Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Počítání s přechodem přes desítku v matematice primární školy

Diplomová práce

Autor: Sylva Stúpalová

Studijní program: M7503 Učitelství pro základní školy

Studijní obor: Učitelství pro první stupeň ZŠ

Vedoucí práce: PhDr. Jana Cachová, Ph.D.

Hradec Králové
2018

Univerzita Hradec Králové
Pedagogická fakulta

Zadání diplomové práce

Autor:	**Sylva Stúpalová**
Studium:	P131395
Studijní program:	M7503 Učitelství pro základní školy
Studijní obor:	Učitelství pro 1. stupeň základní školy
Název diplomové práce:	**Počítání s přechodem přes desítku v matematice primární školy**
Název diplomové práce AJ:	Counting Crossing the Tens Boundary in Primary School Mathematics

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Cílem diplomové práce bude na základě studia dostupné didaktické literatury, učebnic a sbírek úloh zmapovat metody a pomocné modely, kterými se přechod přes desítku u nás i v zahraničí zavádí a vyučuje. Součástí diplomové práce bude kvantitativní výzkum zaměřený na učitele (kterou metodu a formu práce upřednostňují) a rovněž kvalitativní šetření (zaměřené na analýzu konkrétních dětských výpočtů).

Rendl, M.,Vondrová, N. a kol. (2013) Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů. Praha: Univerzita Karlova: Pedagogická fakulta. HEJNÝ, M., KUŘINA, F. (2010) Dítě, škola a matematika. Praha: Portál.

Garantující pracoviště:	Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta
Vedoucí práce:	PhDr. Jana Cachová, Ph.D.
Oponent:	RNDr. Ladislava Francová, Ph.D.
Datum zadání závěrečné práce:	7.12.2016

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala pod vedením vedoucí diplomové práce samostatně a uvedla jsem všechny použité prameny a literaturu.

V Hradci Králové dne

Anotace

Cílem diplomové práce je na základě studia dostupné didaktické literatury, učebnic a sbírek úloh zmapovat metody, pomocné modely a systémy, kterými se přechod přes desítku u nás i v zahraničí zavádí a vyučuje. Součástí diplomové práce je kvantitativní výzkum zaměřený na učitele (kterou metodu a formu práce upřednostňují) a rovněž kvalitativní šetření (zaměřené na analýzu konkrétních dětských výpočtů).

Klíčová slova

Matematika, přechod přes desítku; přechod přes základ; výukové metody; didaktické pomůcky; modelování početních operací

Annotation

The aim of this diploma thesis is to map the methods, auxiliary models and systems used when introducing and teaching counting crossing the first tens boundary in our country as well as abroad on the basis of available didactic literature, textbooks and exercise books. This thesis contains quantitative research focused on teachers, the method and form of work they prefer, and also qualitative research centred on the analysis of concrete children's calculations.

Keywords

Mathematics, counting crossing the tens boundary, teaching methods, didactic models, modeling of numerical operations

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala PhDr. Janě Cachové, Ph.D. za vedení mé práce, trpělivost, ochotnou snahu pomoci, vstřícný přístup, podnětné rady a zapůjčenou literaturu. Dále děkuji všem respondentům, bez jejichž shovívavosti by nemohla praktická část mé diplomové práce vzniknout. Rovněž děkuji mé rodině za podporu při studiu.

Obsah

Úvod

S tématem této diplomové práce jsem se setkala v rámci své pedagogické praxe na základních školách. Někteří učitelé hovořili nezávisle na sobě o přechodu přes základ jako o problematickém učivu matematiky, což mě přivedlo na myšlenku se jím zabývat více. Zejména při samotných přípravách na výuku jsem se snažila do problematiky více proniknout. Při bližším zkoumání bylo patrné, že mnohé učební materiály, respektive především metodiky, jsou ve vztahu k přechodu spíše skoupé na hlubší rozbor a náměty.

Obsáhlejší teoretické pojednání u nás nabízí Miroslav Rendl, v oblasti praktické pak Alena Hošpesová, Jiří Divíšek a František Kuřina, autoři učebnic s názvem *Svět čísel a tvarů*. Myšlenkami přechodu se zabývá také Milan Hejný. Z mého pohledu však chybí ucelenější soubor potřebných informací, jenž by měl charakter komplexního přehledu kombinujícího jak teoretickou, tak praktickou část, a umožnil učitelům se v dané oblasti lépe zorientovat a inspirovat se pro výuku. Z dostupné literatury vyšlo najevo, že přechod přes desítku je učiteli opravdu vnímán jako kritické místo prvostupňové matematiky. Přestože se jedná o poměrně konkrétní záležitost, rozhodla jsem se právě toto téma zpracovat, protože si, dle mého názoru, oprávněně zaslouží zvýšenou pozornost. Práce se zabývá výhradně přechodem přes první desítku, který bývá v našich školách orientován spíše do druhého ročníku ZŠ, případně již na konec prvního ročníku.

Práce se však nesnaží o tvorbu metodiky jako takové, či rozklíčování otázky, proč je místo kritické, a zda opravdu vůbec. Odpověď na ni by jistě vyžadovala daleko rozsáhlejší, intenzivnější a odbornější zkoumání, než jaké je v mé kompetenci.

Cílem práce je však sestavit a nabídnout takový materiál, který bude poskytovat přehledný vhled do tohoto učebního celku a naznačovat co nejvíce možných směrů, kterými se lze při zavádění a výuce přechodu přes první desítku vydat. A to tak, aby byla tato výuka co nejefektivnější a bohatá na různé způsoby její realizace, čímž lze, dle mého názoru, značně předejít selhávání žáků. Proto bylo primárním cílem práce pokusit se zejména o zmapování co nejvíce dostupných metod, potažmo pomůcek, které lze při výuce přechodu využít. Zároveň tomuto výčtu předchází obecná teorie, která se snaží obsáhnout co nejvíce podstatných aspektů, jež je nutné brát v procesu výuky přechodu v potaz.

Cílů práce plánuji dosáhnout pomocí studia příslušných zdrojů, didaktické literatury a pomocí kvantitativního i kvalitativního výzkumu. Práce tedy bude rozdělena na teoretickou a praktickou část.

Teoretická část se, mimo jiné, zaměří například na jednotlivé dílčí schopnosti a dovednosti potřebné pro zvládnutí tohoto učiva, s čímž souvisí období před vlastním zavedením přechodu, a význam jejich osvojení pro úspěšné absolvování učiva. Dále na přechod ve vztahu k RVP ZV, či na tradiční metodu pomocí rozkladů a dopočítávání do desítky, nebo nutnost názorné výuky ve vztahu k vývojovým obdobím žáků.

V rámci praktické části plánuji realizovat kvantitativní výzkum prostřednictvím dotazníku na učitele prvního stupně. Záměrem dotazníku bude zmapovat preference učitelů, týkající se užívání různých metod a forem práce, vztažených právě na užívání jednotlivých pomůcek při zavádění a výuce přechodu. Součástí praktické části bude rovněž experimentální šetření zaměřené na analýzu konkrétních dětských výpočtů a řešení úloh s přechodem s podporou těchto pomůcek. Pro vyvození obecnějších závěrů považuji za stěžejní dotazník. Kvalitativní šetření představuje spíše podklad pro mé vlastní další postupy při zpracování práce. I proto se bude experimentální šetření týkat menšího vzorku dětí.

Za nejdůležitější a nosnou část práce považuji onen výčet dostupných metod a pomůcek pro výuku v rámci teoretické části. Věřím, že tento výčet může mít skutečně praktický přínos pro konkrétní praxi. Za okrajové považuji experimentální šetření, které je však podstatné pro mé vlastní hlubší porozumění důležitým souvislostem. Jsou to přeci nakonec děti, pro které toto snažení vzniká, proto by mělo začít právě u nich.

Teoretická část

1 Vývoj matematických představ, schopností a dovedností dítěte

Ve své diplomové práci chápu pojem přechodu přes první desítku jako proces, který je nutné velmi dobře zafixovat a který je nezbytným předpokladem pro úspěšné osvojení navazujících poznatků, představ a dovedností. Z toho důvodu považuji za důležité se v této práci, mimo jiné, zabývat blíže matematickými schopnostmi a dovednostmi ve vztahu ke kognitivnímu vývoji.

Michalová (2001) ve své stati o vývojových hlediscích rozvoje matematických schopností v předškolním věku a jejich dopadu na počáteční výuku ve škole uvádí, že žádná jiná oblast poznání není tak přísně hierarchicky strukturována, jako právě matematika - výstavba dovedností a vědomostí neprobíhá v žádné jiné oblasti v takové postupné návaznosti od nejjednoduššího k nejsložitějšímu. Přeskočením, či špatným zafixováním některého z kroků v oblasti matematického poznání pak logicky dochází k neadekvátnímu chápání poznatků navazujících. Proto je zcela určitě na místě se podrobněji seznámit s vývojem matematických schopností už od nejútlejšího věku dítěte a vést je tak, jak je to vývojově nejpřirozenější. Budeme tak schopni předcházet následnému selhání dětí v matematice, ke kterému dojde dokonce i tehdy, když fakticky nejsou pro toto selhání příslušné důvody v endogenně podmíněné vývojové dysfunkci, specifické pro oblast osvojování si matematiky.

1.1 Schopnost vs. dovednost

Pro potřeby navazujícího pojednání si alespoň stručně představme rozdíl mezi pojmy *schopnost* a *dovednost*, které bývají v pedagogické praxi, dle mého názoru, často navzájem zaměňovány. Nejprve je vymezme obecně, tedy ne přímo v konkrétní vazbě na oblast matematiky. Osobně se nejvíce ztotožňuji s vymezením Součka (1969), který popisuje dovednost jako strukturu aktuální činnosti, tedy té, která zrovna probíhá. A má-li člověk nějakou schopnost, pak se tato stává dovedností v případě, že ji (schopnost) chceme a můžeme ověřit v nějaké situaci. K uskutečnění těchto dovedností je nutná motivace. Pokud není jedinec dostatečně motivován, dovednosti se neprojeví, ačkoliv má jedinec dostačující dispozice a schopnosti. (Souček in Nelešovská, 2005)

Pešinová (1975) pak dovednosti hodnotí jako výsledek záměrného učení a procvičování. (Pešinová in Nelešovská, 2005)

Svými slovy bych závislost mezi těmito pojmy velmi zjednodušeně přenesla do hierarchie, kde první místo v základu zaujímají vlohy, jakožto vrozené dispozice jedince. Schopnosti se pak rozvíjejí na základě těchto vloh. Jsou jakousi vnitřní záležitostí plynoucí z vrozeného potenciálu. Dovednosti pak chápu jakožto získané zvenčí, závislé na konkrétních reáliích ze životní praxe. A úroveň této získané dovednosti je pak jistě do značné míry závislá právě na vrozeném předpokladu. Nicméně i schopnosti samozřejmě rozvíjíme učením a zkušenostmi. Dovednost však chápu jako jistý výsledek, finální produkt tohoto procesu.

1.1.1 Schopnosti a dovednosti z pohledu vyučování matematice

Matematické schopnosti se tedy rovněž aktualizují a rozvíjejí učením, procvičováním, opakováním, nabýváním vědomostí a dovedností. Vlohy pro matematiku se nemohou rozvinout na přiměřenou úroveň bez přímého styku jedince s matematickou zkušeností. (Michalová, 2001)

,,Jako schopnosti (v anglické literatuře zpravidla „mathematical ability“) jsou zpravidla označovány kognitivní a exekutivní složky zodpovědné za provádění matematických operací od jednoduchých výpočtů až po komplexní matematické úsudky‘‘ (Cígler, 2016, s. 4).

Schopnosti nemají vyloženě celistvý charakter a dále se člení na jednotlivé komponenty a subkomponenty. Jednou z nich je například schopnost aritmetická, na níž si tuto vlastnost ilustrujeme. Jejími komponenty jsou např.: základní znalosti čísel; paměť pro aritmetické fakty; porozumění koncepcím atd. Každá z těchto komponent má řadu subkomponentů. Například znalosti čísel dále zahrnují schopnost rozpoznat čísla v různých formách (číslice, číselná slova, konkrétní množství apod.) Koncepční porozumění zahrnuje například pochopení vlastností a vztahů mezi aritmetickými operacemi a jejich užití v rámci sčítání, odčítání, dělení a násobení. (Donlan, 1998)

,,Naopak dovednosti (v angličtině „skills“ nebo „mathematical achievement“) bývají zpravidla definovány jako konkrétní úroveň vývoje matematických znalostí více závislé na učení‘‘ (Cígler, 2016, s. 4).

Vývoj matematických představ a schopností dítěte neprobíhá jakožto samostatný, či nezávislý proces, ale v souladu s vývojem myšlení a řeči. (Novák, 2004)

Úroveň výkonů v matematice je závislá na rozumu, avšak do určité míry, jelikož matematické schopnosti nejsou přímo úměrné inteligenci, neboť oba druhy schopností nejsou jednou celistvou složkou, ale velice složitými strukturami. Z úrovně rozumových schopností nelze jednoznačně vyvozovat úroveň zvládání matematiky. Existují jedinci, kteří při vysoké inteligenci mají v matematice výrazné obtíže. (Svoboda, Krejčířová, Vágnerová, 2009)

1.2 Teorie kognitivního vývoje podle Piageta

Nejprve uveďme stručně teorii kognitivního vývoje dle Piageta, jenž rozlišil čtyři hlavní jednotlivá stádia úrovně poznání. Myšlenkové operace, jakožto zvnitřněné činnosti, utváří dle Piageta systém, jenž je podřízen určitým pravidlům. Poznávací schémata jsou pak tvořena vztahy mezi prvky tohoto systémů, které jsou ve vzájemné rovnováze. Skrze tato kognitivní schémata člověk přijímá podněty z prostředí a rovněž na něj působí. Základními procesy, které umožňují dosáhnout rovnováhy ve zmíněných schématech, jsou asimilace a akomodace, které se vzájemně prolínají.

- Asimilace znamená zařazování a integrování nových předmětů a prvků do schémat.
- Akomodace je založená na rozvíjení, přetváření struktury schématu tak, aby bylo možné tyto nové předměty zařadit.

Důležitá je pak schopnost se při asimilaci na nové poznatky akomodovat. Tato schopnost je dána jak zráním, tak množstvím a kvalitou podnětů atd. Asimilační schémata určují naši citlivost na tyto podněty z prostředí. Naše učení probíhá tak, jak jsou tato schémata, řekněme, nastavena.

Piaget předpokládá existenci dvou aspektů inteligence, které se prolínají, a to funkce a struktury. Mezi asimilací a akomodací je patrná dynamická rovnováha, které je možné dosáhnout buďto asimilací prvků z prostředí do poznávacích struktur, nebo právě akomodací nových poznávacích struktur. Rovnováha je neustále narušována a opětovně vyrovnávána.

Při narušení je vyvolána potřeba tzv. vybalancovat tuto nerovnováhu a nastává *kognitivní konflikt* (zlom). Ten se projevuje jako psychická tenze, či snaha problém odstranit. Nastoupí akomodace, tedy přizpůsobení, či změna kognitivního schématu pod vlivem nové zkušenosti. V případě, že objevíme řešení, nastane tzv. AHA moment a rovnováha. Rovnovážný stav mezi asimilací a akomodací je podstatou vzniku vyšší úrovně myšlení a chápání světa. (Ruisel, 2000); (Čáp, Mareš, 2001)

Čtyři stádia vývoje podle Piageta

1. stádium senzomotorické (od narození do dvou let dítěte), ve kterém nastává formace motorických schopností, vývoj představ o předmětech, buduje se chápání stálosti objektu;
2. stádium předoperační (od dvou do sedmi let věku), v němž dochází ke zdokonalování jazykového projevu a mentální představivosti, myšlení je egocentrické, jedinec se učí zaměřovat jednotlivé percepční dimenze (barva, velikost), dokáže třídit objekty, převážně dle jedné charakteristiky;
3. stádium konkrétních operací (od sedmi do dvanácti let), ve kterém je důležitým procesem logické myšlení, dítě chápe stálost počtu objektů, stálost hmotnosti, váhy, objemu, dále je schopno třídit objekty na základě více charakteristik, operace jsou vázány na konkrétní příklady z praxe a životní zkušenosti;
4. stádium formálních operací (od dvanácti let výše), charakterizováno abstraktními a formálně logickými operacemi.

(Ruisel, 2000)

Dále budou v této kapitole uvedeny vývojové fáze matematických schopností dle Koščе, který vychází do jisté míry z Piageta, a jehož fáze doposud nebyly zpochybněny. Tyto jsou užívány i nadále v teorii současných například diplomových a jiných prací. Uvádí je taktéž Novák (2004), z jehož interpretace bude nadále čerpáno, rovněž i Michalová (2001).

1.3 Vývojové fáze podle Košče

1. manipulace s konkrétními předměty – jedinec získává zkušenosti prostřednictvím hry s tvary, velikostmi, či barvami předmětů, s jejich umístěním v prostoru;
2. chápání významu řeči a používání slovní zásoby – dítě mimo jiné vytváří taktéž matematický slovník, který zahrnuje výrazy pro porovnávání, třídění, popis množství, tvarů, umístění předmětů, odhadování apod.;

3. osvojování množství předmětů – prvotní jmenování číselné řady (převážně číslovky jedna, dvě);
4. stadium jednoduchého počítání – probíhá cca v průběhu pátého až šestého roku věku dítěte, přičemž zahrnuje případnou schopnost jmenovat číselnou řadu v oboru do desíti, začíná se rozvíjet schopnost porozumět základním aritmetickým operacím, a to sčítání a odčítání, dále stadium zahrnuje osvojení poznání, že celek je různými způsoby dělitelný na části, které pokud opětovně sečteme, získáme daný celek, dítě je schopno odpočítat konečné množství a přiřadit k němu příslušnou číslovku;
5. stadium čtení a psaní číslic – je záměrně rozvíjeno především na počátku školní docházky, ačkoliv jistá příprava je zde patrná již v mateřských školách, dítě postupně začíná být schopno pracovat s písemnými znaky pro číslice a čísla, jakožto zástupnými znaky pro množství;
6. stadium aritmetických operací s čísly a jejich písemného vyjádření – do dvanácti let dítě počítá s tím, co je schopno převést a aplikovat na praktickou, popř. životní zkušenost, zatím nepracuje s abstrakcí;
7. stadium formálních operací – dítě je schopno provádět operace na základě hypoteticko-deduktivního usuzování, uplatňuje kombinační analýzu a dále abstrakci

(Novák, 2004)

Dítě si spoje s přechodem přes první desítku osvojuje v období první, popř. druhé třídy. Tedy v období, kdy se nachází ve stádiu *Konkrétních operací* - dle Piageta, *Aritmetických operací s čísly a jejich písemného vyjádření* - dle Košče. Jak již bylo řečeno, toto údobí je charakterizováno neschopností uvažovat čistě abstraktně, operace jsou potažmo vázány na konkrétní představy, reálné zkušenosti ze života apod. Tato práce se snaží, mimo jiné, vymezit co nejširší spektrum způsobů, jak dítě přechod přes základ vyučovat na rozličných modelech, pomůckách, za užití různých názorů, což odráží právě tuto vývojovou potřebu a nutnost vázat počty na konkrétní, modelové situace.

Při výuce tedy přisuzuji důležitost tomu typu činností, kde dítě nepracuje v uvozovkách pouze s číslem na papíře, ale může si na příklad, či úlohu tzv. sáhnout a vztáhnout je k onomu reálnému, praktickému životu. Takové modelové situace mohou leccos prozradit o způsobech uvažování daných dětí. Těm se tak rozšiřuje matematický prostor, ve kterém mohou prokázat, jak k úlohám přistupují, v čem například tkví jejich odlišnosti v řešitelských strategiích od ostatních apod.

Shrňme si nyní pro ucelené pojednání a doplnění i interpretaci vývoje ze stati Michalové (2001), která, jak již bylo řečeno, taktéž vychází z Košče:

1. Osvojování vědomostí a způsobilostí tedy začíná tzv. matematickou manipulací s konkrétními předměty, kdy se jedná o *konkrétně-předmětnou reprezentaci*.
2. Pokračuje rovněž v matematické manipulaci s graficky znázorněnými předměty, a to buď v podobě ikonické, či piktorální. Posléze dítě uplatňuje a rozšiřuje své vědomosti a způsobilosti v matematické manipulaci se symbolizovanými, graficky znázorněnými předměty v podobě různého počtu a různorodého prostorového rozložení čárek, bodů, kruhů, čtverců atd. Zde jsme již postoupili k tzv. *ikonicko-symbolické reprezentaci*.
3. S tímto následně souvisí, a na což navazuje, verbálně-matematická symbolizace, která se týká slovních výrazů pro pozici předmětů v prostředí, velikosti, tvaru, množství, počtu předmětů jako kvantitativních pojmů a vztahů. Jde o tzv. *slovně-symbolickou reprezentaci*.
4. Poté teprve přichází na řadu označení matematických pojmů a vztahů matematickou grafickou symbolikou pomocí číslic a čísel, operačních znaků apod. – *graficko-symbolická reprezentace*.
5. V poslední řadě hovoříme o *abstraktní reprezentaci* zahrnující operace již pouze s myšlenými pojmy a vztahy i bez grafického znázornění ve formě aritmetického záznamu.

O reprezentacích bude podrobněji pojednáno dále v podkapitole *Jazyky a reprezentace ve vyučování matematice*.

K posledním dvěma stádiím poznamenejme: *,,Úplný postup od konkrétního k abstraktnímu je jedním z nejvýznamnějších cílů matematického myšlení, v kterém se abstrahuje od všech ostatních vlastností skutečnosti a koncentruje pozornost výslovně jen na jeho kvantitativní stránku''* (Michalová, 2001, s. 280).

2 Vynoření světa čísel

Svět čísel se dítěti otevírá ve dvou vrstvách, a to ve vrstvě slov a představ. Dítě často zná objekt, který není schopno pojmenovat, nebo naopak ví slovo, ke kterému není schopno přiřadit význam. Toto se týká také čísel. Dítě zprvu neví, co znamená *tři*, ale ví, co znamenají *tři hračky*. Číslo je chápáno, je-li vázáno ke konkrétním předmětům, které toto číslo ukotvují. Nicméně ho dítě neumí zatím smysluplně použít. Až časem dítě dojde k poznání, že situace *dvě a tři kuličky* nám říká to samé, jako situace *dva a tři prsty*, čímž postupně dochází k porozumění neukotvenému číslu. Důležité však je, aby u dítěte nedošlo k převážné izolaci čísel od reálného světa. Nutno podotknout, že vazba čísla na reálný svět je neoddiskutovatelně nutná pro pochopení klíčových pojmů aritmetiky, jako je vícemístné číslo, desetinné číslo, zlomek, záporné číslo atd. Významnou roli při objevování světa čísel hraje rytmus a s ním spojené říkanky s číslovkami, dále počítání, popř. říkanky za použití prstů (čímž vzniká synchronie *prstů a slov*), deklamace slov v rytmu chůze (*enyky benyky kliky bé*) apod. Činnosti, které v dítěti rozvíjí rytmus, ho také zároveň připravují na aritmetické myšlení. (Hejný in Kolláriková, Pupala, 2010)

Hejný a Stehlíková (1990) dělí konstituci světa čísel na tato jednotlivá stádia, která bych ráda uvedla v návaznosti na předchozí text a pro potřeby pozdějšího stručného pojednání o formalismu:

- stádium otevření světa čísel, zahrnující rozlišování mezi jednotou a množstvím;
- stádium separovaných modelů, kdy dítě ví, že tyto modely spolu souvisí, ale zatím nechápe jak, má představu o tom, co jsou tři jablka a tři židle, ale zatím neví, že se tyto modely mohou navzájem zastoupit;
- stádium univerzálních modelů, které začíná poznáním, že některé separované modely jsou v něčem stejné a pokračuje poznáním, že se mohou zastupovat, dítě ví, že úlohu s jablky lze řešit pomocí prstů;
- stádium abstrakčního zdvihu, znamenající uzření nové, vyšší skutečnosti, zrod abstraktního poznatku, dítě dokáže pracovat s představou *tři, čtyři* atd. bez vazby na konkrétní předměty.

Tato čtyři stadia se zároveň vždy opakují při osvojování nových pojmů – tedy se to pak bude týkat i samotného přechodu. Ilustrujme na úloze – *Kolik je 8 a 7 jablek dohromady*. Ve stádiu separovaných (izolovaných) modelů dítě ví, co je 8 a 7 jablek a co je 8 a 7 víček. Ale zatím netuší, jak se tyto modely mohou zastoupit. Ve stádiu univerzálních modelů si dítě již k izolovanému modelu jablek dokáže utvořit paralelní univerzální model v jiné situaci. Tak například přenese situaci *jablka na stole* na model *víčka na mřížce*. Dítě tedy ví, že úlohu s jablky může řešit právě na mřížce, za pomoci víček. Ve stádiu abstrakčního zdvihu již řeší úlohu 8 + 7 bez vazby na konkrétní předměty. Ví, že 8 + 7 je vždy 15.

„Znalost, která není opřena o žádný izolovaný model, o žádnou konkrétní představu, je obvykle silně formální‘‘ (Hejný, Kuřina, 2009, s. 131).

2.1 Číslo

Přechod přes první desítku se týká numerického počítání, které řeší problémy pro konkrétní číselné hodnoty. Je tedy součástí numerického výpočtu. Proto považuji za vhodné vymezit také samotný pojem číslo.

Uveďme si nyní stručné pojednání k pojmu *číslo* jako takovému. Hejný a Stehlíková (1999) na otázku *Co je to číslo?* odpovídají: *,,Číslo je prvek struktury, jejíž prvky lze sčítat, odčítat, násobit, dělit (ne nulou), přičemž tyto operace splňují známé zákony (komutativní, asociativní,...)‘‘* (s. 89). Tato odpověď neříká, co je číslo samo o sobě, ale vymezuje ho jako prvek celé komunity čísel, která se řídí jistými zákony.

Hejný a kol. (1990) k číslu dodávají, že číslo a tvar jsou základními fenomény matematiky, přičemž číslo vládne aritmetice, tvar geometrii. Jedná se o dvě ,,matematická království‘‘, která si již více, než dvě tisíciletí, udržují svoji autonomii. Napříč mnohým vzájemným stykům, mají rozdílnou oblast zájmu, terminologii, axiomatiku, rozdílné metody práce i argumentaci.

,,Rozumět číslům a umět je smysluplně používat patří k základním vědomostem člověka. Tyto vědomosti získává dítě v rodině, škole i v běžném životě. Úkolem rodiny je pomoct dítěti svět čísel objevit, úlohou školy je tento svět výrazně rozvinout a konstituovat‘‘ (Hejný in Kolláriková, Pupala, 2010, s. 326)

2.2 Jazyky a reprezentace ve vyučování matematice

Vyučování matematice se u nás odehrává většinou v mateřském jazyce, který je doplněn některými specifickými prvky, např. jazykem logiky a jazykem ,,vzorců‘‘. Kvazs (2008) ve své monografii uvádí, že poznání jazyků matematiky je podstatné pro pochopení jejího vývoje. Hraje-li jazyk tak významnou roli ve vývoji matematiky –

jakožto vědy, bude patrně hrát ještě významnější roli ve vyučování, při němž se matematické poznatky předávají další generaci. Což lze považovat za jeden z hlavních podnětů pro didaktiku matematiky. Jazykům bychom měli věnovat ve vyučování větší pozornost, než bývá zvykem. (Kuřina, 2013)

Pro doplnění uveďme částečně interpretaci tří Bolzano - Popprových světů, autorů Hejného a Kuřiny ze studie *Tři světy Karla Poppera a vzdělávací proces:* První svět je světem věcí (televizorů, aut, knih atd.), fyzikální hmoty, fyzického prostředí a přírody, tvořen přírodou a technikou, opisovaný a zkoumaný fyzikou, chemií a biologií. Druhý svět je svět vědomých i nevědomých zkušeností a představ člověka. Svět lidského vědomí, myšlenkových pochodů, prožitků, otázek atd. Je tedy světem duševních stavů a procesů, opisovaný a zkoumaný psychologií. Třetí svět zahrnuje výtvory lidského ducha, jeho jádrem je lidská řeč, věda a kultura. Je to svět pojmů, problémů, teorií, ideologií, argumentů atd. Patří do něj obsahy archivů, knihoven, či počítačových pamětí. R. Penros tyto světy stručně označuje jako: fyzikální svět, duševní svět a svět kultury. (Hejný, Kuřina, 2000)

2.2.1 Reprezentace čísel

Kuřina užívá v publikaci, z níž je dále čerpáno, často namísto komplexnějšího pojmu jazyk, Brunerova termínu *reprezentace*. Reprezentací pojmu rozumějme zastoupení (kód) pojmu určitými výrazovými prostředky.

Příklady těchto reprezentací

- Reprezentace enaktivní (činnostní) – při práci s enaktivními reprezentanty získáváme výsledky manipulací s hmotnými objekty, přičemž za nepřirozenější považujeme prsty na rukou, dále mezi tyto objekty patří počítadlo, či *Graserovo okno,* enaktivní reprezentací je také Hejného *krokování*
- Reprezentace ikonické (obrazové) – např. číselné obrazce (na hracích kostkách, kamenech domina atd.), či *Cuisenairovy proužky*
- Reprezentace symbolické (typicky založené na konvenčním vyjádření) – názvy čísel v různých jazycích, číslovky různých grafických typů, včetně typů na kalkulačkách

(Kuřina, 2013)

2.3 Číslo jako kvantita, identifikátor a symbol, kardinální a ordinální pohled na číslo

Uveďme si dále pojednání o čísle z publikace *Předškolní a primární pedagogika*, ve které autoři hovoří o ukotvení čísla, jeho podobách a vazbě na reálný svět. Pro potřeby dalších kapitol je nutné si osvětlit terminologii, jež bude dále užívána. Autoři uvádějí, že číslo vystupuje jako kvantita, identifikátor, nebo symbol, přičemž o tzv. kvantitu jde nejčastěji. Například: *,,Mám tři sourozence.''* Vondrová, Rendl a kol. (2015) uvádějí, že ukotvení čísla jakožto kvantity, je nejpodstatnější z hlediska vyučování matematice. Podíváme-li se na kvantitu blíže, uvidíme, že nejde pouze o jeden druh čísla, ale přinejmenším o osm různých druhů (viz Tab. 1). Tato skupina je dále strukturována na číslo jakožto stav, operátor, případně ještě frekvenci.

- Stav říká co a jak je a můžeme ho rozlišit na počet a veličinu. Na počet, měříme-li kvantitu na kusy. Veličinou pak nazýváme to, co měříme dle určité jednotky. V publikaci *Předškolní a primární pedagogika* je k této kategorii přidružen ještě tzv. skalár (tj. když číslo vyjadřuje podíl dvou stejných počtů, či veličin). V publikaci *Dítě, škola a matematika* je ke stavu přiřazeno ještě *pořadí* (3. místo, 5. měsíc), jež dle mého názoru koresponduje s pojetím *cyklické adresy* z publikace předchozí.
- Operátor popisuje vztah dvou stavů a dále se dělí na operátor změny (porovnání dvou stavů stejného objektu v rozličném čase) a operátor porovnání (porovnání stavů dvou různých objektů).

O identifikátoru hovoříme tehdy, pokud číslem určujeme čas, místo, pořadí, událost atd. Příklad: *,,Telefonní číslo policie je 158.''* Číslo – identifikátor je buď adresa, nebo jméno. Adresy tvoří strukturu, jména ne. Adresy dělíme na lineární a cyklické (viz Tab. 2).

Řekneme-li, že *třináctka* je nešťastné číslo, pak jsme číslo použili v podobě symbolu. (Hejný in Kolláriková, Pupala, 2010); (Vondrová a kol., 2015); (Hejný, Kuřina, 2009)

Následující dvě tabulky jsou částečně převzaty z publikace *Předškolní a primární pedagogika:*

Tab. 1 - Druhy čísla jakožto kvantity

		Počet	**Veličina**	**Skalár**
Stav (S)		Mám 3 mince.	Kniha stojí 20 Kč.	____________
Operátor (O)	**změny (OZ)**	Vyhrál jsem tři mince.	Od minulého roku vyrostl o 6 cm.	Továrna za minulý rok zdvojnásobila svou výrobu.
	porovnání (OP)	Vyhrál jsem o tři mince více, než on.	Nové balení váží o ½ kg více než původní.	Rozloha Británie je pětinásobek rozlohy Slovenska.

Tab. 2 - Druhy čísla jakožto identifikátor

Adresa (A)	**lineární (AL)**	Bydlíme v bytě č. 41.
	cyklická (AC)	Úterý je druhý den v týdnu.
Jméno – kód		Tramvaj č. 3.

(Hejný in Kolláriková, Pupala, 2010)

Tab. 3 - Některé ukázky druhů čísel na konkrétních úlohách s přechodem

Stav + Stav	Na kolotoči se veze 7 chlapců a 6 dívek. Kolik se veze na kolotoči dětí?
Stav – Stav	Na kolotoči je 18 sedaček, 9 z nich je obsazených. Kolik sedaček je volných?
Stav + Operátor změny	Adam měl 3 sběratelské karty a dalších 9 vyhrál v soutěži. Kolik karet má nyní?
Stav – Operátor změny	Adam měl 14 sběratelských karet. 5 karet prohrál v sázce. Kolik karet má nyní?
Stav + Operátor porovnání	Lístek na kolotoč stojí 8 Kč. Lístek na houpačky stojí o 3 koruny více. Kolik stojí lístek na houpačky?
Stav – Operátor porovnání	Čokoláda stojí 12 Kč. Bonbony jsou o 6 Kč levnější. Kolik stojí bonbony?
Adresa + Operátor porovnání	Honza bydlí v 8. patře. Kateřina bydlí o 3 patra výš. V kolikátém patře Kateřina bydlí?
Adresa – Operátor porovnání	Renata bydlí v 11. patře, Daniel bydlí o 4 patra níže. V kolikátém patře Daniel bydlí?
Adresa + Operátor změny	Petr bydlel ve 4. patře. Přestěhoval se o 7 pater výše. V kolikátém patře nyní bydlí?
Adresa – Operátor změny	Anička bydlela ve 12. patře. Přestěhovala se o 6 pater níže. V kolikátém patře nyní bydlí?

V tabulce č. 3 můžeme vidět, že spoje s přechodem (a samozřejmě nejen ty, ale všeobecně) mohou být různého typu, což se odráží na obtížnosti pro samotné žáky. V našich učebnicích se nejčastěji vyskytují úlohy typu S ± S = S, kde všechna tři čísla jsou stavy, a typu S ± O = S, kde jedno číslo je operátor. Nicméně je velmi důležité zařazovat rovnoměrně všechny typy úloh. Úlohy typu A ± O = A2 lze dobře modelovat pomocí *Krokování* (viz kapitola *Způsoby modelování čísel a početních operací*). Model čísla je v případě krokování procesuální, protože krokování je dynamický pohyb, a tento pohyb navíc vede k nějaké změně - číslo má tedy roli operátora změny. (Práce v prostředích: učíme se opakovanou návštěvou, 2018)

Doplňme ještě velmi stručně kardinální a ordinální pohled na číslo. Číselné představy vázané na pořadí, na postupné přičítání po jednom, nazýváme ordinální a představy vázané na počet jako celek nazýváme kardinální. Ordinální číslo je tedy v podstatě zobecněním myšlenky pořadí prvku v uspořádané množině, jež je v přirozeném jazyce vyjádřena řadovou číslovkou jako „první“ či „pátý“, kardinální číslo, někdy též kardinál, se pak pojí s čísly používanými pro popis velikosti množin. (Hejný a kol., 1990)

3 Teoretické vymezení oblasti přechodu přes základ deset

Rendl, Vondrová a kol. (2013) uvádějí na základě analýzy rozhovorů s učiteli prvního stupně tyto oblasti, jakožto kritické v učivu prvostupňové matematiky:

1. Oblast konvencí (zaokrouhlování)
2. Oblast aritmetických operací (počítání s přechodem přes desítku, dělení se zbytkem, písemné dělení dvojciferným dělitelem)
3. Oblast 2D geometrie (konstrukce, rýsování)

,,V oblasti tzv. řemeslného počítání učitelé v rozhovorech nejčastěji hovořili o obtížnosti počítání s přechodem přes desítku a o obtížnosti dělení se zbytkem.‘‘ (Vondrová a kol., 2015, str. 86) Autoři metodické příručky *Svět čísel a tvarů* k této problematice doslova uvádí: *,,Počítání s přechodem přes desítku je jeden z největších problémů vyučování v matematice v prvním ročníku‘‘*[1](Hošpesová, Divíšek, Kuřina, 1996, s. 56). Většina učitelů se shodne na tom, že je to spíše učivo náročné. Vlastní přechod přes základ deset tedy zřejmě lze označit za jedno z kritických míst prvostupňové matematiky. Někteří tvrdí, že učivo je náročné pouze v době probírání a později již žákům problém nedělá. Podle jiných však problém přetrvává. Někteří učitelé však s tímto učivem problém nemají vůbec. Obtížnost problému může ovlivnit i negativní očekávání náročnosti látky. Řada učitelek vidí problém spíše u operace odčítání s přechodem přes desítku. Poukazují na neporozumění žáků operaci odčítání jako takové. Problém je větší, pokud žáci nemají zautomatizované spoje do 10. (Rendl, Vondrová a kol., 2013)

[1] Pozn.: Vycházejme z roku vydání publikace (1996). V této době byl zřejmě přechod převážně situován právě do prvního ročníku základní školy.

