnoty z_m a z_n jsou hodnoty kritérií zohledněných v účelové funkci pro řešení s pevně zvoleným α). Tyto hodnoty představují kvalitu řešení z hlediska volby parametru α . Tab. 12 připomíná, jakých hodnot nabývala minima z jednokriteriálních úloh z_m^* , resp. z_n^* .

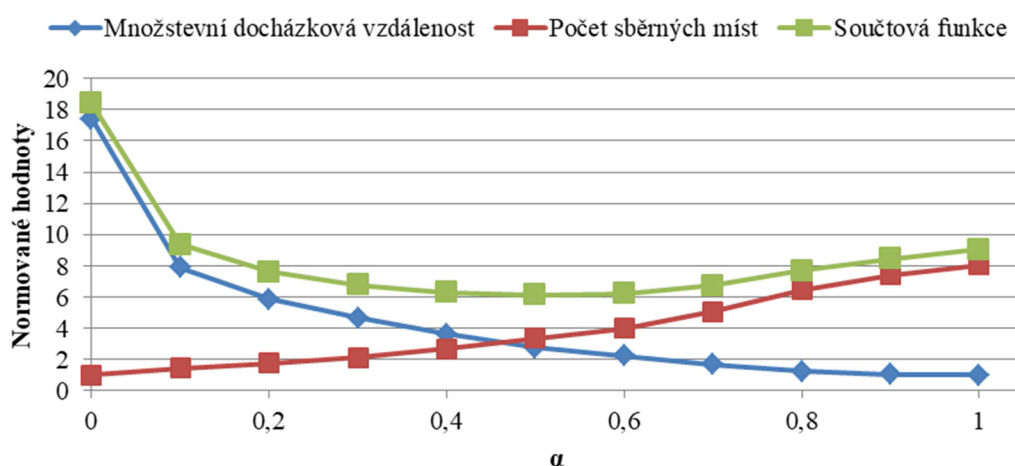
Tab. 12: Hodnoty použité pro normování.

$z_1^* = 388 \text{ km} \cdot \text{L} \cdot \text{týden}^{-1}$
$z_2^* = 351 \text{ ks}$
$z_3^* = 88\,759 \text{ Kč} \cdot \text{r}^{-1}$
$z_4^* = 2,7 \text{ h} \cdot \text{týden}^{-1}$

Z pohledu součtové funkce F (zelená křivka), nastalo minimum u všech tří kombinací pro $\alpha = 0,5$. Nicméně by bylo vhodné vzít při hodnocení funkce F v úvahu například také hodnoty ostatních uvažovaných kritérií (MDV, PSM, RN, SC). Při komplexním pohledu je možné zavést „optimální“ interval hodnot α . Tento interval by zahrnoval vybrané hodnoty α , které by splňovaly podmínku, že součtová funkce F je velmi blízká jejímu minimu. Konkrétně je problematika vysvětlena na grafu na obr. 14. Na něm je vidět, že pro $\alpha = 0,5$ a $\alpha = 0,6$ mají řešení skoro stejnou hodnotu součtové funkce, ovšem zhoršení kritérií (MDV a PSM) jsou různá. Proto do jisté míry záleží na řešiteli, jaké preference vůči důležitosti kritérií nastaví. Pokud je pro něj důležitější nízká MDV (tedy i průměrná docházková

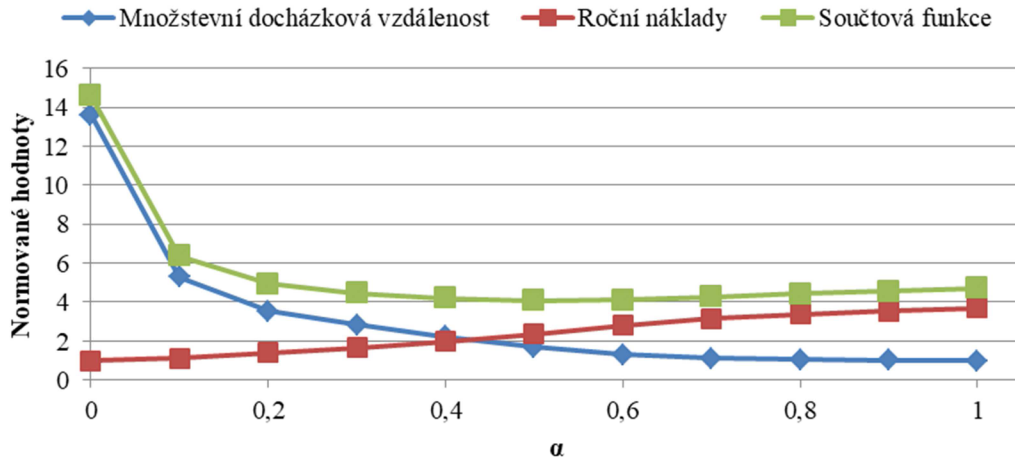
vzdálenost), pak je lepším řešením $\alpha = 0,6$. Stejná situace nastává například pro $\alpha = 0,4$ a $\alpha = 0,5$. Zde, při preferenci nízkého PSM, je vhodnější použít řešení pro $\alpha = 0,4$. Pokud není prioritou zaměřena přímo pro kritéria objevující se v účelové funkci, je možné mít priority například na RN, SC, individuální či celkovou naplněnost sběrných míst, počet použitých kontejnerů, nebo přímo na velikosti alokovaných kapacit. Z těchto důvodů je zavedena hranice 10 % navýšení vybraného kritéria. Do optimálního intervalu zahrneme jen takové hodnoty α , pro něž bude hodnota součtové funkce v porovnání s jejím minimem maximálně o 10 % vyšší. Ve zmíněných případech bude analýza omezena pouze na α s jedním desetinným místem. Nicméně by nebyl problém úlohu řešit ve větším detailu s menším krokem α , nebo s adaptabilním krokem na základě výsledků.

Dále je text věnován vzájemné bilanci MDV a počtu sběrných míst (viz obr. 14). Na první pohled je možné rozpoznat minimální hodnotu součtové funkce, a to pro $\alpha = 0,5$. Po důkladnějším studiu hodnot byl omezen optimální interval pro tuto kombinaci kritérií následovně: $\alpha \in (0,4; 0,7)$.



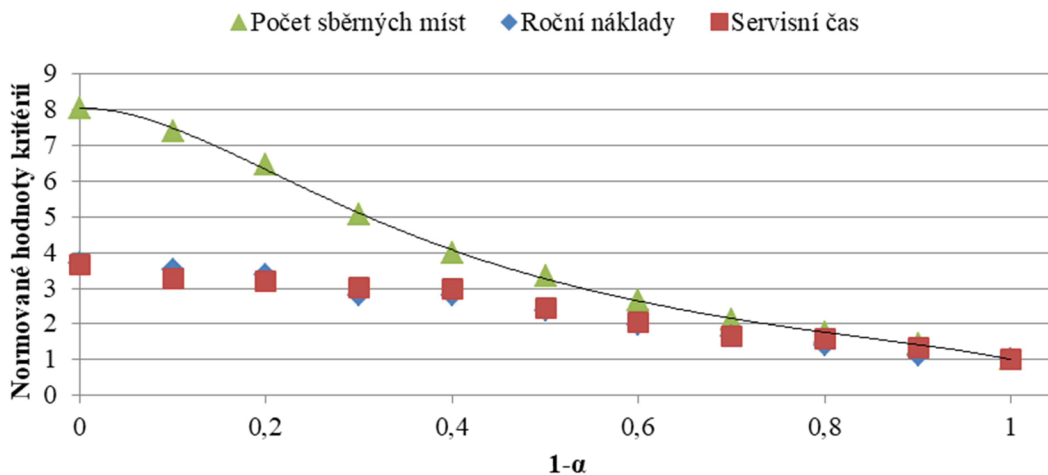
Obr. 14: Hodnoty kombinovaných kritérií a součtové funkce v závislosti na α pro $m = 1$, $n = 2$.

Kombinace s RN a SC vykazuje takřka stejné průběhy. To je pravděpodobně způsobeno tím, že při jednokriteriální úloze při minimalizaci MDV (Model I) mělo řešení velmi podobné navýšení SC a RN (oproti minimu). Tyto hodnoty byly přibližně 3,5krát větší než dosažitelné minimum, viz obr. 6. Proto zde bude komentována pouze kombinace s RN (viz obr. 15). Minimum součtové funkce se nachází pro $\alpha = 0,5$. Nicméně pro skoro všechny hodnoty α je možné si všimnout velice malého rozptylu hodnot součtové funkce. Pro kombinaci MDV, RN (obr. 15) odpovídá požadavkům na optimální interval $\alpha \in (0,4; 0,8)$.



Obr. 15: Hodnoty kombinovaných kritérií a součtová funkce v závislosti na α pro $m = 1, n = 3$.

V grafu umístěném níže v textu (obr. 16) byla analýza zaměřena na průběh hodnot kritérií v závislosti na parametru α . Hodnoty $1 - \alpha$ na ose x představují důraz na minimalizaci jednotlivých kritérií (RN, SC, PSM). Osa y vyjadřuje násobné zhoršení hodnot kritérií oproti svým minimům. Zatímco u ročních nákladů a servisního času pozorujeme průběh přibližně lineární, u PSM se nabízí spíše průběh typu s-křivky (hodnoty byly pro lepší názornost proloženy vhodným polynomem).



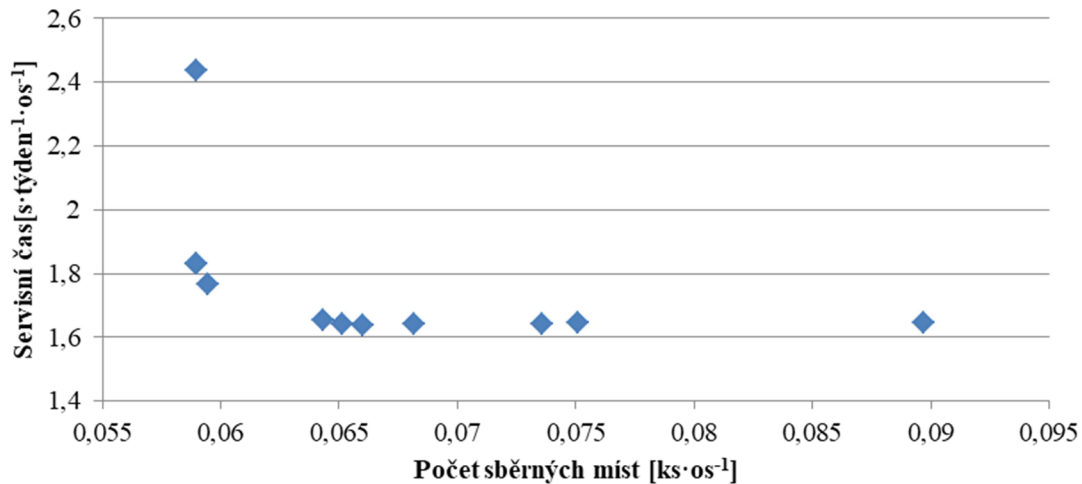
Obr. 16: Závislost kritérií v kombinaci s množstevní docházkovou vzdáleností na parametru α .

Průběh MDV je pro všechny 3 kombinace přibližně exponenciální s jednou vymykající se krajní hodnotou. Průběhy jsou viditelné v grafech na obr. 14, obr. 15 (modré hodnoty).

Dále bude řešena kombinace zohledňující PSM a dvě zbylá kritéria, tedy RN a SC (obr. 17, obr. 18). Kombinace s RN a se SC vykazuje takřka stejné průběhy (pravděpodobná příčina byla zmíněna na str. 32), a proto zde uvedeme závislosti pouze pro jednu kombinaci (takřka stejný komentář by platil i pro druhou kombinaci).

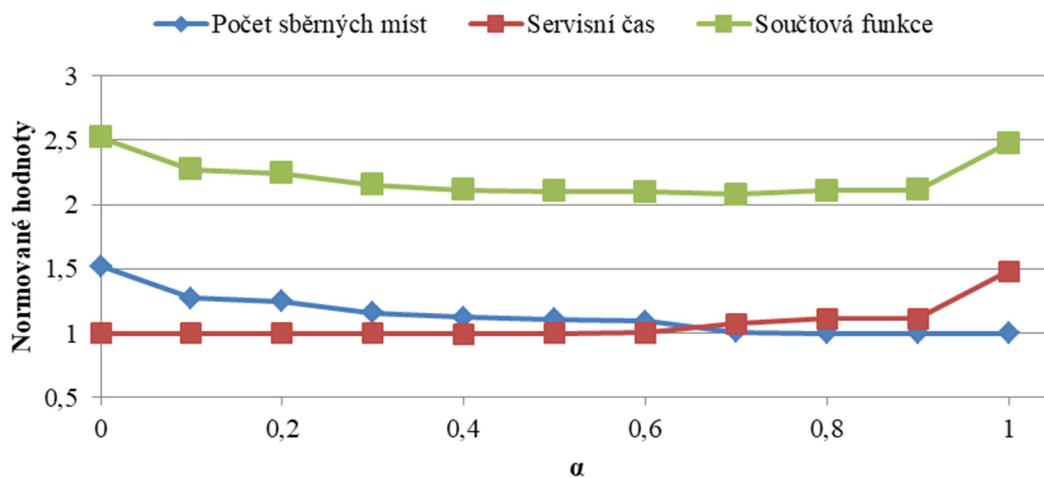
V grafech na obr. 17 je možné pozorovat mnohem ostřejší závislost, než byla vidět u grafů stejného typu v předchozí kapitole. SC (obr. 17) je takřka konstantní pro skoro všechny hodnoty α . Až při výrazném snížení PSM dochází k mírnému nárůstu SC. Tato vzájemná závislost při nahlédnutí do tab. 9 příliš nepřekvapí. Z tab. 9 totiž vyplývá, že pokud

je možné nahradit například tři sběrná místa o kapacitě 240 L jedním o kapacitě 720 L, tak je dosaženo snížení PSM a zároveň se RN ani SC nemění.



Obr. 17: Vzájemná závislost mezi počtem sběrných míst a servisním časem.

V obou krajních případech v grafu na obr. 18 ($\alpha = 0$ i $\alpha = 1$) dochází k mírným navýšením hodnot kritérií. Optimální interval pro kombinaci zobrazenou na obr. 18 je ze všech analyzovaných kombinací nejdelší – $\alpha \in (0,1; 0,9)$.

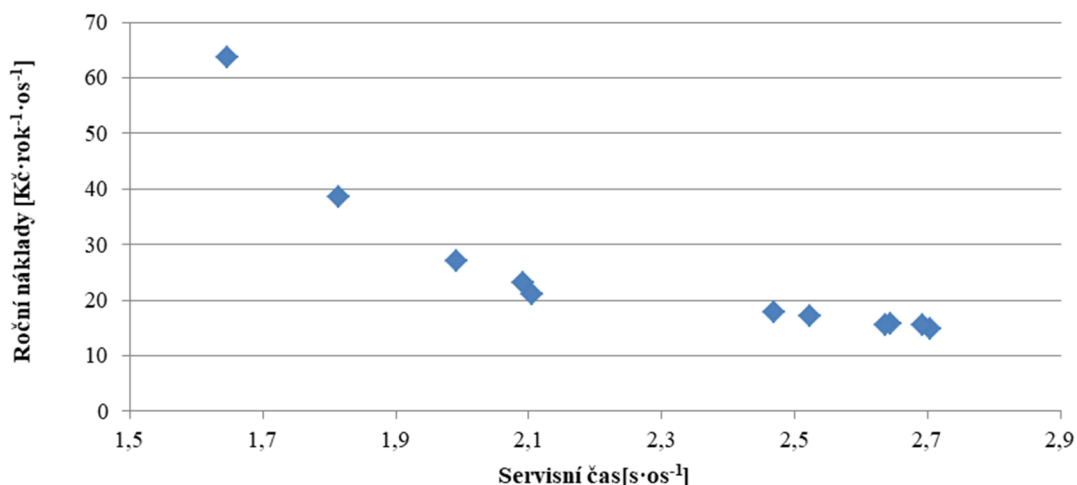


Obr. 18: Hodnoty kombinovaných kritérií a součtové funkce v závislosti na α pro $m = 2, n = 4$.

Kombinace roční náklady – servisní čas

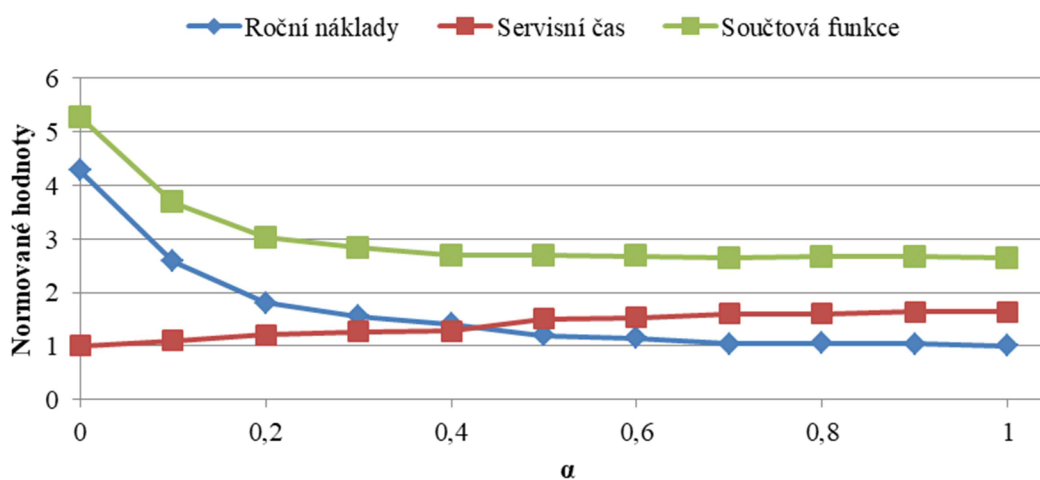
Poslední kombinace kritérií představuje vztah mezi RN a SC. Pro tuto kombinaci uvažujeme $m = 3, n = 4$.

Graf na obr. 19 se oproti ostatním grafům tohoto druhu (viz obr. 13 a obr. 17) odlišuje jeho více lineárním průběhem (v porovnání s obr. 13 a obr. 17). V grafu je možné pozorovat několik shluklých hodnot (např. 6 hodnot vpravo), to je pravděpodobně způsobeno nižší přesností řešení.



