

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta stavební

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Brno, 2021

Bc. Marek Janka



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

ÚSTAV STAVEBNÍHO ZKUŠEBNICTVÍ

INSTITUTE OF BUILDING TESTING

MODERNÍ STATISTICKÉ POSTUPY VE VYHODNOCOVÁNÍ PEVNOSTI BETONU V TLAKU V KONSTRUKCÍCH PROSTŘEDNICTVÍM TVRDOMĚRNÝCH ZKOUŠEK

MODERN STATISTICAL APPROACH IN EVALUATING THE COMPRESSIVE STRENGTH
OF CONCRETE IN STRUCTURES USING THE REBOUND HAMMER METHOD

DIPLOMOVÁ PRÁCE

DIPLOMA THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Marek Janka

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. PETR MISÁK, Ph.D.

BRNO 2021



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní program	NPC-SIK Stavební inženýrství – konstrukce a dopravní stavby
Typ studijního programu	Navazující magisterský studijní program s prezenční formou studia
Specializace	bez specializace
Pracoviště	Ústav stavebního zkušebnictví

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student	Bc. Marek Janka
Název	Moderní statistické postupy ve vyhodnocování pevnosti betonu v tlaku v konstrukcích prostřednictvím tvrdoměrných zkoušek
Vedoucí práce	Ing. Petr Misák, Ph.D.
Datum zadání	31. 3. 2021
Datum odevzdání	14. 1. 2022

V Brně dne 31. 3. 2021

doc. Ing. Pavel Schmid, Ph.D.
Vedoucí ústavu

prof. Ing. Miroslav Bajer, CSc.
Děkan Fakulty stavební VUT

PODKLADY A LITERATURA

KOCÁB, D.; MISÁK, P.; CIKRLE, P. Characteristic Curve and Its Use in Determining the Compressive Strength of Concrete by the Rebound Hammer Test. *Materials*, 2019, roč. 12, č. 17, s. 1-17. ISSN: 1996-1944.

SZILÁGYI, Katalin, Adorján BOROSNYÓI a István ZSIGOVICS. Extensive statistical analysis of the variability of concrete rebound hardness based on a large database of 60years experience. *Construction and Building Materials*. 2014, 53, 333-347. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2013.11.113. ISSN 09500618.

CIKRLE, P.; KOCÁB, D. Tvrdoměrné metody zkoušení betonu – část I. *Beton TKS*, 2018, roč. 18, č. 6, s. 44-47. ISSN: 1213-3116.

CIKRLE, P.; KOCÁB, D.; ČERVENKA, J. Tvrdoměrné metody zkoušení betonu – část II. *Beton TKS*, 2019, roč. 19, č. 2, s. 14-18. ISSN: 1213-3116.

KOCÁB, D.; CIKRLE, P.; MISÁK, P. Tvrdoměrné metody zkoušení betonu – část III. *Beton TKS*, 2019, roč. 19, č. 5, s. 42-47. ISSN: 1213-3116.

Normy ČSN EN 13791, ČSN EN 206, ČSN EN 12390-3 a další.

ZÁSADY PRO VYPRACOVÁNÍ

Teoretická část:

Provedení rešerše zdrojů se zaměřením na tvrdoměrné metody zkoušení a využití regresní diagnostiky. Shrnutí teoretických poznatků o možnostech určení tzv. odbedňovací pevnosti betonu prostřednictvím tvrdoměrných metod. Popis moderních statistických metod vhodných pro vyhodnocování pevnosti betonu v tlaku v konstrukcích prostřednictvím tvrdoměrných metod.

Experimentální část:

Návrh a popis experimentu, jehož cílem bude vytvoření empirických vztahů mezi výsledky zkoušek nedestruktivní tvrdoměrnou metodou a pevností betonu v tlaku. Laboratorní zkoušky na odebraných vzorcích betonu. Provedení simulací za účelem porovnání různých přístupů k vyhodnocení pevnosti betonu v tlaku z tvrdoměrných zkoušek. Vyhodnocení a shrnutí získaných výsledků experimentu a simulací.

STRUKTURA DIPLOMOVÉ PRÁCE

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část závěrečné práce zpracovaná podle platné Směrnice VUT "Úprava, odevzdávání a zveřejňování závěrečných prací" a platné Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání a zveřejňování závěrečných prací na FAST VUT" (povinná součást závěrečné práce).
2. Přílohy textové části závěrečné práce zpracované podle platné Směrnice VUT "Úprava, odevzdávání, a zveřejňování závěrečných prací" a platné Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání a zveřejňování závěrečných prací na FAST VUT" (nepovinná součást závěrečné práce v případě, že přílohy nejsou součástí textové části závěrečné práce, ale textovou část doplňují).

Ing. Petr Misák, Ph.D.
Vedoucí diplomové práce

ABSTRAKT

Tato diplomová práce zkoumá různé metody lineární regrese a jejich použití pro tvorbu regresních vztahů mezi pevností betonu v tlaku určenou nepřímou metodou a podrcením vzorku v lisu. Zabývá se zejména nejistotou měření nepřímou metodou, která je při běžně používané klasické metodě nejmenších čtverců zanedbána. Dále se zabývá metodou vážených nejmenších čtverců, kterou je vhodné použít při tzv. heteroskedastických datech. Různé regresní metody porovnává na několika souborech dříve změřených dat. V neposlední řadě práce zkoumá vliv odstranění příliš vlivných bodů identifikovaných pomocí Cookovy vzdálenosti, které mohou výsledky regrese zkreslovat.

KLÍČOVÁ SLOVA

Lineární regrese, metoda nejmenších čtverců, metoda vážených nejmenších čtverců, Demingova regrese, Cookova vzdálenost.

ABSTRACT

This diploma thesis examines various linear regression methods and their use to establish regression relationships between the compressive strength of concrete determined by the indirect method and by the crushing of the specimens in the press. It deals mainly with the uncertainty of values measured by the indirect method, which is neglected by the usually used ordinary least squares regression method. It also deals with the weighted least squares method, suitable for so-called heteroskedastic data. It compares different regression methods on several sets of previously measured data. The final part of the work examines the effect of removing too influential points identified by Cook's distance, which may skew the regression results.

KEYWORDS

Linear regression, ordinary least squares, weighted least squares, Deming regression, Cook's distance.

JANKA, Marek. *Moderní statistické postupy ve vyhodnocování pevnosti betonu v tlaku v konstrukcích prostřednictvím tvrdoměrných zkoušek*. Brno, 2021, 98 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavebního zkušebnictví. Vedoucí práce: Ing. Petr Misák, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ O SHODĚ LISTINNÉ A ELEKTRONICKÉ FORMY ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

Prohlašuji, že elektronická forma odevzdané diplomové práce s názvem *Moderní statistické postupy ve vyhodnocování pevnosti betonu v tlaku v konstrukcích prostřednictvím tvrdoměrných zkoušek* je shodná s odevzdanou listinnou formou.

V Brně dne 14. 1. 2022

Bc. Marek Janka
autor práce

PROHLÁŠENÍ O PŮVODNOSTI ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem *Moderní statistické postupy ve vyhodnocování pevnosti betonu v tlaku v konstrukcích prostřednictvím tvrdoměrných zkoušek* zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 14. 1. 2022

Bc. Marek Janka
autor práce

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu mé práce Ing. Petru Misákovi, Ph.D., za velmi vstřícný přístup, množství konzultací a neúnavné kontroly a opravy.

Obsah

1 Úvod	8
2 Teoretická část	10
2.1 Schmidty tvrdoměry	10
2.2 Lineární regrese dat	12
2.2.1 Společné pojmy	12
2.2.2 Metoda nejmenších čtverců	17
2.2.3 Ortogonální regrese	18
2.2.4 Demingova regrese	19
2.2.5 Metoda vážených nejmenších čtverců	28
2.3 Srovnání výsledků regresních modelů	29
2.3.1 Koeficient determinace	30
2.3.2 F-test	30
2.3.3 Logaritmus věrohodnosti	31
2.3.4 AIC	31
2.3.5 Jarque-Bera test	31
2.4 Vyhodnocení podle ČSN EN 13791	32
2.4.1 ČSN EN 13791:2007	32
2.4.2 ČSN EN 13791:2021	33
2.5 Úvodní očištění dat od odlehlých hodnot	35
3 Praktická část	36
3.1 Popis vyhodnocovaných dat	36
3.1.1 Data 1 – starší betony různého složení	36
3.1.2 Data 2 – beton v průběhu zrání	38
3.2 Statistická analýza – Data 1 (starší betony různého složení)	39
3.2.1 Test normality změřených dat	39
3.2.2 Očištění od odlehlých hodnot	42
3.2.3 Regrese	43
3.2.4 Vyřazení bodů pomocí Cookovy vzdálenosti	46
3.3 Statistická analýza – Data 2 (beton v průběhu zrání)	48
3.3.1 Testy normality	48
3.3.2 Očištění od odlehlých hodnot	49
3.3.3 Regrese	49
3.3.4 Vyřazení bodů pomocí Cookovy vzdálenosti	53
4 Závěr	55
Literatura	59
Seznam symbolů, veličin a zkratk	60
Seznam obrázků	64
Seznam tabulek	65
Přílohy	66

1 Úvod

Tato diplomová práce částečně navazuje na bakalářskou práci autora [1], ve které bylo řešeno nalezení regresních vztahů a charakteristické křivky dvou konkrétních betonů pro účely nepřímého nedestruktivního měření pevnosti betonu v tlaku při odbedňování. V této práci jsou dále zkoumány a porovnávány různé regresní metody a jejich modifikace. Cílem není vytvořit vztah pro vybraný beton, ale navržené postupy aplikovat na různá dříve naměřená data a srovnávat získané výsledky.

Pevnost betonu závisí na mnoha různých parametrech, jako jsou například použité kamenivo, druh a množství cementu, různé zlepšující přísady a příměsi, vodní součinitel, podmínky během výroby a zrání a další [2]. Při zkouškách *in-situ* (v terénu) při hodnocení existujících konstrukcí jsou obvykle všechny tyto parametry neznámé. Nejspolehlivější určení pevnosti je vždy na základě odebraných vzorků z konstrukce [3]. Musí se však zohlednit fakt, že beton je heterogenní materiál a zjištěná pevnost se může místo od místa lišit. Takto získané výsledky se tedy musí vhodně statisticky vyhodnotit a do úvahy se musí zahrnout všechny případné nejistoty. Přesnost stanovené pevnosti se zvyšuje s množstvím odebraných vzorků rozmístěných rovnoměrně v celé zkoumané oblasti. Odebírání vzorků (vývrtů) z konstrukce je však časově náročné, hlučné, špinavé, nehospodárné a v neposlední řadě se také nedá vrtat v libovolném místě konstrukce, například kvůli výztuži. Proti sobě tak jdou požadavky teorie – co nejvíce odebraných vzorků a praxe – čím méně vývrtů, tím lépe.

Oproti vývrtům zde jsou však i zkoušky semidestruktivní nebo nedestruktivní. Jsou rychlejší, často bez nepořádku, dají se provádět za provozu a dají se dělat i tam, kde se vrtat nedá. To je vykoupeno menší spolehlivostí získaných výsledků [3] a jejich vyšším rozptylem. Obvykle musí být hodnoty „nakalibrovány“ na daný beton, tzn. musí být vytvořen vhodný převodní vztah. Není totiž měřena přímo pevnost, ale jiná vlastnost, například tvrdost povrchu. Mezi pevností a touto měřenou vlastností existuje vzájemný vztah – často se k němu přistupuje jako ke vztahu *závisle proměnné* (pevnosti) na *nezávisle proměnné* (např. tvrdosti povrchu), ale to není zcela pravda. Obě tyto veličiny totiž závisí na podobných faktorech obdobným způsobem, ale nikoliv jedna na druhé. V angličtině se někdy používají vhodnější pojmy než *závislá - nezávislá: endogenous - exogenous, response - explanatory* nebo *regressand - regresor*. V této práci je pro přehlednost drženo zažité české názvosloví *nezávislá* pro měřenou veličinu a *závislá* pro předpovídanou.

Destruktivní a nedestruktivní měření pevnosti na konstrukci lze vhodně kombi-

novat. Norma ČSN EN 13791 [3] uvádí postup, jak pomocí nedestruktivních metod vybrat místa na konstrukci, kde se následně odeberou vývrty. Druhá možnost, která se týká zejména rozsáhlejších konstrukcí, je vytvořit regresní vztah pro vybraný beton na základě dvojic hodnot nedestruktivní zkoušky a odebraného vzorku. Pomocí tohoto vztahu jsou pak přepočítávány nedestruktivně měřené veličiny na pevnost v tlaku.

Na začátku teoretické části této práce je popsána funkce Schmidových tvrdoměrů, nejčastěji používaných nástrojů pro nedestruktivní určování pevnosti betonu. Následuje společný úvod k metodám lineární regrese a vysvětlení některých pojmů, se kterými se v práci dále pracuje.

Stěžejní část práce je věnována popisu jednotlivých regresních metod. Některé jsou známé více (metoda nejmenších čtverců), některé méně (metoda vážených nejmenších čtverců, ortogonální regrese) a použitím Demingovy regrese v oblasti stavebního zkušebnictví se dosud zřejmě nikdo nezabýval.

Následuje výčet a krátké vysvětlení hodnotících kritérií, pomocí kterých se dají porovnávat získané výsledky navzájem mezi sebou, a krátké shrnutí postupů určení pevnosti betonu podle normy ČSN EN 13791.

Postupy navržené a popsané v teoretické části jsou porovnávány na dvou typech dat. První sada se týká starších betonů různého složení, vyhodnocovaných dohromady. Ve druhé sadě je vždy vyhodnocován jeden beton v průběhu jeho zrání.

První krok při vyhodnocování experimentálních dat je testování normality rozložení a identifikace odlehlých hodnot pomocí Grubbsova testu. Následně je provedeno jejich vynesení do bodového grafu a výpočet regresních přímek pomocí srovnávaných metod. Získané výsledky jsou uvedeny v podobě grafů a tabulkového srovnání, kde se sledují číselné výsledky hodnotících kritérií.

Dále jsou na základě Cookovy vzdálenosti identifikovány velmi vlivné body a sledují se změny regresních křivek v případě, že by některé body byly vyřazeny. Jsou určeny a vykresleny regresní křivky před a po jejich vyřazení.

Do příloh na konci práce byla umístěna zdrojová data a velká část grafů, které by jinak narušovaly plynulý tok textu. Směřují na ně odkazy v příslušných kapitolách.

Tato práce se pokouší přinést srovnání některých alternativních postupů pro stanovení regresního vztahu určeného ke stanovení pevnosti betonu v tlaku na základě měření jiné jeho vlastnosti.

2 Teoretická část

2.1 Schmidtovy tvrdoměry

Přehledy tvrdoměrných metod již byly popsány mnohokrát, například i v bakalářské práci autora [1]. Přesto zde pro úplnost budou alespoň krátce popsány Schmidtovy tvrdoměry, nejpoužívanější přístroje k určování tvrdosti povrchu betonu.

Jejich funkce spočívá v úderu přesně danou energií do zkoušeného betonu. Ta je zajišťována závažím – beranem poháněným napnutou pružinou. Část energie je betonem pohlcena, část se vrátí zpět a způsobí odskočení beranu dopadajícího na razník. Tato energie se měří pomocí velikosti odrazu nebo rychlosti a na základě její velikosti se dá pomocí převodních vztahů odhadovat pevnost betonu v tlaku. Typické schéma Schmidtova tvrdoměru je na Obr. 1.

Od roku 1954 se vyrábí typ Original Schmidt. Původní výrobce je švýcarská firma Proceq, dnes už je výrobců více. Výsledkem měření je hodnota odrazu R , měřená mechanickým posunem jezdce odraženým závažím. Jedná se o poměr dráhy x_0 uražené závažím před dopadem na razník a dráhy x_r po odrazu zpět, vyjádřený v procentech, viz (1) [4]. Poloha jezdce se čte na stupnici se značkami po 2 jednotkách. Při jiné než vodorovné poloze přístroje se na velikosti odrazu projeví gravitace, čili se musí zohlednit směr úderu [4].

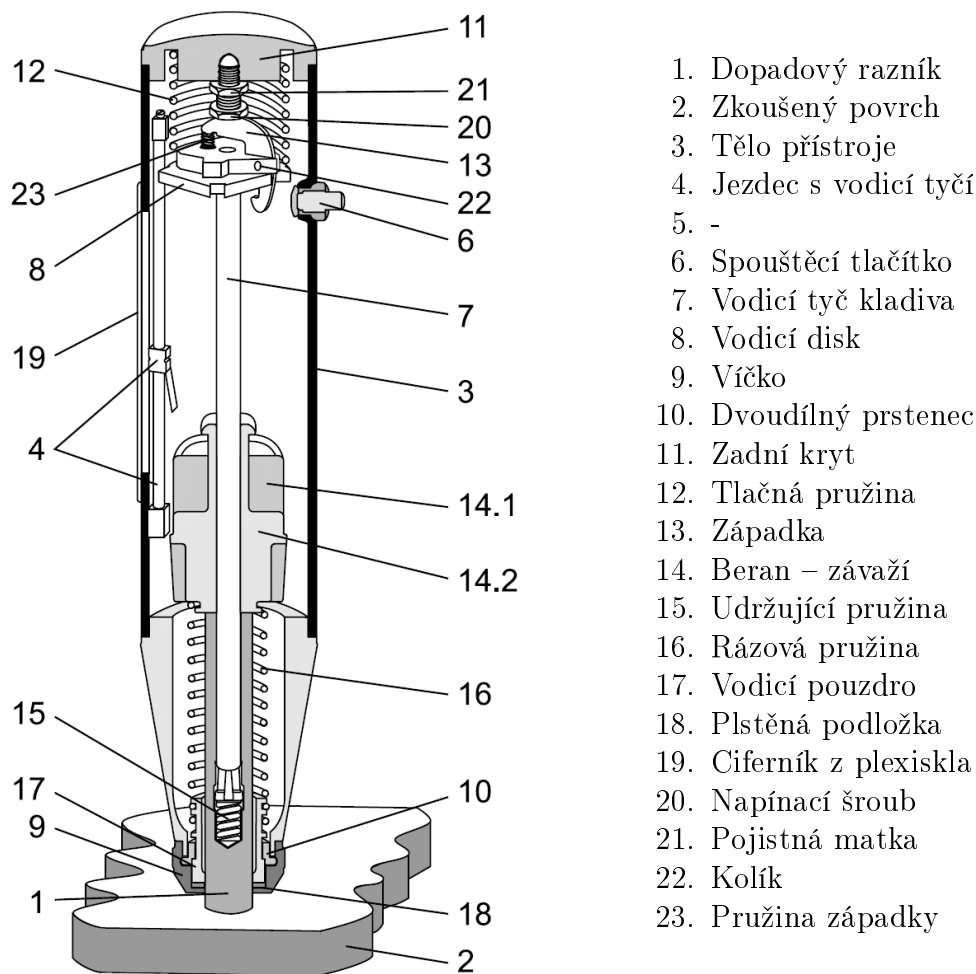
$$R = \frac{x_r}{x_0} \cdot 100 \quad (1)$$

Funkce přístroje se dodnes téměř nezměnila, postupně se vyrábělo několik různě velkých modifikací s různou energií dopadu razníku určené na různě masivní konstrukce.

Tab. 1: Srovnání starších Schmidtových tvrdoměrů [6, 7].

Typ	Energie dopadu	Min. tloušťka betonu	Rozsah pevností
L	0,75 J	60 mm	10–70 MPa
N	2,25 J	100 mm	10–70 MPa
M	30,00 J	200 mm	25–60 MPa

K velké změně došlo v roce 2007, kdy firma Proceq uvedla model SilverSchmidt. Samotná konstrukce přístroje se příliš neliší, váha závaží (beranu) i razníku je o něco málo menší než u původní verze [4]. Měří ovšem na odlišném principu, a to na základě



1. Dopadový razník
2. Zkoušený povrch
3. Tělo přístroje
4. Jezdec s vodící tyčí
5. -
6. Spouštěcí tlačítko
7. Vodící tyč kladiva
8. Vodící disk
9. Víčko
10. Dvoudílný prstenec
11. Zadní kryt
12. Tlačná pružina
13. Západka
14. Beran – závaží
15. Udržující pružina
16. Rázová pružina
17. Vodící pouzdro
18. Plstěná podložka
19. Ciferník z plexiskla
20. Napínací šroub
21. Pojistná matka
22. Kolík
23. Pružina západky

Obr. 1: Schéma přístroje Original Schmidt [5].

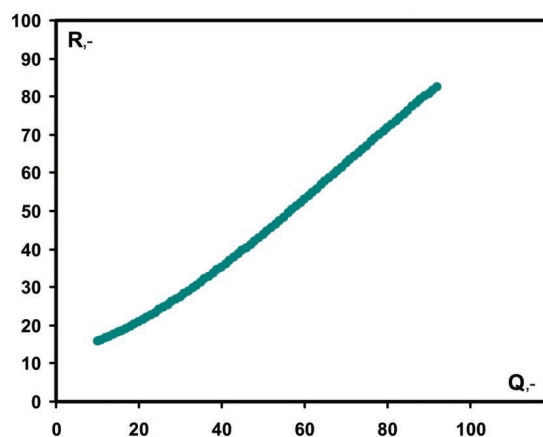
rychlosti pohybujícího se závaží. Ta je měřena elektronicky optickými snímači, které snímají odražené světlo z drážek na povrchu závaží. První generace tohoto přístroje uměla zaznamenat jak původní R -hodnotu, tak novou Q -hodnotu, nicméně kvůli nižší váze závaží vykazovaly hodnoty R větší rozptyl než u původního přístroje [4]. Od roku 2011 už přístroje SilverSchmidt měří pouze Q -hodnotu – hodnotu vrácené energie. Ta je určena poměrem kinetické energie dopadu E_0 a odrazu E_r , určené na základě měření rychlosti v .

$$Q = \frac{E_r}{E_0} \cdot 100 = \frac{0,5 \cdot m \cdot v_r^2}{0,5 \cdot m \cdot v_0^2} \cdot 100 = \frac{v_r^2}{v_0^2} \cdot 100. \quad (2)$$

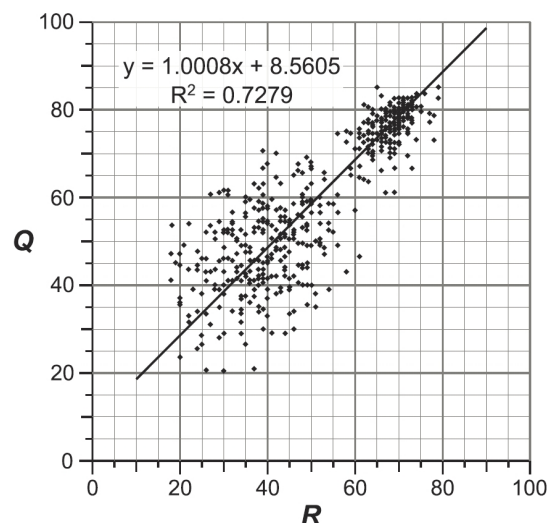
Tento poměr není ovlivněn gravitací a nezáleží tak na natočení přístroje vůči vodorovnému směru. Q -hodnoty na stejném vzorku jsou vyšší než R -hodnoty.

U první generace uváděla firma Proceq převodní křivku mezi těmito veličinami,

viz. Obr. 2, později od ní ale upustila. Porovnáním a hledáním převodního vztahu se zabývali např. Winkler a Matthews [8], jejichž porovnání je na Obr. 3. Přestože autoři hodnotili tyto získané výsledky kladně, je patrný velký rozptyl hodnot kolem regresní přímky, který by umožňoval vzájemný převod těchto hodnot mezi sebou jen s malou spolehlivostí.



Obr. 2: Dříve udávaná převodní křivka mezi R a Q od firmy Proceq [4].



Obr. 3: Srovnání individuálních hodnot R a Q podle [8].

2.2 Lineární regrese dat

Pro odhad pevnosti betonu na základě jiné jeho změřené vlastnosti je potřeba znát vztah mezi těmito veličinami. K jeho určení se využije konečného počtu změřených dvojic hodnot – *veličina, na základě které budeme určovat pevnost vs. pevnost v tlaku*.

2.2.1 Společné pojmy

Dále v práci je popsáno několik různých regresních metod. Mají mnoho společných vlastností a postupů, které jsou uvedeny v této kapitole.

Cílem regrese je proložit v grafu změřené body křivkou, která nejlépe vystihuje jejich trend. Slouží pak nejčastěji k předpovědím, jakou hodnotu závisle proměnné y dostaneme na základě změření nezávisle proměnné x .

Pojem lineární by měl být vztažen ke koeficientům křivky, kdy daná funkce je popsána lineární kombinací dílčích funkcí, nikoli k jejímu tvaru [9, 10]. Můžeme tedy například změřená data prokládat parabolou nebo vyšším polynomem a přesto

mluvit o lineární regresi. Funkční vztah pro získání odhadu hodnoty y na základě změřeného x se často nazývá regresním modelem.

Nejčastěji se pracuje s modely s předpokládanou chybou pouze v proměnné y . Předpokládá se funkční závislost veličin podle (3) s parametry β_i . Nemusí jít pouze o polynomický vztah, může se v něm vyskytovat i jakákoliv jiná dílčí matematická funkce.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i + \beta_2 \cdot x_i^2 + \dots + \epsilon_i, \quad (3)$$

kde y_i je hodnota nezávisle proměnné veličiny,

x_i hodnota závisle proměnné a

ϵ_i je náhodná chyba nebo odchylka od tohoto vztahu pro každou hodnotu y_i .

Na základě konečného počtu měření se stanovují odhady těchto parametrů, značené $\hat{\beta}_i$, s jejichž pomocí se určí odhad funkční hodnoty regresního modelu

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot x_i + \hat{\beta}_2 \cdot x_i^2 + \dots, \quad (4)$$

Existují také modely pracující s chybami v obou proměnných, anglicky nazývané *Errors-in-variables models* [11, 12]. Pro jednoduchý model s 2 parametry (přímku) pak platí vztah

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i^* + \epsilon_i, \quad (5)$$

kde x_i^* je skutečná hodnota, kterou ovšem neznáme – je zatížena svou chybou η_i . Známe pouze změřenou hodnotu x_i

$$x_i = x_i^* + \eta_i. \quad (6)$$

Reziduum

Rozdíl mezi změřenou hodnotou y_i a teoretickou hodnotou stanovenou regresním modelem \hat{y}_i se nazývá reziduum.

$$r_i = y_i - \hat{y}_i \quad (7)$$

Pro modely s chybou v obou proměnných je vztah složitější a je popsán vztahem (34) na straně 20.

Rezidua modelu by se vždy měla dále zkoumat a vyhodnocovat, aby se zjistila vhodnost zvoleného modelu. Pokud jsou v grafu *rezidua vs. nezávisle proměnná x* (viz Obr. 4 dole) rezidua rozmístěna náhodně kolem 0, je vše v pořádku. Pokud

vykazují nějaký trend, značí to problém. Buď je model špatně postaven, například měla být použita jiná než lineární funkce, nebo, pokud se absolutní hodnota reziduí mění v závislosti na velikosti nezávislé x hodnoty, značí heteroskedasticitu dat, jak je vysvětleno níže.

Pákový efekt

Pákový efekt nebo také pákovitost (anglicky *leverage*) popisuje, jakou mírou konkrétní bod ovlivní sklon křivky. Pákový efekt je mírou vzdálenosti mezi x hodnotou daného bodu a průměrnou \bar{x} hodnotou celého souboru bodů. Nabývá hodnoty v intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ a součet všech jejich hodnot je roven počtu parametrů regresního modelu (pro přímkou 2, pro parabolu 3 atd.) [13]. Hodnoty pákovitosti můžeme číst jako diagonální prvky h_{ii} projekční matice (anglicky též *hat matrix*) \mathbf{H} regresního modelu. To je matice podle vztahu (8), mapující vektor nezávisle proměnných hodnot \mathbf{y} na vektor hodnot regresní křivky $\hat{\mathbf{y}}$ [13, 14]. \mathbf{X} je matice hodnot nezávisle proměnných veličin, uvedena dále v kapitole 2.2.2.

$$\mathbf{H} = \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H} \mathbf{y} \quad (9)$$

Cookova vzdálenost

Cookova vzdálenost, označená D_i , pro každý bod bere v potaz zároveň pákový efekt i reziduum, tedy vzdálenost bodu od ostatních jak v x , tak y směru. Říká nám, jak moc se model změní, pokud ze souboru odstraníme i -tý bod [13]. Počítá se jedním ze dvou způsobů podle vzorce

$$D_i = \frac{\sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - \hat{y}_{j(i)})^2}{p \cdot MSE} = \frac{r_i^2}{p \cdot MSE} \cdot \frac{h_{ii}}{(1 - h_{ii})^2} \quad (10)$$

kde \hat{y}_j je j -tá hodnota regresního modelu,

$\hat{y}_{j(i)}$ je j -tá hodnota regresního modelu, určeného s vynecháním i -tého bodu,

p je počet parametrů regresního modelu,

MSE je střední kvadratická chyba,

r_i je i -tá hodnota rezidua a

h_{ii} je i -tá hodnota pákového efektu.

Střední kvadratická chyba MSE (*mean squared error*) je průměrná hodnota druhé mocniny vzdálenosti změřené hodnoty y_i od hodnoty \hat{y}_i stanovené regresním

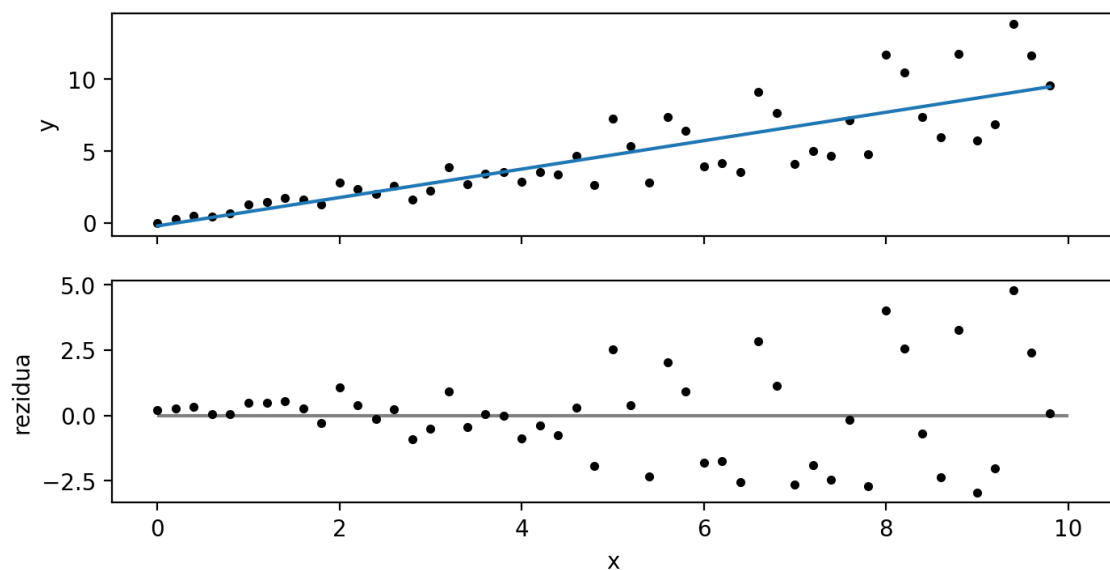
modelem:

$$MSE = \frac{1}{n} \cdot \sum (y_i - \hat{y}_i)^2. \quad (11)$$

Cookova vzdálenost může být použita k identifikaci odlehlých bodů, pokud překročí určitou mez. Uvádí se různé hodnoty: 1, $4/n$ nebo $4/(n - k - 1)$, kde n je počet pozorování (počet dvojic $[x, y]$) a k počet nezávisle proměnných modelu [15, 16].

Homoskedasticita a heteroskedasticita

Homoskedasticita neboli konstantní rozptyl znamená, že odchylka měření sledované veličiny (y) nezávisí na velikosti nezávislé veličiny (x). Je jedním z předpokladů lineární regrese prováděné pomocí klasické metody nejmenších čtverců (viz kapitola 2.2.2). Opak se nazývá heteroskedasticita, která je ilustrována na Obr. 4. Existují různé statistické testy, které heteroskedasticitu odhalí. Pro základní přehled je nejnázřejší vykreslit bodový graf reziduí vzhledem k nezávisle proměnné a sledovat trend, případně je pro lepší viditelnost v absolutní hodnotě proložit křivkou.



Obr. 4: Ukázka heteroskedasticity.

Základní charakteristiky souboru dat

Pro výpočet parametrů přímky při níže uvedených metodách lze často využít poměrně jednoduché vztahy, které vycházejí z následujících veličin: aritmetického průměru (\bar{x} , \bar{y}), výběrového rozptylu (s_x^2 , s_y^2) a kovariance s_{xy} .

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (12)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (13)$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (14)$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (15)$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (16)$$

Hodnoty charakteristické křivky

Pomocí regresní křivky se dají odhadovat průměrné hodnoty y na základě změřené hodnoty x . To znamená, že je 50% pravděpodobnost, že skutečná hodnota y je menší než ta, kterou odhadneme na základě x . Ve stavebnictví se obvykle pracuje s charakteristickou hodnotou – dolním 5% kvantilem, kde je pouze 5% pravděpodobnost, že skutečná pevnost je menší než stanovená. K získané regresní křivce můžeme stanovit odpovídající charakteristickou křivku, z níž budeme odečítat charakteristické hodnoty pevnosti. Ve verzi ČSN EN 13791:2020 (anglicky) a v současně platné české verzi z roku 2021 [3] je poprvé uveden vztah, podle kterého se spočítá hodnota charakteristické křivky pro hladinu významnosti $\alpha = 5\%$ v daném místě x_0 :

$$f_{c, is, est} = f_{c, is, reg} - t_{(0,05, n-2)} \cdot s_c \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_{i, cor} - \bar{x})^2}}, \quad (17)$$

kde:

$f_{c, is, reg}$ je hodnota nepřímé zkoušky převedená na odpovídající hodnotu pevnosti v tlaku v konstrukci pomocí regresního vztahu (tj. hodnota regresní křivky v bodě x_0),

$t_{(0,05, n-2)}$ je 5% kvantil Studentova rozdělení s $n - 2$ stupni volnosti,

s_c je zbytková (reziduální) směrodatná odchylka odhadovaných hodnot pevnosti, která je měřením rozpětí zkušebních dat pevnosti vývrtů kolem stanovené regresní křivky, daná vzorcem (18), a

$x_{i, cor}$ je i -tá hodnota nepřímé zkoušky z hodnot použitých pro tvorbu regresního vztahu.

$$s_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (f_{c,is} - f_{c,is,reg})^2}{n-2}} \quad (18)$$

Vztah (17) je ekvivalentní (pouze formálně jinak zapsaný) se vztahem uvedeným v [2], který byl použit v bakalářské práci autora [1]. Ten po malých úpravách a dosazení z více rovnic do jedné vypadá následovně:

$$(\beta_0 + \beta_1 \cdot x_0) - t_{(1-\alpha)} \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}. \quad (19)$$

Charakteristická křivka je jednostranný predikční interval pro individuální hodnoty. Oboustranný predikční interval pro zvolenou hladinu významnosti α se získá záměnou $t_{(\alpha, n-2)}$ za $t_{(\alpha/2, n-2)}$ v uvedených vzorcích a jeho spodní a horní hodnota pak jsou

$$\left\langle (\beta_0 + \beta_1 \cdot x_0) - t_{(1-\alpha/2, n-2)} \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}; \right. \\ \left. (\beta_0 + \beta_1 \cdot x_0) + t_{(1-\alpha/2, n-2)} \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \right\rangle. \quad (20)$$

Hodnota 2 v počtu stupňů volnosti ($n-2$) je dána počtem regresních koeficientů, zde β_0 a β_1 . Vztahy v této kapitole jsou snadno aplikovatelné i na polynomy vyššího stupně, stačí upravit právě počet stupňů volnosti podle počtu parametrů a úvodní část $\beta_0 + \beta_1 \cdot x_0$, resp. výpočet $f_{c,is,reg}$ výše uvedených vzorců (17) - (20).

Vztahy uvedené v této kapitole platí pro regrese s předpokládanou chybou pouze v y proměnné, v této práci označované OLSy a WLSy, viz kapitoly o metodách (klasických) nejmenších čtverců (2.2.2) a vážených nejmenších čtverců (2.2.5) níže. Snadno jdou modifikovat pro regresi s chybou pouze v x směru, OLSx nebo WLSx. Pro modely s chybou v obou proměnných viz kapitolu 2.2.4.

2.2.2 Metoda nejmenších čtverců

Nejnámější a nejčastěji používanou metodou pro proložení jednotlivých bodů v grafu křivkou je metoda nejmenších čtverců [9, 10]. Anglicky se označuje jako *ordinary least squares*, zkráceně OLS. Pomocí metody se hledají hodnoty koeficientů křivky, přičemž kritériem je, aby druhá mocnina vzdálenosti (skutečně) naměřených bodů od (teoretických) funkčních hodnot byla minimální. Posuzovaná vzdálenost je

ve směru osy y , takže hodnoty x by měly být zcela přesné a neměly by být zatíženy chybou.

V maticovém zápise je vektor regresních koeficientů $\hat{\beta}$ definován jako

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (21)$$

Pro matici

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$$

a tedy pro jednoduchou regresi přímkou $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$ pak vychází koeficienty

$$\beta_0 = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad (22)$$

$$\beta_1 = \frac{n \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \quad (23)$$

Alternativně mohou být zapsány pomocí výběrového rozptylu (14) a kovariance (16) spočítaných ze vstupních dat.

$$\beta_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad (24)$$

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \cdot \bar{x} \quad (25)$$

Záměnou veličin x a y , respektive minimalizací čtverců vzdáleností ve směru osy x , může být stanovena opačná regrese, kde se předpokládá nezátíženost chybou u veličiny y . Pro přehlednost bude označena OLS metoda s minimalizací ve svislém směru y jako OLS_y a s minimalizací ve vodorovném směru x jako OLS_x.

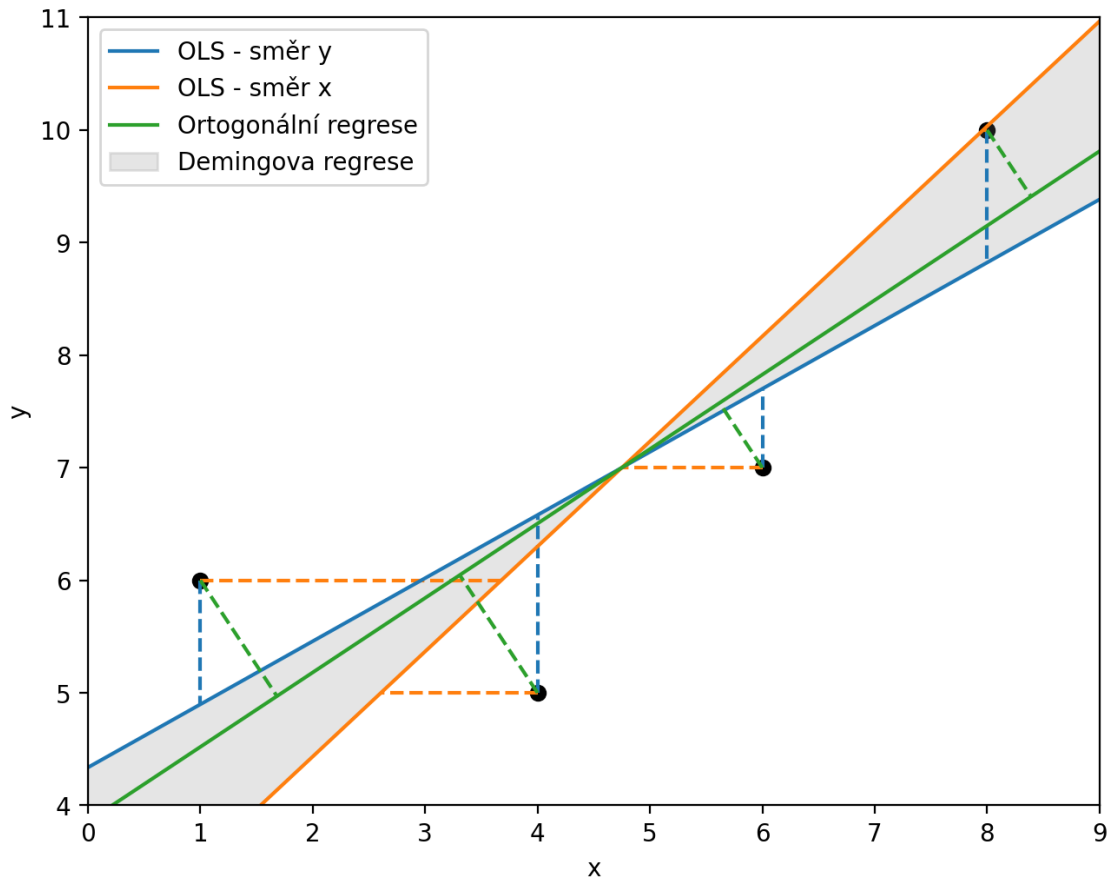
2.2.3 Ortogonální regrese

Pokud jsou chybou zatíženy hodnoty x i y , můžeme použít ortogonální regresi, označovanou v angličtině jako *orthogonal distance regression*, zkráceně ODR. Někdy se taky označuje jako Metoda úplných nejmenších čtverců, „*Total least squares*“, TLS [17]. Princip a rozdíl oproti OLS metodě je dobře patrný z obrázku Obr. 5. Minimalizovaná vzdálenost je kolmo k výsledné křivce. Pro přímkou stanovíme koefi-

cienty β_0 a β_1 podle vztahů (26) a (27), pro vyšší křivky se obecně používá iterační metoda.

$$\beta_1 = \frac{s_y^2 - s_x^2 + \sqrt{(s_y^2 - s_x^2)^2 + 4 \cdot s_{xy}^2}}{2 \cdot s_{xy}} \quad (26)$$

$$\beta_0 = \bar{y} - \bar{x} \cdot \beta_1 \quad (27)$$



Obr. 5: Ukázka principu lineárních regresí.