Vlastní přechod předurčuje nejedno cílové zaměření vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace v rámci RVP ZV a je nedílnou součástí očekávaných výstupů prvního vzdělávacího období. Je částí tématu *Sčítání a odčítání do dvaceti* a tvoří převážnou část učiva druhého ročníku primární školy.

V této souvislosti dodejme, že pokud jde o třídění přirozených čísel 0-20 do dílčích podoborů, převažuje následující: 1-5, 1-6, 0-6, 0-7, 0-8, 0-9, 0-10, 0-20. Tedy děti nejdříve pracují v oboru 1-5, tato řada je dále postupně rozšířena o jedno číslo s tím, že nula se zpravidla zavádí až po čísle šest. Čísla druhé desítky jsou žákům prezentována většinou globálně.

V uvedených oborech se děti učí:

1. znalost a dovednost správně vyslovovat názvy čísel (číslovky základní i řadové),
2. dále chápat čísla jako členy posloupnosti čísel, v níž každé následující číslo je o jednu jednotku větší než předcházející,
3. chápat také čísla jako pojmy vyjadřující kvantitu, rozumíme početnost skupiny prvků,
4. v neposlední řadě pochopit desítkovou číselnou soustavu jako soustavu, v níž deset jednotek nižšího řádu tvoří jednu jednotku vyššího řádu
5. a umět psát a číst čísla.

(Krejčová, 2004)

Poprvé bývá přechod přes základ deset součástí tematického celku označovaného jako *Sčítání a odčítání do 20 s přechodem přes základ 10*. Dítě se již nezabývá změnou čísla a počty v rozsahu jedné desítky, ale řeší systém přechodu z jedné desítky do druhé. Díky oddělenosti oborů 1 až 10 a 11 až 20, je tento přechod přes, eventuelně skrz hranici 10, pro dítě jakýmsi postupem výše do dalšího oboru, způsobem, jak spojit pohyby ve dvou jednotlivých oborech v jeden celek. Úsilí, které musí dítě při tomto úkonu vynaložit je značné. Jako pro výuku ostatních celků, je i zde mimo jiné nutná účelná motivace fyzickými činnostmi s vhodně zvoleným počtem předmětů apod. (Rendl, 1998)

Přechodu se také využívá při prvním seznámení žáků s desítkovou soustavou. Ostatně samotnému číslu deset je věnováno více pozornosti než ostatním. (Kittler, 1994)

3.1 Desítková soustava

V předchozí kapitole byla v souvislosti s výukou v prvním ročníku a dále zavedením přechodu zmíněna desítková soustava. Uveďme tedy stručně teoreticky tento pojem.

Nejprve se zeptejme, z jakého důvodu *desítka*. Jisté je, že při volbě tohoto základu sehrála důležitou úlohu skutečnost, že člověk má deset prstů na rukou. Princip poziční soustavy je poprvé doložen v kulturním odkaze starého Sumeru. Původně se tam taktéž užívala aditivní nepoziční soustava, a to právě desítková, která používala dva znaky, ze kterých se lehce vytvářely čitelné zápisy malých přirozených čísel. Nejstarší výskyt homogenní poziční soustavy spadá cca do 6. až 8. století našeho letopočtu. Je jí dobře známá desítková indická soustava. Indické číslice, nazývané *brahmí,* se sumersko-babylonským pozičním principem a řeckým znakem pro chybějící řád tak vytvořily systém, který se postupně rozšířil téměř po celém světě. Podle národa, který přispěl k rozšíření této soustavy do Evropy (polovina 10. století), se lidově nazývá *arabské číslice*. Již v roce 1202 propaguje Fibonacciho kniha *Liber abaci* výhody počítání s devíti indickými znaky a znakem pro nulu. (Hejný a kol., 1990)

Děti lze s principy číselných soustav seznámit skrze prostředí BILAND v pojetí matematiky podle Hejného, či v prostředí ciferníku, kde jde o sedmičkovou soustavu. Rovněž Montessori pomůcky jsou v tomto ohledu nosné.

Podrobně o *prostředí* jako takovém v konceptu Hejného matematiky pojednává podkapitola *Pomocné systémy, modely a schémata pro výuku přechodu ve vztahu k reprezentacím čísla - vlastní výčet pomůcek.*

Biland je vlastně dvojková soustava. Jsou zde využívané tzv. groše = mocniny čísla 2, tedy každý groš je dvojnásobkem předchozího (Ag=1, Bg=2, Cg=4, Dg=8, Eg=16). Každé přirozené číslo můžete vyjádřit tak, že každý typ groše použijete nejvýše jednou, tedy1x nebo 0x. V ‚bilandském zápise' je číslo zapsáno způsobem, kdy na místě jednotek je počet *Agrošů*, na místě desítek počet *Bgrošů* (dvojek), na místě stovek počet *Cgrošů* (čtyřek) atd. (První pomoc pro rodiče k matematice Fraus, 2014)

3.2 Restrukturace

Hejný a Stehlíková (1999) se v publikaci *Číselné představy dětí* zabývají problematikou organizace matematické části kognitivní sítě, kde zmiňují kumulativní a dále genetický způsob narůstání kognitivní struktury. Genetický způsob předpokládá propojování jednotlivých poznatků vazbami příčinnosti, funkčnosti, časové následnosti, závislosti atd. již v průběhu svého formování a vytváření struktur, které se neustále mění, dotváří a upravují v důsledku objevu nového vážného poznání. Tehdy mluvíme o restrukturaci obecně. Existující spoje se nahrazují jinými a síť poznatků mezi vztahy se mění. Autoři se domnívají, že právě počet žákem uskutečněných restrukturalizací nejlépe charakterizuje kvalitu jeho matematického poznání.

Přechod bývá prováděn pomocí jistých *řetězů*, které v podstatě představují restrukturaci zadaného příkladu. Zjevným účelem je zde rozdělit jeden velký – pro dítě neznámý krok na tři malé, které již ovládá. Ovšem nehovoříme o řetězech v pravém slova smyslu, kde se cíl jednoho kroku stává východiskem dalšího. Zde je totiž východiskem vždy desítka a prostředkem daný zbytek z rozkladu sčítance, či menšitele, o kterém ještě budeme hovořit. V případě, že dítě má například sečíst 9 + 5 (přičemž můžeme poznamenat, že přechod přes desítku většinou právě z devítky startuje), rozloží tento příklad na dva: 9 + 1 a 10 + 4, čemuž předchází rozložení čísla 5 na 1 a 4. Tyto kroky již děti ovládají. Rendl (1998) k tomuto uvádí: *,,Dosazovat dílčí výpočty (při vedení tímto postupem ze strany učitele) nebývá pro děti problematické. Je-li však ze dvou příkladů složen jeden řetěz (9 + 1 + 4), první problémy mohou nastat. V takovém řetězu totiž není explicitně vyznačena desítka jako hranice oboru''* (s. 207).

Ke dvěma krokům řetězu, konkrétně k přechodu mezi dvěma triadickými strukturami, se přidal další v podobě přechodu do druhé struktury, který je zároveň přechodem do druhé desítky (vyššího oboru). Zde je již nutné připsat před výsledek jedničku a změnit tak příslušným způsobem jeho jméno. Jakou podobu mají ony malé dílčí kroky mít, je bezprostředně předem dáno vyznačením desítky, která je závazným místem přechodu, místem dotyku dvou dílčích triadických struktur, a také místem, vůči kterému se výchozí velká triáda na tyto dvě dílčí rozloží. Pro žáky obecně však může být tento postup obtížný. Rendl (1998) dále pokládá otázku, zda je opravdu znalost oněch dílčích kroků dostatečná pro udělání jednoho velkého. Konstatuje, že nikoliv. I přes to, že dítě zvládlo řetěz 9 + 1 + 4, se nelze s jistotou domnívat, že zvládne také přímo spoj 9 + 5. Nejde totiž jen o to řetěz vypočítat, ale také ho sestavit, a zde se mimo jiné nepřímo dostáváme zpět k již zmiňovanému rozkladu, jakožto jednomu z dílčích kroků.

3.2.1 Triáda

Než se v práci zmíníme o triadických strukturách v rámci přechodu, bude nutné osvětlit vlastní pojem *triáda*, kterého užívá Rendl (1998), z něhož je čerpáno.

Aditivní triáda

„Pojem aditivní triády zavedli P. Černek a V. Repáš pod názvem sčítacia/odčítacia rodinka.“ (Hejný, Jirotková, Slezáková, 2001)

„Triáda je tušením, či vědomím souvislosti čísel. Vztah dvou čísel vyjádřený třetím konstituuje triádu – tři čísla, která nějak patří dohromady. Pro děti tato souvislost vystupuje jako příklad.“ (Rendl, 1995 in Vondrová a kol., 2015, s. 195)

Například aditivní triáda 8 – 5 – 3 je integrací příkladů 5 + 3 = 8; 3 + 5 = 8; 8 – 5 = 3; 8 – 3 = 5.

Termínem *aditivní triáda* tedy rozumíme takovou trojici čísel, z nichž jedno je součtem dalších dvou. Například 3, 7, 4. Jedná se o komplexní představu v mysli žáka, která zahrnuje jednak strukturální modely (představa pracující pouze s čísly) a modely sémantické (představy propojené na životní zkušenost žáka).

Strukturální modely triády

Mezi strukturální modely řadíme standardní sčítání a odčítání a též aditivní trojúhelník (známý také jako pyramida).

- Standardní sčítání a odčítání

  Klasické zápisy sčítání a odčítání jako 4 + 9 = 13 nebo 12 – 5 = 7 vnímají žáci spíše jako pouhé výsledky oněch operací 4 + 9 = ? a 12 – 5 = ?, nikoliv triády. Stejně tak i posléze, když počítají písemně, a vstupní čísla jsou psána pod sebou, je stále příslušný zápis vnímán jako operace. Proto tyto zápisy nejsou za modely schématu triády považovány. Oproti tomu úlohy typu 4 + ? = 13 a 12 – ? = 7 k budování představy triády přispívají, ačkoliv i zde je částečně procedurální vnímání patrné. První úlohu řeší žáci dopočítáváním a druhou odpočítáváním. Konečně úlohu typu ? + 3 = 5 a ? – 2 = 3 mohou žáci řešit metodou pokus-omyl, což přispívá k budování schématu triády. Zde ale často dochází k tomu, že učitelé zkrátka naučí děti si příklad obrátit (z úlohy na sčítání ? + 3 = 5 žáci utvoří příklad na odčítání 5 – 3 = ?), čímž se nakonec znovu vracíme k procedurálnímu vnímání.

- Aditivní trojúhelník (pyramida)

  Tento je podrobně popsán v rámci výčtu pomůcek vhodných k zavedení a výuce přechodu.

Sémantické generické modely

Mají při tvorbě schématu triády vedoucí postavení, protože umožňují využít rozsáhlou životní zkušenost žáka a jsou většinou velmi motivační, lze je dělit do tří skupin:

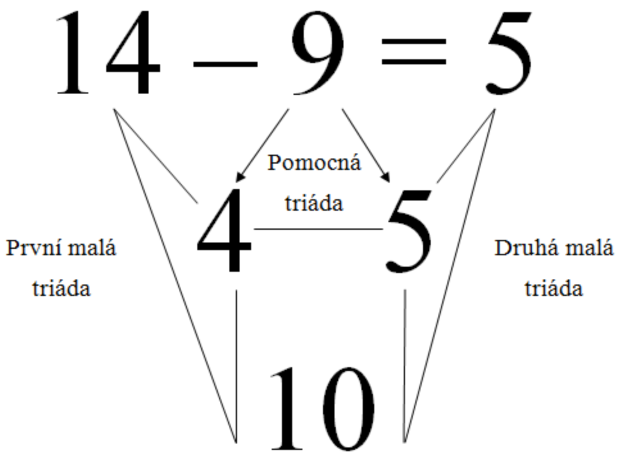
- Dynamické, v nichž jsou všechna tři čísla reprezentována jevy, které proběhnou v čase, odezní, a není možné je dále smyslově vnímat.
- Statické, v nichž jsou všechna tři čísla reprezentována jevy, které jsou neměnné, žák se k nim může kdykoli vrátit (obrázek v učebnici atd.)
- Staticko-dynamické, v nichž alespoň jedno číslo je reprezentováno jevem statickým a alespoň jedno jevem dynamickým.

(Hejný, Jirotková, Slezáková, 2001)

3.3 Symbolická restrukturace a triadické struktury v rámci přechodu ve vztahu ke sčítání, odčítání a rozkladům čísel

Jak již bylo řečeno, vlastní sestavení zmíněného řetězu je právě projevem tzv. symbolické restrukturace, v rámci níž dítě pracuje s několika triádami. Ukažme si nyní tyto triády ještě detailněji pro lepší porozumění na konkrétních spojích.

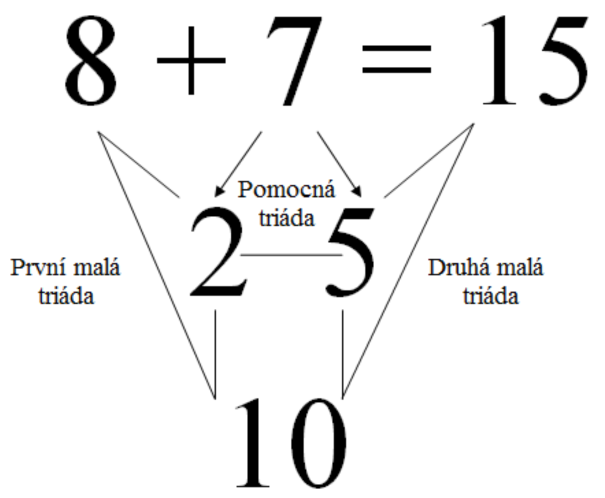
První na spoji na odčítání - např. 14 – 9. V rámci spojů s přechodem můžeme rozlišit výchozí velkou triádu sledující hlavní linii příkladu, tedy v našem případě linii 14 – 9 = 5. Dále sledujeme tzv. pomocnou triádu, zahrnující rozklad operátora, tedy čísla 9 na potřebných 4 a 5. Tento proces zahrnuje uvědomění, v němž dítě identifikuje číslo 4 jako hodnotu, která ve vztahu ke spoji určuje to, co přes desítku, řekněme, přebývá. A zároveň musí být schopno správně určit zbytek, který zbude po odečtení tohoto čísla 4 od absolutní hodnoty operátora - čísla 9, a to číslo 5. S tímto zbytkem se pak bude dítě nakonec vracet do hlavní linie, do toku hlavní operace, ve vztahu k tomu, jak směřuje operátor (připomeňme, že nyní odčítáme). První malá triáda pak zahrnuje odečtení čísla 4 od čtrnácti, čímž se dítě dopracuje na hranici desítky. Ve druhé malé triádě pak od desítky odečítá číslo 5 a dostává se na výsledek celého příkladu (5). Dlužno dodat, že u odčítání je situace poněkud jednodušší, protože počet jednotek menšence dítěti napoví, jak má menšitele rozložit. Avšak v obecné rovině dělá žákům odčítání více těžkostí, než sčítání.



Obr. 1 - Triadická struktura (odčítání)

Hejný (2010) uvádí, že jednou z příčin je nedostatečná příprava na odčítání již při samotném sčítání. Chceme-li po dětech sečíst 6 růží a 7 růží, můžeme jim tento příklad uvést buď jako typ úlohy, kdy sčítáme stav a stav, tedy například: *Na jedné straně záhonu rostlo 6 růží, na druhé straně 7 růží. Kolik růží roste na záhoně celkem?* Nebo jako případ – stav plus operátor změny: *Na záhoně rostlo 6 růží. Zahradník jich vysadil dalších 7. Kolik růží nyní roste na záhoně?* K tomuto druhému typu snadno najdeme souběžný typ na odčítání, případ – stav mínus operátor změny: *Na záhoně rostlo 13 růží. Zahradník jich 7 natrhal. Kolik růží tam zbylo?* A zde se dostáváme k jádru problému, protože k prvnímu typu již dle autorů žádný souběžný nenalezneme, protože k činnosti – *dát dohromady* je opačná činnost *rozdělit*, ne odčítat. Proto pokud ve vyučování upřednostňujeme první typ a druhý zanedbáváme, přípravu odčítání oslabujeme. (Rendl, 1998); (Hošpesová, Divíšek, Kuřina, 1996); (Hejný in Kolláriková, Pupala, 2010)

Nyní rozebereme spoj na sčítání - např. 8 + 7. Hlavní linie nám opět sleduje směr operace, tedy 8 + 7 = 15. Již víme, že pomocná linie zahrnuje rozklad operátora, se všemi příslušnými kroky, tentokrát na 2 a 5, a dále taktéž tvoří konstrukci kroků v hlavní linii. V první malé triádě jde nyní o doplnění do desítky pomocí čísla 2, taktéž převzatého z rozkladu – pomocné triády. Číslo 2 opět muselo být již v rámci rozkladu identifikováno jako to, co do desítky, tentokrát jednoduše řečeno, chybí. Ve druhé malé triádě pak dítě uchopí zbytek z rozkladu a přičítá ho k desíti (opět ve vztahu k tomu, jak směřuje operátor – nyní sčítáme). Tedy tento zbytek ukotví do hlavní linie a dokončí příklad.



Obr. 2 - Triadická struktura (sčítání)

Zapojení/včlenění rozkladu do celé procedury může být pro dítě velmi náročné. Nejde totiž o rozklad neuspořádaného množství, ale o rozklad pohybu v řadě. Jak u odčítání, tak sčítání musí dítě správně spojit desítku, velikost a směr zbytku, čímž doplní druhou malou triádu a vyřeší příklad. Výpočty při sčítání jsou pak velmi brzo řešeny pomocí tzv. *desítkového šiftu*: k číselnému vyjádření zbytku z rozkladu se připíše jednička na pozici desítek, nebo se přidá přípona –*náct*. (Rendl, 1998)

O názorné restrukturaci bude pojednáno v rámci té části práce, která představuje didaktickou pomůcku – mřížku.

3.4 Rozklady čísel

Rozklad v rámci problematiky přechodu lze tedy evidentně typově rozdělit na dva způsoby: jeden při sčítání a druhý při odečítání. V tradiční české didaktice je rozkladům věnována zvláštní pozornost, a proto si je nyní ještě jednou stručně a obecně shrňme, bez závislosti na konkrétním spoji.

Při sčítání jde o rozložení druhého sčítance na dvě čísla tak, aby první rozkladové číslo doplňovalo první sčítanec do nejbližší celé desítky (popř. stovky, či tisíce, milionu atd.

při počítání ve vyšších oborech – zkrátka do celého základu) a druhé rozkladové číslo bylo rozdílem druhého sčítance a prvního rozkladového čísla.

Nutno dodat, že dítě tedy musí také bezpečně zvládat rozklady samotné desítky. Žák zde v podstatě řeší dva rozklady přímo na sobě závislé, jelikož způsob rozložení onoho druhého sčítance zároveň vychází z rozkladu desítky vzhledem k prvnímu sčítanci.

Poté sečteme první sčítanec plus první rozkladové číslo, což nám dá celý základ a nakonec přičteme druhé rozkladové číslo a dostaneme výsledek - součet.

Při odčítání je nutné rozložit menšitele opět na dvě rozkladová čísla. Přičemž první rozkladové číslo představuje počet, který přes základ přesahuje a který je nutné od menšence odečíst, abychom se k základu jakoby zpětným chodem dopočítali - vrátili. Druhé rozkladové číslo je zde potom opět rozdílem, tentokrát však menšitele a prvního rozkladového čísla. Představuje pomyslný zbytek, který je nutné dále od základu odečíst, čímž získáme výsledek - rozdíl.

Dítě se při všech těchto úkonech jistě ocitá před důležitými otázkami: *Proč takto postupuji? Jaká je správná posloupnost jednotlivých kroků? Jaký je mezi všemi těmito kroky a čísly vztah? Jak, kdy a jaký použiji rozklad?* A jistě mnoho dalších. Co se týká rozkladu, dítěti nepostačí pouze pochopit systém rozkladu, je nutné porozumění jeho podstatě. Rozklad operátora je prováděn závazně, což znamená, že dítě musí být schopno užít takový typ rozkladu, který je ve vztahu ke spoji/operaci potřebný. Nikoliv například takový, se kterým se pouze často v rámci počítání setkává, což bychom mohli označit za určitý formalismus na tzv. nesprávném místě, o kterém hovoří M. Hejný. *„Formalizmus vzniká tehdy, když se poznání dostává do vědomí člověka přímo, ne přes separované a univerzální modely. Slovo ‚přímo' zde znamená, že člověk přebírá hotové poznání a ukládá si ho do paměti''* (Hejný, 2001, s. 235).

Tímto bych ráda předeslala pojednání o vyskytujících se chybách ve výpočtech a nutnosti didakticky a metodicky zvládnuté, názorné výuky, bohaté zejména na manipulační činnosti a enaktivní modely, jakožto metodologické prostředky k tomu, aby se děti v celé situaci spojů s přechodem vyznaly a orientovaly.

Děti také často mohou počítání s přechodem pojmout jako sérii jednotlivých příkladů, s nimiž nemusí být schopny udržet paralelně pozornost k hlavní linii příkladu a přehled o tom, na kterém místě v celkovém postupu se právě nachází.

Na závěr kapitoly dodejme, že všechny typy příkladů v rámci spojů s přechodem přes základ řadíme k binárním operacím, kam spadá sčítání, odčítání, násobení, dělení. Binární operace přiřadí každé dvojici čísel nějaké třetí číslo (při menších číslech pamětně, při větších prostřednictvím písemných postupů).

3.5 Období před zavedením přechodu

Podívejme se nyní na období před samotným zavedením přechodu a jeho klíčové momenty, z nichž za jeden považuji dobře zvládnutý pohyb a orientaci žáka v číselné řadě.

Prvotní orientace v číselné řadě dvěma směry – jednak výčet od nuly po jedné nahoru, řekněme od jednotek k první desítce, a jednak výčet směrem dolů, ve smyslu pohybu od první desítky zpět k jednotkám, se navzájem doplňuje s principy sčítání a odčítání a mělo by být demonstrováno dohromady, aby se podpořilo porozumění těmto procesům. Pakliže sčítání a odčítání jsou vnímány jako opačné verze stejného postupu, potom jsou i tito dva přispěvatelé (myšleno zmíněné pohyby) k operacím sčítání a odčítání rovněž rovnocenné opaky. Jestliže žák necítí dostatečnou jistotu v pochopení zmíněného principu při počítání dopředu a dozadu, nemá poté nutné a nezbytné dovednosti pro další stádium aritmetiky, a tím ani k vlastnímu přechodu přes hranici deset. (Chinn, 2004)

Pojednání Steva Chinna chápu následovně: ačkoliv přechod přes první desítku s sebou samozřejmě nese i překročení řádu, stále ona desítka pro dítě představuje také a pouze *další číslo v číselné řadě,* které se však současně stává hranicí. Principielně však i pohyb přes tuto hranici odpovídá principu pohybu v rámci jednotek v první desítce, ačkoliv se zde také přidává nutnost porozumění vztahu mezi jednotlivými řády a nutnost porozumění číslicím ve vztahu k těmto řádům, kdy například číslice jedna již neodpovídá počtu jedné, nýbrž deseti. Ostatně i samotné počítání na číselné řadě je uváděno jako jedna z cest ke zvládnutí spojů s přechodem přes deset. (viz. kapitola *Didaktické metody a formy nácviku ve vztahu k výuce a zavádění přechodu*).

Zmiňme v návaznosti na tuto myšlenku konkrétní výpověď jedné z učitelek, uvedenou v publikaci *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů,* kde paní učitelka vidí jako příčinu problémů v dané oblasti právě nezvládnutí číselné řady (proto se prý snaží pracovat s číselnou osou, přičemž vertikální je dle jejích slov účinnější než horizontální). Dále doslova uvádí: *,,Problém je, že tyhle děti neznají* *číselnou řadu, nemají tu představu 1–20, a pak mi někdo doporučil, abych tu číselnou řadu psala odspodu nahoru a je to lepší. Tam to vidí‘‘* (Rendl, Vondrová a kol. 2013, s. 33).

V neposlední řadě je nutné brát v potaz také to, že pokud dítě nezvládá dovednost sčítání a odčítání již v oboru do deseti, může pro něj být tradiční řešení přechodu pomocí rozkladů a dočítání do desítky velmi náročné. Proto by měla být tato dovednost dobře osvojená, než na ni vyučující naváže další látkou právě v podobě přechodu přes první desítku. (Hošpesová, Divíšek, Kuřina, 1996)

Samotný pohyb ve fixní řadě - nácvik přechodu, jakkoli nutí žáky přijímat určité kroky při počítání jako předepsané, jejichž smysl ve vztahu k celé operaci se stane zjevným později, pracuje s předpokladem, že logika těchto dílčích kroků je dětem zjevná, a že opakováním se stane zjevnou i logika celého postupu. Autor se domnívá, že základ pro to, aby byl tento předpoklad naplněn, je osvojení logiky adres a operátora, která se objeví právě při pochopení příkladu, jakožto pohybu ve fixní řadě, přičemž dále dojde k pochopení restrukturace při přechodu jako rozdělení celkového pohybu operátora na dva dílčí pohyby. (Rendl, 1998)

3.6 Zahájení výuky přechodu přes základ

Janků (2013) uvádí: *,,Nelze počítat s tím, že toto učivo žáci v 1. ročníku plně ovládnou. Podle mých zkušeností je však dobré je ještě v 1. ročníku žákům objasnit a vést je k tomu, aby si při výpočtu dokázali pomoci znázorněním nebo vyhledáním výsledku v tabulce sčítání.‘‘*

Učitelé mají volbu, zda přechod do prvního ročníku zařadí, či nikoliv. Důležitým aspektem pro toto rozhodnutí by mělo být především bezpečné zvládnutí potřebných spojů, na kterých přechod přes základ staví. Nicméně nelze zřejmě počítat s tím, že by žáci prvního ročníku učivo plně ovládli. Kittler (1994) dále uvádí, že v případě, že se učitel rozhodne přesunout přechod do druhého ročníku, je žádoucí probrat v prvním ročníku alespoň přechod při přičítání a odčítání čísel 2 a 3, tj. úlohy 8 + 3, 9 + 2, 9 + 3, 11 – 3, 11 – 2, 12 – 3, protože čísla druhé desítky nelze dostatečně pochopit bez jejich vztahu k číslům desítky první. Někteří žáci jistě vyzkouší i náročnější příklady jako 8 + 7 apod. Nikoliv však rozkladem. Lze spíše předpokládat manipulaci s počítanými předměty, či počitadlem. Dále je nutné intenzivně opakovat rozklad čísla na sčítance, dočítání do deseti a přičítání k deseti.

V každém případě je potřeba, aby se dítě bez větších obtíží pohybovalo v číselné posloupnosti o jedno až deset čísel dopředu i nazpět. Ostatně i nedostatečná znalost posloupnosti samotných desítek může být časem jedním ze zdrojů problémů. Jednou z potřebných dovedností je také grafické znázorňování počtů.

Autoři metodické příručky *Svět čísel a tvarů* k této problematice doslova uvádí: *,,Domníváme se, že toto učivo by mělo být probráno až ve druhém ročníku. Rozhodně bychom se mu však neměli v prvním ročníku vyhýbat, ale nebudeme trvat na jeho zvládnutí všemi žáky''* (Hošpesová, Divíšek, Kuřina, 1996, s. 56).

Děti se po zvládnutí přechodu v dalších ročnících (v oblasti sčítání a odčítání) již kvalitativně neučí nic nového, pouze naučené dovednosti využívají ve vyšších číselných oborech. (Hošpesová, Divíšek, Kuřina, 1996)

3.7 Souhrn stěžejních schopností a dovedností, na nichž výuka přechodu přes první desítku staví

Pokusme se nyní, ještě jednou v bodech, stručně vymezit na základě předchozího pojednání takové schopnosti a dovednosti, jejichž osvojení je pro zvládnutí spojů s přechodem nezbytné:

- zvládnutý pohyb a orientace žáka v číselné řadě, potažmo pohyb v číselné posloupnosti o jedno až deset čísel dopředu i nazpět
- znalost posloupnosti desítek (min. prvních dvou), potažmo číselná představa 1 - 20
- dovednost sčítání a odčítání již v oboru do deseti
- dovednost dočítat do deseti
- dovednost rozložit číslo všemi možnými způsoby
- osvojení logiky adres a operátora
- dovednost řešit početní řetěz
- osvojení představy triády, jakožto trojice čísel, z nichž jedno je součtem dalších dvou

3.8 Možné vyskytující se chyby při výpočtech

Pro ilustraci zde uvádím také některé z možných chyb a problémů, které lze v dětských výpočtech zaznamenat. Výčet není zdaleka vyčerpávající, poukazuje pouze na možné směry v uvažování dětí.

- Chybný, popř. automatický rozklad - žák například chápe systém rozkladu, ale nikoliv jeho podstatu/úlohu ve výpočtu. Často volí typ rozkladu, se kterým se nejčastěji setkává, nikoliv takový, který je třeba pro konkrétní operaci, je tedy zaměřeno na rozklad, ale uniká mu souvislost s celkem operace.
- Chybné dopočítávání - žák např. ve spoji 8 + 7 nezačíná dopočítávat až od čísla 9, ale od toho, které je v příkladu první napsáno, tedy od osmi.
- Zbytek z rozkladu při odčítání je považován za výsledek celého příkladu (např.: 13 - 7 = 4).
- Zbytek je k desítce přičten namísto odečtení a naopak (např.: 13 - 7 = 14).
- Žák doplní výsledek na základě podobnosti spoje s jiným příkladem: například spoj 11 - 3 je žákem doplněn číslem 14 na základě podobnosti s příkladem 11 + 3.
- Při odečítání není po dosažení desítky odečten zbytek z rozkladu, ale je od ní odečten znovu celý operátor.
- Žák zaznamenává změny jen na místě jednotek (např.: 13 - 7 = 16).
- Ukončení procedury na desítce, ta je považována za výsledek příkladu.

(Rendl, 1998)

3.9 Počítání s přechodem přes první desítku ve vztahu k RVP ZV

Výuka počítání s přechodem přes první desítku bývá tedy, jak již bylo řečeno, zařazena spíše do druhého ročníku prvního stupně základní školy, nicméně učitel může látku zařadit již na konci ročníku prvního. Ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace (dle RVP ZV[2]) pak tedy náleží osvojení si těchto početních operací mezi očekávané výstupy tzv. prvního období. Oblast Matematika a její aplikace se dále dělí na čtyři tematické okruhy, k nimž náleží dané učivo a příslušné výstupy. V následující tabulce se pokusím jednak o vymezení těch očekávaných výstupů v rámci jednotlivých

[2] *,,Rámcové vzdělávací programy jsou kurikulární dokumenty státní úrovně, které normativně stanovují obecné rámce vzdělávání pro jednotlivé etapy předškolního, základního, středního vzdělávání a jsou závazné pro tvorbu školních vzdělávacích programů''* (Skutil, Zikl a kol., 2011, s. 67).

tematických okruhů, které se k přechodu vztahují, a dále také o výčet konkrétních korelujících dílčích výstupů a v podstatě zároveň cílů, které přímo této etapě výuky náleží:

Výstupy pro jednotlivé tematické okruhy

Tab. 4 - Výstupy pro okruh *Číslo a početní operace*

Učivo	**Očekávané výstupy obecně**	**Konkrétní dílčí výstupy vztahující se k přechodu**
Zápis čísla v desítkové soustavě a jeho znázornění (číselná osa, model), přirozené číslo, celé číslo	Žák používá přirozená čísla k modelování reálných situací, počítá předměty v daném souboru, vytváří soubory s daným počtem prvků.	Žák porovnává množství a vytváří soubory prvků podle daných kritérií v oboru do 20.
Číselná osa	Žák užívá lineární uspořádání; zobrazí číslo na číselné ose.	Žák umí zakreslit násobky 2, **3**, **4**, 5 na číselné ose.
Písemné algoritmy početních operací, přirozené číslo, celé číslo	Žák provádí zpaměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly.	Žák sčítá a odčítá s užitím/posléze bez užití názoru v oboru do 20 s přechodem přes základ 10.
Vlastnosti početních operací s čísly	Žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace.	Žák řeší jednoduché slovní úlohy na sčítání a odčítání v oboru do 20 s přechodem přes základ 10. Žák dokáže provést rozklad čísel v oboru do 20.

Tab. 5 - Výstupy pro okruh *Závislosti, vztahy a práce s daty*

Učivo	**Očekávané výstupy obecně**	**Konkrétní dílčí výstupy vztahující se k přechodu**
Tabulky	Žák doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel.	Žák doplňuje jednoduché tabulky, schémata a posloupnosti čísel v oboru do 20.
Závislosti a jejich vlastnosti	Žák popisuje jednoduché závislosti z praktického života.	Žák počítá s mincemi a bankovkami v hodnotě do sta korun.

(RVP ZV, 2017, s. 31-32)

4 Didaktické metody a formy nácviku obecně

Vyučovací metodu lze definovat jako postup (či cestu), který je charakterizován způsobem uspořádání činnosti učitele a žáka, vedoucí k dosažení stanovených vzdělávacích cílů. Existuje mnoho různých klasifikací těchto metod, například

- podle fáze vyučovacího procesu (utváření, upevňování, či prověřování vědomostí);
- podle způsobu prezentace (metody slovní, názorné, praktické);
- podle charakteru specifické činnosti (metody uplatňované v jednotlivých vyučovacích předmětech).

Obecné třídění metod se provádí podle způsobu interakce mezi učitelem a žákem: frontální, skupinové, individuální. (Průcha, Walterová, Mareš, 2013)

Maňák a Švec (2003) dělí výukové metody následovně:

Klasické výukové metody

- slovní (vyprávění, vysvětlování, přednáška, práce s textem, rozhovor) - doplňují a doprovázejí ostatní metody
- názorně-demonstrační (předvádění a pozorování, práce s obrazem, instruktáž) - předvádění reálných předmětů a jevů, realistické zobrazování skutečných předmětů a jevů, jejich záměrně pozměněné zobrazování a postihování reality prostřednictvím schémat, grafů, znaků, symbolů, abstraktních modelů apod.

- dovednostně-praktické (napodobování, manipulování, laborování a experimentování, vytváření dovedností, produkční metody)

Aktivizující výukové metody

- diskusní
- heuristické (řešení problémů, problémové vyučování, kladení problémových otázek)
- situační
- inscenační (dramatizace)
- didaktické hry

Komplexní výukové metody

- frontální výuka
- skupinová a kooperativní výuka
- partnerská výuka
- individuální a individualizovaná výuka, samostatná práce žáků
- kritické myšlení
- brainstorming
- projektová výuka
- výuka dramatem
- otevřené vyučování
- učení v životních situacích
- televizní výuka
- výuka podporovaná počítačem

Struktura metod z hlediska myšlenkových operací, dle aspektu logiky

- postup srovnávací
- postup induktivní
- postup deduktivní
- postup analyticko-syntetický

(Maňák, 1990)

V současnosti se snažíme především o konstruktivní přístup k vyučování, zahrnující zejména aktivizaci žáků a respektování přirozených procesů poznávání a učení. Opakem je přístup transmisivní, charakteristický strohým předáváním hotových poznatků, či frontálním výkladem.

Hejný a Kuřina (2001) vyjadřují deset zásad didaktického konstruktivismu ve vztahu k matematice:

1. Aktivita – matematiku chápeme jako specificky lidskou aktivitu, tedy nikoli jen jako její výsledek
2. Řešení úloh – podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování. Tvorba matematických modelů reality je pak součástí lidského poznání.
3. Konstrukce poznatků – poznatky, nejen matematické, jsou nepřenosné. Přenosné jsou pouze informace. Poznatky vznikají v mysli poznávajícího člověka.
4. Zkušenosti – vytváření poznatků je podmíněno zkušenostmi. Zkušenosti si přináší žák z kontaktu s realitou každodenního života, či experimentováním a řešením úloh ve škole.
5. Podnětné prostředí – základem matematického vzdělávání je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost s dostatkem vhodných podnětů.
6. Interakce – k rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě (diskuse, srovnávání výsledků, konstrukce příkladů a protipříkladů…)
7. Reprezentace a strukturování – podstatné je pěstování nejrůznějších druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa.
8. Komunikace – značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky. Jedním z nich je neverbální vyjadřování, jiným matematická symbolika.
9. Vzdělávací proces – vzdělávací proces v matematice je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla a aplikace matematiky. Pro porozumění matematice má zásadní význam vytváření představ, pojmů a postupů, uvědomování si souvislostí.
10. Formální poznání - vyučování, které má čistě charakter pouhého předávání informací, nebo které dává pouze návody, jak postupovat, vede sice k ukládání informací do paměti, má však silně formální charakter, vede k pseudopoznání.

V duchu konstruktivismu byla založena Hejného metoda výuky matematice, která staví na 12 klíčových principech (budování schémat, práce v prostředích, prolínání témat, rozvoj osobnosti, skutečná motivace, reálné zkušenosti, radost z matematiky, vlastní poznatek, role učitele, práce s chybou, přiměřené výzvy, podpora spolupráce). (Slezáková, Šubrtová, 2015)

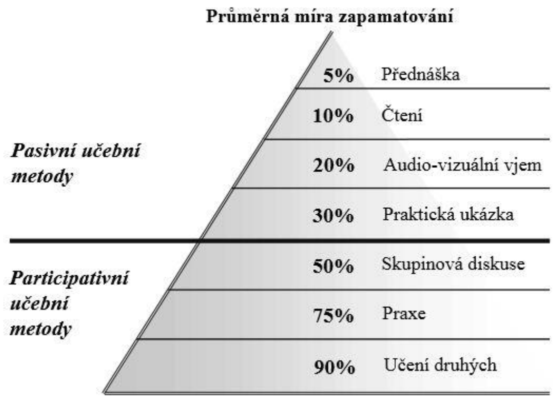
Jak se k vlastnímu přechodu tato metoda staví, je popsáno níže v rámci analýzy učebních materiálů.