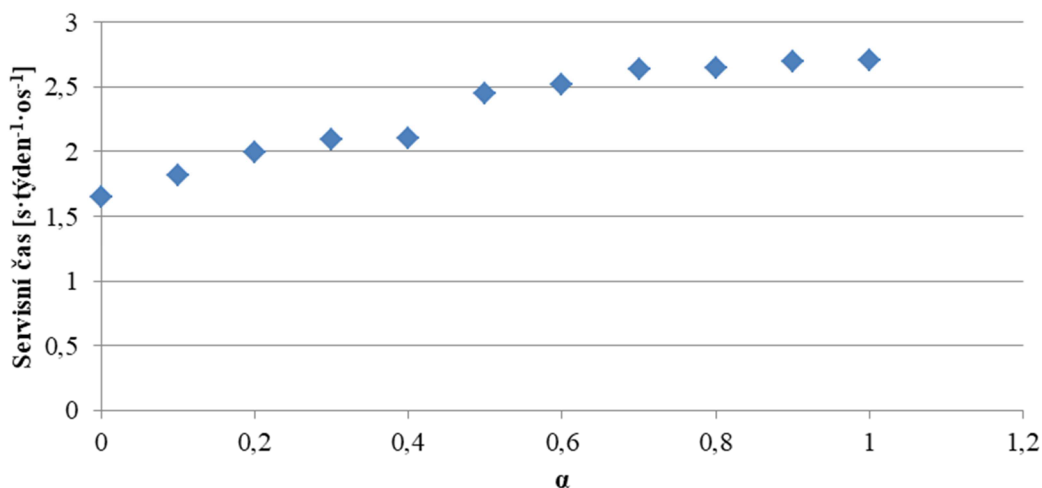
Obr. 19: Vzájemná závislost ročních nákladů a servisního času.

Červené hodnoty v grafu na obr. 20 odpovídají RN a modré SC. Pro velkou část intervalu α je součtová funkce skoro konstantní. Její výrazné navýšení je dosaženo až při nízkém důrazu na minimalizaci RN, tedy pro $\alpha \in (0; 0,2)$ (viz obr. 20). Dále je možné pozorovat, že při minimalizaci RN ($\alpha = 1$) nedochází k velkému nárůstu SC. V opačném případě ($\alpha = 0$) již RN výrazně vzrostly. Optimální interval pro tuto kombinaci kritérií vypadá následovně: $\alpha \in (0,3; 1)$.



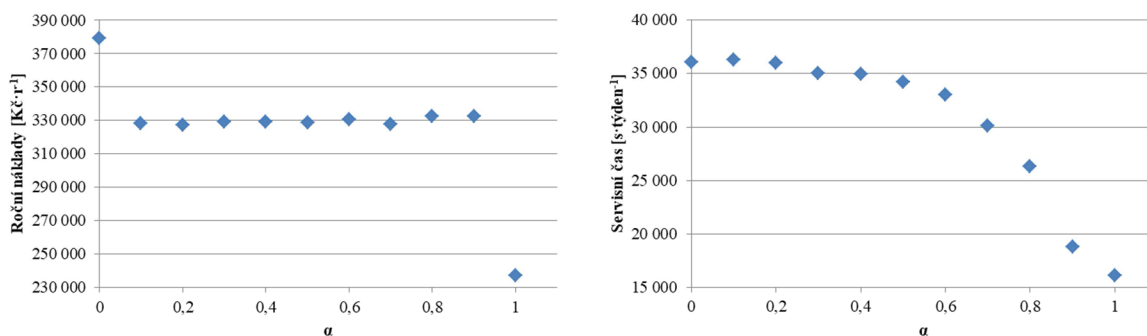
Obr. 20: Hodnoty kombinovaných kritérií a součtové funkce v závislosti na α pro $m = 3, n = 4$.

Chování RN v závislosti na míře důrazu na jejich minimalizaci připomíná chování MDV a dostatečně o něm vypovídá předchozí graf (obr. 20). Ovšem průběh hodnot pro SC se vymyká, vyjadřuje spíše logaritmickou závislost. Tu je možné vidět v následujícím grafu (obr. 21). Hodnota pro váhu $\alpha = 0,4$ je pravděpodobně pro řešení s hraniční povolenou přesností (všechna řešení jsou ovlivněna přesností, u tohoto řešení se chyba projevila významněji).

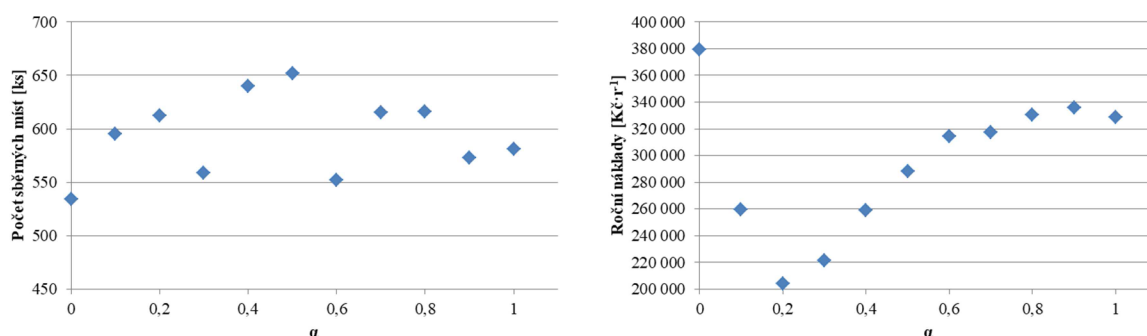


Obr. 21: Závislost servisního času na parametru α (kombinace s ročními náklady).

Obecně nelze říci, jak se v těchto úlohách chovají kritéria nezohledněná v účelové funkci. Uveďme si ale několik zástupných příkladů (viz grafy na obr. 22, obr. 23). Kritéria mohou nabývat hodnot, u nichž je vidět nějaký průběh (konstantní, lineární, kvadratický, logaritmický atd.). Zástupci na obr. 22 jsou z kombinací PSM, SC (vlevo) a MDV, RN (vpravo). Ale také žádný jasný průběh vykazovat nemusí. Zástupci na obr. 23 jsou z kombinací RN, SC (vlevo) a MDV, SC (vpravo).



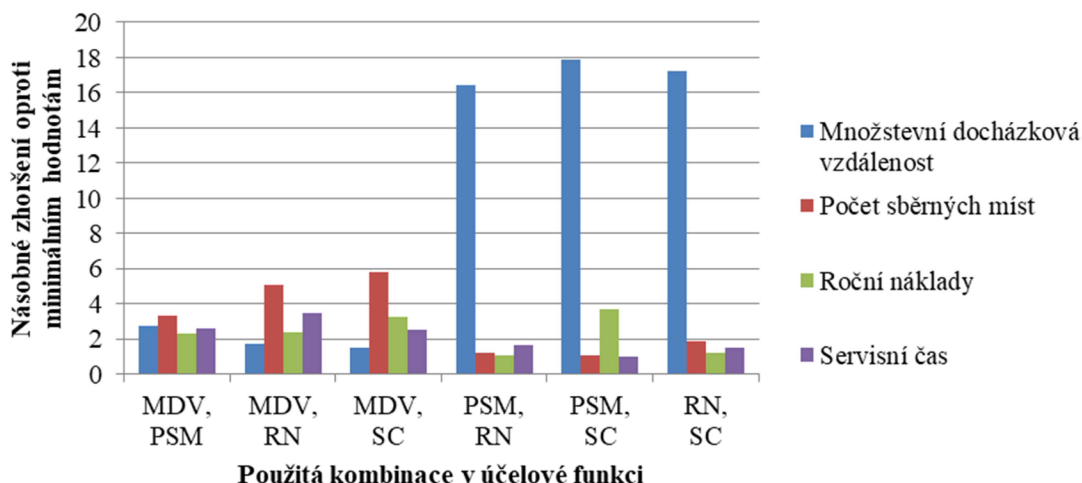
Obr. 22: Kritéria nezohledněná v účelové funkci s viditelným průběhem.



Obr. 23: Kritéria nezohledněná v účelové funkci s nejasným průběhem.

Vyhodnocení modelu v závislosti na účelové funkci

Pro každou analyzovanou kombinaci kritérií byly vybrány řešení, u kterých bylo na obě kritéria pohlíženo se stejnou váhou ($\alpha = 0,5$). Kvalitu těchto řešení je mezi sebou možné porovnat a dá se určit, která jsou globálně příznivější. V účelové funkci byla zohledněna vždy dvě z hlavních kritérií. Při pohledu do grafu na obr. 24 je možné vidět, jak byla ovlivněna zbylá dvě kritéria.



Obr. 24: Porovnání kombinací podle hlavních kritérií.

Na první pohled je patrné pomyslné rozdělení grafu na obr. 24 na dvě části (nezanedbatelný podíl na tak výrazném rozdělení má i podmínka minimálního naplnění, která je 30 % – viz poznámka na str. 24). Jak je možné z grafu usoudit, u prvních tří kombinací zleva (kombinace MDV, PSM; MDV, RN; MDV, SC) se v účelové funkci objevuje MDV a u kombinací vpravo nikoliv. Kombinace s vysokými hodnotami MDV (pravá část grafu) jsou tato: PSM, RN; PSM, SC; RN, SC.

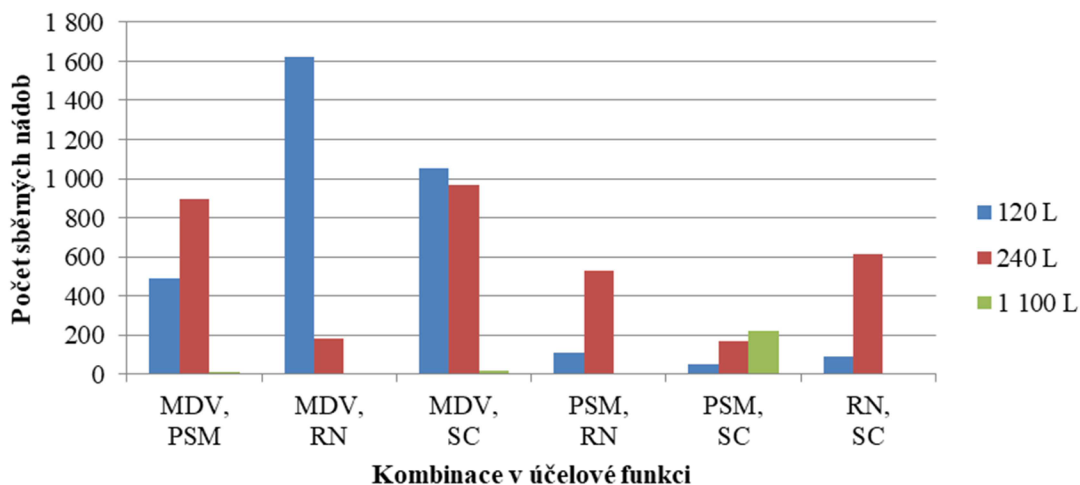
Problémem řešení vpravo je příliš vysoká MDV. Z těchto tří kombinací se dále vymyká kombinace PSM, SC. Zde došlo sice k excelentně nízkým hodnotám kritérií objevujících se v účelové funkci, ovšem i oproti ostatním řešením na pravé straně grafu (ty s vysokou MDV) má výrazně vyšší RN. Z pravé strany grafu je vidět jistá provázanost kritérií PSM, RN a SC. Intuitivně lze tušit, že RN i SC s PSM jistě souvisí (při velkém PSM asi není možné očekávat nízké RN nebo nízký SC), viz graf na obr. 24. Z grafu také vyplývá, že pokud bude brán zřetel na PSM a RN, pak je zajištěn i nízký SC. Naopak kombinace PSM a SC nemá za následek nízké RN.

Všechna kritéria u kombinací v levé části grafu (zde je brán zřetel na MDV) dosahují příznivých hodnot. Z pohledu hlavních kritérií je nejpříznivější kombinace MDV, PSM. Všechna hlavní kritéria jsou u této kombinace rozumně nízká.

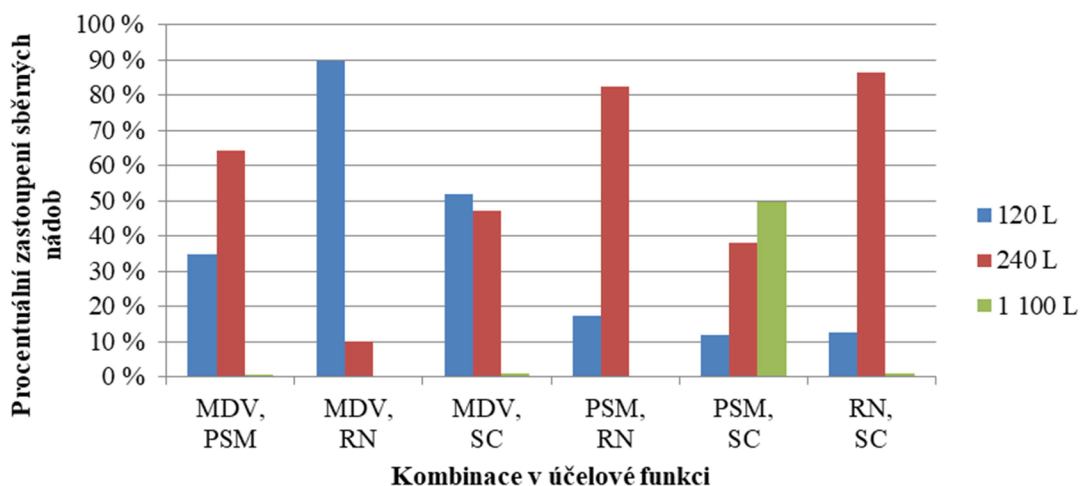
K analýze řešení z pohledu rozmístěných sběrných míst, použitých typů sběrných nádob a frekvence svozu se využijí grafy na obr. 26, obr. 27, obr. 28 a obr. 29.

U první z uvažovaných kombinací (MDV, PSM) bylo na 1 176 místech rozmístěno 1 391 sběrných kontejnerů. Z grafů na obr. 26 je zřejmé, že byla použita převážně kapacita 240 L (cca 900 kusů). Z toho asi 55 % bylo použito v jedno-kontejnerových sběrných místech (s kapacitou 240 L). Je tedy možné říci, že jedno-kontejnerová sběrná místa o kapacitách 120 L a 240 L byla využita přibližně stejně často (487 a 490krát). Pouze okolo 15 % sběrných míst je složeno s více sběrných nádob. Tato uvažovaná kombinace kritérií využívá nejčastěji

svoz odpadu 1x za 2 týdny, ovšem zbylé dvě svozové frekvence svou četností výrazně nezaostávají.



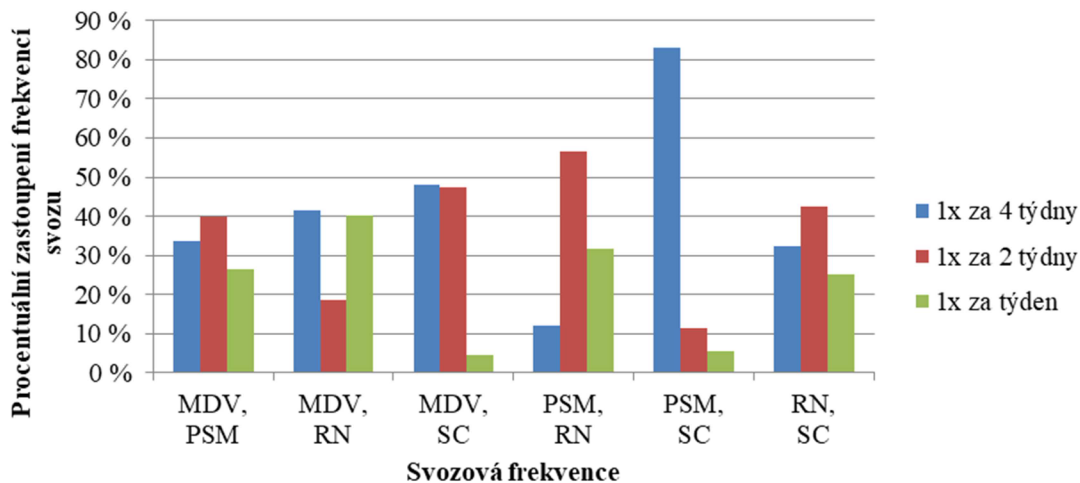
Obr. 25: Počet rozmístěných sběrných nádob.



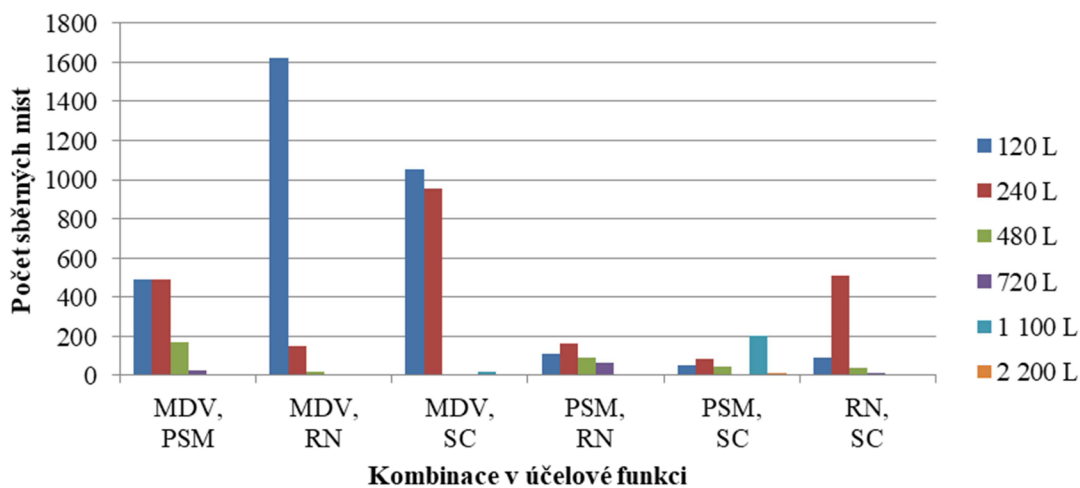
Obr. 26: Procentuální zastoupení rozmístěných sběrných nádob.