2.2.4 Demingova regrese

Zobecněním tří uvedených postupů zobrazených na Obr. 5 je Demingova regrese, jejíž křivka leží někde mezi křivkami OLSy a OLSx. Použít ji můžeme tehdy, pokud jsme schopni nejen konstatovat, že obě proměnné jsou zatížené chybou, ale jsme schopni velikost této chyby měření (směrodatnou odchylku, resp. rozptyl) u obou proměnných spočítat nebo odhadnout. Minimalizované čtverce vzdálenosti se měří pod úhlem závislým na poměru těchto chyb. Omezením je, že je definována pouze pro proložení dat přímkou, nikoliv vyššími křivkami.

Stanovíme parametr δ jako poměr rozptylů jednotlivých veličin:

$$\delta = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \quad (28)$$

V extrémních případech, kdy se σ_x^2 nebo σ_y^2 blíží 0, výsledky Demingovy regrese budou odpovídat OLSy nebo OLSx. Pokud bude poměr $\delta = 1$, Demingova regrese přejde v již uvedenou ortogonální regresi.

Koeficienty regresního modelu $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$ se spočítají podle rovnic (32) a (33) převzatých z [12, 18]. K tomu jsou potřeba náhradní veličiny p , q a u :¹

$$p = \sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \quad (29)$$

$$q = \sum (y_i - \bar{y})^2 \quad (30)$$

$$u = \sum (x_i - \bar{x})^2 \quad (31)$$

$$\beta_1 = \frac{\delta \cdot q - u + \sqrt{(u - \delta \cdot q)^2 + 4 \cdot \delta \cdot p^2}}{2 \cdot \delta \cdot p} \quad (32)$$

$$\beta_0 = \bar{y} - \bar{x} \cdot \beta_1 \quad (33)$$

Rezidua r_i se podle [18] (kde se nazývají *Optimalizovaná rezidua*) spočítají jako

$$r_i = \sqrt{(x_i - \hat{x}_i)^2 + \delta \cdot (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (34)$$

za pomoci odpovídajících bodů na regresní křivce se souřadnicemi \hat{x}_i a \hat{y}_i . Ty se určí ze vztahů

$$\hat{x}_i = x_i + \frac{\delta \cdot \beta_1 \cdot d_i}{1 + \delta \cdot \beta_1^2} \quad (35)$$

$$\hat{y}_i = y_i - \frac{d_i}{1 + \delta \cdot \beta_1^2} \quad (36)$$

kde d_i je čistě y (*raw y*) reziduum

$$d_i = y_i - (\beta_0 + \beta_1 \cdot x_i). \quad (37)$$

Tímto způsobem spočítané r_i ovšem nevyjadřují rezidua tak jak je zvykem, tj. geometrickou vzdálenost bodu $[x_i; y_i]$ od teoretického bodu na regresní křivce $[\hat{x}_i; \hat{y}_i]$

¹Někde je Demingova regrese definována též pomocí výběrových rozptylů s_x^2 a s_y^2 a kovariance s_{xy} [11].

a není ani jasné, k čemu jejich hodnoty slouží. Nedá se pomocí nich ani určit koeficient determinace R^2 , ten pro Demingovu regresi nikde definován není. Nabízel by se logicky vypadající vztah (38), ale při testování na datech nedává smysluplné výsledky.

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}} = 1 - \frac{\sum [(x_i - \hat{x}_i)^2 + \delta \cdot (y_i - \hat{y}_i)^2]}{\sum [(x_i - \bar{x})^2 + \delta \cdot (y_i - \bar{y})^2]}. \quad (38)$$

Řešením by mohla být hodnota spočítaná podle následující úvahy. Skutečná hodnota rezidua jako geometrické vzdálenosti bodu od regresní přímky se určí podle vztahu

$$r_i = \sqrt{(x_i - \hat{x}_i)^2 + (y_i - \hat{y}_i)^2}. \quad (39)$$

Koeficient determinace R^2 pro OLSy udává, kolikrát lépe data vystihuje přímka daná modelem než přímka daná pouze průměrem \bar{y} . Hodnotícími kritérii je suma čtverců reziduí SS_{res} (tj. geometrická vzdálenost bodů od přímky ve směru regrese) a celková suma čtverců SS_{tot} neboli suma čtverců vzdáleností od referenční vodorovné přímky v hodnotě \bar{y} . Stejně tak, otočeno o 90° , pro OLSx. Podle stejného principu by se pro Demingovu regresi mohly porovnávat čtverce reziduí se čtverci vzdáleností od referenční přímky. Ta by měla směrnici rovnu parametru regrese δ a stejně jako referenční přímky OLSy, OLSx i ortogonální regrese by procházela společným těžištěm bodů. Vzdálenost k ní by se měřila ve stejném směru, jako se měří rezidua Demingovy regrese.

Jasnější je postup z Obr. 6. Šedě je zakreslena referenční přímka, vůči které se měří SS_{tot} . Spojnice bodů $[x_i; y_i]$ s $[\hat{x}_i; \hat{y}_i]$ pro jednotlivé regrese jsou značeny čárkovanou čarou.

Výsledky spočítané pomocí tohoto postupu vychází dobré, ale jeho použití by vyžadovalo hlubší a podrobnější analýzu a ověření. Pro velmi malé $\delta \approx 0$ dává výsledky shodné s konvenčním postupem pro OLSy metodu, naopak pro velmi velké δ pro metodu OLSx.

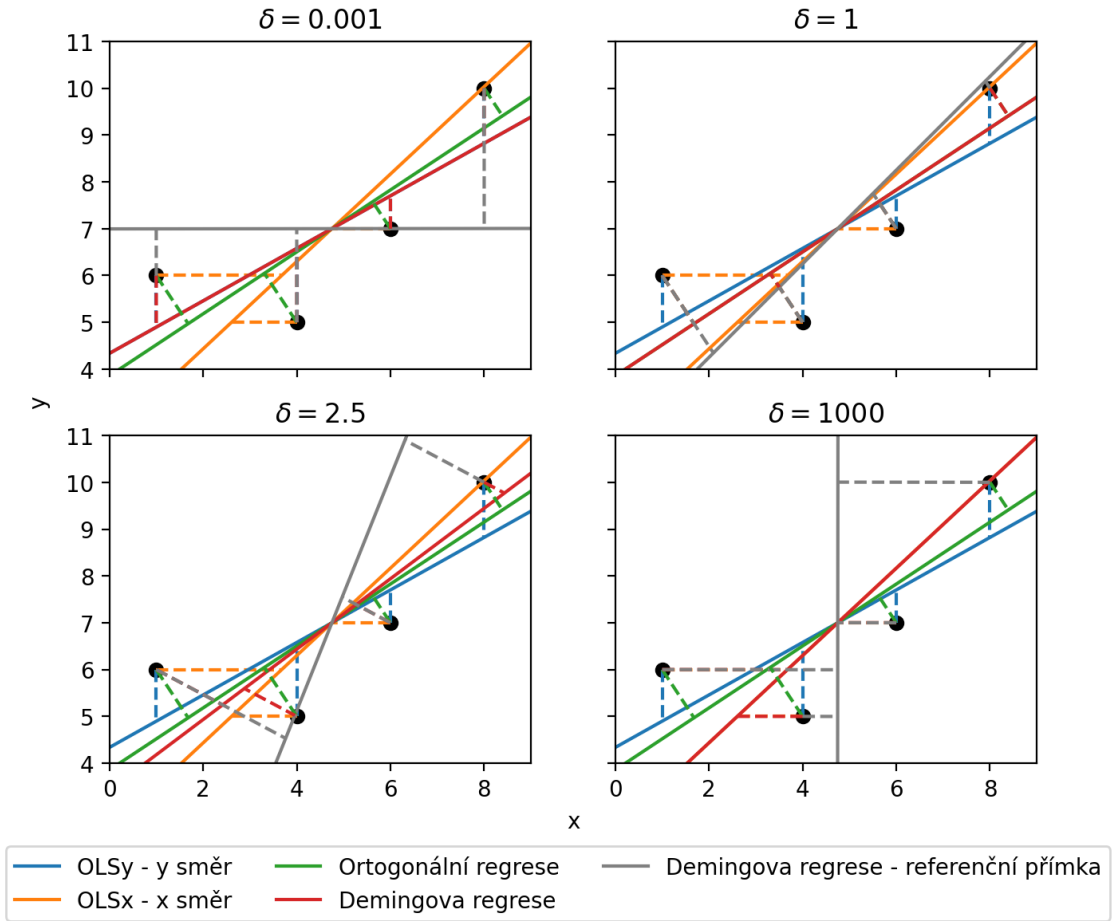
Parametry referenční přímky $y = b_{0,ref} + b_{1,ref} \cdot x$ se určí jako

$$b_{1,ref} = \delta, \quad (40)$$

$$b_{0,ref} = \bar{y} - b_{1,ref} \cdot \bar{x}. \quad (41)$$

Body na referenční přímce, vůči kterým je měřena vzdálenost a počítáno SS_{tot} mají souřadnice

$$\hat{x}_{i,ref} = x_i + \frac{\delta \cdot b_{1,ref} \cdot d_{i,ref}}{1 + \delta \cdot \beta_1 \cdot b_{1,ref}}, \quad (42)$$



Obr. 6: Experimentální ověření a ukázka principu možného postupu výpočtu R^2 pro Demingovu regresi.

$$\hat{y}_{i,ref} = y_i - \frac{d_{i,ref}}{1 + \delta \cdot \beta_1 \cdot b_{1,ref}}, \quad (43)$$

kde

$$d_{i,ref} = y_i - (b_{0,ref} + b_{1,ref} \cdot x_i) \quad (44)$$

a hodnoty β_0 a β_1 jsou koeficienty příslušné Demingovy regrese. Finální vztah pro výpočet R^2 podle této úvahy potom vychází jako

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}} = 1 - \frac{\sum [(x_i - \hat{x}_i)^2 + (y_i - \hat{y}_i)^2]}{\sum [(x_i - \hat{x}_{ref})^2 + (y_i - \hat{y}_{ref})^2]}. \quad (45)$$

Pomocí stejného principu jako SS_{res} a SS_{tot} a stejné referenční přímky by se stanovila také suma čtverců chyb

$$SS_{err} = \sum [(\hat{x}_i - \hat{x}_{ref})^2 + (\hat{y}_i - \hat{y}_{ref})^2], \quad (46)$$

použitelná do výpočtu F-testu v kapitole 2.3.2.

Určení parametru δ

Naprosto zásadní pro použití Demingovy regrese je znát nebo odhadnout poměr variabilit jednotlivých vykreslovaných hodnot x a y . To někdy může být problém, ale zrovna v případě hledání vhodného regresního vztahu mezi pevností betonu v tlaku a tvrdostí jeho povrchu je tato hodnota odhadnutelná.

Na osu x se vynášší průměr několika hodnot změřených tvrdoměrem, na y jedna změřená hodnota pevnosti v tlaku. Bude tedy potřeba stanovit odhad rozptylu hodnot y (f_c) a odhad rozptylu průměru x (průměru R nebo Q).

Vztahy pro výpočet výběrové směrodatné odchylky s_x a výběrového rozptylu s_x^2 ze změřených dat x jsou všeobecně známé, viz vztah (14). Výběrová směrodatná odchylka průměru těchto hodnot $s_{\bar{x}}$ bude ovšem logicky nižší, neboť právě průměrováním více hodnot se snižuje nepřesnost jednotlivých měření. Je definována podílem

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}, \quad (47)$$

kde n je počet změřených (průměrovaných) hodnot [19]. Rozptyl v x směru pro každé i -té těleso se tedy stanoví jako

$$s_{\bar{x},i}^2 = \frac{s_x^2}{n}. \quad (48)$$

S určením rozptylu f_c v y směru, kde je změřena pouze jedna hodnota, pomůže norma *ČSN EN 12390-3 Zkoušení ztvrdlého betonu – Část 3: Pevnost v tlaku zkoušených těles* [20]. V kapitole o shodnosti uvádí podmínky měření pevností f_c , a to ve formě směrodatné odchylky opakovatelnosti s_r a reprodukovatelnosti s_R a meze opakovatelnosti r a reprodukovatelnosti R , všechno uvedené v procentech střední hodnoty. Zejména nás budou zajímat maximální relativní směrodatné odchylky výsledků zkoušek s_r a s_R , zde jsou uvedeny v Tab. 2.

Pojmy *opakovatelnost* a *reprodukovatelnost* definuje norma *ČSN 5725-1 Přesnost (pravdivost a preciznost) metod a výsledků měření – Část 1: Obecné zásady a definice* [21] následovně:

- Podmínky opakovatelnosti jsou „*podmínky, kdy nezávislé výsledky zkoušek se získají toutéž metodou, na identických zkoušených jednotkách, v téže labora-*

toři, tímtež operátorem, za použití téhož vybavení, během krátkého časového rozmezí“.

- Podmínky reprodukovatelnosti jsou „podmínky, kdy nezávislé výsledky zkoušek se získají stejnou metodou, na identických zkoušených jednotkách, v různých laboratořích, různými operátory používajícími různé vybavení“.

Tab. 2: Podmínky pro směrodatnou odchylku pevností změřených v lisu v procentech střední hodnoty podle ČSN EN 12390-3 [20].

	Maximální relativní směrodatná odchylka	
	opakovatelnosti	reprodukovatelnosti
	s_r [%]	s_R [%]
Krychle 100 mm	3,2	5,4
Krychle 150 mm	3,2	4,7
Válec 160 · 320 mm	2,9	3,1

Z dosud nepublikovaných údajů z programů zkoušení způsobilosti formou mezilaboratorního porovnání organizovaném Poskytovatelem zkoušení způsobilosti při SZK FAST² v letech 2010 - 2017 vychází průměrná relativní směrodatná odchylka za podmínek opakovatelnosti $s_r = 2,58\%$ pro krychle o hraně 150 mm. To je méně než maximální hodnota udávaná normou a lze předpokládat, že tato hodnota lépe vystihuje realitu, neboť byla získána na větším počtu dat v současných podmínkách laboratoří. Z této hodnoty se bude vycházet při stanovení odhadu rozptylu pevností získaných podrcením vzorků v lisu. Jelikož nejsou k dispozici hodnoty s_r z měření na válcích, tak budeme používat hodnotu $s_r = 2,58\%$ i pro ně, přestože podle trendu v Tab. 2 by mohla vycházet nižší, cca 2,3%.

Demingova regrese pracuje s jedním konstantním poměrem variabilit [18], takže nakonec se stanoví poměr průměrných rozptylů v x a y směru pro n bodů vykreslovaných do grafu:

$$\delta = \frac{\overline{s_x^2}}{\overline{s_y^2}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum s_x^2}{\frac{1}{n} \cdot \sum (0,0258 \cdot y_i)^2}. \quad (49)$$

Predikční interval a charakteristická křivka

Vztahy pro výpočet predikčního intervalu jednotlivých hodnot a z nich snadno odvozený vztah pro charakteristickou křivku, uvedené v kapitole 2.2.1, platí pouze

²<http://ptprovider.cz/>

pro metody, kde jsou čtverce vzdáleností bodů od regresní křivky měřeny v y směru, tedy OLSy a WLSy metody. Pro Demingovu regresi s chybou v obou proměnných se musí použít komplexnější vztah. Ve většině dohledatelných zdrojů se píše pouze o spolehlivostním pásu pro regresní přímku, resp. intervalovém odhadu regresních koeficientů, nikoliv pásu pro individuální hodnoty. Stejně tak ve statistických softvarech není běžně implementován. Krátká kapitola *Předpověď hodnoty y pro dané x* je v dokumentaci ke statistickému softwaru NCSS [18], kde počítá směrodatnou odchylku pomocí tzv. *jackknife metody*. Na Obr. 7 byl tento postup vyzkoušen, ovšem ukázalo se, že se pomocí něj spočítá také pouze interval pro regresní přímku a ne pro individuální hodnoty.

Na GitHubu³ [22] se nachází zdrojový kód funkcí pro jazyk R⁴ na výpočet konfidenčních a predikčních páسů Demingovy regrese. Nějaké další poznámky autora kódu jsou v diskuzi na [23]. Počítá 2 typy predikčních intervalů:

1. Pro přesnou hodnotu nového bodu x_0
2. Pro nový bod x_0 se započítáním nejistoty ve směru osy x

Z těchto dvou intervalů je logicky správný ten druhý, jak ukázalo i experimentální ověření na Obr. 7.

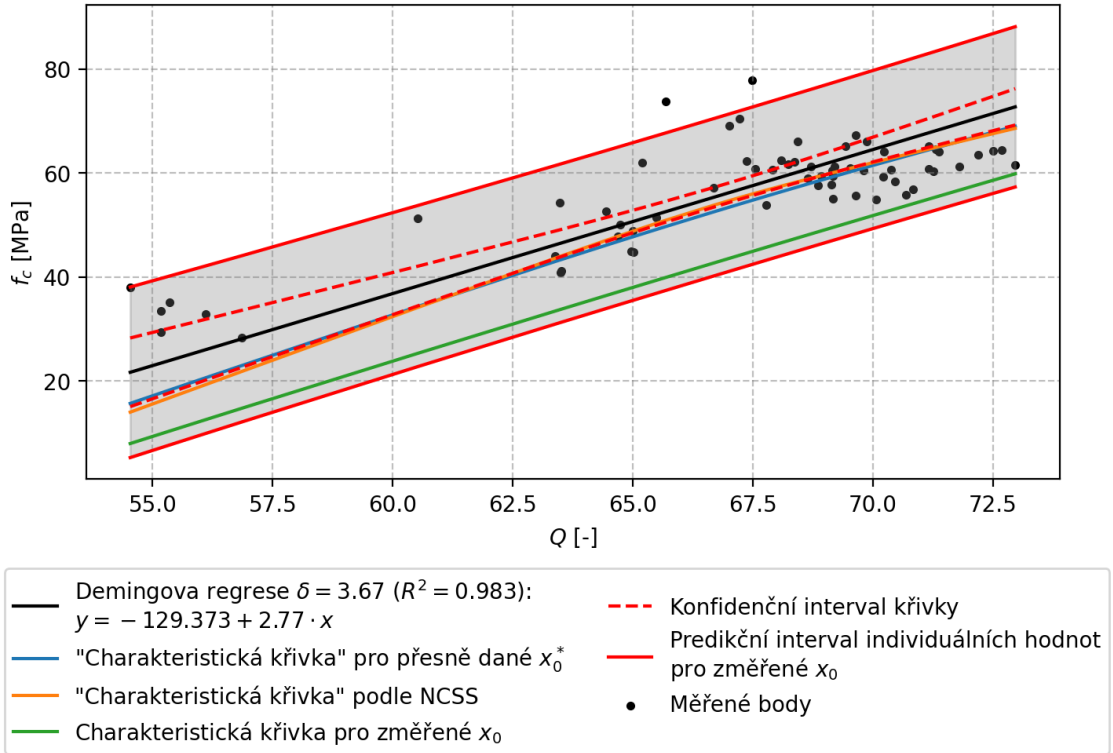
Pro výběr toho, který z dostupných vztahů pro výpočet predikčního intervalu a charakteristické křivky je správné použít, byl proveden výpočet a grafické srovnání 3 křivek. Data, která jsou v práci dále zpracovávána, byla proložena přímkou metodou Demingovy regrese. Kolem ní byl vykreslen 95% konfidenční interval pro tuto přímku a 95% predikční interval podle vztahů *pro nový bod x_0 se započítáním nejistoty ve směru osy x* (uvedeny níže). Následně byly vykresleny hodnoty 3 porovnávaných křivek, viz legendu grafu na Obr. 7.

Ukázalo se, že křivka vytvořená z hodnot *pro nový bod x_0 se započítáním nejistoty ve směru osy x* podle postupu z [22] dává jako jediná očekávané výsledky. Tento postup je tedy rozepsán níže.

Autor zmiňovaného kódu [22] originálně používá trochu jiné značení proměnných než bylo zavedeno zde. Poměr chyb v jednotlivých proměnných značený λ bere opačný, tj. $\lambda = 1/\delta$. Po úpravách, substitucích podle rovnic (29), (30) a (31) a úpravě značení některých hodnot podle zbytku této diplomové práce lze vyčíslit následující

³Odkladiště zdrojových kódů

⁴Programovací prostředí, zaměřené na analýzu dat; <https://www.r-project.org/>



Obr. 7: Experimentální ověření, který z dostupných vztahů pro výpočet predikčního intervalu a charakteristické křivky poskytuje korektní výsledky.

postup výpočtu. Stanoví se různé pomocné rozptyly:

$$\sigma_u^2 = \frac{(\delta \cdot q + u) - \sqrt{(\delta \cdot q + u)^2 + 4 \cdot \delta \cdot p^2}}{2 \cdot (n - 1)}, \quad (50)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{\sigma_u^2}{\delta}, \quad (51)$$

$$s_v^2 = \frac{\sum [(y_i - \bar{y}) - \beta_1 \cdot (x_i - \bar{x})]^2}{n - 2}, \quad (52)$$

$$s_{\beta_1}^2 = \beta_1^2 \cdot \frac{u \cdot q - p^2}{n \cdot p^2}, \quad (53)$$

$$s_{\beta_0}^2 = \frac{s_v^2}{n} + \bar{x}^2 \cdot s_{\beta_1}^2. \quad (54)$$

Dále je vytvořena asymptotická kovarianční matice

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} s_{\beta_0}^2 & -\bar{x} \cdot s_{\beta_1}^2 \\ -\bar{x} \cdot s_{\beta_1}^2 & s_{\beta_1}^2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

a bod x_0 , pro který stanovujeme hodnoty predikčního intervalu, je rozšířen do vek-

torové podoby

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Dolní hranice predikčního intervalu v bodě x_0 je pak vyjádřena jako

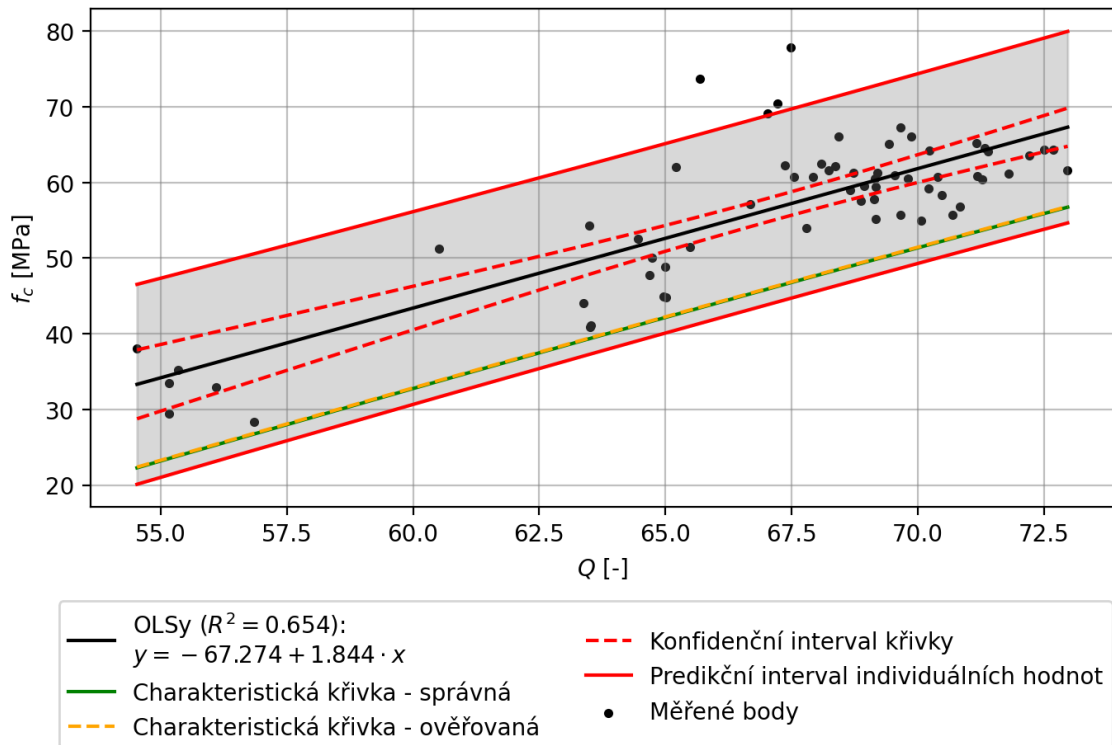
$$(\beta_0 + \beta_1 \cdot x_0) - t_{(1-\alpha/2, n-2)} \cdot \sqrt{\sigma_e^2 + \mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{X}_0^T + (\beta_1^2 + s_{\beta_1}^2) \cdot \sigma_u^2}, \quad (57)$$

horní jako

$$(\beta_0 + \beta_1 \cdot x_0) + t_{(1-\alpha/2, n-2)} \cdot \sqrt{\sigma_e^2 + \mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{X}_0^T + (\beta_1^2 + s_{\beta_1}^2) \cdot \sigma_u^2}. \quad (58)$$

Charakteristická křivka, čili hranice jednostranného intervalového odhadu, se od dolní hranice predikčního intervalu liší pouze hladinou významnosti v kvantilu Studentova rozdělení $t_{(1-\alpha, n-2)}$:

$$(\beta_0 + \beta_1 \cdot x_0) - t_{(1-\alpha, n-2)} \cdot \sqrt{\sigma_e^2 + \mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{X}_0^T + (\beta_1^2 + s_{\beta_1}^2) \cdot \sigma_u^2}. \quad (59)$$



Obr. 8: Experimentální ověření, zda charakteristická křivka pro Demingovu regresi odpovídá křivce získané klasickým vzorcem.

Správná funkce těchto vztahů byla ověřena na limitním případě Demingovy re-

grese pro velmi malé $\delta \doteq 0$, kdy přejde na klasickou OLSy metodu⁵. Byla srovnána charakteristická křivka spočítaná podle vztahů v této kapitole pro koeficienty β získané z OLSy metody s klasickou křivkou podle vztahů v kapitole 2.2.1. Výsledky jsou naprosto totožné, jak dokládá graf na Obr. 8.

2.2.5 Metoda vážených nejmenších čtverců

Jeden ze způsobů, jak zpřesnit regresi prováděnou pomocí OLS metody, je použít vážené čtverce – *weighted least squares*, WLS. Každému bodu je přiřazena váha, v maticovém zápise je vektor regresních koeficientů $\hat{\beta}$ (pro srovnání viz vztah (21) u OLS metody) definován jako

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{y} \quad (60)$$

kde \mathbf{W} je diagonální matice vah jednotlivých bodů [13].

Diagonální prvky matice \mathbf{W} se značí w_{ii} nebo zkráceně w_i . Pro regresi přímkou $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$ vychází vztahy pro jednotlivé koeficienty následovně:

$$\beta_0 = \frac{\sum w_i x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum w_i x_i \cdot \sum x_i y_i}{\sum w_i \cdot \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}, \quad (61)$$

$$\beta_1 = \frac{\sum w_i \cdot \sum x_i y_i - \sum w_i x_i \cdot \sum y_i}{\sum w_i \cdot \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}. \quad (62)$$

Součet čtverců reziduí bude nejmenší, pokud váha každého bodu bude rovna převrácené hodnotě rozptylu [13].

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (63)$$

Stejně jako u OLSy metody je i u WLS předpokládána chyba pouze ve směru osy y . Z toho plyne, že rozptyl, podle kterého budeme stanovovat váhy, by měl být také ve směru osy y . To odporuje běžné konvenci vykreslovat grafy f_c na y ose vs. Q nebo R na x ose. Jak je popsáno v kapitole 2.2.4, sice jsme schopni na základě analýzy jiných laboratorních měření odhadnout rozptyl hodnot f_c , ovšem pouze jako celku, případně v závislosti na velikosti změřené f_c a ne různý pro jednotlivé změřené body. Musíme tedy model otočit, udělat z něj WLSx (stejně jako ve smyslu OLSx) a jako nezávisle proměnnou brát f_c . Ve směru závisle proměnné pak bude Q nebo R , tedy nedestruktivně měřená veličina. Měří se pro každé zkušební těleso i vždy vícekrát a

⁵Při $\delta = 0$ dochází k dělení nulou, proto je výpočet proveden pro limitně blízkou hodnotu.

lze tak z naměřených hodnot snadno stanovit jejich výběrové rozptyly s_i^2 , které jsou nejlepšími odhady skutečných rozptylů σ_i^2 . Z těch tedy určíme váhy podle rovnice (63).

Pokud bychom přesto chtěli model WLSy podle původní konvence os, byla by možná tato metoda stanovení odhadu rozptylů ve směru osy y [13]:

Nejdříve by se provedla regrese klasickou metodou nejmenších čtverců OLSy a zjistila rezidua r_i . Za ideálních podmínek, pokud by měřené hodnoty měly ležet na jedné křivce tvaru daného regresním modelem a odchýlení od této křivky by bylo pouze věcí náhody a nejistoty měření, tak čtverce reziduí r_i^2 by byly právě odhady rozptylů σ_i^2 .

Hodnoty r_i^2 by se mohly použít přímo ($w_i = 1/r_i^2$, tento postup byl zvolen dále v praktické části), nebo je opět proložit vhodnou křivkou a z té teprve pro jednotlivé body x_i odečítat \hat{r}_i^2 , jejichž převrácené hodnoty $1/\hat{r}_i^2$ by se použily jako váhy w_i pro následnou finální regresi metodou vážených nejmenších čtverců.

Existuje i varianta zanesení vah do Demingovy regrese, což by mohlo výhodně kombinovat vlastnosti obou těchto metod pro heteroskedastická data s chybami v obou proměnných. Postup je uveden například v [12, 18], je ovšem složitější a vyžaduje postupné iterace.

2.3 Srovnání výsledků regresních modelů

Po navržení a spočítání regresního modelu se vždy musíme zabývat otázkou, jak dobře popisuje experimentální data. Model je dobrý, pokud jsou vzdálenosti mezi měřenými body a hodnotou na křivce modelu (rezidua) malé a nezávisle rozložené kolem 0. Existují různá číselná hodnotící kritéria, nicméně prvním ukazatelem jsou vždy grafická znázornění. Celkový přehled, který nám grafické znázornění dává, může být těžké vystihnout číselně a v případě více regresních modelů pak srovnat mezi sebou.

Pokud neexistuje předem známý jasně daný matematický vztah mezi zkoumanými veličinami, který by nám řekl, jaký tvar regresní křivky (přímka, polynom, exponenciála...) použít, můžeme například v grafu vidět nesoulad mezi trendem změřených bodů a zvolenou křivkou – např. data mají přibližně tvar paraboly, zatímco regresní křivka pouze přímky. Důležitý je také graf reziduí, který nám může ukázat jejich nežádoucí systematickosti nebo heteroskedasticitu.

V rámci této práce jsou data zpracovávána v programovacím prostředí jazyka Python s využitím knihovny Statsmodels⁶. Ta nabízí (mimo jiné) funkce k provedení regrese OLS a WLS včetně následného vyhodnocení mnoha statistických ukazatelů, které jsou krátce popsány v této kapitole [24]. Část jich hodnotí jak dobře model popisuje zkoumaná data (R^2 , F-test, log-likelihood, AIC), část se věnuje testování rozložení reziduí (J-B test, číslo podmíněnosti). U Demingovy regrese nejsou tato hodnotící kritéria definována, přestože u některých by se pravděpodobně dalo odvodit zobecnění existujících vztahů. Hodnoty R^2 a F-testu pro Demingovu regresi byly spočítány podle postupu navrženého v kapitole 2.2.4.

2.3.1 Koeficient determinace

Koeficient determinace R^2 se často označuje anglickým *R-squared*. Říká nám, jak dobře regresní křivka popisuje data. Spočítá se z rozptylu reziduí a z celkového rozptylu veličin, respektive ze sumy čtverců reziduí SS_{res} a celkové sumy čtverců SS_{tot} [13]. Po dosazení je definiční vztah pro klasickou OLSy metodu s chybou pouze ve směru proměnné y ve tvaru rovnice

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}} = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}, \quad (64)$$

kde:

\hat{y}_i je hodnota na regresní křivce pro odpovídající bod x_i a \bar{y} je aritmetický průměr y hodnot.

Jednoduchou záměnou proměnné y za x se vyjádří vztah pro modely s chybou pouze v proměnné x (OLSx, WLSx). Pro Demingovu regresi tento vztah není nikdy definován, navržený vzorec je v kapitole 2.2.4.

R^2 nabývá hodnot od 0 do 1 – čím blíže 1, tím daný regresní model lépe popisuje experimentální data.

2.3.2 F-test

Jedním z použití statistického F-testu je porovnání, jak dobře popisují data dva různé lineární regresní modely. Porovnává se model který nás zajímá s tzv. *intercept-only* modelem, který má všechny regresní koeficienty kromě β_0 rovny nule, čili předpovídaná hodnota \hat{y} nezávisí na x hodnotě a rovná se vždy pouze průměru \bar{y} [18].

⁶<https://www.statsmodels.org/stable/index.html>

Nulová hypotéza F-testu je, že zkoumaný model a *intercept-only* model popisují data stejně dobře. Alternativní hypotéza je, že zkoumaný model data popisuje významně lépe. Volí se hladina významnosti α obvykle 0,05 a pokud je výsledná p -hodnota testu menší, nulová hypotéza se zamítá.

Výsledkem F-testu je hodnota F^* spočítaná podle vzorce (65), kde je zároveň i dosazení pro klasickou OLSy metodu.

$$F^* = \frac{\frac{1}{p-1} \cdot SS_{err}}{\frac{1}{n-p} \cdot SS_{res}} = \frac{\frac{1}{p-1} \cdot \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\frac{1}{n-p} \cdot \sum (y_i - \hat{y}_i)^2}, \quad (65)$$

kde p je počet regresních koeficientů a n počet hodnot.

p -hodnota se určí z F-rozdělení pravděpodobnosti s parametry $p-1$ a $n-p$.

2.3.3 Logaritmus věrohodnosti

Logaritmus věrohodnosti nebo také logaritmus věrohodnostní funkce je známější pod anglickým označením *log-likelihood*. Samotné číselné vyjádření tohoto parametru, které může být v rozsahu $\langle -\infty; \infty \rangle$, nemá velkou vypovídající hodnotu. Užitečné je však srovnání výsledných hodnot mezi různými modely. Model s vyšší hodnotou *log-likelihood* funkce popisuje zkoumaná data lépe.

2.3.4 AIC

Akaikeho informační kritérium (*Akaike Information Criterion*, AIC) zohledňuje zároveň věrohodnost modelu, jeho složitost i počet regresních bodů. Modely s nižším AIC lépe vystihují data. Více je popsáno např. v [13].

2.3.5 Jarque-Bera test

Jeden ze statistických testů normality, který se používá pro testování rozložení reziduí kolem 0. Podrobně je popsán například v [25]. Pokud je p -hodnota tohoto testu menší než zvolená hladina významnosti α , normalita se zamítá. Obvykle se volí $\alpha = 0,05$.

2.4 Vyhodnocení podle ČSN EN 13791

Aktuální verze normy „*ČSN EN 13791 Posuzování pevnosti betonu v tlaku v konstrukcích a v prefabrikovaných betonových dílcích*“ vstoupila v platnost v listopadu 2021. Je překladem anglické verze, která u nás platila přibližně rok a půl, od 1. 3. 2020, a je s ní obsahově shodná. Je tedy poměrně nová a stojí zato ji krátce zmínit a shrnout její požadavky a postupy. Předtím zde od 1. 7. 2007 platila její první verze.

Obě verze uvádí postupy pro dva druhy zkoušení:

1. Zjištění pevnosti neznámého betonu v konstrukci.
2. Ověření v případě pochybností, zda beton v nově budované konstrukci má požadovanou kvalitu.

2.4.1 ČSN EN 13791:2007

Odhad pevnosti v tlaku pro vyhodnocení existujících konstrukcí

Tato starší verze normy umožňovala určení pevnosti betonu následujícími způsoby:

- Pouze na základě vývrtů rozměrů > 100 mm, resp. > 50 mm při zvýšení počtu vývrtů na trojnásobek a využití převodního součinitele. Počet vývrtů z jedné zkušební oblasti byl nejméně 3, v ideálním případě (z důvodu pracnosti praxe nereálných) 15.
- Na základě nepřímých zkoušek a konkrétního převodního vztahu vytvořeného pro daný beton. Pro vytvoření vztahu bylo zapotřebí nejméně 18 dvojic výsledků zkoušek vývrt + nepřímá metoda.
- Na základě nepřímých zkoušek a vztahu získaného posunem základní normové křivky. Pro posun křivky bylo potřeba nejméně 9 dvojic výsledků zkoušek vývrt + nepřímá metoda.

Posouzení pevnostní třídy betonu v případě pochybností

V případě pochybností o kvalitě nového betonu se postupovalo následovně:

- Pouze na základě vývrtů, pro velkou zkušební oblast s minimálně 15 vývrty muselo platit:

$$f_{m(n),is} \geq 0,85(f_{ck} + 1,48 \cdot s), \quad f_{is,nejnižší} \geq 0,85(f_{ck} - 4).$$

- Při dohodě obou stran umožňovala použití též nepřímých metod podobně, jako současná verze. Z minimálně 15 výsledků nepřímých zkoušek se odebraly vývrty ze 2 míst s nejnižším výsledkem a muselo platit:

$$f_{is,nejnižší} \geq 0,85(f_{ck} - 4).$$

- Pro malou zkušební oblast pouze s několika dávkami betonu mohla být místa pro 2 vývrty po dohodě dokonce pouze odhadnuta na základě zkušeností, nikoliv na základě nepřímých zkoušek. I zde muselo platit:

$$f_{is,nejnižší} \geq 0,85(f_{ck} - 4).$$

2.4.2 ČSN EN 13791:2021

Norma [3] uvádí tyto změny oproti verzi z roku 2007:

- *Je zcela zrevidována, ale z důvodů kontinuity metodologických přístupů a předmětu normy je v maximální míře zachován předchozí vzhled.*
- *Primárně se zaměřuje na zjištění charakteristické pevnosti v tlaku v konstrukci v návaznosti na použití EN 1990 a EN 1992-1-1.*
- *U použitých postupů jsou uvedeny podrobnější instrukce, obzvláště s ohledem na posuzování výsledků zkoušek, měření, objemu betonu, zkušebního místa, malých zkušebních oblastí a zkušebních oblastí.*
- *Požadavky na stanovení účelu šetření, postupů, které budou použity, zkušební metody, zkušební místa a zkušební oblasti, které je třeba definovat před započítáním zkoušky.*
- *Kapitola 8 „Odhad pevnosti v tlaku pro hodnocení existujících konstrukcí“ pokrývá předchozí požadavky na stanovení vlastností pevnosti v tlaku v konstrukci buď zkouškami vývrtů nebo nepřímými metodami.*
- *Kapitola 9 „Posuzování pevnostní třídy betonu v případě pochybností“ nahrazuje původní požadavky pro vyhodnocení v případě, že posouzení shody betonu založené na standardních zkouškách je zpochybněno.*
- *Postupy A a B v 7.3 EN 13791:2007 již nejsou platné.*
- *EN 13791 je v souladu s požadavky EN 206.*

Velký rozdíl je v přístupu k tvrdoměrným a obecně nepřímým zkouškám. Věnuje se výhradně zkouškám odrazovým tvrdoměrem a měření rychlosti průchodu ultrazvukového impulsu, starší verze uváděla ještě velikost síly na vytržení podle ČSN EN 12504-3. Další metody nebo kombinaci více nepřímých měření nevyklučuje, ale nevěnuje se jim.

Dále předchozí verze ze zkoušek stanovovala pevnostní třídu betonu, ta současná stanovuje charakteristickou pevnost.

Odhad pevnosti v tlaku pro vyhodnocení existujících konstrukcí

Umožňuje určit pevnost betonu existující konstrukce následujícími způsoby:

- Pouze na základě vývrtů rozměrů > 75 mm. Počet vývrtů z jedné malé zkušební oblasti je nejméně 3, z větší oblasti než 10 m^3 8. Pro vývrty o průměru 50 mm je minimální počet pro zkušební oblast 10 m^3 12.
- Na základě nepřímých zkoušek a vytvořeného regresního vztahu. Pro vytvoření je potřeba nejméně 8 dvojic výsledků, doporučuje se jich 10, aby mohly být až 2 vyřazeny jako odlehlé hodnoty.
- Pro zkušební oblast do 30 m^3 ze 3 vývrtů, které jsou odebrány v místech, kde byla pomocí nepřímých zkoušek vytipována menší pevnost v tlaku.

Posouzení pevnostní třídy betonu v případě pochybností

V případě pochybností o kvalitě nového betonu, kde známe předpokládanou pevnostní třídu a ověřujeme, zda je beton potřebné kvality, uvádí tyto postupy:⁷

- Pouze na základě vývrtů. Na každých 30 m^3 jsou potřeba 2 vývrty (v případě oblasti $\leq 30 \text{ m}^3$ 3). Posuzuje se pak střední hodnota výsledků zkoušek a nejnižší výsledek. Podle počtu objemů 30 m^3 musí platit pro 2 - 4 objemy ($30 - 120 \text{ m}^3$)

$$f_{m(n),is} \geq 0,85(f_{ck,spec} + 1), \quad f_{is,nejnižší} \geq 0,85(f_{ck} - M)$$

a pro 5 - 6 objemů ($120 - 180 \text{ m}^3$)

$$f_{m(n),is} \geq 0,85(f_{ck,spec} + 2), \quad f_{is,nejnižší} \geq 0,85(f_{ck} - M).$$

Podle pevnostní třídy betonu $M = 1$ pro C8/10, $M = 2$ pro C12/15, $M = 3$ pro C16/20 a $M = 4$ pro C20/25 a vyšší.

- Z nepřímých zkoušek na minimálně 9 místech pro oblast objemu $1 \cdot 30 \text{ m}^3$, 12 místech pro 2 až $4 \cdot 30 \text{ m}^3$ a 20 místech pro 5 až $6 \cdot 30 \text{ m}^3$ se vyberou místa s nejnižší a průměrnou pevností. Provedou se 2 vývrty v odhadovaných místech nejnižší pevnosti pro oblast objemu $1 \cdot 30 \text{ m}^3$, nebo 1 v místě nejnižší a 2 v místě průměrné pevnosti pro více objemů. Shodně s předchozím zmíněným postupem se posuzuje střední hodnota a nejnižší výsledek zkoušky.