Neopomenutelnou součástí výuky je při dosahování cílů také kvalitně vedená a účelná pedagogická komunikace.

„Každý učitel musí být schopen komunikovat tak, aby se komunikace stala účinným prostředkem navození a podpory učební činnosti žáků‘‘ (Prokešová in Kuřina, 2013, s. 2).

4.1 Vyučovací metody podle zapamatovatelnosti

Následující obrázek ilustruje výukové metody dle jejich efektivnosti co do zapamatování. Je patrné, že to, co zažijeme ve smyslu přímé činnosti, či dramatické prezentace, si pamatujeme nejlépe, spolu s učením druhých (viz didaktický konstruktivismus, vycházející právě z aktivizace žáka, popř. Hejného metoda, kde se děti, mimo jiné, učí i navzájem mezi sebou).



Obr. 3 - Vyučovací metody podle zapamatovatelnosti

4.2 Faktory volby výukové metody

Při volbě výukové metody je nutné zvážit následující edukační faktory a kritéria:

- zákonitosti výukového procesu, a to obecné i speciální (logické, psychologické, didaktické)
- cíle a úkoly výuky, vztahující se zejména k práci, interakci, jazyku
- obsah a metody daného oboru zprostředkovaného konkrétním vyučovacím předmětem
- úroveň fyzického a psychického rozvoje žáků, jejich připravenost zvládat požadavky učení
- zvláštnosti třídy, skupiny žáků, např. hoši – dívky, různá etnika, formální a neformální vztahy v kolektivu
- vnější podmínky výchovně-vzdělávací práce, např. geografické prostředí společenské prostředí, hlučnost okolí, technická vybavenost školy atd.
- hodinová dotace předmětu a doba výuky (ráno, odpoledne apod.)
- osobnost učitele, jeho odborná a metodická vybavenost, zkušenosti, pedagogické mistrovství atd.

(Maňák a Švec, 2003)

4.3 Strukturní prvky metody

Výuková metoda byla charakterizována jako způsob uspořádání vyučovacích činností žáka a učitele. Porozumění struktuře těchto činností vede k lepšímu osvojení si výukových metod a jejich následné aplikaci do výuky. Ve vyučovací učební činnosti pak lze rozlišit tyto složky:

- motiv činnosti,
- cíl činnosti,
- plánování činnosti,
- operativní obraz činnosti (tj. jak by měla činnost konkrétně vypadat),
- úkony činnosti (tj. její praktická realizace),
- zpracování průběžných informací o správnosti, přiměřenosti, funkčnosti činnosti,
- rozhodování (v průběhu činnosti – na základě průběžných informací, které zahrnují i odezvy druhých, např. reakce žáků na učitelovy podněty),

- kontrola výsledků činnosti (vyučování i učení),
- korekce dalšího jednání (činnosti).

(Maňák a Švec, 2003)

4.4 Didaktické metody a formy nácviku ve vztahu k výuce a zavádění přechodu

Jak již bylo naznačeno dříve, v podmínkách českého školství je po léta preferován metodický postup počítání s vhodným rozkladem druhého sčítance u sčítání a menšitele u odčítání. U dětí i dospělých však byla pozorována celá řada dalších strategií pro řešení, přičemž u sčítání je jejich různost poněkud větší, než u odčítání. Je tedy možné, že děti budou nabízet a uplatňovat tyto vlastní postupy. Pokud jsou rozumné, tedy pokud pomocí nichž děti dojdou správného výsledku, neměli bychom trvat na vžitých postupech. A to i přes to, že se nám mohou jevit jako méně efektivní. Ovšem je nutné si uvědomit, že žáci povětšinou tomuto svému v uvozovkách neefektivnímu způsobu velmi dobře rozumí. (Hošpesová, Divíšek, Kuřina, 1998)

Cesty ke zvládnutí spojů s přechodem jsou tedy různé. Z pozorování dětí při počítání vyplynulo několik možností, které zahrnují například využívání tzv. souměrných spojů, dále počítání na číselné řadě a využívání různých rozkladů. Dítě si pak samovolně vybírá takovou metodu, která mu nejlépe vyhovuje. Lze pozorovat, že děti aplikují různé metody na různé spoje a situace podle toho, která jim přijde nejvýhodnější. (Hošpesová, Divíšek, Kuřina, 1996)

Didaktické techniky navrhované učiteli zpravidla nepřekračují to, co nabízí dostupné a běžně využívané učebnice. Závažnost problému s přechodem přes desítku může být závislá právě na tom, jaký způsob je při jeho zavádění a procvičování zvolen a jaké didaktické techniky jsou používány. Mnozí učitelé nabízejí žákům postup, který si kdysi oni sami z pozice žáka osvojili, a také takový, který lze nalézt v rámci doporučení ve starších vydáních učebnic, rozumějme například postup o mnoha krocích: $8 + 7 = 8 + (2 + 5) = (8 + 2) + 5 = 10 + 5 = 15$. Rozklady čísel bývají vizualizovány tzv. *vidličkami* pod rozkládaným číslem. Obdobně je tomu u odčítání. (Rendl, Vondrová a kol., 2013)

Rendl (1998) uvádí, že pokud dítě nepochopí příklad jako pohyb v řadě a uniká mu způsob, jak desítka dělí operátora, nepojme ani rozklad samotný jako rozložení pohybu operace, tedy tyto *vidličky* se pak pro něj mohou stát pouze nuceným požadavkem učitele bez zjevné souvislosti s vlastním příkladem.

K tomuto postupu mají učitelé obvykle připraveno na procvičení množství technik manipulativních, vizuálních i mnemotechnických. Manipulace s názornými pomůckami a vizuální odlišení obou složek rozkládaného čísla jsou dle vyučujících velmi důležité. Výhoda názorného přístupu spočívá v tom, že žáci pochopí princip. Pomůcky jsou pak užívány opakovaně, zejména pro upevnění dovednosti. Výuku přechodu přes desítku je také nutné diferencovat. Ne vždy je nutné vést žáky striktně k postupu, který se nachází v učebnici. Žáci si mohou, dokud to potřebují, ukazovat na pomůckách, či na prstech, jak se čísla rozloží. (Rendl, Vondrová a kol., 2013)

Rendl, Vondrová a kol., (2013) uvádějí, že za účinnou techniku považují některé učitelky jednak práci s číselnou osou a také krokování (jakožto dramatizovanou verzi pohybu na číselné ose).

4.4.1 Využití souměrných spojů

Ze zkušenosti je známo, že děti si nejdříve zapamatují spoje se stejnými sčítanci (např. 8 + 8, 7 + 7 atd.), přičemž důvodem může být rytmus při vyslovení tohoto příkladu, nebo zkrátka jejich upřednostnění. Tohoto faktu lze využít při nácviku počítání s přechodem přes základ. Na základě těchto spojů si navíc dítě snadno odvodí výsledky spojů s jedním sčítancem o jednu větším, či menším (8 + 9, 7 + 8 atd.) Nehovoříme o metodě využitelné pro všechny žáky, nicméně může velmi dobře pomoci těm, kteří mají sklon k hledání logických vazeb mezi fakty. Zejména u sčítání lze považovat využití souměrných spojů za vhodné. Pro odčítání jich může využít ten žák, který dobře chápe vztahy obou operací (8 + 8 = 16; 16 – 8 = 8 atd.) Nicméně těch nebude zprvu mnoho. Navíc nestačí, aby děti uměly spoje pouze obrátit. (Hošpesová, Divíšek, Kuřina, 1996)

5 Analýza vybraných učebnic – způsoby a metody vyvození

V následujících podkapitolách se pokusím stručně nastínit vyvození a zavedení učiva přechodu, jak je navrženo ve vybraných učebnicích a pracovních sešitech jednotlivých nakladatelství. Ve většině učebních materiálů je postup víceméně podobný, a to ten, který zahrnuje, řekněme, tradiční výuku pomocí rozkladů čísel a s tím souvisejícího dopočítávání do desítky. Přičemž nejčastěji se setkáme s posloupností, kdy se nejprve zavádí sčítání s přechodem a po jeho dobrání odčítání s přechodem. Proto uvedu pouze některé vybrané materiály, které se od této struktury nějakým způsobem odchylují, nebo jsou něčím zajímavé a představují především jiný, než běžný rámec, který je dobře znám.

5.1 Učebnice matematiky podle Hejného metody

Učebnice Hejného metody nejprve vycházely v nakladatelství Fraus (2007 – 2012). Nyní má ale Hejného metoda svou vlastní společnost – viz webové stránky společnosti H-mat. Od roku 2018 tyto učebnice vydává společnost H-mat, o.p.s. (Co je to „Hejného metoda“?, 2018)

Jako první bych tedy ráda představila učební materiály Hejného metody. Pro přechod zde nastává poměrně ojedinělá situace oproti všem následujícím materiálům jiných vydavatelství. V konceptu Hejného metody totiž přechodu přes desítku není věnována žádná zvláštní pozornost, či přikládán důraz. Úlohy s ním jsou pevně součástí učebních materiálů již pro první ročník, ihned při zavedení čísla 11. Pro toto učivo by si žáci měli vytvořit své vlastní řešitelské strategie, jak úlohy s přechodem řešit. V metodické příručce pro učitele je doslova uvedeno: *„V tradiční didaktice je tento jev široce komentován a přikládá se mu veliká důležitost. Experimenty ale ukázaly, že je účinnější, když se přechodu přes 10 nepřikládá žádná zvláštní důležitost a žáci si vytvoří vlastní postupy, jak tyto úlohy řešit“* (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, 2007, s. 71).

V metodice je dále uvedeno, že učitel má popřípadě možnost žákovi ukázat způsob řešení s rozkladem desítky, ale v žádném případě by neměl na tomto způsobu řešení trvat, jde tedy pouze o nastínění možnosti, nikoliv zavedení daného jednotného postupu pro všechny. Učitel prý sám pozná, že žákům tyto úlohy obtíže převážně nedělají, že užívají svých vlastních postupů. V komentáři k jedné z úloh je doporučeno poskytnout žákům, kteří nejsou schopni řešit zpaměti, počitadlo, či jinou pomůcku. Po jisté době je možno žáky vyzvat, aby předvedli třídě své vlastní způsoby řešení. (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, 2007)

V konceptu Hejného matematiky tedy můžeme evidentně sledovat naprosto odlišný přístup k této problematice. Na jedné straně místo, které je učiteli (dle oficiálního výzkumu[3] i mého dotazníkového šetření) pokládáno za kritické, je zde představeno,

[3]Viz. publikace *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*

na straně druhé, jako místo, které žákům většinou nedělá obtíže, a které není nutné žákům nějak zvlášť zdůrazňovat.

5.2 Učebnice matematiky nakladatelství SPN

Metodická příručka pro učební materiály nakladatelství SPN poukazuje na možnost vyvozovat přechod několika způsoby. Tato řada obsahuje volitelný třetí díl pracovních sešitů již pro první ročník, který se zabývá výhradně sčítáním s přechodem, odčítání je věnována pouze okrajově poslední dvoustrana sešitu. V tomto je přechod vyvozen metodou 9 + číslo, 8 + číslo, 7 + číslo atd.

Ovšem pokud se učitel rozhodne v prvním ročníku přechod nezavádět a tento sešit vynechat, navazuje ve druhém ročníku nikoliv tímto volitelným dílem, ale jiným sešitem (1. díl pracovních sešitů pro druhý ročník) ve kterém je přechod zaveden znovu jako nové učivo, ovšem s jiným postupem. A to poměrně odlišným i oproti jiným materiálům. Jednak je zde sčítání s přechodem probíráno současně s odčítáním. Přičemž jednotlivé úlohy jsou postaveny jakoby na rozkladu čísla – nejprve čísla 11, poté 12, 13, 14, 15 atd. Žáci tedy řeší postupně spoje v rámci jednotlivých oborů (obor do 11, do 12 atd.) vždy do určitého maximálního výsledku (v případě sčítání). V sešitě je hojně užito metody souměrných (7 + 7) a obrácených spojů (7 + 6 = 13, 13 – 6 = 7).

U práce se souměrnými spoji je však, myslím, zřejmě nutno kontrolovat, aby žáci nedoplňovali výsledky odčítání pouze mechanicky na základě znalosti podoby obráceného příkladu na sčítání, ale opravdu si osvojili pro odčítání postup řešení.

Pracovní sešit poukazuje na možnost řešit spoje na odčítání pomocí dočítání (například spoj 11 – 6 = ? žáci řeší dočítáním: 6 a kolik je 11?)

Učitel má také možnost v prvním ročníku probrat onen volitelný třetí díl a ve druhém zároveň učivo zopakovat v tomto 1. díle řady pro druhý ročník. V metodice je uvedeno, že žáci si alespoň učivo procvičí odlišným způsobem, než na jaký byli v rámci prvního ročníku zvyklí.

(Čížková, 2007)

Osobně považuji za zbytečné odčítání izolovat od sčítání. Tento postup bych ve své praxi upřednostnila zejména kvůli možnosti si z pozice žáka utvořit jaksi ihned komplexní představu o souvislosti mezi těmito dvěma operacemi, nejen v rámci přechodu.

5.3 Učebnice matematiky nakladatelství Didaktis

Pracovní sešit tohoto nakladatelství mne zaujal pro svůj způsob přípravy na přechod, který je zde situován do prvního ročníku. Hojně jsou zde před zavedením přechodu předkládány k řešení početní řetězy typu 9 + 1 + 3; 8 + 2 + 6; 7 + 3 + 5 atd. Žáci tedy v řetězech dopočítají nejprve do desítky a poté přes ni. Vůbec první příklad na přechod z těchto řetězů vyplívá. Úplně poprvé se s ním děti setkají ve spoji 8 + 4, který je dán do analogie s řetězem 8 + 2 + 2. Děti v podstatě trénují nejen rozklady vlastní desítky, ale jakoby nepřímo (a zároveň) i princip budoucích rozkladů druhého sčítance.

Odčítání s přechodem je zavedeno odděleně po dobrání sčítání, a to stejným způsobem, tedy předchází mu opět řetězy. Například řetěz 12 – 2 – 3 předchází prvnímu spoji na odčítání s přechodem: 12 – 5.

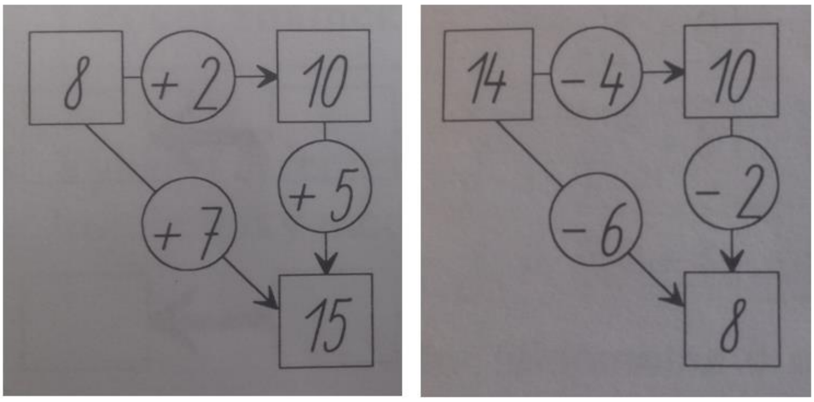
Sešit se liší oproti jiným také tím, že nepracuje s postupem po oborech (do maximálního výsledku 11, do 12, atd.) či po číslech (ve smyslu 9 + číslo, 8 + číslo, 7 + číslo atd.), ale spoje předkládá ihned o začátku jakoby nahodile.

(Tarábek, Kopečková, Vojkůvka, Brázdová, 2005)

Uvedené početní řetězy mohou, myslím, velmi dobře a nenásilnou formou přispět k pochopení a snadnějšímu osvojení celého navazujícího učiva s přechodem přes první desítku.

5.4 Učebnice matematiky nakladatelství Prometheus

Toto nakladatelství nabízí v učebních materiálech s názvem *Svět čísel a tvarů* z mého pohledu jednak netradiční a zajímavé znázornění/schéma výpočtů spojů s přechodem (viz obrázek č. 4) a dále například navíc, ne tolik běžnou, práci se sčítací tabulkou čísel, či číselnými pyramidami.

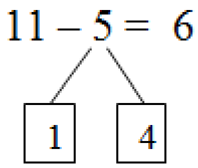


Obr. 4 - Schéma početní operace

(obrázek převzat z: Hošpesová, Divíšek, Kuřina, 1997, s. 14-16)

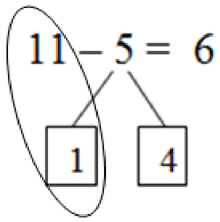
Tento typ schémat slouží k tomu, aby si děti uvědomily, jakým způsobem rozkládají druhý sčítanec u sčítání a menšitele u odčítání (zde ukázka odčítání, pro sčítání je schéma analogicky stejné). (Hošpesová, Divíšek, Kuřina, 1998)

Osobně považuji toto schéma za výborné, myslím, že zejména v začátcích výuky přechodu může pro děti představovat srozumitelnější a daleko názornější zobrazení, než klasický zápis pomocí vidliček, který absentuje jasně viditelnou desítku (viz obrázek č. 5).



Obr. 5 - Znázornění rozkladu typu *vidličky*

Zápis typu *vidličky* řeší tuto absenci jasně viditelné desítky kroužkováním - vyznačením první malé pomocné triády, v rámci níž se dítě na tuto desítku ‚dopracuje'. Tento grafický záznam však shledávám jako poměrně matoucí (viz obrázek č. 6). Respektive ne u sčítání, ale u odčítání. Dát obecně prvky do kroužku přeci většinou a logicky značí uzavřít je do souboru o daném počtu, do množiny. Zkrátka, dá-li dítě do kroužku menšence a první rozkladové číslo, mohla by ho právě asociace s: *dát do kroužku = dát dohromady ve smyslu sčítání* zmást. Tato se, myslím, jasně nabízí.



Obr. 6 - Znázornění rozkladu typu *vidličky* s kroužkováním první malé triády

6 Způsoby modelování čísel a početních operací

V rámci následujících kapitol si kladu za cíl jednak obecně představit pojmy jako *didaktický prostředek, učební pomůcka či model*. Dále se pokusím obsáhnout a popsat celé spektrum pomůcek - pomocných systémů, modelů, či schémat, které lze užít v rámci výuky přechodu přes desítku a na nichž lze modelovat početní operace (nejen s přechodem související). Osobně považuji za nutnou samozřejmost poskytnout žákovi v rámci výuky matematice co nejrozličnější a nejširší možnosti modelování početních operací. Je otázkou, zda učitelé užívají maximum toho, co se v této oblasti nabízí. Kapitola by mohla posloužit právě učitelům jako komplexní nástin všech těchto rozmanitých možností, jako inspirace, či částečně i návod pro výuku. Zejména v nedostačující názornosti obecně mnohdy spatřuji zdroje případných obtíží žáků při osvojování matematických a jiných dovedností.

Přirozená čísla nám mohou reprezentovat různé předměty, s nimiž lze manipulovat, o nichž lze mluvit, jsou to předměty, které vidíme. A proto nám zajišťují například jak taktilní, tak vizuální percepci čísel. Řadu úloh děti řeší nejprve pomocí jejich modelování, pracují s názornými reprezentanty čísel, které jim usnadní tvorbu mentálních obrazů. Často děti v raném stádiu svých matematických zkušeností užívají univerzálního modelu přirozených čísel, a to modelu prstového, tedy počítání na prstech. Dalším univerzálním modelem přirozených čísel může být počítadlo, které je v tradiční didaktice považováno za základní způsob modelování sčítání a odčítání. (Hejný, Kuřina, 2009)

,,Jen málokdo si v dnešní době dokáže představit edukátora bez učebních pomůcek, odkázaného jen na sebe samého. Vždyť myšlenka uvědomělého využívání učebních pomůcek se objevuje již v dávné historii. Vzpomeňme v této souvislosti alespoň F. Bacona, J. A. Komenského, F. Fröbela či G. A. Lindnera'' (Dostál, 2008, s. 7).

Nejprve si dovolím uvést krátké shrnutí, pojednávající o důležitosti pomocných názorů a prostředků.

Kuřina (1990) uvádí, že otázka názornosti je ve školách aktuální zejména při dvou příležitostech. Jednak jde o názornost při zavádění pojmů, jednak o názornost při řešení úloh. Tyto spolu úzce souvisí.

Člověk má sice neomezenou schopnost pamatovat si, ovšem pouze omezenou tzv. aktivní paměť. Učí-li se žák nějaký nový abstraktní pojem, velkou část své aktuální paměťové kapacity spotřebuje na představení si dané situace, na které učitel pojem vysvětluje. Slabší žáci tuto kapacitu snadno vyčerpají, takže již nejsou schopni dále intenzivně přemýšlet. Vizualizace a názornost žákům pomáhá část aktuální paměti uvolnit ve prospěch dalších mentálních činností (jako je indukce, abstrakce, komparace, dedukce, symbolizace apod.) Dítě je tedy schopno podat lepší výkon. Lepším žákům utvoří vizualizace prostor na ověřování hypotéz, hledání dalších řešení, mohou si dovolit být kreativnější a více experimentovat. (Vaníček, 2009)

Na závěr úvodu této kapitoly a v souvislosti s předchozím odstavcem uvedu citaci z publikace *Dítě, škola a matematika*: *„Učitel by měl poskytnout žákům takové externí reprezentace poznatků, které by jim umožnily, aby si vytvářeli vlastní mentální reprezentace k řešení problémů“* (Bertrand in Hejný, Kuřina, 2009, s. 97).

6.1 Definice pojmů didaktický prostředek, učební pomůcka a model

Za didaktický prostředek považujeme takový prostředek, jenž vede k dosažení výukových cílů, napomáhá vést a usměrňovat vyučovací proces a lze jej považovat za nadřazený pojem učební pomůcce, dále metodám, či formám výuky, didaktickým zásadám, vizuální, či auditivní technice atd. Lze vymezit didaktické prostředky materiální a nemateriální. (Kalhous, 2002)

Učební pomůcky jsou pak například definovány takto: *„Učební pomůcky jsou předměty zprostředkující nebo napodobující realitu, napomáhající větší názornosti nebo usnadňující výuku“* (Průcha, Walterová, Mareš, 2003, s. 8).

Dále pro srovnání uvádím, byť starší, nicméně dle mého názoru stále aktuální, platnou a výmluvnou definici pojmu *učební pomůcka*: *„Učební pomůcky jsou přirozené objekty nebo předměty napodobující skutečnost, nebo symboly, které ve vyučování a učení přispívají jako zdroje informací k vytváření, prohlubování a obohacování představ* *a umožňují vytvářet dovednosti v praktických činnostech žáků, slouží k zobecňování a osvojování zákonitostí přírodních a společenských jevů. Používají se především proto, aby se vytvořily podmínky pro intenzivnější vnímání učební látky, aby do celkového procesu bylo zapojeno co nejvíce receptorů, především zrakových a sluchových"* (Kujal,1965, s. 6).

6.2 Dělení učebních pomůcek

Učební pomůcky lze kategorizovat různými způsoby, jednotlivé výklady různých autorů se liší a nelze striktně považovat za správný pouze ten, či onen způsob. Zde uvádím, dle mého názoru, výstižné dělení D. Hapaly, užité v publikaci Dostála (2008):

První je v tomto dělení uvedena kategorie *pedagogicko-didaktických pomůcek*, které se dále dělí podle:

- funkce,
- účinnosti,
- způsobu zařazení do výuky
- a míry aktivizace žáka.

Dále jako druhá kategorie *psychologicko-fyziologických* pomůcek, členící je podle:

- smyslů, na které působí (vizuální, auditivní, audiovizuální, dotykové, eventuálně smíšené),
- stupně poznávacího procesu (pomůcky se mohou opírat o konkrétní názor, skutečnost může být upravená - symbolické pomůcky).

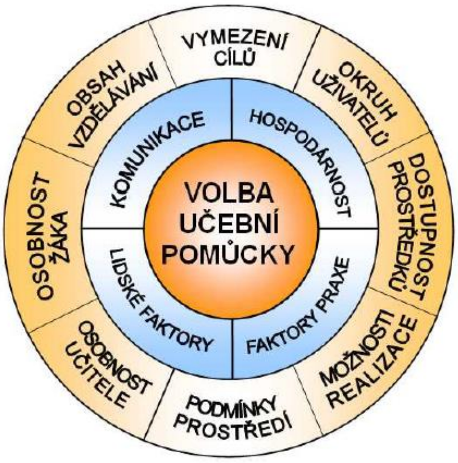
Třetí kategorie obsahuje *materiálně-praktické* pomůcky, dělící se podle:

- druhu použitého materiálu (pomůcky dřevěné, kovové, plastové, z papíru, apod.)
- obsahu
- formy (dvojrozměrné, trojrozměrné atd.)

Rambousek a kol. (2008) uvažují členění učební pomůcky do následujících kategorií: originální předměty a reálné skutečnosti, zobrazení a znázornění předmětů a skutečností, textové pomůcky, pořady a programy prezentované didaktickou technikou, speciální pomůcky.

Jednou z kategorií učebních pomůcek jsou dle Geschwindera a kol. (1987) *modely*, které mohou jednak zobrazovat předmět, či princip, dále zahrnovat modely statické a dynamické.

Faktory volby dané pomůcky a její aplikace velmi dobře znázorňuje následující obrázek:



Obr. 7 - Faktory volby učební pomůcky

6.3 Pomocné systémy, modely a schémata pro výuku přechodu ve vztahu k reprezentacím čísla - vlastní výčet pomůcek

Nyní následuje vlastní výčet pomůcek a schémat s popisy příslušných aktivit.

Stovková tabule

- ikonická reprezentace čísla

Stovkovou tabuli žáci užívají mimo jiné k pochopení

- **přechodů mezi desítkami**,
- dvojciferných čísel (čtení, zápisu, uspořádání),
- posloupnosti a uspořádání čísel v řadě a orientaci v číselné řadě,

dále k vyznačování násobků, k nácviku malé násobilky, k vyhledávání a ukazování čísel, určování větších a menších čísel atd.

Při výuce přechodu můžeme například využít pouze část této tabulky, tak jak jsem to mohla vidět na praxi na jedné ze základních škol v Hradci Králové. Vyučující zde pracovali pouze s výsečí tabulky od jedné do dvaceti, tedy s prvními dvěma řádky.

Takto upravená pomůcka pak může také zastoupit jinak běžně prázdnou mřížku bez čísel (popsána níže).

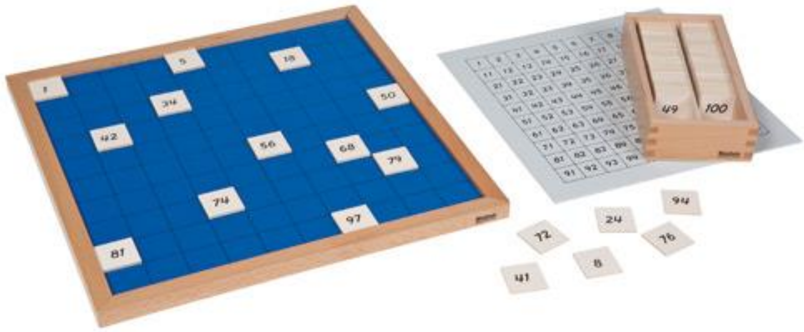
Stovková tabule má více variant, pro potřeby počítání s přechodem je, dle mého názoru, vhodná tradiční podoba s čísly od 1 do 100 bez nuly.

Stovková tabule nabízí také provedení v podobě základní desky s prázdnými políčky, ke které zvlášť náleží kartičky s čísly. Kartičky pak děti přikládají různými způsoby na příslušná pole dle zadání. Takový typ tabulky lze snadno vytvořit svépomocí, není tedy nutné spoléhat na drahá provedení ve dřevě apod. dostupná z internetových, či kamenných obchodů.

Tabule bývá v malém provedení součástí některých učebních materiálů, hojně ji také nalezneme vystavenou ve školních třídách.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Obr. 8 - Stovková tabule



Obr. 9 - Montessori stovková tabule

Počítadlo

- enaktivní reprezentace čísla

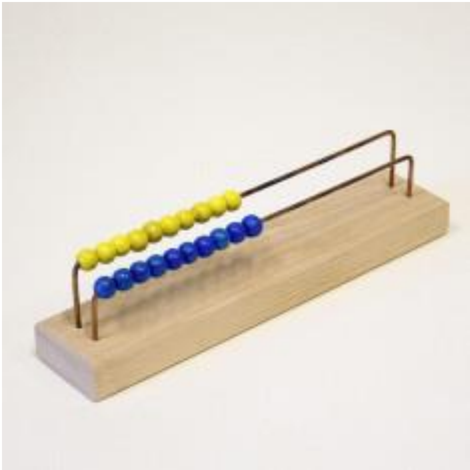
Počítadlo lze jistě označit za stěžejní pomůcku pro žáky v rámci prvostupňové matematiky.

Opět se nabízí více variant, které lze využít:

- Dvacítkové počítadlo, které, jak název napovídá, má dvacet kuliček - deset na jednom a deset na druhém řádku. Ovšem i mezi nimi lze najít rozdílná provedení, co se týká například tvaru, či barev. Na obrázcích pod tímto textem můžeme vidět, že dvacítková počitadla mohou mít barevně odlišené buď celé desítky, nebo kuličky vždy po pěti kusech. Tato jsou malá a tím pádem samozřejmě úspornější na prostor a pro práci v prvních dvou desítkách, tedy v oboru do dvaceti, stačí.

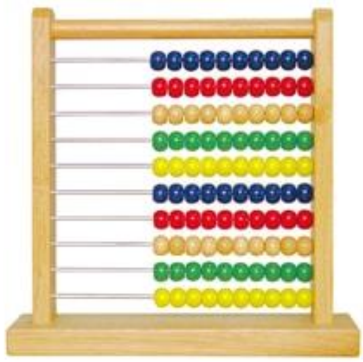
  Na druhou stranu, dle mého názoru, pro budování představy pohybu v dalších desítkách a přes ně, je, myslím, jistě vhodné užívat rovnou počitadlo stovkové, které dítě na počítání v oboru do sto s přechodem jaksi nepřímo připravuje. Dítě již samotným pohledem na více desítek pod sebou (ačkoliv zatím pracuje v prvních dvou) může odtušit stejný princip počítání v dalších desítkách a lépe pojmout, respektive zakotvit představu o větším množství prvků daného souboru (v tomto případě tedy sta).

Obr. 10 - Dvacítkové počítadlo s barevně vyznačenými kuličkami po pěti

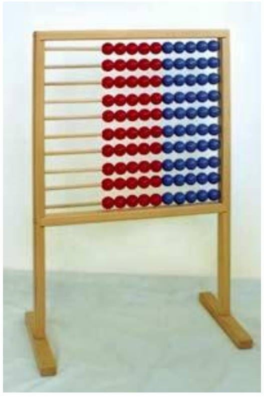


Obr. 11 - Dvacítkové počítadlo s barevně odlišenými desítkami

- Stovkové počítadlo, stejně jako dvacítkové, se nabízí ve variantě s barevně odlišenými desítkami (přičemž po prvních pěti desítkách se většinou barvy začínají opakovat) a s barevně odlišenými kuličkami po pěti.



Obr. 12 - Stovkové počítadlo s barevně odlišenými desítkami



Obr. 13 - Stovkové počítadlo s barevně odlišenými kuličkami po pěti

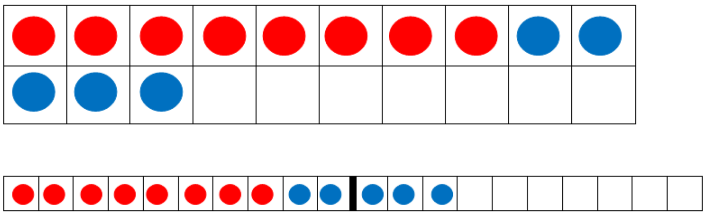
Co se týká barevného provedení, pro potřeby počítání s přechodem bych jako vyučující rozhodně preferovala variantu s barevně odlišenými celými desítkami, která je, myslím, pro tyto potřeby vhodnější. Barevně odlišené kuličky po pěti kusech považuji v tomto případě za zavádějící, jsou ale dobře využitelné např. pro zaokrouhlování, což ale není náš případ.

Dítě může na počitadle postupovat různými způsoby, respektive směry. Efektivní, a co do názornosti vhodný, mi připadá následující postup: Odsunout všechny kuličky napravo a příslušné počty si poté přesouvat zpět k levé straně počitadla. Ve výsledku tak dosáhneme (co do směru a pozice) stejného konečného postavení jako v/na mřížce (viz dále).

Mřížka

- ikonická/enaktivní reprezentace čísla

Znázornění výpočtu pomocí zaznačení do mřížky je v učebních materiálech víceméně běžnou součástí nabízených postupů řešení příkladů s přechodem. Mřížku můžeme nalézt nejčastěji ve dvou podobách. Jednak se můžeme setkat s podobou, kde se tato mřížka skládá ze dvou řádků, každý o deseti polích, nebo se jedná o variantu tvořenou z jednoho řádku s až dvaceti poli, přičemž u obou je jasně vyznačen předěl mezi první ‚desítkou‘ a dalšími poli, nebo dvěma celými desítkami právě v případě dvaceti polí. U mřížky o dvou řádcích je předěl dán ukončením řady polí a pokračováním na druhém řádku. U druhého typu bývá předěl ztučněn, či jinak graficky (barevně) odlišen. Ona první desítka je tak v konstrukci fixně obsažena. Mřížka slouží buď ke grafickému zápisu, nebo k manipulaci s předměty. U grafického zápisu mohou žáci do polí, vzhledem k zadání, zaznamenávat různé značky, čárkovat, zakreslovat různě barevné puntíky, či přímo obrázky počítaných předmětů apod. U manipulativní formy žáci pracují většinou s víčky, barevnými kolečky opět různých barev apod., které na mřížku přikládají.

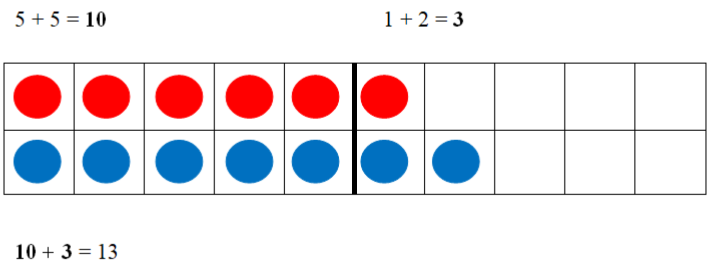


Obr. 14 - Řešení sčítání na mřížce

V případě sčítání žák na mřížce postupuje nejlépe směrem zleva doprava, shora dolů. Zde je na obrázcích řešen příklad 8 + 5. Žák tedy nejprve zaznačí 8 polí barevnými puntíky, či víčky jedné barvy (zde červená). Poté zaplní dalších 5 polí jinou barvou (zde modrá). Vidíme, že mřížka velmi dobře ilustruje jednotlivé kroky celé operace počítání a dítěti zejména usnadní, respektive za něj převezme, rozklad druhého sčítance, protože mřížka v tomto ohledu vede explicitně ke správnému řešení vzhledem k vyznačenému přechodu po první desítce. Dítěti tedy stačí dosadit, či zakreslit správný počet a rozklad se ‚sám' ukáže. Je zřetelné, kolik bylo přidáno do desítky a kolik přes desítku a jaký je výsledný součet.

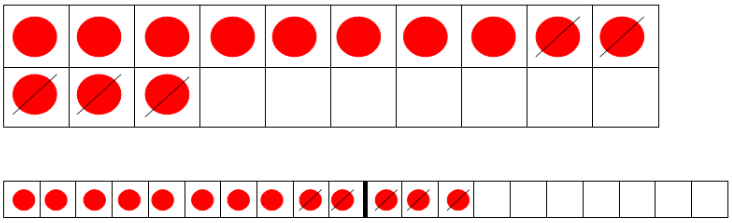
Zejména ze začátku může být tedy, dle mého názoru, mřížka velmi dobrým pomocníkem pro děti, kterým ještě není úplně zřejmá funkce rozkladu v celé operaci, či princip dočítání do první desítky. Je zde také názorně naznačen pohyb v číselné řadě.

Řešení v mřížce může probíhat i následovně, spoj 6 + 7 je znázorněn takto:



Obr. 15 - Další způsob řešení sčítání na mřížce

Pro úplnost si nyní popišme a ilustrujme také postup u odčítání. U toho dítě do mřížky zaznamená nejprve jednou barvou výchozí počet, tzn. zakreslí, nebo jinou formou dosadí příslušný počet odpovídající menšenci. Poté postupuje opačným směrem - zprava doleva, zdola nahoru, kdy vyškrtá, nebo odebere příslušný počet odpovídající menšiteli. Na mřížce tedy zbude rozdíl. Dítě opět jasně vidí, kolik odebralo ve druhé desítce a kolik v první. Lze také ihned na začátku barevně odlišit počet přesahující přes první desítku a tím poté ještě více opticky zdůraznit rozklad menšitele.