Nejodlišnější kombinace z pohledu využití sběrných nádob je kombinace PSM, SC. Takřka polovina použitých sběrných nádob disponuje kapacitou 1 100 L a pouze přibližně 10 % má kapacitu 120 L. Zde bylo také nejčastěji ze všech uvažovaných kombinací využito sběrné místo s kapacitou 2 200 L, a to v 10 případech. Ze znalosti tak častého využití sběrných míst o vysoké kapacitě není velkým překvapením, že ve více než 80 % byla zvolena nejnížší svozová frekvence – 1x za 4 týdny.

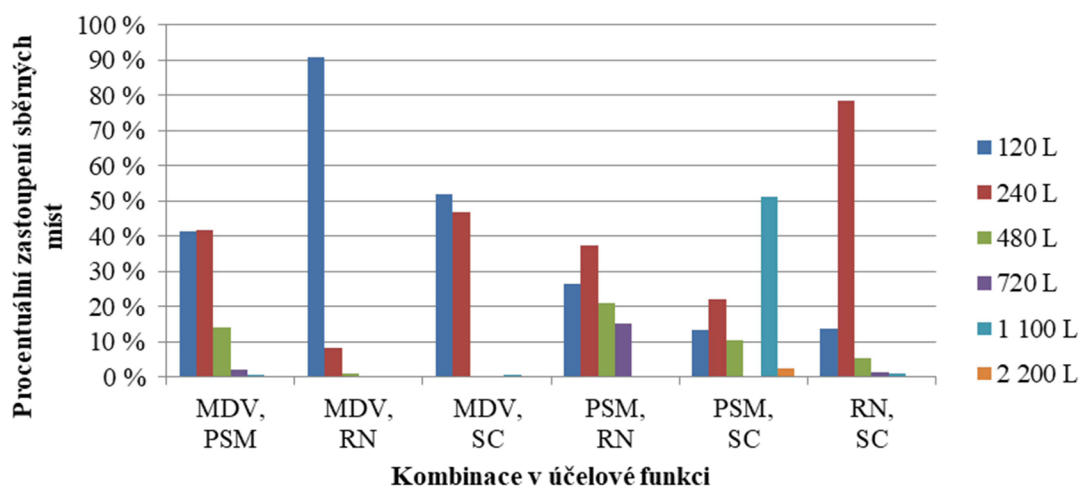
Poslední z analyzovaných kombinací je kombinace RN, SC. Zde nad ostatními jasně převládá 240 L sběrná nádoba, která byla použita na přibližně 85 % sběrných míst. Z toho se téměř v 80 % jedná o jedno-kontejnerové sběrné místo. Stejně jako tomu bylo u první analyzované kombinace (MDV, PSM), nepřilíš výraznou převahu nad ostatními má svozová frekvence 1x za 2 týdny.



Obr. 27: Užitá svozová frekvence.



Obr. 28: Počet alokovaných kapacit sběrných míst.



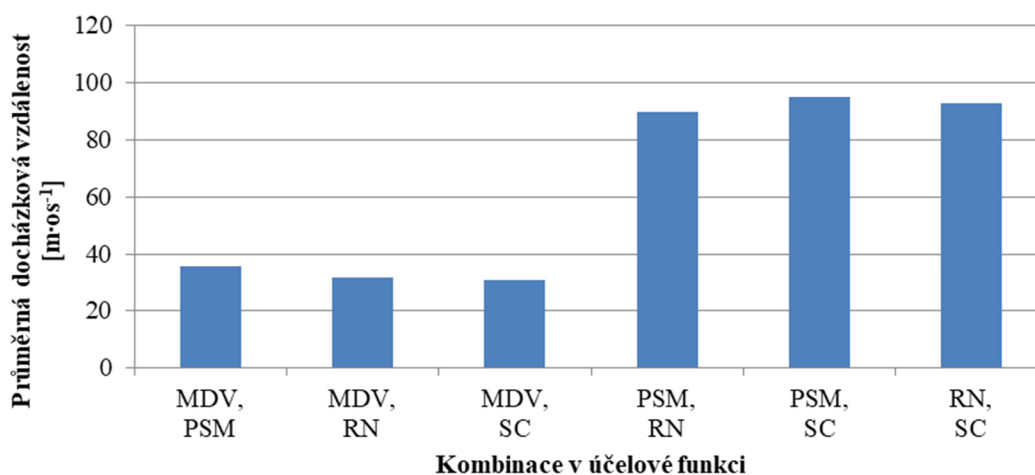
Obr. 29: Procentuální zastoupení alokovaných kapacit sběrných míst.

V tab. 13 nalezneme porovnání počtu sběrných míst s počtem sběrných nádob. Analyzované kombinace obsáhly mnoho variant výsledků. Nastal případ, kdy je počet sběrných nádob jen o trochu větší, než počet sběrných míst (u kombinace MDV, SC je tento rozdíl pouhých 7 kontejnerů). Stejně tak se zde objevují dva případy, kdy je tento rozdíl větší než 200. Prvním je kombinace MDV, PSM. Zde se o to nejvíce zasadila sběrná místa s kapacitou 480 L, kterých bylo 166. Je to ale jen malá část použitých sběrných nádob, protože celkem jich tu bylo použito 1 391. Trochu jiná situace je u kombinace MVD, SC, kde se o to postaraly sběrné nádoby s kapacitou 480 L a 720 L. Téměř 60 % sběrných nádob je umístěno ve více-kontejnerovém sběrném místě a více než 35 % sběrných míst je složeno z více sběrných nádob.

Tab. 13: Porovnání počtu sběrných míst s počtem sběrných nádob.

Kombinace kritérií zohledněných v účelové funkci						
Kritérium	MVD, PSM	MVD, RN	MDV, SC	PSM, RN	PSM, SC	RN, SC
Počet sběrných míst [ks]	1 176	1 787	2 033	425	388	652
Počet sběrných nádob [ks]	1 391	1 804	2 040	644	439	706

Stejně jako tomu bylo v grafu na obr. 24, i graf zobrazující průměrnou docházkovou vzdálenost na obr. 30 je pomyslně rozdělen na dvě části. Kombinace v levé části grafu mají průměrnou docházkovou vzdálenost oproti pravé straně výrazně nižší. Důvodem je, že u kombinací vlevo byl na rozdíl od těch vpravo brán zřetel na MDV. Nejlépe dopadla kombinace MDV, SC, kde to mají lidé ke sběrným místům pouhých 31 m. Tato varianta ovšem vyjde na $287\,895\text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$, tedy v přepočtu přibližně $8\text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}\cdot\text{os}^{-1}$. Naopak největší vzdálenost musí lidé ke sběrným místům ujet u kombinace PSM, SC a to zhruba 95 m. U ostatních dvou řešení s vysokou docházkovou vzdáleností se RN pohybují okolo $101\,000\text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$, tedy v přepočtu přibližně $3\text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}\cdot\text{os}^{-1}$. Před nahlédnutím do grafu je nutné připomenout, že ke každé vzdálenosti mezi adresním bodem a sběrným místem byla připočtena konstanta 25 metrů.



Obr. 30: Průměrná docházková vzdálenost analyzovaných kombinací.

Při porovnání s jednokritériální úlohou (graf na obr. 12) je možné zjistit, že hodnoty v pravé části grafu na obr. 30 se velice podobají hodnotám vpravo v grafu na obr. 12. Tedy

pokud při řešení této úlohy není brán v potaz aspekt MDV, pak má řešení vysoké hodnoty množstevní i průměrné docházkové vzdálenosti. Kombinace MDV, SC (obr. 30) má průměrnou docházkovou vzdálenost pouze o asi $2 \text{ m}\cdot\text{os}^{-1}$ větší, než u jednokriteriální úlohy pro minimalizaci MDV (obr. 12). Stejně tak kombinace, která si vedla nejlépe při porovnávání hlavních kritérií (MDV, PSM – viz obr. 24) má průměrnou docházkovou vzdálenost o $6 \text{ m}\cdot\text{os}^{-1}$ vyšší, než je minimum u jednokriteriální úlohy (Model I, minimalizace MDV, viz obr. 12).

Na závěr je uvedena přehledová tabulka, ve které je možné porovnat konkrétní hodnoty kritérií pro jednotlivá řešení (viz tab. 14). Je nutno zdůraznit, že se hledal kompromis pouze mezi dvěma kritérii. Dále je nutné podotknout, že na průměrnou naplněnost sběrných míst nebyl brán zřetel a při pohledu do tabulky je nutné vzít v úvahu také vliv podmínky na minimální naplnění (viz poznámka na str. 24).

Tab. 14: Přehled hodnot kritérií pro vícekriteriální úlohu.

Kritérium	Kombinace kritérií zohledněných v účelové funkci					
	MDV, PSM	MDV, RN	MDV, SC	PSM, RN	PSM, SC	RN, SC
Množstevní docházková vzdálenost [$\text{km}\cdot\text{L}\cdot\text{týden}^{-1}$]	1 067	659	579	6 371	6 923	6 676
Počet sběrných míst [ks]	1 176	1 787	2 033	425	388	652
Roční náklady [$\text{Kč}\cdot\text{r}^{-1}$]	202 297	209 587	287 895	92 320	328 469	109 725
Servisní čas [$\text{h}\cdot\text{týden}^{-1}$]	7,2	9,5	7	7	2,7	4
Počet kontejnerů [ks]	1 391	1 804	2 040	644	439	706
Průměrná docházková vzdálenost [$\text{m}\cdot\text{os}^{-1}$]	36	32	31	90	96	93
Průměrná naplněnost sběrných míst [%]	71	70	67	88	83	94

Na základě těchto výsledků (viz tab. 14) lze soudit, že některé kombinace kritérií zohledněných v účelové funkci jsou pro naše potřeby neúčinné. Neúčinné se na první pohled jeví kombinace, u kterých není v účelové funkci zohledněna MDV (její hodnoty jsou příliš vysoké). Stejně tak kombinace MDV, SC se nejeví jako výrazně příznivá. Je sice dosaženo excelentně nízké MDV, a SC není příliš dlouhý, ale hodnoty zbylých kritérií (PSM, RN, počet kontejnerů) jsou jedny z nejvyšších hodnot ze všech řešení prezentovaných v tab. 14. Z porovnání zbylých dvou kombinací vyplývá, že kombinace MDV, PSM je výrazně lepší skoro ve všech ohledech. Oproti kombinaci MDV, RN je horší, a to nepříliš výrazně, pouze množstevní a průměrná docházková vzdálenost (o pouhé 4 metry). RN varianty, u které se v účelové funkci objevuje kombinace MDV, PSM, jsou přibližně $202\,000 \text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$, tedy skoro $6 \text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}\cdot\text{os}^{-1}$.

Ke stejnému závěru by se dalo pravděpodobně dojít pouze na základě intuitivního zhodnocení grafu na obr. 24. Zde je například vidět, že k největšímu zhoršení kritéria oproti výsledkům z jednokriteriální úlohy došlo u PSM, kde je zhoršení přibližně 3,3 násobné. U ostatních je nižší než 2,8 násobek.

Zdá se, že byl nalezen přístup, jak dosáhnout velice příznivého řešení. Ovšem tento přístup bere v úvahu pouze 2 ze 4 hlavních kritérií. Další kapitola je věnována modelům, u nichž se berou v úvahu všechna hlavní kritéria.

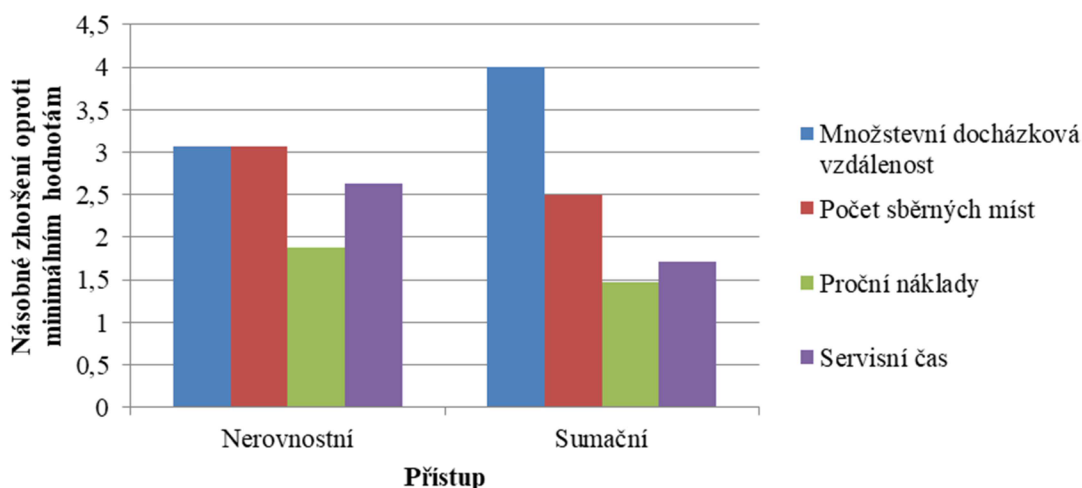
5.2.2 Zohlednění čtyř kritérií

V předchozím textu byla pozornost zaměřena pouze na úzkou část problému. Nejprve se minimalizovalo pouze jedno kritérium a později se při řešení zohledňovala dvě kritéria. V obou případech se výrazně projevil negativní vliv vícekritériální úlohy (tj. zhoršení výsledků pro jedno kritérium z důvodu snahy minimalizovat ty ostatní). V následujících dvou modelech budou při řešení úlohy (rozmístění a alokace kapacit sběrných míst) zohledněna všechna hlavní kritéria, jedná se o Model III a Model IV. Oba modely se snaží omezit negativní vliv vícekritériální úlohy různými přístupy, viz představení modelů na straně 20. Pro přehlednost je dále použito následující značení vycházející z přístupu modelů k problematice (viz tab. 15).

Tab. 15: Značení modelů podle přístupu k problematice.

Model III	Nerovnostní přístup
Model IV	Sumační přístup

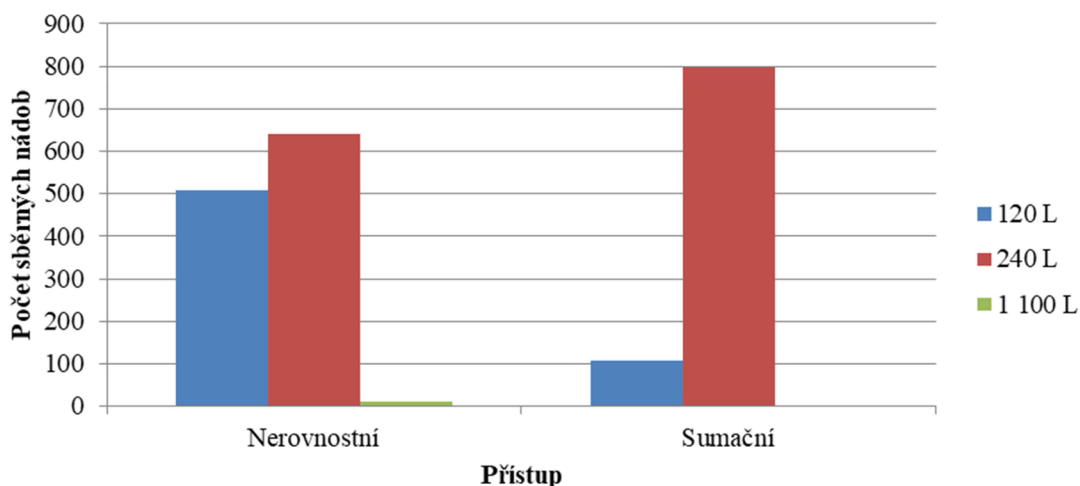
Stejně jako v předchozím textu, bude nejprve pozornost zaměřena na hodnoty, kterých dosáhla hlavní kritéria při řešení úlohy Modelem III a Modelem IV, viz obr. 31.



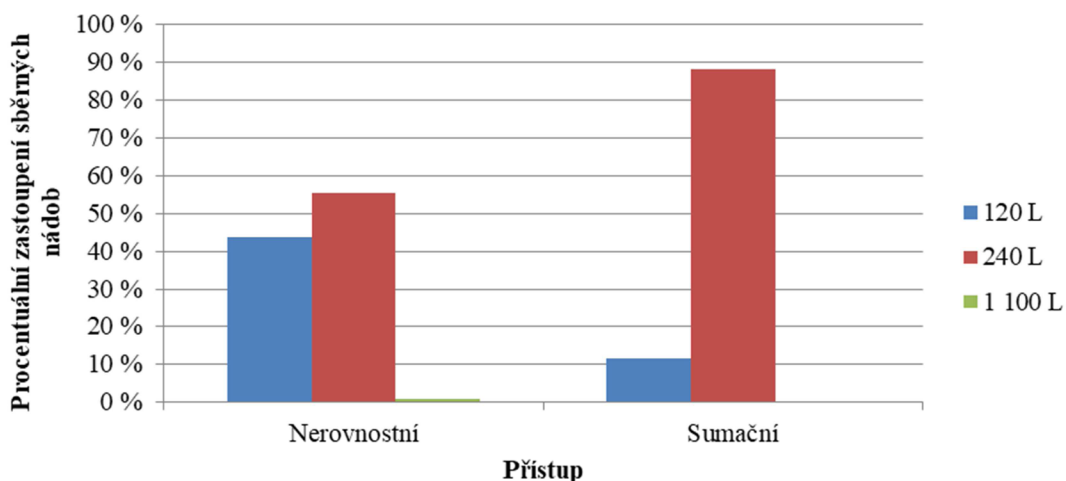
Obr. 31: Porovnání přístupů podle hlavních kritérií.

U nerovnostního přístupu je na první pohled zřejmé, že proti sobě působí nejvíce kritéria MDV a PSM, protože snížení jednoho z těchto kritérií implikuje okamžitý nárůst druhého. Tento přístup byl také schopen dosáhnout toho, že nejvyšší zhoršení bylo pouze cca trojnásobné. Nejvyšší zhoršení u sumačního přístupu bylo čtyřnásobné, ovšem všechna zbylá kritéria dosáhla nižšího zhoršení než u nerovnostního přístupu. Při srovnání obou přístupů je z grafu patrné, že zlepšení respektive zhoršení jednoho kritéria je maximálně přibližně o jednonásobek. Toto maximum je u kritéria MDV a SC. Například RN se u přístupů liší pouze o cca 0,4násobek.

Co se týče využití sběrných nádob, zde se oba přístupy liší výrazněji, viz obr. 32 a obr. 33. Zatímco nerovnostní přístup využívá ve velké míře 120 L i 240 L nádoby, sumační přístup využil ve více než 90 % nádoby o kapacitě 240 L. Tento přístup větší nádoby nevyužil vůbec a nerovnostní přístup použil 1 100 L nádoby pouze 10x.