⁷Ve stručnosti, na rozdíl od verze z roku 2007 jsou tyto postupy plně výjimkou a těžko je popsat jinak, než podrobnými tabulkami, které jsou uvedeny v normě.

- Screeningovou zkouškou, tj. pouze nepřímými zkouškami. Je potřeba mít k dispozici závislost mezi nepřímou zkouškou a pevností v tlaku. Norma uvádí příklad závislosti z německé národní přílohy, ale pro ČR ji jako platnou nezavádí.

Z uvedeného stručného srovnání stojí za zdůraznění následující, týkající se regresních vztahů. Vydání z roku 2020 a 2021 oproti starší verzi:

- Nepoužívá převodní vztah vytvořený posunem normové křivky.
- Umožňuje použití čistě nepřímých zkoušek v případě pochybností o novém betonu, pokud byl vytvořen převodní vztah.
- Pro vytvoření regresního vztahu pro vybraný beton stačí nově 8 dvojic hodnot (měří se 10 kvůli vyřazení odlehlých) namísto původních 18.
- Norma nově obsahuje vztah pro určení charakteristické křivky, jak je uveden v kapitole 2.2.1.

2.5 Úvodní očištění dat od odlehlých hodnot

U hodnot, které se měří vícekrát a následně průměrují, je na začátku potřeba zkontrolovat, zda některé změřené hodnoty nejsou příliš odlehlé a nezkreslují tak výsledný průměr. Odlehlá hodnota mohla vzniknout například chybou při odečítání z přístroje, při přepisování tabulky, nebo vyplývá z principu měřicí metody a přístroje. U Schmidtových tvrdoměrů může typicky dojít k úderu v místě, kde se nachází zrno kameniva (vyšší hodnota odrazu), bublina (nižší hodnota), nebo přístroj nemusí být veden dostatečně kolmo k povrchu.

Postupů k tomu jak rozhodnout, zda nejvyšší či nejnižší ze změřených hodnot do souboru patří, nebo je chybná a má se vyřadit, existuje více. V práci je použit Grubbsův test, který doporučuje i norma ČSN EN 13791 [3]. Postup jeho výpočtu je popsán tamtéž a autor jej popsal i ve své bakalářské práci [1]. Na základě směrodatné odchylky souboru dat a kritické hodnoty Grubbsova testu z tabulek se určí horní a dolní mez kolem aritmetického průměru souboru hodnot. Pokud krajní hodnota padne mimo tyto meze, vyřadí se jako odlehlá. Test by se měl po vyřazení nějaké hodnoty zopakovat, neboť se změní průměr, směrodatná odchylka, počet hodnot a tím i krajní meze.

3 Praktická část

3.1 Popis vyhodnocovaných dat

Pro statistické analýzy byla poskytnuta starší data z různých experimentů, prováděných v rámci předchozích prací na FAST VUT. Data byla zpracována podle navržených postupů uvedených v teoretické části této práce, postup zpracování a získané výsledky jsou představeny v kapitolách 3.2 a 3.3.

V této práci jsou zahrnuty 2 odlišné typy dat, zpracované samostatně:

- Data 1, měřená na betonech výrazně starších než 28 dní. Srovnává se několik betonů různého složení dohromady.
- Data 2, měřená v průběhu zrání jednoho betonu. Sleduje se každý beton zvlášť.

3.1.1 Data 1 – starší betony různého složení

Tato data pochází z diplomové práce [26] z roku 2019. Měřily se betonové bloky dříve zhotovené v rámci projektu GAČR č. 13-18870S. Byly z 11 druhů betonu, z každého druhu (s jednou výjimkou) 3 bloky. Složení betonů se lišilo zejména obsahem plastifikační a provzdušňovací přísady a obsahem cementu, viz Tab. 3.

Tab. 3: Složení jednotlivých betonů [26].

Materiál	Označení betonu										
	R	0/1	0/2	0/3	1/1	1/2	1/3	2/2	2/3	P2/2	P2/3
Cement CEM I 42,5 R	248	308	357	392	295	349	394	338	386	335	393
Písek 0 - 4 mm	953	925	889	826	927	897	846	905	854	850	816
Kamenivo 4 - 8 mm	173	182	174	195	185	185	192	183	207	312	183
Kamenivo 8 - 16 mm	675	696	693	669	689	693	684	667	671	526	694
záměsová	187	189	188	195	163	162	170	163	168	151	158
Voda: v kamenivu	14	14	12	13	14	13	13	13	13	13	13
celková	201	203	201	208	177	175	183	176	181	164	171
Plastifikátor: Sika VisoCrete 4035	0	0	0	0	0,71	0,91	0,95	1,77	2,01	1,70	2,05
Provzdušnění: LPS A 94	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,76	0,71
Vodní součinitel	0,75	0,61	0,53	0,50	0,55	0,46	0,43	0,48	0,44	0,45	0,40

Na každém bloku bylo získáno celkem 60 hodnot odrazu R tvrdoměrem Original Schmidt N a 60 hodnot vrácené energie Q tvrdoměrem Silver Schmidt. Měření pro-

bíhala v rozmezí 10 dnů, na každém bloku se měřilo 3×. Betonové bloky byly ovšem již 5 let staré a vyzrálé, takže toto časové rozpětí nemá žádný vliv, jako by tomu bylo u mladého betonu. Můžeme tak data ze všech 3 měřících cyklů sloučit, nebo je vyhodnotit zvlášť a porovnat mezi sebou.

Dále byla změřena doba průchodu ultrazvukového impulzu. Měřila se z obou bočních směrů v pravidelném rastru 3 × 5 hodnot, opět 3×, takže 90 hodnot z každého bloku. Tyto hodnoty se nedají snadno přiřadit následně vyrobeným zkušebními tělesům, sloužily zejména pro určení rovnoměrnosti betonu.

Nakonec se z každého bloku udělaly vývrty a zhotovila se 4 zkušební tělesa – válce průměru cca 100 mm a poměru $l/d = 1,0$, resp. na stranu bezpečnou poměru nepatrně většího $l/d = 1,02$. Dva odebrané vývrty byly v místech, kde se zkoušela tvrdost přístrojem OriginalSchmidt N (označené A a B), a dva v místech zkoušení tvrdoměrem SilverSchmidt (označené C a D). Pro každý beton tak je k dispozici 3 (bloky) · 2 (vývrty) = 6 měřených bodů (f_c , R) a 6 (f_c , Q).

Změřené hodnoty R a Q a odpovídající pevnosti v tlaku f_c jsou uvedeny v přílohách A.1 - A.5.

Navržené zpracování dat

Cílem bude zjistit, která z regresních metod je vhodnější a jaké způsoby se hodí použít pro snížení nejistoty modelu.

Data jsou rozdělena do 3 skupin podle 3 dnů, ve kterých probíhalo měření. Na každé z těchto skupin se provede základní očištění od odlehlých hodnot a následně regrese různými metodami, včetně určení spolehlivostních pásů a charakteristických křivek. Bude se sledovat, zda se výsledky jednotlivých regresí mezi skupinami nějak významně liší či nikoliv, neboli jak moc jsou jednotlivé metody náchylné na vzdálené body, reprezentované například velkou Cookovou vzdáleností. Vyzkouší se, zda pro lepší konzistentnost výsledků jednotlivých metod pomůže odstranění bodů s velkou Cookovou vzdáleností. Porovnájí se získané křivky z jednotlivých dnů s křivkami všech sloučených dat, tj. „průměrnými a přesnějšími“ určenými z trojnásobného počtu bodů.

To všechno jednak bez rozlišení druhu betonu, jednak pro betony rozlišené podle množství přísad. Ideální by bylo vyzkoušet stejný postup i pro jednotlivé druhy betonu, ale pro tvorby regresního modelu by bylo pouze 6 bodů, což je málo. Skupiny podle množství přísad byly zvoleny a označeny následovně:

- všechny betony (R, 0/1, 0/2, 0/3, 1/1, 1/2, 1/3, 2/2, 2/3, P2/2, P2/3)

- betony bez P (R, 0/1, 0/2, 0/3, 1/1, 1/2, 1/3, 2/2, 2/3)
- betony R, 0 (R, 0/1, 0/2, 0/3)
- betony 1 (1/1, 1/2, 1/3)
- betony 2 (2/2, 2/3)
- betony P (P2/2, P2/3)

Porovnávané regresní metody jsou OLSy, OLSy, WLSy, WLSx a Demingova regrese.

3.1.2 Data 2 – beton v průběhu zrání

Druhý typ dat, na kterém budou regresní metody zkoušeny, obsahuje vždy hodnoty měřené na jednom druhu betonu v průběhu jeho zrání. Stejně jako u předchozí kapitoly byla i tato data změřena již dříve v rámci jiných prací. Do srovnání byly zahrnuty 3 druhy betonů – dva jsou převzaty z bakalářské práce autora [1] (označené shodně s [1] i zde římskými čísly I a II), jeden byl do srovnání doplněn. Ten je označen jako III a je popsán níže. Složení těchto betonů není autorovi známo, ale pro provádění experimenty není podstatné.

Betony I a II

Okolnosti a průběh měření jsou podrobně popsány v [1]. Měřily se zkušební krychle vyrobené ze dvou druhů betonu v průběhu jejich zrání. Cíl byl zachytit zejména nízké pevnosti kolem 5 a 15 MPa. Tvrdost povrchu se měřila na každé krychli dvěma stejnými tvrdoměry SilverSchmidt PC-L s hříbovým nástavcem (MP), určeným na betony nízkých pevností. Jeden byl školní (označený VUT), druhý zapůjčený od firmy SKANSKA. Mimo jiné se v [1] porovnávalo také to, zda oba tvrdoměry poskytují srovnatelné výsledky. Stáří betonů v době měření není podstatné, lišilo se někdy jen v řádu několika málo hodin. Obvykle byly změřeny 3 krychle ve stejnou dobu. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v přílohách E.1 a E.2 na konci práce.

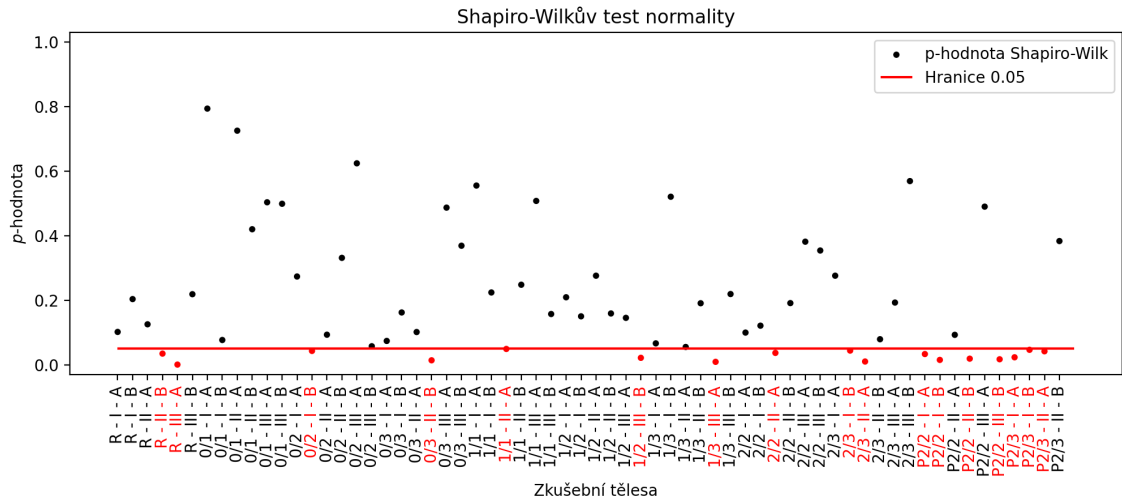
Beton III

Měření bylo prováděno ve stáří betonu 2, 3, 7, 14, 28 a 90 dní. Pro každé stáří betonu se měřily údaje na 3 krychlích o hraně 150 mm. Na každé se změřilo 10 R -hodnot tvrdoměrem Original Schmidt N, 10 Q -hodnot tvrdoměrem SilverSchmidt, doba průchodu ultrazvukového impulsu a nakonec pevnost v tlaku v lisu. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v příloze E.3 na konci práce.

3.2 Statistická analýza – Data 1 (starší betony různého složení)

3.2.1 Test normality změřených dat

Podmínkou pro statistické určení odlehlých hodnot pomocí Grubbsova testu je, aby data pocházela z normálního rozdělení. Byl použit Shapiro-Wilkův test s hladinou významnosti $\alpha = 5 \%$ pro změřené R nebo Q hodnoty na jednotlivých tělesech. Grafické výsledky pro jednotlivé tvrdoměry jsou na Obr. 9 a Obr. 10. Překvapivě na ne úplně malém množství těles vyšla p -hodnota testu menší než zvolených 5% a tedy test normalitu zamítl. Přitom počet měřených hodnot ze všech 3 cyklů byl 30, což už není tak málo, oproti běžně změřeným 10 hodnotám na jednom místě.

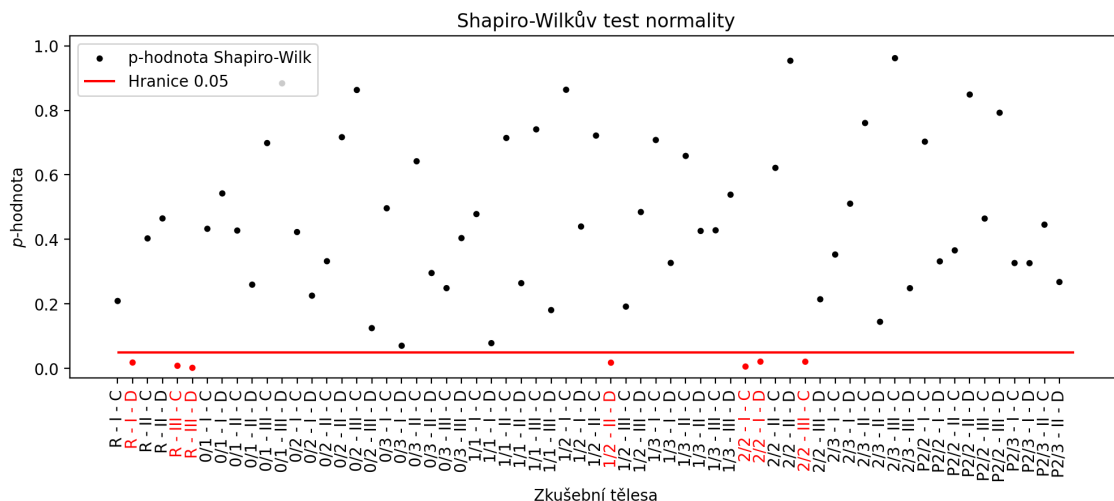


Obr. 9: Test normality rozložení hodnot odrazu R na tělesech, kde se měřilo tvrdoměrem OriginalSchmidt N.

Použití jiných testů než Shapiro-Wilkova nepřineslo o moc lepší výsledky, nejmírněji hodnotil D'Agostinův K^2 test, který ze 128 těles zamítl normalitu u 11, čili u $8,6 \%$ vzorků, viz Tab. 4. Výsledky se různě překrývají a celkem u 9 těles (7%) normalitu zamítly všechny použité testy současně.

Tab. 4: Testy normality hodnot z tvrdoměrů – počty zkušebních těles se zamítnutou normalitou.

Statistický test	Počet vzorků se zamítnutou normalitou
Shapiro-Wilk	24 (18,8 %)
Anderson-Darling	37 (28,9 %)
Lilliefors	38 (29,7 %)
D'Agostino	11 (8,6 %)

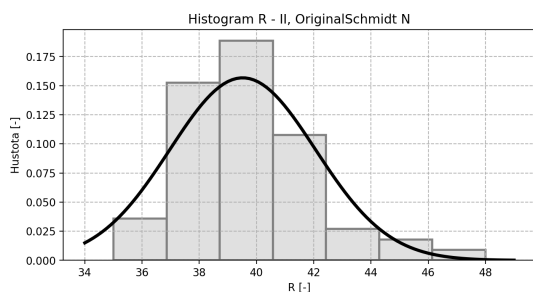


Obr. 10: Test normality rozložení hodnot odrazu R na tělesech, kde se měřilo tvrdoměrem Silver-Schmidt.

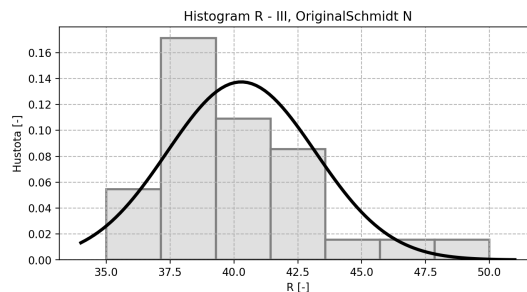
Při analýze těchto výsledků lze také využít skutečnosti, že z každého betonového bloku pocházela vždy 2 zkušební tělesa zkoušená tímto tvrdoměrem. Normalita se tak dá hodnotit na základě 60 změřených hodnot z každého z 64 bloků. I potom ale zůstává 5 bloků (7,8%), na kterých všechny použité testy normalitu pro vybraný tvrdoměr zamítly, viz Tab. 5. Histogramy těchto dat jsou na Obr. 11 až Obr. 15.

Tab. 5: Problematické bloky z hlediska testů normality.

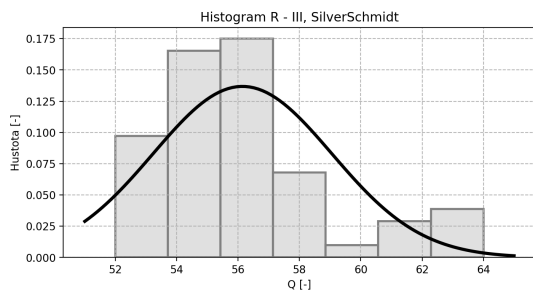
Blok	R - II	R - III	R - III	1/2 - III	2/2 - I
Tvrdoměr	N	N	Silver	N	Silver
Shapiro-Wilk	0,005	0	0	0,023	0
Anderson-Darling	False	False	False	False	False
Lilliefors	0,001	0,002	0,001	0,002	0,001
D'Agostino	0,004	0	0,001	0,035	0,003



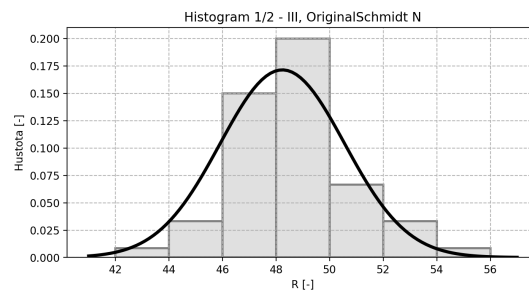
Obr. 11: Histogram hodnot odrazu R bloku R - II.



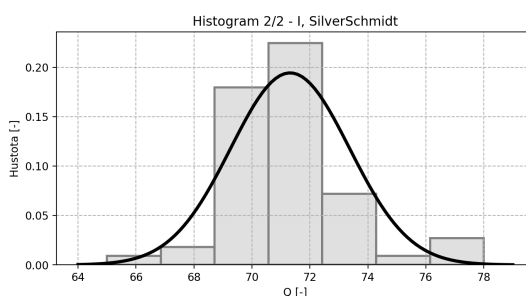
Obr. 12: Histogram hodnot odrazu R bloku R - III.



Obr. 13: Histogram hodnot vrácené energie Q bloku R - III.



Obr. 14: Histogram hodnot odrazu R bloku 1/2 - III.



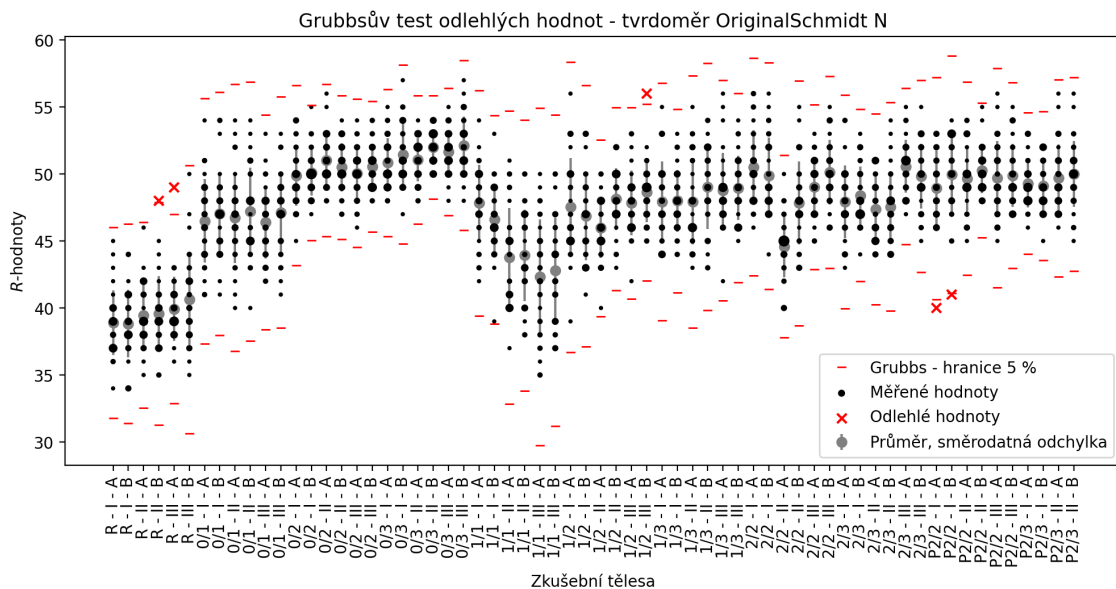
Obr. 15: Histogram hodnot vrácené energie Q bloku 2/2 - I.

Dá se předpokládat, že zamítnutí normality je důsledkem spíše malého počtu měření než toho, že by hodnoty odrazu skutečně nebyly normálně rozložené. Výzkum na tohle téma prováděli například Szilágyi, Borosnyó a Mikó [4], kde sledovali závislost testovací statistiky Shapiro-Wilkova testu na zvyšujícím se počtu tvrdoměrných měření. Provedli měření na 11 krychlích ze stejného betonu tvrdoměry OriginalSchmidt N a L a první generací přístroje SilverSchmidt, která uměla měřit R i Q hodnoty. Postupně pak prováděli Shapiro-Wilkův test pro kombinace hodnot R nebo Q z 1 až 11 krychlí. Dospěli k závěru, že data z měření tvrdoměry jsou normálně rozložena, což se ukáže spíše při větším počtu měření. Při nižších počtech výsledky testu normality ukazují spíše přesnost přístroje i samotného provádění měření. Proto se i autor této diplomové práce domnívá, že testovat normalitu rozložení dat z tvrdoměru na jednotlivých zkušebních místech při běžně prováděných měřeních stavebního zkušebnictví přináší více problémů než užitku a může vést k zavádějícím výsledkům, právě kvůli relativně malým počtům změřených hodnot.

Pro další vyhodnocení se tedy bude předpokládat, že hodnoty změřené tvrdoměry pochází z normálního rozdělení.

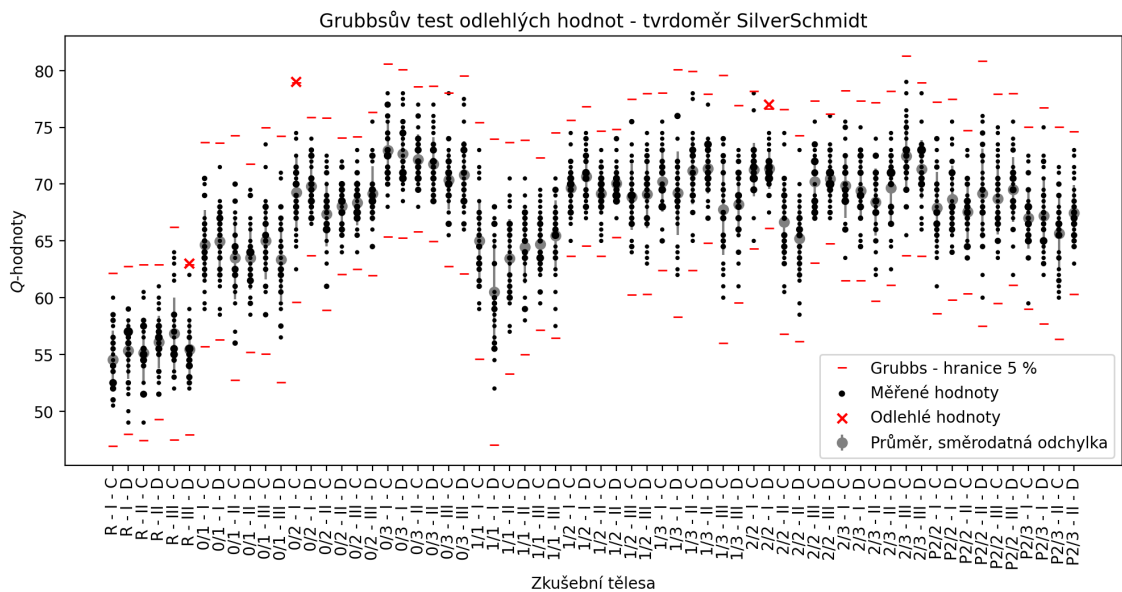
3.2.2 Očištění od odlehlých hodnot

K odfiltrování odlehlých hodnot se použil Grubbsův test. Hladina významnosti se běžně volí 1 % nebo 5 %, zde byla využita přísnější 5%. Grafické výsledky pro všech 30 měřených dat společně pro jednotlivé tvrdoměry jsou na následujících dvou obrázcích (Obr. 16 a Obr. 17). Výsledky pro jednotlivé cykly měření s 10 hodnotami jsou v přílohách B.1 - B.3.



Obr. 16: Grubbsův test odlehlých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem OriginalSchmidt N. Všechny 3 cykly měření dohromady.

Větší velikost některých bodů v grafech znázorňuje více stejných změřených hodnot. Červenou čarou je naznačena 5% hranice Grubbsova testu, která je pro každé zkušební těleso jiná. Červeným křížkem jsou vykresleny body, které byly označeny jako odlehlé a pro další výpočty byly odstraněny. Šedě je naznačen průměr hodnot (před případným odstraněním odlehlé hodnoty) a směrodatná odchylka.



Obr. 17: Grubbsův test odlehlých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem SilverSchmidt. Všechny 3 cykly měření dohromady.

3.2.3 Regrese

Ukázalo se, že při rozdělení na příliš úzké skupiny tvoří data malý shluk s malou korelací, který nemá jasný trend pro regresi přímkou, nebo se dokonce jeví trend opačný s klesající závislostí. To dokládají i hodnoty Pearsonova korelačního koeficientu, které jsou uvedeny v Tab. 6.

Tab. 6: Pearsonův korelační koeficient jednotlivých skupin betonů pro data 1.

Tvrdoměr	Original Schmidt N				Silver Schmidt			
	1	2	3	všechny	1	2	3	všechny
Cykly měření	Pearsonův korelační koeficient r							
Skupina betonů								
všechny betony	0,78	0,72	0,76	0,77	0,81	0,79	0,80	0,81
betony bez P	0,79	0,76	0,80	0,80	0,88	0,89	0,89	0,90
betony R, 0	0,92	0,88	0,90	0,91	0,91	0,93	0,95	0,94
betony 1	0,62	0,63	0,78	0,70	0,67	0,75	0,72	0,73
betony 2	-0,06	0,16	0,32	0,13	0,05	0,19	0,18	0,15
betony P	0,54	-0,75	-0,13	-0,16	-0,18	-0,78	-0,75	-0,73

Použitelné výsledky jsou pouze z těchto skupin:

- všechny betony (R, 0/1, 0/2, 0/3, 1/1, 1/2, 1/3, 2/2, 2/3, P2/2, P2/3)
- betony bez P (R, 0/1, 0/2, 0/3, 1/1, 1/2, 1/3, 2/2, 2/3)

- betony R, 0 (R, 0/1, 0/2, 0/3)
- betony 1 (1/1, 1/2, 1/3)

Skupiny „betony 2“ a „betony P“ tak nebudou dále podrobně vyhodnocovány. Všechny grafy jsou vykresleny v přílohách C.1 - D.4 na konci práce. Grafy jsou záměrně vykresleny s fixními hraničními hodnotami jednotlivých os, aby bylo názornější vzájemné srovnání mezi nimi.

Kolem změřených bodů je šedým křížem vykreslena směrodatná odchylka ve směrech x i y . Zde poměr zobrazení os grafu může klamat a zkreslovat náš dojem. Mohlo by se zdát, že variabilita v x směru je mnohonásobně větší než v y směru. Až při bližším pohledu na hodnoty na obou osách a na parametr δ Demingovy regrese v legendě grafu je zřejmé, že je to právě naopak a větší je variabilita ve směru y . Variabilita v x směru je sice menší než v y , ale rozhodně není zanedbatelná. Proto se autor této práce domnívá, že použití některé z regresních metod pracující s chybou v obou proměnných, např. zde uvedené Demingovy regrese, je vhodné.

V Tab. 7 jsou srovnané průměrné poměry rozptylů pro jednotlivé skupiny betonů. Není zde velký rozdíl mezi oběma typy tvrdoměrů. Při odhadování rozptylu f_c pomocí dlouhodobých výsledků měření opakovatelnosti a při 10 měření R nebo Q vychází průměrné $\bar{\delta} = 0,37$, při 30 měřeních třetinové $\bar{\delta} = 0,12$. Přestože číselný výsledek je menší než 1, geometricky má výsledná regresní přímka se zohledněním nejistoty měření v obou proměnných blíže k OLSx metodě, jak je vidět v grafech v přílohách C.1 - D.4. To může být dáno konkrétními daty.

Tab. 7: Výsledné hodnoty parametru δ

Tvrdoměr Cyklus měření	Original Schmidt N				Silver Schmidt			
	1	2	3	všechny	1	2	3	všechny
Skupina betonů	Poměr rozptylů $\delta = s_x^2/s_y^2$							
všechny betony	0,335	0,281	0,277	0,100	0,442	0,310	0,331	0,122
betony bez P	0,381	0,315	0,295	0,111	0,452	0,332	0,332	0,126
betony R, 0	0,350	0,332	0,275	0,106	0,460	0,377	0,413	0,139
betony 1	0,532	0,341	0,427	0,144	0,551	0,306	0,381	0,141
Průměr	0,345		0,115		0,391		0,132	

Tab. 8: Srovnání výsledků různých regresí na datech 1.

		Regrese					Rezidua		
	Regrese	R2	F	p (F)	log-likel.	AIC	p (J-B)	Cond.No.	
Všechny bet.	OLS _y	0,59	89,11	0,000	-215,55	435,10	0,682	679,03	
	OLS _x	0,59	89,11	0,000	-140,03	284,05	0,206	306,82	
	WLS _y	1,00	1314924,46	0,000	-152,38	308,77	0,683	479,65	
	WLS _x	0,61	97,08	0,000	-143,02	290,04	0,683	334,04	
	Deming	0,88	448,99	0,000	-	-	0,030	-	
Tvrdoměr Original Schmidt N	Betony bez P	OLS _y	0,63	90,36	0,000	-175,77	355,54	0,806	636,60
		OLS _x	0,63	90,36	0,000	-117,67	239,35	0,367	302,87
		WLS _y	1,00	13073,19	0,000	-124,47	252,94	0,806	2051,89
		WLS _x	0,70	123,97	0,000	-117,70	239,40	0,806	326,68
		Deming	0,88	375,09	0,000	-	-	0,076	-
Tvrdoměr Original Schmidt R, 0	Betony R, 0	OLS _y	0,82	102,69	0,000	-73,67	151,34	0,228	472,66
		OLS _x	0,82	102,69	0,000	-50,54	105,08	0,524	215,90
		WLS _y	0,99	2274,65	0,000	-65,14	134,29	0,230	355,22
		WLS _x	0,87	144,00	0,000	-48,36	100,72	0,230	256,51
		Deming	0,93	285,78	0,000	-	-	0,503	-
Betony 1	Betony 1	OLS _y	0,49	15,47	0,001	-49,86	103,73	0,614	1051,16
		OLS _x	0,49	15,47	0,001	-32,72	69,44	0,464	590,08
		WLS _y	0,94	263,27	0,001	-33,67	71,35	0,451	1182,97
		WLS _x	0,38	9,82	0,001	-31,60	67,20	0,451	659,12
		Deming	0,81	69,93	0,000	-	-	0,955	-
Všechny bet.	Všechny bet.	OLS _y	0,65	117,34	0,000	-206,64	417,29	0,000	993,20
		OLS _x	0,65	117,34	0,000	-153,89	311,77	0,009	317,85
		WLS _y	0,99	6525,36	0,000	-156,58	317,16	0,000	3566,39
		WLS _x	0,67	127,03	0,000	-157,12	318,24	0,000	327,48
		Deming	0,83	299,01	0,000	-	-	0,000	-
Tvrdoměr Silver Schmidt	Betony bez P	OLS _y	0,80	212,68	0,000	-157,87	319,74	0,409	915,75
		OLS _x	0,80	212,68	0,000	-118,78	241,56	0,181	306,80
		WLS _y	0,99	3567,30	0,000	-130,39	264,78	0,448	782,92
		WLS _x	0,82	241,81	0,000	-119,43	242,87	0,448	320,97
		Deming	0,89	437,10	0,000	-	-	0,000	-
Tvrdoměr Silver Schmidt R, 0	Betony R, 0	OLS _y	0,88	158,57	0,000	-69,09	142,18	0,558	691,50
		OLS _x	0,88	158,57	0,000	-52,48	108,95	0,423	213,96
		WLS _y	1,00	17049,11	0,000	-53,38	110,76	0,543	588,99
		WLS _x	0,90	187,93	0,000	-52,29	108,58	0,543	218,50
		Deming	0,94	318,05	0,000	-	-	0,073	-
Betony 1	Betony 1	OLS _y	0,54	18,55	0,001	-47,16	98,31	0,380	1545,38
		OLS _x	0,54	18,55	0,001	-38,24	80,48	0,621	657,35
		WLS _y	0,98	830,77	0,001	-37,21	78,43	0,390	2213,04
		WLS _x	0,44	12,37	0,001	-38,11	80,22	0,390	724,00
		Deming	0,65	29,55	0,000	-	-	0,704	-

V Tab. 8 na straně 45 je srovnání výsledků regresí pro data 1. Z důvodu rozsáhlosti jsou uvedené výsledky pouze pro všechny cykly měření dohromady, tj. vždy 30 hodnot R nebo Q . Toto srovnání jednotlivých typů regresí by si zasloužilo podrobnější a rozsáhlejší analýzu, není totiž úplně jasné, jestli jsou hodnoty jednotlivých ukazatelů porovnatelné i pro různé typy regresí – běžně slouží pro porovnání např. mezi přímkou a polynomem provedeným stejným typem regrese.

V Tab. 8 značí $p(F)$ p -hodnotu F-testu, $p(J-B)$ p -hodnotu Jarque-Bera testu.

Srovnání vychází shodně pro oba typy tvrdoměrů. Nejvyššího koeficientu determinace R^2 dosahují regrese provedené pomocí WLSy. Nejpříznivějších hodnot *log-likelihood* (nejvyšších) a AIC (nejnižších) dosáhly metody OLSx a WLSx. Za pozornost by také stály velmi vysoké výsledky R^2 a F^* u WLSy regrese, které nepochybně souvisí se způsobem určení vah bodů pomocí reziduí OLSy regrese.

3.2.4 Vyřazení bodů pomocí Cookovy vzdálenosti

Vyřazení jednoho nebo několika velmi vlivných bodů může znatelně změnit regresní parametry a regresní křivku, zejména pokud je regrese prováděna na malém počtu bodů. Zároveň je toto vyřazení statisticky odůvodněné, podobně jako vyřazení odlehlých hodnot z měření např. Grubbsovým testem.

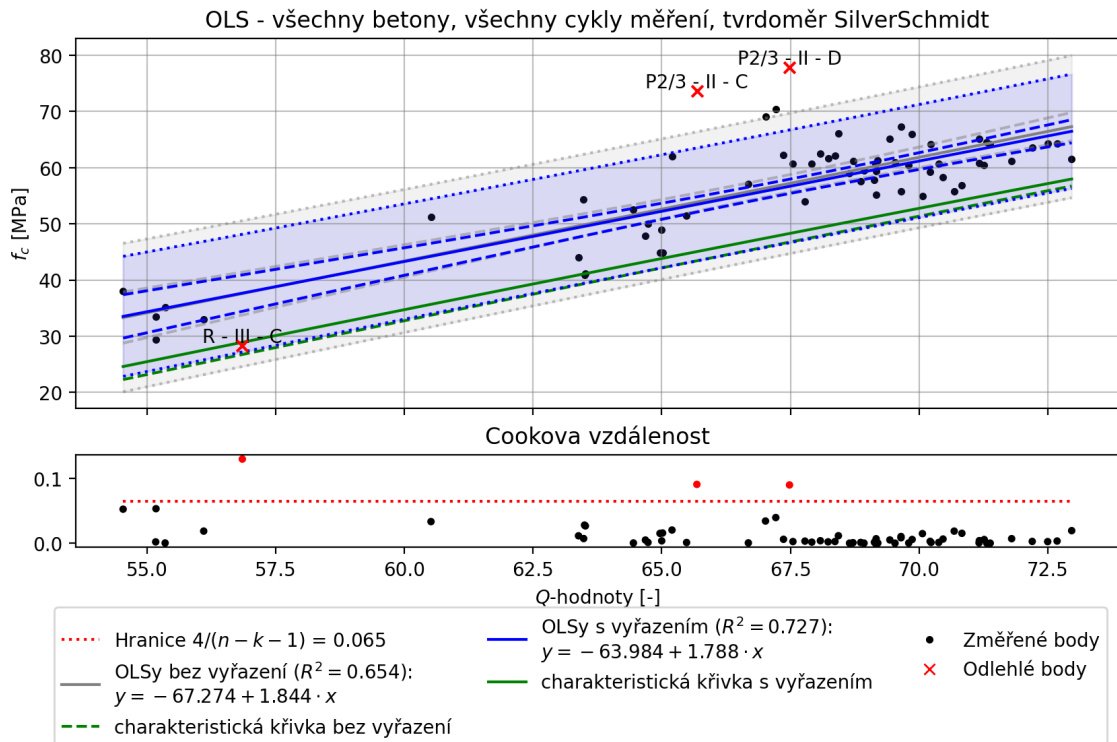
Cookova vzdálenost se vždy měří ke konkrétní regresní křivce, nikoliv obecně k souboru dat, která jsou zde prokládána křivkou pomocí různých metod. Bylo provedeno vyhodnocení Cookových vzdáleností spočítaných pro jednotlivé body ve všech vyhodnocovaných skupinách a měřených cyklech pro OLSy regresi. Tab. 9 uvádí počty a poměrné množství takto vyřazených bodů pro hranici $4/(n - k - 1)$.

Tab. 9: Počty bodů vyřazených na základě velké Cookovy vzdálenosti pro data 1.

Tvrdoměr Cyklus měření	Original Schmidt N				Silver Schmidt				
	1	2	3	všechny	1	2	3	všechny	
Skupina betonů	Počet vzdálených bodů								
všechny betony	2	2	2	2	3	4	4	3	(3,1 - 6,3 %)
betony bez P	2	2	2	2	2	3	5	3	(3,7 - 9,3 %)
betony R, 0	1	0	0	0	1	1	1	1	(0,0 - 4,2 %)
betony 1	0	0	0	0	0	1	1	1	(0,0 - 5,6 %)

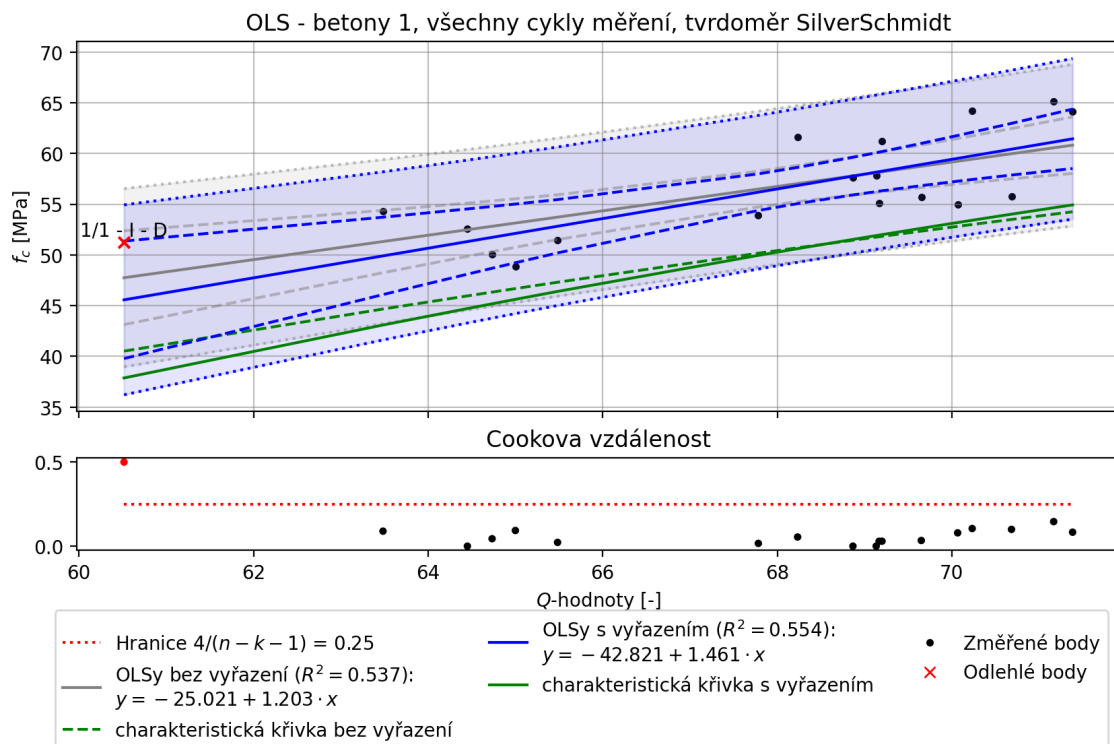
Kromě posunu křivky, který může mít pozitivní i negativní vliv, dochází zároveň vlivem velkého rezidua vyřazených bodů ke snížení reziduální směrodatné odchylky, zúžení predikčního intervalu a přiblížení charakteristické křivky k regresní.