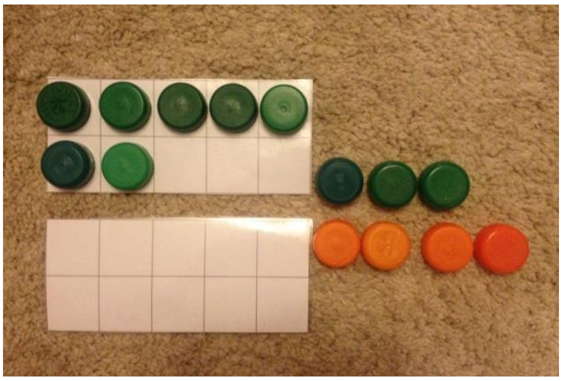
Obr. 16 - Řešení odčítání na mřížce

Někteří učitelé nahrazují mřížky také platy od vajec - 2 x plato na 10 vajec po sebou, nebo lze užít jedno plato na 60 vajec (6x5). Obojí nejlépe s barevným odlišením po dvou řadách (dvě řady po pěti důlcích). Každé plato na deset vajec zároveň představuje *Graserovo okno*[4]. Platu pro první desítku lze ponechat zavírání (víko) a při sčítání ho po dočtení do desítky vždy symbolicky zavřít.

Obr. 17 - Plata od vajec upravená pro práci v matematice

Obrázek č. 17 neilustruje situaci pro přechod přes první desítku (neodpovídá umístění žetonků), nicméně naznačuje jak plato od vajec uzpůsobit.

[4] ,,*Tento typ počítadla pochází z Německa a umožňuje zobrazení součtu, součinu i zlomku. Například při znázornění čísla 6 se nám ukazuje součet 4+2 a 3+3, ale zároveň se zobrazuje součin 2x3 a zlomek polovina ze šesti*‘‘ (Hölzlová, 2012, s. 33).



Obr. 18 - Počítání s víčky

Abaco 20

- enaktivní reprezentace čísla

Jistým spojením principů počitadla a mřížky je tzv. *Abaco*. Pomůcka slouží pro seznámení s prvními početními operacemi. Na horním řádku se nachází 10 modrých kuliček, na spodním 10 červených. Odvrácená strana kuliček je šedá, takže po otočení kuličky barevně splynou s podložkou.

Způsob použití je tedy zřejmý. Při sčítání s přechodem dítě začíná se všemi kuličkami natočenými šedou stranou k sobě (tedy barvou dolů) a postupně natočí dle zadání počet kuliček odpovídající prvnímu sčítanci. Poté k sobě začíná natáčet počet odpovídající druhému sčítanci. Postupuje směrem zleva doprava a shora dolů. Tím se stejně jako na počitadlu, či mřížce, ve výsledku objeví součet ve formě desítky v prvním řádku a příslušného počtu jednotek v řádku druhém.

U odčítání si dítě nejprve nastaví výchozí počet kuliček (menšence) barvou nahoru a zbylé nepotřebné kuličky natočí směrem barvou dolů, aby splynuly s podložkou. Opět respektuje směr zleva doprava a shora dolů. Poté *odečte* = natočí počet odpovídající menšiteli také barvou dolů, přičemž tentokrát postupuje směrem opačným = zprava doleva, zdola nahoru.

Obr. 19 - Abaco 20

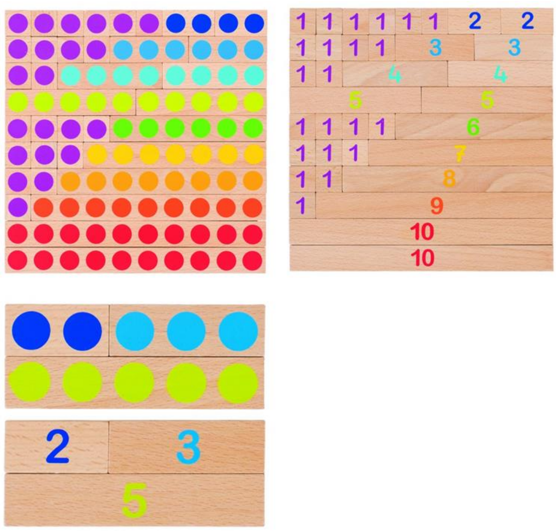
I alternativu této pomůcky si lze vyrobit svépomocí. Kuličky stačí nahradit puntíky z papíru, které jsou z jedné strany barevné a z druhé bílé, aby splývaly s podložkou (ideálně mřížka na bílém papíru). Děti pracují stejně, pouze neotáčí kuličky, ale puntíky. Dosáhneme tak obdobného výsledku.

Melicharovy početní špalíčky

- enaktivní reprezentace čísla

Pomůcka umožňuje modelovat rozličné početní situace. Zahrnuje různě dlouhé a různě barevné dřevěné špalíčky, modelujících čísla, s vyznačenými kolečky, případně i s čísly na druhé straně.

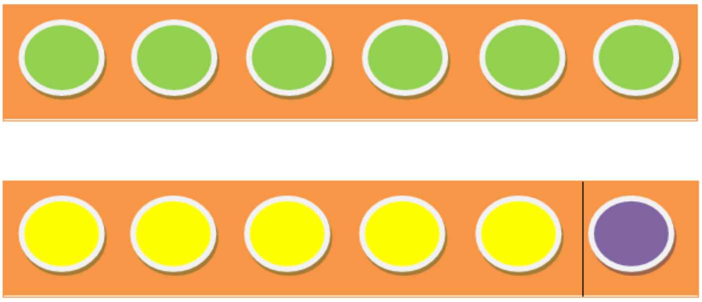
Soubory početních špalíčků se liší dle počtů jednotlivých kusů. Soubor na obrázku má 22 špalíčku po jednom kolečku, 2 špalíčky po dvou, 2 špalíčky po třech, 2 špalíčky po čtyřech, 2 špalíčky po pěti, 1 špalíček po šesti, 1 špalíček po sedmi, 1 špalíček po osmi, 1 špalíček po devíti a 2 špalíčky po deseti kolečkách.



Obr. 20 - Početní špalíčky

Využití u této pomůcky se nabízí již před samotným zavedením přechodu v podobě přípravy na rozklady:

- Vyučující předloží dva špalíčky o různém počtu koleček = o různé délce (např. o počtu šesti a pěti koleček) a úkolem dětí je doplnit ke kratšímu špalíčku další špalíček o takové délce, aby se délky srovnaly.



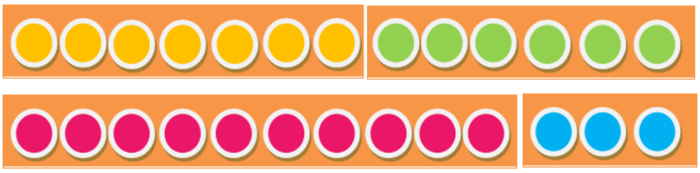
Obr. 21 - Modelování rozkladů čísel pomocí špalíčků

- Děti si zvolí špalíček o libovolné délce (např. 8) a mají za úkol vytvářet všechny možné dvojice o této délce (8).

Pomůcka dobře slouží také pro porovnávání čísel.

Při vlastním přechodu lze užít následovně:

- Při sčítání - např. spoj 7 + 6: dítě si vedle sebe položí špalíček se sedmi a šesti kolečky. Pod tyto dva si doloží špalíček s deseti kolečky a další špalíček se třemi, který představuje počet jednotek ‚přesahujících' přes desítku. Dítě tak dobře vidí rozklad druhého sčítance. Pokud si poté dítě příklad vyřeší znovu, pouze na začátku přiloží sčítance v opačném pořadí, než jsou v zadání a jinak postupuje dále stejně, přesvědčí se o komutativnosti sčítání = možnosti libovolné záměny pořadí sčítanců.



Obr. 22 - Modelování sčítání pomocí špalíčků

- Lze také špalíčky vyskládat způsobem, kdy druhého sčítance sestavíme ze dvou špalíčků představujících zároveň potřebný rozklad.

Obr. 23 - Další způsob modelování sčítání

- U odčítání je postup opačný. Vycházejme ze souměrného spoje ke spoji na sčítání, který jsme ilustrovali výše: tedy 13 – 6. Dítě si nejprve vymodeluje menšence (13), tzn. jeden špalíček s deseti a jeden se třemi kolečky vedle sebe. Poté přiloží pod, nebo nad ně menšitele (6) a jasně vidí rozdíl (7), který může a nemusí přiložit ve formě dalšího špalíčku o sedmi kolečkách.

Špalíčky také spojují kardinální a ordinální pohled na číslo, stejně tak aritmetický přístup k přirozeným číslům s geometrickým přístupem.

Cuisenairovy proužky, popřípadě hranolky

- ikonická reprezentace čísla

,,Cuisenairovy proužky pocházejí z Belgie a spojují kardinální pohled na přirozené číslo (z kolika čtverců se skládá proužek) s pohledem ordinálním a geometrickým (propedeutika měření délek).‘‘(Kuřina, 2013, str. 7)

Každé číslo (proužek, či hranolek) je charakterizováno určitou barvou, stejně jako u Melicharových početních špalíčků. V podstatě lze říci, že špalíčky jsou alternativou těchto proužků a práce s nimi je obdobná. Učitelé si mohou různé varianty podob Cuisenairových proužků vyhledat na internetu pod anglickým názvem – *Cuisenaire rods*.

Prostředí Krokování

- enaktivní reprezentace čísla

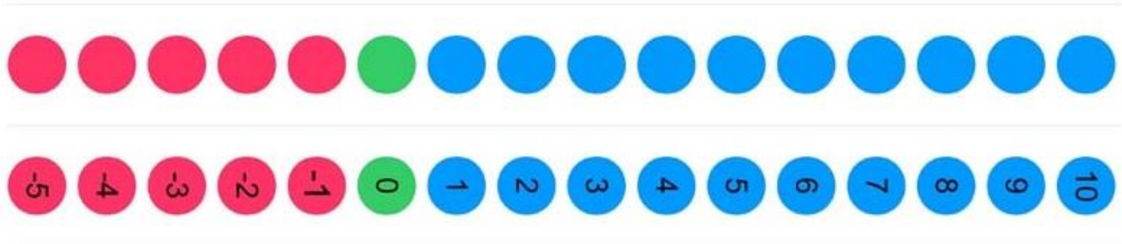
Krokování je didaktické prostředí známé z *Hejného matematiky*. Tento koncept vyučování matematice se snaží ve vzdělávání využít a vycházet z praktických zkušeností žáka z běžného života. Proto předkládá žákovi právě tzv. *prostředí*. Ta obsahují série na sebe navazujících úloh se stejným námětem a různými matematickými jevy, které se prolínají. Úlohy vybízejí k experimentování a k objevování. Náměty jednotlivých prostředí jsou pro žáky většinou lákavé, a to zejména svou hravou formou, díky které mají děti obvykle pocit, že si spíše hrají, než že vážně pracují. Krom tzv. sémantických prostředí, která vycházejí ze zkušenosti žáka, se zároveň zavádí i strukturální prostředí, díky nimž se později u žáků vytvoří čistě matematická znalost v té formě, jak ji známe z tradičního vyučování. Jak sémantická, tak strukturální prostředí se řadí pod prostředí aritmetická. Hejného matematika dále rozlišuje ještě prostředí geometrická, a to dvou- a třírozměrná. (Málková, 2014)

Pro prostředí *Krokování* je základní pomůckou krokovací pás, který může mít různé podoby, např. značky ve tvaru koleček, čtverců apod. položených v řadě za sebou a vzájemně od sebe vzdálených na délku dětského kroku. Pohyb je rytmický v synchronu s počítáním, jde tedy o soulad pohybu a slova. Stěžejní aktivitou je vykonání jistého počtu kroků do rytmu počítání. Počet (zde počet kroků) je přitom reprezentován pomíjivým způsobem – když kroky a ústní počítání odezní, číslo zaniká, na rozdíl například od obrázku s pěti autíčky, kdy je počet statický, neměnný a dítě se k němu může kdykoliv vrátit. Čísla zde vyjadřují průběh změny. Krokovací pás může být vylepen, nebo jen položen na podlaze ve třídě. Na krokovacím páse je vždy startovní pole. Pomocí krokování si děti mohou modelovat klasické příklady, případně ověřit správnost svého řešení. Získávají praktické zkušenosti pro práci se znaménky. Krokování taktéž přispívá k propedeutice číselné osy. Krokovací pás si lze bez problémů vyrobit svépomocí. Pro potřeby výuky přechodu je nutné mít pás s oborem čísel min. do 20. Jak může probíhat krokování přímo při modelaci příkladů s přechodem přes základ je zaznamenáno v příloze práce, která popisuje průběh experimentálního šetření s žáky. Výsledky krokování si mohou děti zaznamenat pomocí šipek směřujících vpravo pro kroky dopředu a vlevo pro kroky vzad (couvání). (Málková, 2014), (Slezáková, Šubrtová, 2015)

Ačkoliv je prostředí *Krokování* součástí komplexního celku Hejného matematiky, často se na základních školách lze setkat s jeho implementací do běžné výuky, mimo Hejného systém. Je, myslím, velmi pozitivní, že mají učitelé snahu zařazovat prvky tohoto konceptu do běžné výuky, nicméně je jistě nutné si předem pečlivě nastudovat dostupné didaktické a metodické materiály (příručky atp.) a neopomenout přípravnou fázi pro tento typ práce, například ve formě nácviku rytmického pohybu, přísunných kroků, způsobu couvání na páse, synchronizace pohybu a slova, povelů (např. signálu pro začátek krokování), organizace atp.

I Krokovací pás má více variant, například s barevně odlišenými čísly sudými a lichými, či všemi stejně barevnými, dále varianta bez čísel, varianta s částí pro záporná čísla, nebo bez ní a jejich různé kombinace (viz obrázky níže).

Obr. 24 - Krokovací pás



Obr. 25 - Krokovací pás se zápornými čísly

Číselná osa

- ikonická reprezentace čísla

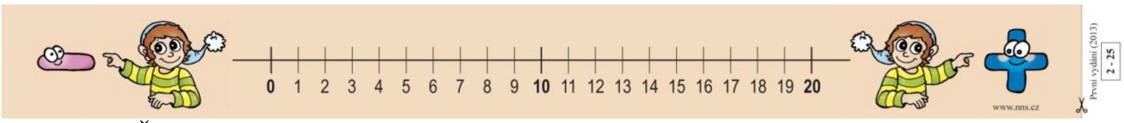
Číselná osa je přímka s určenými body pro hodnoty reálných čísel. Je také základním strukturálním generickým modelem lineárního adresování. Lineárního, protože modeluje procesy, které ubíhají stále vpřed, bez návratu. Opakem je adresování cyklické, modelující procesy cyklicky se opakující (např. ciferník hodin). V reálném světě můžeme najít modely číselné osy ve formě stupnic. Např. metr, teploměr apod. (Hejný, Stehlíková, 1999)

„Činnosti s číselnou osou pomáhají žákům zejména:

- *pochopit přirozené uspořádání čísel*
- *řadit čísla vzestupně i sestupně*
- *porovnávat čísla, určovat nejmenší a největší z více čísel*

- *chápat zaokrouhlování čísel*
- *přiřazovat čísla nejblíže menší/větší*
- *chápat čísla zakončená devítkami jako čísla předcházející celým desítkám, stovkám, tisícům‘‘* (Rosecká, 2015).

Princip práce na číselné ose je obecně velmi dobře znám. Proto není nutné se jím podrobněji zabývat. Jak již bylo uvedeno v jedné z předchozích částí práce, výstupy s číselnou osou jsou zakotveny i v rámcovém vzdělávacím programu a je tedy v naprosté většině běžnou součástí učebních materiálů pro výuku matematiky od samého prvopočátku. Na osu lze zaznamenávat výpočty čistě grafickou formou, nebo lze zvolit i jiný typ práce - např.: znázornění výpočtu pomocí přikládání předmětů na osu (korálků) atp.



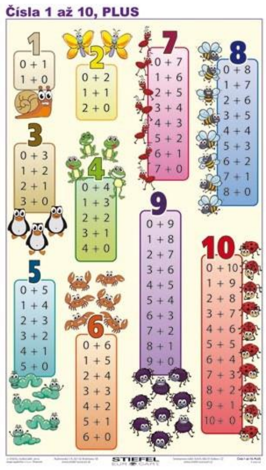
Obr. 26 - Číselná osa

Hejný a kol. (2006) uvádějí, že číselná osa bývá často příčinou chybných představ dětí, které pramení z dvojího chápání číslic připsaných k ose. Například číslice 3 může znamenat jméno rysky, ale též veličinu (tedy nikoli adresu), a to délku úsečky, která začíná u nuly a končí u právě trojky. K této chybě pak dochází zejména tam, kde se obě funkce čísla (adresa i veličina) žákům odhalují téměř současně.

Systém všech možných rozkladů čísel od 1 do 10

- symbolická reprezentace čísla

Systém všech možných rozkladů čísel od 1 do 10 lze užít již při jejich trénování před samotným zavedením přechodu. Dále může mít pro žáka zejména funkci kontrolní. Lze také využít možnosti označování/výběru vhodných rozkladů pro dané spoje před samotným výpočtem. Především ze začátku výuky přechodu může, dle mého názoru, vést k objasnění, že ačkoliv lze číslo rozložit různými způsoby, pro dané spoje vždy lze užít jen určité z nich.



Obr. 27 - Systém rozkladů čísel od 1 do 10

Počítání na prstech

- enaktivní reprezentace čísla

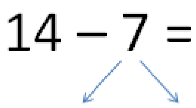
Počítání na prstech je pro děti jedním z nejpřirozenějších způsobů, jak modelovat početní operace, zejména v oboru do deseti. Patrně všechny děti bez rozdílu si jimi v období předškolního a částečně mladšího školního věku pomáhají. Ze strany učitelů však bývá často znát snaha tento typ názoru spíše postupně omezovat. Je jistě důležité, aby se dítě od prstů, se zvyšující se náročností učiva, krok za krokem odpoutalo, nicméně pokud je dítě užívá správně, je to důkaz toho, že princip operace chápe, což je kladný faktor. V tomto ohledu se samozřejmě projeví individualita dětí. Každé bude prsty určitě potřebovat jinak dlouhou dobu.

Děti mohou kromě vlastních prstů užívat také vyrobené ruce z papíru, nebo jiného materiálu (viz obrázek č. 28 dřevěných rukou s ohebnými prsty).

Obr. 28 - Dřevěné ruce s ohebnými prsty

Schéma Vidličky

Vidličky jako takové, a jejich problematika, byly již popsány v jedné z předchozích částí práce. Slouží ke znázornění restrukturace příkladu. Co se týká způsobů grafického znázornění řešení spojů s přechodem, lze je označit za tradiční a jednoznačně převládající způsob, hojně zastoupený téměř ve všech učebnicích. Vizualizují rozklad sčítance, nebo menšitele. Na levou stranu dítě zapisuje tu část rozkladu (první), kterou užije k dopočítání do desítky. Na pravou stranu zbytek z rozkladu. Často je také nabízena možnost, aby si dítě zakroužkovalo, nebo jinak zvýraznilo právě levou část schématu, tedy sčítance, nebo menšence, spolu s prvním rozkladovým číslem, čímž si pomyslně označí tu triádu, v rámci níž se dopracuje na desítku.



Obr. 29 - Schéma *vidličky*

Peněžní model

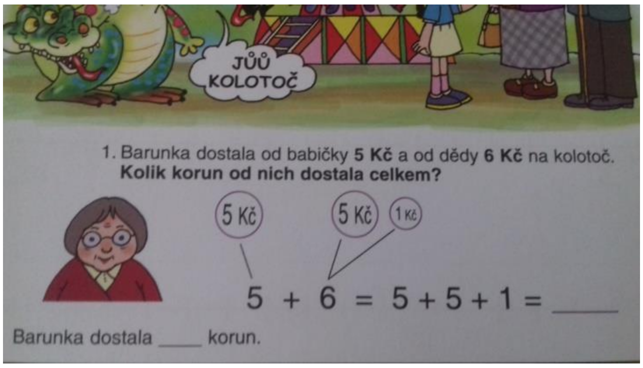
- symbolická/enaktivní reprezentace čísla

Peněžní model ve formě papírových peněz bývá součástí některých učebnic jako příloha. Práce s nimi by měla být jistě samozřejmostí, i vzhledem k současné snaze o rozvoj finanční gramotnosti u dětí.[5] Ostatně i v rámcovém vzdělávacím programu nalezneme přímo požadavek na výstup - *Žák uplatňuje matematické znalosti při manipulaci s drobnými mincemi.*

Lze na nich modelovat různé početní operace, nevyjímaje ty s přechodem přes desítku. Pro žáky jsou jistě lákavým zpestřením výuky. Je nicméně nutné, aby děti dobře chápaly jejich hodnoty. Vhodné jsou takové penízky, které mají jasně a zřetelně

[5] *,,Finanční gramotnost je soubor znalostí, dovedností a hodnotových postojů občana nezbytných k tomu, aby finančně zabezpečil sebe a svou rodinu v současné společnosti a aktivně vystupoval na trhu finančních produktů a služeb''* (Hesová, Zelendová, 2011, s. 6).

viditelné číslice, bez zbytečných rušivých prvků navíc. Mohou dítěti, mimo jiné, také pomoci pochopit pravidla a pozice v desítkové soustavě.



Obr. 30 - Námět na práci s modelem papírových peněz v rámci přechodu

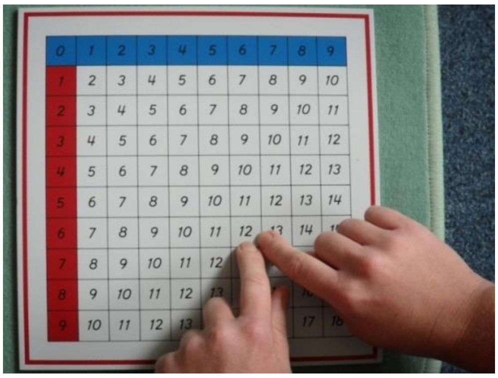
(obrázek převzat z: Čížková, 2007, s. 11)

Obr. 31 - Model papírových peněz

Sčítací (prstová) tabulka

- symbolická reprezentace čísla

Tabulka může sloužit ke kontrole výpočtů, nebo k doplňování jejich výsledků. Děti by si měly všimnout, že čísla v ní jsou rozmístěna souměrně. Tabulka vede také k pochopení komutativnosti sčítání. Existuje i odčítací varianta tabulky.

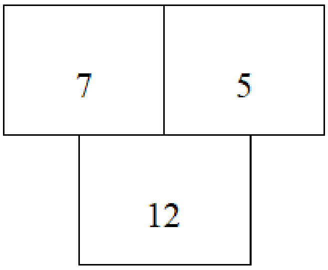


Obr. 32 - Sčítací prstová tabulka

Početní pyramidy

- symbolická reprezentace čísla

Aditivní trojúhelník, známý spíše pod pojmem *početní pyramida,* je dán algoritmem – dolní číslo je součtem dvou horních, přičemž většinou se setkáme s pyramidami, které mají více než tři čísla (běžně 6, 10, nebo až 15 čísel).

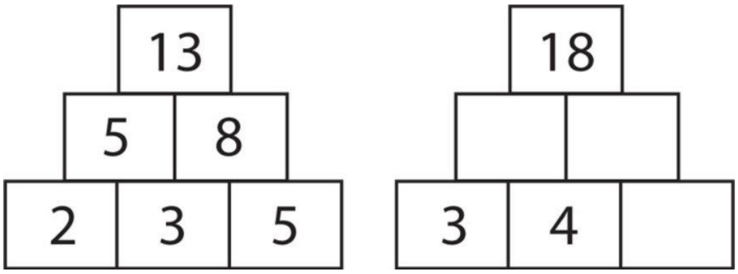


Obr. 33 - Početní pyramida o třech polích

Pokud jedno ze tří čísel zakryjeme, vznikne úloha. Nejprve řeší žáci úlohy s chybějícím dolním číslem.

K budování představy aditivní trojice (triády) je třeba, aby děti v trojúhelníku neviděly pouze výzvu k operaci na sčítání, ale viděly v něm i schéma, jehož pochopení jim umožní řešit právě ty úlohy na dopočítávání, kdy chybí ‚horní' čísla. (Hejný, Jirotková, Slezáková, 2001)

Dodejme, že učitelé pracují také s typem pyramid, kde je algoritmus přesně opačný – horní číslo je součtem dvou dolních. Osobně tento typ pokládám za dobře korelující s tradičním schématem rozkladu, kdy právě dvě rozkladová čísla zapisujeme na úroveň pod číslo, které rozkládáme.



Obr. 34 - Početní pyramidy se šesti poli

Pyramidy považuji právě při počítání přes desítku za dobrého pomocníka. Dítě může ve víceúrovňové pyramidě (nejméně šest polí) postupovat jakoby nejprve od rozkladu jednoho ze sčítanců k samotnému *hlavnímu* spoji s přechodem. Postupuje v posloupnosti tak, že při výpočtu hlavního spoje se o rozklad již jen zrakově opře (má ho totiž již hotový) a do svého výpočtu ho zahrne. Restrukturace se tak eliminuje právě o krok rozkladu, který je nenásilnou formou, v podstatě aniž by to dítě vědělo, vykonán před samotným zahájením výpočtu s přechodem přes desítku. Pyramidu je samozřejmě nutné sestavit tak, aby rozklady vyhovovaly potřebám výpočtů.

Perlový materiál a Hadí hra – pomůcky ze systému Montessori

Některé informace pro tuto kapitolu byly získány osobním rozhovorem s paní magistrou Marcelou Žákovou, současnou lektorkou Montessori pedagogiky pro Společnost Montessori v Čechách i v zahraničí (od 2004), členkou výboru Společnosti Montessori ČRa NOCME – Montessori Europe, v současné době působící jako vyučující na ZŠ Polabiny 1, Pardubice. Rozhovor byl veden v Pardubicích dne 30. ledna 2018.

Specifickou kategorií v rámci didakticko-matematických systémů a modelů jsou příslušné Montessori pomůcky. Systém vzdělávání typu Montessori řeší zejména kdy a v jaké posloupnosti prezentovat aktivity na různých pomůckách, aby tyto nové zkušenosti dítěte odpovídaly, ve vztahu k jeho vývoji, tzv. senzitivním obdobím a měnícím se potřebám. Proto jsou v rámci Montessori pedagogiky pomůcky přiřazeny jednotlivým věkovým kategoriím. Za senzitivní období označujeme specifickou a dočasnou etapu zvýšené vnímavosti, kdy jsou děti schopné se učit určitým dovednostem snadno, lehce a bez úsilí. Jsou motivované vnitřně, a pokud činnost uspokojuje jejich citlivost, projevuje se u nich nenucená koncentrace. (Montessori, 2012)

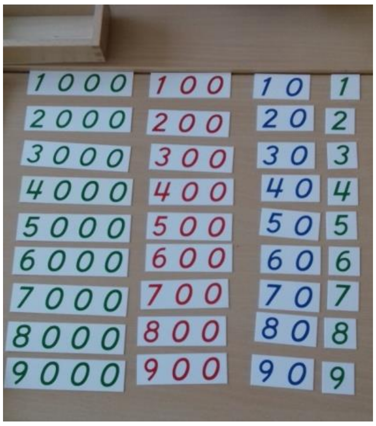
Ačkoliv jsou tedy tyto vzájemně propojené pomůcky vázány na vývojová období a propracovaný, komplexní systém tohoto typu vzdělávání, do jisté míry je možné je v užším, okleštěném pojetí užít i později, izolovaně v běžné výuce. Nicméně v rámci tradičních škol se s nimi v podstatě nesetkáme. Jejich užívání je spíše záležitostí škol alternativních, zejména vzhledem ke zmíněné přímé vazbě na tento konkrétní systém, dále metodické a odborné připravenosti učitelů s absolvovaným kurzem nutným pro výuku v Montessori školách, a svou roli zde jistě hraje také finanční náročnost zakoupení těchto pomůcek. Jejich popis v této práci tedy může spíše sloužit jako inspirace kreativním učitelům k vytvoření své vlastní varianty dalšího učebního materiálu, či nastínění dalších aspektů, které přechod obnáší. Nechme nyní stranou hlubší popis Montessori pedagogiky, či pomůcek jako takových (jejich typických znaků apod.) a zaměřme se konkrétně na pomůcky, na kterých se, mimo jiné, dítě učí přechodu přes desítku.

Pro potřeby výuky přechodu se z této kategorie nabízí zejména tzv. *Perlový materiál,* či *Hadí hra*, které zároveň velmi názorně přispívají k pochopení desítkové soustavy. Paní Žáková v rozhovoru uvedla, že některé děti pochopí plně princip desítkové soustavy až zpětně při práci v jiných soustavách.

Perlový materiál

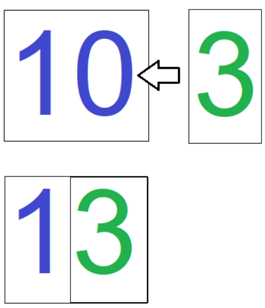
Typická zlatá barva pomůcky byla vybrána pro její jemné a líbivé vzezření. Manipulace s kuličkami je pro dítě snadná, velmi dobře rozvíjí jemnou motoriku a díky jasné prezentaci různých početních konceptů stimulují kuličky zájem dítěte o číslo. Materiál prezentuje jednotky - formou jednotlivých kuliček, desítky - formou tyčinek s desíti kuličkami, stovky – tzv. zlaté stovkové čtverce skládající se z deseti tyčinek, tisíce – zlaté tisícové krychle skládající se z deseti čtverců. Obsahuje podložku pro počítání s vyznačenými sloupci pro desítkovou soustavu a další příslušenství, jako karty s čísly v různých barvách pro jednotlivé řády (viz stejné barvy pro jednotlivé řády na podložce). Princip práce na pomůcce vychází, mimo jiné, z předpokladu, že dítě vidí a chápe, že ve skupině čísel dané barvy, tedy skupině s počty jednotek, dále desítek, stovek a tisíců, není nikdy větší počet než devět (viz obrázek č. 34). (Hainstock, 1999)

Obr. 35 - Celá sada Montessori perlového materiálu



Obr. 36 - Montessori karty s čísly (foto Sylva Stúpalová, 2018)

Všimněme si možnosti přiložit například na kartičku s číslem 10 další kartičku s libovolným počtem jednotek přes nulu (na obrázku jsme zvolili 3 jednotky). Dítě vidí nejprve zápis desítky jako takový. Přeložením nuly určitým počtem jednotek si lze dobře namodelovat princip toho, proč a jak vlastně píši dvojciferné číslo daným způsobem ve vztahu k řádům. Efektivitu toho názoru spatřuji zejména v tom, že dítěti ona nula, respektive ‚celá' desítka, přiložením jednotek v podstatě nezmizí v pravém slova smyslu, protože pomyslně pod kartičkou s jednotkami stále je.



Obr. 37 - Překládání kartiček s čísly

Obr. 38 - Montessori podložka

Ilustrujme nyní řešení spoje na sčítání a odčítání s přechodem první desítky na této pomůcce.

- Sčítání: například spoj 5 + 7

  Postup: dítě naskládá do sloupce pro jednotky příslušné počty odpovídající sčítancům. V rámci tzv. *bankovní hry*, která funguje na principu směny, mění deset jednotek (samostatných kuliček) za jednu tyčinku s deseti kuličkami. Nicméně ta ale musí být již umístěna do příslušného řádu – tedy vedle, do sloupce pro desítky (tyčinky). Dítěti tak v řádu jednotek zbudou dvě kuličky a nakonec vidí, že celkový výsledek je 12.

Obr. 39 - Řešení sčítání s přechodem na perlovém materiálu (foto Sylva Stúpalová, 2018)

- U odčítání si dítě nastaví desítku a daný počet jednotek dle menšence opět do příslušných sloupců. Pro potřeby odčítání rozdělí desítku (tyčinku) na jednotky = vymění tyčinku za deset jednotek, které umístí k již nastaveným jednotkám z předchozího kroku. Odebere počet odpovídající menšiteli a vidí rozdíl.

Hadí hra

- enaktivní reprezentace čísla

Tzv. *Hadí hra* existuje ve dvou variantách – na sčítání a na odčítání. Sčítací sada se skládá z

- různě dlouhých barevných tyčinek s kuličkami o různém počtu (1-9), všechny tyčinky o stejném počtu kuliček mají vždy stejnou barvu;
- tyčinek po deseti zlatých kuličkách;
- tzv. pomocníčků (černobílé tyčinky);
- zarážky a dalšího příslušenství.

Obr. 40 - Hadí hra (sada na sčítání)

Děti si mohou libovolně, nebo na základě zadání, sestavit *hada* z barevných tyčinek o různých počtech kuliček. Efektivní je dlouhý had (hra vede i k pochopení přechodů přes další desítky), ačkoliv pro potřeby přechodu přes první desítku lze modelovat i hada krátkého (pouze o dvou sčítancích).

Uveďme si příklad postupu práce pro krátkého hada na konkrétním příkladu *8 + 6:*

1. Dítě si vyskládá vedle sebe tyčinku s osmi a šesti kuličkami.
2. Poté si napočítá prvních deset kuliček nezávisle na barvě a oddělí je zarážkou.
3. K těmto deseti kuličkám přiloží zlatou tyčinku (o deseti kuličkách).
4. Vidí, že zlatá tyčinka zasahuje až k prvním dvěma kuličkám z tyčinky o šesti kuličkách a že za zarážkou zbývají čtyři.
5. K těmto čtyřem přiloží barevnou tyčinku o čtyřech kuličkách.

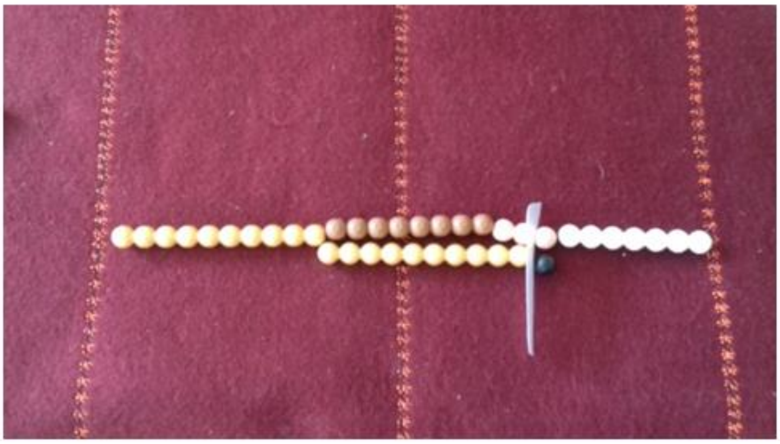
6. Dítě vidí rozklad a konečný výsledek ve vztahu k počtu desítek a jednotek. Je pro něj jasně zřetelné, že výsledek sestává z jedné desítky a čtyř jednotek. Také hranice *deset* je velmi dobře patrná. V tomto případě nebylo nutné užít *pomocníčků*.

Obr. 41 - Modelace sčítání, krátký had (foto Sylva Stúpalová, 2018)

Zde je patrná značná analogie s Melicharovými početními špalíčky a Cuisenairovými proužky.

Postup práce pro dlouhého hada na příkladu (řetězu) 9 + 1 + 8 + 3 + 7 (přechod přes druhou desítku):

1. Dítě si vyskládá příslušně dlouhé barevné tyčinky dle zadání.
2. Napočítá prvních deset kuliček (modrá o devíti plus červená o jedné) a založí zarážku.
3. Nahradí je zlatou tyčinkou, barevné (modrou a červenou dá pryč), odloží zarážku.
4. Počítá znovu dál do desíti (začíná za zlatou tyčinkou). Tentokrát desítka zasahuje na první dvě kuličky z tyčinky o počtu tři (jemně růžová).
5. Přiloží zarážku.
6. Vymění hnědou a růžovou tyčinku za jednu zlatou a jednu černou (o počtu jedné kuličky) z kategorie pomocníčků. Atd.
7. Postupně tak vznikne had pouze ze zlatých a černobílých tyčinek. *Pomocníčci* mají černé a bílé kuličky kvůli snadnému odezírání množství.



Obr. 42 - Modelace sčítání, dlouhý had (foto Sylva Stúpalová, 2018)

Princip odčítací hadí hry je poněkud složitější, demonstraci postupu práce na této pomůcce, zaznamenaný přímo na videu, lze dohledat pod anglickým názvem – *Negative snake game* na internetu. Stejně tak, jako sčítací variantu hry - *Positive snake game*.

Obr. 43 - Hadí hra (sada na odčítání)

Sčítací výuková tabulka

- ikonická reprezentace čísla

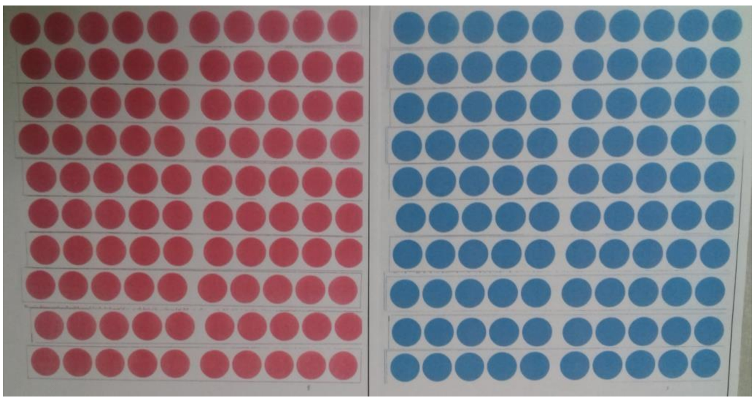
Z kategorie Montessori pomůcek mě dále zaujala sčítací výuková tabulka, kterou si lze také vyrobit svépomocí. Princip práce na ní je zřejmý z obrázku.