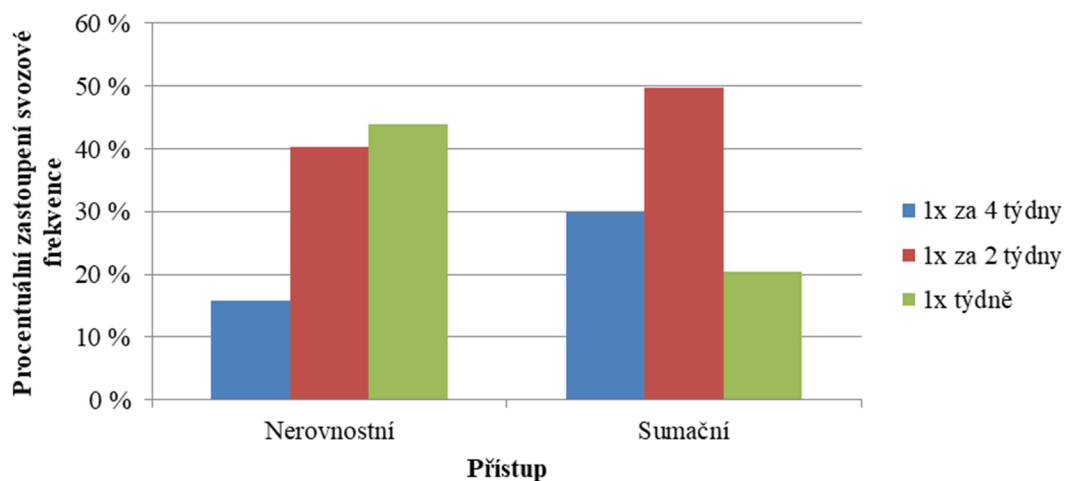


Obr. 32: Počet sběrných nádob v závislosti na přístupu.



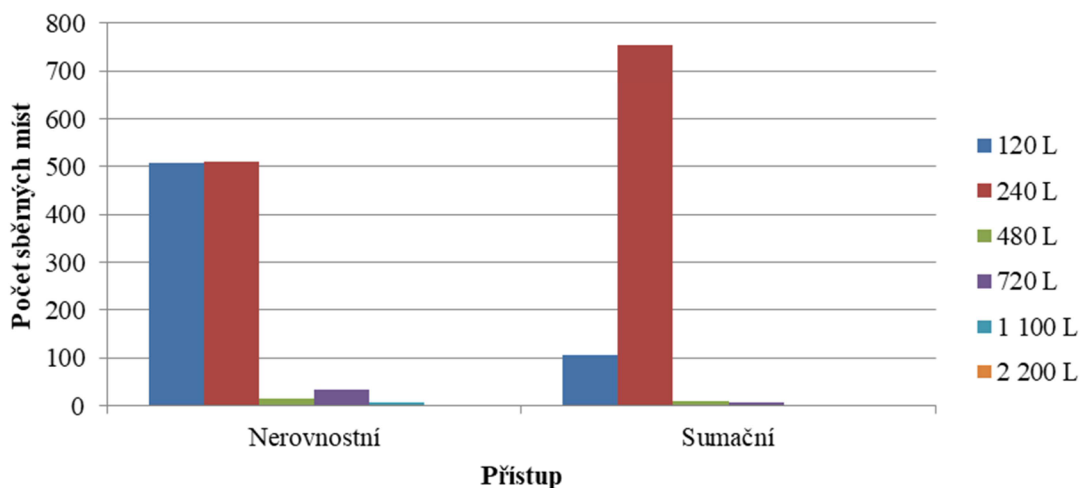
Obr. 33: Procentuální zastoupení sběrných nádob v závislosti na přístupu.

Týdenní frekvence svozu u nerovnostního přístupu na obr. 34 nevýrazně převládá nad svážením 1x za 2 týdny. U sumačního přístupu převládá svážení 1x za 2 týdny nad zbylými dvěma výrazněji.

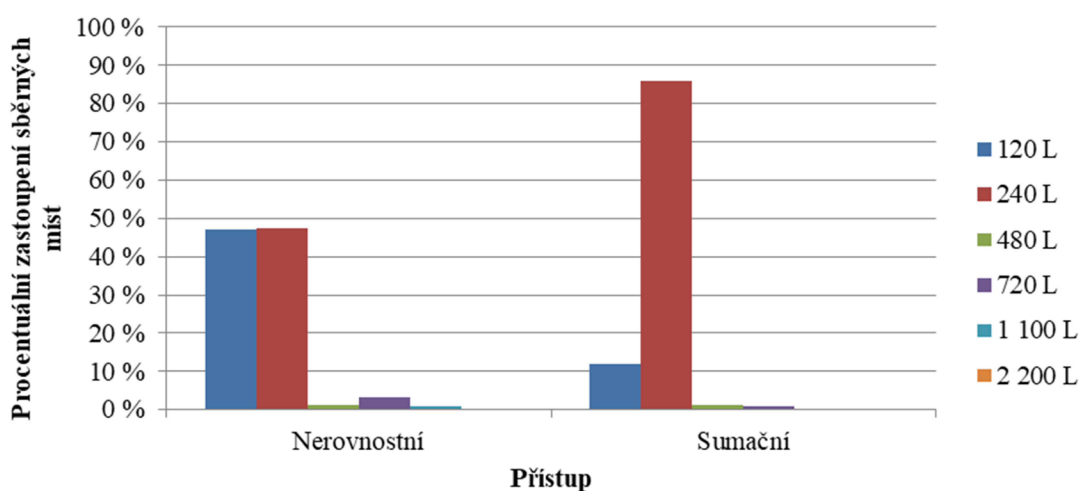


Obr. 34: Procentuální zastoupení svozové frekvence v závislosti na přístupu.

Z obr. 35 a obr. 36 vyplývá, že v 95 % u nerovnostního a v 98 % u sumačního přístupu jsou sběrná místa sestavena z jedno-kontejnerových kapacit o velikostech 120 L a 240 L. Z ostatních bylo u nerovnostního přístupu nejčastěji využito 720 L sběrné místo a to 38x, 2 200 L sběrné místo našlo své využití pouze jednou. Podobně tomu bylo i u sumačního přístupu, zde ovšem nebyly využity žádné 1 100 L sběrné nádoby. Pouze 18 sběrných míst je složeno z více než jedné sběrné nádoby. Z toho 11 sběrných míst disponuje kapacitou 480 L a 7 sběrných míst kapacitou 720 L.



Obr. 35: Počet alokovaných kapacit sběrných míst v závislosti na přístupu.



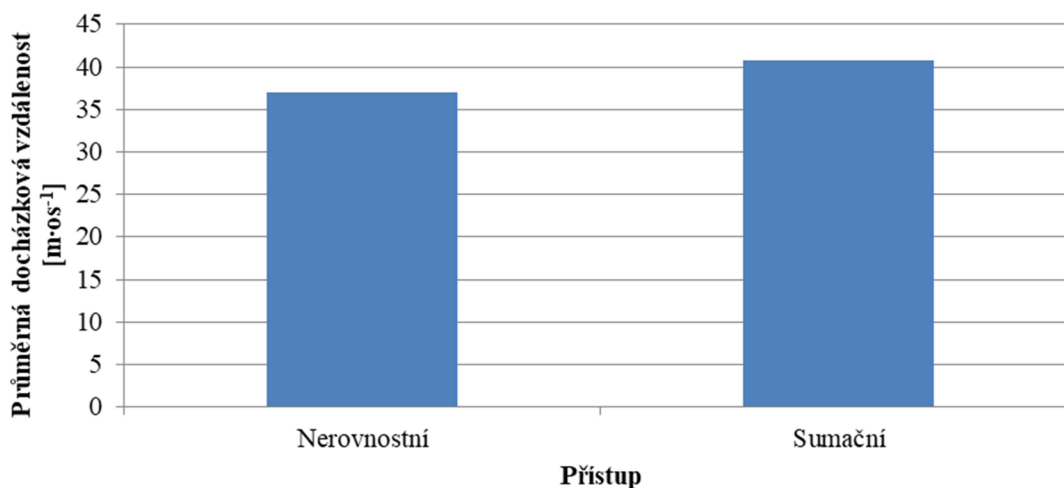
Obr. 36: Procentuální zastoupení alokovaných kapacit sběrných míst v závislosti na přístupu.

Již bylo naznačeno, že počet sběrných míst a počet sběrných nádob se liší pouze o malé množství, konkrétní hodnoty uvádí následující tab. 16.

Tab. 16: Porovnání počtu sběrných míst s počtem sběrných nádob.

Kritérium	Přístup	
	Nerovnostní	Sumační
Počet sběrných míst [ks]	1076	877
Počet sběrných nádob [ks]	1160	902

Z obr. 31 vyplývá, že rozdíl MDV mezi uvažovanými dvěma přístupy (nerovnostní, sumační) je přibližně jednonásobek minimální možné hodnoty dosažené v jednokriteriální úloze (bez přičtené konstanty 25 m). Tato hodnota je $388 \text{ km}\cdot\text{L}\cdot\text{týden}^{-1}$. Jak je vidět na obr. 37, průměrná docházková vzdálenost se liší o pouhé $4 \text{ m}\cdot\text{os}^{-1}$. Před nahlédnutím do grafu je nutné připomenout, že ke každé vzdálenosti mezi adresním bodem a sběrným místem byla připočtena konstanta 25 metrů.



Obr. 37: Průměrná docházková vzdálenost analyzovaných přístupů.

I nyní bude na závěr uvedena přehledová tabulka, ve které je možné porovnat konkrétní hodnoty kritérií pro oba přístupy (viz tab. 17). Propojenost mezi označením přístupu a využitým modelem byla uvedena v tab. 15.

Tab. 17: Přehled hodnot kritérií pro použité přístupy.

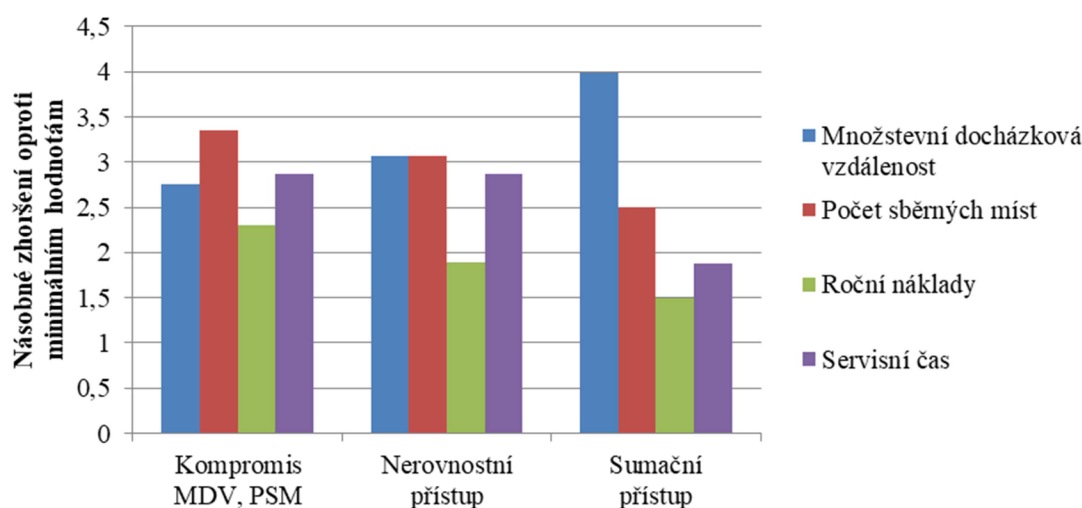
Kritérium	Přístup	
	Nerovnostní	Sumační
Množstevní docházková vzdálenost [$\text{km}\cdot\text{L}\cdot\text{týden}^{-1}$]	1 188	1 549
Počet sběrných míst [ks]	1 076	877
Roční náklady [$\text{Kč}\cdot\text{r}^{-1}$]	166 888	131 212
Servisní čas [$\text{h}\cdot\text{týden}^{-1}$]	7,2	4,7
Počet kontejnerů [ks]	1 160	902
Průměrná docházková vzdálenost [$\text{m}\cdot\text{os}^{-1}$]	37	41
Průměrná naplněnost sběrných míst [%]	70	86

Na základě výsledků nelze rozhodnout o jednoznačně lepším řešení. Oba přístupy se ukázaly být velice účinné. Nerovnostní přístup má nižší MDV, ovšem zbylá kritéria dosahují vyšších hodnot než u přístupu sumačního. Například RN se liší pouze o $35\,676 \text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$, což při rozložení na obyvatele činí $1 \text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}\cdot\text{os}^{-1}$. SC se liší o cca $2,5 \text{ h}\cdot\text{týden}^{-1}$.

Subjektivně se jeví být lepší řešení sumačního přístupu. MDV je sice o něco málo vyšší, ale dopad na průměrnou docházkovou vzdálenost činí pouhé cca $4 \text{ m}\cdot\text{os}^{-1}$. Průměrná docházková vzdálenost, která je $41 \text{ m}\cdot\text{os}^{-1}$, se zdá být přijatelná, protože toto řešení má

příznivé ostatní charakteristiky. Dále je nutné si uvědomit, že se přičítala konstanta 25 m. RN jsou nižší přibližně o 35 000 Kč·rok⁻¹. Zbývá dvě kritéria pro nás subjektivně mohou mít větší váhu, protože mají vliv na věci, které se každý týden opakují. Velkou roli při následném vyvážení sběrných míst může hrát jejich počet. Sběrných míst bylo rozmístěno o 199 méně, což může mít za následek snížení náročnosti svozu. Jedná se zejména o dobu svážení (nižší délky trasy). S délkou trasy také souvisí například opotřebení KUKA vozu. Také SC je nezanedbatelně nižší, a to o cca 2,5 h·týden⁻¹ (při každém svozu). Z těchto důvodů se může zdát sumační přístup lepší.

Z analýzy vícekritériální úlohy se dá říci, že mezi hlavními kritérii jsou dvě, která nejvýrazněji ovlivňují úlohu. Je to MDV a PSM. Ukázalo se, že stačí uvažovat kompromis mezi těmito kritérii a dosáhneme velice příznivého výsledku. Na obr. 38: je poukázáno na kvalitu tohoto řešení v porovnání s řešeními, kterých bylo dosaženo využitím Modelu III (nerovnostní přístup) a Modelu IV (sumační přístup). Je vidět, že i přes to, že řešení je založeno pouze na kompromisu mezi dvěma kritérii, jeho kvalita se vyrovná řešením, u kterých se bral ohled na všechna hlavní kritéria.



Obr. 38: Porovnání přístupů nejkvalitněji řešících úlohu.

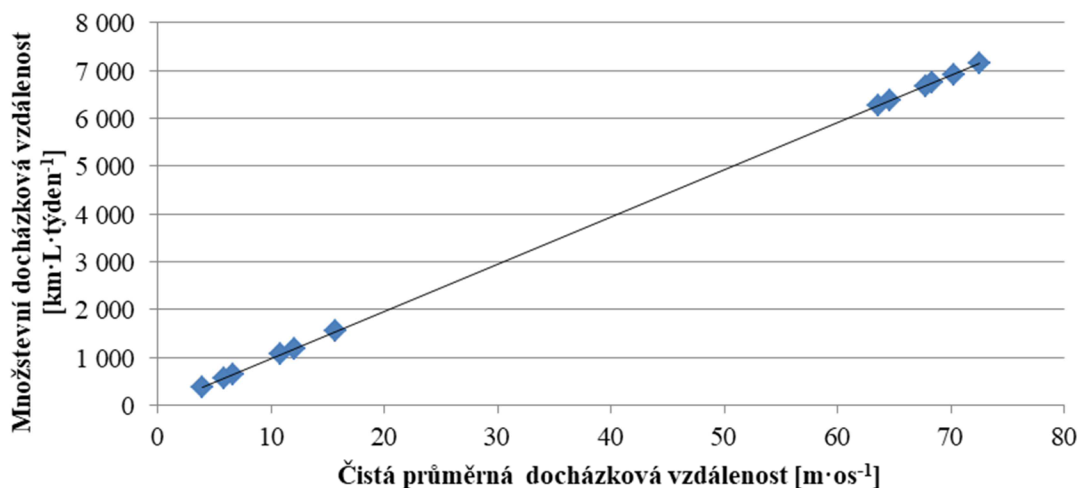
5.3 Závislost mezi docházkovými vzdálenostmi

Dále bylo zjištěno, že závislost množstevní docházkové vzdálenosti a čisté průměrné docházkové vzdálenosti² (CPDV) je lineární, viz obr. 39. Toho může být využito například při specifických požadavcích na průměrnou docházkovou vzdálenost. U pevně zvolené úlohy jsme schopni pomocí libovolného řešení zjistit směrnici trendu zmíněné závislosti. Pomocí rovnice přímky je možné spočítat množstevní docházkovou vzdálenost na základě požadované průměrné docházkové vzdálenosti. Rovnice přímky v našem případě vypadá přibližně takto:

$$MDV = 98,553 \cdot CPDV,$$

²CPDV je průměrná vzdálenost mezi adresním bodem a sběrným místem. Pokud se ke vzdálenosti mezi adresním bodem a sběrným místem přičítá konstanta 25 m, pak mluvíme o průměrné docházkové vzdálenosti. Konstanta je připočtena převážně kvůli interpretaci výsledků. Průměrná docházková vzdálenost 29 m·os⁻¹ (řešení při minimalizaci MDV) znamená, že každý má kontejnery víceméně před domem.

hodnoty na obr. 39 byly pro ilustraci proloženy přímkou. Směrnice přímky představuje celkové množství litrů odpadu pro všechny obyvatele dělené 1000 (MDV má jednotku $[\text{km}\cdot\text{L}\cdot\text{týden}^{-1}]$, CPDV má jednotku $[\text{m}\cdot\text{os}^{-1}]$). Celková týdenní produkce plastů města Tábor je 98 552 L. Je tedy vidět, že výsledky úloh korespondují se vstupními údaji.



Obr. 39: Závislost množstevní docházkové vzdálenosti na čisté průměrné docházkové vzdálenosti.