Jako příklad změn křivky jsou na Obr. 18 a 19 uvedeny grafy regresních přímk, predikčních intervalů a charakteristických křivek před a po vyřazení vybraných bodů. Šedou barvou je vykreslena původní regrese, modrou regrese po vyřazení. Zelenou čárkovanou čarou je vykreslena charakteristická křivka původní, zelenou plnou nová. Ve spodním pruhu jsou vykresleny hodnoty Cookovy vzdálenosti pro všechny body a červená hranice pro vyřazení.



Obr. 18: Změna regresní křivky na základě Cookovy vzdálenosti. Tvrdoměr SilverSchmidt, všechny betony, všechny 3 cykly měření dohromady.

Obecně lze na základě získaných výsledků říci, že vyřazení některých bodů může charakteristickou křivku změnit směrem k příznivějším i méně příznivým hodnotám. Měl by se klást důraz na měření více hodnot vyšších a nižších pevností, které mají velký vliv na průběh výsledných křivek. Tento poznatek se dá uplatnit například při tvorbě regresního vztahu mezi nepřímými měřeními a vývrty odebranými z konstrukce. Vyplývá z něj, že při odběru vzorků z míst vybraných na základě předem provedených nepřímých zkoušek na mnoha místech konstrukce bychom měli vybírat více těch míst, kde byly změřeny nejnižší a nejvyšší hodnoty nepřímé zkoušky a méně těch, kde byly hodnoty nepřímé zkoušky průměrné.



Obr. 19: Změna regresní křivky na základě Cookovy vzdálenosti. Tvrdoměr SilverSchmidt, betony 1, všechny 3 cykly měření dohromady.

3.3 Statistická analýza – Data 2 (beton v průběhu zrání)

3.3.1 Testy normality

Shapiro-Wilkův test zamítl normalitu rozložení dat změřených tvrdoměry v průměru u 10% vzorků, podrobněji jsou počty uvedeny v Tab. 10. Stejně jako u dat 1, kde bylo poměrné zastoupení těchto vzorků vyšší a možné důvody byly podrobně rozebrány, bude se i zde navzdory výsledkům Shapiro-Wilkova testu předpokládat normální rozdělení. Tento výsledek je také v souladu s domněnkou z kapitoly 3.2.1, že při měření pouhých 10 hodnot pomocí tvrdoměru je velká šance, že tato data nebudou vycházet normálně rozložena a výsledek testování jejich normality bude spíše matoucí.

Tab. 10: Počty a poměrné zastoupení těles, u kterých Shapiro-Wilkův test zamítl normalitu.

Beton	Tvrdoměr	Zamítnutí normality	
I	SilverSchmidt PC-L MP SKANSKA	2	9,5%
	SilverSchmidt PC-L MP VUT	3	14,3%
II	SilverSchmidt PC-L MP SKANSKA	2	5,9%
	SilverSchmidt PC-L MP VUT	3	8,8%
III	Original Schmidt N	3	16,7%
	Silver Schmidt N	1	5,6%

3.3.2 Očištění od odlehlých hodnot

Data byla dále očištěna od odlehlých hodnot pomocí Grubbsova testu se zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 5\%$. Graficky zpracované výsledky jsou v přílohách F.1 - F.3.

3.3.3 Regrese

Pro všechny 3 zkoumané betony byly provedeny regrese pro data z obou použitých tvrdoměrů. Dále byl zahrnut beton II, ale bez hodnot 28-denní pevnosti (krychle K30, K31 a K32, které měly $f_c > 40$ MPa). Tyto body totiž byly mimo doporučený rozsah použitého tvrdoměru Silver Schmidt PC-L s hříbovým nástavcem a jak ukazují výsledky níže, i v kontextu ostatních bodů ležely mimo. Data by pak musela být proložena spíše parabolou než přímkou. Při vyhodnocení Cookových vzdáleností níže byly právě tyto body označeny za odlehlé s velkým vlivem na regresní křivku. Stejně vyřazení bylo provedeno i v [1].

Porovnávány byly přímky vytvořené metodou nejmenších čtverců podle metod OLS_y, OLS_x, WLS_y, WLS_x a Demingovy regrese, jak jsou popsány v teoretické části.

Parametry δ pro Demingovu regresi, které jsou uvedené v Tab. 11, se výrazně liší od parametrů získaných u dat 1 (viz Tab. 7). Důvod je prostý: u betonů I a II se měřilo při nízkých pevnostech. Tím pádem i rozptyl ve směru y , který je určován relativně vzhledem ke změřené hodnotě f_c , bude malý. Naproti tomu rozptyl ve směru x zůstává podobný i pro změřené nízké hodnoty R a Q . Demingova regrese tak má u těchto měření mnohem blíže k metodě OLS_x. U betonu III jsou změřené i pevnosti po 28 a 90 dnech, takže i jejich průměrný rozptyl v y směru je vyšší a hodnota δ klesla pod 1.

Tab. 11: Výsledné hodnoty parametru δ pro data 2.

Beton	Tvrdoměr	Poměr rozptylů $\delta = s_x^2/s_y^2$
I	SilverSchmidt PC-L MP SKANSKA	3,55
	SilverSchmidt PC-L MP VUT	4,27
II	SilverSchmidt PC-L MP SKANSKA	3,08
	SilverSchmidt PC-L MP VUT	2,54
III	Original Schmidt N	0,57
	Silver Schmidt N	0,59

V Tab. 12 na straně 51 jsou uvedeny hodnotící statistiky porovnávaných regresních metod. Nejvyšších výsledků dosáhla jednoznačně metoda WLSy. Za její někdy až podezřele vysoké výsledky může určitě i způsob, jakým jsou stanoveny váhy jednotlivých bodů w_i na základě reziduí křivky sestavené OLSy metodou. Dále také měla právě WLSy metoda ve všech provedených srovnáních obvykle nejnižší (nebo alespoň jednu z nejnižších) směrnice přímky b_1 , což při nižších hodnotách R nebo Q vede na vyšší odhady pevnosti f_c .

Srovnání Demingovy regrese s ostatními na základě těchto hodnot nemusí být prokazatelné a bylo by potřeba dále prozkoumat a ověřit platnost použitých vztahů.

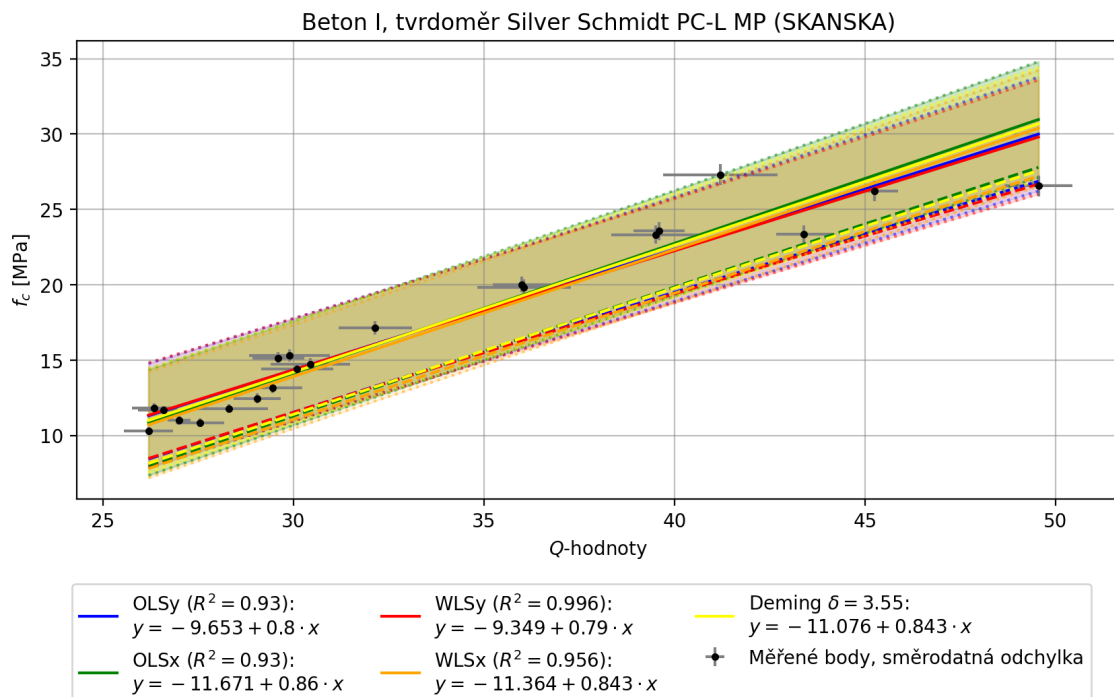
Nízké p -hodnoty Jarque-Berova testu normality rozložení reziduí betonu II pro metody WLSy a WLSx značí, že možná měl být použit složitější regresní model. Při pohledu na výsledné grafy je vidět, že data mají tvar spíše paraboly než přímky. Po vyřazení hodnot 28-denní pevnosti pro beton II jsou již výsledky příznivější. Zde se také ukazuje výhodnost WLSy metody, její regresní přímka před vyřazením bodů 28-denní pevnosti má blíže k přímkám sestaveným na již takto zmenšených datech. Zdá se tedy být „odolnější“ proti bodům, které jsou následně v další kapitole označeny pomocí Cookovy vzdálenosti za odlehlé.

Oproti datům 1 jsou zde všechny zkoumané regresní přímky mnohem více semknuté a vzájemně podobné, jejich spolehlivostní pásy i predikční intervaly individuálních hodnot jsou užší a charakteristická křivka je blíže regresní přímce. To je dáno vyšší korelací těchto dat – data 1 tvořila širší shluk, zatímco data 2 leží více v přímce. Ukazuje to také, že pro jeden konkrétní beton je jasná závislost mezi tvrdostí a pevností f_c , zatímco pro více betonů dohromady jsou závislosti různě ovlivněny složením jednotlivých betonů a vytvořený společný vztah pak má výrazně větší nejistotu.

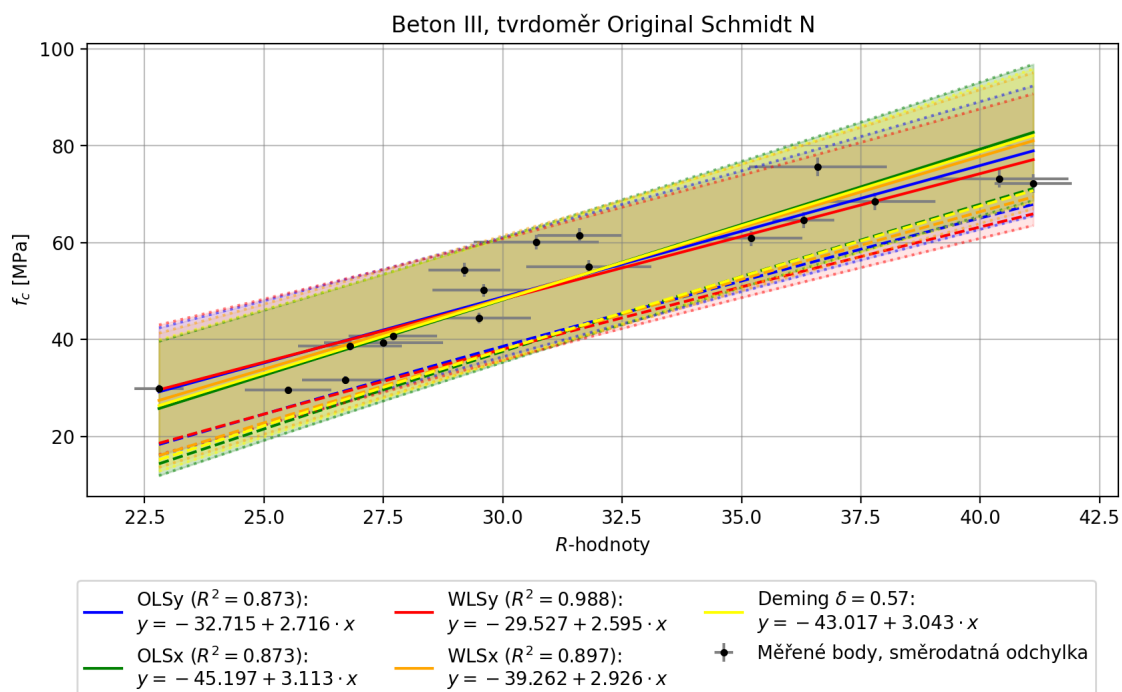
Tab. 12: Srovnání výsledků regresí na datech 2.

		Regrese					Rezidua		
		Regrese	R^2	F^*	p(F)	log-likel.	AIC	p(J-B)	Cond. No.
beton I	Silver Schmidt PC- L MP (SKANSKA)	OLSy	0,93	252,29	0,000	-38,34	80,69	0,567	170,92
		OLSx	0,93	252,29	0,000	-42,26	88,52	0,153	57,62
		WLSy	1,00	4864,98	0,000	-21,36	46,71	0,503	445,64
		WLSx	0,96	412,47	0,000	-39,73	83,46	0,503	47,82
		Deming	0,93	246,26	0,000	-	-	0,000	-
	Silver Schmidt (VUT)	OLSy	0,95	389,58	0,000	-34,04	72,09	0,933	165,48
		OLSx	0,95	389,58	0,000	-37,85	79,71	0,693	57,62
		WLSy	1,00	7601,28	0,000	-20,72	45,43	0,953	277,69
		WLSx	0,97	633,17	0,000	-38,73	81,46	0,953	49,35
		Deming	0,95	397,48	0,000	-	-	0,439	-
beton II	Silver Schmidt PC- L MP (SKANSKA)	OLSy	0,92	372,98	0,000	-84,72	173,44	0,420	95,46
		OLSx	0,92	372,98	0,000	-79,16	162,32	0,610	30,03
		WLSy	0,98	1747,13	0,000	-58,60	121,21	0,007	139,04
		WLSx	0,92	348,14	0,000	-77,37	158,74	0,007	24,55
		Deming	0,85	178,33	0,000	-	-	0,406	-
	Silver Schmidt (VUT)	OLSy	0,87	210,60	0,000	-93,43	190,86	0,085	84,06
		OLSx	0,87	210,60	0,000	-91,93	187,87	0,484	30,03
		WLSy	0,96	737,68	0,000	-66,75	137,50	0,000	217,33
		WLSx	0,90	297,50	0,000	-95,95	195,89	0,000	24,67
		Deming	0,76	100,11	0,000	-	-	0,050	-
b. II bez 28-denní pevn.	Silver Schmidt PC- L MP (SKANSKA)	OLSy	0,95	593,78	0,000	-53,12	110,24	0,430	102,92
		OLSx	0,95	593,78	0,000	-56,62	117,25	0,570	28,02
		WLSy	1,00	476655,71	0,000	-24,27	52,53	0,442	4301,16
		WLSx	0,95	502,12	0,000	-58,89	121,78	0,442	24,84
		Deming	0,95	573,63	0,000	-	-	0,001	-
	Silver Schmidt (VUT)	OLSy	0,94	472,33	0,000	-56,48	116,96	0,793	84,71
		OLSx	0,94	472,33	0,000	-65,82	135,65	0,277	28,02
		WLSy	1,00	7608,37	0,000	-37,45	78,90	0,960	98,28
		WLSx	0,97	1010,02	0,000	-61,71	127,42	0,960	20,07
		Deming	0,95	577,70	0,000	-	-	0,002	-
beton III	Original Schmidt N	OLSy	0,87	109,64	0,000	-55,66	115,32	0,562	198,37
		OLSx	0,87	109,64	0,000	-36,45	76,90	0,710	201,79
		WLSy	0,99	1323,97	0,000	-44,74	93,47	0,610	148,40
		WLSx	0,90	139,07	0,000	-37,76	79,51	0,610	172,64
		Deming	0,98	748,08	0,000	-	-	0,971	-
	Silver Schmidt N	OLSy	0,92	186,59	0,000	-51,36	106,72	0,709	333,16
		OLSx	0,92	186,59	0,000	-37,41	78,82	0,721	201,79
		WLSy	1,00	76426,72	0,000	-36,42	76,84	0,708	1273,75
		WLSx	0,93	228,92	0,000	-37,98	79,97	0,708	170,17
		Deming	0,97	501,52	0,000	-	-	0,041	-

Výsledné grafy jsou v přílohách G.1 - G.4, zde jsou jako reprezentativní výsledky vybrány 2 grafy, pro beton I a beton III.



Obr. 20: Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton I, tvrdoměr Silver-Schmidt PC-L MP (SKANSKA).



Obr. 21: Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton III, tvrdoměr Original Schmidt N.

3.3.4 Vyřazení bodů pomocí Cookovy vzdálenosti

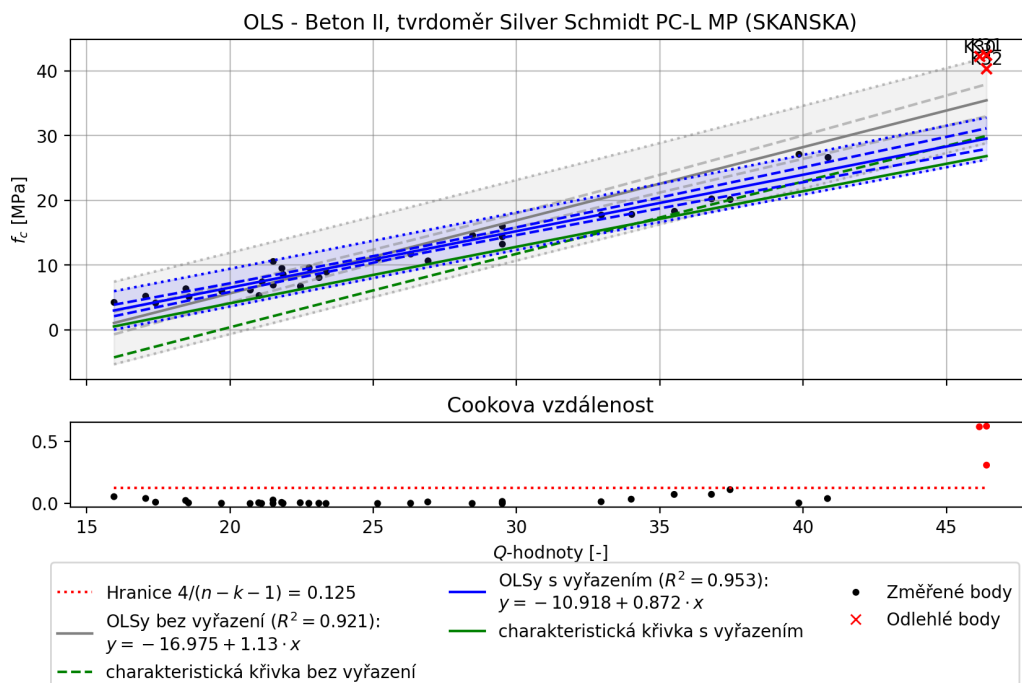
Počty a procento bodů s identifikovanou Cookovou vzdáleností vyšší než zvolených $4/(n - k - 1)$ pro jednotlivé betony a tvrdoměry jsou uvedeny v Tab. 13.

Tab. 13: Počty bodů s velkou Cookovou vzdáleností pro data 2.

Beton	Tvrdoměr	Počet vzdálených bodů	
I	SilverSchmidt PC-L MP SKANSKA	2	9,5%
	SilverSchmidt PC-L MP VUT	1	4,8%
II	SilverSchmidt PC-L MP SKANSKA	3	8,8%
	SilverSchmidt PC-L MP VUT	3	8,8%
II*	SilverSchmidt PC-L MP SKANSKA	2	6,5%
	SilverSchmidt PC-L MP VUT	2	6,5%
III	Original Schmidt N	1	5,6%
	Silver Schmidt N	0	0,0%

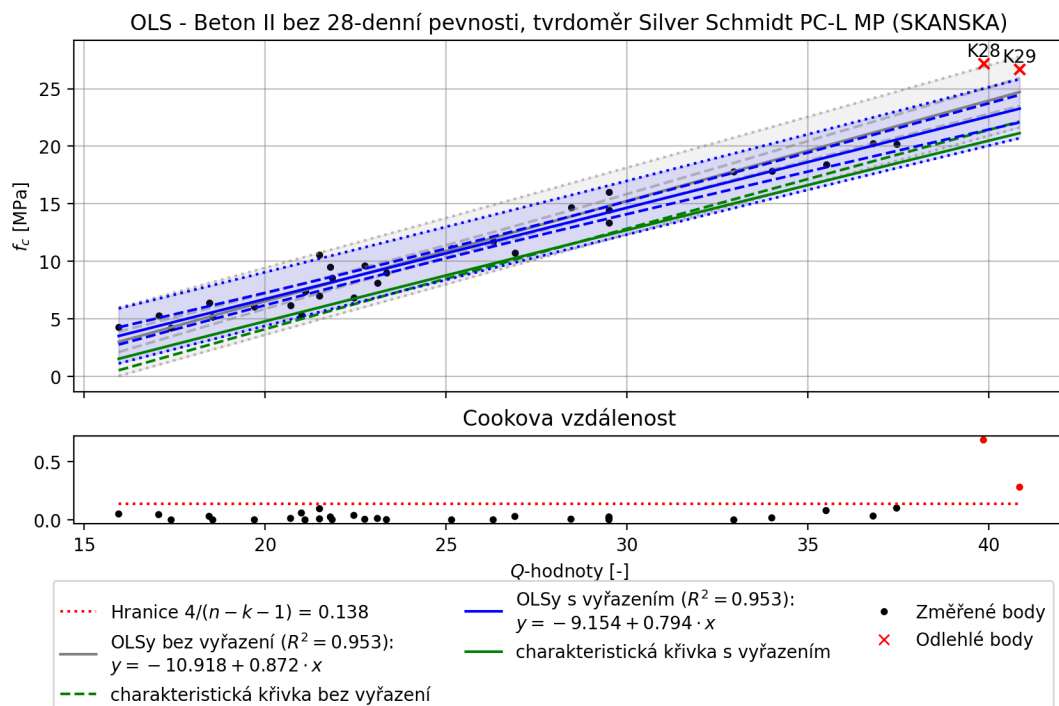
* Bez 28-denní pevnosti

Je zde vykreslena jen část grafů s výsledky vyhodnocení Cookovy vzdálenosti, kompletně jsou v přílohách H.1 - H.4.



Obr. 22: Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti a regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehklých bodů a po vyřazení. Beton II, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).

Velká Cookova vzdálenost u betonu II správně identifikuje krychle K30, K31 a K32, na kterých se měřily 28-denní pevnosti a které v kontextu ostatních bodů vybočují, viz Obr. 22. Jejich identifikace nemusí vést nutně k vyřazení, ale spíše nasměrovat k úvaze, zda tyto vlivné body mezi ostatní opravdu patří. U betonu II je nepochybně správné jejich odstranění, neboť, jak bylo uvedeno již výše, hodnoty f_c u těchto bodů jsou mimo doporučený rozsah příslušného tvrdoměru a zároveň by bylo potřeba použít regresi složitější křivkou než přímkou. Na zvažení by bylo, jestli neodstranit i další body, identifikované jako odlehlé na již zmenšené sadě (Obr. 23). Záleželo by na účelu regresní křivky, pro určení odbedňovacích pevností 5 a 15 MPa by to nebylo na škodu a regresní i charakteristickou křivkou by to posunulo příznivým směrem.



Obr. 23: Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti a regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton II bez 28-denní pevnosti, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).

Tyto výsledky dobře ukazují, že při měření dat pro tvorbu regresních vztahů bychom měli předem znát interval pevností, pro které má vztah platit. Spíše než na rovnoměrné zastoupení měřených hodnot v celém tomto intervalu by se pak měl klást důraz na jejich vyšší počty poblíž hranic tohoto intervalu. Konkrétně pro tvorbu regresního vztahu pro měření pevností betonu při odbedňování tak není účelné vztah tvořit až do hodnot 28-denní pevnosti, které tu odbedňovací několikanásobně převyšují.

4 Závěr

V práci byly představeny různé varianty lineární regrese, které představují alternativu k běžně používané regresi pomocí metody klasických nejmenších čtverců. Tyto metody byly aplikovány na dříve změřená data a výsledky porovnány navzájem.

Při vyhodnocení experimentálních dat v této práci se ukázal různý poměr nejistoty ve směrech jednotlivých os grafu porovnávaných hodnot pevnosti betonu v tlaku f_c a hodnot Q nebo R ze Schmidtova tvrdoměru. Tento proměnný poměr je zapříčiněn způsobem určení nejistoty hodnot f_c v y směru, která byla stanovena relativní směrodatnou odchylkou dosahovanou při měření za podmínek opakovatelnosti. Ve všech případech však nejistota v x směru byla nezanedbatelná, což mluví proti použití klasické metody nejmenších čtverců (OLS_y), která ji neuvažuje vůbec. Překvapivě měly výsledné regresní přímky dokonce blíže k přímkám získaným „otočenou“ klasickou metodou nejmenších čtverců (OLS_x), kdy je oproti zvyklostem závislou proměnnou hodnota změřená tvrdoměrem a nezávislou proměnnou pevnost v tlaku f_c .

Velmi podrobně je v teoretické části rozepsána metoda Demingovy regrese, která se v oblasti stavebního zkušebnictví dosud nepoužívá a ve které autor vidí velký potenciál, neboť na rozdíl od klasické metody nejmenších čtverců pracuje současně s nejistotami v obou proměnných. Při tvorbě regresních vztahů mezi tvrdoměrnými metodami a pevností betonu v tlaku umíme dobře spočítat nejistotu hodnot získaných tvrdoměrnou metodou. Nejistota pevností v tlaku změřených podrcením vzorku z lisu je v této práci odhadována na základě podmínek opakovatelnosti měření, nicméně cílený experiment nebo průzkum starších dat na toto téma by jistě poskytl přesnější výsledek.

Nevýhodami navrhované Demingovy regrese je její použití pouze pro regresi dat přímkou, což na některá data nemusí stačit, a také to, že nejsou přesně definované mechanismy jak hodnotit její výsledky a srovnávat je s výsledky jiných metod.

Ve všech případech měly regresní přímky vytvořené podle klasické metody nejmenších čtverců (OLS_y) v porovnání s „obrácenou“ metodou (OLS_x) a Demingovou regresí nejmenší směrnici přímky. To znamená, že odhady pevností betonu v tlaku podle těchto modelů a jim odpovídajících charakteristických křivek by byly při nízkých hodnotách R a Q nejvyšší pro klasickou OLS_y metodu, při vysokých hodnotách pak pro OLS_x. Rozdíl mezi těmito křivkami klesá se zvyšující se vzájemnou korelací jednotlivých veličin. U regresních vztahů pro více různých betonů současně dosaho-

val rozdíl stanovené pevnosti při krajních (nízkých a vysokých) hodnotách nepřímé zkoušky běžně i více než 10 MPa. Naopak u vztahů pro 1 konkrétní beton, které mají korelaci mnohem vyšší, byly rozdíly stanovení f_c podle těchto 3 metod téměř zanedbatelné.

Další vhodnou představenou metodou, která dosáhla i nejlepších výsledků při provedených srovnáních v této práci, je metoda vážených nejmenších čtverců, konkrétně ta označená zde jako WLSy. Ta se dobře vyrovnává s heteroskedasticitou (nestejnoměrností rozptylu) dat, která se může objevit a při které by se také klasická metoda nejmenších čtverců používat neměla. Regresní přímky měly blízko k přímkám získanými klasickou OLSy metodou. Velkou výhodou této metody je skutečnost, že je implementovaná v poměrně běžných výpočetních softwarech a použít ji místo klasické metody nejmenších čtverců je velmi jednoduché.

Vyhodnocení Cookovy vzdálenosti pro odhalení velmi vlivných bodů ukázalo, že tento postup může pomoci při rozhodování, zda proložit regresní křivkou pouze část dat, například pro stanovení nízkých pevností. Dále může být vhodnou pomůckou při zjišťování, které ze změřených dat mají největší vliv na tvar a polohu regresní křivky. Bylo také ukázáno, že při tvorbě regresních vztahů by měl být kladen důraz na změření dostatečného počtu bodů zejména při nízkých a vysokých pevnostech, neboť ty blíže průměru mají na výsledný regresní vztah podstatně menší vliv.

Literatura

1. JANKA, Marek. *Zjišťování odbedňovacích pevností betonu pomocí tvrdoměru SilverSchmidt*. Brno, 2020. Dostupné také z: https://www.vut.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=212654. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavebního zkušebnictví.
2. KOCÁB, Dalibor; MISÁK, Petr; CIKRLE, Petr. Characteristic Curve and Its Use in Determining the Compressive Strength of Concrete by the Rebound Hammer Test. *Materials* [online]. 2019, vol. 12, no. 17 [cit. 2020-04-15]. ISSN 1996-1944. Dostupné z DOI: 10.3390/ma12172705.
3. *ČSN EN 13791 Posuzování pevnosti betonu v tlaku v konstrukcích a v prefabrikovaných betonových dílcích*. Praha: Česká agentura pro standardizaci, 2021.
4. SZILÁGYI, Katalin; BOROSNYÓJ, Adorjan; MIKÓ, Tamás. Comparison of the inherent variability in rebound hammer tests performed with different testing instruments. *Építőanyag (Online)*. 2013, roč. 3. Dostupné z DOI: 10.14382/epitoanyag-jsbcm.2013.14.
5. *Original Schmidt Operating Instructions* [online]. 2017 [cit. 2020-02-25]. Dostupné z: https://www.proceq.com/uploads/tx_proceqproductcms/import_data/files/OrginalSchmidt_Operating%20Instructions_Multilingual_high.pdf.
6. SCHMID, Pavel a kolektiv. *Základy zkušebnictví*. 2. opr. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2584-9.
7. *ČSN 73 1373 Nedestruktivní zkoušení betonu – Tvrdoměrné metody zkoušení betonu*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2011.
8. WINKLER, Stefan; MATTHEWS, John. Comparison of electronic and mechanical Schmidt hammers in the context of exposure-age dating: Are Q- and R-values interconvertible? *Earth Surface Processes and Landforms*. 2014, roč. 39. Dostupné z DOI: 10.1002/esp.3584.
9. KARPÍŠEK, Zdeněk. *Statistická analýza*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008.
10. ANDĚL, Jiří. *Matematická statistika*. Praha: SNTL, 1978.
11. KÜBLER, Robert. Error-in-Variables Models: Deming Regression: Get to the correct conclusion when there are errors everywhere. *Towards Data Science* [online]. 2021 [cit. 2021-12-15]. Dostupné z: <https://towardsdatascience.com/error-in-variables-models-deming-regression-11ca93b6e138>.
12. LINNET, Kristian. Performance of Deming regression analysis in case of misspecified analytical error ratio in method comparison studies. *Clinical Chemistry*.

- 1998, roč. 44, č. 5, s. 1024–1031. ISSN 0009-9147. Dostupné z DOI: 10.1093/clinchem/44.5.1024.
13. PARDOE, Iain. *STAT 501: Regression Methods* [online] [cit. 2021-12-15]. Dostupné z: <https://online.stat.psu.edu/stat501/>.
 14. MILITKÝ, Jiří; MELOUN, Milan. Regresní diagnostika v materiálovém výzkumu. In: *Hutní analytika 2002 Sborník přednášek z 22. konference, 15. - 19. dubna 2002 v Luhačovicích*. Český Těšín: 2THETA, 2002, s. 82–98. ISBN 80-86380-10-6.
 15. *How to read Cook's distance plots?* [Online]. 2012 [cit. 2021-12-15]. Dostupné z: <https://stats.stackexchange.com/questions/22161/how-to-read-cooks-distance-plots>. Web otázek a odpovědí.
 16. NIMMO-SMITH, Ian; WATSON, Peter. *Checking for outliers in regression* [online]. 2012 [cit. 2021-12-15]. Dostupné z: <https://imaging.mrc-cbu.cam.ac.uk/statswiki/FAQ/RegressionOutliers>.
 17. KELEŞ, Taliha. Comparison of Classical Least Squares and Orthogonal Regression in Measurement Error Models. *International Online Journal of Educational Sciences*. 2018, roč. 10. Dostupné z DOI: 10.15345/iojes.2018.02.0103.014.
 18. *NCSS Statistical Software Documentation* [online]. Kaysville, Utah, USA, 2021 [cit. 2021-12-09]. Dostupné z: <https://www.ncss.com/software/ncss/ncss-documentation/>.
 19. ALTMAN, Douglas G; BLAND, J Martin. Standard deviations and standard errors. *BMJ*. 2005, s. 903. ISSN 0959-8138. Dostupné z DOI: 10.1136/bmj.331.7521.903.
 20. *ČSN EN 12390-3 Zkoušení ztvrdlého betonu – Část 3: Pevnost v tlaku zkušebních těles*. Praha: Česká agentura pro standardizaci, 2020.
 21. *ČSN 5725-1 Přesnost (pravdivost a preciznost) metod a výsledků měření — Část 1: Obecné zásady a definice*. Praha: Česká agentura pro standardizaci, 2018.
 22. LAURENT, Stéphane. *Deming regression: confidence and prediction intervals* [online]. 2016 [cit. 2021-12-15]. Dostupné z: <https://gist.github.com/st1a/5fcd959576413798d4cc09e7493e53e9>. Zdrojový kód na GitHub.
 23. LAURENT, Stéphane. *Tolerance interval for Deming regression* [online]. 2012 [cit. 2021-12-15]. Dostupné z: <https://stats.stackexchange.com/questions/44219/tolerance-interval-for-deming-regression>. Web otázek a odpovědí.

24. PRETTENHOFER, Peter. *Ordinary Least Squares in Python* [online]. 2014-02 [cit. 2021-12-15]. Dostupné z: <https://www.datarobot.com/blog/ordinary-least-squares-in-python/>.
25. GLEN, Stephanie. *Jarque-Bera Test*. StatisticsHowTo.com: Statistics for the rest of us!, 2016-05.
26. KOZÁČEK, Vojtěch. *Experimentální stanovení závislosti parametrů NDT a pevnosti v tlaku betonu*. Brno, 2019. Dostupné také z: https://www.vut.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=202358. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavebního zkušebnictví.

Seznam symbolů, veličin a zkratek

FAST VUT	Fakulta stavební Vysokého učení technického v Brně
GACR	Grantová agentura České republiky
OLS	<i>Ordinary least squares</i> – klasická metoda nejmenších čtverců
OLS_x	OLS metoda s minimalizací čtverců vzdáleností ve směru osy x
OLS_y	OLS metoda s minimalizací čtverců vzdáleností ve směru osy y
WLS	<i>Weighted least squares</i> – metoda vážených nejmenších čtverců
WLS_x	WLS metoda s minimalizací čtverců vzdáleností ve směru osy x
WLS_y	WLS metoda s minimalizací čtverců vzdáleností ve směru osy y
ODR	<i>Orthogonal distance regrression</i> – ortogonální regrese
TLS	<i>Total least squares</i> – metoda úplných nejmenších čtverců, jiný název pro ODR
β_i	i -tý parametr předpokládané funkční závislosti zkoumaných proměnných
$\hat{\beta}_i$	i -tý parametr regresního modelu, odhad předpokládaného parametru skutečné závislosti na základě modelu z několika změřených dat
η_i	Náhodná chyba veličiny x
ϵ_i	Náhodná chyba veličiny y
x_i, y_i	Změřené hodnoty x_i a y_i včetně náhodné chyby η_i nebo ϵ_i
x_i^*, y_i^*	Skutečná neznámá hodnota x_i nebo y_i bez zatížení náhodnou chybou η_i
\hat{x}_i, \hat{y}_i	Hodnota x_i nebo y_i stanovená regresním modelem; odhad skutečné hodnoty nezatížené chybou
\bar{x}, \bar{y}	Průměr hodnot x nebo y
s_x^2, s_y^2	Výběrový rozptyl hodnot x nebo y
σ_x^2, σ_y^2	Rozptyl hodnot x nebo y
s_{xy}	Kovariance hodnot x a y
r_i	Hodnota rezidua i -tého bodu
n	Počet hodnot
p	Počet parametrů regresního modelu
k	Počet nezávisle proměnných regresního modelu
D_i	Cookova vzdálenost i -tého bodu
H	<i>Hat matrix</i> – Projekční matice vybraného regresního modelu
X	Matice hodnot nezávisle proměnných veličin, včetně sloupce konstanty
W	Matice obsahující váhy jednotlivých bodů pro WLS metodu
w_i	Váha i -tého bodu při WLS metodě
y	Vektor závisle proměnných veličin y_i
h_{ii}	Velikost pákového efektu i -tého bodu
MSE	<i>Mean squared error</i> – střední kvadratická chyba
α	Statistická hladina významnosti
F^*	Testovací statistika F-testu
f_c	Pevnost v tlaku
$f_{c, is}$	Pevnost v tlaku vývrtnu odebraného z konstrukce nebo dílce

$f_{c, is, reg}$	Pevnost v tlaku v konstrukci stanovená pomocí nepřímé zkoušky a regresního vztahu
$f_{c, is, est}$	Odhadovaná pevnost v tlaku v konstrukci na konkrétním zkušebním místě
$f_{is, nejnížší}$	Nejnižší hodnota pevnosti v tlaku v konstrukci ze změřeného souboru pevností
$f_{m(n), is}$	Střední hodnota n výsledků zkoušek pevnosti betonu v tlaku v konstrukci
$f_{ck, spec}$	Minimální charakteristická válcová pevnost betonu pro specifikovanou pevnostní třídu
s_c	Zbytková směrodatná odchylka odhadovaných hodnot pevnosti
l	Délka tělesa
d	Průměr tělesa
Q	Hodnota vrácené energie tvrdoměru Silver Schmidt
R	Hodnota odrazu tvrdoměru Original Schmidt
R^2	Koeficient determinace regresního modelu
p, q, u	Zavedené substitute pro výpočty týkající se Demingovy regrese
δ	Parametr Demingovy regrese, poměr rozptylů jednotlivých veličin
SS_{err}	Suma čtverců chyb vybraného modelu
SS_{res}	Suma čtverců reziduí vybraného modelu
SS_{tot}	Celková suma čtverců bez použití vybraného modelu
m	Hmotnost
x_0	Dráha uražená závažím Schmidtova tvrdoměru před dopadem na razník
v_0	Rychlost závaží Schmidtova tvrdoměru před dopadem na razník
E_0	Energie závaží Schmidtova tvrdoměru před dopadem na razník
x_r	Dráha uražená závažím Schmidtova tvrdoměru po odrazu od razníku
v_r	Rychlost závaží Schmidtova tvrdoměru po odrazu od razníku
E_r	Energie závaží Schmidtova tvrdoměru po odrazu od razníku
s_r	Směrodatná odchylka za podmínek opakovatelnosti
s_R	Směrodatná odchylka za podmínek reprodukovatelnosti

Seznam obrázků

1	Schéma přístroje Original Schmidt [5].	11
2	Dříve udávaná převodní křivka mezi R a Q od firmy Proceq [4]. . . .	12
3	Srovnání individuálních hodnot R a Q podle [8].	12
4	Ukázka heteroskedasticity.	15
5	Ukázka principu lineárních regresí.	19
6	Experimentální ověření a ukázka principu možného postupu výpočtu R^2 pro Demingovu regresi.	22
7	Experimentální ověření, který z dostupných vztahů pro výpočet predikčního intervalu a charakteristické křivky poskytuje korektní výsledky.	26
8	Experimentální ověření, zda charakteristická křivka pro Demingovu regresi odpovídá křivce získané klasickým vzorcem.	27
9	Test normality rozložení hodnot odrazu R na tělesech, kde se měřilo tvrdoměrem OriginalSchmidt N.	39
10	Test normality rozložení hodnot odrazu R na tělesech, kde se měřilo tvrdoměrem SilverSchmidt.	40
11	Histogram hodnot odrazu R bloku R - II.	40
12	Histogram hodnot odrazu R bloku R - III.	40
13	Histogram hodnot vrácené energie Q bloku R - III.	41
14	Histogram hodnot odrazu R bloku 1/2 - III.	41
15	Histogram hodnot vrácené energie Q bloku 2/2 - I.	41
16	Grubbsův test odlehlých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem OriginalSchmidt N. Všechny 3 cykly měření dohromady.	42
17	Grubbsův test odlehlých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem SilverSchmidt. Všechny 3 cykly měření dohromady.	43
18	Změna regresní křivky na základě Cookovy vzdálenosti. Tvrdoměr SilverSchmidt, všechny betony, všechny 3 cykly měření dohromady.	47
19	Změna regresní křivky na základě Cookovy vzdálenosti. Tvrdoměr SilverSchmidt, betony 1, všechny 3 cykly měření dohromady.	48
20	Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton I, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).	52
21	Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton III, tvrdoměr Original Schmidt N.	52
22	Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti a regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton II, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).	53

23	Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenostia regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton II bez 28-denní pevnosti, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).	54
24	Grubbsův test odlehlých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem OriginalSchmidt N; 1. cyklus měření.	73
25	Grubbsův test odlehlých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem SilverSchmidt; 1. cyklus měření.	73
26	Grubbsův test odlehlých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem OriginalSchmidt N; 2. cyklus měření.	74
27	Grubbsův test odlehlých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem SilverSchmidt; 2. cyklus měření.	74
28	Grubbsův test odlehlých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem OriginalSchmidt N; 3. cyklus měření.	75
29	Grubbsův test odlehlých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem SilverSchmidt; 3. cyklus měření.	75
30	Data 2: Grubbsův test odlehlých hodnot pro beton I, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).	88
31	Data 2: Grubbsův test odlehlých hodnot pro beton I, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (VUT).	88
32	Data 2: Grubbsův test odlehlých hodnot pro beton II, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).	89
33	Data 2: Grubbsův test odlehlých hodnot pro beton II, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (VUT).	89
34	Data 2: Grubbsův test odlehlých hodnot pro beton III, tvrdoměr Original Schmidt N.	90
35	Data 2: Grubbsův test odlehlých hodnot pro beton III, tvrdoměr SilverSchmidt N.	90
36	Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton I, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).	91
37	Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton I, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (VUT).	91
38	Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton II, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).	92
39	Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton II, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (VUT).	92