Obr. 44 - Sčítací výuková tabulka

Početní proužky s kolečky

- ikonická reprezentace čísla

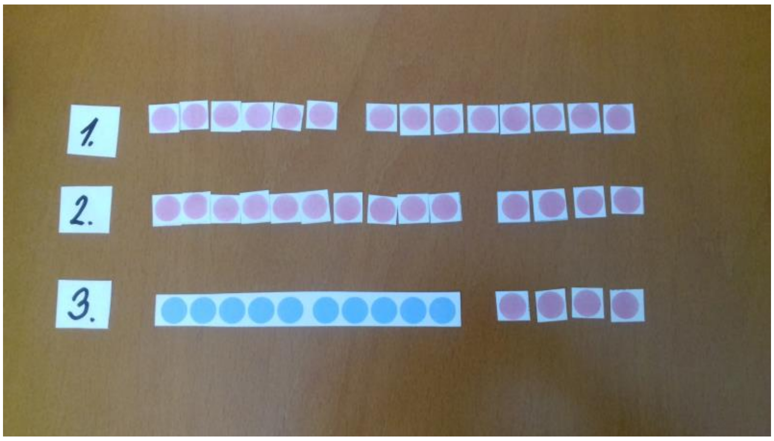
Jinou variantu směňování můžeme realizovat pomocí proužků s barevnými kolečky.



Obr. 45 - Proužky s kolečky (foto Sylva Stúpalová)

Proužky s modrými kolečky po deseti zůstávají v celku, co proužek, to jedna desítka. Červené proužky se nastříhají na jednotlivá kolečka, které představují jednotky.

Na následujícím obrázku je ukázán postup práce při sčítání s přechodem za pomocí těchto proužků a koleček (pro ilustraci byl vybrán spoj 6 + 8). Krok číslo 3 představuje směnu deseti červených jednotek za jednu modrou desítku.

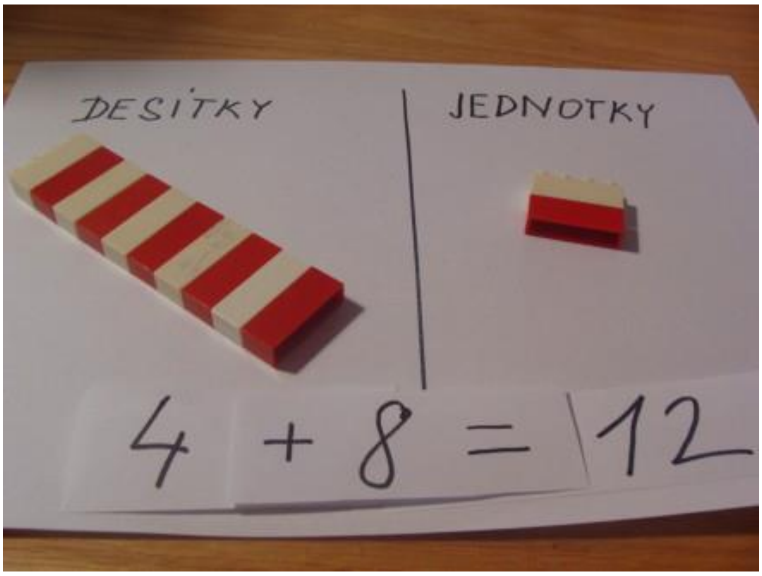


Obr. 46 - Postup počítání s proužky a kolečky (foto Sylva Stúpalová, 2018)

Lego kostky

- enaktivní reprezentace čísla

Následující obrázek ilustruje netradiční užití lego kostek pro vlastní počítání s přechodem. Tento námět mě velmi zaujal. Pro děti musí být práce s lego kostkami jistě motivační a nabízí poměrně unikátní možnost spojovat jednotky přímo do celých desítek bez nutnosti směny jednotlivých dílků (jednotek) za celé desítky ve formě proužků, tyčinek apod., jak bylo naznačeno na některých předchozích materiálech. Tvorba příkladu tak zde nabývá nového rozměru.

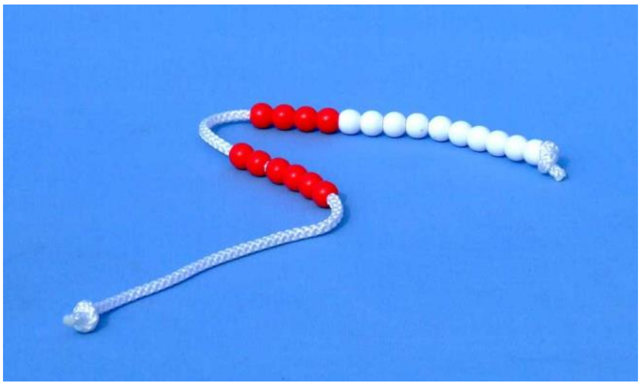


Obr. 47 - Užití lego kostek při počítání s přechodem

Navlékání korálků na špejli, či tkaničku

- enaktivní reprezentace čísla

Další z možností, jak modelovat početní operace, je navlékání korálků na špejli, či tkaničku. Při sčítání lze pro každého sčítance zvolit jinou barvu korálků, nebo postupovat tak, že pro prvního sčítance a doplnění do desítky zvolím jednu barvu a pro tu část z rozkladu, která je tzv. přes desítku, jinou. Pro odčítání si děti nejprve navléknou počet korálků odpovídající menšenci. Opět se nabízí více variant volby barev. Lze navléknout všechny korálky jedné barvy, nebo pro první desítku zvolit jednu barvu a pro korálky ve druhé desítce jinou. Poté děti korálky odsouvají (svlékají) pryč. Pokud na tkaničku navlečeme dvacet korálků (nejlépe prvních deset jednou a druhých deset jinou barvou) a na obou koncích ji zafixujeme uzlem, tak, jak to můžeme vidět na nadcházejícím obrázku, získáme v podstatě počitadlo, které bude mít však dvě desítky vedle sebe, nikoliv pod sebou.



Obr. 48 - Tkanička s korálky

6.4 Náměty ze zahraniční didaktiky

Nyní bych ráda nastínila některé přístupy a náměty k přechodu přes desítku ze zahraniční didaktiky. Pro tu samozřejmě platí, že v ní lze nalézt více odlišných přístupů, metod, pomůcek apod., nicméně zde budou prezentovány pouze ty, které mě nějakým způsobem zaujaly, a které doplňují potřeby této práce.

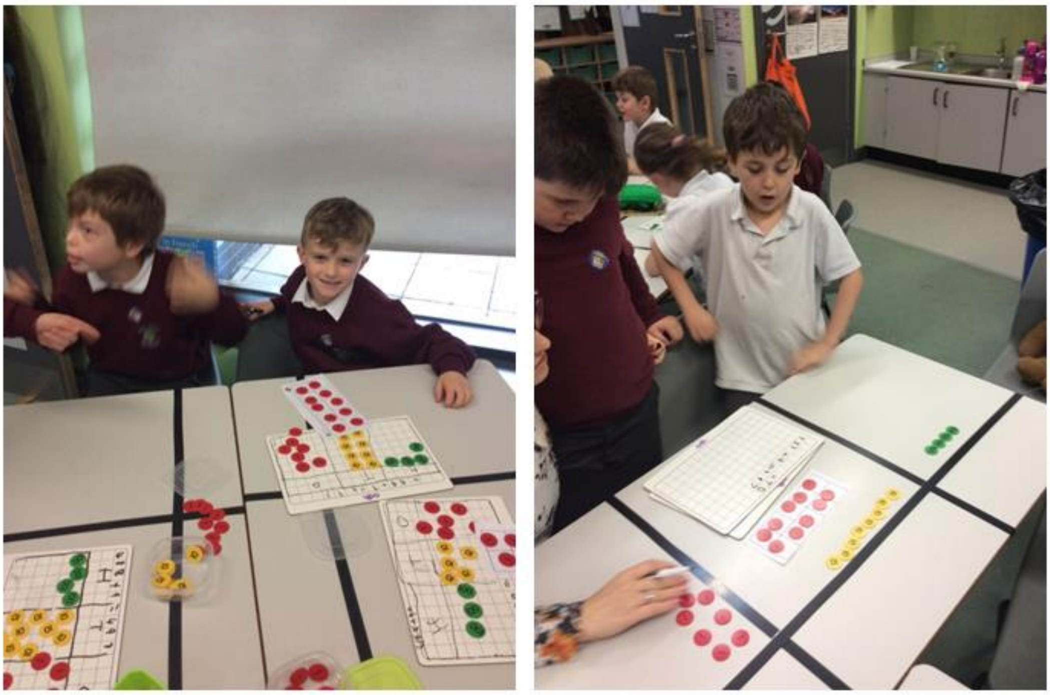
Anglie

Níže na obrázku č. 49 můžeme vidět, jakým způsobem se děti učily překračovat hranici desítky na jedné z britských základních škol. Děti evidentně pracují na podobné podložce, jakou můžeme nalézt u perlového materiálu. Místo perel ale mají kolečka - červené jednotky, žluté desítky a zelené stovky. Principielně se zřejmě bude jednat o obdobný typ práce a modelování početních situací, právě jako na perlovém Montessori materiálu, ve formě směňování (např. deseti jednotek za jednu desítku a její přenesení do příslušného řádu atd.), jak již bylo popsáno. Obdobu perlového materiálu, pro účely přechodu, si tedy lze, jak je vidět, také vyrobit.

Na dalším obrázku (č. 50) z anglické didaktiky můžeme vidět reprezentaci čísel v oboru do dvaceti pomocí barevných puntíků ve dvou mřížkách pod sebou.

Na obrázku č. 51 se nachází námět, jak s dětmi pomocí mřížky trénovat úlohy na sčítání v oboru do deseti (rozklady desítky) - příprava na přechod. Kartičky se nastříhají a děti nejprve přiřazují zadání úlohy ke správnému znázornění, poté řeší.

Předpokládám, že pokud dětem představíme mřížku právě již při počtech v oboru do deseti, lépe se pak na ni (či plata od vajec) adaptují při řešení úloh s přechodem.

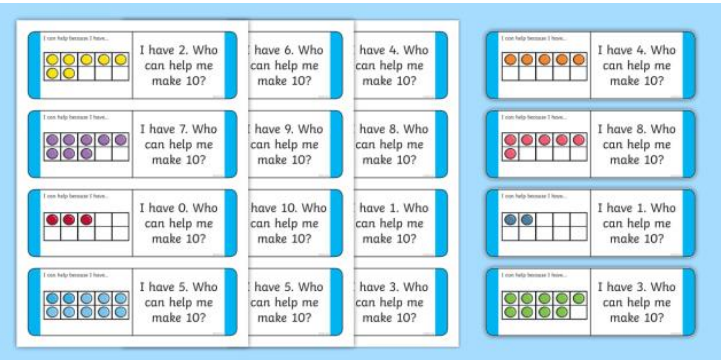


Obr. 49 - Práce dětí na jedné z britských škol

Zdroj: Crossing the boundary of ten (2017) [online obrázek]. *Wombwell Pakr Street Primary School* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.wombwellparkstreet.co.uk/team-gg-blog1/crossing-the-boundary-of-ten

Obr. 50 - Reprezentace čísel pomocí puntíků

Zdroj: Superhero -Themed Double Ten - Frames [online obrázek]. *Twinkl* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.twinkl.co.uk/resource/t-n-5042-superhero-themed-double-tens-frames



Obr. 51 - Úlohy na sčítání v oboru do deseti v rámci mřížky

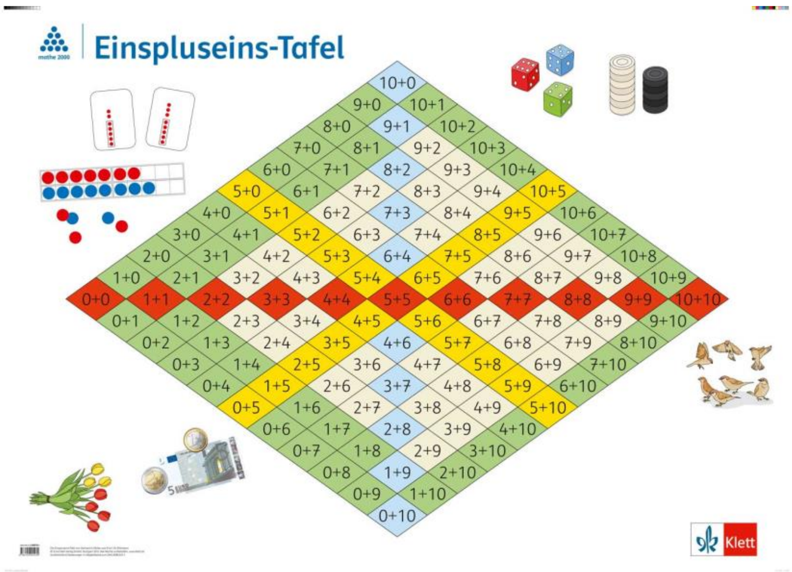
Zdroj: Partitioning Ten With Ten - Frames Loop Cards [online obrázek]. *Twinkl* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.twinkl.co.uk/resource/cfe-n-193-partitioning-ten-with-ten-frames-loop-cards

Německo

- inspirace z programu *Mathe 2000+* autorů Müllera a Wittmanna:

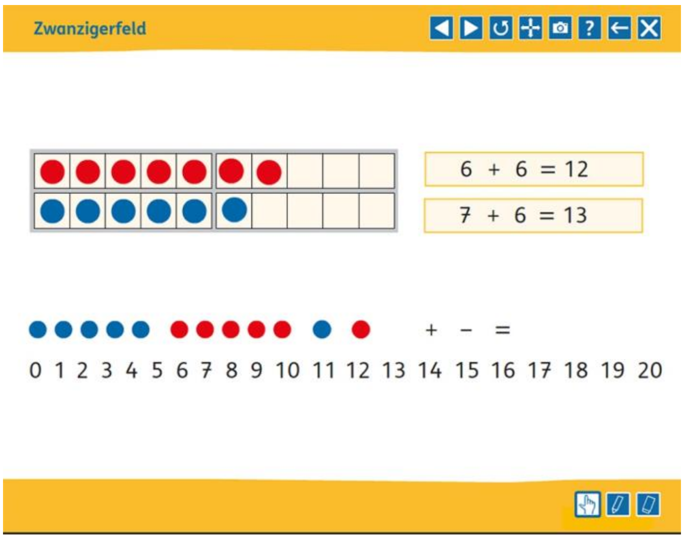
Německá didaktika nabízí zajímavé řešení systematické reprezentace a zobrazení všech 121 úloh od 0 + 0 do 10 + 10, potažmo rozkladů čísel a jejich vzájemných vztahů.

Dále mě z německých učebních materiálů zaujalo zobrazení metody souměrných spojů na mřížce. Na dalším obrázku se nachází inspirace, rovněž z německého prostředí, pro modelování přechodů v dalších desítkách. (Müller, Wittmann, 2017)



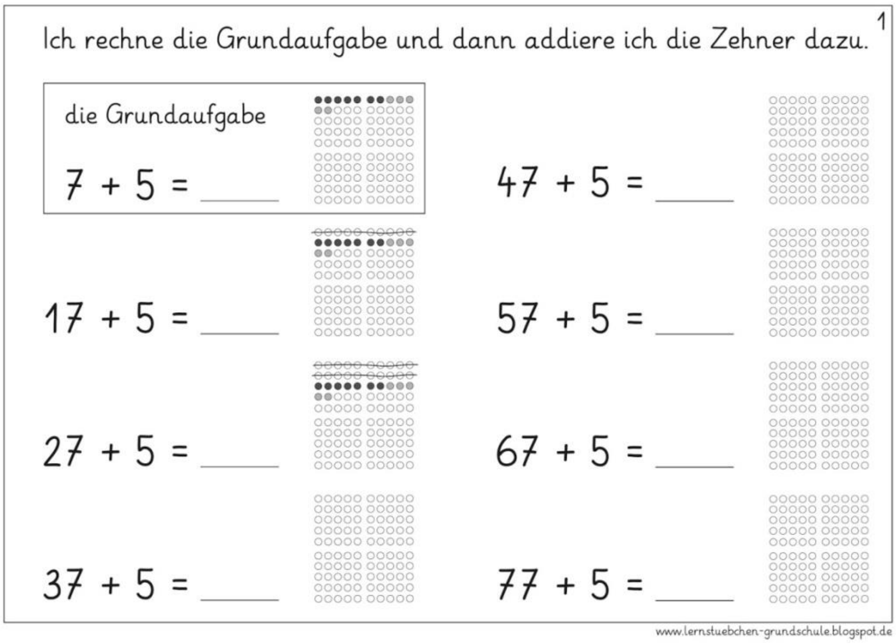
Obr. 52 - Zobrazení všech 121 úloh od 0 + 0 do 10 + 10

Zdroj: MÜLLER, G., WITTMANN, E. (2017) Einspluseins-Tafel [online obrázek]. *Mathe 2000+* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.mathe2000.de/rechenposter-einspluseins-und-einmaleins



Obr. 53 - Metoda souměrných spojů na mřížce

Zdroj: MÜLLER, G., WITTMANN, E. (2017) Zwanzigerfeld [online obrázek]. *Mathe 2000+* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.mathe2000.de/plaettchen-und-co-digital

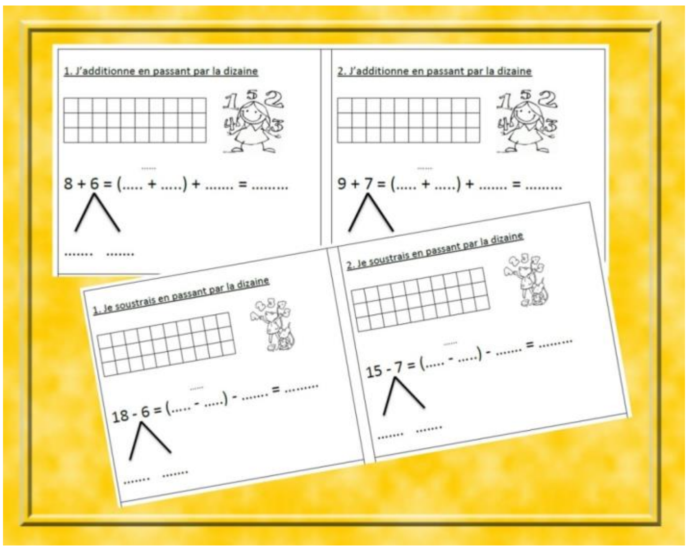


Obr. 54 - Modelování přechodů v dalších desítkách

Zdroj: Addieren mit Überschreiten des Zehners (2015) [online obrázek]. *Lernstübchen* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://lernstuebchen-grundschule.blogspot.cz/2015/11/addieren-mit-uberschreiten-des-zehners.html

Francie

Z francouzského prostředí mě zaujalo řešení úloh pomocí vidliček, doplněné o zaznamenání restrukturace celé operace pomocí závorek.



Obr. 55 - Zaznamenání celé operace pomocí závorek

Zdroj: Additionner en passant par la dizajne (2013) [online obrázek]. Coraliecaramel [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://coraliecaramel.eklablog.com/passage-par-la-dizaine-a74483065

Praktická část

Praktická část zahrnuje uvedení cíle šetření, použité metody, popisuje výzkumný vzorek, vlastní realizaci šetření a jeho výsledky.

7 Dotazníkové šetření – kvantitativní výzkum

7.1 Výzkumný problém

Učiteli nejčastěji využívané metody, potažmo pomocné systémy a modely při zavádění a výuce přechodu přes základ v matematice primární školy

7.2 Téma výzkumu

Učiteli preferované metody a formy práce při zavádění a výuce počítání s přechodem přes první desítku v matematice primární školy

7.3 Cíle výzkumu

Hlavní cíl:

Zmapovat, které formy, či metody práce učitelé při zavádění a výuce přechodu přes základ deset nejčastěji aplikují.

Dílčí cíle:

Zmapovat, které pomůcky, systémy a modely jsou učiteli nejčastěji využívané při zavádění a výuce přechodu přes první desítku.

Potvrdit, či vyvrátit, zda učitelé opravdu považují přechod přes základ deset za kritické místo matematiky prvního stupně základní školy.

Zmapovat, kterou chybu, či problém zaznamenávají nejčastěji učitelé obecně u žáků při výpočtech s přechodem přes základ.

7.4 Hypotézy

Učitelé považují tradiční výuku pomocí rozkladů čísel a s tím souvisejícího dopočítávání do desítky za efektivní.

Učitelé využívají pravidelně při výuce přechodu přes základ především takové pomůcky, systémy a modely, které nejčastěji nabízí učebnice, popř. doplňkové materiály k učebnicím, přičemž se opírají zejména o grafické znázornění průběhu operace.

Učitelé považují počítání s přechodem přes základ deset za kritické místo matematiky prvního stupně.

Učitelé pozorují při chybných výpočtech žáků nejčastěji chybný rozklad.

7.5 Výzkumné otázky

Kterým metodám a formám práce dávají učitelé při zavádění a výuce přechodu přes základ deset v matematice primární školy nejčastěji přednost?

Které pomocné systémy, či modely jsou při zavádění a výuce přechodu přes základ učiteli nejčastěji využívány?

Považují učitelé počítání s přechodem přes základ deset za kritické místo matematiky prvního stupně?

Jaké chyby, či problémy zaznamenávají nejčastěji učitelé obecně u žáků při výpočtech s přechodem přes základ?

7.6 Výzkumná metoda

Dotazník byl zasílán elektronickou formou na emailové adresy ředitelům vybraných běžných základních škol (pro potřeby práce nebyly záměrně voleny školy typu Montessori). Ředitelé byli požádáni, aby dotazník dále rozeslali mezi své učitele prvního stupně, kteří alespoň jednou absolvovali zavádění a výuku přechodu přes první desítku, přičemž alespoň jednou ne dle Hejného matematiky. Dotazník obsahoval tyto typy otázek:

- Otevřené úlohy se stručnou odpovědí
- Úlohy s výběrem odpovědí
- Úlohy s vícenásobnou odpovědí
- Škálové otázky

7.7 Výzkumný soubor

100 učitelů na 1. stupni ZŠ (náhodný výběr)

Ačkoliv je vybraný vzorek 100 učitelů v porovnání s jinými šetřeními malý a není rovnoměrně rozložený, domnívám se, že i tak může přinést zajímavý a důležitý pohled na tuto problematiku.

7.8 Zpracování dat z dotazníkového šetření

Počet respondentů vyšel přesně na 100, tedy procentní zastoupení se shoduje s absolutní četností. Proto není nutné v tabulkách uvádět absolutní četnost, postačí uvést četnost relativní, vyjádřenou procenty.

Otázka č. 1: Jakého jste pohlaví?

Tab. 6 - Vyhodnocení otázky č. 1

Možnosti	Relativní četnost (%)
žena	**92**
muž	8

Dotazník vyplnilo 92 procent žen a 8 procent mužů, což potvrzuje trend vysokého počtu žen zejména v oblasti preprimárního a primárního vzdělávání. Obecně platí, že čím vyšší stupeň vzdělávání, tím počet mužů na pozicích učitelských i řídících roste.

,,Na základních školách tvoří ženy naprostou většinu v učitelských sborech – podíl mužů-učitelů byl v roce 2014 pouze 14 %.‘‘ (Klehňová, 2016)

Ačkoliv je tato statistika dva roky stará, předpokládejme, že situace se od té doby nijak významně nezměnila. Zahrnuje i druhé stupně základních škol. Pokud přihlédneme k faktu, že tento dotazník byl situován pouze na první stupeň základní školy, který je doménou převážně žen, pak výsledek - osm procent jakožto podíl mužů, víceméně odpovídá.

Otázka č. 2: Kolikrát za svou praxi jste zaváděli učivo s přechodem přes základ? (Týká se převážně matematiky druhého ročníku ZŠ.)

Tab. 7 - Vyhodnocení otázky č. 2

Možnosti	Relativní četnost (%)
pouze jednou	14
více než jednou	**86**

Do dotazníku nebyla záměrně přidána otázka na počet let praxe, která pro náš výzkum nemá váhu vzhledem ke skutečnosti, že například učitel, který učí již deset let a můžeme ho tím považovat za zkušeného, však mohl toto učivo například zavádět pouze jednou a mít s ním tedy menší zkušenost než učitel, který kupříkladu učí sedm let, tedy méně než předchozí, ale učivo zaváděl dvakrát, či vícekrát, protože na něj zkrátka první, či druhý ročník vícekrát připadl. Na školách lze sledovat trend, kdy se někteří učitelé na prvním stupni výhradně specializují buďto na nižší ročníky (rozumějme 1. – 3.), nebo výhradně vyšší ročníky (4. – 5.) Z tohoto důvodu byla do dotazníku zařazena pouze otázka zjišťující, kolikrát učitelé dané učivo zaváděli, která přímo odráží jejich zkušenost s problematikou. Vzhledem k tomu, že 86 procent učitelů, tedy značně převážná část, prošlo zaváděním přechodu více než jednou, lze, myslím, považovat vyznění dotazníku za výpověď převážně zkušených učitelů s touto problematikou.

Otázka č. 3: Ve kterém ročníku považujete za vhodné přechod zavést?

Tab. 8 - Vyhodnocení otázky č. 3

Možnosti	Relativní četnost (%)
již v prvním ročníku (alespoň okrajově)	**67**
ve druhém ročníku	33

Z odpovědí vyplývá, že zhruba dvě třetiny učitelů upřednostňují se přechodu přes základ věnovat plně, či alespoň okrajově již v prvním ročníku. Učitel samozřejmě musí vždy vycházet z aktuální situace ve třídě, zejména z dosažené úrovně dovedností dětí, ze zbývající časové dotace na konci školního roku atd. Z tohoto pohledu jsou dle mého názoru velmi vhodné samostatné volitelné díly učebnicových řad (viz nakladatelství SPN), které se věnují čistě přechodu. Učebnice pro 2. ročník potom tímto učivem začíná znovu od začátku, v poněkud jiné formě, jak již bylo popsáno v analýze učebnic, a přiměřeně je dále rozpracovává. Zařazení či nezařazení tohoto volitelného dílu do výuky tedy nijak neovlivňuje návaznost učiva v učebnicích pro 2. ročník. Tomu zda učitel učivo již v první třídě přímo zavede, či nikoliv, osobně nepřikládám takovou váhu jako pečlivé snaze zvážit a diagnostikovat právě onu míru dosažených nutných dovedností pro osvojování si tohoto učiva.

Otázka č. 4: Považujete počítání s přechodem přes základ deset za kritické místo matematiky prvního stupně základní školy?

Tab. 9 - Vyhodnocení otázky č. 4

Možnosti	Relativní četnost (%)
ano, je to učivo náročné, u žáků sleduji i přetrvávání problémů s tímto typem počítání	35
ano, ale pouze při probírání, později již žákům problém nedělá	**43**
nepovažuji toto místo za kritické	20
nevím	2

Ačkoliv tento dotazník, vzhledem k počtu respondentů, nelze považovat za obecně určující, odpovědi učitelů potvrzují jednu z jeho hypotéz. Jeho výsledky jsou samozřejmě pouze orientační, ale v malé míře mohou jistě přispět k pohledu na tuto problematiku. Pokud respondenti toto učivo v celých sedmdesáti osmi procentech považují za náročné až kritické, a celých 35 procent současně sleduje i přetrvávání obtíží s ním spojených, pak samozřejmě z nějakého důvodu a měla by mu tedy být věnována větší pozornost, zejména z hlediska vlastní přípravy samotných učitelů. Jistě by bylo vhodné zaměřit úsilí především na tvorbu důkladných odborných metodických materiálů, které by zajistili také teoretickou vybavenost učitelů, s důrazem na všechny aspekty problematiky přechodu v celé jeho šíři, a které by dále představovaly co nejširší spektrum aktivit na různých pomůckách. Právě ze studia metodických materiálů jsem měla rozporuplné pocity, každý nabízel pouze nějaké dílčí informace, ale komplexnější pojednání jsem nalezla snad pouze v metodice k řadě *Svět čísel a tvarů*, nakladatelství *Prometheus*.

Otázka č. 5: Setkali jste se někdy s tím, že by sami rodiče předjímali, že bude s tímto učivem problém?

Tab. 10 - Vyhodnocení otázky č. 5

Možnosti	Relativní četnost (%)
ano	28
ne	**72**

Je samozřejmě pozitivní, že celých sedmdesát dva procent učitelů se přímo nesetkalo s tím, že by sami rodiče dětí předjímali problémy s tímto učivem. Protože právě i přístup samotných rodičů k různým úsekům učiva se může na dětech odrazit. Pokud například sám rodič s tímto učivem měl v dětství problém a jako problémové ho tudíž bude prezentovat i před svým dítětem, lze pak očekávat, že i samo dítě si již dopředu k němu bezdůvodně utvoří předsudek, který ho bude blokovat v úspěšném osvojení. Stejně tak učitelé, by se k němu, ačkoliv ho vnímají jako náročné, neměli stavět negativně. Cílem samozřejmě není dělat z přechodu postrach matematiky, ale spíše si uvědomit co vše obnáší a s přihlédnutím k tomu se snažit o co nejúčelnější výuku.

Otázka č. 6: Které z následujících pomocných systémů, modelů, či pomůcek, jste při zavádění a výuce alespoň jednou využili (využíváte), a které naopak vůbec? (V případě potřeby učitelé nahlédli na obrázky uvedené pod otázkou.)

Tab. 11 - Vyhodnocení otázky č. 6

Stovková tabule	
Možnosti	Relativní četnost (%)
pravidelně	**58**
jednou, či několikrát jsem využil/la	34
nikdy jsem nevyužil/la	8

Počítadlo	
pravidelně	**79**
jednou, či několikrát jsem využil/la	19
nikdy jsem nevyužil/la	2

Grafické znázornění výpočtu do mřížky	
pravidelně	**42**
jednou, či několikrát jsem využil/la	41
nikdy jsem nevyužil/la	17

Znázornění výpočtu na mřížce pomocí předmětů (víček, korálků atd.)	
pravidelně	**74**
jednou, či několikrát jsem využil/la	23
nikdy jsem nevyužil/la	3

Cuisenairovy proužky/hranolky, popř. alternativa - Melicharovy početní špalíčky	
pravidelně	5
jednou, či několikrát jsem využil/la	17
nikdy jsem nevyužil/la	**78**

Krokování jako dramatizovaná verze pohybu na číselné ose = Prvek Hejného matematiky	
pravidelně	24
jednou, či několikrát jsem využil/la	29
nikdy jsem nevyužil/la	**47**

Grafický záznam výpočtu na číselnou osu	
pravidelně	**63**
jednou, či několikrát jsem využil/la	34
nikdy jsem nevyužil/la	3

Jiná práce s číselnou osou - např.: znázornění výpočtu na číselné ose pomocí přikládání předmětů na osu (např. korálků), ukazování prsty atp.	
pravidelně	**52**
jednou, či několikrát jsem využil/la	40
nikdy jsem nevyužil/la	8

Systém všech možných rozkladů čísel od 1 do 10	
pravidelně	**82**
jednou, či několikrát jsem využil/la	16
nikdy jsem nevyužil/la	2

Počítání na prstech	
pravidelně	**73**
jednou, či několikrát jsem využil/la	23
nikdy jsem nevyužil/la	4

Grafické znázornění rozkladu pomocí tzv. vidliček (často v kombinaci s grafickou fixací, či znázorněním desítky)	
pravidelně	**67**
jednou, či několikrát jsem využil/la	16
nikdy jsem nevyužil/la	17

Peněžní model (nastříhané papírové penízky)	
pravidelně	**44**
jednou, či několikrát jsem využil/la	38
nikdy jsem nevyužil/la	18

Sčítací prstová tabulka pro ověřování výsledků, či jejich doplňování	
pravidelně	14
jednou, či několikrát jsem využil/la	32
nikdy jsem nevyužil/la	**54**

Početní pyramidy = aditivní trojúhelník (event. jiné možnosti tohoto schématu na stejném principu jako obdoba)	
pravidelně	**45**
jednou, či několikrát jsem využil/la	34
nikdy jsem nevyužil/la	21

Souhrn pořadí užívaných pomůcek v rámci kategorie *Pravidelně* (od nejvíce po nejméně pravidelně užívané)

Tab. 12 - Vyhodnocení otázky č. 6

Pořadí	Možnost	Počet označení	Relativní četnost (%) ve vztahu k celkovému k počtu 722 označení v kategorii
1.	**Systém všech možných rozkladů čísel od 1 do 10**	**82**	**11, 36**
2.	**Počítadlo**	**79**	**10,94**
3.	**Mřížka - manipulativní forma**	**74**	**10, 25**
4.	Prsty	73	10,11
5.	Vidličky	67	9,28
6.	Číselná osa – grafický záznam	63	8,73
7.	Stovková tabule	58	8,03
8.	Číselná osa – jiná, než grafická forma práce	52	7,20
9.	Početní pyramidy	45	6,23
10.	Peněžní model	44	6,09
11.	Mřížka - graficky	42	5,82
12.	Krokování	24	3,32
13.	Sčítací tabulka	14	1,94
14.	Cuisenairovy proužky/ Melicharovy špalíčky	5	0,69

Souhrn pořadí kategorie *Jednou, či několikrát jsem využil/la* od nejvyšší po nejnižší četnost označení

Tab. 13 - Vyhodnocení otázky č. 6

Pořadí	Možnost	Počet označení	Relativní četnost (%) ve vztahu k celkovému počtu 396 označení v kategorii
1.	**Mřížka - graficky**	**41**	**10,35**
2.	**Číselná osa – jiná, než grafická forma práce**	**40**	**10,10**
3.	**Peněžní model**	**38**	**9,60**
4.	Stovková tabule	34	8,59
	Číselná osa – grafický záznam	34	8,59
	Početní pyramidy	34	8,59
5.	Sčítací tabulka	32	8,08
6.	Krokování	29	7,32
7.	Mřížka - manipulativní forma	23	5,81
	Prsty -manipulativní forma	23	5,81
8.	Počítadlo	19	4,80
9.	Cuisenairovy proužky/ Melicharovy špalíčky	17	4,29
10.	Vidličky	16	4,04
	Systém všech možných rozkladů čísel od 1-10	16	4,04

Souhrn pořadí kategorie *Nikdy jsem nevyužil/la* od nejvyšší po nejnižší četnost označení

Tab. 14 - Vyhodnocení otázky č. 6

Pořadí	Možnost	Počet označení	Relativní četnost (%) ve vztahu k celkovému počtu 282 označení v kategorii
1.	**Cuisenairovy proužky/ Melicharovy špalíčky**	**78**	**27,66**
2.	**Sčítací tabulka**	**54**	**19,15**
3.	**Krokování**	**47**	**16,67**
4.	Početní pyramidy	21	7,45
5.	Peněžní model	18	6,38
6.	Vidličky	17	6,03
	Mřížka - graficky	17	6,03
7.	Stovková tabule	8	2,84
	Číselná osa – jiná, než grafická forma práce	8	2,84
8.	Prsty	4	1,42
9.	Číselná osa – grafický záznam	3	1,06
	Mřížka – manipulativní forma	3	1,06
10.	Počítadlo	2	0,71
	Systém všech možných rozkladů čísel od 1-10	2	0,71

Výsledky vyvrací mou hypotézu o převážném nabízení grafického modelování operací a naopak poukazuje na snahu učitelů zařazovat rovnocenně enaktivní, neboli činnostní reprezentanty čísel. Mým předpokladem bylo, že se učitelé při nácviku a výuce opírají ve smyslu přímých aktivit převážně pouze o učebnice a pracovní sešity. Je pro mě tudíž velmi příjemným zjištěním, že tomu tak není. Ačkoliv se na první příčce pravidelně užívaných pomůcek umístil systém všech možných rozkladů čísel od 1-10, další příčky obsadily počítadlo, znázornění výpočtu manipulativní formou na mřížce a prsty. Současně tak například pomyslně předběhly i vidličky, či grafický záznam na číselnou osu. Značná část učitelů také alespoň jednou, či několikrát využila jiné než grafické zaznamenání výpočtu na číselnou osu, či peněžní model.

Současně je zřejmé, že učitelé nemají povědomí o všech dostupných možnostech pomocných nástrojů. Zejména Cuisenairovy proužky, či Melicharovy špalíčky zaznamenávají nejvyšší četnost v kategorii nikdy nevyužitých pomůcek, ačkoliv nabízí z mého pohledu pro děti velmi lákavou, motivující a především účelnou formu modelování spojů s přechodem.

Otázka č. 7: Pokud jste někdy využili i jiný, popřípadě vlastní nástroj, než ve výše uvedených, popište jej, prosím, vlastními slovy. Pokud ne, otázku přeskočte.

Odpovědi:

Odp. č.1: *,,Používám nejčastěji obaly od vajec (desítka) a plníme je víčky. Když je "autobus" plný zavírá a zbytek musí "nastoupit" do dalšího autobusu (obalu od vajec).''*

Komentář: Zejména ‚zavírání autobusu' hodnotím jako nápadité. Jistě posiluje zdůraznění hranice desítky. Na popud této odpovědi byl doplněn popis pomůcky v teoretické části práce.

Odp. č. 2: *,,Montessori materiály - zlatý perlový materiál, sčítací prstové tabulky, hadí hra.''*

Komentář: Dotazník záměrně nebyl zasílán na školy typu Montessori, ačkoliv samozřejmě mohlo dojít k jeho vyplnění i ze strany učitele působícího v tomto systému. Lze také předpokládat i možnost, že někde tyto pomůcky užívají i na běžné ZŠ.

Odp. č. 3: *,,Navlékání korálků na špejli, na tkaničku, laminované počítání obdobné jako Melicharovy početní špalíčky se skřítkem Matýskem.''*

Komentář: Navlékání korálků na špejli je dalším zajímavým námětem a bylo díky této odpovědi také zařazeno do teoretické části práce. Je otázkou, jak vyučující postupuje. Zda nějakým způsobem oddělí desítku, či nikoliv, zda a jak volí různě barevné korálky atd.