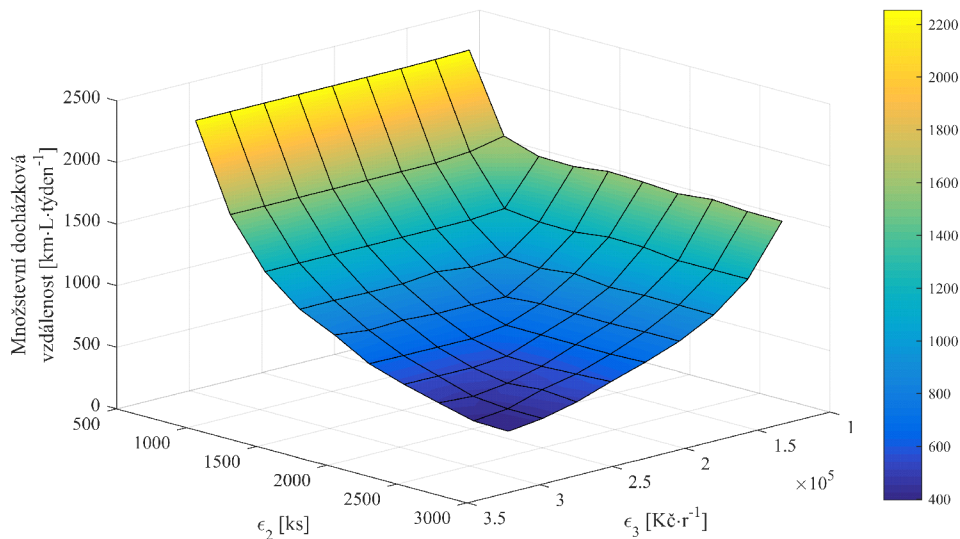
5.4 Metoda ε -omezení

V této kapitole se budeme zabývat ekonomickou náročností řešení, u kterého budeme požadovat minimální MDV (aby bylo třídění pro obyvatele co nejpřívětivější, je dobré mít průměrnou docházkovou vzdálenost co nejnižší). Pro následující výpočty bude využit Model V (model představen v kapitole 3.2). Jako zástupce ekonomické náročnosti řešení se vybrala kritéria PSM a RN. Maximální hodnoty obou kritérií budeme omezovat pomocí parametrů ε_2 (PSM) a ε_3 (RN). Hodnoty, kterých parametry nabývaly, zobrazuje tab. 18 (výpočty byly provedeny pro každou kombinaci $\varepsilon_2, \varepsilon_3$).

Tab. 18: Hodnoty parametrů $\varepsilon_2, \varepsilon_3$.

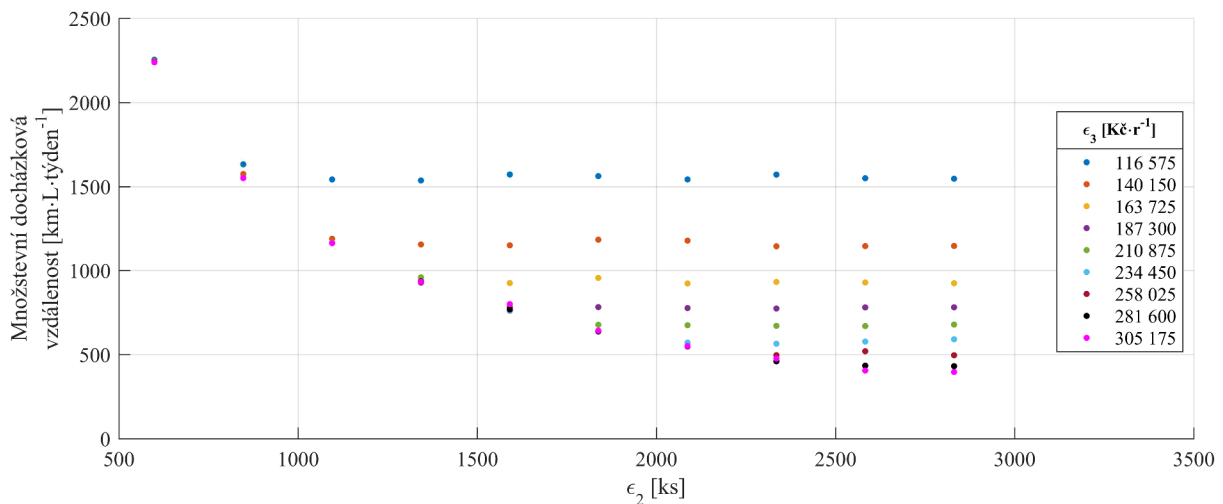
Omezení	Počet sběrných míst (ε_2) a roční náklady (ε_3)									
ε_2 [ks]	599	847	1 095	1 343	1 591	1 838	2 087	2 335	2 583	2 831
ε_3 [Kč·r ⁻¹]	116 575	140 150	163 725	187 300	210 875	234 450	258 025	281 600	305 175	–

Osy x, y na obr. 40 představují PSV a RN. V tomto grafu byly na osy x, y vynášeny hodnoty parametrů ($\varepsilon_2, \varepsilon_3$). Na ose z je minimální MDV, které lze za daných podmínek ($\varepsilon_2, \varepsilon_3$) dosáhnout. Pro vizualizaci výsledků byl použit MATLAB. Jak se dalo očekávat, při nejslabším omezení ($\varepsilon_2, \varepsilon_3$ mají nejvyšší hodnoty) je MDV nejnižší, kolem $400 \text{ km}\cdot\text{L}\cdot\text{týden}^{-1}$ (tedy cca $29 \text{ m}\cdot\text{os}^{-1}$), viz tab. 19. Výrazně vyšších hodnot nabývá pro nejsilnější omezení ($\varepsilon_2, \varepsilon_3$ mají nejnižší hodnoty). Zde MDV dosahuje až $2\,254 \text{ km}\cdot\text{L}\cdot\text{týden}^{-1}$ (tedy cca $48 \text{ m}\cdot\text{os}^{-1}$).



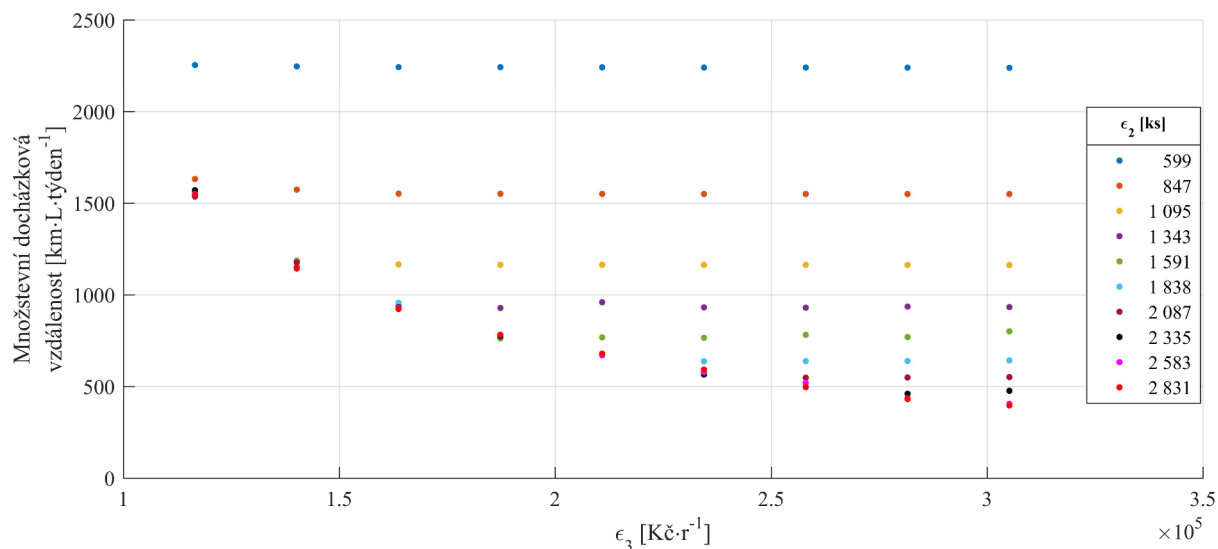
Obr. 40: Minimální množstevní docházková vzdálenost při omezení ϵ_2 , ϵ_3 .

Pro lepší pochopení informací vyplývajících z obr. 40 nám poslouží obr. 41 a obr. 42. Obr. 41 lze interpretovat tak, že každá barva představuje jednu hodnotu omezovacího parametru ϵ_3 a pro toto omezení máme řešení (v podobě MDV) v závislosti na parametru ϵ_2 . Je zde vidět, že řešení jsou zprava vždy takřka konstantní (nejslabší omezení z pohledu ϵ_2) a až při dostatečném snížení hodnot parametru ϵ_2 se začne hodnota řešení (hodnota MDV) zvyšovat. To znamená, že ϵ_3 omezí úlohu natolik, že parametr ϵ_2 již nijak zásadně úlohu neomezuje (konstantní část). Parametr ϵ_2 začne hrát důležitou roli až při snížení jeho hodnoty (pak dochází k navýšení hodnoty řešení).



Obr. 41: Pohled na graf na obr. 40 z pohledu množstevní docházkové vzdálenosti a parametru ϵ_2 .

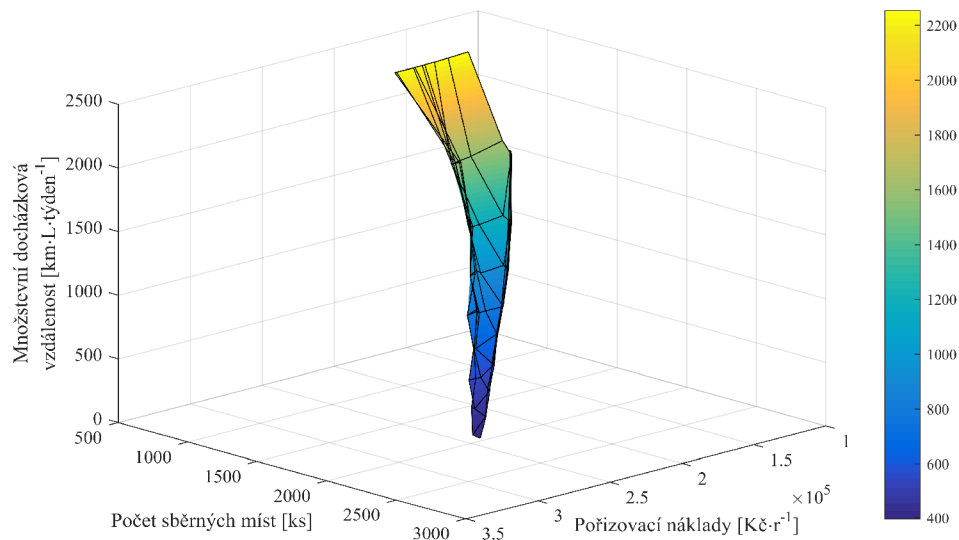
Obr. 42 můžeme interpretovat obdobně jako v předchozím případě. Každá barva představuje jednu hodnotu omezovacího parametru ϵ_2 a pro toto omezení máme řešení (v podobě MDV) v závislosti na parametru ϵ_3 . Stejně jako v předchozím případě jsou řešení nejprve takřka konstantní a až při dostatečném snížení hodnot parametru ϵ_3 se začne hodnota řešení zvyšovat. To znamená, že ϵ_2 omezí úlohu natolik, že parametr ϵ_3 již nijak zásadně úlohu neomezuje (konstantní část). Parametr ϵ_3 začne hrát důležitou roli až při snížení jeho hodnoty (pak dochází k navýšení hodnoty řešení).



Obr. 42: Pohled na graf na obr. 40 z pohledu množstevní docházkové vzdálenosti a parametru ϵ_3 .

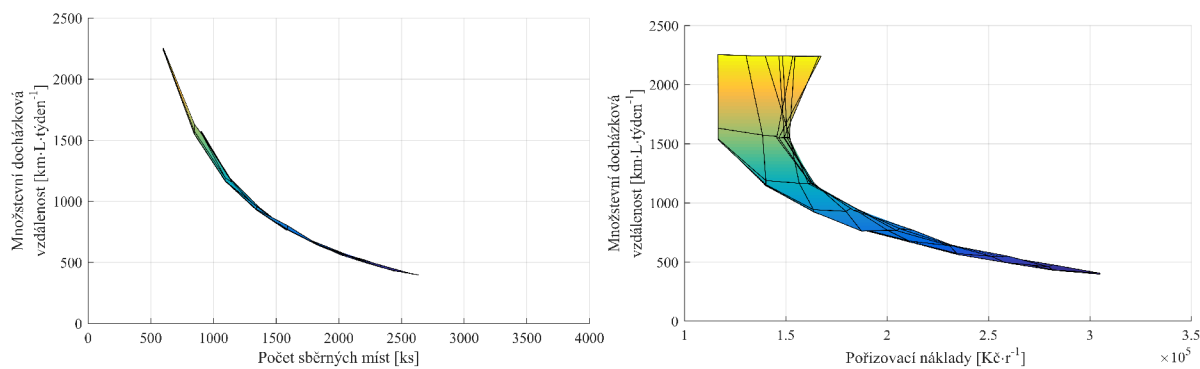
Bylo řečeno, že jedno z omezení ve většině případů zásadně neovlivňuje hodnotu řešení, čímž bylo myšleno, že není zásadně ovlivněna hodnota MDV. Nicméně toto omezení nelze v žádném případě vynechat, důvod bude vysvětlen v dalším textu.

Celistvý graf vypadá dosti odlišně, pokud je na osy x a y vyneseno PSM a RN, které mělo řešení (viz obr. 43). Plocha obsahující řešení je výrazně menší. Tento jev byl již naznačen v předchozích grafech a komentářích. Důvodem je, že se omezovaly maximální hodnoty kritérií (PSM, RN). Ve většině případů mělo na řešení zásadní vliv pouze jedno z omezení, toto omezení budeme označovat jako „hlavní“. Je nutné zdůraznit, že druhé kritérium nelze vynechat. Nejlépe je tato skutečnost vidět pro $\epsilon_2 = 599$ míst (žluté krajní hodnoty na obr. 43, obr. 44, nebo obr. 45 – modré hodnoty). Za podmínky minimální MDV a omezení ϵ_2 , se pro omezení $\epsilon_3 = 187\,300\text{--}305\,175\text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$ pohybovaly roční náklady řešení mezi $146\,000\text{--}168\,000\text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$. Tedy žádné z těchto prvních 6 řešení nebylo nijak zásadně omezeno hodnotou ϵ_3 . U zbylých 3 řešení ($\epsilon_3 = 116\,575\text{--}163\,725\text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$) již měla hodnota ϵ_3 výraznější vliv na podobu řešení. MDV u takto omezené úlohy byla přibližně $2240\text{ km}\cdot\text{L}\cdot\text{týden}^{-1}$ (tedy cca $48\text{ m}\cdot\text{os}^{-1}$) pro prvních 6 řešení. U zbylých 3 (celkem bylo 9 variant, viz tab. 18) byla navýšena pouze v rámci jednotek. Můžeme tedy říci, že pokud bychom požadovali minimální průměrnou docházkovou vzdálenost za podmínky, že chceme rozmístit maximálně 599 sběrných míst, pak je výhodné požadovat i roční náklady maximálně $116\,575\text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$. Množstevní (ani průměrná) docházková vzdálenost se s požadavkem na takto nízké náklady takřka nezvýší, ale ušetříme přibližně $52\,000\text{ Kč}$ ročně. Podobná situace samozřejmě nastala i v opačném případě, tedy například pro $\epsilon_3 = 116\,575\text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$ (na obr. 43, obr. 44 vždy krajní hodnoty podél přechodu ze zelené do žluté barvy, nebo obr. 46 – modré hodnoty). Zde zase $\epsilon_2 = 1\,095\text{--}2\,831$ míst příliš neovlivňuje řešení, protože počet míst u řešení je výrazně nižší, a to vždy kolem 907 míst. Omezení ϵ_2 ovlivňuje úlohu výrazněji při hodnotách $\epsilon_2 = 599, 847$ míst (omezujeme menším číslem než 907). U prvních 8 řešení (ty kde ϵ_2 nehrálo zásadní roli) je MDV přibližně $1\,552\text{ km}\cdot\text{L}\cdot\text{týden}^{-1}$ (tedy cca $41\text{ m}\cdot\text{os}^{-1}$). Při omezení $\epsilon_2 = 847$ míst je MDV vyšší přibližně o $80\text{ km}\cdot\text{L}\cdot\text{týden}^{-1}$ a pro $\epsilon_2 = 599$ míst dosahuje cca $2\,254\text{ km}\cdot\text{L}\cdot\text{týden}^{-1}$ (tedy cca $48\text{ m}\cdot\text{os}^{-1}$). Můžeme říci, že pokud bychom požadovali minimální docházkovou vzdálenost za podmínky, že chceme mít roční náklady maximálně $116\,575\text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$, pak je výhodné požadovat maximální počet míst alespoň 910. Tím dosáhneme, například oproti požadavku na maximálně 599 míst, nižší průměrnou docházkovou vzdálenost o $7\text{ m}\cdot\text{os}^{-1}$.



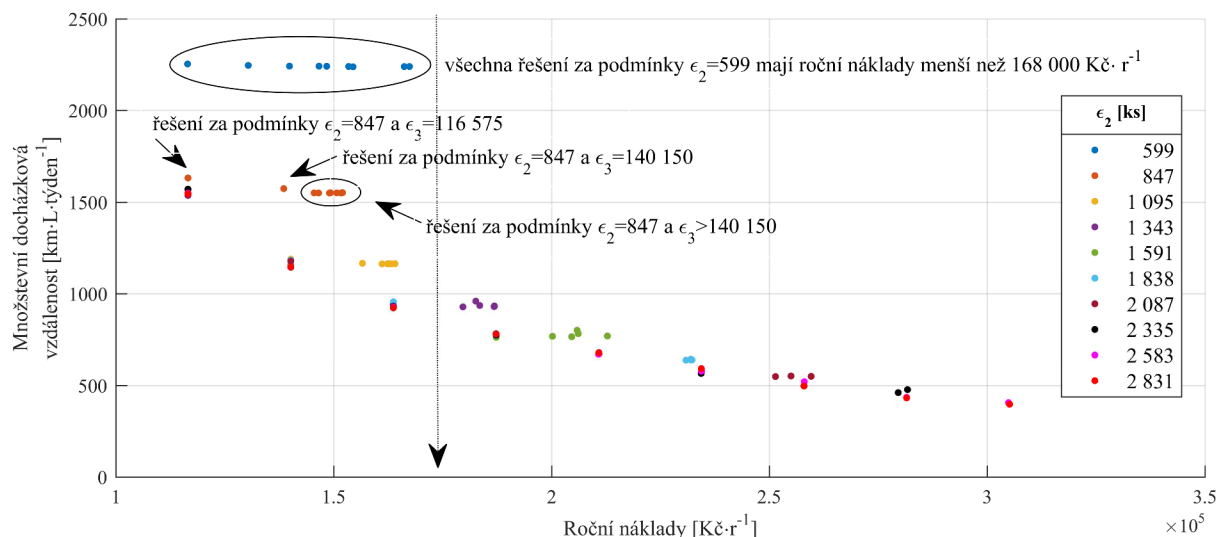
Obr. 43: Charakteristiky řešení pro metodu ε -omezení.