40	Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton II s vyřazením 28-denní pevnosti, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).	93
41	Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton II s vyřazením 28-denní pevnosti, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).	93
42	Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton III, tvrdoměr Original Schmidt N.)	94
43	Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton III, tvrdoměr SilverSchmidt N.	94
44	Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton I, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).	95
45	Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton I, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (VUT).	95
46	Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton II, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).	96
47	Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton II, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (VUT).	96
48	Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton II bez 28-denní pevnosti, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).	97
49	Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton II bez 28-denní pevnosti, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (VUT).	97
50	Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton III, tvrdoměr Original Schmidt N.	98
51	Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton III, tvrdoměr SilverSchmidt N.	98

Seznam tabulek

1	Srovnání starších Schmidtových tvrdoměrů [6, 7].	10
2	Podmínky pro směrodatnou odchylku pevností změřených v lisu v procentech střední hodnoty podle ČSN EN 12390-3 [20].	24
3	Složení jednotlivých betonů [26].	36
4	Testy normality hodnot z tvrdoměrů – počty zkušebních těles se zamítnutou normalitou.	39
5	Problematické bloky z hlediska testů normality.	40
6	Pearsonův korelační koeficient jednotlivých skupin betonů pro data 1.	43
7	Výsledné hodnoty parametru δ	44
8	Srovnání výsledků různých regresí na datech 1.	45
9	Počty bodů vyřazených na základě velké Cookovy vzdálenosti pro data 1.	46
10	Počty a poměrné zastoupení těles, u kterých Shapiro-Wilkův test zamítl normalitu.	49
11	Výsledné hodnoty parametru δ pro data 2.	50
12	Srovnání výsledků regresí na datech 2.	51
13	Počty bodů s velkou Cookovou vzdáleností pro data 2.	53

Seznam příloh

Data 1: Hodnoty R, Q a f_c	68
A.1 Betony R	68
A.2 Betony 0	69
A.3 Betony 1	70
A.4 Betony 2	71
A.5 Betony P	72
Data 1: Vyřazení odlehlých hodnot Grubbsovým testem	73
B.1 Cyklus měření 1	73
B.2 Cyklus měření 2	74
B.3 Cyklus měření 3	75
Data 1: Všechny regrese, tvrdoměr Original Schmidt N	76
C.1 Všechny betony	76
C.2 Betony bez P	77
C.3 Betony R, 0	78
C.4 Betony 1	79
Data 1: Všechny regrese, tvrdoměr Silver Schmidt	80
D.1 Všechny betony	80
D.2 Betony bez P	81
D.3 Betony R, 0	82
D.4 Betony 1	83
Data 2: Hodnoty R, Q a f_c	84
E.1 Beton I	84
E.2 Beton II	85
E.3 Beton III	87
Data 2: Vyřazení odlehlých hodnot Grubbsovým testem	88
F.1 Beton I	88
F.2 Beton II	89
F.3 Beton III	90
Data 2: Regrese	91
G.1 Beton I	91
G.2 Beton II	92

G.3	Beton II bez 28-denní pevnosti	93
G.4	Beton III	94
Data 2: Vyhodnocení Cookovy vzdálenosti		95
H.1	Beton I	95
H.2	Beton II	96
H.3	Beton II bez 28-denní pevnosti	97
H.4	Beton III	98

A.1 Betony R

Blok Schmidt	R - I				R - II				R - III				
	N		Silver		N		Silver		N		Silver		
Vývrt	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	
f_c [MPa]	34,9	36,9	38,1	35,2	36,0	34,7	33,5	32,9	32,9	29,1	28,3	29,4	
měření 1	1	40	40	52,5	58	40	39	57,5	55	39	44	57	55
	2	44	41	51	56	42	48	54	59	39	38	57,5	62
	3	39	44	52	55,5	41	43	57,5	51,5	40	47	64	54
	4	36	37	58	55	39	37	60	55,5	42	36	55,5	53
	5	39	38	60	57	42	40	55,5	57	40	44	58,5	54
	6	40	40	54	49	38	39	54,5	57,5	49	40	55	53
	7	38	37	55	57	38	38	55	53	38	39	63,5	54
	8	41	34	58,5	56	38	37	51,5	55,5	41	50	55,5	52,5
	9	37	38	54	57,5	42	45	56,5	56	43	39	61,5	59
	10	38	38	52,5	56,5	39	39	51,5	57	39	40	55,5	55
měření 2	1	45	39	52	56	39	38	55,5	58	41	42	58,5	54,5
	2	40	34	50,5	51,5	43	44	57	55,5	38	41	54,5	55,5
	3	39	41	58	54,5	37	41	54,5	56	39	38	57	57,5
	4	39	41	55,5	57	46	40	55	55	40	37	57	55,5
	5	37	39	55,5	52	38	39	60,5	60	38	40	54,5	56,5
	6	43	41	57,5	57	42	39	49	56,5	39	43	58,5	53
	7	37	38	52,5	52,5	36	40	55,5	52,5	41	43	56,5	55,5
	8	37	42	52,5	50	41	37	54,5	53,5	39	42	55	54,5
	9	42	36	54	56,5	37	35	51,5	57,5	36	46	55	56,5
	10	39	38	53,5	57	39	39	55	56,5	41	38	55	52,5
měření 3	1	37	44	56	54	41	41	58	57,5	38	42	52	54
	2	40	40	52	55	38	38	55	59,5	37	42	62	63
	3	39	38	54,5	55	38	41	57,5	51,5	41	37	53	55,5
	4	34	39	53,5	57	37	37	58	55,5	38	42	58	54,5
	5	37	34	58,5	57	42	35	52,5	61	39	38	53	55
	6	37	39	56	59	39	39	55	56,5	39	37	55,5	57
	7	38	37	51	59	35	42	54	56,5	42	39	55,5	52
	8	40	38	56,5	57	39	37	54,5	56,5	39	39	63	55,5
	9	36	39	56,5	52,5	39	40	51,5	53,5	40	41	53,5	55,5
	10	39	41	52,5	53,5	39	40	57,5	57	43	35	55	58

A.2 Betony 0

Blok Schmidt	0/1 - I				0/1 - II				0/1 - III				0/2 - I				0/2 - II				0/2 - III				0/3 - I				0/3 - II				0/3 - III				
	N		Silver		N		Silver		N		Silver		N		Silver		N		Silver		N		Silver		N		Silver		N		Silver						
Vývrt	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	
f_c [MPa]	44,7	43,7	47,8	44,9	41,9	42,1	41,1	40,9	41,6	43,2	44,8	44,0	61,2	63,4	59,5	60,5	61,6	63,1	62,3	62,4	62,9	64,3	62,2	60,5	62,3	61,4	61,6	64,4	63,8	66,4	63,6	61,2	58,7	55,0	60,7	56,8	
měření 1	1	47	47	59	67	47	48	62,5	62	53	47	71,5	65	49	50	70,5	70	50	50	66	68,5	54	54	64	64,5	55	55	70	78	50	54	74	73	50	48	66,5	68,5
	2	54	48	65	66,5	47	45	64	58,5	49	45	63,5	62	48	49	68	68	53	49	61	67,5	46	52	67,5	67,5	49	57	75,5	70,5	51	52	69,5	73,5	55	53	70,5	77,5
	3	44	48	65,5	68	45	40	67	66,5	46	45	60,5	70,5	50	55	67	68,5	49	52	66,5	67,5	50	50	68	68,5	54	55	74	74,5	52	53	70,5	68,5	51	50	71	71
	4	46	47	63,5	61,5	52	43	57	64	47	47	63,5	62,5	51	51	65,5	69,5	55	52	67,5	66	51	48	69	70	53	52	71,5	75,5	52	50	72	74,5	52	51	69	70,5
	5	41	45	63,5	65,5	48	48	65,5	69,5	46	48	66,5	68	49	50	79	70,5	52	50	66,5	66,5	50	54	67,5	69	50	53	77	77,5	52	51	70	75,5	52	53	70	66
	6	50	47	62	65	44	48	68,5	64	44	49	64,5	63	54	51	68	68	51	51	61	65,5	53	53	69,5	64,5	52	50	68	71	49	51	73	77	51	57	69	71,5
	7	44	50	59,5	64,5	44	45	62	64	48	47	64	66	52	50	68	70,5	52	53	66	64,5	47	50	66	68,5	49	50	69	70,5	50	50	70,5	72	52	52	70	66,5
	8	46	44	62	64	47	47	56	62	46	47	67	67	51	50	69	67	53	51	65	68	52	51	72	69,5	48	51	73	69,5	48	52	71,5	72	51	55	69,5	77
	9	48	53	64	59	42	48	65,5	59,5	48	44	62,5	59	50	50	62,5	69,5	49	50	67	68,5	50	50	69	66	49	53	72,5	74,5	50	53	69,5	68,5	53	51	66,5	71
	10	48	44	66,5	66	40	50	59,5	62,5	43	41	65,5	68	53	51	66	67	50	49	66	69,5	50	51	73	69,5	50	50	73	71	54	53	77	71,5	54	53	67,5	68
měření 2	1	49	47	69	67,5	45	45	62	64,5	51	48	58,5	71	50	49	68,5	70,5	48	51	71	71,5	48	50	71	67	49	54	72,5	71	49	51	70,5	71,5	49	53	71,5	73
	2	48	54	66,5	68	47	45	66,5	69	44	47	62,5	60,5	47	53	65	73	50	50	68	70	51	51	67	68	52	54	71	71	52	51	74	70,5	48	52	71	71
	3	49	54	62,5	67,5	52	46	64	63,5	50	50	65,5	62	50	50	70	72,5	53	53	66,5	72	51	51	69,5	72,5	52	54	71	75,5	52	53	73	73	50	53	68,5	73,5
	4	51	42	64,5	67	43	50	62,5	61,5	47	43	61	62,5	54	50	64,5	69	51	54	69	69,5	51	49	70	69,5	50	49	73	68,5	52	50	70,5	72	52	52	72	70
	5	43	47	67	62,5	54	54	62,5	64	44	45	63	60,5	53	51	70	68,5	50	50	66	68,5	50	51	71	72,5	54	51	72,5	70	53	53	73,5	72	52	51	74	70
	6	51	47	62,5	71,5	48	48	67,5	65	48	52	66,5	63,5	48	50	71	69	53	49	64	66,5	52	52	67,5	69	50	54	70	72	50	53	76	69,5	51	50	70	69,5
	7	43	47	65	62	46	53	70	62,5	45	48	61	62	47	48	70	72,5	49	53	63	68,5	47	52	68	69,5	50	51	71,5	72,5	50	51	72	71	53	56	66,5	69,5
	8	48	44	70,5	63,5	45	44	56	59,5	42	53	68	64,5	52	50	71	66,5	52	53	69	68,5	49	51	67	68	52	51	72,5	75	52	52	71,5	76	53	51	72	72,5
	9	47	47	60,5	67	53	52	64,5	66	48	50	65	56,5	50	50	71	67	51	52	68	67,5	51	49	67,5	68,5	51	49	77	74,5	53	51	71	73	50	54	72	73
	10	46	48	64	63,5	47	45	70	64,5	45	47	73,5	57,5	49	49	67	69,5	50	48	68,5	69	52	49	67	69	50	50	74	70,5	52	52	73	71	51	53	70,5	68,5
měření 3	1	41	49	70	66,5	49	51	64,5	61	45	44	67,5	66,5	54	52	67,5	71,5	50	50	71,5	70	48	52	70	68,5	53	50	70,5	74	49	52	74	75	50	55	71	73,5
	2	49	45	70,5	64,5	46	51	62	64	47	49	68	67	45	53	72,5	74	52	52	71	71,5	50	49	69	72	53	49	76	73	51	54	73,5	69	50	50	71	72
	3	42	44	64	58,5	49	44	68,5	67	42	49	65,5	61,5	49	47	71,5	72	51	48	70	70	51	48	67	70	51	50	76	70,5	51	54	73	73,5	54	49	72,5	67,5
	4	46	49	64,5	65,5	48	43	61	69	50	47	58,5	61	51	48	67,5	68,5	50	49	72	64	53	49	68,5	69	48	51	78	74,5	51	53	72	69,5	52	51	70	73
	5	49	49	63	66	50	45	60,5	60	43	48	65,5	66	49	49	70	68,5	48	50	68	66	49	49	65,5	67,5	50	52	74,5	71	51	54	71,5	70,5	52	51	73	69
	6	45	45	69	62	46	48	64,5	61,5	45	52	68,5	64	48	49	69	72,5	50	50	68,5	66	48	49	69	75,5	50	47	71	77	49	52	68	70	53	55	78	75,5
	7	47	46	66	68,5	48	46	61	61,5	48	43	65	62,5	48	48	68,5	70	56	51	67,5	65,5	49	50	68	67	49	52	77	72	53	50	71	69	51	50	74	68,5
	8	44	48	66	61	41	45	62,5	63	43	48	66,5	59,5	49	52	74	73	49	51	66	67,5	50	49	70	73	52	51	72,5	70,5	53	50	75	68,5	53	54	69	68,5
	9	44	41	63,5	67	46	48	64,5	64	48	49	68	57,5	47	50	74,5	67,5	51	47	72,5	69,5	49	53	65,5	68,5	49	50	74,5	71,5	53	53	69,5	70,5	54	50	65,5	66,5
	10	45	45	61,5	62,5	43	51	63,5	61,5	47	42	64	64,5	50	48	71,5	70	53	47	68,5	69	50	51	67,5	72,5	51	49	70,5	73,5	48	52	76	73	51	51	70	73

A.3 Betony 1

Blok Schmidt	1/1 - I				1/1 - II				1/1 - III				1/2 - I				1/2 - II				1/2 - III				1/3 - I				1/3 - II				1/3 - III				
	N		Silver		N		Silver		N		Silver		N		Silver		N		Silver		N		Silver		N		Silver		N		Silver						
Vývrt	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	
f_c [MPa]	53,4	49,1	48,9	51,3	50,5	51,9	54,3	52,6	49,4	49,4	50,0	51,4	56,0	54,2	55,7	55,8	54,3	55,9	55,1	55,0	56,7	57,7	57,6	57,8	64,2	65,5	64,2	61,2	66,3	63,6	65,2	64,1	58,9	56,0	53,9	61,6	
měření 1	1	51	47	63	65	49	38	66,5	67,5	45	44	60,5	65,5	53	47	69	69	48	47	69	70	48	56	72	69,5	53	53	71,5	62	46	43	70	69,5	56	49	60	68,5
	2	50	45	71,5	60	51	42	69	63,5	47	38	67,5	67,5	47	49	70,5	70,5	46	48	68,5	68,5	51	46	75,5	68,5	44	44	69,5	62,5	44	45	65	70	49	49	65,5	71
	3	51	47	65,5	57,5	45	44	57	64	42	41	65,5	70,5	53	50	69,5	68,5	45	47	67,5	70	46	48	68	69	50	48	71	68,5	48	54	68,5	70,5	49	46	64,5	72,5
	4	50	46	63,5	68	40	47	61,5	63,5	37	46	63	62,5	56	53	73,5	68	48	52	68,5	69,5	53	50	69	72	48	45	68	69,5	55	47	69	73,5	48	52	71	68
	5	50	50	67,5	55,5	42	44	70,5	63,5	38	44	62,5	66	53	44	69,5	67	48	48	66	70	45	49	70	64	44	46	74	68,5	46	49	69	68	46	51	74	69
	6	50	49	59,5	64,5	41	50	60	64	42	50	62,5	69,5	39	46	67,5	72	43	44	66,5	67	47	49	64,5	63,5	55	45	68	76	49	52	70	67	47	53	65	67
	7	46	47	62,5	60	44	47	57,5	65,5	47	45	63,5	67	45	43	65	74	45	52	65	74	47	49	64	72,5	49	50	65	76	43	50	71	70	46	54	74	65,5
	8	45	46	65,5	56	50	50	60	66	44	44	64	63,5	46	43	67,5	74	46	50	68	71	49	47	75,5	74,5	53	49	70	64,5	46	54	67,5	68,5	48	48	62,5	72
	9	49	47	73	67	40	42	63	67	50	39	59,5	59	46	48	70,5	71	50	49	70,5	68,5	46	49	67	69,5	46	50	71	67,5	46	50	69	73	54	46	65	68
	10	46	53	67	52	45	40	60,5	59	45	47	63,5	60,5	45	50	67,5	69	50	50	70	69	49	48	64,5	64,5	45	52	66	69	53	52	67,5	74	48	48	67,5	64
měření 2	1	48	46	61,5	60,5	45	46	62	62	39	41	62	66,5	45	47	71,5	72	45	50	70	69	48	46	69	69	47	46	72	70,5	44	51	71	73	47	50	67,5	70,5
	2	49	49	62,5	58	45	47	61	58	49	49	67	65,5	52	47	72	68	46	50	70,5	70,5	49	49	69,5	67	50	50	69,5	71,5	46	52	74,5	71,5	49	48	64,5	64
	3	48	46	63	59,5	50	40	66	67,5	37	47	69	69,5	50	53	69,5	70,5	48	50	71	69	49	50	69	70,5	47	52	71	68	48	49	71	73	48	48	67	72
	4	50	46	61	65,5	40	43	61	65	48	37	67	64	45	49	68	71	48	47	70,5	70,5	48	47	66,5	69	47	49	71,5	66,5	46	52	72,5	71,5	49	47	61	70,5
	5	52	49	64,5	56	46	47	62	67	40	39	65	66	45	45	70,5	72,5	47	46	65,5	70	47	51	66,5	67	50	48	69,5	64	48	48	73	73,5	49	50	63	71
	6	50	50	61,5	59,5	41	43	63,5	66,5	35	39	66	65,5	44	47	66,5	69,5	46	48	69,5	71	50	50	70	70,5	47	47	70	71,5	44	44	72,5	70,5	47	53	72,5	63
	7	47	49	61	63	44	43	60,5	67,5	43	42	68,5	63,5	45	45	70	71	44	48	69,5	73	49	49	65	67	48	47	69,5	69	48	51	69,5	69,5	49	46	72	61
	8	47	44	68,5	59	46	43	65,5	61,5	45	44	64	67,5	50	43	68,5	71	46	52	69,5	70,5	49	49	67	70	47	44	71,5	71	51	48	72,5	71	50	45	65,5	71
	9	47	44	67	56,5	49	42	66	66	48	37	60,5	65,5	46	44	71	70,5	45	48	68,5	68,5	46	49	68,5	63	50	46	72	72	46	51	73	73,5	48	50	62	69
	10	48	45	63	66,5	41	47	63,5	68	44	50	65,5	57,5	49	53	68	71	46	44	70	69	47	48	67,5	70	49	47	68	72	51	49	65,5	70,5	52	51	71	66
měření 3	1	48	45	70,5	68	37	48	64	69	41	38	63,5	65,5	45	47	70	69,5	45	50	69	72	46	45	68,5	73,5	50	49	73	63,5	52	45	73	72	49	51	72,5	67
	2	54	48	71	59	40	40	65	64	38	42	65	68	46	48	70	72,5	48	49	71,5	69,5	52	52	73,5	70	44	48	74,5	68,5	50	48	73	77	51	49	69,5	69
	3	49	43	67,5	66,5	41	38	64,5	66,5	35	47	66,5	67	50	52	70	67,5	49	47	72	70	53	48	70,5	72,5	44	51	73,5	68	48	43	78	72	50	49	68,5	70
	4	44	48	65	63	40	48	65,5	63	36	39	68	66,5	44	45	74,5	74,5	45	47	69	68,5	46	47	68	66,5	45	50	68,5	69,5	45	49	74	71	47	46	72	68
	5	44	45	64,5	55,5	40	40	59,5	59	41	37	63	64,5	50	43	72	70,5	43	50	73	71,5	42	47	69	72	46	47	65	70,5	53	52	73,5	73,5	47	46	73,5	73
	6	47	46	59	58,5	45	45	66,5	59	42	45	63,5	62	50	47	70,5	69	47	43	69	69,5	45	45	66,5	68	48	48	69,5	74	52	48	77,5	72,5	49	50	67	66
	7	43	49	63,5	54,5	41	43	68	65	39	44	66,5	66	48	45	71	68	45	47	68	69	46	46	69	70,5	44	46	75,5	69	47	53	72	73,5	46	49	70	68,5
	8	43	44	66	66,5	45	39	60	70,5	46	46	66,5	64	43	49	67	73,5	40	47	71,5	69	48	49	69	73	49	48	68	70	52	50	70,5	71	48	51	67	66
	9	42	39	64,5	55,5	48	46	68,5	65	43	41	69,5	69,5	49	41	70	72,5	44	49	70	70,5	46	50	72,5	71	46	47	68	67	45	47	70,5	70,5	55	46	69,5	67
	10	47	46	66,5	59	42	46	66,5	60	44	42	63,5	69	47	43	69	73	43	45	68	74	48	51	71	66,5	53	48	73	76	46	45	71,5	67	42	48	69	69

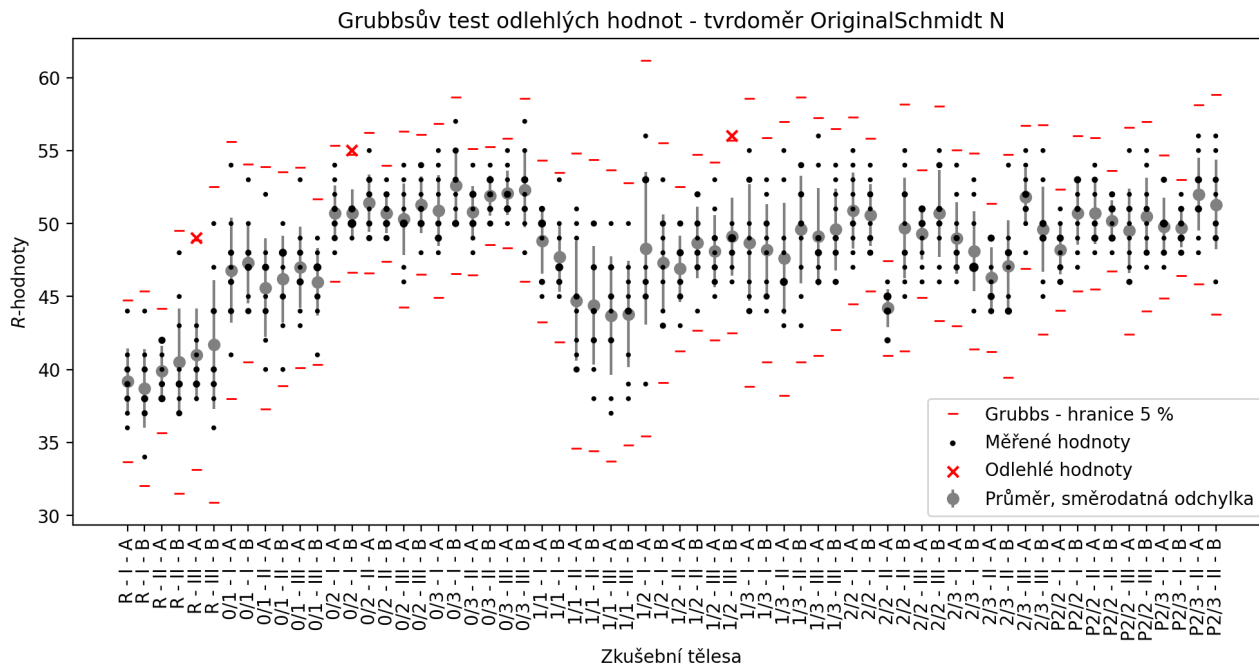
A.4 Betony 2

Blok Schmidt	2/2 - I				2/2 - II				2/2 - III				2/3 - I				2/3 - II				2/3 - III				
	N		Silver		N		Silver		N		Silver		N		Silver		N		Silver		N		Silver		
Vývrt	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	
f_c [MPa]	61,1	58,6	60,4	60,8	58,1	57,5	57,1	62,0	58,2	59,3	59,2	58,3	63,3	70,6	66,0	65,1	66,5	67,2	66,0	67,3	67,5	68,3	64,3	64,5	
měření 1	1	49	48	71	73,5	45	50	64,5	67	49	46	70	71	47	47	63,5	65,5	44	54	65	70,5	50	46	69,5	73
	2	50	49	70,5	70,5	45	46	64,5	61,5	48	54	68	69	49	53	66	69	45	49	70,5	71	48	45	65,5	73
	3	52	54	71,5	70,5	42	52	69	65,5	51	47	67,5	70,5	48	47	69	71	47	48	62,5	62,5	52	50	75,5	70
	4	51	53	73	74,5	44	48	68	63,5	47	50	75,5	76	46	47	75	75	45	48	67,5	70	52	49	68	73
	5	53	52	78	69	45	52	70,5	69	50	51	67	70	47	47	66,5	71,5	45	44	66	68	52	49	72,5	71,5
	6	47	48	72	71,5	46	55	69,5	65,5	46	55	68,5	67,5	54	52	70	69,5	49	48	72,5	71	55	53	73	73
	7	48	52	69,5	73	44	47	70,5	66	51	51	72	70	49	44	74	64,5	44	47	64	65	53	50	76,5	78
	8	54	51	69,5	67,5	42	48	70	68	51	49	67,5	68	50	47	71,5	70	49	45	67,5	68	51	55	73	71
	9	50	49	73	71	44	45	63	73	50	54	72	69,5	48	50	72,5	71	46	44	74	71	54	50	74,5	70
	10	55	50	76,5	70	45	54	68	66,5	50	50	68	68,5	52	47	69	73	49	44	68	67,5	51	49	73	73
měření 2	1	56	53	65	72	45	48	73,5	62,5	51	49	73,5	67,5	43	52	68,5	67	46	53	72,5	74	49	49	78	67
	2	50	49	71,5	71,5	47	48	64	64,5	50	49	71	71	46	52	69,5	69	51	52	62	72	49	46	68	72,5
	3	55	54	70,5	72	46	48	67,5	66	50	51	73	69,5	54	50	75,5	67	50	46	68,5	66,5	51	49	71,5	68
	4	48	49	71,5	77	45	48	64,5	66	53	53	71	70	47	51	68,5	65	48	46	66	71	48	51	71	66,5
	5	53	55	70,5	70,5	45	49	60,5	68,5	45	51	72	72	50	47	66	68	45	47	72,5	74,5	48	47	75	70,5
	6	56	52	70,5	71,5	50	44	63	59,5	47	54	72	70	47	48	69,5	71	47	48	68,5	66,5	47	50	75	66
	7	47	47	67	70,5	43	52	65	65,5	45	52	71	71	46	49	66	64,5	51	46	68,5	72,5	50	53	72,5	73
	8	51	44	72,5	71	43	47	65	70	48	49	68,5	73	49	51	75	69,5	48	49	66,5	71,5	48	53	79	73,5
	9	48	56	71,5	71,5	40	47	74,5	67	48	48	72,5	70	47	48	71	69	45	47	71	71	51	53	72	69
	10	52	52	72,5	71,5	40	44	63,5	63	47	50	68	69,5	49	48	71,5	72,5	48	45	70	70	51	51	72,5	73
měření 3	1	48	48	70,5	72	45	43	65,5	63,5	52	46	67,5	70	50	46	68,5	68	51	50	71	71	50	47	71,5	70,5
	2	49	47	71	70,5	40	49	68,5	62	47	50	72	72,5	44	46	69,5	69	51	46	70	66,5	51	50	70,5	72,5
	3	51	49	69,5	69	48	47	69	58,5	47	52	68,5	73,5	50	47	68,5	72,5	51	48	70,5	64,5	52	49	76	72
	4	50	48	71,5	72	45	49	67	64,5	52	50	68,5	71	48	48	69,5	73	44	47	68,5	67,5	48	47	74	70
	5	50	48	69,5	71	45	47	65,5	63	51	46	73,5	71,5	45	48	71	68,5	46	50	65	71	51	48	69,5	73,5
	6	50	50	70,5	71	47	43	61	66	49	52	67,5	73	47	49	70	69	50	48	69,5	71,5	54	52	73	70,5
	7	51	47	72	74	45	50	65,5	64	48	50	67	71	44	47	72,5	68	46	48	67,5	70	51	52	71,5	70
	8	46	47	71	70,5	44	43	69	67	49	48	69	67	44	50	71	72	46	44	69	72,5	51	51	73	69,5
	9	48	47	73	70	45	47	64	62	49	48	73,5	71	50	48	69	72,5	49	45	71	68	50	49	71	75,5
	10	48	48	72	71	48	45	67	67,5	50	49	71	70	48	46	68,5	68	45	51	67,5	73	49	52	69,5	71

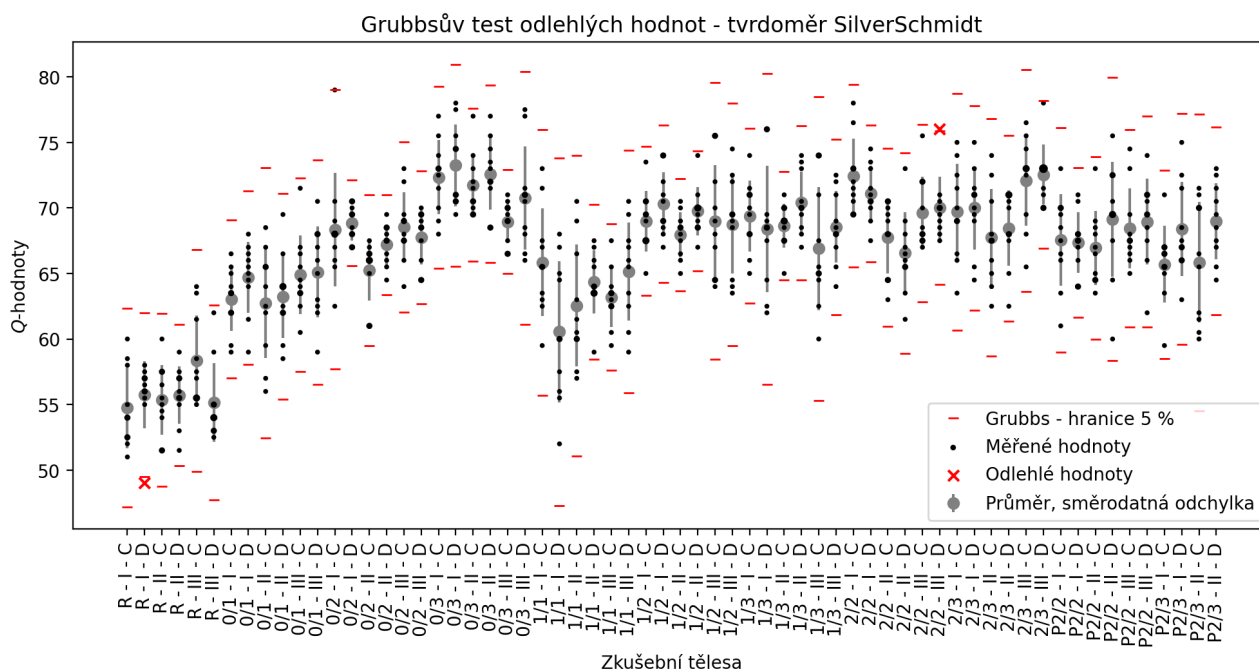
A.5 Betony P

Blok Schmidt	P2/2 - I				P2/2 - II				P2/2 - III				P2/3 - I				P2/3 - II				
	N		Silver		N		Silver		N		Silver		N		Silver		N		Silver		
Vývrt	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	
f_c [MPa]	57,1	64,4	60,7	59,0	58,7	62,7	60,7	59,4	57,6	62,4	61,2	60,9	75,5	75,2	69,1	70,4	78,7	77,3	73,7	77,8	
měření 1	1	47	48	66	70,5	49	52	68	75,5	46	49	67,5	66	50	49	67	63	51	55	71	71,5
	2	49	50	67,5	71	49	51	63,5	67,5	51	55	67	68,5	49	51	65,5	75	53	53	65,5	72,5
	3	48	47	63,5	67,5	53	49	68,5	69,5	49	51	67,5	71	53	49	67	72,5	51	49	70	64,5
	4	51	53	61	68	49	51	65	72,5	50	48	68	74	50	51	65	66	53	50	60,5	65,5
	5	49	49	73	67,5	50	49	66,5	60	48	54	69,5	67,5	53	48	63,5	67	49	56	71,5	70,5
	6	47	52	69,5	64	50	48	64,5	64,5	46	47	66,5	71	47	49	71	68,5	48	52	70	68,5
	7	46	51	66,5	68	48	50	67	70,5	47	50	74,5	62	48	48	66,5	71,5	55	49	61,5	73
	8	49	53	68,5	64	54	51	69	69,5	51	51	73	70,5	50	50	65,5	66	51	46	66,5	67
	9	50	51	70	67	53	49	73	72,5	52	48	65	69,5	50	52	59,5	67,5	56	50	60	69,5
	10	46	53	70	66	52	52	64,5	69,5	55	52	66	69,5	48	50	66,5	67	53	53	62	67,5
měření 2	1	49	51	74	74	50	50	67,5	68	49	47	64	71,5	49	50	65	69	52	50	63,5	65,5
	2	50	53	69	66	47	49	70	74,5	49	49	65	71	48	48	68,5	70,5	49	50	63,5	66,5
	3	51	45	66,5	64,5	53	50	67,5	72	51	49	70,5	73,5	48	52	68	69,5	47	51	66,5	67,5
	4	52	50	67,5	66,5	54	50	68,5	64,5	53	53	70	67	52	47	67,5	67,5	48	50	66,5	71
	5	53	52	71,5	65,5	49	51	70	69	53	49	67	73	48	48	69,5	65	50	48	61	63
	6	47	54	66,5	71	50	48	68,5	71	47	51	66,5	70	51	48	69,5	63,5	46	51	64	68
	7	46	53	68	68	49	49	66	68,5	48	50	68,5	73	49	47	65,5	64,5	50	47	62,5	64,5
	8	50	49	66,5	72	51	52	70,5	70	45	50	72,5	69,5	48	48	68	65	48	45	61,5	67
	9	52	53	67,5	66	50	51	66,5	66,5	53	47	69,5	70,5	49	51	63,5	65	48	51	69	67
	10	53	48	65,5	70	49	54	67,5	74,5	47	54	67	68	50	49	66,5	64	50	50	66,5	67,5
měření 3	1	48	41	71,5	66,5	46	52	64,5	68	52	48	70	70,5	53	52	68	69	49	48	65,5	65,5
	2	46	52	64	68	49	50	67	73,5	48	54	65	75,5	48	52	71	62	49	49	65,5	68,5
	3	47	45	69,5	71	50	48	70,5	65,5	50	49	63,5	70,5	51	47	72	72	47	46	66	66,5
	4	48	47	66	75,5	47	50	68	62	51	49	72	69,5	49	47	72,5	72	48	50	67	66,5
	5	50	53	65,5	72	50	55	64,5	67,5	49	52	71,5	64,5	47	49	68	66,5	49	50	69	67
	6	40	50	74	71	46	51	68,5	66	46	47	66,5	68	46	47	66,5	66,5	51	51	67,5	69
	7	48	48	65	73,5	46	48	72,5	76	49	50	70,5	68,5	49	48	68	63	47	49	67,5	65
	8	51	48	64,5	67	49	49	68	73,5	48	48	69	68	49	52	65	65	49	51	65,5	66
	9	52	50	67,5	68,5	53	49	63,5	67,5	56	49	73,5	66	49	45	65	65	47	48	68	68
	10	53	50	72	69,5	45	50	67,5	65,5	52	47	75	68,5	48	49	66	68	47	52	66	65

B.1 Cyklus měření 1

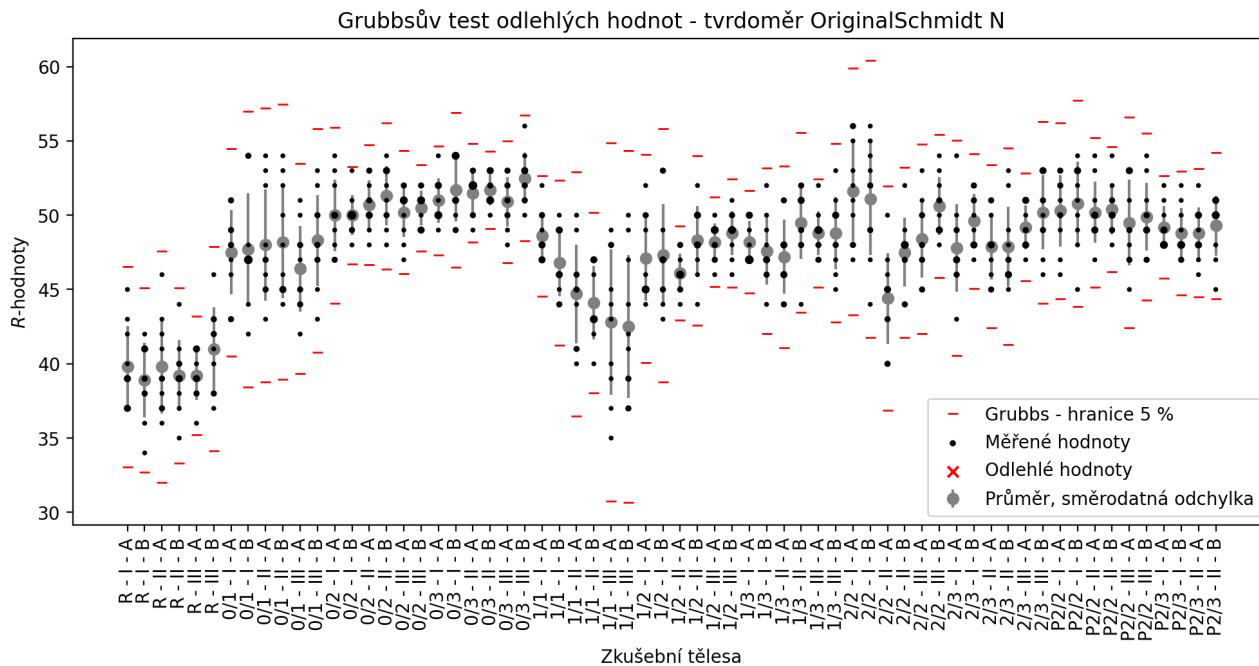


Obr. 24: Grubbsův test odlehých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem OriginalSchmidt N; 1. cyklus měření.

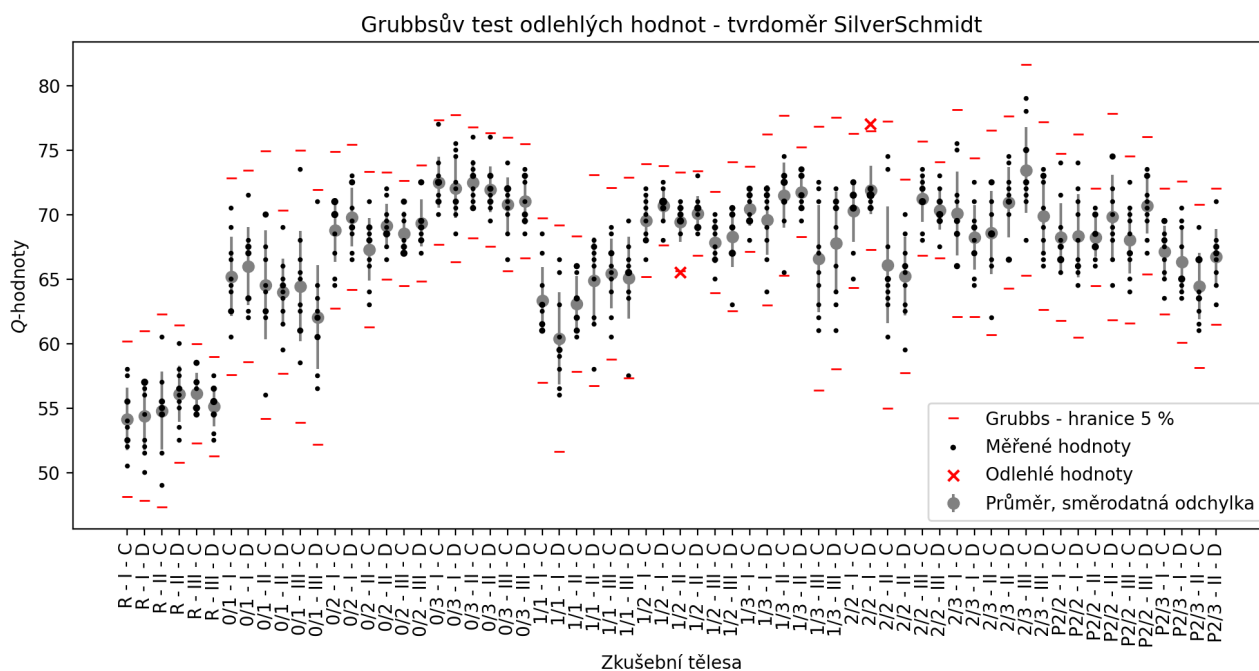


Obr. 25: Grubbsův test odlehých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem SilverSchmidt; 1. cyklus měření.