Odp. č. 4: *,,Používám také další pomůcky i z běžného života (např. tyčinky od nanuků, hrací kostky s čísly nebo s tečkami), u dětí s poruchou jemné motoriky využívám systém počítání na prstech, ale znázorněný na papírových "rukách" atp.''*

Komentář: Škoda, že paní učitelka více nerozepsala práci s tyčinkami a kostkami. Takto lze jen nepřímo odhadovat.

Odp. č. 5: *,,Využívám nastříhaná papírová kolečka jedné barvy a fixní proužky s deseti kolečky jiné barvy. Děti si například při příkladu 6 plus 7 napočítají šest jednotek plus čtyři jednotky (v tento moment vymění za proužek s desítkou) a přidají počet zbývajících jednotek (3).''*

Komentář: Uvedený způsob znázornění byl rovněž díky této odpovědi popsán i v teoretické části práce. Do jisté míry se jedná o obdobu práce na perlovém materiálu (bankovní hra), či hadí hře.

Odp. č. 6: *,,S penízky hrajeme hru Na banku. Jeden ze dvojice je bankéř, druhý jde do banky měnit penízky. Cílem je mít co nejméně mincí. Žáci mají třeba úlohu 8 plus 5. Vezmou si (na moje zadání) například tři dvoukoruny, dvě koruny = 8 a jednu pětikorunu = 5 a musí si vyměnit správný počet drobných za desetikorunu a musí jim správně zbýt k té desítce tři koruny.''*

Komentář: Založeno na obdobném principu jako předchozí činnost, tentokrát efektivně spojena s rozvojem finanční gramotnosti.

Otázka č. 8: Zařazujete dle Vašeho názoru ve výuce dostatečně práci s činnostními reprezentanty čísel (např.: práce s hmotným modelem - počítadlem, manipulace s předměty představujícími čísla, krokování apod.)?

Tab. 15 - Vyhodnocení otázky č. 8

Možnosti	Relativní četnost (%)
ano, často	**85**
příležitostně	14
téměř vůbec	1

Souhlasí s výsledky u otázky číslo 6, kde se na prvních příčkách pravidelně užívaných pomůcek umístily položky – počítadlo (2. místo ze 14), mřížka: manipulativní forma (3. místo ze 14) a prsty (4. místo ze 14). Rovněž v kategorii *Jednou, či několikrát jsem využila* se na prvních příčkách umístily pomůcky představující enaktivní reprezentaci čísla – číselná osa: jiná, než grafická forma práce (2. místo z 10) a peněžní model (3. místo z 10).

Otázka č. 9: Setkali jste se někdy s pomůckou zvanou 'perlový materiál'? (Jedná se o pomůcku užívanou tradičně v systému Montessori.)

Tab. 16 - Vyhodnocení otázky č. 9

Možnosti	Relativní četnost (%)
ano	18
ne	**82**

Výsledky u této otázky potvrdily můj předpoklad o nedostatečné informovanosti učitelů ohledně Montessori pomůcek. Ty jsou velmi hodnotným materiálem a je, myslím, škoda, že o jejich možnostech není celkově obeznámeno více učitelů. Osobně jako budoucí pedagog bych uvítala, kdyby byl jejich potenciál brán více v potaz i na běžných základních školách například v rámci Montessori pracoven apod. Jak již bylo naznačeno, i přes komplexní podstatu jejich vzájemného propojení a užívání vázaného na senzitivní období, by jistě stálo za to se postupně otevírat možnosti jejich alespoň částečného užívání mimo vlastní Montessori systémy.

Otázka č. 10: Považujete tradiční výuku přechodu pomocí dopočítávání do desítky a s tím souvisejících rozkladů čísel za efektivní?

Tab. 17 - Vyhodnocení otázky č. 10

Možnosti	Relativní četnost (%)
Ano	34
spíše ano	**50**
Částečně	15
spíše ne	1
Ne	0

Odpovědi potvrdily mou hypotézu. Zda ale opravdu je tento způsob efektivní, či nikoliv, by jistě vydalo na vlastní samostatný a rozsáhlý výzkum. Téměř všechny děti se samozřejmě nakonec počítat přes desítku, převážně bez obtíží, naučí. Nehovoříme tedy o tom, zda způsob vede, či nevede k cíli. Spíše nás zajímá, zda by se obecně výuka přechodu nedala zefektivnit natolik, aby ho již učitelé nemuseli v takové míře považovat za kritické místo. Z tohoto pohledu by jistě bylo také přínosné, provést výzkum zaměřený na názory pedagogů vyučujících Hejného metodou. Zajímavé je jistě vztáhnutí výsledků této otázky k výsledkům otázky č. 16. Odpovědi na tuto otázku (č. 10) jasně deklarují, že učitelé považují výuku pomocí rozkladů čísel za efektivní. Na druhou stranu jsou to právě chybné rozklady, které byly označovány jako nejčastěji pozorovaná chyba u dětí.

Otázka č. 11: V případě, že užíváte rozkladů, požadujete jejich zaznamenávání i po dětech, které je k vlastním výpočtům již nepotřebují? (otázka nebyla povinná)

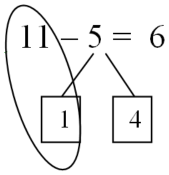
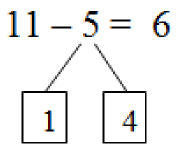
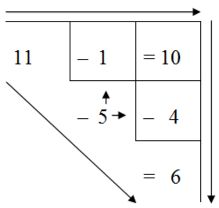
Tab. 18 - Vyhodnocení otázky č. 11

Možnosti	Relativní četnost (%)
ano	6
ne	**94**

Je samozřejmě pozitivní, že učitelé evidentně diferencují výuku a nepožadují zbytečné kroky navíc, které by děti zdržovaly.

Otázka č. 12: Které ze tří následujících zobrazení rozkladu považujete za nejvhodnější, či nejsrozumitelnější pro žáky?

Tab. 19 - Vyhodnocení otázky č. 12

<table>
<tr><td>Možnosti</td><td>Relativní četnost (%)</td></tr>
<tr><td>rozklad č. 1

</td><td>60</td></tr>
<tr><td>rozklad č. 2

</td><td>38</td></tr>
<tr><td>rozklad č. 3

</td><td>2</td></tr>
</table>

Výsledek může být, dle mého názoru, zkreslen faktem, že první dvě znázornění jsou ta, se kterými se sami učitelé jako děti tradičně setkávali a pomocí nichž si učivo osvojili. Ovšem to, že připadají efektivní jim, ještě nemusí přímo znamenat, že je jako efektivní vnímají sami žáci. Zejména o problematice kroužkování první malé triády v případě odčítání již bylo pojednáno. Ačkoliv pouze dvě procenta učitelů označila třetí znázornění rozkladu za efektivní, osobně bych mu přikládala velkou důležitost. Zobrazuje totiž komplexně restrukturaci spoje. Nabízí jaksi plné znění první i druhé malé triády v rámci restrukturace a nepřímo pomocnou triádu, jejíž vazba však, vzhledem ke způsobu uspořádání schématu, vyniká smysluplněji, než u předchozích znázornění. Především v počátcích výuky by mohlo mít takové schéma své místo mezi nosnými nástroji pro osvojení logiky celého příkladu. Později by učitelé jistě mohli namítat, že se naleznou žáci, kteří budou spoje v něm řešit stále izolovaně, bez zjevného pochopení jejich vzájemné souvislosti. Proto je samozřejmě nutné nabídnout toto zobrazení jako jednu z variant, nikoliv jako jedinou.

Otázka č. 13: Diferencujete výuku? Tedy umožňujete žákům řešit spoje v rámci přechodu dle jejich vlastních řešitelských strategií, byť se například neshodují s těmi Vámi zavedenými, v učebnici atp.?

Tab. 20 - Vyhodnocení otázky č. 13

Možnosti	Relativní četnost (%)
ano, umožňuji, ale taktéž trvám na zvládnutí jednotného postupu, stejného pro všechny	37
ano, umožňuji a netrvám na zvládnutí postupu, který je jinak ve třídě plošně zaveden	**58**
ne, trvám na tom, aby všechny děti řešily stejným způsobem	5

Výsledky v podstatě, mimo jiné, odpovídají závěru z otázky číslo 11, kde 94 procent učitelů uvedlo benevolenci pro zaznamenávání rozkladů (u žáků, kteří je již k vlastnímu výpočtu nepotřebují) - zde celých 95 procent učitelů uvedlo, že umožňují řešit spoje s přechodem dle vlastních řešitelských strategií, přičemž celých 58 procent současně netrvá na postupu, který jinak plošně zavádí pro celou třídu. Umožnění vlastních řešitelských postupů, pokud vedou ke správnému řešení, je samozřejmě na místě a odráží snahu současné doby a co nejvíce individualizovanou výuku.

Otázka č. 14: Uvítali byste způsob výuky dle Hejného systému, který pro přechod žádné speciální postupy nezavádí? Žáci by k těmto spojům měli dojít přirozeně, plynule, převážně pomocí vlastních řešitelských strategií.

Tab. 21 - Vyhodnocení otázky č. 14

Možnosti	Relativní četnost (%)
ano, uvítal/la	19
ne, způsob, kterým je přechod běžně zaváděn v učebnicích, či který využívám, mně vyhovuje	**51**
nevím	30

Zaujmout k tomuto jasné stanovisko jistě není jednoduché. Svou roli zde hraje mnoho faktorů. Samozřejmě lze těžko soudit něco, čím si člověk neprošel. Ostatně výsledek třiceti procent učitelů, kteří se vyjádřili nerozhodně, mluví za své. Dotazník byl situován učitelům, kteří alespoň jednou zaváděli přechod běžným způsobem, nikoliv Hejného metodou. Tímto jsem se snažila předejít zkreslení. Předpokládejme tedy, že pokud zde přeci jen nějaký učitel – respondent Hejného metodu učí, má ale zároveň i zkušenost s jeho běžnou (řekněme tradiční) výukou. Hejného metoda především nepředkládá restrukturaci příkladů v pravém slova smyslu. O tom, zda restrukturace jsou, či nejsou nutné, pojednává Rendl (1998).

Otázka č. 15: Seznámili jste/seznamujete žáky v souvislosti se zavedením a výukou počítání s přechodem přes základ přímo s pojmem 'desítková soustava'?

Tab. 22 - Vyhodnocení otázky č. 15

Možnosti	Relativní četnost (%)
ano	47
ne	**53**

Osobně jsem toho názoru, že právě osvětlení principu desítkové soustavy se poměrně podceňuje, což dokládá i výsledek. V tomto ohledu opět musím kladně vyzdvihnout Montessori systém, jehož pomůcky jsou na osvětlení principu desítkové soustavy zacíleny. Pouze necelá polovina učitelů děti s desítkovou soustavou, jako takovou, seznamuje. Přitom právě pochopení toho, proč *desítka* a proč vlastně dvojciferné číslo píšu způsobem, jakým ho píšu, je stěžejní.

Otázka č. 16: Zaznamenáváte/zaznamenali jste některou z následujících chyb ve výpočtech s přechodem přes základ u Vašich žáků? (Bylo možno označit více odpovědí, proto je v tabulce uveden nikoliv počet respondentů, ale počet označení.)

Tab. 23 - Vyhodnocení otázky č. 16

Možnosti	Počet odpovědí (z celkového počtu 200 označení), seřazeno od nejčastěji po nejméně často označené	Relativní četnost (%)
Chybný, popř. automatický rozklad (Dítě například chápe systém rozkladu, ale nikoliv jeho podstatu/úlohu ve výpočtu. Často volí typ rozkladu, se kterým se nejčastěji setkává, nikoliv takový, který je třeba pro konkrétní operaci.)	**58**	**29**
chybné dopočítávání (Dítě např. ve spoji 8 + 7 nezačíná dopočítávat až od čísla 9, ale od toho, které je v příkladu první napsáno, tedy od osmi.)	28	14
zbytek z rozkladu při odčítání je považován za výsledek celého příkladu (např.: 13 - 7 = 4)	27	13,5
zbytek je k desítce přičten namísto odečtení a naopak (např.: 13 - 7 = 14)	26	13
triáda (Spoj 11 - 3 je například dítětem doplněn číslem 14 na základě podobnosti s příkladem 11 + 3.)	23	11, 5
při odečítání není po dosažení desítky odečten zbytek z rozkladu, ale je od ní odečten znovu celý operátor	14	7
žák zaznamenává změny jen na místě jednotek (např.: 13 - 7 = 16)	13	6,5
jiné	6	3
ukončení procedury na desítce, ta je považována za výsledek příkladu	5	2,5

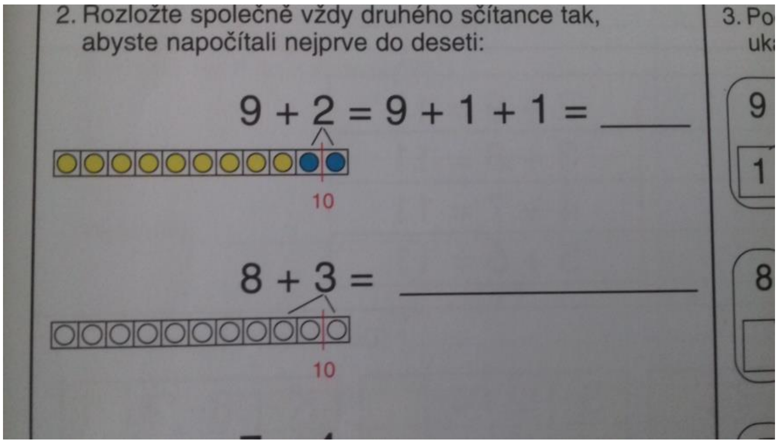
Každý učitel označil průměrně dvě možnosti chyb. Nejčastěji označovaná byla možnost - chybný rozklad, čímž se potvrdila hypotéza. Což je paradoxní vzhledem k tomu, že právě rozkladům je v naší tradiční české didaktice přisuzována při výuce přechodu největší pozornost.

Chybný rozklad může značit nedostatečně osvojené rozklady čísel v oboru do deseti, popř. chybné dočítání do desítky, potažmo sčítání a odčítání již v oboru do deseti. Automatický rozklad, jak již bylo řečeno dříve, může značit jistou míru formalismu. Tyto dva je od sebe nutné diferencovat, nicméně někdy může být těžké je od sebe odlišit. Proto byly přiřazeny do jedné možnosti, kde chybný rozklad zaštiťuje automatický.

Z mého pohledu může být toto způsobeno právě nedostatečným názorem na pomocných modelech. Lze trénovat přikládáním předmětů na číselnou osu, současně s hlasitým, či tichým dopočítáváním, přičemž první sčítanec je znázorněn fixně a správný počet prvků (= druhý sčítanec) je kontrolován zrakem. Dítě si prvně vyloží počet prvků dle prvního sčítance a druhého je tedy již nuceno začít přikládat od správného čísla.

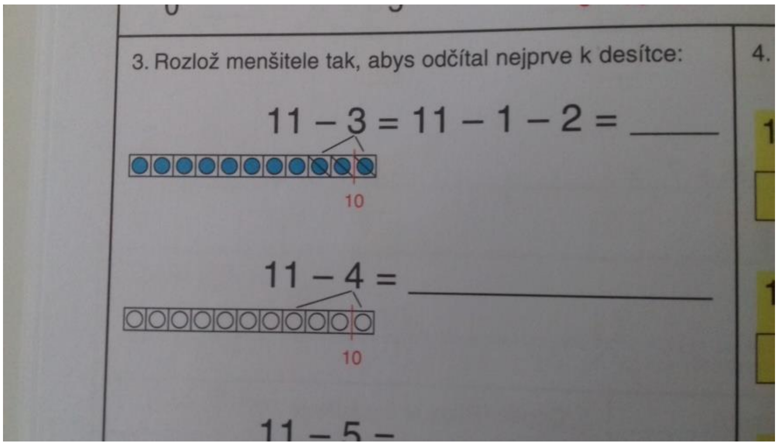
Nerada bych vyloženě polemizovala nad tím, nakolik je výuka pomocí rozkladů efektivní, ale spíše zda tomu tak je v současné podobě, a zda by nebylo například vhodné zaznamenávání vlastních rozkladů nějakým způsobem modifikovat.

V reakci na tuto myšlenku se nabízí otázka, zda ihned od začátku výuky přechodu požadovat po dětech vlastní zápis rozkladů pomocí číslic (viz *vidličky*), jak tomu bývá v učebnicích. A zda by nebylo vhodnější, alespoň zprvu, zvolit jinou formu jejich zaznamenání, například ve formě puntíků, či konkrétních obrázků. Dítě má přeci jen takto před sebou celkem 4 číslice/čísla, která musí zpracovat jednak vizuálně a jednak je všechna začlenit do procesu celé operace, přičemž si musí být nutně vědomo jejich postavení vůči sobě navzájem, tedy hierarchie, tzn. které číslice/čísla, jsou hlavní a sledují směr operace, a která jsou ‚pomocná' a náleží ve struktuře grafického znázornění na nižší úroveň, pod tuto hlavní linii příkladu. Připočteme-li toto uvědomění k počtu všech dalších nutných kroků celé operace, pak je jistě nasnadě se ptát, zda nemáme možnost dítěti celý proces usnadnit a některé kroky redukovat. Předpokládáme, že pod číslicemi (jakožto abstraktní symbolickou reprezentací) si dítě představuje konkrétní počty. Proto se mi jako možnost jeví myšlenka mu tuto konkretizaci zprostředkovat přímo a dříve, než jako učitel přistoupím k požadavku zaznamenávat rozklad v číselné podobě. Zejména ze začátku výuky považuji právě toto číselné zaznamenávání rozkladů za svým způsobem nadbytečný, respektive předčasný krok. Učebnice nakladatelství SPN toto řešení nabízí pouze jen jako ukázkové, přičemž puntíky jsou situovány do mřížky. Osobně bych však dala dětem větší prostor k možnosti zaznamenávat zprvu rozkladová čísla ve formě konkrétních symbolů a jejich počtů (ať už puntíků, či obrázků atd.) Zvážíme-li, že se nacházíme v číselném oboru do dvaceti, tedy pracujeme s malými čísly, pak v tom ani z hlediska časové náročnosti grafického zpracování, nevidím problém (nabízí se např. užití silnějšího fixu).



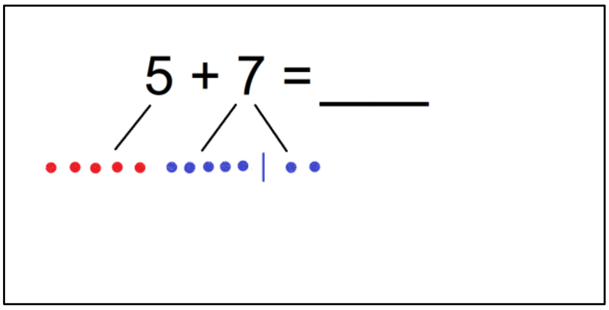
Obr. 56 - Znázornění rozkladu při sčítání v učebnici nakladatelství SPN

(obrázek převzat z: Čížková, 2007, s. 11)

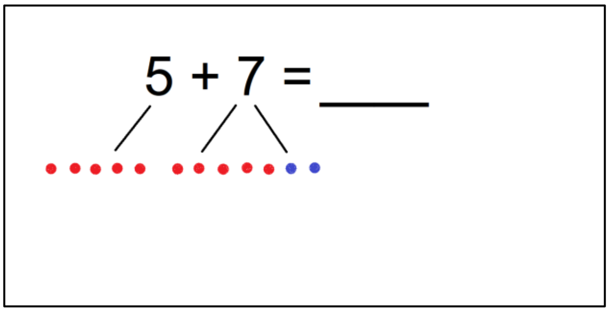


Obr. 57 - Znázornění rozkladu při odčítání v učebnici nakladatelství SPN

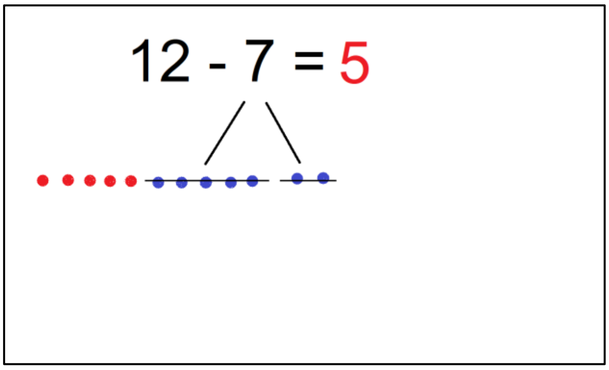
(obrázek převzat z: Čížková, 2007, s. 11)



Obr. 58 - Návrh na znázornění rozkladu pomocí puntíků s vyznačením hranice desítky



Obr. 59 - Další návrh na znázornění rozkladu pomocí puntíků



Obr. 60 - Znázornění odčítání pomocí puntíků

Obrázek č. 60 ilustruje návrh na znázornění rozkladu pomocí puntíků při odčítání. Rozdíl oproti tradičnímu názoru pomocí číslic pak tkví také v tom, že první rozkladové číslo, respektive počet puntíků (2), které ho reprezentují, nejsou nakresleny nalevo, ale napravo. Osobně považuji takové rozmístění za přirozenější a ve vztahu ke směru operace za přehlednější. A to i vůči pořadí řádů v samotném zápisu menšence.

Otázka č. 17: Pokud jste v předchozí otázce označili políčko - jiné, napište, prosím, stručně svými slovy, kterou další chybu, či který problém v dětských výpočtech pozorujete.

Odpovědi:

Odp. č. 1: *,,Chybující dítě často nedokáže dočítat do desítky, ale to není problém přechodu přes desítku, ale nízká nebo zanedbaná úroveň matematických představ a žádný rozklad na světě pak nepomůže. Pokud učitel bude žákům a rodičům podávat toto učivo za kritické, budou k tomu tak i přistupovat a stane se pro ně problematickým.''*

Komentář: Výpověď potvrzuje to, co plyne z teoretické části práce.

Odp. č. 2: *,,Objevuje se vždy několik dětí, pro které je jakékoli počítání přes* desítku *problém. Občas pomůže písemné sčítání a odčítání.''*

Komentář: Zápis písemného počítání, kde jsou jednotky a desítky pod sebou, může být jistě nápomocný a dá dítěti možnost nahlédnout na spoj z jiné perspektivy.

Odp. č. 3: *,,Záměna (otočení čísel).''*

Komentář: Zřejmě otočení čísel v zápisu výsledku. Může značit nepochopení zápisu čísel ve vztahu k řádům a principu desítkové soustavy.

Odp. č. 4: *,,Nejedná se vyloženě o chybu, často ale pozoruji, že se některé děti (především v začátcích) ve výpočtu jakoby zaseknou a vůbec neví jak dál, že třeba napíšou část* rozkladu*, ale už příklad nedopočítají do úplného výsledku.''*

Komentář: Toto není chyba jako taková, ale opět odráží to, co již bylo pojednáno – fakt, že se dítě ve výpočtu vzhledem k množství současně prováděných operací, může ztratit.

Otázka č. 18: Který z následujících postupů výuky přechodu je, dle vašeho názoru, vhodnější?

Tab. 24 - Vyhodnocení otázky č. 18

Možnosti	Relativní četnost (%)
postup po oborech (nejprve probrání všech možných spojů s přechodem do maximálního výsledku 11, poté do 12, atd.)	41
postup po číslech (nejprve 9 plus 2 až 9, dále 8 plus 3 až 9 atd.)	**59**

Osobně bych také, tak jako 59 procent respondentů, preferovala možnost postupu po číslech, kde se nabízí širší škála výsledků. Postup po oborech může, dle mého názoru, vést k tomu, že dítě již odtuší, že výsledky se víceméně stále opakují, nevyvine úsilí na řešení a bude je doplňovat automaticky.

Otázka č. 19: Ze zkušenosti je známo, že děti si při výuce zapamatují nejdříve spoje se stejnými sčítanci (8 + 8, 7 + 7 atd.), tedy tzv. spoje souměrné. Na základě nich, si snadno odvodí výsledky spojů s jedním sčítancem o jednu větším, či menším. Využíváte této metody souměrných spojů při své výuce přechodu? Souvisí dále i s odčítáním (8 + 8 = 16, 16 – 8 = 8).

Tab. 25 - Vyhodnocení otázky č. 19

Možnosti	Relativní četnost (%)
ano	**53**
ne	47

Na výsledek má jistě vliv fakt, že převážně se zavádí nejdříve izolovaně sčítání a poté odčítání. Dále si také, podle mého názoru, mnoho učitelů možná ani neuvědomuje právě onu skutečnost, že si děti souměrné spoje nejdříve pamatují.

Otázka č. 20: Které z následujících dvou schémat výuky počítání s přechodem považujete za vhodnější?

Tab. 26 - Vyhodnocení otázky č. 20

Možnosti	Relativní četnost (%)
probrat odděleně nejprve sčítání, poté odčítání	**71**
probrat sčítání i odčítání současně	29

Zde se nabízí diskuze ve vztahu k triádám. Z mého pohledu je oddělování těchto dvou operací zbytečné. Děti jsou v podstatě nuceny se adaptovat na dva dílčí učební celky, které je přitom možné (a osobně si myslím, že i vhodné) integrovat do jednoho, protože spolu nejenže souvisí, ale jeden z druhého přímo vychází. Ostatně ono poznání, že 8 + 5 = 13 a 13 – 5 se tedy současně rovná 8, může dítěti ihned vytvořit komplexní představu, která mu usnadní nejenom samotné odčítání, ale právě i sčítání. Pokud chceme u dětí budovat schéma aditivní triády, kdy dítě dokáže v jakémkoliv kontextu nahradit dvojici čísel triády číslem třetím, a s triádou pracovat jako s celkem, pak se tento postup vyloženě nabízí.

Otázka č. 21: Považujete pro žáky za snadnější sčítání nebo odčítání s přechodem přes desítku?

Tab. 27 - Vyhodnocení otázky č. 21

Možnosti	Relativní četnost (%)
Sčítání	**76**
Odčítání	8
rovnocenně náročné	16

Výsledek je jistě ovlivněn právě tradicí tyto celky oddělovat. Ačkoliv ve vztahu k rozkladům, je odčítání v podstatě jednodušší, protože, jak již bylo napsáno, počet jednotek menšence dítěti napoví, jak rozložit menšitele.

Otázka č. 22: Jak byste obecně ohodnotili na stupnici 1 až 3 úspěšnost Vašich žáků při absolvování učiva navazujícího na přechod přes první desítku? (přechody v dalších desítkách, písemné sčítání atd.)

Tab. 28 - Vyhodnocení otázky č. 22

Stupně škály	Relativní četnost (%)
1 (převážně bez obtíží)	**51**
2 (zhruba polovina žáků bez obtíží, polovina s obtížemi)	47
3 (převážně s obtížemi)	2

Překvapil mě vysoký počet respondentů, kteří na škále zaznačili střední možnost. Přechody v dalších desítkách, či písemné počítání samozřejmě nestaví pouze na přechodu přes první desítku, nicméně je jedním z jejich základních stavebních kamenů. Proto může výsledek opět poukazovat na náročnost a obecně problematičtější osvojení tohoto učiva žáky.

Shrnutí dotazníkového šetření

86 % respondentů vyučovalo přechod přes základ více než jednou, tedy můžeme o nich předpokládat, že s touto problematikou mají jisté zkušenosti a že jejich odpovědi tuto zkušenost reflektují.

Nadpoloviční většina učitelů považuje za vhodné zavádět přechod přes desítku alespoň okrajově již v prvním ročníku. Nabízí se však otázka, zda z jejich strany skutečně dochází k pečlivému zmapování dosažené úrovně potřebných dovedností dětí pro úspěšné osvojení si přechodu přes základ.

Celkem 78 % učitelů uvedlo, že považují přechod přes základ za kritické místo matematiky prvního stupně, což potvrdilo jednu ze vstupních hypotéz a současně potřebu se tímto tématem hlouběji zaobírat.

Dle výsledků učitelé zařazují do výuky přechodu často i činnostní reprezentanty čísel, čímž byl vyvrácen můj předpoklad o převážném grafickém znázorňování početních operací. Současně je zřejmé, že nejméně pro tyto účely (a zřejmě i celkově) učitelé užívají početní špalíčky, či Cuisenairovy proužky. Lze se domnívat, že respondenti, potažmo učitelé obecně, nejsou v dostatečné míře obeznámeni o jejich existenci, či možnosti využití. 82 % učitelů uvedlo, že se nikdy nesetkali s pomůckou zvanou *Perlový materiál* ze systému Montessori. Lze předpokládat, že i v této kategorii pomůcek bude ze strany učitelů obecně patrná jejich sporadická znalost. Rovněž sčítací tabulka, krokování, či početní pyramidy zaznamenaly nejvyšší četnost označení, jakožto nikdy nevyužitých. V této oblasti snad práce alespoň malou měrou přispěje k informovanosti. Jistě se alespoň učitelé – respondenti tohoto dotazníku, mohli jeho prostřednictvím s možností užití některých těchto pomůcek seznámit. Zároveň zde spatřuji i možnost přispět svou diplomovou prácí u učitelů obecně k většímu přehledu o dostupných pomůckách, ze kterých mohou při zavádění, výuce i procvičování vybírat.

34 % učitelů považuje tradiční výuku přechodu pomocí dopočítávání do desítky a s tím souvisejících rozkladů čísel za vyloženě efektivní. 50 % ji pak považuje za spíše efektivní. Zároveň však nejčastěji označovanou pozorovanou chybou u dětí byl právě chybný rozklad (zahrnující i ten automatický). Jak jsem již naznačila v dílčích komentářích jednotlivých položek, domnívám se, že by stálo za zvážení, zda nelze tento způsob výuky poněkud inovovat a zefektivnit ještě více. A to jak pomocí širší škály

nabízených pomůcek dětem, tak např. modifikací zaznamenávání vlastních rozkladových čísel - zejména ze začátku výuky jinak, než číslicemi. Dejme tomu pomocí puntíků, obrázků apod. (viz komentář u vyhodnocení otázky č. 16).

Dále méně než polovina učitelů seznamuje žáky při příležitosti zavádění, či výuky přechodu, přímo s pojmem *desítková soustava*. Osobně jsem za důraznější vztažení přechodu k desítkové soustavě jako takové, potažmo jejímu principu.

Nadpoloviční většina učitelů preferuje postup výuky tzv. po číslech (nejprve se probírají spoje 9 + 2 až 9, dále 8 + 3 až 9 atd.), nikoliv postup po oborech (nejprve probrání všech možných spojů s přechodem do maximálního výsledku 11, poté do 12, atd.) Rovněž převážná část učitelů (celkem 71 %) považuje za vhodné zavést odděleně nejprve sčítání, poté odčítání, přičemž 76 % učitelů se domnívá, že sčítání je pro žáky snazší, než odčítání. Současně 53 % učitelů nevyužívá metody souměrných spojů, ačkoliv je známo, že děti si při výuce zapamatují nejdříve spoje se stejnými sčítanci, tedy tzv. spoje souměrné. Na základě nich si snadno odvodí výsledky spojů s jedním sčítancem o jednu větším, či menším.

Učitelé byli celkově skoupí na volné odpovědi, nicméně i mezi nimi se našlo pár nosných přímo pro obohacení teoretické části práce, konkrétně výčtu a popisu pomůcek (navlékání korálků na špejli, či tkaničku; početní proužky s kolečky; plata od vajec).

Téměř polovina učitelů uvádí až u poloviny svých žáků potíže s učivem navazujícím na přechod. Jistě se tedy opět potvrzuje nutnost přikládat mu větší pozornost ve formě odborné přípravy na výuku, která učitelům umožní lepší orientaci v problematice a osvětlí možnosti užívání širší škály pomůcek. Ostatně bych byla velmi ráda, pokud by právě tato práce ke zmíněné přípravě přispěla a posloužila především jako metodicky a didakticky návodný materiál pro učitele.

8 Experimentální šetření

8.1 Výzkumný problém

Didaktické pomůcky v přímé činnosti žáků

8.2 Téma šetření

Realizace výpočtů s přechodem přes základ na příslušných didaktických pomůckách

8.3 Cíle šetření

Hlavní cíl

Reálně si vyzkoušet práci žáků s některými vybranými didaktickými pomůckami, uvedenými ve výčtu v teoretické části práce, při řešení příkladů a úloh s přechodem přes základ deset.

Dílčí cíle

Popsat a analyzovat vlastní výpočty a řešitelské strategie žáků.

Zmapovat míru případných shodných znaků v těchto řešeních.

8.4 Metoda výzkumného šetření

- *zúčastněné, přímé, strukturované, otevřené pozorování*

„Zúčastněné pozorování znamená takový druh pozorování, kdy sledujeme studované jevy přímo v prostředí, kde se odehrávají. Toto pozorování se nazývá zúčastněné proto, že dochází k interakci mezi výzkumníkem a pozorovanými účastníky výzkumu, i když nezasahuje badatel do výuky“ (Švaříček, Šeďová, 2007, s. 144).

„Přímé pozorování znamená, že se badatel účastní zkoumaného jevu v čase jeho průběhu“ (Švaříček, Šeďová, 2007, s. 145).

„Zatímco při strukturovaném pozorování hledáme odpověď na předem vymezené a určené jevy, účelem nestrukturovaného pozorování je získat zhuštěný popis jednání, které nemáme dopředu přesně určené“ (Švaříček, Šeďová, 2007, s. 145).

„Při otevřeném pozorování vystupuje pozorovatel otevřeně jako výzkumník“ (Švaříček, Šeďová, 2007, s. 146).

Šetření bylo konáno na ZŠ Boženy Němcové v Jeseníku, ve druhém ročníku.

K práci byl využit pracovní list, navržený mnou, přímo pro toto šetření (viz příloha A).

Příklady pro pracovní list byly záměrně voleny tak, aby vycházely do určitého maximálního výsledku, vzhledem k tomu, že výuka ve třídě, kde se šetření konalo, probíhá dle nakladatelství SPN, kde se postupuje při výuce po oborech (nejprve do 11, 12, atd.)

Vzorek: 3 žáci - dva chlapci, jedna dívka, všichni ve věku sedmi let

8.5 Analýza průběhu šetření a dětských výpočtů

Ačkoliv byl vzorek dětí malý a nerovnoměrně rozložený, bylo možno mezi dětmi vysledovat některé shodné znaky, které dále podnítily a ovlivnily mou práci. Podrobný záznam počítání s dětmi spolu s rozborem jejich odpovědí je vzhledem k rozsahu uveden v příloze B.

Tab. 29 - Tabulka shodných znaků v dětských výpočtech

	Štěpánka	Michal	Roman
Originalita a kreativita v přístupu k řešení, či slovním komentování situace	/	/	//
Problém při práci na číselné ose – rozpor mezi vnímáním číslice na ose jako adresy (názvu oné rysky) a veličiny (délky úsečky od nuly k tomuto číslu)	_	/	/
Spontánní počítání na prstech bez vyzvání	_	/	/////
Dítě řeší úlohu správně, ale slovně nedokáže postup tohoto řešení popsat	/	_	//

Originalita a kreativita v přístupu k řešení, či slovním komentování situace

Děti často přistoupily podle mě k originálním a kreativním způsobům řešení. Lze se domnívat, že tato tvořivost byla podnícená právě danými pomůckami, o čemž jsem se přesvědčila při výroku jednoho z dětí: *,,Tvořím příklad!‘‘* A právě možností *tvořit příklady* a nejen je pasivně řešit, se přeci tato práce zabývá.

Jedno z dětí mě dále inspirovalo k doplnění popisu užití Melicharových početních špalíčků, když samo od sebe přišlo na další způsob zobrazení úlohy, které mě samotnou do té doby nenapadlo:

Chlapec M. měl za úkol pomocí špalíčků modelovat příklad 7 + 5. Nejprve vyložil na lavici špalíček se sedmi kolečky, poté vedle přiložil špalíček se třemi a nakonec se dvěma kolečky. Po přiložení špalíčku se třemi kolečky komentoval: *,,A už jsem na desítce.''* Číslo pět tedy rovnou rozložil na tři a dvě. Zároveň dodal, že kdyby měl počítat na rychlost, volil by možnost přiložit ke špalíčku se sedmi kolečky rovnou špalíček s pěti kolečky.

Tímto se mimo jiné také potvrdilo, že děti střídají a aplikují různé strategie na různé spoje, či situace dle potřeby a odhadu výhodnosti. Chlapec mě tedy zároveň přivedl na způsob znázornění, kdy druhého sčítance lze sestavit ze dvou špalíčků v podobě potřebného rozkladu.

Rozpor mezi vnímáním číslice na ose jako adresy a veličiny

U dalšího z dětí se na číselné ose naskytla situace, která z mého pohledu nastínila rozpor mezi vnímáním číslice na ose jako adresy (názvu oné rysky) a veličiny (délky úsečky od nuly k tomuto číslu):

Chlapec R. řešil příklad 6 + 4, který měl pomocí pastelek znázornit právě na ose. Začal nejprve správně značit pastelkou od nuly do šestky. Dále však chtěl navázat až od bodu sedm, tedy měl v úmyslu vynechat prostor na ose mezi body šest a sedm. Což mě přivedlo na myšlenku, že některé děti zřejmě mohou mít v určité fázi výuce matematice potíž brát na zřetel vzdálenosti mezi jednotlivými body, což se odráží na občasné pochybnosti ohledně způsobu znázornění.

Taktéž chlapec M. narazil u číselné osy na dilema. Při řešení jedné z úloh si měl pomoci přikládáním korálků na osu. Dotazoval se, zda má začít od nuly, tedy zda má korálek přiložit na rysku označenou číslem nula. Poté se však opravil a uvedl, že musí začít od jedničky. Zdůvodnil takto: *,,Protože tady bysme museli počítat: nula, jedna, dva, tři, a když chceš začít od jedničky, tak musíš počítat: jedna, dva, tři, čtyři a dál.''* Osa sama o sobě byla dostatečně velká na to, aby se korálky daly přiložit mezi jednotlivé rysky, nikoliv přímo na ně. To však nenapadlo žádné z dětí.