Následující grafy na obrázku obr. 44 slouží hlavně k lepšímu pochopení tvaru plochy v grafu na obr. 43.

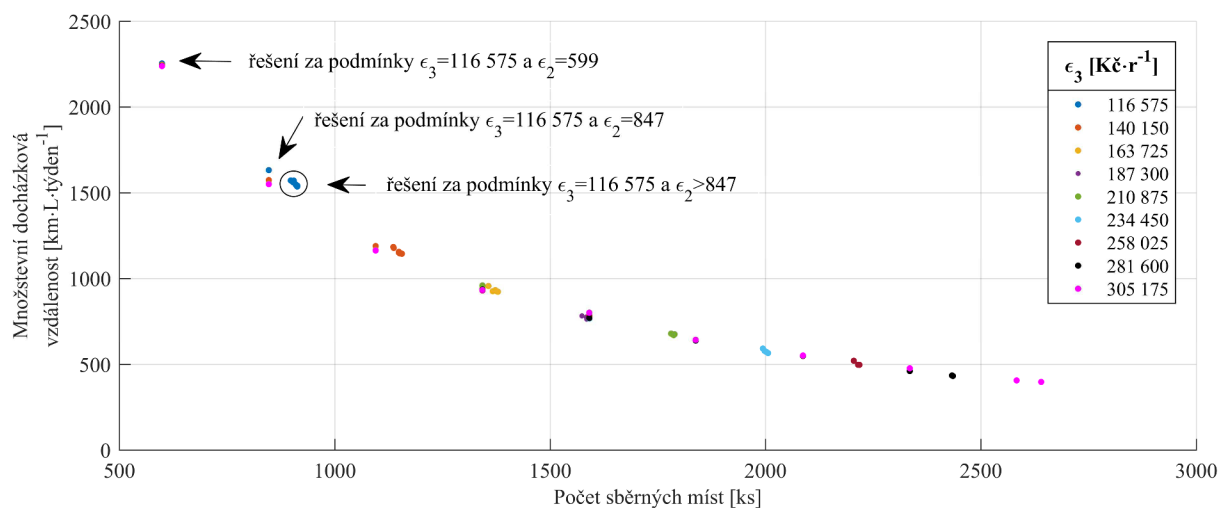


Obr. 44: Závislost množstevní docházkové vzdálenosti na kritériích.

Názornou představu o vztahu mezi zadanými omezeními (ε_2 , ε_3) a hodnotami kritérií, jež měla optimální řešení, je možné získat při porovnání grafů na obr. 41 a obr. 42 s grafy na obr. 45 a obr. 46.



Obr. 45: Množstevní docházková vzdálenost a roční náklady v souvislosti s parametrem ϵ_2 .



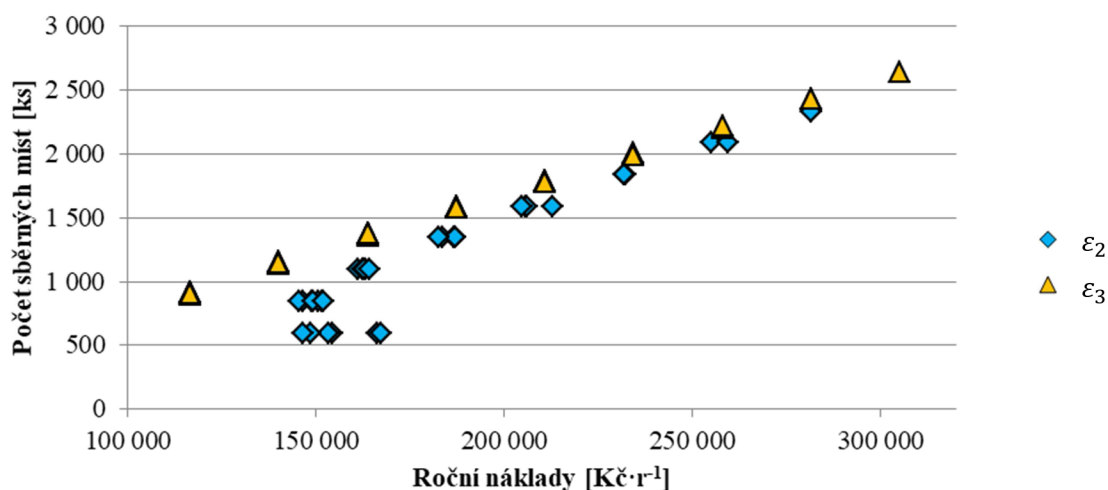
Obr. 46: Množstevní docházková vzdálenost a počet sběrných míst v souvislosti s parametrem ϵ_3 .

Pokud v úloze bylo jedno omezení kritéria hlavní, hodnota druhého kritéria se chová různě. Jestliže je hlavní omezení PSM (ϵ_2), tak pro jednu hodnotu omezení dosáhneme při výpočtech velice různých RN. Vezměme si například omezení $\epsilon_2 = 599$ míst. Omezení $\epsilon_3 = 187\,300$ až $305\,175 \text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$ výrazně nezasáhlo do řešení problému a RN u řešení byly v rozmezí $146\,000$ až $167\,000 \text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$. Jestliže je hlavní omezení RN (ϵ_3), tak pro jednu hodnotu omezení dosáhneme při výpočtech skoro stejného PSM. Jestliže omezíme RN, například $\epsilon_3 = 116\,575 \text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$, pak omezení $\epsilon_2 = 1\,095$ – $2\,831$ míst výrazně nezasahuje do řešení problému a PSM byl u řešení vždy 904 ± 14 . Tato situace (jedno omezení omezí úlohu natolik, že druhé již není účinné) nastala v mnoha případech. V tab. 19 jsou zobrazeny hodnoty MDV pro danou kombinaci omezení (ϵ_2 – PSM, ϵ_3 – RN). Každá buňka této tabulky je označena barevně podle toho, které omezení bylo hlavní: modrá – ϵ_2 , žlutá – ϵ_3 , červená – ϵ_2 i ϵ_3 (úlohu sehrála obě omezení).

Tab. 19: Množstevní docházková vzdálenost v závislosti na $\varepsilon_2, \varepsilon_3$.

		ε_2 [ks]									
		599	847	1 095	1 343	1 591	1 838	2 087	2 335	2 583	2 831
ε_3 [Kč·r ⁻¹]	116 575	2 254	1 632	1 542	1 536	1 571	1 562	1 542	1 571	1 549	1 546
	140 150	2 246	1 574	1 189	1 155	1 150	1 184	1 178	1 144	1 146	1 146
	163 725	2 242	1 552	1 166	943	926	956	923	932	929	925
	187 300	2 242	1 551	1 164	928	762	783	777	774	781	782
	210 875	2 241	1 551	1 164	960	768	678	675	671	670	679
	234 450	2 240	1 550	1 163	932	766	637	572	565	578	591
	258 025	2 240	1 550	1 163	930	782	638	548	497	520	496
	281 600	2 240	1 550	1 163	936	769	639	549	460	434	431
	305 175	2 239	1 550	1 163	933	801	642	551	477	406	397

Na obr. 47 je zobrazena závislost PSM a RN. V grafu jsou řešení, která se vyznačovala tím, že jedno z omezení bylo hlavní. Stejně jako v tab. 19 jsou modře řešení, u kterých bylo hlavní omezení ε_2 , žlutě řešení, u kterých bylo hlavní omezení ε_3 . V případě, že hlavní omezení bylo ε_2 , mělo řešení pro jednu hodnotu ε_2 výrazně různé RN. Naopak pokud bylo hlavní omezení ε_3 , pak pro jednu hodnotu ε_3 mělo řešení vždy takřka stejný PSM.



Obr. 47: Závislost počtu sběrných míst a ročních nákladů pro hlavní omezení.

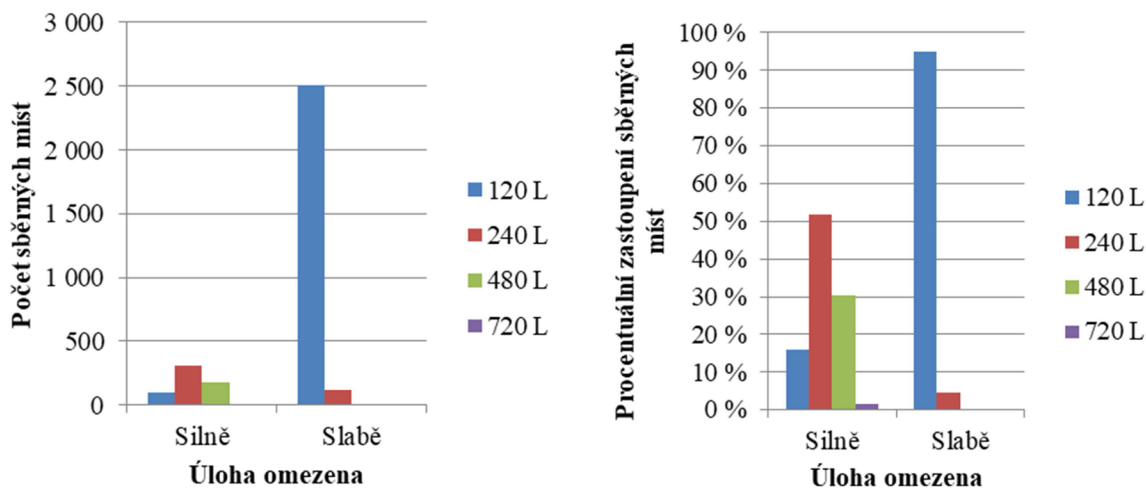
Dále mezi sebou porovnáme řešení pro dva krajní extrémy. První řešení bude parametry silně omezeno, tedy $\varepsilon_2 = 599$ míst, $\varepsilon_3 = 116 575$ Kč·r⁻¹, a druhé řešení bude pro parametry, které úlohu příliš neomezují, tedy $\varepsilon_2 = 2 831$ míst, $\varepsilon_3 = 305 175$ Kč·r⁻¹. Řešení budeme značit podle síly jejich omezení, tedy omezeno silně a slabě.

Nejprve uvedeme přehledovou tabulku (viz tab. 20), ve které můžeme porovnat některá kritéria. Je vidět velký rozdíl MDV, který je 1 857 km·L·týden⁻¹, což činí přibližně 44 m·os⁻¹. Velké rozdíly jsou i u ostatních kritérií, na čemž mají samozřejmě zásluhu i použitá omezení $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ (PSM – 2 041, RN – 188 692 Kč·r⁻¹, SC – 4,3 h·týden⁻¹). Je nutné zdůraznit, že na SC nebyl při minimalizaci brán ohled, přesto se čas potřebný pro manipulaci se sběrnými nádobami liší o více než 4 h týdně. Také zde je nutné vzít v úvahu vliv podmínky na minimální naplnění, která byla 30 % (viz poznámka na str. 24).

Tab. 20: Porovnání silně a slabě omezené úlohy.

Kritérium	Úloha omezena	
	Silně	Slabě
Množstevní docházková vzdálenost [$\text{km} \cdot \text{L} \cdot \text{týden}^{-1}$]	2 254	397
Počet sběrných míst [ks]	599	2640
Roční náklady [$\text{Kč} \cdot \text{r}^{-1}$]	116 450	305 142
Servisní čas [$\text{h} \cdot \text{týden}^{-1}$]	5,7	10
Počet sběrných nádob [ks]	801	2663
Průměrná docházková vzdálenost [$\text{m} \cdot \text{os}^{-1}$]	48	29
Průměrná naplněnost sběrných míst [%]	73	65

Také rozdíl počtu sběrných míst a počtu sběrných nádob napovídá, že u slabě omezené úlohy se využila převážně jedno-kontejnerová sběrná místa (pouze 16 více-kontejnerových) a u silně omezené úlohy jsou sběrná místa z velké části složena z několika sběrných nádob. U slabě omezené úlohy má také naprostou převahu využití 120 L kapacit (v cca 95 %). Silně omezená úloha má sběrná místa převážně o kapacitách 240 L a 480 L. V žádné z těchto dvou úloh nebyly využity sběrné nádoby o kapacitě 1 100 L a sběrná místa s kapacitou 720 L byla využita pouze výjimečně. Celkový přehled o kapacitách použitých sběrných míst udávají grafy na obr. 48. Je zde také vidět, že řešení slabě omezené úlohy je složeno skoro vždy ze 120 L sběrných nádob (v cca 70 % se sváží 1x za 4 týdny) a u silně omezené úlohy se s velkou převahou využily 240 L nádoby (na skoro stejném množství míst se sváží 1x za 2 týdny (42 %) a 1x za 4 týdny (48 %)).



Obr. 48: Porovnání sběrných míst u silně a slabě omezené úlohy.

6 Výpočtová náročnost

Problém byl modelován a následně řešen pomocí programu GAMS (General algebraic modeling system), konkrétně byla použita verze 24.5.6. Pro řešení této celočíselné úlohy byl využit řešič CPLEX. Výpočty byly prováděny na počítači s procesorem Intel(R)Xeon(R) CPU E5-2698 v4 @ 2.20Ghz a operační paměť o velikosti 128,0 GB.

6.1 Nastavení parametrů řešiče

Časový limit pro řešení úlohy, který je defaultně cca 16 minut, a maximální počet iterací, byly nastaveny na maximum. Přesností řešení $x\%$ je v této kapitole myšleno, že námi dosažené optimální řešení se od naprostého optima liší maximálně o $x\%$ optima. Pro téměř všechny výpočty byla požadována přesnost řešení alespoň 10% . Vyšší přesnost se vyžadovala u Modelu III (nerovnostní přístup), Modelu IV (sumační přístup), a protože byly tyto modely srovnávány s Modelem II, konkrétně s kombinací MDV, PSM, byla i zde požadována vyšší přesnost. U těchto tří analyzovaných řešení je zaručena přesnost menší než $0,3\%$.

Defaultní nastavení řešiče CPLEX je pro většinu problémů efektivní, ale protože jsou tyto výpočty náročné (minimalizace PSM u Modelu I – s defaultním nastavením trvá více než měsíc a přesto nebylo dosaženo požadované přesnosti), byla zde snaha využít možnosti nastavit některé z parametrů řešiče. Nejprve byl využit software obsažený v programu GAMS. Tento nástroj je označován jako tuning tool. Pomocí něj je uživatel schopen najít specifické nastavení, které může být pro daný problém oproti defaultnímu velice účinné. Bohužel v našich podmínkách, kdy jsme pracovali s různými modely a různými účelovými funkcemi, jsme nebyli příliš úspěšní. Nastavení, jež bylo nalezeno pomocí nástroje tuning tool, bylo sice většinou přínosné, ale často velice účinné pouze pro problém (konkrétní model s účelovou funkcí), pro který byl tento nástroj spuštěn. Nicméně jedno z nastavení doporučené tímto nástrojem se použilo pro nalezení prvního řešení u Modelu I při minimalizaci PSM. Řešení bylo nalezeno v relativně krátkém čase a s relativně nízkou přesností (pro defaultní nastavení je čas výrazně vyšší a přesnost výrazně nižší).

V řešených úlohách bylo nastavováno celkem 9 parametrů. Tyto parametry byly nastavovány zároveň v různých kombinacích. Tab. 21 uvádí přehled parametrů, jejichž hodnoty byly při řešení problémů uvedené výše upravovány. Více podrobností o možnostech nastavení parametrů lze nalézt v [33].

Tab. 21: Přehled nastavovaných parametrů.

Parametr	Popis	Označení
memoryemphasis	Přiřazením hodnoty 1 je dovoleno odlehčit paměti uložením potřebných souborů na disk.	N1
threads	Umožňuje nastavit maximální počet vláken využitých pro optimalizaci.	N2
mipemphasis	Tato volba řídí taktiku hledání řešení. V našem případě byla parametru přiřazena hodnota 1 (upřednostňuje se řešitelnost nad optimálností).	N3
mipstart	Přiřazením hodnoty 1–6 je umožněno definovat řešení, z kterého bude následná optimalizace vycházet.	N4

probe	Umožňuje ovlivnit analýzu problému před řešením. Přiřazena hodnota -1, tedy analýza se neprovedla.	N5
varsel	Umožňuje nastavit strategii pro výběr proměnné pro větvení v uzlech. Přiřazena hodnota 4, tedy strategie je založena na pseudo redukovaných cenách.	N6
cutpass	Umožňuje nastavit maximální počet průchodů řeznou rovinou. Přiřazena hodnota -1, tedy žádný průchod není povolen.	N7
heurfreq	Umožňuje nastavit frekvenci heuristik. V prvním případě byla přiřazena hodnota -1, tedy heuristiky se nepoužívají. Ve druhém případě byla přiřazena hodnota 8.	N8
polishafternode	„Polishing“ je nastavení spouštějící pouze heuristiky (neprovádí se dynamické hledání ani metoda větví a řezů). K vyvolání může být využit například parametr polishafternode. Pomocí tohoto nastavení se <i>polishing</i> spustí po zpracování zadaného počtu uzlů. Existuje několik dalších možností, jak <i>polishing</i> spustit. Můžeme jej spustit po uplynutí určitého času optimalizace (polishaftertime, polishafterdetime), po nalezení určitého počtu řešení (polishafterintsol), po dosažení určité přesnosti (polishafterepgap, polishafterepagap).	N9

Přehled kombinací nastavovaných parametrů je v tab. 22. Ve všech případech bylo použito nastavení pro práci s pamětí a pro počet vláken. V případě jednokriteriální úlohy bylo pro různé účelové funkce využito různých nastavení. Při minimalizaci MDV bylo dostačující defaultní nastavení řešiče (nastavení č. 1). Při minimalizaci RN, SC bylo pozměněno hlavní zaměření řešiče (nastavení č. 2). Při minimalizaci PSM bylo použito několik různých kombinací. Nejprve se použilo nastavení č. 3 (heurfreq = -1), které se ukázalo efektivní pro nalezení prvního řešení v relativně krátkém čase a s relativně nízkou přesností (defaultní nastavení bylo výrazně horší v obou ohledech). Taková kombinace nastavovaných parametrů byla doporučena jedním ze spuštění nástroje tuning tool. Ovšem dále příliš účinné nebylo, proto se dále použilo nastavení č. 4 (heurfreq = 8), ve kterém se pouze upravuje frekvence heuristik. Nakonec bylo využito nastavení č. 5, které se ukázalo být pro tuto účelovou funkci výrazně účinnější oproti jiným zkušným nastavením. Přestože bylo využito nejrozličnějších nastavení, výpočet této účelové funkce na požadovanou přesnost 10 % trval přibližně týden. U zbylých modelů bylo použito nastavení č. 2. Polishing (nastavení č. 5) bylo také využito pro zpřesnění řešení u Modelu III (nerovnostní přístup), Modelu IV (sumační přístup) a Modelu II, konkrétně při řešení kombinace MDV, PSM.