B.2 Cyklus měření 2

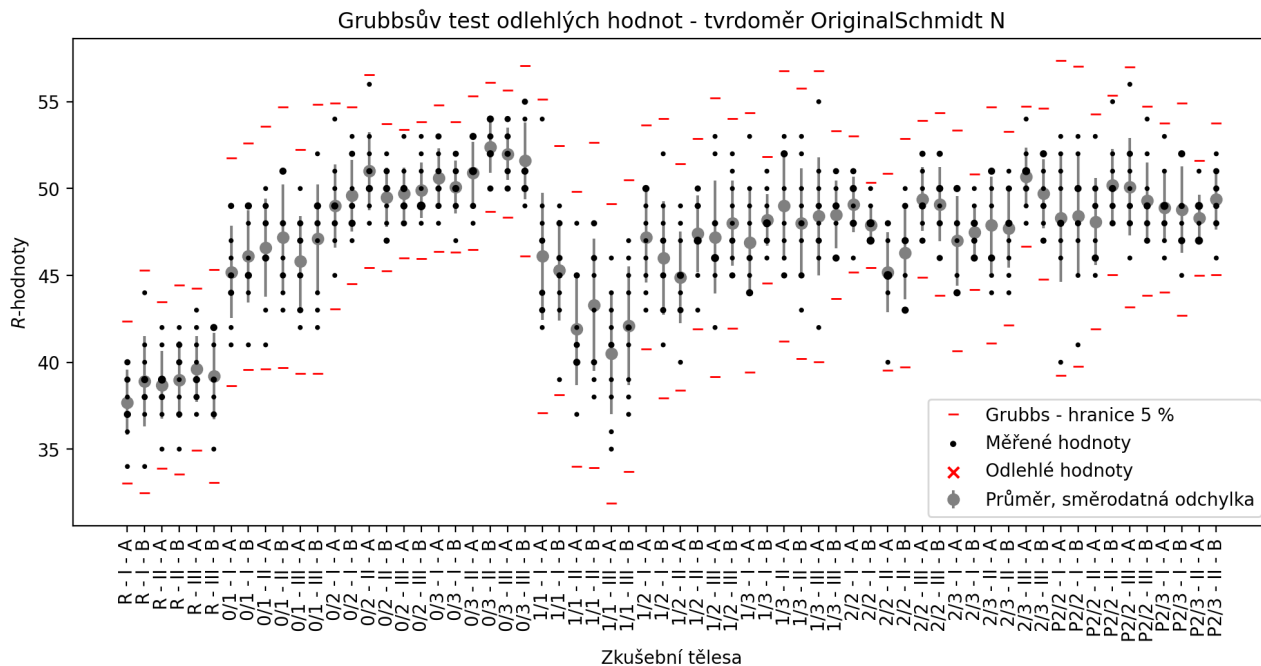


Obr. 26: Grubbsův test odlehých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem OriginalSchmidt N; 2. cyklus měření.

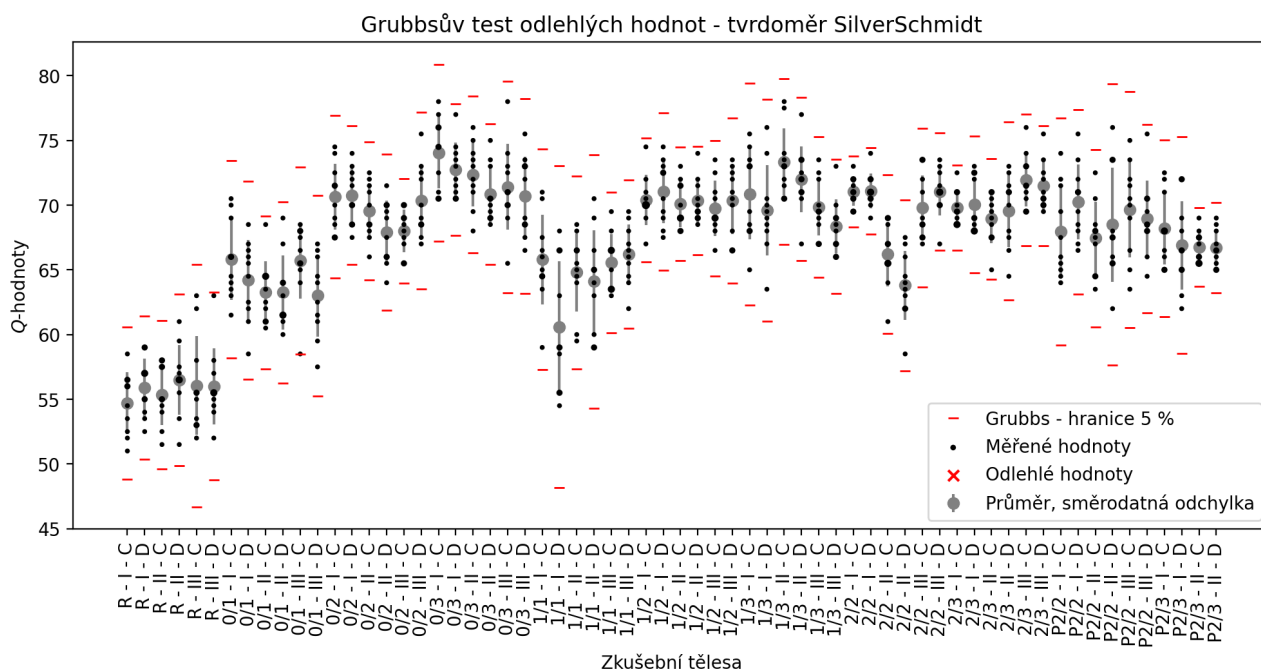


Obr. 27: Grubbsův test odlehých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem SilverSchmidt; 2. cyklus měření.

B.3 Cyklus měření 3



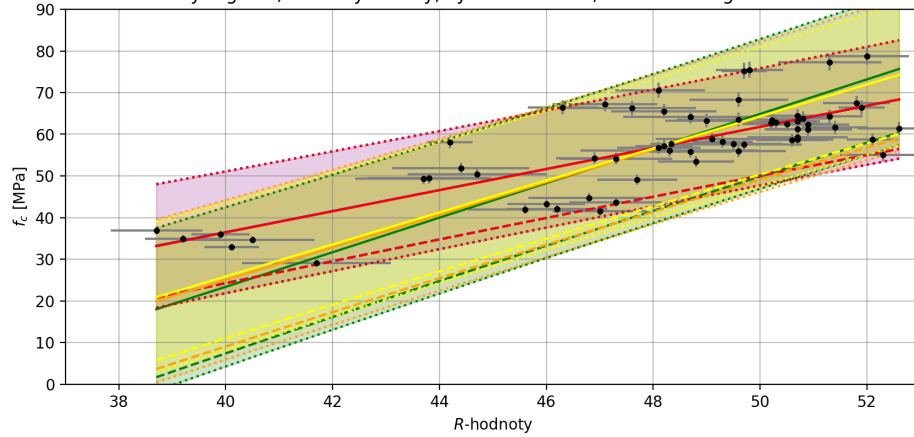
Obr. 28: Grubbsův test odlehých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem OriginalSchmidt N; 3. cyklus měření.



Obr. 29: Grubbsův test odlehých hodnot pro tělesa, kde se měřilo tvrdoměrem SilverSchmidt; 3. cyklus měření.

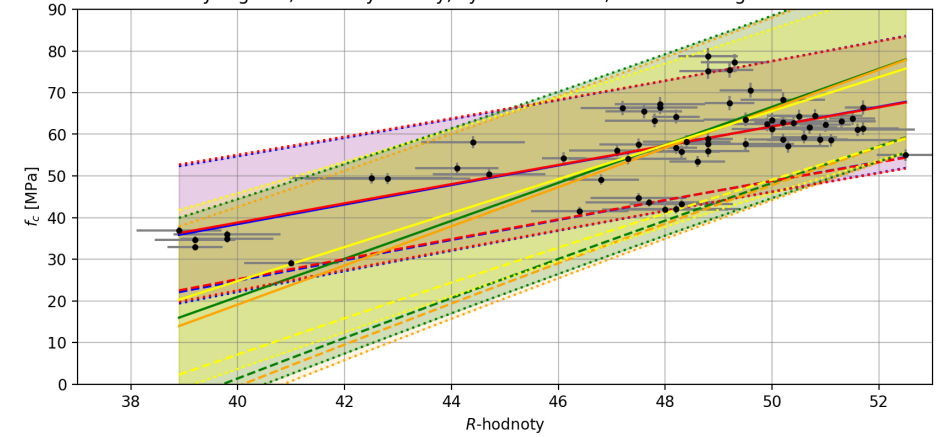
C.1 Všechny betony

Všechny regrese, všechny betony, cyklus měření 1, tvrdoměr OriginalSchmidt N



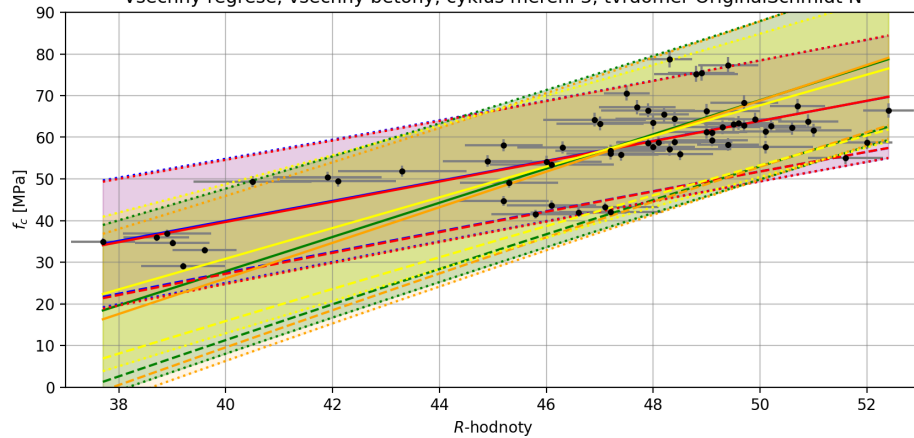
<p>— OLSy ($R^2 = 0.609$): $y = -64.684 + 2.529 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 0.998$): $y = -65.025 + 2.536 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.44$: $y = -127.844 + 3.843 \cdot x$</p>
<p>— OLSx ($R^2 = 0.609$): $y = -142.669 + 4.151 \cdot x$</p>	<p>— WLSx ($R^2 = 0.608$): $y = -131.51 + 3.913 \cdot x$</p>	<p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>

Všechny regrese, všechny betony, cyklus měření 2, tvrdoměr OriginalSchmidt N



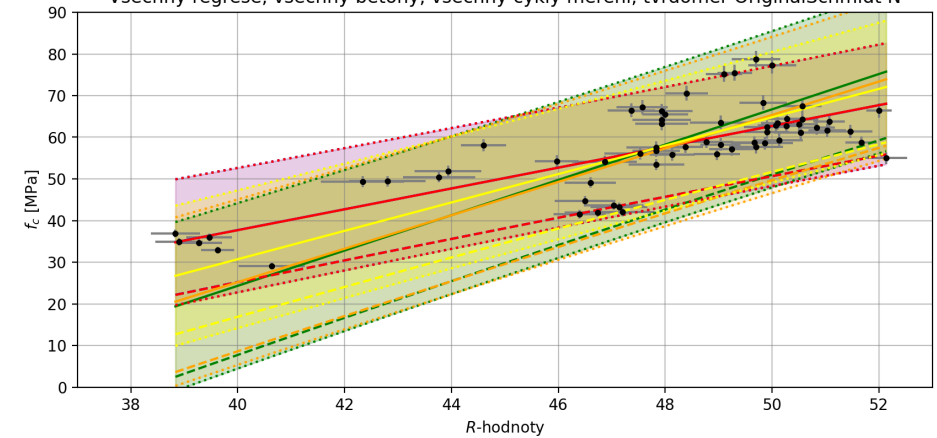
<p>— OLSy ($R^2 = 0.514$): $y = -55.42 + 2.346 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 0.972$): $y = -53.493 + 2.307 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.38$: $y = -138.477 + 4.081 \cdot x$</p>
<p>— OLSx ($R^2 = 0.514$): $y = -161.448 + 4.56 \cdot x$</p>	<p>— WLSx ($R^2 = 0.499$): $y = -168.89 + 4.7 \cdot x$</p>	<p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>

Všechny regrese, všechny betony, cyklus měření 3, tvrdoměr OriginalSchmidt N



<p>— OLSy ($R^2 = 0.585$): $y = -56.113 + 2.401 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 0.992$): $y = -57.314 + 2.424 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.34$: $y = -116.483 + 3.683 \cdot x$</p>
<p>— OLSx ($R^2 = 0.585$): $y = -136.317 + 4.104 \cdot x$</p>	<p>— WLSx ($R^2 = 0.562$): $y = -144.696 + 4.27 \cdot x$</p>	<p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>

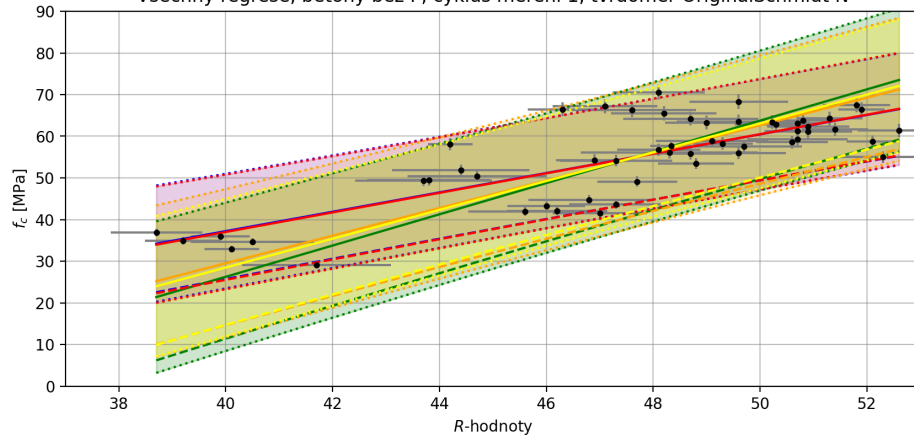
Všechny regrese, všechny betony, všechny cykly měření, tvrdoměr OriginalSchmidt N



<p>— OLSy ($R^2 = 0.59$): $y = -62.262 + 2.499 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 1.0$): $y = -62.396 + 2.502 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.13$: $y = -105.638 + 3.409 \cdot x$</p>
<p>— OLSx ($R^2 = 0.59$): $y = -145.204 + 4.238 \cdot x$</p>	<p>— WLSx ($R^2 = 0.61$): $y = -135.358 + 4.014 \cdot x$</p>	<p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>

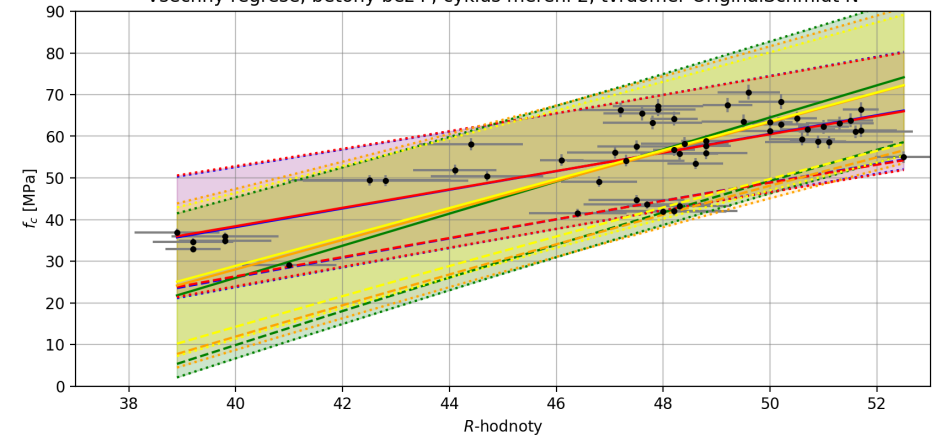
C.2 Betony bez P

Všechny regrese, betony bez P, cyklus měření 1, tvrdoměr OriginalSchmidt N



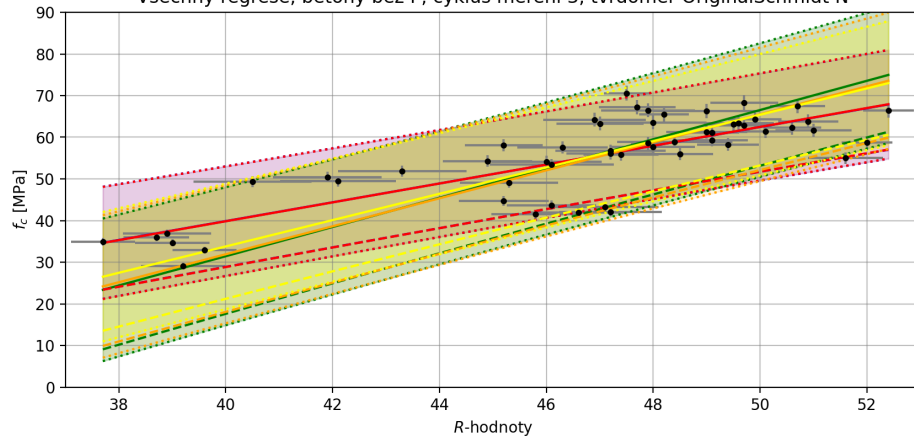
OLSy ($R^2 = 0.62$): $y = -55.779 + 2.325 \cdot x$	WLSy ($R^2 = 0.987$): $y = -56.89 + 2.348 \cdot x$	Deming $\delta = 0.49$: $y = -109.961 + 3.461 \cdot x$
OLSx ($R^2 = 0.62$): $y = -123.784 + 3.751 \cdot x$	WLSx ($R^2 = 0.674$): $y = -103.073 + 3.314 \cdot x$	✦ Měřené body, směrodatná odchyłka

Všechny regrese, betony bez P, cyklus měření 2, tvrdoměr OriginalSchmidt N



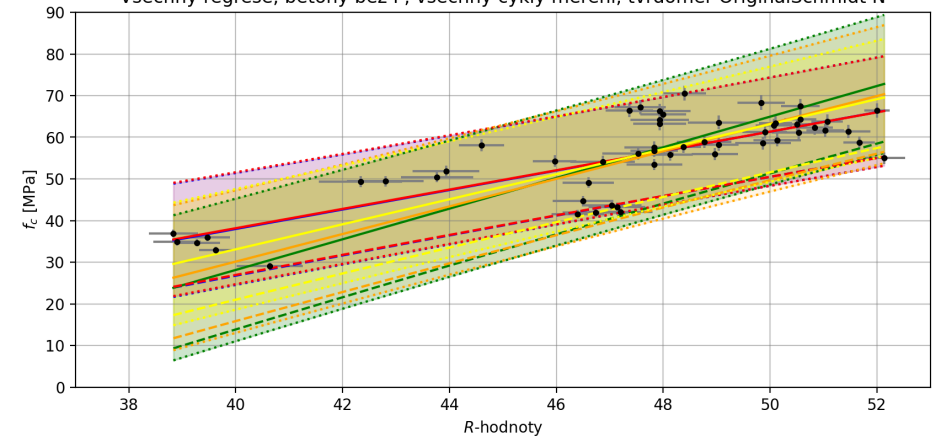
OLSy ($R^2 = 0.581$): $y = -51.348 + 2.238 \cdot x$	WLSy ($R^2 = 0.981$): $y = -49.891 + 2.207 \cdot x$	Deming $\delta = 0.42$: $y = -109.888 + 3.47 \cdot x$
OLSx ($R^2 = 0.581$): $y = -128.026 + 3.851 \cdot x$	WLSx ($R^2 = 0.653$): $y = -113.237 + 3.532 \cdot x$	✦ Měřené body, směrodatná odchyłka

Všechny regrese, betony bez P, cyklus měření 3, tvrdoměr OriginalSchmidt N



OLSy ($R^2 = 0.644$): $y = -50.539 + 2.26 \cdot x$	WLSy ($R^2 = 0.995$): $y = -50.786 + 2.265 \cdot x$	Deming $\delta = 0.36$: $y = -92.708 + 3.162 \cdot x$
OLSx ($R^2 = 0.644$): $y = -108.98 + 3.51 \cdot x$	WLSx ($R^2 = 0.681$): $y = -102.48 + 3.36 \cdot x$	✦ Měřené body, směrodatná odchyłka

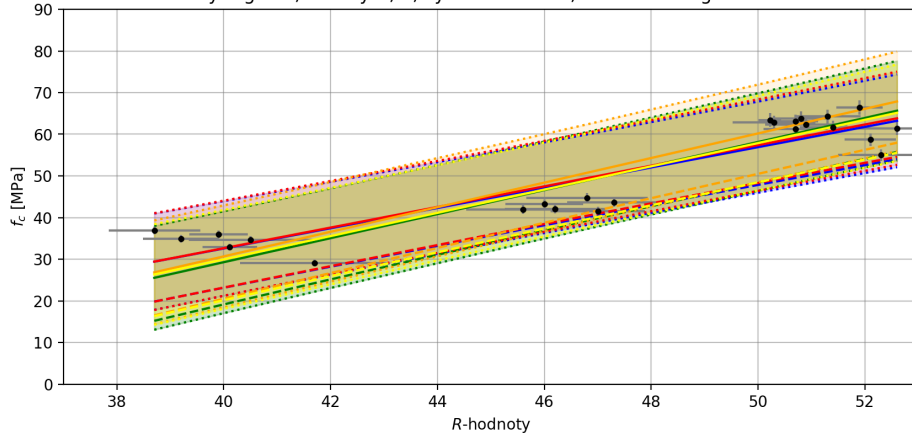
Všechny regrese, betony bez P, všechny cykly měření, tvrdoměr OriginalSchmidt N



OLSy ($R^2 = 0.635$): $y = -55.47 + 2.336 \cdot x$	WLSy ($R^2 = 0.996$): $y = -54.611 + 2.319 \cdot x$	Deming $\delta = 0.14$: $y = -87.107 + 3.005 \cdot x$
OLSx ($R^2 = 0.635$): $y = -119.088 + 3.681 \cdot x$	WLSx ($R^2 = 0.704$): $y = -102.366 + 3.313 \cdot x$	✦ Měřené body, směrodatná odchyłka

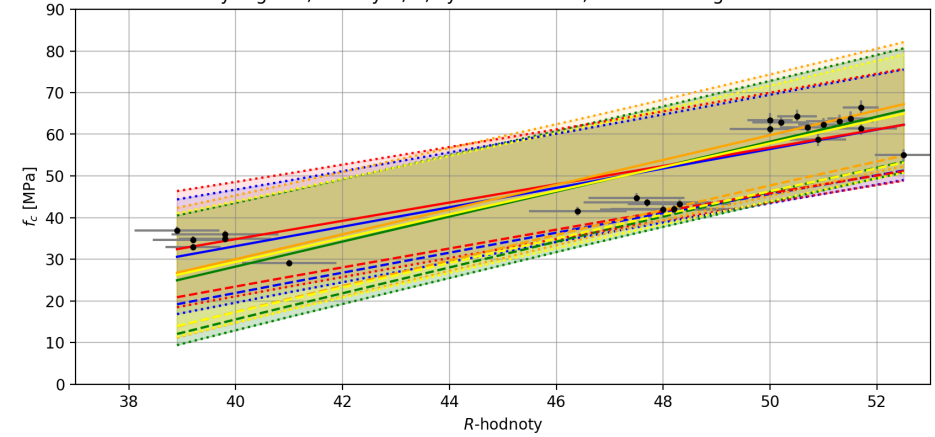
C.3 Betony R, 0

Všechny regrese, betony R, 0, cyklus měření 1, tvrdoměr OriginalSchmidt N



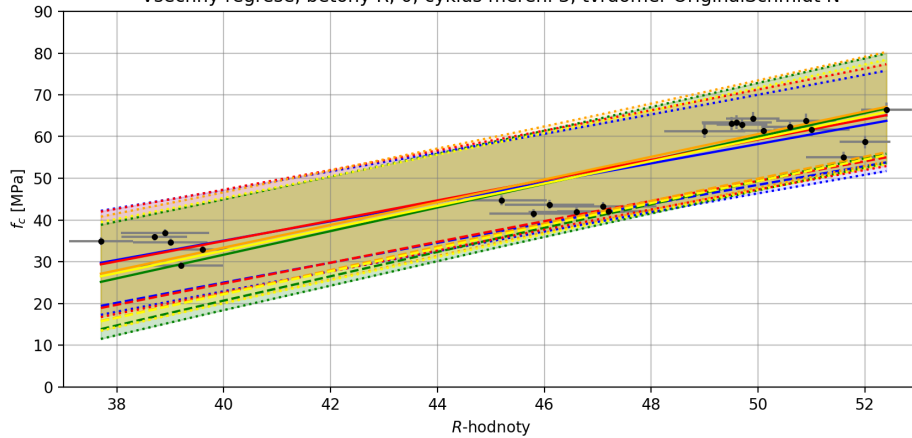
OLSy ($R^2 = 0.843$): $y = -64.782 + 2.434 \cdot x$
 WLSy ($R^2 = 0.982$): $y = -66.394 + 2.476 \cdot x$
 Deming $\delta = 0.56$: $y = -81.745 + 2.793 \cdot x$
 OLSx ($R^2 = 0.843$): $y = -86.195 + 2.887 \cdot x$
 WLSx ($R^2 = 0.866$): $y = -87.455 + 2.953 \cdot x$
 + Měřené body, směrodatná odchylka

Všechny regrese, betony R, 0, cyklus měření 2, tvrdoměr OriginalSchmidt N



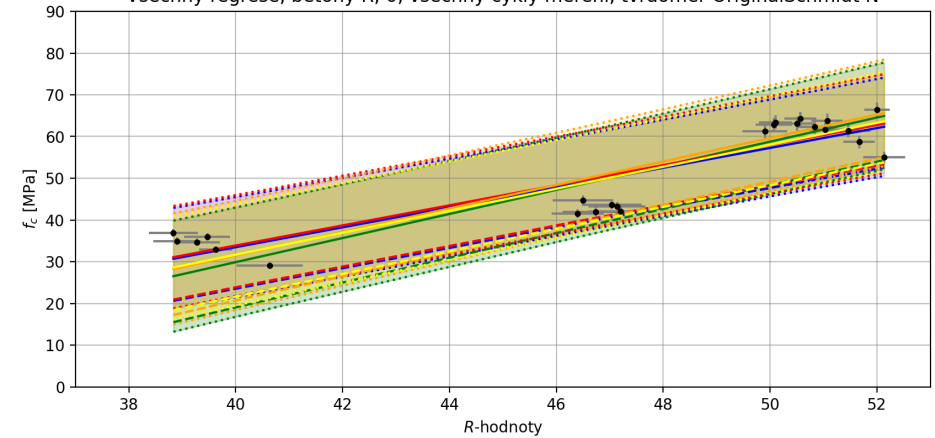
OLSy ($R^2 = 0.777$): $y = -60.089 + 2.331 \cdot x$
 WLSy ($R^2 = 0.963$): $y = -53.023 + 2.196 \cdot x$
 Deming $\delta = 0.51$: $y = -84.534 + 2.847 \cdot x$
 OLSx ($R^2 = 0.777$): $y = -91.788 + 3.0 \cdot x$
 WLSx ($R^2 = 0.836$): $y = -89.03 + 2.976 \cdot x$
 + Měřené body, směrodatná odchylka

Všechny regrese, betony R, 0, cyklus měření 3, tvrdoměr OriginalSchmidt N



OLSy ($R^2 = 0.818$): $y = -57.562 + 2.315 \cdot x$
 WLSy ($R^2 = 0.961$): $y = -62.355 + 2.433 \cdot x$
 Deming $\delta = 0.39$: $y = -74.584 + 2.681 \cdot x$
 OLSx ($R^2 = 0.818$): $y = -81.579 + 2.831 \cdot x$
 WLSx ($R^2 = 0.859$): $y = -75.477 + 2.721 \cdot x$
 + Měřené body, směrodatná odchylka

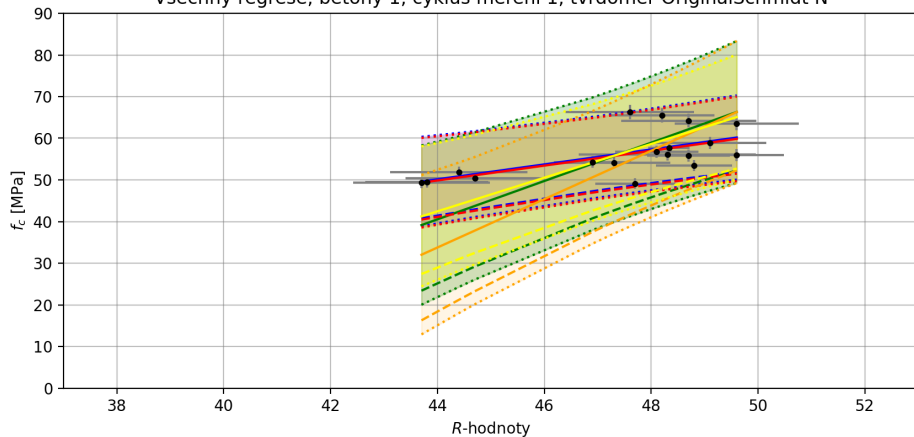
Všechny regrese, betony R, 0, všechny cykly měření, tvrdoměr OriginalSchmidt N



OLSy ($R^2 = 0.824$): $y = -61.688 + 2.379 \cdot x$
 WLSy ($R^2 = 0.99$): $y = -62.44 + 2.408 \cdot x$
 Deming $\delta = 0.16$: $y = -73.693 + 2.634 \cdot x$
 OLSx ($R^2 = 0.824$): $y = -85.666 + 2.889 \cdot x$
 WLSx ($R^2 = 0.867$): $y = -80.962 + 2.812 \cdot x$
 + Měřené body, směrodatná odchylka

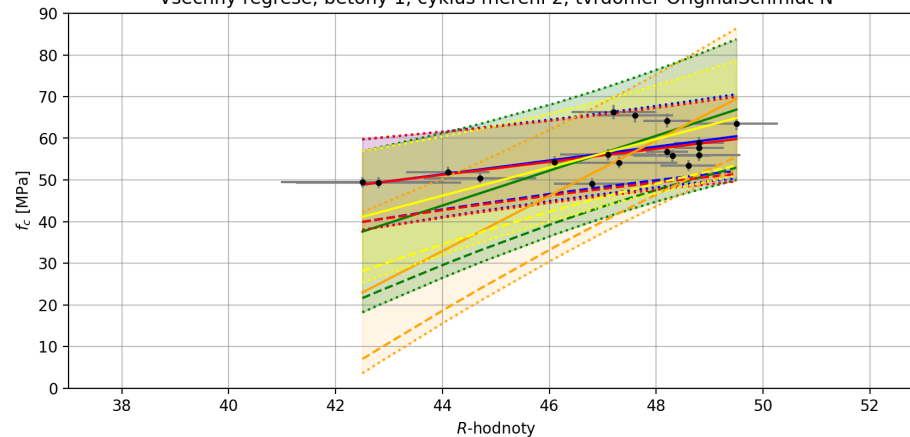
C.4 Betony 1

Všechny regrese, betony 1, cyklus měření 1, tvrdoměr OriginalSchmidt N



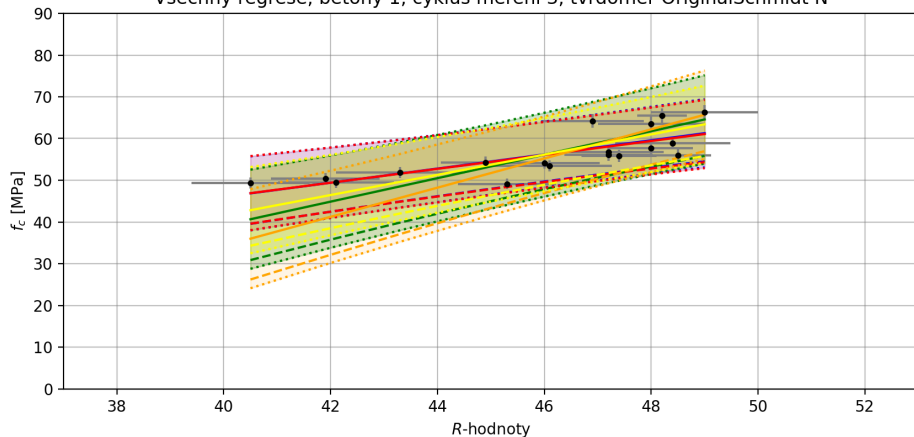
<p>— OLSy ($R^2 = 0.389$): $y = -28.673 + 1.791 \cdot x$</p> <p>— OLSx ($R^2 = 0.389$): $y = -162.023 + 4.603 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 0.987$): $y = -28.583 + 1.783 \cdot x$</p> <p>— WLSx ($R^2 = 0.276$): $y = -221.757 + 5.807 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.55$: $y = -135.302 + 4.04 \cdot x$</p> <p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Všechny regrese, betony 1, cyklus měření 2, tvrdoměr OriginalSchmidt N



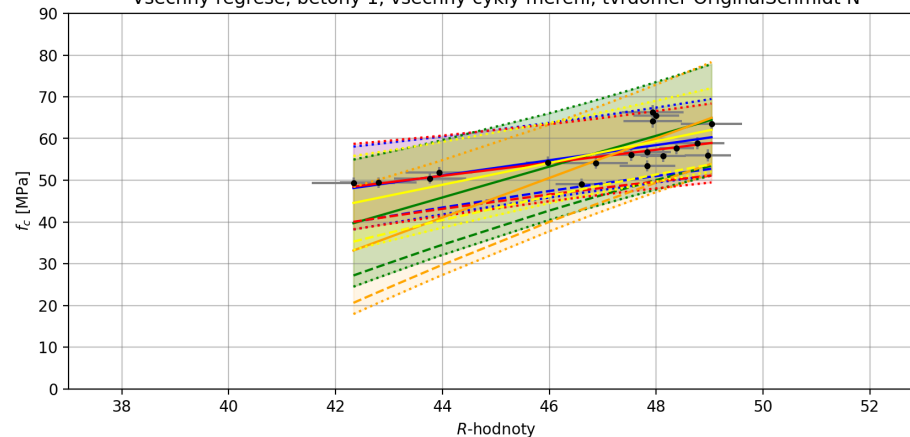
<p>— OLSy ($R^2 = 0.397$): $y = -21.684 + 1.66 \cdot x$</p> <p>— OLSx ($R^2 = 0.397$): $y = -140.323 + 4.186 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 0.985$): $y = -17.386 + 1.559 \cdot x$</p> <p>— WLSx ($R^2 = 0.238$): $y = -259.506 + 6.646 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.39$: $y = -102.876 + 3.388 \cdot x$</p> <p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Všechny regrese, betony 1, cyklus měření 3, tvrdoměr OriginalSchmidt N



<p>— OLSy ($R^2 = 0.602$): $y = -21.783 + 1.695 \cdot x$</p> <p>— OLSx ($R^2 = 0.602$): $y = -73.324 + 2.814 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 0.982$): $y = -20.687 + 1.669 \cdot x$</p> <p>— WLSx ($R^2 = 0.527$): $y = -105.585 + 3.496 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.45$: $y = -55.331 + 2.423 \cdot x$</p> <p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

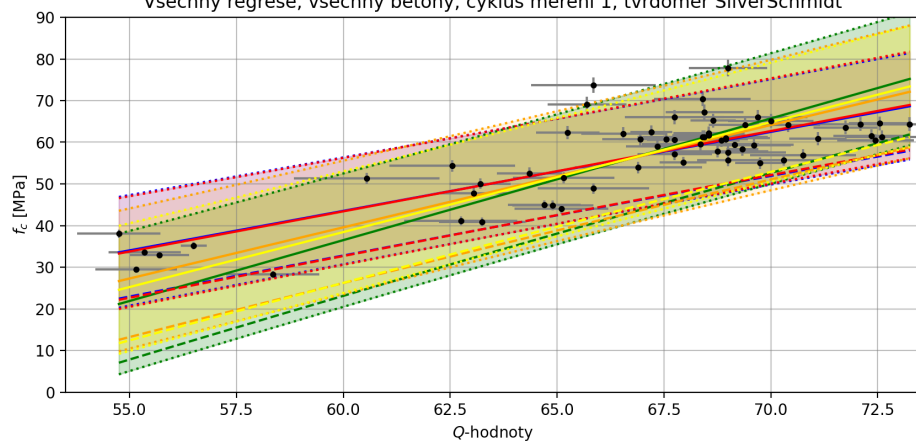
Všechny regrese, betony 1, všechny cykly měření, tvrdoměr OriginalSchmidt N



<p>— OLSy ($R^2 = 0.492$): $y = -28.802 + 1.817 \cdot x$</p> <p>— OLSx ($R^2 = 0.492$): $y = -116.791 + 3.697 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 0.943$): $y = -17.631 + 1.561 \cdot x$</p> <p>— WLSx ($R^2 = 0.38$): $y = -167.749 + 4.746 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.15$: $y = -66.106 + 2.614 \cdot x$</p> <p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

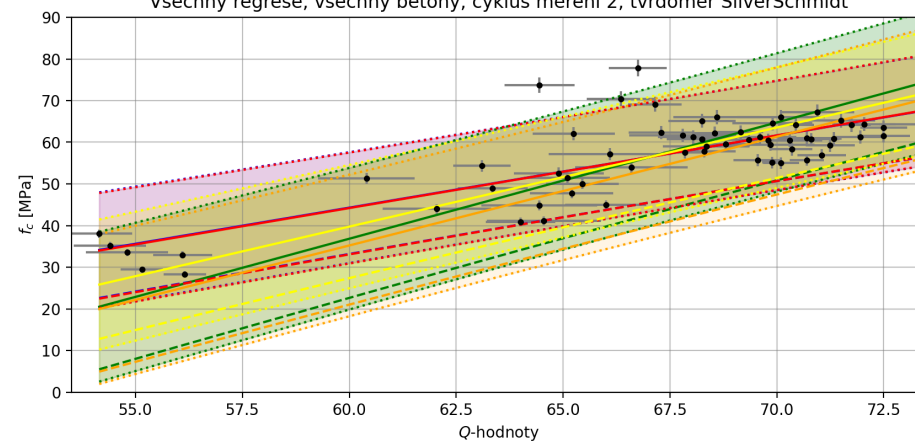
D.1 Všechny betony

Všechny regrese, všechny betony, cyklus měření 1, tvrdoměr SilverSchmidt



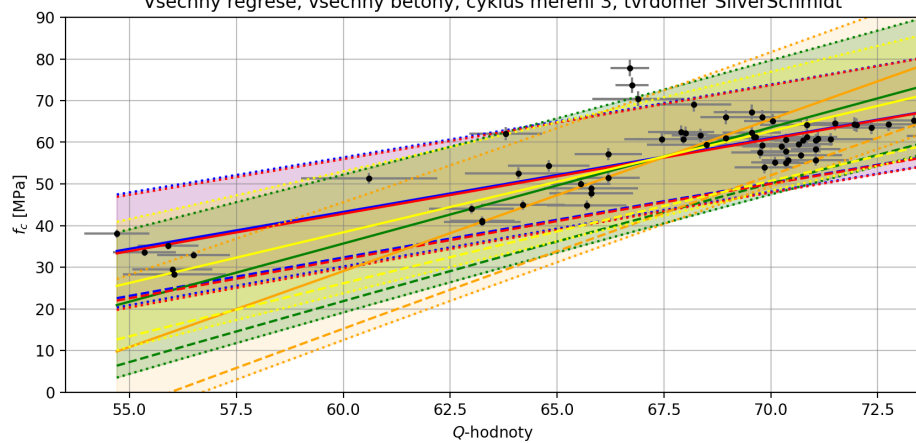
<p>— OLSy ($R^2 = 0.649$): $y = -70.274 + 1.897 \cdot x$</p> <p>— OLSx ($R^2 = 0.649$): $y = -138.813 + 2.922 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 0.963$): $y = -72.294 + 1.928 \cdot x$</p> <p>— WLSx ($R^2 = 0.782$): $y = -107.823 + 2.456 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.53$: $y = -119.928 + 2.639 \cdot x$</p> <p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Všechny regrese, všechny betony, cyklus měření 2, tvrdoměr SilverSchmidt



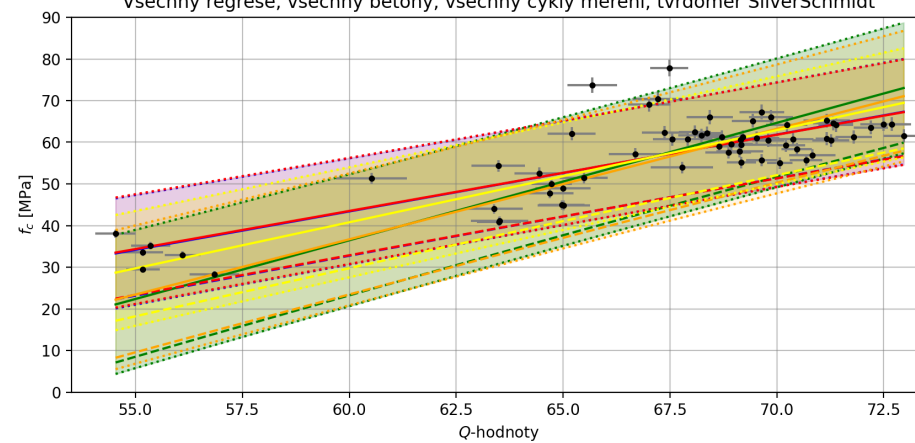
<p>— OLSy ($R^2 = 0.621$): $y = -59.763 + 1.734 \cdot x$</p> <p>— OLSx ($R^2 = 0.621$): $y = -130.678 + 2.792 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 0.984$): $y = -60.496 + 1.745 \cdot x$</p> <p>— WLSx ($R^2 = 0.636$): $y = -121.486 + 2.612 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.38$: $y = -103.006 + 2.379 \cdot x$</p> <p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Všechny regrese, všechny betony, cyklus měření 3, tvrdoměr SilverSchmidt



<p>— OLSy ($R^2 = 0.635$): $y = -63.038 + 1.772 \cdot x$</p> <p>— OLSx ($R^2 = 0.635$): $y = -131.68 + 2.789 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 0.969$): $y = -64.916 + 1.796 \cdot x$</p> <p>— WLSx ($R^2 = 0.432$): $y = -189.712 + 3.646 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.42$: $y = -107.361 + 2.429 \cdot x$</p> <p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