V té době jsem ještě přímo nevěděla, o co konkrétně se jedná, proto jsem hledala k číselné ose více informací a nalezla pojednání, které tuto situaci osvětlilo, a které jsem zařadila do popisu číselné osy jako pomůcky. I v tomto směru tedy došlo k obohacení práce.

Spontánní počítání na prstech

Při psaní práce jsem váhala, zda počítání na prstech opravdu zařadit jako svébytnou pomůcku k přechodu do samotného výčtu pomocných modelů v teoretické části. Šetření mě přesvědčilo, že prsty v tomto výčtu své místo mají. Mnohdy se můžeme setkat s dětmi, které prsty preferují a užívají oproti jiným dětem dlouho a více svévolně. V tabulce můžeme vidět, že chlapec Roman si názorem na prstech pomohl (zejména oproti jiným dětem) mnohokrát. V otázce délky užívání prstů je jistě potřeba individuálního přístupu k dětem, což jsem v teoretické části práce, na základě tohoto šetření, také naznačila.

Teorie řešení a její praktická aplikace

V průběhu počítání s dětmi se pak naskytlo také zajímavé srovnání. Jedno z dětí například znalo a dobře slovně nastínilo ‚teorii' řešení jednoho z příkladů, ale při její vlastní aplikaci chybovalo. Naopak nastala situace, kdy jiné a jednou dokonce i to samé dítě řešilo úlohu správně, ale slovně nedokázalo toto řešení popsat (viz popis práce dětí v příloze). V tomto ohledu se mi potvrdila nutnost zapojovat do výuky takové činnosti, při kterých budou mít děti možnost si svojí vlastní práci, či práci spolužáka slovně okomentovat, diskutovat o ní, či se učit navzájem (viz konstruktivistický přístup popsaný v teoretické části).

Shrnutí experimentálního šetření

Děti obecně projevovaly radost z práce na přiložených, zejména hmotných, modelech. Velmi je zaujaly Melicharovy početní špalíčky. Nejvíce nadšení pak vykazovaly na krokovacím páse. Šetření, ačkoliv bylo menšího rozsahu, přineslo několik důležitých dílčích poznatků pro tuto práci, které ji taktéž ovlivnily. Šetření bylo pojato jako předvýzkum a zejména mi umožnilo úvodní vhled do problematiky přímo v praxi. Ne vždy je jistě nutné dojít k velkým závěrům. Každý, byť malý přínos je důležitý, a i kdyby šetření přineslo jen jeden jediný, pak ho považuji za smysluplné.

Závěr

Na závěr této diplomové práce nejprve zopakujme, co bylo jejími cíli a zda došlo k jejich naplnění. Primárním cílem bylo zmapovat vyčerpávajícím způsobem dostupné didaktické metody a formy nácviku přechodu přes první desítku. V tomto ohledu, myslím, práce podala obstojný seznam a popis mnoha pomůcek, modelů, či schémat tak, jak bylo zamýšleno.

Jestliže je přechod přes první desítku mnoha učiteli evidentně vnímán jako kritické místo, pak je jistě zapotřebí vynaložit na jeho výuku větší úsilí a přistupovat k němu s větší pozorností. Každé dítě je jiné a každé si jistě svůj matematický svět prožívá poněkud odlišným způsobem. Nelze očekávat, že bude celé třídě zároveň vyhovovat modelace úloh na stejných pomůckách. Čím více různých způsobů práce žákům nabídneme, tím větší šanci každý má si najít svůj optimální názor, na kterém mu bude řešení vyhovovat.

Přechod přes první desítku zasahuje celou řadu aspektů, jichž si, dle mého názoru, nemusí být učitelé často vědomi. Ačkoliv jednotlivě, samy o sobě, byly tyto aspekty již mnohokrát pojednány, z mého pohledu nebyly dostatečně, nebo vůbec, vztaženy přímo k tomuto učebnímu celku. Proto jsem považovala za důležité je seskupit na jedno místo a zakotvit do uceleného textu.

Dalším cílem bylo provést kvantitativní výzkum zaměřený na preferenci metod a forem nácviku přechodu. Jeho výsledky, mimo jiné, zejména nastínily zřejmý rozpor mezi preferencí učitelů řešit spoje s přechodem pomocí tradičních rozkladů, jakožto, podle jejich názoru, efektivního způsobu výuky přechodu a nejčastěji pozorovanými chybami ve výpočtech žáků, které právě chybné, či automatické rozklady zahrnují. Proto jsem se pokusila alespoň o návrh na možnost jak zapisovat rozklady zprvu jinak, než číslicemi, abychom dětem usnadnili adaptaci na tento styl výuky.

Co se týká nedostatků práce, jistě by se nabízelo mezi sebou více propojit jednotlivé výsledky a tabulky dotazníkového šetření. Avšak vzhledem k nižšímu počtu respondentů, rozsahu, čitelnosti práce a její přehlednosti, jsem se v tomto ohledu omezila na vyhodnocení jednotlivých položek dotazníku bez jejich širšího propojení navzájem.

Bylo by pro mě velkým zadostiučiněním, kdyby práce našla své místo a uplatnění přímo v praxi učitelů a reálně jim napomohla při jejich práci. Zadají-li si učitelé po zveřejnění této práce do internetového vyhledávače pojem *přechod přes desítku*, setkají se, krom pár dílčích námětů, také s celistvým souborem mapujícím tento učební celek z mnoha různých úhlů pohledů jak v teoretické, tak praktické rovině. A především pak s náměty, které lze užít v konkrétní výuce. U mnoha pomůcek je pak naznačeno, jak si je vyrobit svépomocí, či uzpůsobit konkrétně pro potřeby přechodu. Vzhledem k finanční náročnosti některých pomůcek by pak učitelé mohli právě tuto modifikaci ocenit. Texty jsou velkou měrou doplněny obrazovými přílohami, které by měly práci zatraktivnit a učitelské veřejnosti přiblížit. Svou diplomovou prací bych ráda přispěla právě k většímu přehledu učitelů o možných dostupných pomůckách, ze kterých mohou při zavádění, výuce i procvičování přechodu přes první desítku vybírat.

S výslednou podobou práce jsem spokojená. Věřím v její přínos ve smyslu zvýšení povědomí o této problematice, přispění k současnému stavu jejího zkoumání a obohacení jak své vlastní, tak pedagogické praxe učitelů obecně.

Seznam literatury

CÍGLER, H. (2017). *Měření matematických schopností* [disertační práce]. Brno: PÚ FF MU

ČÁP, Jan a MAREŠ, Jiří. *Psychologie pro učitele.* Vyd. 1. Praha: Portál, 2001. 655 s. ISBN 80-7178-463-X.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika: pro 2. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007. 3 sv. (88, 88, 110 s.). ISBN 978-80-7235-370-5.

DIVÍŠEK, Jiří, KUŘINA, František a HOŠPESOVÁ, Alena. *Svět čísel a tvarů: metodická příručka k výuce matematiky ve 1. ročníku základní a obecné školy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. 64 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-016-0

DIVÍŠEK, Jiří, KUŘINA, František a HOŠPESOVÁ, Alena. *Svět čísel a tvarů: metodická příručka k výuce matematiky ve 2. ročníku základní a obecné školy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. 64 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-073-X

DIVÍŠEK, Jiří, HOŠPESOVÁ, Alena a KUŘINA, František. *Svět čísel a tvarů: matematika pro 2. ročník základní školy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1997. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-069-1.

DOSTÁL, Jiří. *Učební pomůcky a zásada názornosti.* Vyd. 1. Olomouc: Votobia, 2008. 40 s. ISBN 978-80-7220-310-9.

GESCHWINDER, Jan et al. *Metodika využití materiálních didaktických prostředků.* 1. vyd. Praha: SPN, 1987. 262 s.

HAINSTOCK, Elizabeth G. *Metoda Montessori a jak ji učit doma: školní léta*. Překlad Růžena Pokorná. Praha: Pragma, 1999. 166 s. ISBN 80-7205-662-X.

HEJNÝ, Milan a kol. *Teória vyučovania matematiky*. [díl] 2. 2. vyd. Bratislava: Slov. pedagog. nakl., 1990. 554 s. ISBN 80-08-01344-3.

HEJNÝ, Milan a KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009. 232 s. Pedagogická praxe. ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, Milan a VONDROVÁ, Naďa. *Číselné představy dětí: [kapitoly z didaktiky matematiky]*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 1999. 123 s. ISBN 80-86039-98-6.

HEJNÝ, Milan, JIROTKOVÁ, Darina a SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. *Matematika: pro 1. ročník základní školy.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2007- . sv. ISBN 978-80-7238-626-0.

HESOVÁ, Alena a ZELENDOVÁ, Eva. *Finanční gramotnost ve výuce: metodická příručka*. Vyd. 1. Praha: Národní ústav pro vzdělávání, školské poradenské zařízení a zařízení pro další vzdělávání pedagogických pracovníků (NÚV), divize VÚP, 2011. 59 s. ISBN 978-80-86856-74-2.

HÖLZLOVÁ, L. (2012). *Použití kalkulačky na interaktivní tabuli ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ* [diplomová práce]. České Budějovice: Pdf JU

CHINN, Steve. *The Trouble with Maths: A Practical Guide to Helping Learners with Numeracy Dificculties.* Ilustrované vyd. New York: Taylor & Francis, 2004. 192 s. ISBN 0203358090, 9780203358092

KALHOUS, Zdeněk. *Školní didaktika*. Vyd. 1. Praha: Portál, 2002, 447 s. ISBN 80-7178-253-x.

KOLLÁRIKOVÁ, Zuzana, ed. a PUPALA, Branislav, ed. *Předškolní a primární pedagogika = Predškolská a elementárna pedagogika.* Vyd. 2. Praha: Portál, 2010. 455 s. ISBN 978-80-7367-828-9.

KOŠČ, Ladislav. *Psychológia matematických schopností.* 1. vyd. Bratislava: Slov. pedagog. nakl., 1972. 276 s.

KREJČOVÁ, Eva. *Rozvíjení matematických představ 3: učitelství pro mateřské školy.* Vyd. 1. Hradec Králové: Gaudeamus, 2014. 119 s. ISBN 978-80-7435-510-3.

KUJAL, Bohumír, ed. *Pedagogický slovník.* 1. vyd. Praha: SPN, 1965-1967.

KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice.* 1. vyd. Praha: SPN, 1990. 247 s.

MAŇÁK, Josef a ŠVEC, Vlastimil. *Výukové metody*. Brno: Paido, 2003. 219 s. ISBN 80-7315-039-5.

MAŇÁK, Josef. *Nárys didaktiky*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1990. 111 s. ISBN 80-210-0210-7.

MICHALOVÁ, Zdena. (2010). Vývojová hlediska rozvoje matematických schopností v předškolním věku a jejich dopad pro počáteční výuku matematiky ve škole. *Speciální pedagogika: časopis pro teorii a praxi speciální pedagogiky*, roč. 11, č.: 5, s. 277-284, ISSN: 1211-2720, původní článek

MONTESSORI, Maria. *Tajuplné dětství.* Překlad Jan Volín. Vyd. 2., V Tritonu 1. Praha: Triton, 2012. 178 s. ISBN 978-80-7387-382-0.

NELEŠOVSKÁ, Alena. *Pedagogická komunikace v teorii a praxi*. Praha: Grada, 2005. 171 s. Pedagogika. ISBN 80-247-0738-1.

NOVÁK, Josef. *Dyskalkulie: metodika rozvíjení základních početních dovedností.* Vyd. 3., zcela přeprac., rozš. Havlíčkův Brod: Tobiáš, 2004. 125 s. ISBN 80-7311-029-6.

RENDL, M. (1998). Vývoj počítání v první třídě. In: PRAŽSKÁ SKUPINA ŠKOLNÍ ETNOGRAFIE. *První třída: příloha závěrečné zprávy o řešení grantového projektu GA ČR 406/94/1417 - leden 1997 "Žák v měnících se podmínkách současné školy"*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 1998. iv, 364 s. Školní etnografie. ISBN 80-86039-61-7.

PRŮCHA, Jan, Eliška WALTEROVÁ a Jiří MAREŠ. Pedagogický slovník. 4., aktualiz. vyd. Praha:Portál, 2003, 322 s. ISBN 80-7178-772-8.

PRŮCHA, Jan, WALTEROVÁ, Eliška a MAREŠ, Jiří. *Pedagogický slovník*. 7., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Portál, 2013. 395 s. ISBN 978-80-262-0403-9.

RAMBOUSEK, Vladimír a kol. *Technické výukové prostředky.* 1. vyd. Praha: SPN, 1989. 302 s.

RENDL, Miroslav, VONDROVÁ, Naďa a kol. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013. 357 s. ISBN 978-80-7290-723-6.

RUISEL, Imrich. *Základy psychologie inteligence*. Praha: Portál, 2000, 183 s. ISBN 80-7178-425-7.

SKUTIL, Martin a kol. *Pedagogický a speciálně pedagogický slovník: [terminologický slovník zaměřený na primární a preprimární vzdělávání]*. Vyd. 1. Praha: Grada, 2011. 101 s. Pedagogika. ISBN 978-80-247-3855-0.

Studijní plány Matematicko-fyzikální fakulty. Univerzita Karlova. Matematicko-fyzikální fakulta. Praha: Matfyzpress, 1995.

SVOBODA, Mojmír, KREJČÍŘOVÁ, Dana a VÁGNEROVÁ, Marie. *Psychodiagnostika dětí a dospívajících.* Vyd. 2. Praha: Portál, 2009. 791 s. ISBN 978-80-7367-566-0.

ŠVAŘÍČEK, Roman a kol. *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách.* Vyd. 1. Praha: Portál, 2007. 377 s. ISBN 978-80-7367-313-0.

TARÁBEK, Pavol et al. *Matematika 3: pro 1. ročník základní školy.* Vyd. 1. Brno: Didaktis, 2005. 52 s. ISBN 80-7358-036-5.

VANÍČEK, Jiří. *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie.* V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2009. 212 s. ISBN 978-80-7290-394-8.

VONDROVÁ, Naďa a kol. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků.* Vydání první. V Praze: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2015. 462 stran. ISBN 978-80-246-3234-6.

Seznam cizojazyčné literatury

DONLAN, Chris. *The Deveopment of Mathematical Skills*. Ilustrované vyd. Abingdon: Taylor & Francis, 1998. 338 s. ISBN 086377816X, 9780863778162

CHINN, Steve. *The Trouble with Maths: A Practical Guide to Helping Learners with Numeracy Dificculties.* Ilustrované vyd. New York: Taylor & Francis, 2004. 192 s. ISBN 0203358090, 9780203358092

KVAZS, Ladislav. *Patterns of Change*. Vyd. 1. Basel: Birkhäuser, 2008. ISBN 978-3-7643-8839-3.

Elektronické zdroje

Co je to „Hejného metoda“? (2018) [online]. *Hejného metoda* [cit. 25. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.h-mat.cz/hejneho-metoda

ROSECKÁ, Z. (2015) Číselná osa – orientace, porovnávání, zaokrouhlování [online]. *Nová škola DUHA, s.r.o* [cit. 18. 11. 2017]. Dostupné z: http://www.novaskola brno.cz/c/ciselna-osa-orientace-porovnavani-zaokrouhlovani-22/

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ J. (2001). Schéma triády – klíč k porozumění aritmetice - část 2 [online]. *KritickeMysleni.cz* [cit. 20. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.kritickemysleni.cz/klisty.php?co=26/!triady2

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., KRATOCHVÍLOVÁ J. (2006). Práce s chybou jako strategie rozvoje klíčových kompetencí žáka [online]. *Společnost učitelů matematiky JČMF* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.suma.jcmf.cz/news/texty-z-projektu-esf-podil-ucitele-matematiky-zs-na-tvorbe-svp/

HEJNÝ, M., KUŘINA, F. Tři světy Karla Poppera a vzdělávací proces. *Pedagogika: časopis pro vědy o vzdělávání a výchově* [online]. Praha: Pedagogická fakulta UK, 2000, s. 38-50 [cit. 9. 1. 2018]. ISSN 2336-2189. Dostupné z: http://userweb.pedf.cuni.cz/wp/pedagogika.

JANKŮ, M. (2013). Prvňáci a matematika XV. Sčítání, odčítání do 20 s přechodem přes 10 [online]. *Metodický portál* [cit. 18. 11. 2017]. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/clanek/k/z/12953/PRVNACI-A-MATEMATIKA-XV-SCITANI-ODCITANI-DO-20-S-PRECHODEM-PRES-10.html/

Klehňová, M. (2016) Oproti zahraničí u nás učí méně mužů [online]. *Statistika a my: Měsíčník českého statistického úřadu* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.statistikaamy.cz/2016/03/oproti-zahranici-u-nas-uci-mene-muzu/

MÁLKOVÁ, P. *Příručka pro rodiče žáků s výukou matematiky podle metody prof. Milana Hejného* [online]. Ždírec nad Doubravou, 2014 [cit. 25. 3. 2018]. Dostupné z: https://ucebnice.fraus.cz/file/edee/2015/05/prirucka-pro-rodice3.pdf

MÜLLER, G., WITTMANN, E. (2017) Plättchen & Co. digital. Sechs mal sechs Module für die Grundschule [online]. *Mathe 2000+* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.mathe2000.de/plaettchen-und-co-digital

MÜLLER, G., WITTMANN, E. (2017) Rechenposter: Einspluseins und Einmaleins [online]. *Mathe 2000+* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.mathe2000.de/rechen poster-einspluseins-und-einmaleins

Práce v prostředích: učíme se opakovanou návštěvou (2018) [online]. *Hejného metoda* [cit. 1. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.h-mat.cz/sites/default/files/kestazeni/H-mat_Prostredi_krokovani_a_schody.pdf

První pomoc pro rodiče k matematice Fraus (2014) [online]. *Škola Klánovice* [cit. 18. 11. 2017]. Dostupné z: http://www.zs-kl.cz/vyuka/?idclanku=287

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: MŠMT, 2017. 166 s. [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/file/43792/.

SLEZÁKOVÁ, J, ŠUBRTOVÁ, E. *Matematika všemi smysly aneb Hejného metoda v MŠ* [online]. Praha: Step by Step ČR, 2015 [cit. 25. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.h-mat.cz/sites/default/files/kestazeni/Brozura_Hejneho_metoda-web.pdf

Zdroje obrazové přílohy

Abaco 20 [online obrázek]. *Multip* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.multip.cz/abaco-20-m

Addieren mit Überschreiten des Zehners (2015) [online obrázek]. *Lernstübchen* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://lernstuebchen-grundschule.blogspot.cz/2015/11/addieren-mit-uberschreiten-des-zehners.html

Additionner en passant par la dizajne (2013) [online obrázek]. Coraliecaramel [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://coraliecaramel.eklablog.com/passage-par-la-dizaine-a74483065

Counting Bead String [online obrázek]. *The Childminding Shop* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.thechildmindingshop.co.uk/product/counting-bead-string-20-small

Crossing the boundary of ten (2017) [online obrázek]. *Wombwell Pakr Street Primary School* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.wombwellparkstreet.co.uk/team-gg-blog1/crossing-the-boundary-of-ten

Čísla 1-10 [online obrázek]. *Stiefel* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.stiefel-eurocart.cz/matematika/1204-cisla-1.html

Dopočítej pyramidy (2016) [online obrázek]. *Dětské stránky* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.detskestranky.cz/dopocitej-pyramidy/

Dvacítkové počítadlo [online obrázek]. *Multip* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.multip.cz/dvacitkove-pocitadlo-bz-85034

Krokovací pás [online obrázek]. *Knihkupectví papyrus* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.knihkupectvi-papyrus.cz/matematika-1-pro-zs-krokovaci-pas-p906511/

Montessori – Odčítací hadí hra [online obrázek]. *Heda* [online]. [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.heda.cz/montessori-pruefl/matematika/montessori-p-odcitaci-hadi-hra.html

Montessori – Sčítací hadí hra [online obrázek]. *Heda* [online]. [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.heda.cz/montessori-pruefl/matematika/montessori-p-scitaci-hadi-hra.html

Nienhuis - Velký perlový materiál – set se skleněnými perličkami [online obrázek]. *Montessori hračky.cz* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://montessorihracky.cz/cs/nienhuis-montessori-pomucky/4597-nienhuis-velky-zlaty-perlovy-material-set-se-sklenenymi-perlickami.html

Papírové mince [online obrázek]. *skolnibrasnicka.cz* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.skolnibrasnicka.cz/matematika/35-papirove-mince-samostatne.html

Partitioning Ten With Ten - Frames Loop Cards [online obrázek]. *Twinkl* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.twinkl.co.uk/resource/cfe-n-193-partitioning-ten-with-ten-frames-loop-cards

Počítadlo [online obrázek]. *Popron* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.popron.cz/tabule-pocitadla/pocitadlo-30306

Počítadlo dřevěné – velké [online obrázek]. *Sevt* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.sevt.cz/produkt/pocitadlo-drevene-velke-770-1425-mm-12978000/

Počítadlo dřevěné [online obrázek]. *Poprokan* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.poprokan.cz/matematika-3467/pocet/36/razeni/cenav

Počítání na prstech [online obrázek]. *NOMIland* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.nomiland.cz/pocitanie-na-prstoch/

Počítání s dřívky – čísla a puntíky [online obrázek]. *Chytré hračky* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://chytrehracky.cz/kategorie/1498-pocitani-s-drivky-cisla-a-puntiky-.html?utm_source=seznam&utm_medium=cpc&utm_campaign=DRTG&utm_content=Po%25c4%258d%25c3%25adt%25c3%25a1n%25c3%25ad+s+d%25c5%2599%25c3%25advky+-+%25c4%258d%25c3%25adsla+a+punt%25c3%25adky8+-+14

Popisovatelná číselná osa 0-20 [online obrázek]. *Knihy.ABZ.cz* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://knihy.abz.cz/prodej/2-25-popisovatelna-ciselna-osa-0-20-matematika-a-jeji-aplikace

Přechod přes desítku (2017) [online obrázek]. *Studijní centrum BASIC* [online]. [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.basic.cz/prechod-pres-desitku/

Sčítací prstové tabulky (2011) [online obrázek]. *rajce.net* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://19kurz.rajce.idnes.cz/scitaci_prstove_tabulky/

Sčítání (výuková tabulka) [online obrázek]. *MONTESSORI pomůcky* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.montessori-eshop.cz/scitani-vyukova-tabulka-p-115.html

Stovková tabule [online obrázek] *StarChild* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.starchild.cz/katalog/nienhuis-montessori/matematika/stovkova-tabule/

Superhero -Themed Double Ten - Frames [online obrázek]. *Twinkl* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.twinkl.co.uk/resource/t-n-5042-superhero-themed-double-tens-frames

BEDNÁŘOVÁ, J. Jak vysvětlit dítěti odčítání přes desítku [online obrázek]. *Škola zvesela* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.skolazvesela.cz/wp-content/uploads/2015/10/pet3.jpg

BEDNÁŘOVÁ, J. Jak vysvětlit dítěti odčítání přes desítku [online obrázek]. *Škola zvesela* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: https://www.skolazvesela.cz/wp-content/uploads/2016/01/pr1.png

BOMEROVÁ, E. (2015) Krokovací pás - lavice - čísla [online obrázek]. *Krokování* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.bomerova.cz/krokovani-0

KOHOUT, J. (2016) Jak se nejlépe naučit – pyramida zapamatování [online obrázek]. *Jak se rychle naučit* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://jakserychlenaucit.cz/jak-se-nejlepe-ucit-pyramida-zapamatovani/

MÜLLER, G., WITTMANN, E. (2017) Einspluseins-Tafel [online obrázek]. *Mathe 2000+* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.mathe2000.de/rechenposter-einspluseins-und-einmaleins

MÜLLER, G., WITTMANN, E. (2017) Zwanzigerfeld [online obrázek]. *Mathe 2000+* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://www.mathe2000.de/plaettchen-und-co-digital

SCHREIER, J., KALÁČ, J. (2014) Faktory ovlivňující volbu učební pomůcky [online obrázek]. *Studijní materiály využití CAD technologií při tvorbě výukových objektů* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://docplayer.cz/582075-Studijni-materialy-vyuziti-cad-technologii-pri-tvorbe-vyukovych-objektu.html

VRÁNOVÁ, J. (2005) Matematické hřiště [online obrázek]. *Stránky na podporu didaktiky matematiky* [cit. 27. 3. 2018]. Dostupné z: http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/cachoja1/MODELY/2005/Mod_vran_hriste.pdf

Seznam tabulek

Seznam obrázků

Příloha A: Pracovní list

Téma: počítání s přechodem přes desítku

Ročník: 2.

Jméno: ___________________________

Úloha č. 1

Zapiš rozklad, zakroužkuj desítku a vypočítej:

7 + 4 = ____   8 + 3 = ____   12 – 8 = ____

3	1				

Představ si, že jsem tvůj spolužák, který těmto počtům vůbec nerozumí. Pokus se mi, prosím, vysvětlit, jak jsi počítal/a a proč.

Úloha č. 2

Vypočítej zpaměti. Ke druhému příkladu opět zapiš příklad se zaměněným pořadím čísel. Řekni, který ze dvou příkladů v řádku by se ti lépe počítal a proč. Dej ho do kroužku.

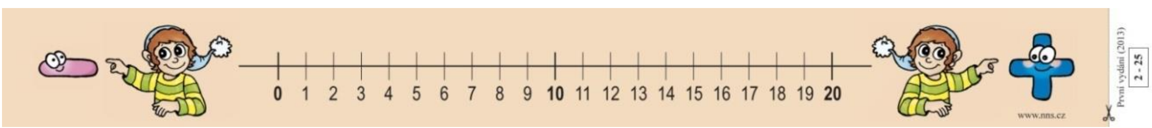
9 + 3 = ____ ⇨ 3 + 9 = ____

9 + 2 = ____ ⇨ + = ____

Úloha č. 3

Vypočítej, příklad znázorni pomocí pastelek na číselné ose.

6 + 5 = ____



Úloha č. 4

Tatínek koupil 7 jahodových a 6 makových koláčů. Kolik koláčů koupil celkem? Znázorni tento příklad na přiložené číselné ose tentokrát pomocí barevných korálků. Pozoruj, kolik jsi přidal do deseti a kolik ti zbylo přes desítku. Červené korálky představují jahodové koláče, modré korálky makové.

Úloha č. 5

Počítej zpaměti.

4 + 8 = ____

12 – 6 = ____

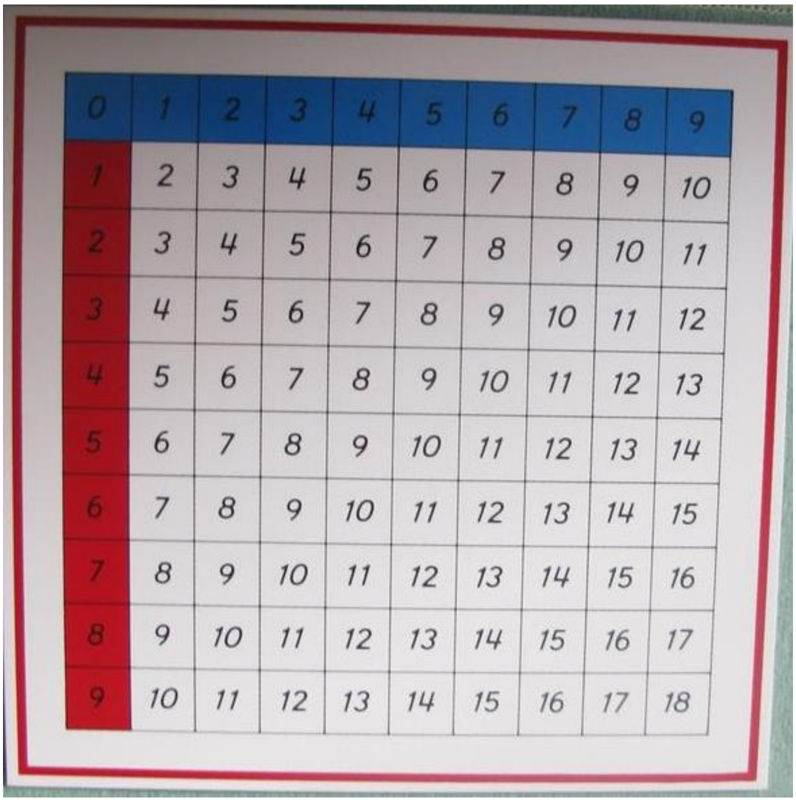
Úloha č. 6

Vyřeš příklad s pomocí počítadla.

5 + 9 = ____

Úloha č. 7

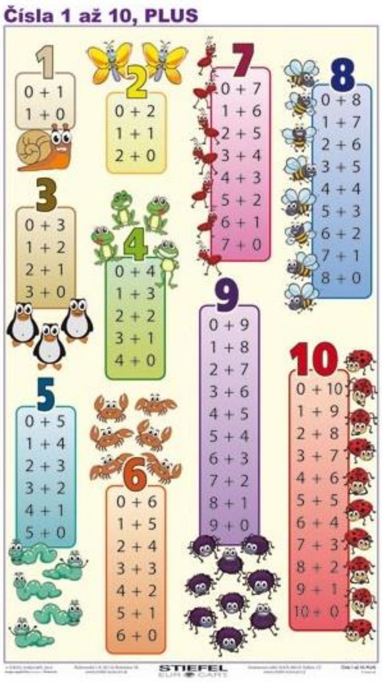
Zde vidíš sčítací tabulku. Pomocí ní si můžeš kontrolovat výsledky některých svých výpočtů. Zkontroluj si pomocí této tabulky výsledek prvního příkladu z úlohy číslo 5. Dokážeš sám přijít na to, jak to udělat? Kolik způsobů kontroly nalezneš?



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Úloha č. 8

Máš za úkol vypočítat příklad 4 + 9. Už víš, že při počítání nám pomáhají rozklady čísel. Které číslo rozložíš? A který z následujících rozkladů použiješ? Zakroužkuj ho/je v následujícím schématu:



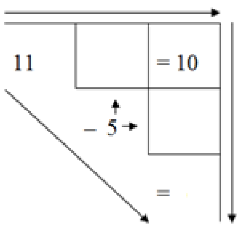
Úloha č. 9

V pokladničce máš 5 korun. Ode mě dostaneš dalších 7 korun. Přidej peníze do pokladničky tak, aby v ní bylo deset korun. Kolik korun ti zbude? Kolik korun máš celkem? Řeš příklad pomocí přiložených papírových penízků.

Nyní všechny penízky z pokladničky vyndej a dej na hromádku. Co můžeš udělat, abys měl méně mincí, ale stejně korun?

Úloha č. 10

Řeš příklad 11 – 5 pomocí následujícího schématu:

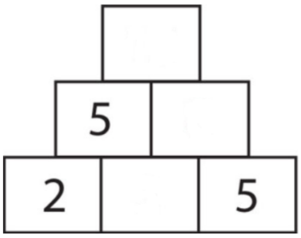


Doplňující otázka k úloze č. 10

Je pro tebe srozumitelnější znázornění příkladu z úlohy č. 1, nebo č. 10? Znovu si představ, že se pokoušíš vysvětlit počítání s přechodem přes desítku kamarádovi, který tomu nerozumí. Které znázornění bys pro vysvětlení použil raději a proč?

Úloha č. 11

Vyřeš pyramidu. Platí, že součet čísel ze dvou sousedních cihliček se rovná číslu v cihličce nad nimi.

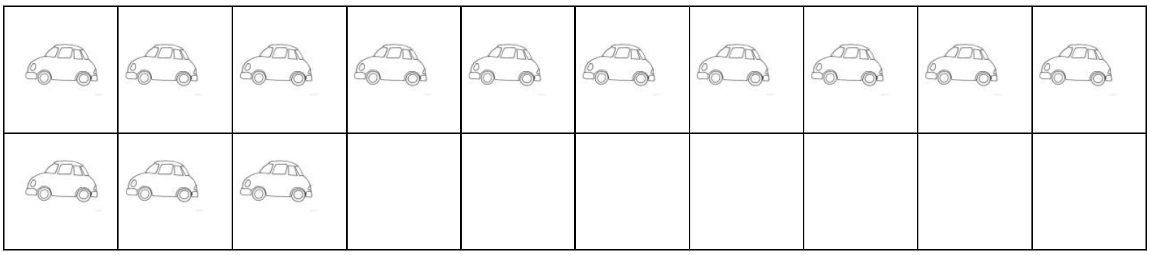


Úloha č. 12

Maminka koupila 9 hrušek a 4 jablka. Doma chtěla dát všechny kusy ovoce do mísy. Tam se jí ale vešlo pouze deset kusů zakoupeného ovoce. Kolik kusů jí zbylo mimo mísu? Řeš příklad pomocí korálků a přiložené mističky. Zelené korálky představují hrušky, červené korálky jablka. Mohla maminka zaplnit mísu více způsoby? Jakými?

Úloha č. 13

Adam měl ve sbírce celkem 13 autíček. 9 autíček věnoval mladšímu bratrovi na hraní. Kolik autíček Adamovi zbylo? Znázorni na mřížce:



Úloha č. 14

Na řetízkovém kolotoči se vezou: 4 chlapci, 7 děvčat a 8 dospělých. Kolik se veze na kolotoči dětí? Řeš příklad na přiložené mřížce pomocí PET víček. Chlapce představují modrá víčka, děvčata červená. Žlutá víčka představují dospělé.

Úloha č. 15

Před sebou vidíš početní špalíčky. Tyto špalíčky pomáhají dětem při výpočtech. Na každém špalíčku vidíš určitý počet stejně barevných koleček od jedné do deseti.

Pokus se řešit příklad 7 + 5 pomocí těchto špalíčků. Jaký je výsledek tohoto příkladu? Nyní si pod své špalíčky přilož takové, abys měl/a stejný počet koleček jako ve výsledku (zde). Podmínkou však je, že musíš použít špalíček s deseti kolečky. Kolik koleček bude mít druhý špalíček? Co můžeš nyní na této sestavě pozorovat? (Nápověda: Můžeš na modelu pozorovat rozklad nějakého čísla?)

Úloha č. 16

Představ si, že ty a já jsme stáli vedle sebe. Ty jsi udělal 13 kroků dopředu a poté 5 kroků zpět dozadu. Kolik kroků dopředu musím udělat já, abych opět stála vedle tebe? Pojďme zkusit vyřešit příklad na krokovacím páse.

Platí, že co políčko, to jeden krok. Pozor! Při pohybu zpět se na páse <u>ne</u>otáčíme, smíme pouze <u>couvat</u>. Postav se nyní na nulu, poslechni si znovu zadání a poté začni dělat kroky. Počítej si nahlas.

Vrať se, prosím, zpět na nulu. Druhá úloha pro tebe zní: Když uděláš 6 kroků dopředu a poté ještě 8 kroků dopředu, kolik kroků dopředu musím udělat já, abych opět stála vedle tebe? Opět si počítej nahlas, prosím.

Doplňující otázky

Jak bys zhodnotil/a naše dnešní počítání?

Jak se ti pracovalo s modelem peněz, korálky, víčky, krokovacím pásem či špalíčky?

Pomáháš si v matematice počítáním na prstech? Pokud ano, vymysli, prosím, jakýkoliv příklad, ve kterém budeš počítat přes desítku a ukaž mi, jak si prsty pomůžeš.

Je pro tebe snadnější sčítání, nebo odčítání přes desítku? A proč?

Setkal/a jsi se při výuce s pojmem *desítková soustava*? Pokud ano, pověz mi, prosím, co o tomto tématu víš.

Zde vidíš stovkovou tabulku.(Předložit žákovi.) Používáte ji ve tvé třídě při počítání? Pokud ano, jak? Pokud ne, jak si myslíš, že by ti mohla pomoci?

Příloha B: Záznam průběhu počítání v rámci experimentálního šetření

Úloha č. 1

Štěpánka

Štěpánka je svou vyučující hodnocena jako průměrná počtářka.

V první úloze řeší Štěpánka bez obtíží první dva příklady. Dívka sama bez vybídnutí začne vysvětlovat, jakým způsobem ve škole počítají: *,,My to počítáme tak, že přičteme, kolik chybí do té desítky, a pak jenom uděláme to jedno zbývající číslo.‘‘* Lze usuzovat, že algoritmus sčítání má dívka zažitý dobře. Výrazem opisuje skutečnost další potřebné operace s číslem, a to přičtení zbytku z rozkladu k základu deset. U třetího příkladu Štěpánka chvíli váhá, než začne počítat. U tohoto příkladu na odčítání 12 – 8 volí chybný rozklad čísla. Číslo osm rozkládá na tři a pět. Lze se domnívat, že volí typ rozkladu, se kterým se často setkává, a nikoliv tedy takový, který je pro řešení dané úlohy třeba. Do výsledku dosazuje hodnotu pět, tedy automaticky opisuje druhé číslo z rozkladu, což dokládá, že u odčítání postupuje stejným algoritmem, jako u sčítání, tedy chybně. Dívka si k demonstraci odpovědi na moji doplňující otázku vybírá druhý příklad z první úlohy 8 + 3: *,,My máme osmičku, ale teď ji musíš rozložit, tak, aby to bylo nejdříve desítka, a pak až musíš přičíst to další zbývající číslo.‘‘* Dívka opět správně popisuje algoritmus řešení úlohy, ovšem chybně uvádí, že je třeba rozložit číslo osm. Sama přitom při řešení úlohy správně rozložila druhého sčítance, a to číslo tři. Je otázkou, na kolik mají děti správně osvojenou teorii počítání, a na kolik jsou schopny ji správně aplikovat na své výpočty. S tímto jsem se setkala jak dále u Štěpánky, tak později i u ostatních dětí. Dále jsem se Štěpánky ptala na to, jak postupuje při odčítání. Odpověděla takto: *,,No je to podobný. Musíš nejprve odčíst tolik, aby to bylo deset, a pak jenom to zbývající číslo a vypočítáš výsledek.‘‘* Z odpovědi lze vysuzovat, že Štěpánka zná z teoretického hlediska postup správně, nicméně v řešení chybovala.