Tab. 22: Použité kombinace nastavení.

Číslo nastavení	Nastavované parametry
1	N1, N2
2	N1, N2, N3
3	N1, N2, N5, N6, N7, N8
4	N1, N2, N4, N8
5	N1, N2, N3, N4, N9

Aby bylo možné využít již dříve získaného řešení (N4), je potřeba mít řešení uložené a následně jej správně načíst. K dispozici jsou 3 možnosti, jak můžeme řešení uložit:

1. Pomocí příkazu, který platí pro všechny modely:

```
option savepoint=hodnota;
```

2. Pomocí příkazu, který platí pouze pro daný model:

```
názevmodelu.savepoint=hodnota;
```

3. Nebo využitím následujícího příkazu, spuštěním z jiného souboru:

```
$call=gams názevsouboru savepoint=hodnota lo=%GAMS.lo%;
```

V příkazu máme možnost nastavení 3 hodnot:

- 0 – Defaultní, nic neukládáme.
- 1 – Uloží optimální řešení do souboru „názevmodelu_p.gdx“.
- 2 – Uloží optimální řešení modelu do souboru „názevmodelu_pnn.gdx“, kde nn představuje pořadí řešení modelu. Toto nastavení je vhodné například při řešení modelu v cyklu.

Načtení řešení se již provede jednoduše. Před řešením modelu se provede příkaz:

```
execute_loadpoint 'název_souboru';
```

popřípadě se před středník mohou vypsát proměnné, které chceme načíst. Proměnné se oddělují čárkou. Další informace o uložení a následném načtení lze nalézt například v [34], [35].

Tuning tool

Funkce tohoto nástroje spočívá v provedení analýzy problému a navrhnutí změny některých parametrů. Spočítá se úloha s defaultním nastavením (nebo nastavením obsaženým v textovém souboru pojmenovaném stejným číslem jaké nastavíme pro parametr tuning) a dále se provede několik výpočtů s upravenými parametry řešiče. Na závěr do systémového souboru vypíše, které nastavení vyhodnotil jako nejlepší, a uloží jej pod číslem přiřazeným parametru tuning. K tomuto nástroji se pojí několik nastavení, níže budou uvedeny jen některé z nich.

Tab. 23: Představení základního nastavení spojeného s nástrojem tuning tool.

Parametr	Popis
tuning	Přiřazením číselné hodnoty se spouští nástroj. Po vyhodnocení se doporučené parametry vypíší do souboru, jehož název tvoří zadané číselné hodnoty.
tuningdisplay	Tento parametr ovlivňuje obsáhlost výpisu. Zde lze přiřadit hodnoty: žádný výpis základní výpis základní výpis + vypsání nastavených parametrů obsáhlý výpis ukazující i postup každého výpočtu.

Mezi další nastavení patří: tuningdettlim, tuningmeasure, tuningrepeat, tuningtilim. Tato nastavení jsou popsána v [33].

Možnosti zadání nastavení

Textový soubor, v němž je uloženo nastavení, se vždy jmenuje „cplex“ (obecně je to název řešiče). Soubory s různým nastavením se liší pouze příponou. Přípona může vypadat následovně: opt, op2, op3, atd. Nastavení řešiče se vyvolá před výpočtem příkazem

```
názevmodelu.optfile=hodnota;
```

kde hodnota je číslo obsažené v příponě souboru s nastavením. Například tedy:

```
model2.optfile=1 (pro soubor „cplex.opt“),
```

nebo

```
model2.optfile=26 (pro soubor „cplex.o26“).
```

Soubor s nastavením můžeme vytvořit:

1. V textovém editoru (např. poznámkový blok). Soubor uložíme se správným názvem a příponou. Každý řádek obsahuje název parametru a za mezeru/rovnítko se zadá hodnota parametru.
2. Jako část kódu v GAMSu. Začátek je uveden pomocí „\$onEcho > *název.přípona*“ a po sepsání chtěných parametrů se stejnou strukturou jako v bodě 1. se zápis ukončí pomocí „\$offEcho“. Celý příkaz může vypadat následovně:

```
$onEcho > cplex.opt
    memoryemphasis 1
    mipemphasis 1
    mipstart 1
$offEcho
```

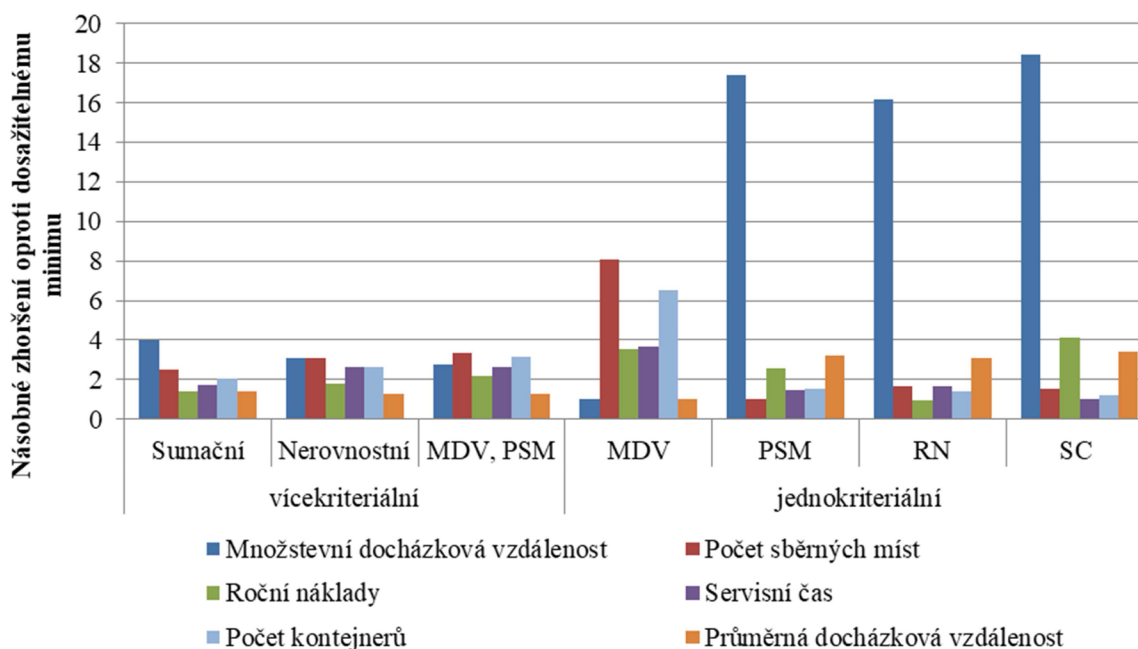
3. Pomocí GAMS editoru (Utilities → Option editor). V tomto editoru si lze vybrat, pro který řešič chceme nastavovat parametry. Dále nám nabídne jak parametry, které můžeme měnit, tak i hodnoty, které můžeme zadat.

Diskuse výsledků a doporučení

Na začátku je vhodné uvést uživatelské parametry, kterými je úloha ovlivněna. Patří mezi ně možnost přiřadit pro různá adresní místa (na základě populace) různé sady sběrných míst a jejich možnosti svozové frekvence, dále různou sypnou hmotnost pro adresní místa s různou zástavbou a požadavky na minimální naplněnost jednotlivých nádob a minimální celkovou naplněnost. Jak bylo zmíněno například v poznámce na str. 24, významně se na podobě řešení mohou podepsat i požadavky na minimální naplněnost.

Nejprve je vhodné provést výpočet jednokritériálních úloh, aby se zjistily extrémy, kterých lze dosáhnout. Jak se ukázalo, řešení z pohledu volby kapacit sběrných míst (případně i volby frekvence svozu) u tohoto modelu korespondují s intuitivními představami o minimalizaci daných kritérií (při zohlednění tab. 9). Výrazným způsobem se také projevil problém jednokritériální optimalizace s více prioritními kritérii. Při dalším postupu je tedy vhodné využít některý z vícekritériálních modelů (do těchto modelů jsou potřeba výsledky jednokritériálních úloh pro normování). V této diplomové práci byl Model II, který při optimalizaci zohledňuje v účelové funkci dvě kritéria, využít převážně pro zjištění vzájemných závislostí mezi kritérii. Z výsledků ovšem vyplynulo také to, že při nezohlednění MDV v účelové funkci dosahuje (společně s průměrnou docházkovou vzdáleností) vysokých hodnot (zde je nutné vzít v úvahu poznámku na str. 24). Jako nejlepší se ukázalo být řešení pro kombinaci zohledněných kritérií MDV a PSM. Toto řešení se vyznačuje tím, že přesto, že se při minimalizaci zohlednila pouze dvě kritéria, příznivě nízká byla všechna hlavní kritéria. Svými charakteristikami se vyrovná řešením u přístupů, kde byla zohledněna všechna čtyři hlavní kritéria. Tyto přístupy jsou zakomponovány v Modelu III a Modelu IV. Oba modely se snaží vypořádat s negativním vlivem vícekritériální optimalizace různým způsobem. Jak ukázaly výsledky, oba přístupy jsou efektivní a řešení jsou do jisté míry ekvivalentní (ani jedno není jednoznačně lepší). Posledním využitým modelem byl Model V, který je založen na metodě ε -omezení. Kritériem k minimalizaci byla zvolena MDV. U PSM a RN se pomocí parametrů omezovala jejich maximální hodnota. Výsledkem je například 3D graf, který popisuje vzájemné závislosti mezi těmito kritérii. Zde se mimo jiné ukázala důležitost vhodně nakonfigurované úlohy. Například pokud se v úloze požaduje řešení s maximálně 599 sběrnými místy, pak je vhodné požadovat i RN maximálně $116\,575 \text{ Kč}\cdot\text{r}^{-1}$. Oproti nižším požadavkům na RN (omezení vyšší hodnotou) se řešení v podobě MDV takřka nemění, ovšem je ušetřeno až 50 000 Kč ročně.

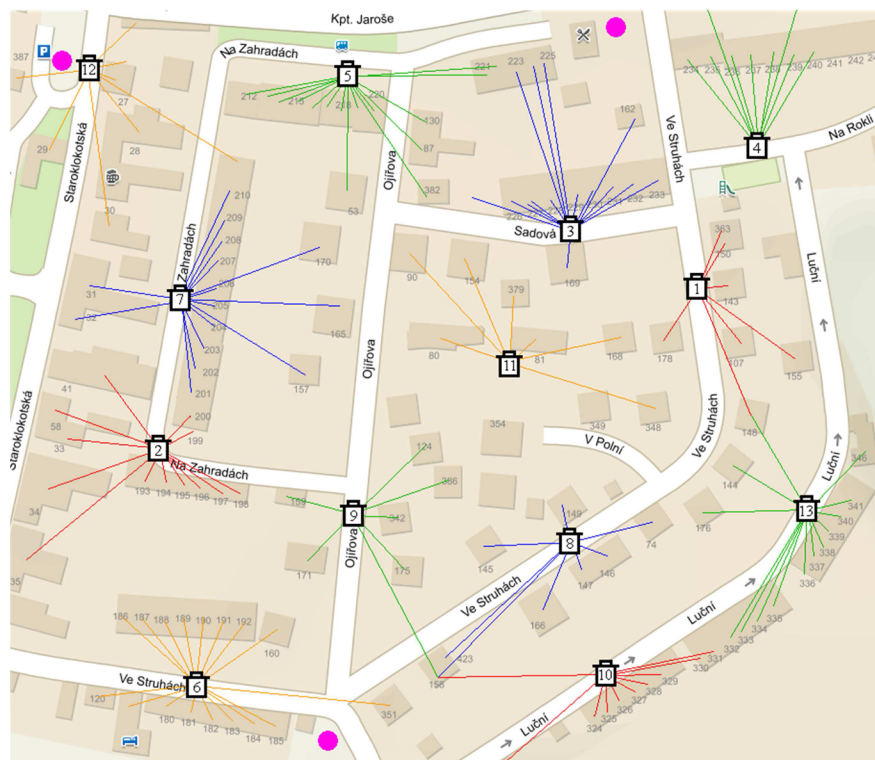
Porovnání řešení nejefektivnějších přístupů se základní jednokritériální úlohou je na obr. 49. V pravé části grafu, kde jsou výsledky jednokritériální úlohy, lze pozorovat například problém jednokritériální optimalizace s více prioritními kritérii. Také je zde vidět velký kontrast s levou částí grafu, v níž jsou řešení z nejefektivnějších přístupů vícekritériální optimalizace. Lze také pozorovat, že při zohlednění pouze dvou kritérií (Model II – MDV, PSM) lze dosáhnout řešení, které se svou kvalitou vyrovná komplexnějším přístupům (Model III – nerovnostní přístup, Model IV – sumační přístup).



Obr. 49: Porovnání nejefektivnějších přístupů se základní jednokriteriální úlohou.

Jako nejlepší se jeví být řešení sumačního přístupu (Modelu IV). Přesto, že kombinace MDV, PSM může konkurovat Modelu III a Modelu IV, bude řešení Modelu IV (označené jako nejlepší) okomentováno pouze vzhledem k Modelu III. MDV je sice o něco vyšší, ale projevení na průměrné docházkové vzdálenosti činí pouhé $4 \text{ m} \cdot \text{os}^{-1}$. Průměrná docházková vzdálenost, která je $41 \text{ m} \cdot \text{os}^{-1}$ (s přičtenou konstantou 25 m), se zdá být díky příznivosti ostatních charakteristik přijatelná. RN jsou nižší přibližně o $35\,000 \text{ Kč} \cdot \text{rok}^{-1}$ a činí $131\,212 \text{ Kč} \cdot \text{rok}^{-1}$. Velkou roli při následném vyvážení sběrných míst může hrát jejich počet. Sběrných míst bylo rozmístěno o 199 méně, což může mít za následek snížení náročnosti svozu. Jedná se zejména o dobu svážení (kratší délky trasy). S délkou trasy také souvisí například opotřebení svozových vozů. Také SC s hodnotou $4,7 \text{ h} \cdot \text{týden}^{-1}$ je nezanedbatelně nižší a to o cca $2,5 \text{ h} \cdot \text{týden}^{-1}$ (při každém svozu). Z těchto důvodů se jeví řešení sumačního přístupu (Model IV) lepší.

Řešení přístupu vyhodnoceného jako nejlepší (Model IV) je vizualizováno. Rozložení sběrných míst, včetně modelem uvažovaného proudu odpadu, je pro část města Tábor zobrazeno na obr. 50. Růžové kruhy představují aktuální rozmístění sběrných míst (na základě oficiálních informací viz [36]). Podrobnější informace o alokovaných sběrných místech uvádí tab. 24.



ZDROJ: www.mapy.cz/ - vlastní zpracování
Obr. 50: Vizualizované řešení pro část města (Model IV).

Tab. 24: Vlastnosti alokovaných sběrných míst.

Sběrné místo	Kapacita	Svozové období	Naplnění	Sběrné místo	Kapacita	Svozové období	Naplnění
1	240 L	4 týdny	100 %	8	240 L	4 týdny	100 %
2	240 L	2 týdny	67 %	9	240 L	4 týdny	100 %
3	240 L	2 týdny	91 %	10	240 L	4 týdny	98 %
4	240 L	4 týdny	100 %	11	240 L	2 týdny	77 %
5	240 L	2 týdny	87 %	12	240 L	4 týdny	96 %
6	240 L	2 týdny	96 %	13	240 L	2 týdny	75 %
7	240 L	2 týdny	72 %				

Ve zobrazené oblasti byla rozvržena pouze sběrná místa s kapacitou 240 L (tak jako je tomu u naprosté většiny sběrných míst – viz graf na obr. 33). Svází se buď 1x za 2 týdny, nebo 1x za 4 týdny. Individuální naplnění v této oblasti bylo vždy vyšší než 67 %.

Pozice sběrných míst vybraná modelem koresponduje s intuitivní představou, jakým způsobem ovlivňuje řešení MDV. Je to vzdálenost násobená vyprodukovaným množstvím odpadu. Je tedy přirozené umístit sběrná místa tak, aby to k nim měla oblast s velkou produkcí blízko (často je vybráno umístění u panelových domů). U některých adresních míst (145 a 158) počítá model s vynášením odpadu do více sběrných míst (1,13 a 8,9,10). To se jeví jako přirozené, navíc mají od adresního místa takřka stejné vzdálenosti. Ovšem je otázkou, jak by takovéto rozložení fungovalo v praxi (jak mají lidé vědět, do kterého sběrného místa mají za aktuální situace jít, aby v něm byl prostor pro jejich odpad).

V dalším testování modelu by mohly být zohledněny místo přímých vzdáleností adresních míst reálné vzdálenosti po pozemních komunikacích. To by bylo výrazně náročnější z hlediska tvorby vstupní datové sady, ale mohlo by být zajímavé srovnání řešení pro oba

typy vzdáleností a ukázalo by se, zda zvýšení náročnosti má smysl, nebo je práce s přímými vzdálenostmi dostatečná. V dalším vývoji modelu by možná bylo také vhodné omezit maximální naplněnost sběrných míst (například na maximálně 90 %), aby nedocházelo k situacím, kdy občan přijde k přeplněnému sběrnému místu (např. výkyvy produkce).

Závěr

Hlavním cílem práce bylo vyvinout matematický model, který by sloužil k navrhování rozmístění sběrných míst pro různé frakce komunálního odpadu s přihlédnutím na docházkovou vzdálenost, ekonomickou náročnost a na využití alokovaných kapacit. Dále bylo řešeno vytvoření skriptu pro generování vstupní datové sady pro model ze základních vstupních údajů, kterými jsou adresní body s populací a GSP souřadnicemi.