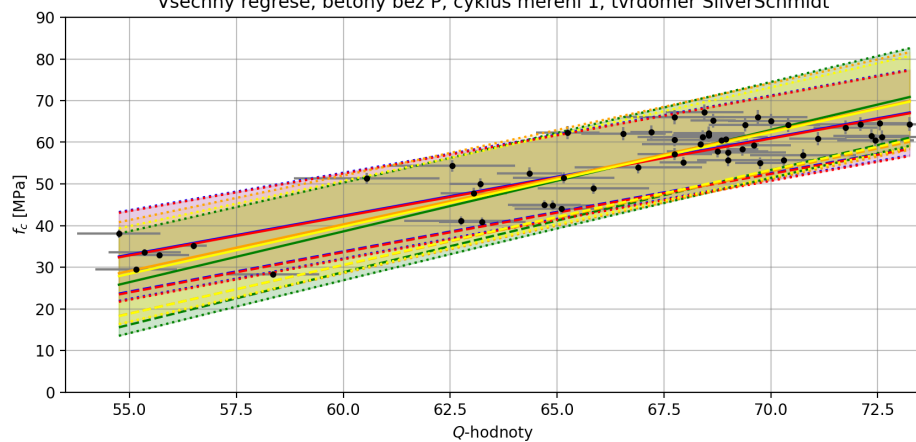
Všechny regrese, všechny betony, všechny cykly měření, tvrdoměr SilverSchmidt



<p>— OLSy ($R^2 = 0.654$): $y = -67.274 + 1.844 \cdot x$</p> <p>— OLSx ($R^2 = 0.654$): $y = -132.682 + 2.819 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 0.991$): $y = -66.288 + 1.83 \cdot x$</p> <p>— WLSx ($R^2 = 0.672$): $y = -122.369 + 2.651 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.15$: $y = -91.928 + 2.212 \cdot x$</p> <p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

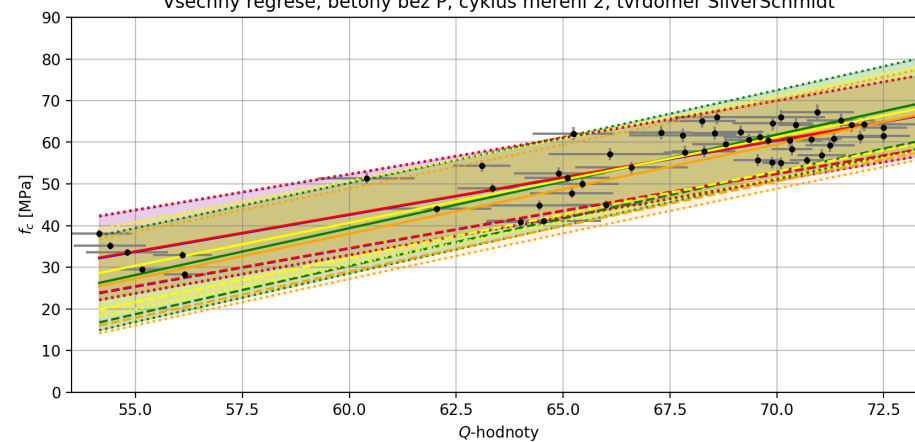
D.2 Betony bez P

Všechny regrese, betony bez P, cyklus měření 1, tvrdoměr SilverSchmidt



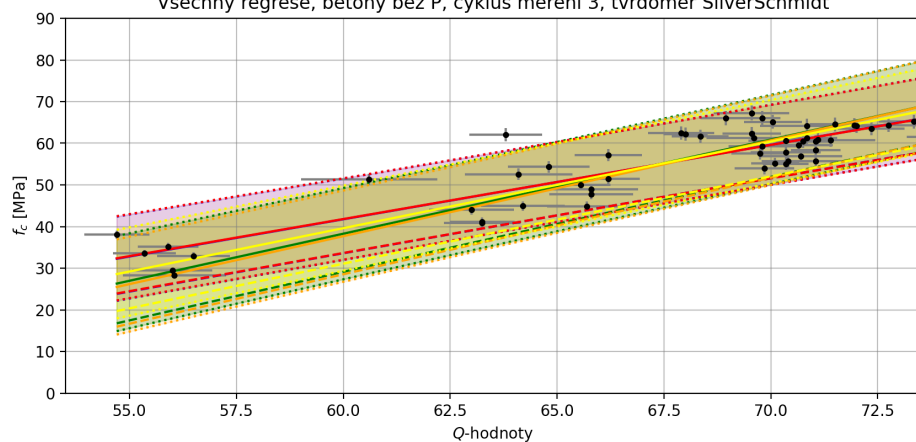
<p>— OLSy ($R^2 = 0.767$): $y = -69.791 + 1.87 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 0.995$): $y = -70.006 + 1.87 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.55$: $y = -96.18 + 2.265 \cdot x$</p>
<p>— OLSx ($R^2 = 0.767$): $y = -107.591 + 2.436 \cdot x$</p>	<p>— WLSx ($R^2 = 0.846$): $y = -93.901 + 2.236 \cdot x$</p>	<p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>

Všechny regrese, betony bez P, cyklus měření 2, tvrdoměr SilverSchmidt



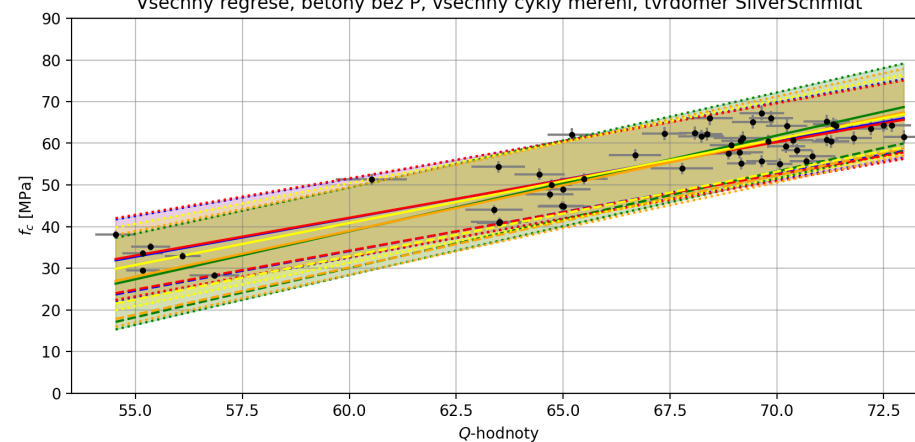
<p>— OLSy ($R^2 = 0.793$): $y = -64.304 + 1.781 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 0.996$): $y = -63.912 + 1.777 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.41$: $y = -82.924 + 2.06 \cdot x$</p>
<p>— OLSx ($R^2 = 0.793$): $y = -95.445 + 2.247 \cdot x$</p>	<p>— WLSx ($R^2 = 0.82$): $y = -90.862 + 2.148 \cdot x$</p>	<p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>

Všechny regrese, betony bez P, cyklus měření 3, tvrdoměr SilverSchmidt



<p>— OLSy ($R^2 = 0.791$): $y = -65.497 + 1.787 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 1.0$): $y = -65.035 + 1.781 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.44$: $y = -85.151 + 2.079 \cdot x$</p>
<p>— OLSx ($R^2 = 0.791$): $y = -97.306 + 2.26 \cdot x$</p>	<p>— WLSx ($R^2 = 0.761$): $y = -100.398 + 2.301 \cdot x$</p>	<p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>

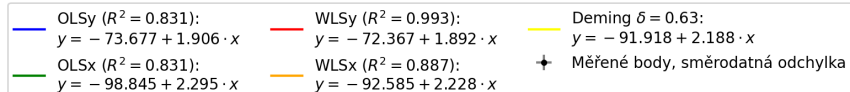
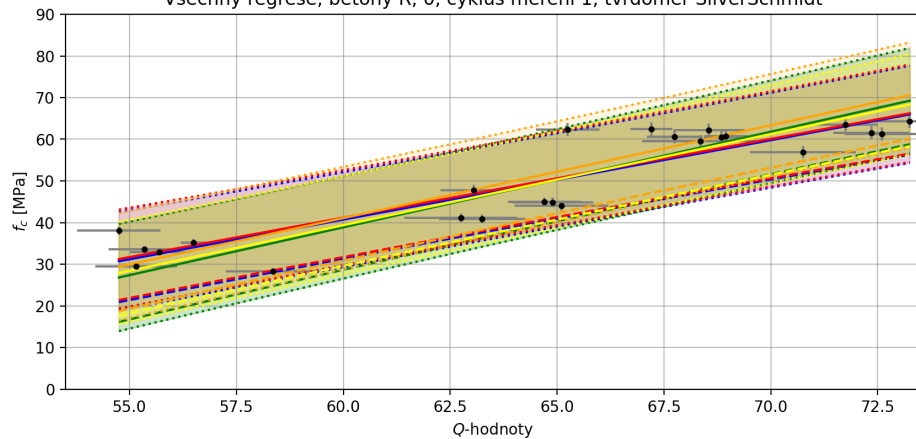
Všechny regrese, betony bez P, všechny cykly měření, tvrdoměr SilverSchmidt



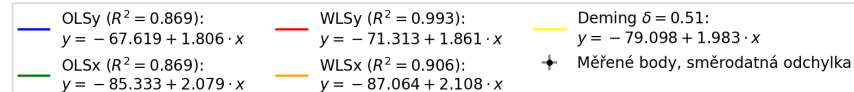
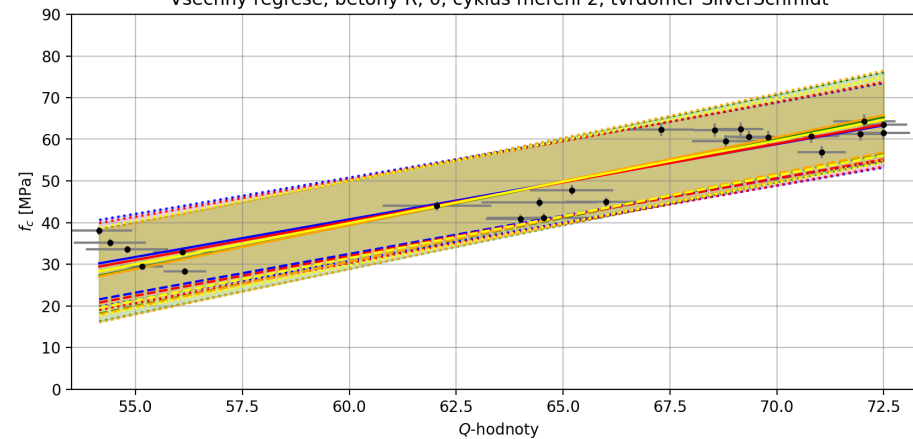
<p>— OLSy ($R^2 = 0.804$): $y = -68.929 + 1.849 \cdot x$</p>	<p>— WLSy ($R^2 = 0.986$): $y = -66.79 + 1.815 \cdot x$</p>	<p>— Deming $\delta = 0.15$: $y = -80.001 + 2.014 \cdot x$</p>
<p>— OLSx ($R^2 = 0.804$): $y = -99.202 + 2.301 \cdot x$</p>	<p>— WLSx ($R^2 = 0.823$): $y = -92.692 + 2.194 \cdot x$</p>	<p>⊕ Měřené body, směrodatná odchylka</p>

D.3 Betony R, 0

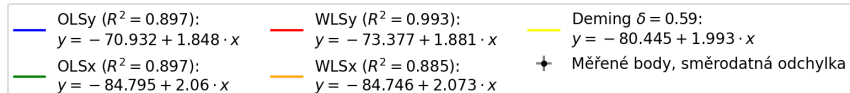
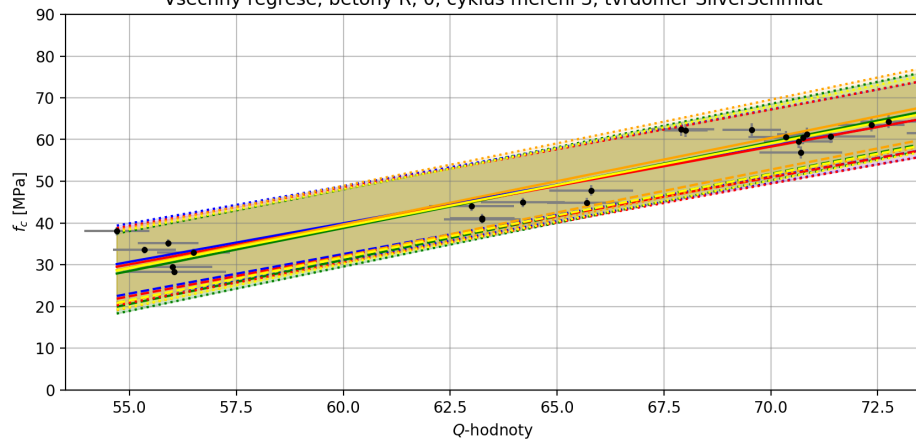
Všechny regrese, betony R, 0, cyklus měření 1, tvrdoměr SilverSchmidt



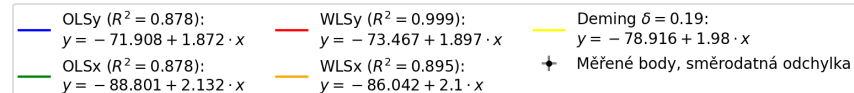
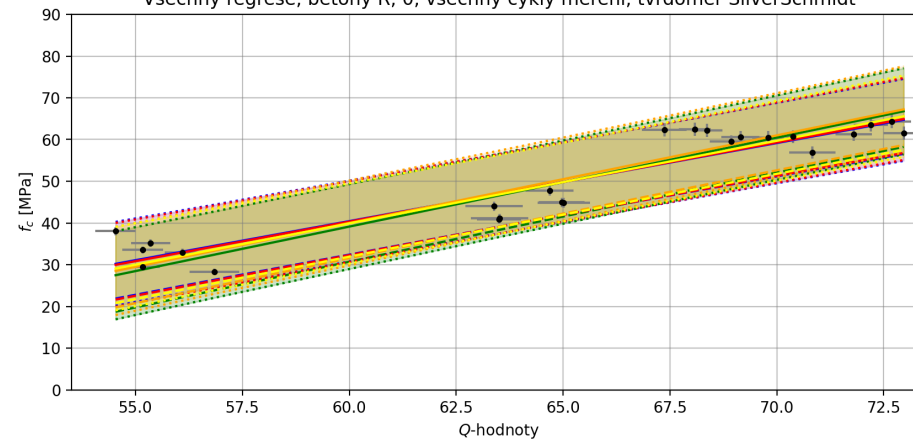
Všechny regrese, betony R, 0, cyklus měření 2, tvrdoměr SilverSchmidt



Všechny regrese, betony R, 0, cyklus měření 3, tvrdoměr SilverSchmidt

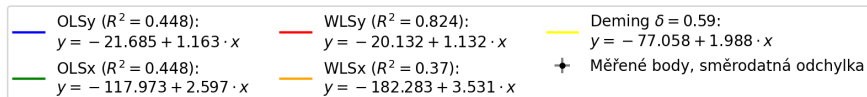
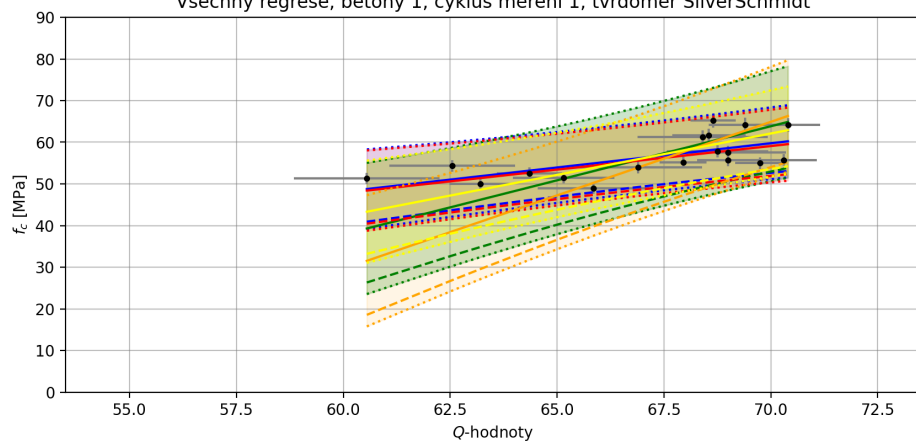


Všechny regrese, betony R, 0, všechny cykly měření, tvrdoměr SilverSchmidt

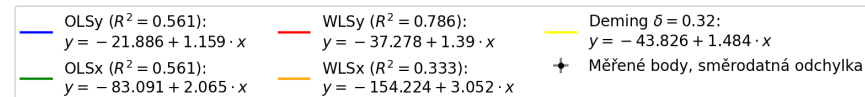
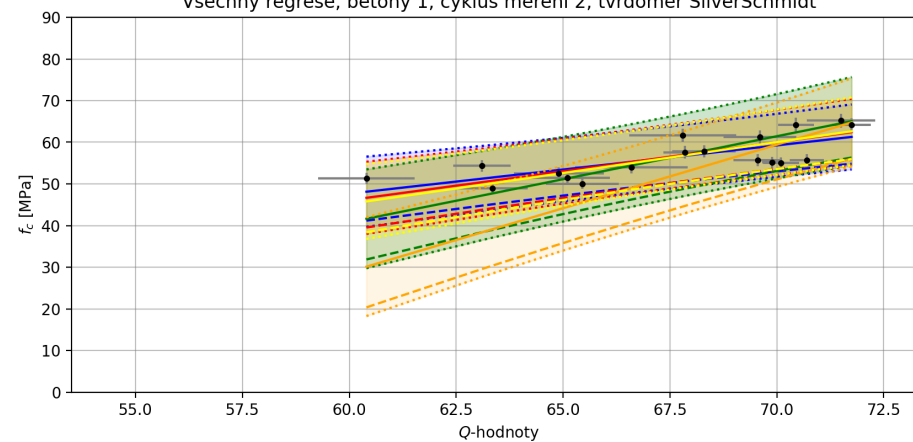


D.4 Betony 1

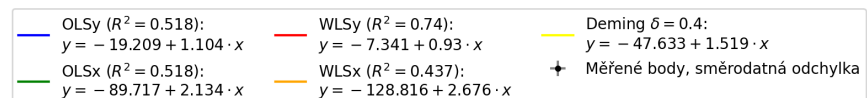
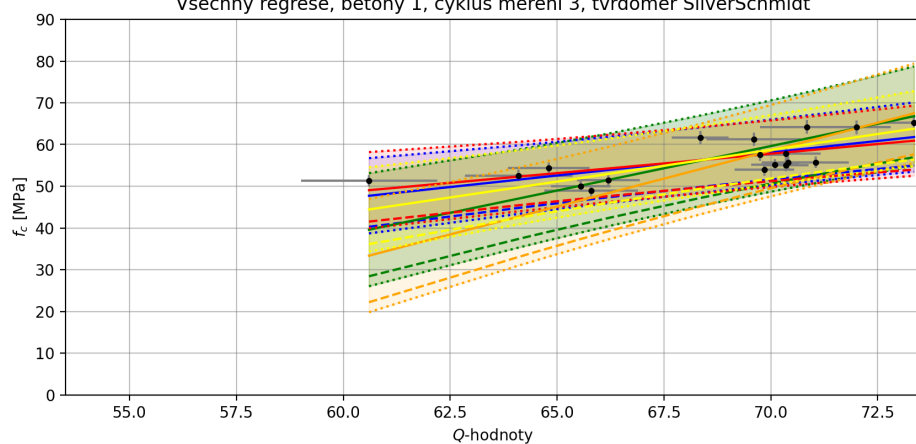
Všechny regrese, betony 1, cyklus měření 1, tvrdoměr SilverSchmidt



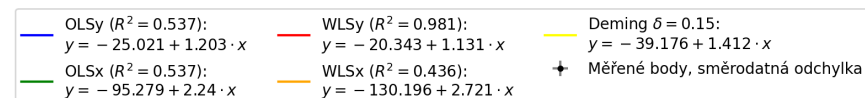
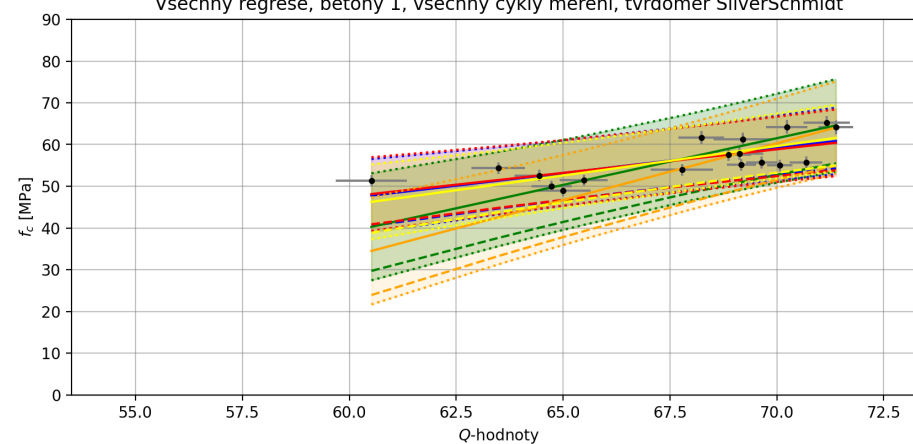
Všechny regrese, betony 1, cyklus měření 2, tvrdoměr SilverSchmidt



Všechny regrese, betony 1, cyklus měření 3, tvrdoměr SilverSchmidt



Všechny regrese, betony 1, všechny cykly měření, tvrdoměr SilverSchmidt



E.1 Beton I

kr.	fc [MPa]	Q (SilverSchmidt L-MP SKANSKA)										Q (SilverSchmidt L-MP VUT)									
K1	11,01	20,5	28	28	28	26	27	27,5	27	25,5	26	27,5	27	29	32	25,5	23,5	22,5	25,5	26	28
K2	10,32	24	28	23	28	25	26	27,5	29,5	25	26	24	22,5	22	22,5	34	23,5	22,5	22	22	25
K3	10,85	27,5	28,5	29	26	24,5	28,5	29	30,5	27,5	24,5	23	26,5	23	28,5	24	26	31,5	23	20,5	25,5
K4	11,79	24	27,5	26	23,5	32	31,5	31,5	31,5	29	26,5	20,5	30,5	30,5	30	24	23	26	31	25,5	27,5
K5	11,67	27	26,5	30	26,5	24,5	22,5	27	29	25,5	27,5	25	23	28,5	23,5	22	30	25,5	24	27,5	26,5
K6	11,82	28,5	26,5	25,5	29,5	25	27,5	26,5	25	23	26,5	22,5	24,5	24	26,5	24,5	27	26	29	26,5	24,5
K10	12,47	30,5	31	25,5	30,5	26	28,5	29	28,5	31	30	28,5	27,5	28	28	37	28	38	33	23	30,5
K11	14,40	29	26	29	30	34,5	29	34	27,5	34	28	30,5	27,5	26,5	26,5	25	28,5	25,5	26	30	31
K12	13,17	27,5	33,5	29,5	28,5	26,5	33	26,5	29	31,5	29	31,5	39	21,5	25	29	30,5	28	24	28,5	24,5
K13	15,32	29	37	30,5	32,5	27	29,5	25,5	26,5	30	31,5	32,5	33	30	26	31,5	27	35,5	27,5	30,5	28,5
K14	14,75	28	26,5	30	30	34	27,5	29,5	34	36,5	28,5	34,5	37	35,5	26	33	27,5	27,5	36	28	33
K15	15,15	33,5	28,5	30	29	29	33,5	28	28	28	28,5	25,5	27,5	29	26	31,5	32	31,5	32,5	27	29,5
K16	17,13	31,5	31	30,5	36	34	25,5	33,5	31,5	36	32	33,5	31,5	40	35	38	31,5	33	37,5	29,5	36
K17	20,03	38	33	40,5	34,5	33	36	36	38,5	34,5	36	41	41	40,5	41,5	36,5	37,5	34,5	36,5	41	36,5
K18	19,83	37	36,5	43,5	34	32	35,5	34,5	35	41,5	31	33	32	36,5	40,5	39,5	37	36,5	40	34,5	37
K19	23,34	45,5	41	48	43	39,5	43,5	42,5	44	44	43	41,5	33	41,5	37,5	41,5	39	41	32,5	42,5	40,5
K20	23,57	39	38,5	41	37	41,5	40	35,5	41,5	40	42	43	38	36	35	37	38,5	43	39,5	41	42
K21	23,33	40	41	44,5	40	36,5	38	42,5	31,5	42,5	38,5	39,5	37	38,5	42,5	40,5	43,5	38,5	40	40,5	40,5
K22	27,31	37	39,5	40,5	41,5	39	43	45,5	45,5	32	48,5	43,5	39,5	40,5	41,5	46,5	39,5	43	39,5	45	42
K23	26,56	47	52	49,5	53	54	48,5	45,5	47	51	48	45,5	44	46,5	48	42,5	47	44	44,5	41,5	43,5
K24	26,21	44,5	44,5	48	43,5	48	46,5	45,5	46	44	42	43,5	41	43,5	41	45,5	46,5	50	45,5	48	45

E.2 Beton II

kr.	fc [MPa]	Q (SilverSchmidt L-MP SKANSKA)										Q (SilverSchmidt L-MP VUT)									
K1	5,32	21	18,5	19,5	21	23	22,5	22	22	21,5	19	15,5	16,5	17	15	19	15	14,5	17,5	14,5	16
K2	5,17	15,5	16	17	23,5	20	16,5	18,5	18,5	22,5	17,5	17	16	14,5	17,5	18,5	19	14	14	17	14,5
K3	5,28	17,5	17	16,5	16	18,5	22	16	17,5	15,5	19	15	17	15	20	16	14,5	15,5	16	14	16
K4	6,06	22,5	20,5	22	19	17,5	17,5	16	20	24	18	18	14,5	14,5	19	14	18	15,5	17	18,5	16
K5	6,40	17	18,5	17	22,5	18,5	17,5	18,5	21	17,5	16,5	23	16	19	15,5	17	18,5	15,5	15	18	17
K6	6,18	20,5	20,5	24,5	25,5	22,5	17,5	17	19,5	20,5	19	17,5	17,5	19	15,5	16,5	18	16,5	18,5	16	15,5
K7	7,41	21,5	20,5	21,5	21,5	24,5	20,5	18,5	22	20,5	20	23	21	21,5	25	24,5	19	21,5	24	21	18,5
K8	6,81	18	18	24,5	25	24,5	26	25	19,5	21	23	20,5	26	19,5	18	23	16	25	19	19	19,5
K9	7,01	23,5	28	21	21,5	24,5	21,5	16,5	17,5	20,5	20,5	20,5	21,5	30	28,5	22	21	20,5	19,5	28	25,5
K10	8,14	26,5	22	23	24	23,5	25	21	20	23,5	22,5	26	24	27,5	21	24,5	22,5	21	22	25	19
K11	8,56	23	23	26,5	23,5	20	22,5	22,5	18	19,5	20	18,5	22,5	19,5	22,5	22,5	19,5	21	20,5	19	21
K12	8,99	24	25,5	25	26	24,5	21,5	23	19,5	21,5	23	22	24,5	21	20	19	20	22	19	21	19
K13	10,58	23	21	19	21	18,5	23,5	22,5	20,5	23	23	22	19,5	21	19	19	20	24,5	24,5	23,5	21,5
K14	9,53	22	23,5	23	24	20	24,5	19	19,5	24	18,5	21,5	21	21,5	21	22,5	19,5	19	22,5	22	24
K15	9,60	23	20,5	20	24	22,5	22,5	25	24,5	22,5	23	22	25	20	16	23	20,5	24	22	24	20,5
K16	11,10	22,5	25	24,5	28	27	25	23	27	25,5	24	27	24	25,5	23	30	23,5	31,5	22	19,5	24,5
K17	10,75	26,5	25,5	28,5	22,5	29,5	25,5	29	28	26,5	27,5	27	27	33,5	24,5	21	31	29	30	23,5	26
K18	11,71	27	29,5	26	25,5	26	25	23,5	26,5	26	28	22	21,5	30	26,5	29,5	32	27,5	28	33,5	28
K19	13,33	25,5	35	31	28,5	31,5	31,5	24	23,5	32,5	32	31,5	25,5	28,5	28,5	33	27,5	30	27,5	29	27,5
K20	14,44	28	25,5	26,5	29	30,5	35	34,5	28	28	30	28,5	26	30	27,5	28	30,5	28	31	30	32

pokračování tabulky na další straně

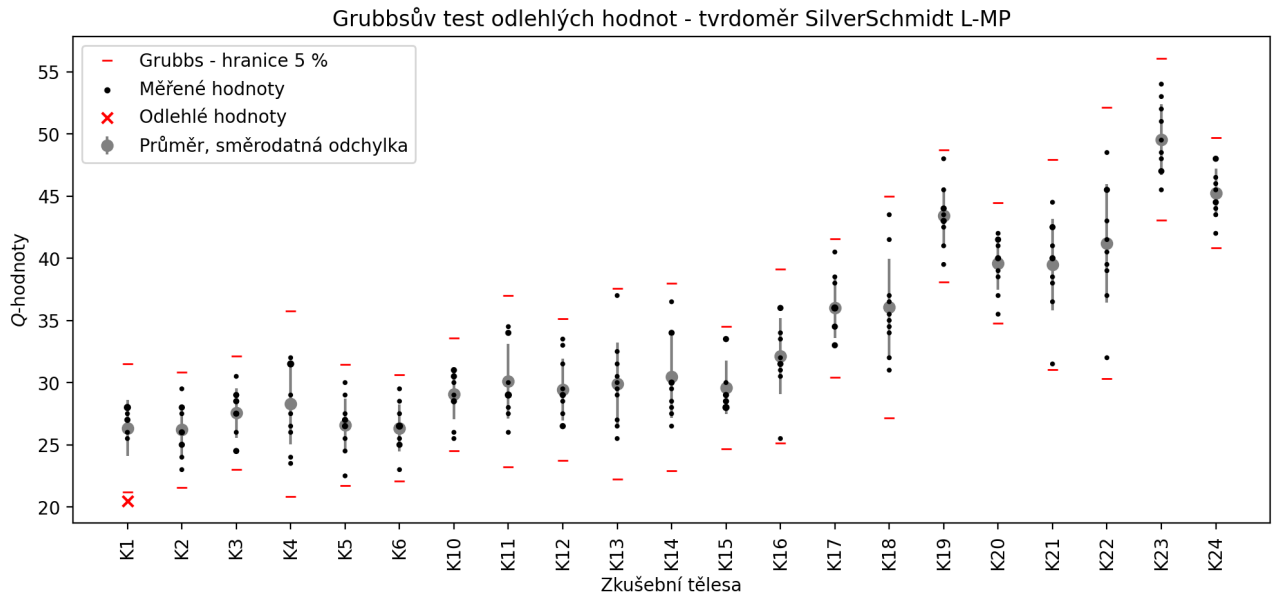
pokračování tabulky z předchozí strany

kr.	f _c [MPa]	Q (SilverSchmidt L-MP SKANSKA)										Q (SilverSchmidt L-MP VUT)										
K21	16,03	28,5	30,5	30,5	26,5	34	30	28,5	29,5	28	29	25,5	25	28,5	27,5	32	33,5	29	29	28,5	28	
K22	14,68	29	32,5	28,5	27	30,5	26	27	30,5	26,5	27	26	28,5	23	30	33	24,5	31	23	29	26	
K23	17,87	36	33	38	37	32,5	35	31	32,5	34,5	30,5	34,5	37,5	33	37,5	36	35	39,5	35	37	27	
K24	17,82	36	34,5	27,5	32,5	34	36	31	29,5	35,5	33	35	29,5	30,5	34	32	32	32	28,5	29	34	
K25	18,40	32	39	35	37,5	33,5	33,5	41,5	34,5	37,5	31	38	32,5	40	37,5	39,5	40	27,5	37	39	35,5	
K26	20,23	35	34,5	42	38,5	37	37,5	34	33,5	39,5	36,5	36,5	39,5	40	38,5	37,5	38	37,5	40,5	37	35,5	
K27	20,17	36	38,5	39	33	36	41	36,5	39	39,5	36	41,5	40	36	36	38	39,5	42	39	38	40	
K28	27,21	39	38	38	40,5	38,5	38	43,5	44,5	38	40,5	43,5	42,5	39	42,5	43	42	41	43,5	44,5	44	
K29	26,70	38,5	43,5	42	40,5	42,5	38	39	39,5	45,5	39,5	44	44,5	44	47,5	43,5	44,5	39,5	41,5	41,5	44	
M1	4,27	14,5	19	16	16	19,5	16	16	14	16	12,5	14,5	12	14,5	15	14,5	13,5	14	16,5	15,5	12,5	
M2	4,24	16,5	18	17,5	17,5	18	13	15,5	18,5	18,5	21	15	15	13,5	14	13,5	14	14,5	13,5	15	15	
K30	42,25	42	48	49	51,5	48	44	49	42	42	46	47	43,5	44	45,5	47,5	44,5	47,5	46	42	44,5	
K31	42,45	43	47	45,5	45,5	48	40,5	46	47	52	49,5	47	47,5	45	49	45,5	47	45,5	45,5	48	47	
K32	40,39	40	46,5	51,5	44	47	51,5	51	45,5	44	43	50	46	46	45,5	49,5	46,5	47	44	44,5	43	

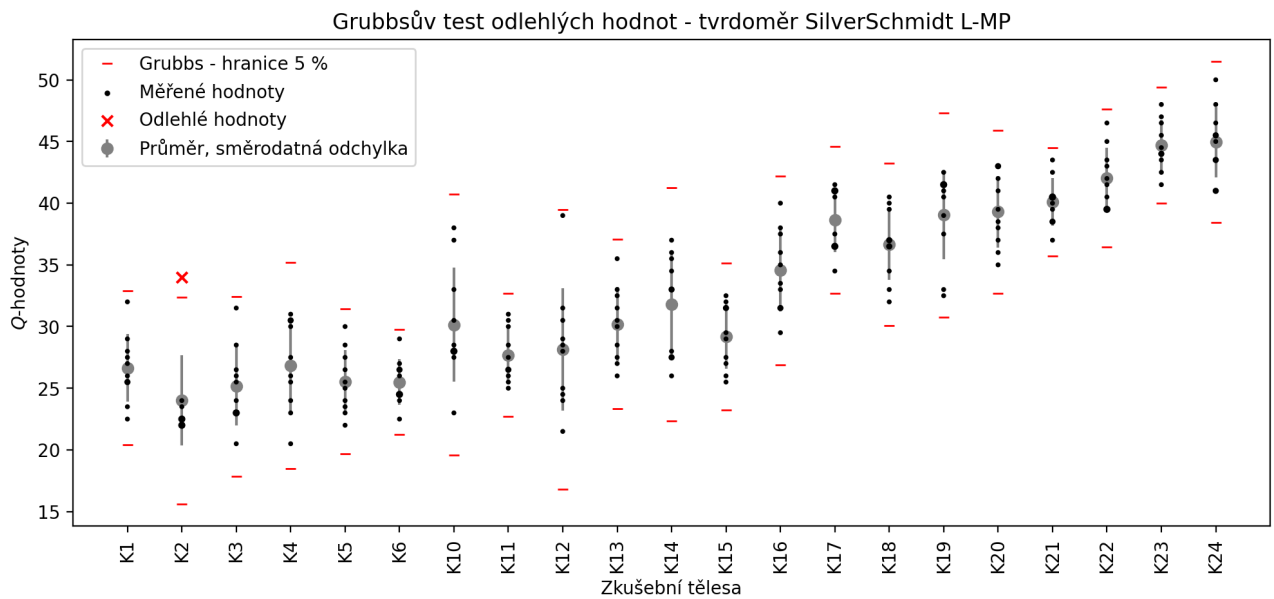
E.3 Beton III

kr.	stáří [dny]	fc [MPa]	R (Original Schmidt N)										Q (SilverSchmidt N)									
K1	2	31,61	28	25	22	30	30	28	28	26	27	23	35,5	36,5	35	37	38	36,5	44,5	39	42,5	38
K2	2	29,57	23	23	22	26	23	29	30	27	26	26	36,5	39	30,5	40	37	40,5	39	42,5	38	37,5
K3	2	29,91	21	22	23	24	24	24	25	22	20	23	33,5	38	34	40,5	36	38,5	36,5	36	37	34,5
K4	3	40,76	23	27	25	29	29	28	31	32	28	25	37	37	37,5	37,5	39,5	43	44	43	41	39,5
K5	3	39,42	24	26	26	29	25	30	29	27	36	23	32	34	39	40	37	44	40,5	40,5	35,5	40,5
K6	3	38,71	20	26	26	30	30	30	30	25	26	25	37,5	37,5	33,5	42,5	43	42	41	38	41	34,5
K7	7	54,40	25	27	28	31	29	29	33	29	31	30	46,5	42	42,5	47,5	48	51,5	50	47,5	48	45,5
K8	7	44,46	24	27	27	27	31	33	29	30	33	34	43	45,5	40,5	49,5	50	50,5	47	52,5	49	49,5
K9	7	50,19	24	28	26	31	29	31	34	31	34	28	46	48	45,5	45,5	45,5	48,5	54	54,5	52	45
K10	14	61,48	28	29	28	32	31	34	36	33	32	33	44,5	42,5	46,5	53	53,5	52,5	53	50	55	49,5
K11	14	60,10	26	26	25	33	31	36	34	30	35	31	43,5	44,5	47	55,5	49	54	55	49	53	55,5
K12	14	55,04	27	30	26	36	30	37	30	37	33	32	49	52	50	53	47	53,5	45,5	50,5	47	46
K13	28	64,61	36	36	33	38	38	36	39	38	34	35	54,5	50	51,5	57	52	53,5	53	57,5	54	54,5
K14	28	68,53	35	31	36	35	39	42	42	42	40	36	50,5	50,5	49,5	59	57,5	61	54,5	53,5	57	53,5
K15	28	60,92	32	33	30	38	38	40	38	35	35	33	53	50	57	53,5	52,5	53,5	54,5	57	55	52,5
K16	90	75,61	30	31	31	38	40	40	39	40	41	36	55	56	51,5	56,5	59	60	62,5	61,5	61	60
K17	90	73,22	33	38	33	44	42	44	44	40	43	43	50	49	55,5	46	57	57,5	59	55,5	60	59,5
K18	90	72,21	41	39	31	43	44	39	42	37	44	41	45,5	49	51	54,5	53,5	56	55	51	58	60

F.1 Beton I

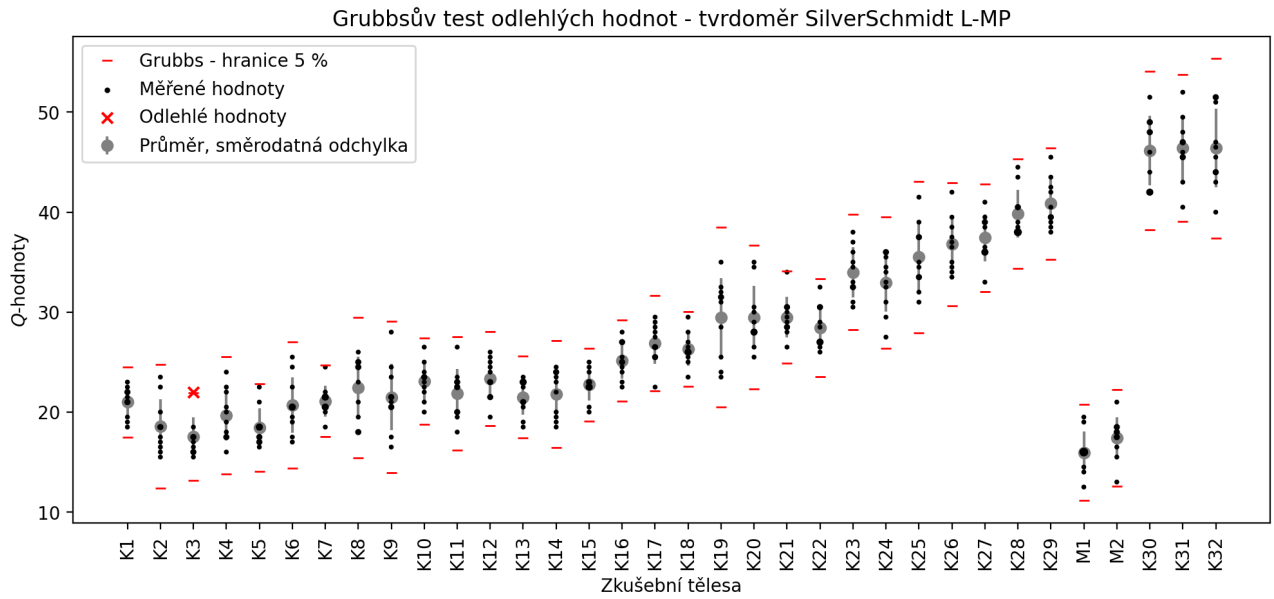


Obr. 30: Data 2: Grubbsův test odlehlých hodnot pro beton I, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).

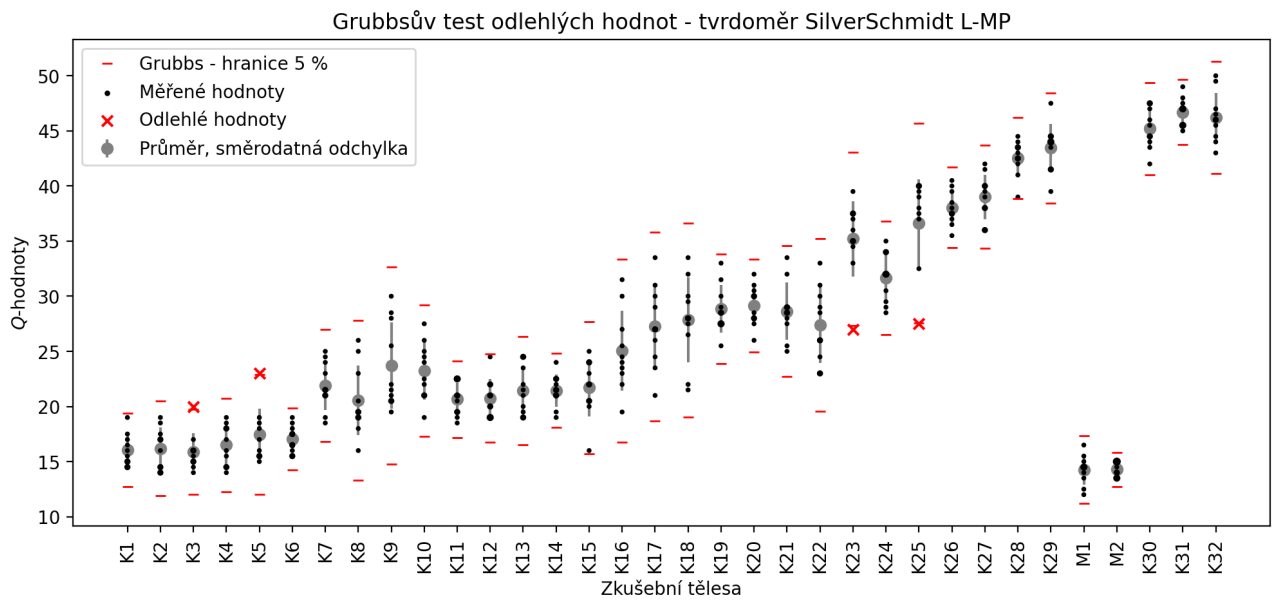


Obr. 31: Data 2: Grubbsův test odlehlých hodnot pro beton I, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (VUT).