Michal

Míša je paní učitelkou hodnocen jako výborný počtář.

V první úloze počítá bez obtíží všechny příklady, včetně toho na odčítání. Správně zapisuje rozklady. Stejně jako Štěpánka vysvětluje postup tkvící v restrukturaci příkladu. A také stejně tak, jako dívka, nekroužkuje oproti zadání a předloze desítku. Ani jedno z dětí jsem dále nenutila kroužkování dodělávat. Z jejich vysvětlení bylo patrné, že ví a rozumí tomu, kde a proč se desítka nachází. Osobně jsem toho názoru, že pokud některé děti počítají například i bez nutnosti znázornit si rozklad, není vhodné je k tomu zbytečně pokaždé nutit.

Roman

Románek je paní učitelkou hodnocen jako žák, který v matematice mívá obtíže. Žák má také první stupeň podpůrného opatření.

V první úloze Románek u prvního příkladu říká, že na výsledek přišel na prstech, se kterými opravdu krátce před zápisem výpočtu manipuluje. U druhého příkladu chlapec správně rozkládá číslo osm na dvě a tři. Není mi však schopen odpovědět na otázku *proč*. Problém pro něj představuje slovní komentář postupu. U třetího příkladu chce chlapec ve spoji 12 – 8 rozložit číslo osm chybně na sedm a jedna. Na mou otázku – *Jak odčítáme?* Opět nedokáže odpovědět a říká, že neví. Chlapci se tedy pokouším slovně vysvětlit postup já. Románek se snaží opravit a uvádí, že číslo osm tedy rozložíme na dvě a tři. Lze se domnívat, že algoritmus odčítání chlapec ještě zcela nepochopil. Románek si samovolně bere opět na pomoc prsty. Začíná odpočítávat již rovnou od desítky a správně přichází na výsledek *čtyři*. Není si ale jistý a svou odpověď nejprve šeptá.

Úloha č. 2

Štěpánka

U druhé úlohy má Štěpánka za úkol označit, který z uvedených příkladů by se jí lépe počítal a proč. Má na výběr ze dvou typů příkladů: K většímu číslu přičíst menší číslo, nebo k menšímu číslu větší. Štěpánka uvádí: *,,Tak je lehčí tři plus devět, protože když máme menší číslo, tak se nám s ním lépe počítá.‘‘* Dívka správně zmiňuje fakt, že se lépe počítá s menším číslem, nezmiňuje již ale proč - že se snáze rozloží. Nicméně uvádí, že jednodušší je pro ni spoj 3 + 9 a nikoliv 9 + 3. Pořadí sčítanců tedy nebere v potaz a tyto dva spoje pro ni zřejmě představují stejný příklad (což samozřejmě vzhledem ke komutativnosti v podstatě i jsou).

Michal

Zajímavé vysvětlení u této úlohy podává Míša, který nejprve demonstruje postup řešení druhého početního případu (3 + 9) na prstech v souvislosti s tím, že je nutné je u takových příkladů (dle jeho slov) využít, pokud to někomu vůbec nejde. Můžeme se domnívat, že i on sám si možná občas při obtížnějších příkladech prsty pomůže. Naproti tomu dává první příklad do kontrastu takto: *,,A když to máš tady, tak si to rozložíš v hlavě na jedna a dva a potom se ti to lehce dopočítá.‘‘* Míša tedy sice nepřímo, ale správně uvedl, že lehčí je pro něj řešit příklad první. A také první příklady na rozdíl od Štěpánky kroužkuje. Patrně mezi nimi tedy rozlišuje a pořadí sčítanců pro něj hraje roli.

Roman

Románek uvádí, že výsledek prvního spoje 9 + 3 je třináct. Dotázala jsem se tedy, jak k výsledku došel. Románek mi na prstech ukazuje a říká: *,,Dal jsem si devět prstíků a ještě tady raz dva tři.‘‘* Nicméně stále odpovídá, že výsledek bude třináct. Románek totiž sice ukázal zprvu devět prstů, ale posléze pokračoval tak, že je všechny schoval a znovu na jedné ruce napočítal a zvedl tři prsty. Románek tedy číslo tři nerozložil a nedopočítal jako první do desítky. U druhého spoje s opačným pořadím sčítanců ihned zapisuje správný (stejný) výsledek. Románek dále reaguje na dotaz, ohledně snazšího počítání. Bez váhání určuje, že lépe se počítají druhé spoje. Komentuje takto: *Protože tady je tři a tady devět.* Přičemž ukazuje na čísla v příslušném spoji. Chlapec nedokáže problematiku doslovně vyjádřit tak, jako třeba Štěpánka. Doptávám se tedy dál, načež chlapec dodává, že číslo tři je menší než devět. Z rozhovoru s paní učitelkou vím, že děti již jednou podobnou úlohu řešili. Románek si evidentně z výkladu paní učitelky na toto téma jakési informace zafixoval, vypadá to však, že také nerozlišuje v pořadí sčítanců, respektive spoje považuje za stejné, a tudíž možná nerozumí mému dotazu. Také si zřejmě teorii nedokáže vždy přiřadit ke konkrétním početním situacím.

Románka tedy opisem navádím na to, že pořadí sčítanců v potaz bereme. Tehdy už se chlapec opravuje a kroužkuje první spoje.

Úloha č. 3

Štěpánka

Ve třetí úloze Štěpánka bez obtíží řeší spoj 6 + 5, sčítance zaznamenává ve stejném pořadí na číselnou osu.

Michal

Míša taktéž nemá s grafickým vyznačením na číselné ose problém. Dle slov paní učitelky, pracují děti s číselnou osou často. Rozdíl vidím pouze v tom, že Štěpánka si (soudě dle pohybu rtů) při znázornění odříkávala od hranice šesti druhého sčítance (od jedné do pěti) a k hranici jedenácti tedy došla postupně, kdežto Míša jakoby výsledek věděl předem a poměrně hbitě značí rovnou k hranici jedenáctky oblouček. Některé děti evidentně skrze znázornění, pomůcku či model dojdou k výsledku postupně a jiným hbitým počtářům už může často sloužit spíše ke zpětnému kontrolnímu znázornění postupu a výsledku, který již znají z hlavy.

Roman

U číselné osy mě Románek přivedl na následující myšlenku: některé děti zřejmě mohou mít potíž brát v úvahu vzdálenosti mezi jednotlivými body na ose, což se odráží na občasné pochybnosti ohledně způsobu znázornění. Románek sice začal správně značit barevnou pastelkou od nuly do šesti, dále však chtěl pokračovat až od bodu sedm, tedy měl v úmyslu vynechat prostor na přímce mezi body šest a sedm. Děti v této době samozřejmě ještě nemají představu o desetinných číslech atd. Číselnou osu neztotožňují například s metrem. Lze se domnívat, že jeho počínání by mohlo poukazovat na rozpor mezi vnímáním číslice na ose jako adresy a veličiny.

Úloha č. 4

Štěpánka

U čtvrté úlohy dívka sama od sebe demonstruje příklad 9 + 4, který si sama zvolila, na číselné ose pomocí korálků. Připodobňuje práci s korálky ke způsobu, kterým postupují ve škole na mřížce. Dle slov paní učitelky děti využívají různě barevné fazole, které přikládají na mřížku, každé dítě má k dispozici svou. Využívají mřížku o deseti políčkách v řádku. Štěpánky jsem se zeptala, kolik v tomto příkladu dopočítala (přidala) do desítky, a kolik jí zbylo přes desítku. Na toto mi nebyla schopna odpovědět. Věřím, že kdybych se zeptala jiným způsobem, tedy, které číslo rozložila a jak, odpovědět by dokázala. Myslím, že je důležité střídat terminologii a ptát se například opisy, aby děti dokázaly na počítání nahlížet z více stran. Vlastní zadání úlohy dívka řeší a komentuje následovně: *,,Nejdříve si vezmu těch sedm a zase dělám to samý. Pozoruju, co se s čím děje a tvořím ten příklad.''* Dále jsem se znovu pokusila zeptat Štěpánky, kolik korálků přidala do deseti, a kolik jich má přes desítku. Nyní již dívka odpovídá ihned správně a bez problémů. Zaujal mne výraz – *tvořím příklad.* Myslím, že tyto hmotné modely podněcují děti, mimo jiné, také ke kreativním úvahám.

Michal

Míša u vykládání korálků na osu narazil na dilema: *,,Mám začínat od nuly?''* Míšovi jsem odpověděla nejasně, nechala jsem volbu schválně na něm. Poté se Míša opravuje, uvádí, že musí začít od jedničky. Zdůvodňuje takto: *,,Protože tady bysme museli počítat: nula, jedna, dva, tři, a když chceš začít od jedničky, tak musíš počítat: jedna, dva, tři, čtyři a dál.''* Míša dále nemá problém s odpovědí na dotaz - kolik korálků přidal do deseti, a kolik mu jich zbylo přes desítku.

Vykládání korálků na osu je sice zdlouhavější proces, než pouhé vyznačení pastelkou, na druhou stranu má dítě více času se příkladem zabývat, a jak řekla Štěpánka – *tvořit ho.* Každá taková zkušenost navíc navozuje nové situace, které dítě musí řešit (viz počáteční Míšovo dilema s nulou a jedničkou).

Roman

Chlapec začíná přikládat korálky na body, nikoliv do prostoru mezi nimi, stejně jako ostatní děti. Což samozřejmě není chybou. Pouze bychom tuto skutečnost mohli považovat za indicii, která by částečně podložila mou myšlenku ohledně osy, bodů a vzdáleností mezi nimi. Románek na dotaz, kolik v tomto příkladu dopočítal (přidal) do desítky, odpovídá originálně a v podstatě také správně – říká deset. Románek evidentně nepochopil, že cílím na část rozkladu, která do desítky chyběla. Situaci jsme řešili následovně – vyzvala jsem chlapce, aby si prst položil na hranici deset a současně pozoroval, kolik makových koláčků má v první a kolik ve druhé desítce. Toto mu dopomohlo ke správné odpovědi.

Úloha č. 5

Štěpánka

V úloze číslo pět Štěpánka při pamětném počítání u prvního příkladu chybuje. Spoj 4 + 8 doplňuje výsledkem jedenáct. V zápětí jsem se zeptala, jak dívka příklad řešila. Štěpánka uvádí: *,,Tak, že jsem si tu čtyřku rozložila na dva a dva a přičetla jsem ty dva, takže to bylo deset a ještě jsem přičetla tu jednu a bylo to dvanáct.‘‘* V tomto momentě si již Štěpánka chyby všímá a napravuje ji. Je otázkou, z jakého důvodu chybovala. Víme, že rozkládala číslo čtyři. Nabízí se možnost, že si v mysli nedokázala udržet způsob, jakým rozložila číslo čtyři.

Michal

Míša nemá s pamětnými počty obtíže, řeší je hbitě a správně.

Roman

První příklad v úloze řeší chlapec opravdu zpaměti a správně (nezaznamenala jsem názor na prstech). Románek sám říká, že příklad řešil v hlavě. Ptala jsem se, co si tedy (obrazně řečeno) v hlavě řekl. Románek uvádí: *,,Osm plus čtyři rovná se dvanáct.‘‘* Chlapec tedy evidentně zaměnil pořadí sčítanců oproti zadání, k rozkladu tedy zvolil menší číslo. Nad zadáním příkladu na odčítání chlapec chvíli váhá. Poté se ptá, zda může počítat na prstech. Odpovídám, že ano. Roman si postupně až na několikátý pokus odpočítává od dvanáctky šest prstů – slovy: *dvanáct, jedenáct, deset, devět, osm, sedm*. Na jedné ruce mu tedy zbývá jeden prst. Vzhledem k tomu, že již ale do výsledku nezapočítává všechny zbývající prsty na druhé ruce, odpovídá, že výsledek je jedna. Na podruhé pro změnu sice započítá prsty na zbývající ruce, ale tím, že v řadě pokračoval do šesti, slovy: *dvanáct, jedenáct, deset, devět, osm, sedm, šest,* odečetl ve skutečnosti sedm prstů a zbylo mu jich tak již pouze pět. Románkovi tedy na prstech ukazuji já, poté uvádí výsledek správně.

Úloha č. 6

Štěpánka

U úlohy číslo šest řešila Štěpánka příklad na počítadle následovně: nejprve si zaznamenala na první příčce přisunutím pěti kuliček na pravou stranu číslo pět. Dále na druhé příčce ve stejném směru přesunula devět kuliček. Zajímavé bylo, že poté kuličky na druhé příčce vrátila do původního postavení a od konce tentokrát přisunula čtyři (opět na pravou stranu). Vrátila se tedy o krok zpět, a další krok již vysoudila z výsledku, ke kterému již jednou dospěla. K výpočtům jsme používali klasické dvacítkové počítadlo s deseti kuličkami na jedné příčce a barevně odlišenými kuličkami po pěti.

Michal

Chlapec si na rozdíl od Štěpánky nejprve přesouvá a rovná všechny kuličky na počitadle k pravé straně, což Štěpánka zprvu neudělala a to mohlo způsobit její další počínání, kdy se vracela v průběhu řešení o krok zpět. Míša naproti tomu řeší plynule: *Nechám si tu pětku* (přesouvá prvních pět kuliček nalevo – odpovídá prvnímu sčítanci), *potom tady dám pět* (přisouvá nalevo dalších pět kuliček – odpovídá první části rozkladu) *a tady dám takhle čtyři* (přisouvá na druhé příčce čtyři korálky doleva – druhá část rozkladu).

Roman

Románek manipuluje s korálky stejně jako Míša a bez problémů dochází k výsledku. Správně také ukazuje, kde může vidět rozklad čísla devět.

Úloha č. 7

Štěpánka

U sedmé úlohy Štěpánka bez rozmyslu okamžitě odpovídá způsobem, ze kterého je zřejmé, že sčítací tabulku považuje za stovkovou. Začala si ukazovat prsty po řádcích a principielně její postup odpovídal řešení právě na stovkové tabulce. Teprve při bližším zkoumání si všimla postavení čísel a úlohu dál nebyla schopna řešit sama. Děti ovšem se stovkovou tabulí prý ve třídě nepracují, nemají ji ani vyvěšenou. Dítě zřejmě na poprvé toto přisoudilo instinktivně. Po nápovědě z mé strany již princip odhaluje. Dívce jsem se pokusila naznačit, že modrý řádek a červený sloupec představují sčítance, konkrétně modrý řádek prvního a červený druhého, nebo naopak. Štěpánka již správně prsty naznačuje nejprve horizontální a dále vertikální pohyb, nicméně neřeší již spoj ze zadání a libovolně ukazuje na spoji 4 + 4.

Michal

Míša si s tabulkou neví rady vůbec. Řešení mu musím objasnit já.

Roman

Románek ode mě taktéž, jako ostatní, dostal nápovědu ohledně umístění sčítanců. Bez váhání ukázal prsty na číslo čtyři a osm v modrém řádku. Pouze jsem mu zdůraznila, že druhý sčítanec se nachází v červeném sloupci, načež si jeden prst přesunul na číslo osm tam. Poté ukázal na číslo dvanáct ve správném políčku, které odpovídalo výsledku součtu příslušných čísel. Chlapec byl v podstatě jediný, kdo na políčko přišel sám, což mě příjemně překvapilo.

Úloha byla do pracovního listu zvolena, aby zastupovala kategorii úloh logických. Osobně jsem toho názoru, že výuka matematiky obecně postrádá konfrontaci žáků s logickými úlohami v dostatečném množství.

Úloha č. 8

Štěpánka

V osmé úloze volí Štěpánka k rozkladu opět prvního sčítance, tedy menší číslo, a to čtyři. Znovu lze pozorovat skutečnost, že dítě nerespektuje pořadí sčítanců a k rozkladu volí takové, které se mu snáze rozloží. Štěpánka ve schématu správně volí rozklad 1 + 3. Štěpánky jsem se dotázala, zda by mohla zakroužkovat také variantu 3 + 1. Štěpánka odpovídá: *,,No asi ne, protože do desítky mi chybí jednička a to by potom nebylo správně.''* Zajímavé je, že v tomto případě a kontextu již dítě pořadí sčítanců zvažuje a přikládá mu specifický význam.

Michal

Míša u tohoto příkladu ve schématu nejprve označuje rozklad čísla čtyři na dvě a dvě. Opět se lze domnívat, že volí typ rozkladu, se kterým se často setkává, a nikoliv tedy takový, který je pro řešení dané úlohy třeba. Poté se sám od sebe opravuje a kroužkuje rozklad 1 + 3. Opět lze pozorovat upřednostnění rozkladu menšího sčítance navzdory pořadí v zadání.

Roman

Románek se ptá: *,,Můžu i devět plus čtyři?''* Rovnou se tedy taktéž uchyluje k možnosti mít na druhém místě v pořadí sčítanců menší číslo. Chlapec však uvádí, že výsledek je *čtrnáct*. Opět počítá na prstech a chybuje stejně jako u třetí úlohy – nedočítá do desítky. Stejně jako Míša také první označuje použití rozkladu na dvě a dvě. Poté se opravuje a kroužkuje možnost jedna plus tři. Devítku by prý v tomto spoji rozložil na pět a čtyři.

Je zajímavé, že děti většinou rozkládaly prvního sčítance (v případech, kde byl menší než první) u těch příkladů, které řešily zpaměti, nebo kde postup zaznamenávaly způsobem, který neznaly (viz schéma všech možných rozkladů čísel). Jakoby nebraly v potaz pořadí sčítanců pouze tam, kde řešení nevyžaduje zaznamenání postupu na pomůcce, či schématu. Dítě si samozřejmě často volí takové postupy a řešitelské strategie, které mu z jeho pohledu nejvíce vyhovují, například využívají zmíněné komutativnosti. Tam, kde bylo nutné výpočty zaznamenat názorem a především známým způsobem (osa, mřížka, počítadlo), se pořadí sčítanců držely.

Úloha č. 9

Štěpánka

Devátou úlohu řeší dívka zprvu bez obtíží. V průběhu práce se zmiňuje, že s modelem papírových peněz pracovali v první třídě. Nyní je již nevyužívají. V řešení doplňující úlohy naráží na neznalost rozdílu mezi pojmy *mince* a *koruny,* dívka tedy neodlišuje počet mincí a počet korun. Sama na řešení nepřichází.

Michal

Chlapec postupuje v řešení ze začátku taktéž dobře, doplňující úlohu je schopen řešit sám po drobné nápovědě z mé strany. S penízky však manipuluje rozpačitě.

Roman

Románek dokládá do deseti čtyři koruny, má tedy v pokladničce oproti zadání jedenáct korun, poté k nim přidává ještě jednu zbylou korunu. Na prstech si počítá, kolik korun má v pokladničce celkem. Správně udává, že sedm mincí a dvanáct korun. Nakonec odebírá dvě koruny a snižuje tak počet na požadovaných deset korun. Dále mě opět příjemně překvapil, když stejně jako Míša sám přišel na řešení doplňující úlohy v podobě směny deseti korun za desetikorunovou minci.

Úloha č. 10

Štěpánka

Desátá úloha pro Štěpánku nepředstavuje problém. Ihned odhaluje princip řešení schématu a správně zapisuje rozklad čísla pět do příslušných okének. Na doplňující otázku k této úloze Štěpánka odpovídá: *,,Asi mi připadá lehčí to udělat takhle* (ukazuje na znázornění z této úlohy), *protože tady je ta desítka, a už víš, že máš potom odčítat od té desítky''*(ukazuje správně na druhé číslo z rozkladu).

Michal

Míša zamýšlený princip řešení na první pohled neodhaluje. Nalézá však nový. Dosazuje číslo pět do spoje 10 - 5 = 5, tedy do prázdných polí svislé části schématu. Odůvodňuje tím, že úloha je dle něj zaměřená na rozhodnutí, zda číslo pět dosadit právě do zmíněné svislé části, nebo do vodorovné, kde je naznačen spoj 11 - ? = 10, který doplňuje číslem jedna. Toto jeho rozhodnutí je pochopitelné vzhledem k šipkám u číslice pět, které mohou být zavádějící. Míšovi tedy naznačuji, aby zvážil možnost, zda schéma nenaznačuje řešení pomocí rozkladu čísla. S chlapcem docházíme ke správnému řešení. Míša až ke konci přichází na to, co vlastně schéma zobrazuje. Míša jako podklad k vysvětlení spolužákovi volí vyobrazení rozkladu z první úlohy. Lze se domnívat, že se tak rozhoduje v souvislosti s jeho vlastním počátečním neporozuměním a návykem na tento typ zobrazení z vlastní výuky.

Roman

Románek počítá spoj 11 – 5 na prstech. Opakuje chybu z úlohy číslo pět, kde při odčítání nebral v úvahu prsty na zbývající ruce. Za výsledek tedy považuje číslo jedna. Je zajímavé, že naprosto spoléhá na prsty. Dítě by mělo využívat i jistého předběžného odhadu výsledku. Ukazujeme si tedy spolu. Chlapce upozorňuji na jeho opakovanou chybu a snažím se ho navést na to, aby na zbylé prsty nezapomínal.

Osobně bych jako vyučující věnovala značnou pozornost také odhadům výsledků.

Úloha č. 11

Štěpánka

V této úloze děti pracovali na tzv. pyramidě. Štěpánka tento typ úlohy evidentně neznala a zprvu bylo nutné ji zopakovat a vysvětlit zadání. Po té, co dívka princip pochopila, již dále řešila bez obtíží.

Michal

Míšův průběh byl shodný se Štěpánčiným.

Roman

U spoje 5 + 8 považuje chlapec za výsledek příkladu číslo 3, tedy pouze to, co mu ve výpočtu zbylo přes desítku. Poté se opravuje.

Úloha č. 12

Štěpánka

Ve dvanácté úloze dívka volí k rozkladu číslo čtyři, tedy do pomyslné misky vyskládá devět zelených korálků představujících hrušky a jeden červený korálek představující jablka. Tři zbylé červené korálky nechává mimo misku. Na doplňující otázku reaguje bez obtíží, ihned dle jejich slov *odečítá* tři zelené kusy pomyslného ovoce a mění je za červené. Poté dodává další řešení: ubírá jeden červený korálek a přidává jeden zelený.

Michal

Míša, stejně jako Štěpánka, volí k *jinému* způsobu zaplnění misky variantu – *šest zelených plus čtyři červené korálky*.

Roman

Románek v této úloze přichází s originálním řešením. Tři zbylé červené korálky dává dle jeho slov *úplně na kraj, aby se tam vešly*. Chlapci tedy zopakuji, že je nutné dodržet zásadu deseti kusů ovoce v míse maximálně. Románek se tedy pokouší postavit korálky na sebe. Z praktického hlediska řeší situaci tak, jak by to v životě nejspíš zkusil každý z nás. Jeho řešení považuji za velmi kreativní.

Úloha č. 13

Štěpánka

Štěpánka v této úloze správně uvádí, že je třeba rozložit číslo devět na tři a šest. Na přiložené mřížce si odpočítává rovnou počet šest již od hranice desítky a zároveň ukazuje prstem. Vzhledem k tomu, že počet tří je již na mřížce znatelně oddělen, do odpočítávání ho již nezahrnuje.

Michal

Míša mě překvapil svým způsobem znázornění úbytku autíček. Autíčka škrtal nikoliv od druhého řádku mřížky zprava, nýbrž od prvního řádku zleva. Autíčka tedy vyškrtal z první desítky. Míša se tak v podstatě pomyslně a přirozeně vyhnul přechodu a rozkladu, aniž by to, myslím, bylo jeho záměrem.

Roman

Chlapec byl nejprve vyzván, aby mi vysvětlil, jak na mřížce pracují. Říká: *,,Třeba tam jsou příklady, tady je třeba deset plus několik.‘‘ a* správně ukazuje prstem na jednotlivé řádky mřížky. Příklad řeší bez obtíží.

Úloha č. 14

Štěpánka

V řešení tohoto úkolu postupuje dívka následovně: na mřížku skládá čtyři modrá víčka představující počet chlapců. Na přechod přes hranici deset jí tak připadá počet sedmi dívek. Štěpánka je zvyklá na mřížce manipulativní formou pracovat, možná instinktivně ví, že zde není nutno vybrat menšího sčítance hodného k rozkladu, protože mřížka jí výpočtem provede svým způsobem sama. Červená víčka si odpočítává formou – *raz, dva, tři*, a tak dále až *sedm*, tedy nepokračuje v číselné řadě od pěti dále. Dospělé do výpočtu dívka nezařazuje, správně zdůvodňuje tím, že otázka se na ně neptá.

Michal

Míša si na mřížku, kromě modrých a červených víček, vykládá také příslušný počet žlutých víček, představujících dospělé. Nenechává se však zmást, i při takovém znázornění, odpovídá na otázku ze zadání správně. Množinu dospělých tedy zahrnuje do znázornění, nikoliv do výsledného řešení příkladu.

Roman

Románek, ostatně jako všichni, prokazuje, že s mřížkou je zvyklý pracovat, správně umisťuje víčka do políček směrem zleva od prvního řádku. V této úloze se nicméně Románek nechává zmást antisignálem a do výsledku započítává právě i dospělé.

Úloha č. 15

Štěpánka

Příklad 7 + 5 dívka řeší následovně: špalíčky s počtem sedmi a s počtem pěti koleček přikládá pod sebe, tak, že k jedné straně lícují. Prstem nejprve naznačuje svoje řešení a přikládá ho na špalíček s pěti kolečky tak, že jím od sebe odděluje tři a dvě kolečka. Slovně doprovází názor o vysvětlení, ve kterém tři kolečka dopočítává do deseti a dvě přes deset. Štěpánky jsem se dotázala, zda by bylo možné špalíčky nastavit i jiným způsobem. Dívka pouze přesune spodní černý špalíček nahoru nad žlutý. V podstatě tedy volí stejné znázornění, nicméně nyní ho již vysvětluje jinak a prstem si ohraničí deset koleček (pět černých a pět žlutých pod sebou) a ukazuje na zbylé dva, dle kterých vysuzuje výsledek 12. A ihned dodává: *,,Líp se mi asi počítá tenhle.‘‘* V řešení pokračuje a na základě zadání si špalíčky rovná vedle sebe a přikládá pod ně další dva s počtem deseti a dvou koleček. Bez dotázání reaguje slovy: *,,A teď si můžu přečíst, že je to deset a přičtu si dva, a že to je dvanáct. To je jako to pět plus dva.‘‘* Čímž se zřejmě v myšlenkovém procesu vrací k původnímu řešení, kde jednou z možností postupu byl právě rozklad čísla sedm na pět a dvě. Štěpánka na dotaz, co vše může na modelu pozorovat, odpovídá: *,,Jo, já myslím, že se to tady rozkládalo.‘‘*A také dodává, že je na modelu vidět i rozklad čísla dvanáct.

Michal

Míša volí oproti Štěpánce jinou strategii řešení. Na lavici vykládá nejprve špalíček se sedmi kolečky, poté vedle přikládá špalíček se třemi a nakonec se dvěma kolečky. Po přiložení špalíčku se třemi kolečky komentuje: *,,A už jsem na desítce.‘‘* Číslo pět tak rovnou rozkládá na tři a dvě. Zároveň dodává, že kdyby měl počítat na rychlost, volil by možnost přiložit ke špalíčku se sedmi kolečky rovnou špalíček s pěti kolečky.

Tímto se mimo jiné také potvrdilo, že děti střídají a aplikují různé strategie na různé spoje, či situace dle potřeby a odhadu výhodnosti. Míša mě zároveň přivedl na způsob znázornění, kdy druhého sčítance lze sestavit ze dvou špalíčků podle rozkladu.

Roman

Románek při zácviku ukazuje na seřazené špalíčky (od špalíčku s deseti kolečky po špalíček s jedním kolečkem) a samovolně začne odpočítávat: *,,Dvacet, devatenáct, osmnáct, sedmnáct, šestnáct, patnáct, čtrnáct, třinезáct, jedenáct.‘‘* Je zajímavé, že odpočítává rovnou ve druhé desítce. Příčinou může být například špatný počáteční odhad množství koleček na prvním špalíčku s deseti kolečky. Nechávám tedy chlapce odpočítat řadu znovu opačně od jedné, abychom se dopracovali ke správnému závěru. Roman pro řešení spoje volí stejné špalíčky jako Štěpánka, pokládá je pod sebe, nikoliv však tak, aby mu lícovaly k jedné straně. Poté, co se Románka ptám na výsledek, si chlapec napočítá pět koleček na druhém špalíčku a odpovídá *dvanáct*. K základu sedmi koleček dopočítal zbylých pět formou číselné řady – *osm, devět, deset, jedenáct, dvanáct* se současným ukazováním si. Roman řeší doplňující úlohu bez problémů. V podstatě ještě dříve, než stačím doříci větu (stihla jsem pouze zadat, že má vyložit další dva špalíčky) bere do rukou špalíček se dvěma kolečky a po dokončení zadání dokládá druhý špalíček s deseti kolečky. Románek mě překvapil odpovědí na otázku, co může na modelu pozorovat. Naznačuje svými slovy, že rýha, která vznikla mezi sedmi a pěti kolečky by měla být přítomna i na druhém modelu, tedy na špalíčku s deseti kolečky, na příslušném místě. A stejně tak rýha, která vznikla mezi desítkou a dvojkou, by měla být na stejném místě na špalíčku s pěti kolečky. Lze se domnívat, že Románek podvědomě vycházel z rozkladu, který danému spoji příslušel a intuitivně cítil potřebu, aby byl naznačený na obou vyložených modelech, které zřejmě k tomuto jednomu spoji přisoudil. Románek hodnotil počítání se špalíčky velmi kladně.

Vzhledem k Románkově prvopočáteční reakci na špalíčky jsem opět zvažovala důležitost odhadů, tentokrát i ve vizuální oblasti. Je jistě přínosné předkládat před děti různá množství předmětů, například drobných legokostek stejné velikosti, knoflíků, korálků atd. a nechat děti odhadovat jejich počet.

Úloha č. 16

Štěpánka

Štěpánka sama od sebe při zácviku správného pohybu na páse odhaluje, že se bude jednat o demonstraci sčítání a odčítání. Na páse první nakrokuje 13 kroků dopředu a o 5 kroků couvá zpět, výsledek uvádí správně – osm. Po zadání druhého příkladu se dívka dotazuje, zda se tedy jedná o příklad 6 + 8, což jí potvrzuji. Dívka začala rovnou plynule krokovat na pole č. 14. Což později potvrdila:*,,Já jsem počítala do té čtrnáctky, protože jsem už hned věděla výsledek, ale pak jsem se zastavila a šla jsem zpátky na osmičku a zkoušela jsem si utvořit u toho ten příklad.''* V průběhu tedy zřejmě znejistěla a sama od sebe se vrátila na osmou pozici a znovu dopočítala do čtrnácti. Lze usuzovat, že zřejmě měla potřebu se ve svém počínání ujistit a možná právě pomíjivost zadání ji donutila se vrátit v řešení zpět a utvrdit se. Je také ale možné, že pouze považovala za důležité alespoň zastavením na páse od sebe dva sčítance oddělit. Mou domněnku o pomíjivosti jsem si potvrdila také v zápětí, když Štěpánka posléze chybně zdůvodňuje, že rozkládala číslo osm na dvě a šest. Vezmeme li v úvahu, že se vrátila právě na osmé pole a šest dopočítávala, pak je tento úsudek mylný, nehledě na to, že tento rozklad by jí nepomohl ani v případě, kdyby opravdu krokovala od hranice šesti a osm tak pomyslně přičítala.

Michal

Míša, stejně jako Štěpánka, odhaluje, k čemu bude pás sloužit. Sám již před samotným zácvikem pomocí krokování demonstruje, jak by se dal řešit příklad na sčítání. Stejně jako jeho spolužačka, Míša řeší první úlohu bez obtíží a správně krokuje. U druhé mu musím zopakovat zadání, které neudržel v paměti. Dále měl Míša problém s porozuměním zadání. Cítí potřebu si příklad vyřešit ještě před samotným krokováním. Je patrné, že děti s pásem nikdy nepracovaly a není jim tedy vlastní řešit příklad rovnou a přímo na páse prostřednictvím vlastního krokování. Míša se slovně doprovázel výčtem číselné řady, kterou započal dvakrát, na začátku pásu *(jedna, dva, tři, čtyři, pět, šest)* a podruhé znovu od jedničky současně (řekněme) s vykrokováním druhého sčítance (*jedna, dva, tři, čtyři, pět, šest, sedm, osm)*, čemuž předcházela krátká pauza. Další možností řešení by bylo pokračovat plynule výčtem číselné řady (*sedm, osm atd. až čtrnáct)* a počet kroků kontrolovat pouze zrakem.

Roman

Románek i přes znatelnou únavu (pauza mu však byla poskytnuta dle potřeby) u pásu znovu získává chuť do práce. Očividně je pro něj výzvou pracovat s novou, pro něj netradiční pomůckou. Pás Románek zmiňuje ve velmi kladném kontextu i později při celkovém hodnocení. Krokování na něj působí opravdu motivačně. Románek jako jediný sám od sebe při krokování úlohy na odčítání odpočítává zpět od třinácti nikoliv formou číselné řady od jedné, ale od dvanácti - *dvanáct, jedenáct, deset, devět, osm*. Což považuji za náročnější, jelikož si musí počet kroků hlídat zrakem a svým způsobem i pocitově. Poté, co dochází na osmé pole, si pro jistotu ještě znovu přepočítává a ukazuje, že napočítal správně. Románek se sám dožaduje, aby další úloha byla těžká. U řešení druhé úlohy na sčítání již Románek postupuje stejně jako Míša (slovně se doprovázel výčtem číselné řady, kterou započal dvakrát, na začátku pásu *(jedna, dva, tři, čtyři, pět, šest)*a podruhé znovu od jedničky současně (řekněme) s vykrokováním druhého sčítance (*jedna, dva, tři, čtyři, pět, šest, sedm, osm)*, čemuž předcházela krátká pauza.)

Doplňující otázky

Štěpánka

Štěpánka počítání hodnotí slovy – *Tak akorát.* Čímž měla na mysli obtížnost úloh. Na prstech si prý při počítání nepomáhá. Příklad na přechod přes desítku nevytvořila, předpokládám, že neporozuměla právě části *přes desítku*. Štěpánce tedy příklad zadávám sama, a to 6 + 5. Dívka říká a zároveň ukazuje: *,,No, že by sem si ukázala šest* (zvedá šest prstů)*, a pak by sem až přičítala, že mi chybí čtyři do desítky* (doplňuje na deset)*, a pak by sem přičítala ten zbytek* (schová jednu ruku a na druhé zvedá počet 1). *Ještě mi zbylo jedna, aby to byl ten příklad šest plus pět. A ještě si vezmu tu jedničku a je to jedenáct.´´* Počítání na prstech zvládla přirozeně dobře, v předchozí práci je za celou dobu nevyužila ani jednou. Jako snazší hodnotí sčítání.

Štěpánka je paní učitelkou hodnocena jako průměrná počtářka, v průběhu práce měla nízkou chybovost a v zásadě měla spíše občas problém s porozuměním zadání. I přes to, že děti se údajně s pojmem desítková soustava při zavádění učiva setkaly, Štěpánka uvádí, že jí nic neříká. Štěpánka říká, že se stovkovou tabulkou počítají, nicméně od paní učitelky vím, že nikoliv. Vezmeme-li v potaz toto tvrzení a reakci dívky ze sedmé úlohy, kde sčítací tabulku nepřímo považovala za stovkou, lze se domnívat, že se s ní již někdy možná setkala mimo vlastní výuku, například v jiných doplňujících materiálech, či úlohách. Ve stovkové tabulce dívka nejprve prstem označuje zelený sloupeček a v podstatě správně ho označuje jako vyobrazení násobků desítky, což mě překvapilo. V reakci na dotaz, zda by jí taková tabulka mohla pomoci při výpočtech s přechodem přes desítku, se opět tematicky vrací k násobilce deseti, čímž se utvrzuji v tom, že tento pojem možná nemá z teoretického hlediska s daným počítáním spojeným.

Michal

Míša hodnotil průběh práce kladně, stejně tak práci s pomůckami. Míša uvedl, že při počítání si prsty nepomáhá. S tvorbou vlastního příkladu na přechod a ukázkou na prstech nemá problém. Za snadnější označil Míša, stejně jako Štěpánka, sčítání s přechodem přes základ. Odůvodňuje tuto skutečnost také tím, některé spoje zná již nazpaměť a nemusí je tedy počítat. Rovnou píše výsledek. Míša si při dotazu na desítkovou soustavu vzpomíná, že paní učitelka *něco říkala*, nemůže si však vzpomenout co.

Roman

Domnívám se, že část Románkova neúspěchu v matematice pramení z problémů v jazykové oblasti, například ze špatné schopnosti vyjadřovat se, dále porozumět některým výrazů, obratům atd. Románek hodnotil naše počítání jako *,,Moc dobrý.''* Chlapec uvádí, že na prstech počítá často. Také prý hojně využívá počítadla. Románek si na pojem desítková soustava z výuky nevzpomíná. Dále se správně ujímá stovkové tabule. Na můj dotaz ohledně ní říká a ukazuje: *,,Že třeba tady máme deset a třeba do třinácti nám chybí tři.''*