V úvodní části se práce věnovala popisu odpadového hospodářství v ČR se zaměřením na komunální odpad. Čtenář byl uveden do aktuální situace. Dále byl naznačen směr, kterým by se mělo odpadové hospodářství ubírat na základě novely zákona o odpadech č. 185/2001 Sb. Zde vyvstává potřeba efektivního nakládání s odpadem a jeden z pomocných nástrojů, jak toho dosáhnout, je právě vhodné umístění sběrných míst s vhodnou kapacitou. Protože vytvořený matematický model je MILP, byl dále čtenář seznámen s pojmy týkajícími se této problematiky a byly mu představeny základní metody řešení a základní typy těchto problémů. V neposlední řadě zde byly představeny využité přístupy k vícekriteriální optimalizaci.

Následně byly představeny samotné modely a uveden jejich popis včetně seznamu parametrů, proměnných, rovnic a nerovnic. V modelech se zohledňovala 4 hlavní kritéria – množstevní docházková vzdálenost, počet sběrných míst, roční náklady a servisní čas. Dále byla představena problematika tvorby základní datové sady (generátor byl implementován pomocí VBA v programu Microsoft Excel). Pro případovou studii se využilo 5 modelů (1 jednokriteriální, 4 vícekriteriální), které byly implementovány v programu GAMS. Řešení modelů byla analyzována z různých pohledů. V poslední kapitole je provedena diskuze výsledků.

Literatura

- [1] VISOH. *Veřejné informace o produkci a nakládání s odpady*. [Online]. Dostupné z: <https://www.isoh.mzp.cz/visoh/>.
- [2] ČAOH. *Moderní obec: Možná rizika tzv. PAYT systémů*. [Online]. 2017. [cit. 30.03.2020]. Dostupné z: <http://www.caoh.cz/odborne-clanky-a-aktuality/moderni-obec-mozna-rizika-tzv-payt-systemu.html>.
- [3] CARAMIA, M. a P. DELL'OLMO. *Multi-objective management in freight logistics: increasing capacity, service level and safety with optimization algorithms*. London : Springer, c2008. ISBN 978-1-84800-381-1.
- [4] GASPAR-CUNHA, A. a J. A. COVAS. *An Introduction to Multiobjective Optimization Techniques*. [online]. 2011. [cit. 15.01.2020]. 26s. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/283325825_An_Introduction_to_Multiobjective_Optimization_Techniques.
- [5] WILLIAMS, H. P. *Model building in mathematical programming*. New York : Wiley, c1978. ISBN 0471995266.
- [6] WILLIAMS, H. P. *Model building in mathematical programming*. 5th ed. Hoboken : N.J.: Wiley, 2013. ISBN 978-1118443330.
- [7] GOMORY, R.E. *Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs*. Operations Research, 275-278. 1958. Dostupné z: https://www.researchgate.net/profile/Ralph_Gomory/publication/230872913_Outline_of_a_n_Algorithm_for_Integer_Solutions_to_Linear_Programs/links/543fcadd0cf21227a11b7fe0/Outline-of-an-Algorithm-for-Integer-Solutions-to-Linear-Programs.pdf.
- [8] BALAS E., 1965. *An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables*, Operations Research, 517-687, DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.13.4.517>.
- [9] ŠLAPAL, J. *Metody diskrétní matematiky*. Vyd. 2., upr. Brno : Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2785-x.
- [10] HAMMER P. L. a RUDEANU S., 1968. *Boolean Methods in Operations Research and Related Areas*, DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-85823-9>.
- [11] HAMMER P. L. a PELED U.N., 1972. *On the Maximization of a Pseudo-Boolean Function*, Dostupné z: <https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/321694.321700>.
- [12] FISCHETTI M. a LODI A. *Heuristics in mixed integer programming*. [online]. [cit. 31.03.2020]. Dostupné z: <https://homepages.cwi.nl/~dadush/workshop/discrepancy-ip/papers/heuristics-survey-fischetti-lodi-11.pdf>.
- [13] Heuristic algorithms - optimization. [Online]. [cit. 31.03.2020]. Dostupné z: https://optimization.mccormick.northwestern.edu/index.php/Heuristic_algorithms.

- [14] IBM Knowledge Center. [Online]. 2017 [cit. 31.03.2020]. Dostupné z: https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P_12.9.0/ilog.odms.cplex.help/CPL/EX/UsrMan/topics/discr_optim/mip/heuristics/46_soln_polish.html.
- [15] IEOR 151 – Service Operations Design and Analysis., 2019. *IEOR 151 – Lecture 15 Set Covering Problem*. [Online] [cit. 08.03.2020]. Dostupné z http://courses.ieor.berkeley.edu/ieor151/lecture_notes/ieor151_lec15.pdf.
- [16] IEOR 151 – Service Operations Design and Analysis., 2019. *IEOR 151 – Lecture 13 P-Median Problem*. [Online] [cit. 08.03.2020]. Dostupné z: http://courses.ieor.berkeley.edu/ieor151/lecture_notes/ieor151_lec13.pdf.
- [17] BAZARAA, M. S., J. J. JARVIS a H. D. SHERALI. *Linear programming and network flows*. 4th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley, c2010. ISBN 978-0470462720.
- [18] IEOR 151 – Service Operations Design and Analysis., 2019. *IEOR 151 – Lecture 14 Vertex P-Center Problem*. [Online] [cit. 08.03.2020]. Dostupné z: http://courses.ieor.berkeley.edu/ieor151/lecture_notes/ieor151_lec14.pdf.
- [19] IEOR 151 – Service Operations Design and Analysis., 2019. *IEOR 151 – Lecture 16 Capacitated Location Planning*. [Online] [cit. 08.03.2020]. Dostupné z: http://courses.ieor.berkeley.edu/ieor151/lecture_notes/ieor151_lec16.pdf.
- [20] IEOR 151 – Service Operations Design and Analysis., 2019. *IEOR 151 – Lecture 17 Vehicle Routing Problem*. [Online] [cit. 08.03.2020]. Dostupné z: http://courses.ieor.berkeley.edu/ieor151/lecture_notes/ieor151_lec17.pdf.
- [21] BARBOSA-PÓVOA A.P., da SILVA C. a CARVALHO A., 2018. *Opportunities and challenges in sustainable supply chain: An operations research perspective.*, European Journal of Operational Research, 268(2), 399–431, DOI: 10.1016/j.ejor.2017.10.036.
- [22] ZAMORANO M., MOLERO E., GRINDLAY A., RODRÍGUEZ M.L., HURTADO A. a CALVO F.J., 2009. *A planning scenario for the application of geographical information systems in municipal waste collection: A case of Churriana de la Vega (Granada, Spain).*, Resources, Conservation and Recycling, 54(2), 123-133, DOI: 10.1016/j.resconrec.2009.07.001.
- [23] HIDALGO D., MARTÍN-MARROQUÍN J.M., CORONA F. a JUARISTI J.L., 2018. *Sustainable vacuum waste collection systems in areas of difficult access.*, Tunnelling and Underground Space Technology, 81, 221-227, DOI: 10.1016/j.tust.2018.07.026.
- [24] GALLARDO A., CARLOS M., PERIS M. a COLOMER F.J., 2015. *Methodology to design a municipal solid waste pre-collection system.*, A case study, Waste Management, 36, 1-11, DOI: 10.1016/j.wasman.2014.11.008.
- [25] SHI J., WANG R., CHEN W., XING L. a JIN M., 2020. *Bi-objective design of household E-waste collection with public advertising and competition from informal sectors.*, Waste Management, 102, 65-75, DOI: 10.1016/j.wasman.2019.10.018.

- [26] BAUTISTA J. a PEREIRA J., 2006. *Modeling the problem of locating collection areas for urban waste management.*, An application to the metropolitan area of Barcelona, *Omega*, 34(6), 617-629, DOI: 10.1016/j.omega.2005.01.013.
- [27] VU H.L., NG K.T.W. a BOLINGBROKE D., 2018. *Parameter interrelationships in a dual phase GIS-based municipal solid waste collection model.*, *Waste Management*, 78, 258-270, DOI:10.1016/j.wasman.2018.05.050.
- [28] GHIANI G., MANNI A., MANNI E. a TORALDO M., 2014. *The impact of an efficient collection sites location on the zoning phase in municipal solid waste management.*, *Waste Management*, 34, 11, 1949-1956, DOI: 10.1016/j.wasman.2014.05.026.
- [29] TRALHÃO L., COUTINHO-RODRIGUES J. a ALÇADA-ALMEIDA L., 2010. *A multiobjective modeling approach to locate multi-compartment containers for urban-sorted waste.*, *Waste Management*, 30(12), 2418-2429, DOI: 10.1016/j.wasman.2010.06.017.
- [30] COUTINHO-RODRIGUES J., TRALHÃO L. a ALÇADA-ALMEIDA L., 2012. *A bi-objective modeling approach applied to an urban semi-desirable facility location problem.*, *European Journal of Operational Research*, 223(1), 203-213, DOI: 10.1016/j.ejor.2012.05.037.
- [31] SKLENÁŘ, J. *Network Flows Models and Integer Programming*. [Sylabus]. University of Malta, Faculty of Science, 2004. 21 s.
- [32] PETRASOVÁ, Z. *Příklady dobré praxe a netradičních systémů sběru odpadů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 68 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Jiří Gregor.
- [33] CPLEX 12. GAMS - Cutting Edge Modeling [online]. [cit. 08.03.2020]. Dostupné z: https://www.gams.com/latest/docs/S_CPLEX.html.
- [34] GAMS Data eXchange (GDX). GAMS - Cutting Edge Modeling [online]. [cit. 08.03.2020]. Dostupné z: https://www.gams.com/latest/docs/UG_GDX.html.
- [35] Savepoint.gms : Saves solution to a log or GDX file. GAMS - Cutting Edge Modeling [online]. [cit. 08.03.2020]. Dostupné z: https://www.gams.com/latest/datalib_ml/libhtml/datalib_Savepoint.html.
- [36] Třídění odpadů: Město Tábor - oficiální webové stránky. Město Tábor - oficiální webové stránky: Titulní stránka. [Online]. [cit. 31.03.2020]. Dostupné z: <https://www.taborcz.eu/trideni-odpadu/d-50760>.
- [37] *Zpráva o plnění cílů Plánu odpadového hospodářství České republiky za období 2017 – 2018*. [Online]. Ministerstvo životního prostředí ČR, 2019. 98. Dostupné z: [https://www.mzp.cz/C1257458002F0DC7/cz/plneni_narizeni_vlady/\\$FILE/OODP-Zprava_plneni_POH_CR_2017_2018-20191217.pdf](https://www.mzp.cz/C1257458002F0DC7/cz/plneni_narizeni_vlady/$FILE/OODP-Zprava_plneni_POH_CR_2017_2018-20191217.pdf).

[38] Zákon č. 185/2001 Sb., Zákon o odpadech a o změně některých dalších zákonů, ve znění pozdějších předpisů.

[39] DUFKA, M. *Efektivní návrh a provoz recyklační linky jako prvek komplexního odpadového řetězce*. Brno, 2020. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zavprace/detail/123795>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav procesního inženýrství. Vedoucí práce Ing. Jiří Gregor Ph.D.

[40] MARŠÁK, J. *Nová legislativa odpadového hospodářství*. Ministerstvo životního prostředí ČR, 2019. In seminář „Odpady a oběhové hospodářství“. 40 s. Dostupné z: <https://www.psp.cz/sqw/text/orig2.sqw?idd=162666>.

Seznam použitých zkratek

LP – linear programming
IP – integer programming
PIP – pure integer programming
MIP – mixed integer programming
MILP – mixed integer linear programming
MDV – množstevní docházková vzdálenost
PSM – počet sběrných míst
RN – roční náklady
SC – servisní čas

Seznam obrázků

Obr. 1: Množství vyprodukovaného komunálního odpadu pro roky 2009–2018.	2
Obr. 2: Srovnání nakládání s komunálním odpadem v EU.	3
Obr. 3: Hierarchie nakládání s odpady.	4
Obr. 4: Ilustrace oběhového hospodářství.	4
Obr. 5: Aktuální (2018) a plánované (2035) nakládání s komunálním odpadem.	5
Obr. 6: Porovnání účelových funkcí podle hlavních kritérií.	25
Obr. 7: Počet rozmístěných sběrných nádob.	26
Obr. 8: Procentuální zastoupení rozmístěných sběrných nádob.	26
Obr. 9: Frekvence svozu.	27
Obr. 10: Počet alokovaných kapacit sběrných míst.	27
Obr. 11: Procentuální zastoupení alokovaných kapacit sběrných míst.	28
Obr. 12: Průměrná docházková vzdálenost pro minimalizovaná kritéria.	29
Obr. 13: Vzájemná závislost množstevní docházkové vzdálenosti a ročních nákladů.	31
Obr. 14: Hodnoty kombinovaných kritérií a součtové funkce v závislosti na α pro $m = 1, n = 2$. ..	32
Obr. 15: Hodnoty kombinovaných kritérií a součtové funkce v závislosti na α pro $m = 1, n = 3$. ..	33
Obr. 16: Závislost kritérií v kombinaci s množstevní docházkovou vzdáleností na parametru α	33
Obr. 17: Vzájemná závislost mezi počtem sběrných míst a servisním časem.	34
Obr. 18: Hodnoty kombinovaných kritérií a součtové funkce v závislosti na α pro $m = 2, n = 4$. ..	34
Obr. 19: Vzájemná závislost ročních nákladů a servisního času.	35
Obr. 20: Hodnoty kombinovaných kritérií a součtové funkce v závislosti na α pro $m = 3, n = 4$. ..	35
Obr. 21: Závislost servisního času na parametru α (kombinace s ročními náklady).	36
Obr. 22: Kritéria nezohledněná v účelové funkci s viditelným průběhem.	36
Obr. 23: Kritéria nezohledněná v účelové funkci s nejasným průběhem.	36
Obr. 24: Porovnání kombinací podle hlavních kritérií.	37
Obr. 25: Počet rozmístěných sběrných nádob.	38
Obr. 26: Procentuální zastoupení rozmístěných sběrných nádob.	38
Obr. 27: Užitá svozová frekvence.	39
Obr. 28: Počet alokovaných kapacit sběrných míst.	39
Obr. 29: Procentuální zastoupení alokovaných kapacit sběrných míst.	39
Obr. 30: Průměrná docházková vzdálenost analyzovaných kombinací.	40
Obr. 31: Porovnání přístupů podle hlavních kritérií.	42
Obr. 32: Počet sběrných nádob v závislosti na přístupu.	43
Obr. 33: Procentuální zastoupení sběrných nádob v závislosti na přístupu.	43
Obr. 34: Procentuální zastoupení svozové frekvence v závislosti na přístupu.	43
Obr. 35: Počet alokovaných kapacit sběrných míst v závislosti na přístupu.	44
Obr. 36: Procentuální zastoupení alokovaných kapacit sběrných míst v závislosti na přístupu.	44
Obr. 37: Průměrná docházková vzdálenost analyzovaných přístupů.	45
Obr. 38: Porovnání přístupů nejkvalitněji řešících úlohu.	46
Obr. 39: Závislost množstevní docházkové vzdálenosti na čisté průměrné docházkové vzdálenosti. ..	47
Obr. 40: Minimální množstevní docházková vzdálenost při omezení $\varepsilon_2, \varepsilon_3$	48
Obr. 41: Pohled na graf na obr. 40 z pohledu množstevní docházkové vzdálenosti a parametru ε_2	48
Obr. 42: Pohled na graf na obr. 40 z pohledu množstevní docházkové vzdálenosti a parametru ε_3	49
Obr. 43: Charakteristiky řešení pro metodu ε -omezení.	50
Obr. 44: Závislost množstevní docházkové vzdálenosti na kritériích.	50
Obr. 45: Množstevní docházková vzdálenost a roční náklady v souvislosti s parametrem ε_2	51
Obr. 46: Množstevní docházková vzdálenost a počet sběrných míst v souvislosti s parametrem ε_3	51
Obr. 47: Závislost počtu sběrných míst a ročních nákladů pro hlavní omezení.	52
Obr. 48: Porovnání sběrných míst u silně a slabě omezené úlohy.	53
Obr. 49: Porovnání nejefektivnějších přístupů se základní jednokriteriální úlohou.	59
Obr. 50: Vizualizované řešení pro část města (Model IV).	60

Seznam tabulek

Tab. 1: Přehled některých základních typů modelů matematického programování.	7
Tab. 2: Definice množin, parametrů a proměnných matematického modelu.	16
Tab. 3: Souvislosti v modelu I.	19
Tab. 4: Základní data – příklad pro vybrané adresní body.....	21
Tab. 5: Možnosti kapacit pro sběrná místa.	23
Tab. 6: Frekvence svozu sběrných nádob dle počtu obyvatel.....	23
Tab. 7: Složení sběrných míst ze sběrných nádob.....	23
Tab. 8: Hlavní charakteristiky sběrných nádob.....	24
Tab. 9: Vazba objemu sběrných nádob na roční náklady a servisní čas.	25
Tab. 10: Porovnání počtu sběrných míst s počtem sběrných nádob.	28
Tab. 11: Přehled hodnot kritérií pro jednokriteriální úlohu.	29
Tab. 12: Hodnoty použité pro normování.	31
Tab. 13: Porovnání počtu sběrných míst s počtem sběrných nádob.	40
Tab. 14: Přehled hodnot kritérií pro vícekriteriální úlohu.	41
Tab. 15: Značení modelů podle přístupu k problematice.....	42
Tab. 16: Porovnání počtu sběrných míst s počtem sběrných nádob.	44
Tab. 17: Přehled hodnot kritérií pro použité přístupy.	45
Tab. 18: Hodnoty parametrů $\varepsilon_2, \varepsilon_3$	47
Tab. 19: Množstevní docházková vzdálenost v závislosti na $\varepsilon_2, \varepsilon_3$	52
Tab. 20: Porovnání silně a slabě omezené úlohy.	53
Tab. 21: Přehled nastavovaných parametrů.	54
Tab. 22: Použité kombinace nastavení.....	55
Tab. 23: Představení základního nastavení spojeného s nástrojem tuning tool.	56
Tab. 24: Vlastnosti alokovaných sběrných míst.....	60