F.2 Beton II

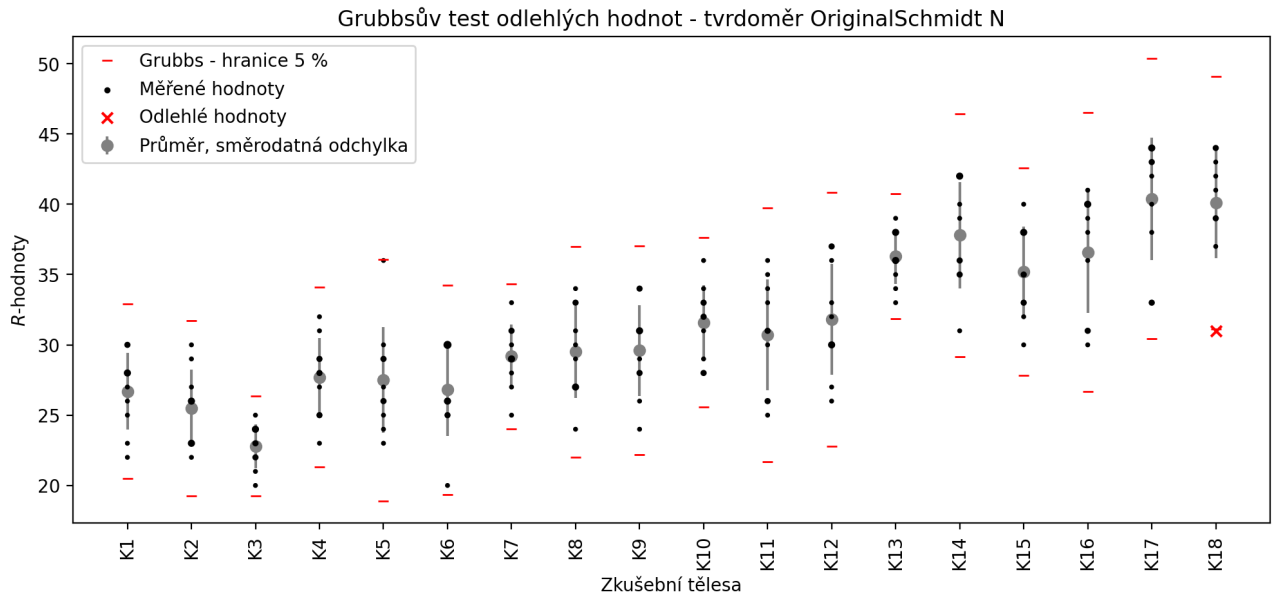


Obr. 32: Data 2: Grubbsův test odlehlých hodnot pro beton II, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).

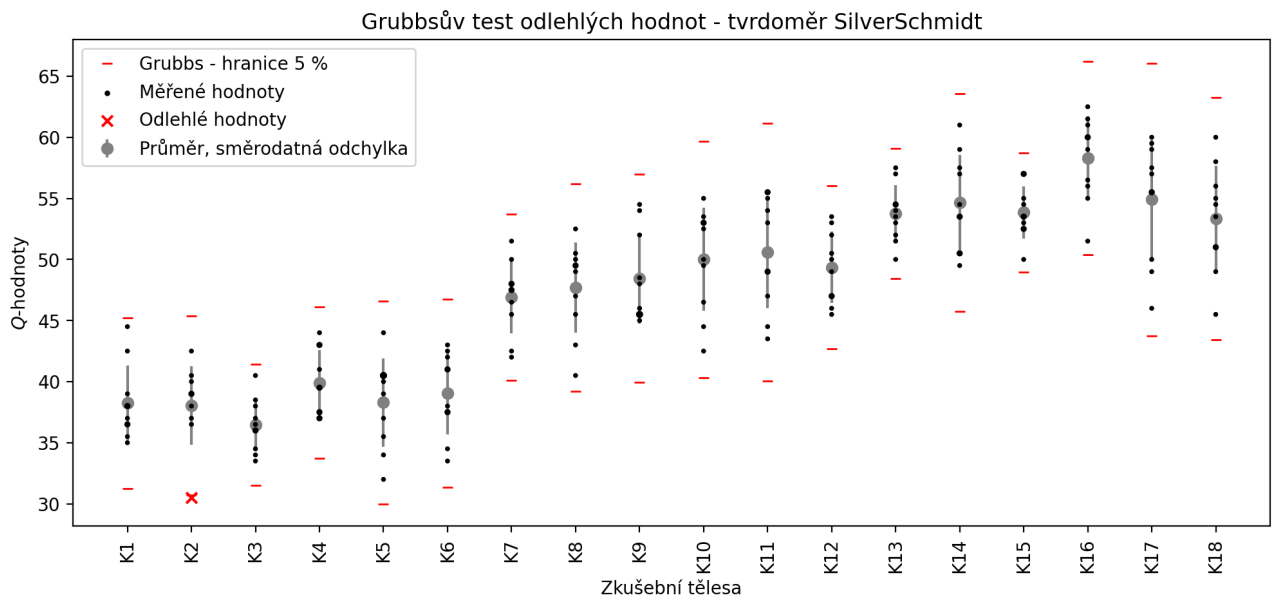


Obr. 33: Data 2: Grubbsův test odlehlých hodnot pro beton II, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (VUT).

F.3 Beton III

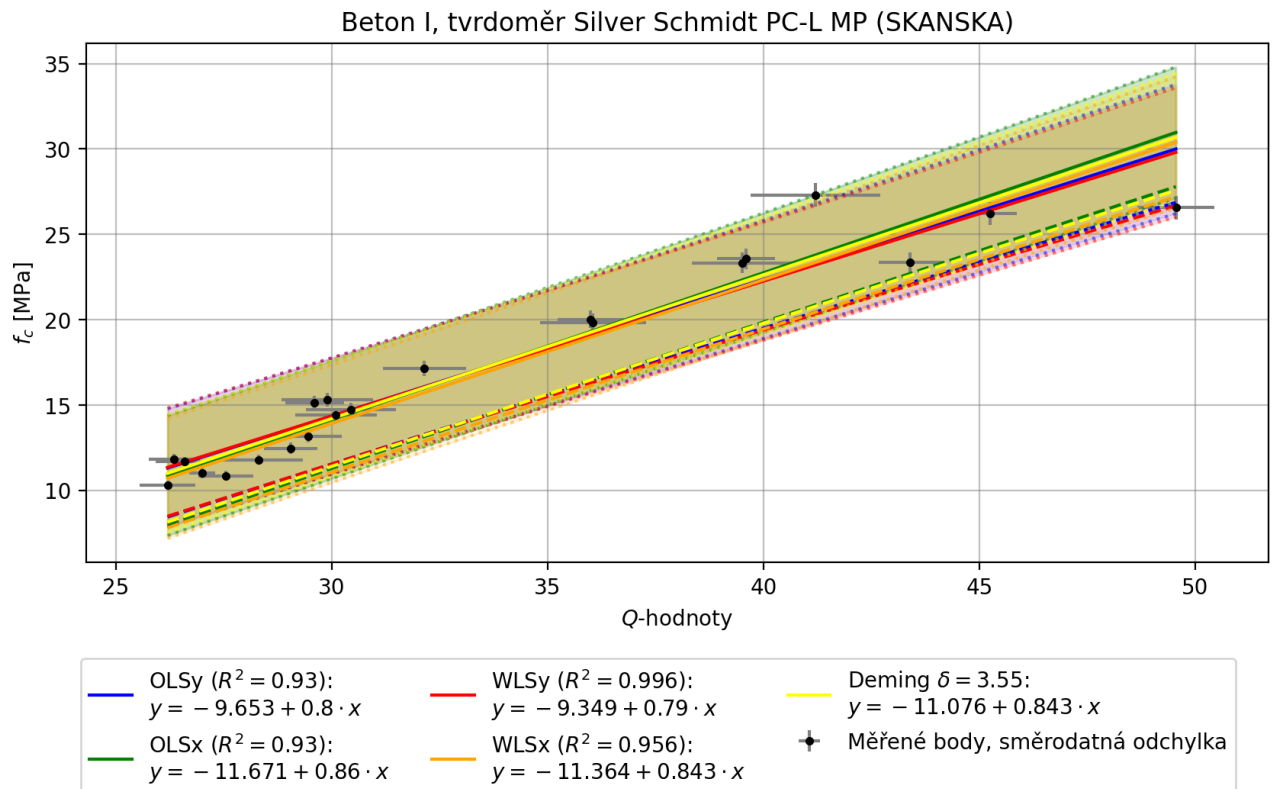


Obr. 34: Data 2: Grubbsův test odlehlých hodnot pro beton III, tvrdoměr Original Schmidt N.

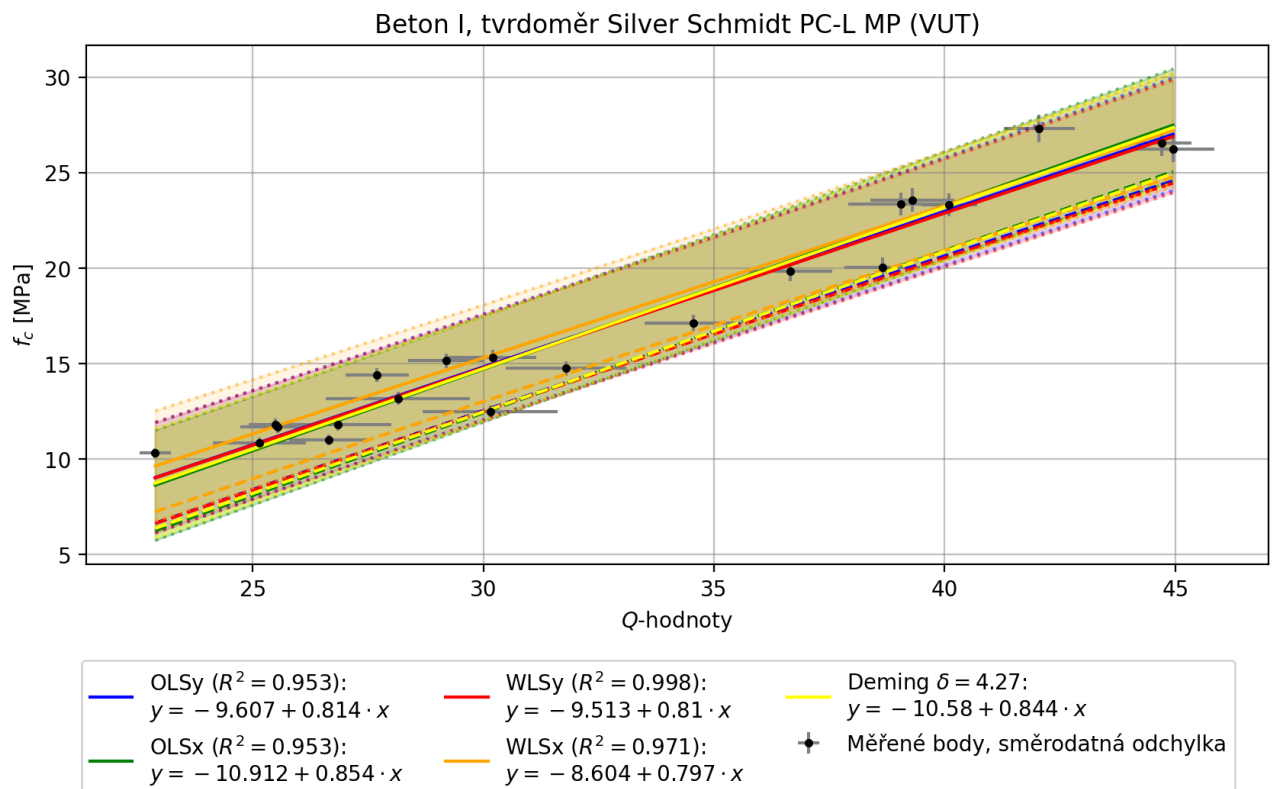


Obr. 35: Data 2: Grubbsův test odlehlých hodnot pro beton III, tvrdoměr SilverSchmidt N.

G.1 Beton I

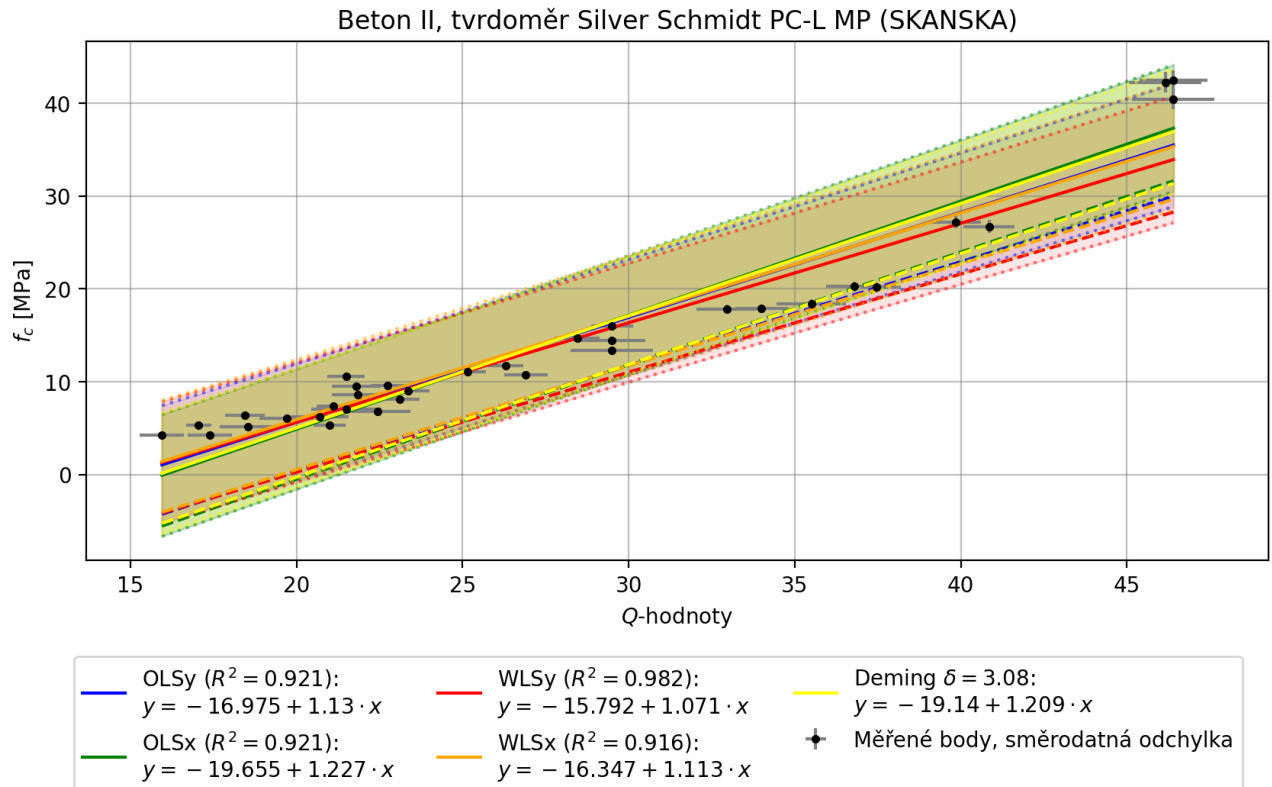


Obr. 36: Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton I, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).

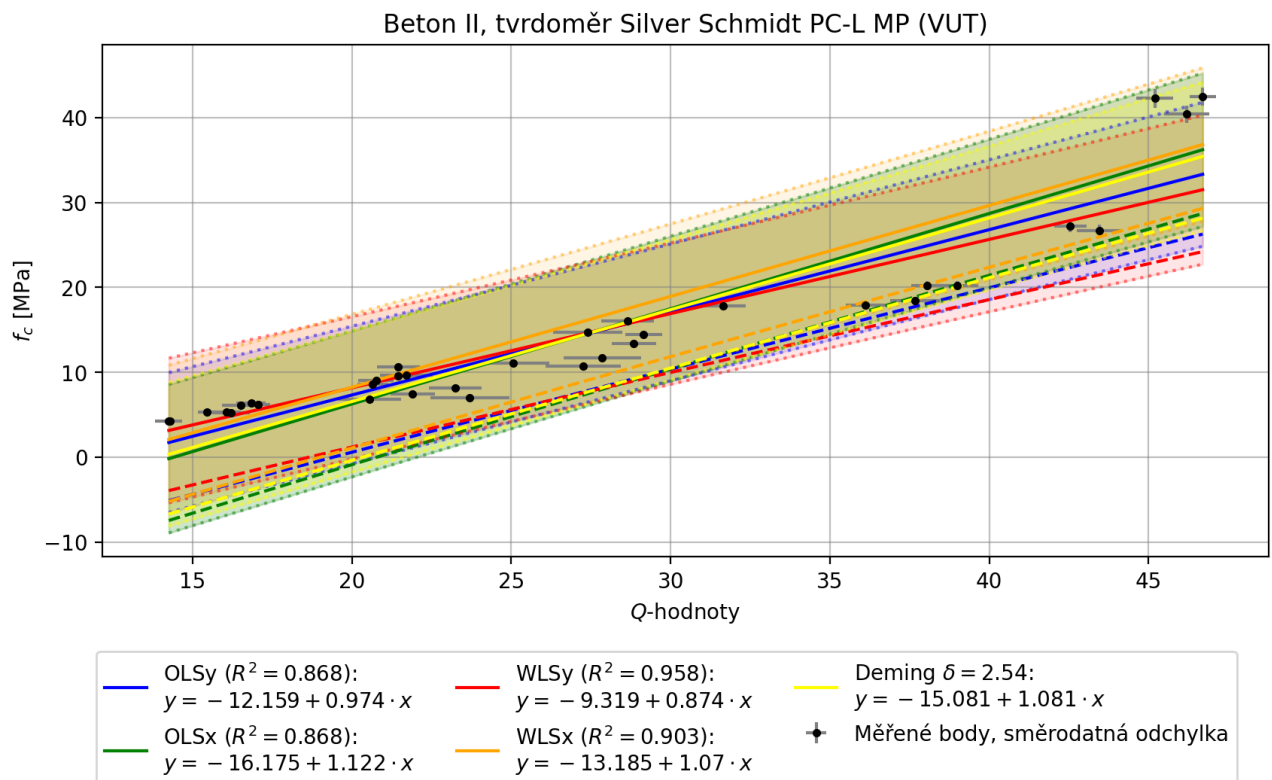


Obr. 37: Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton I, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (VUT).

G.2 Beton II

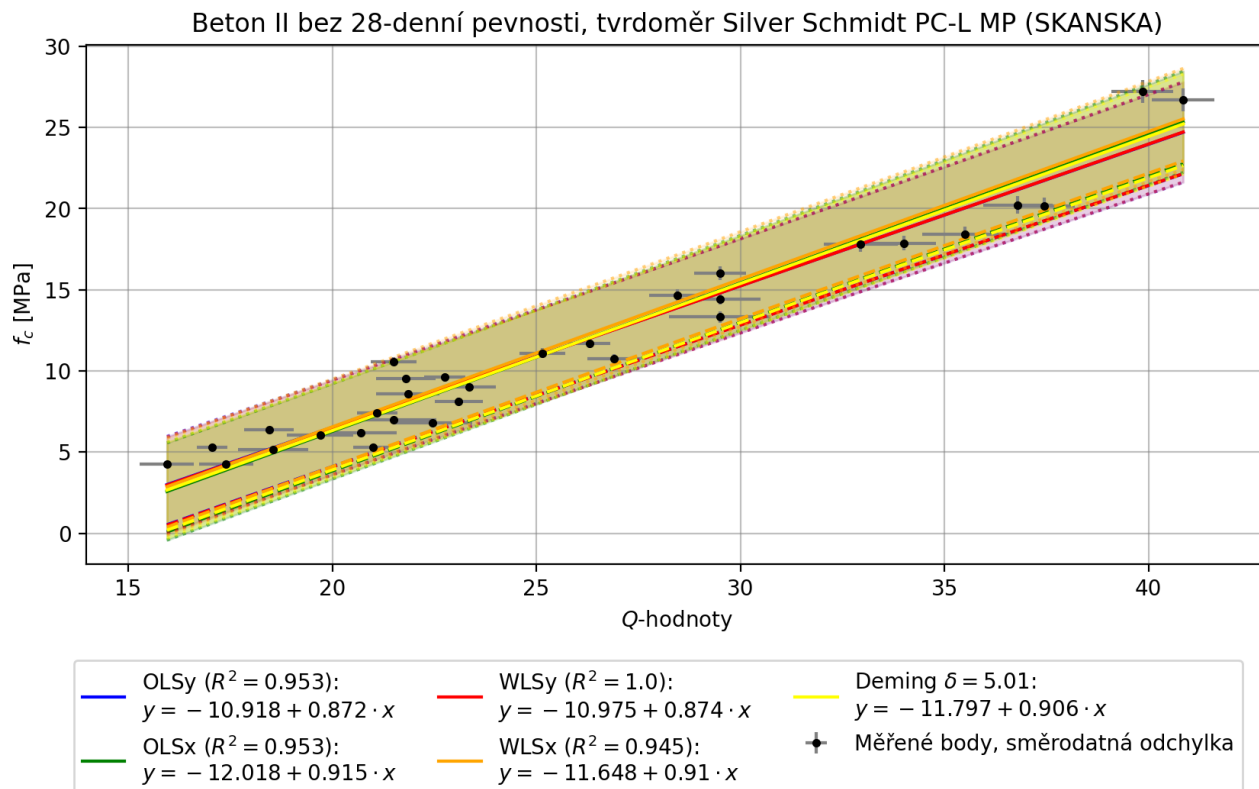


Obr. 38: Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton II, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).

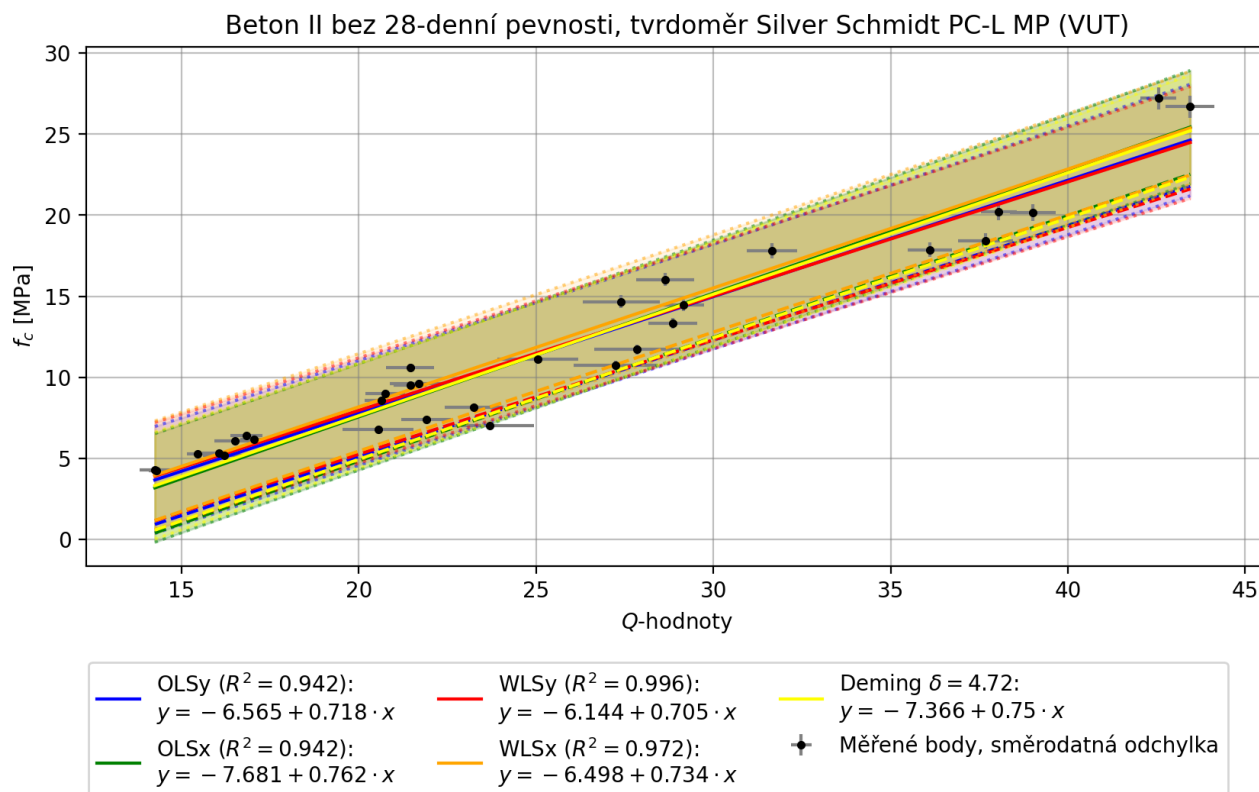


Obr. 39: Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton II, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (VUT).

G.3 Beton II bez 28-denní pevnosti

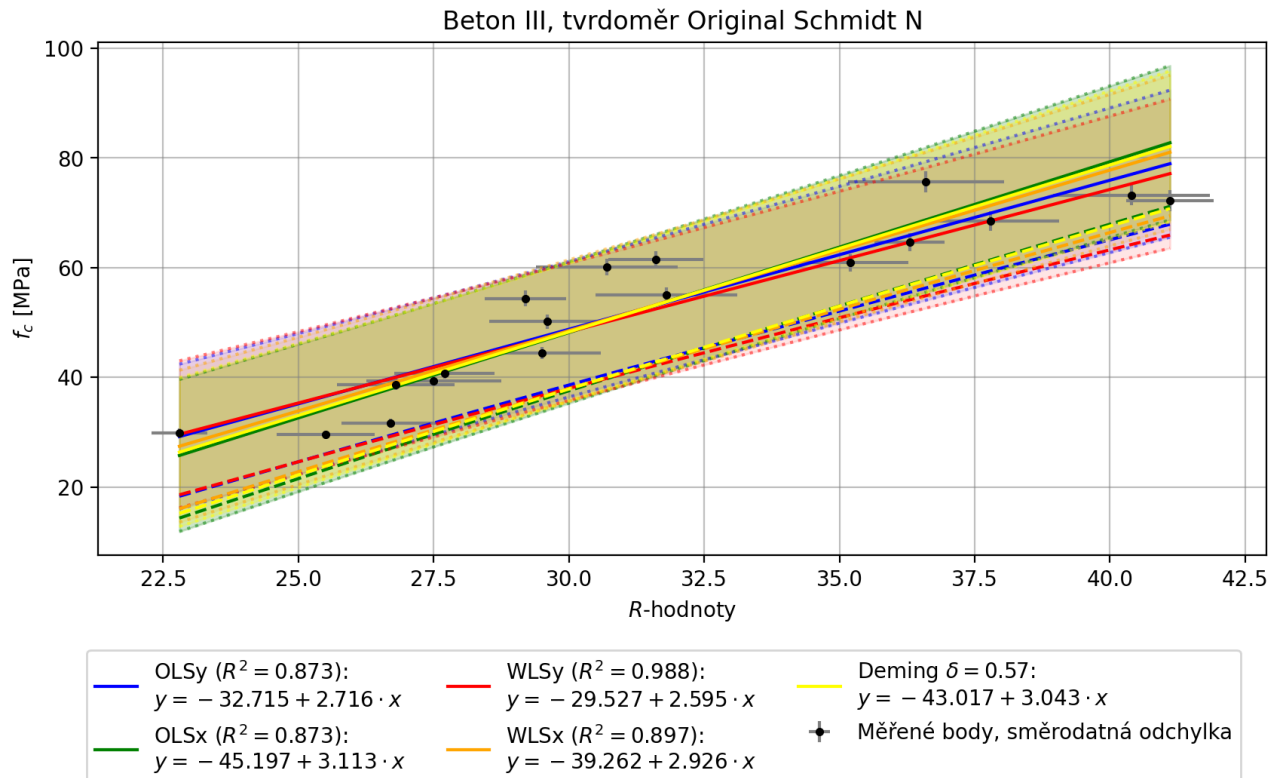


Obr. 40: Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton II s vyřazením 28-denní pevnosti, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).

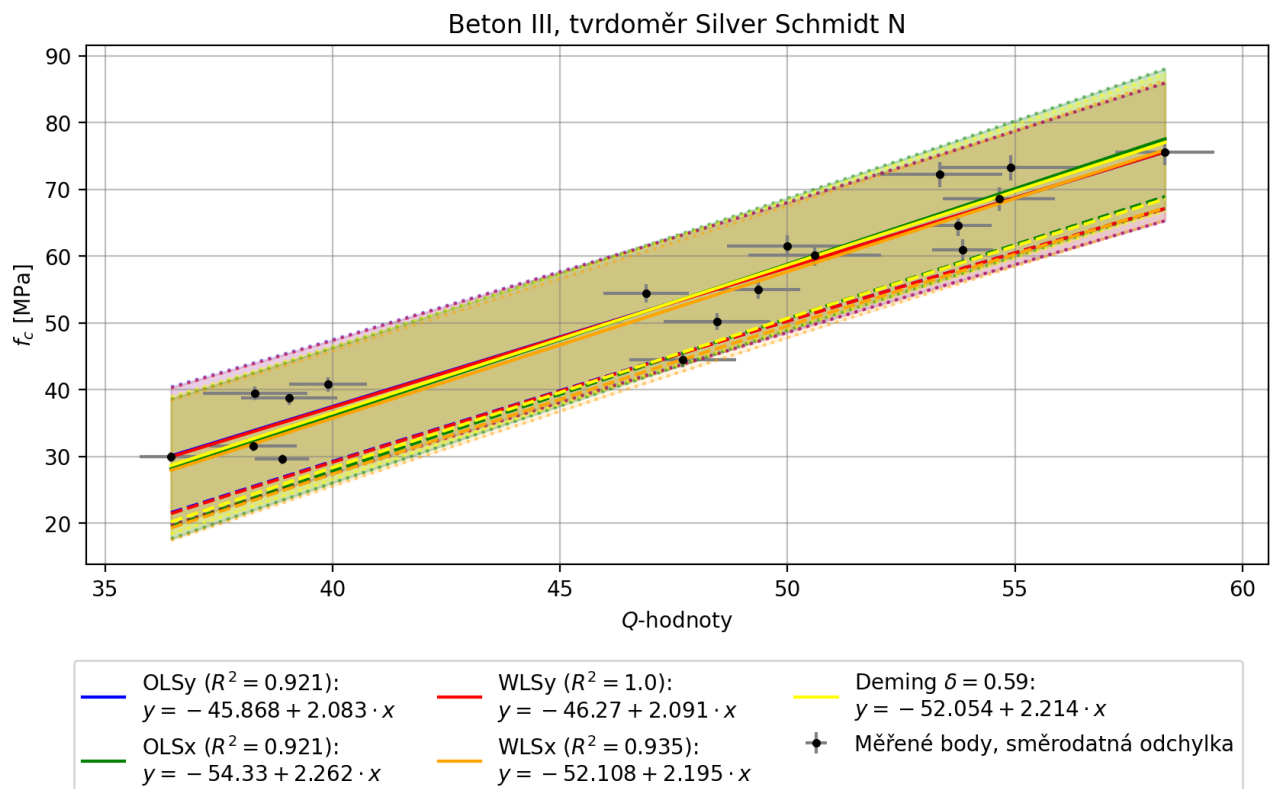


Obr. 41: Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton II s vyřazením 28-denní pevnosti, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).

G.4 Beton III

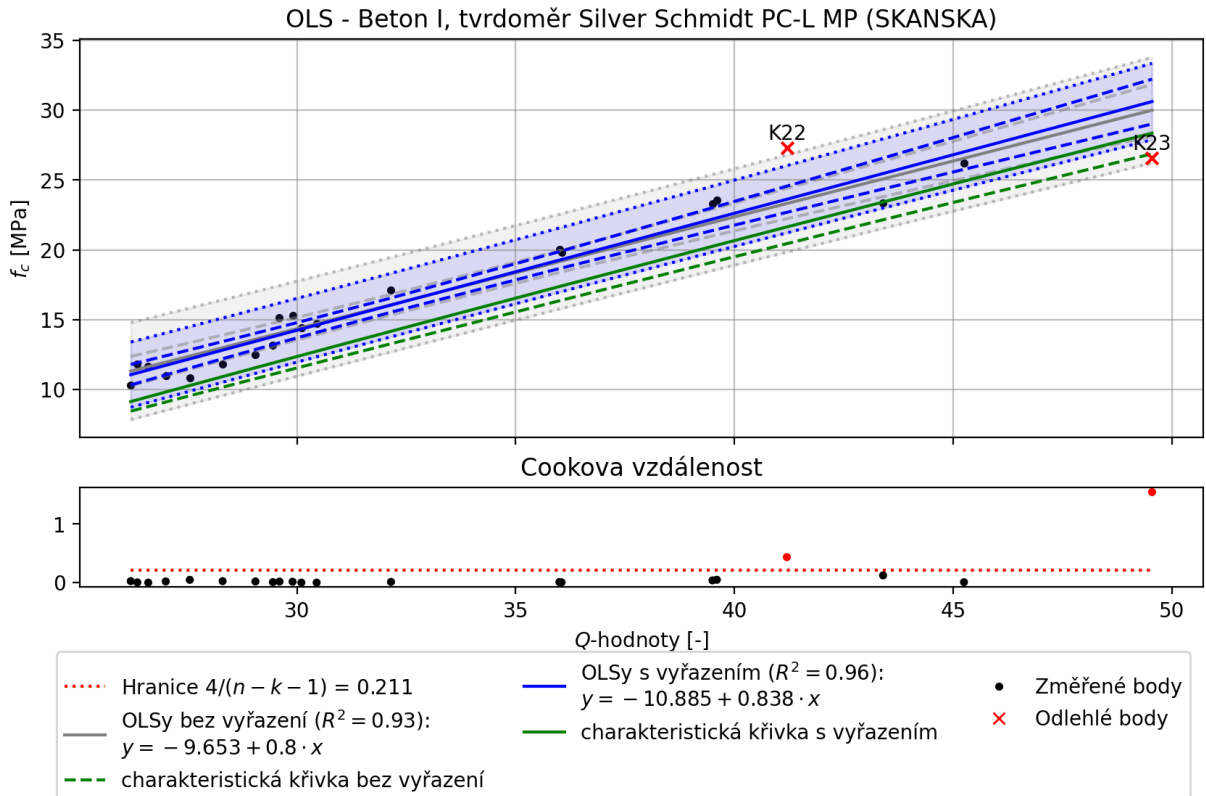


Obr. 42: Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton III, tvrdoměr Original Schmidt N.)

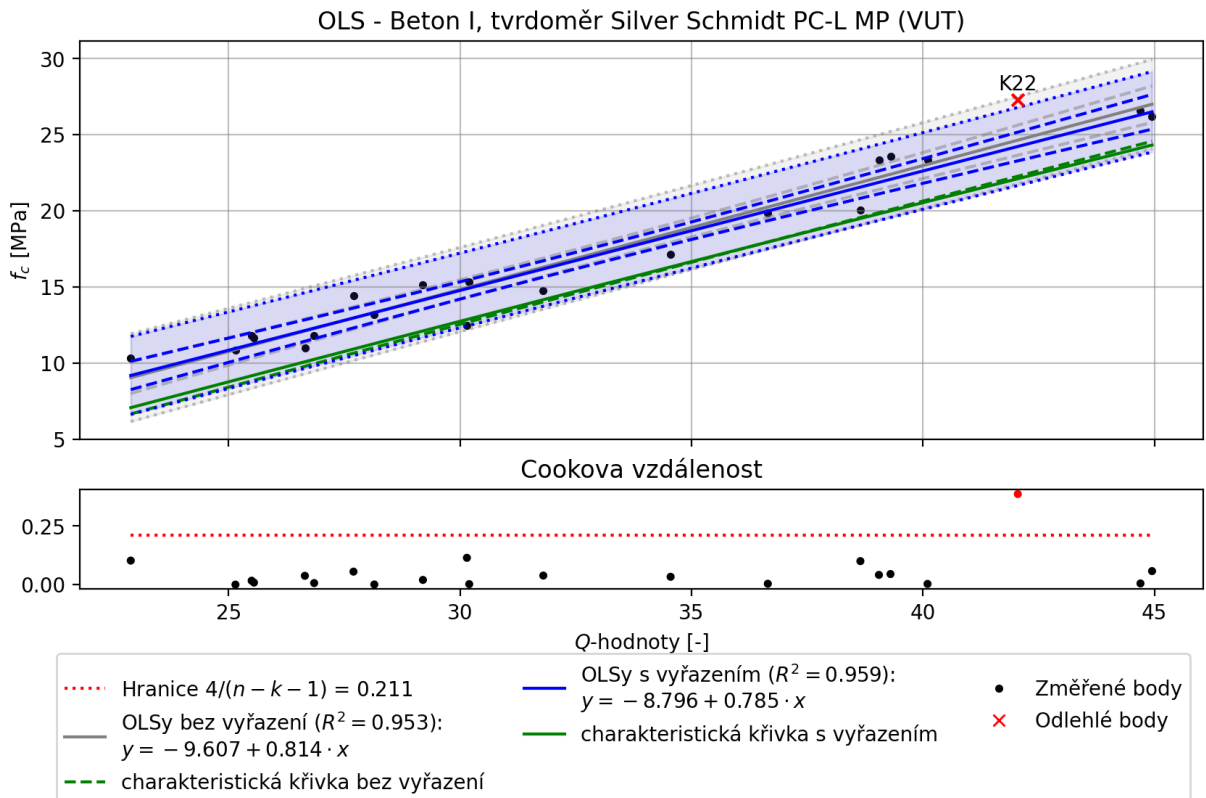


Obr. 43: Data 2: výsledné regresní křivky a spolehlivostní pásy pro beton III, tvrdoměr SilverSchmidt N.

H.1 Beton I

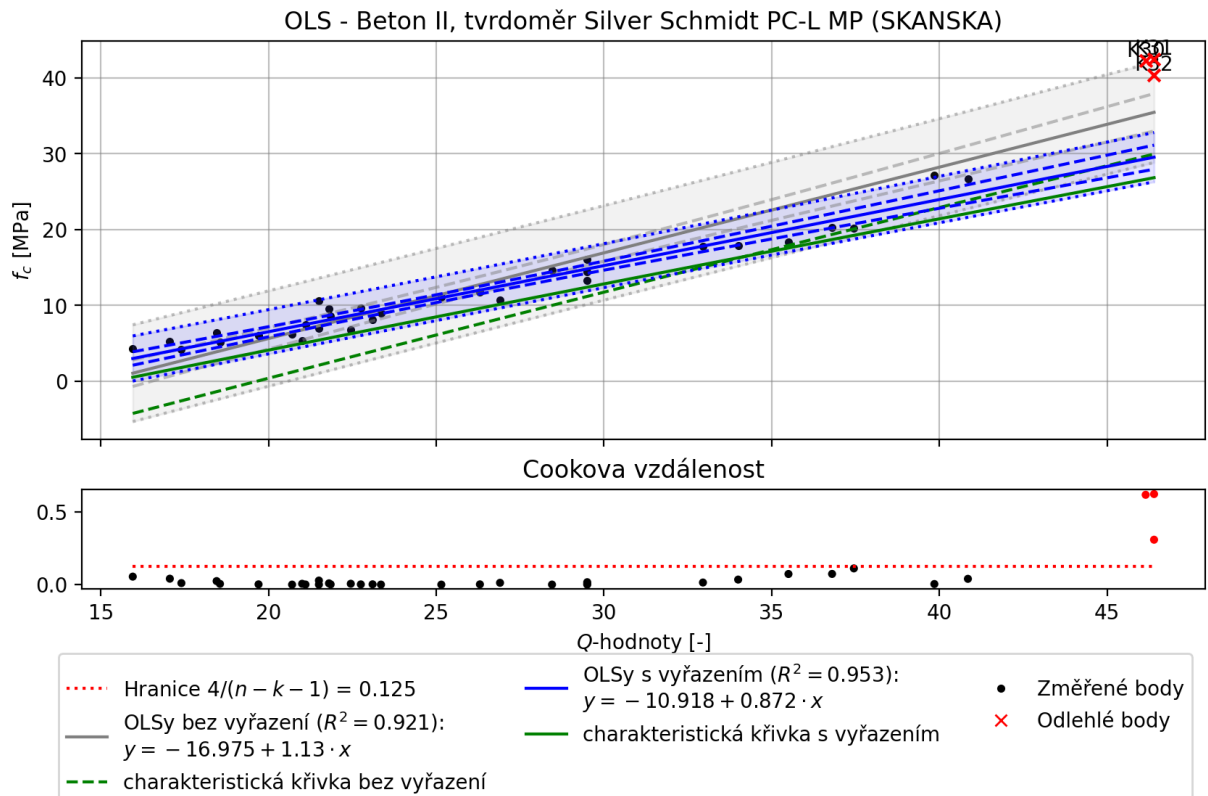


Obr. 44: Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton I, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).

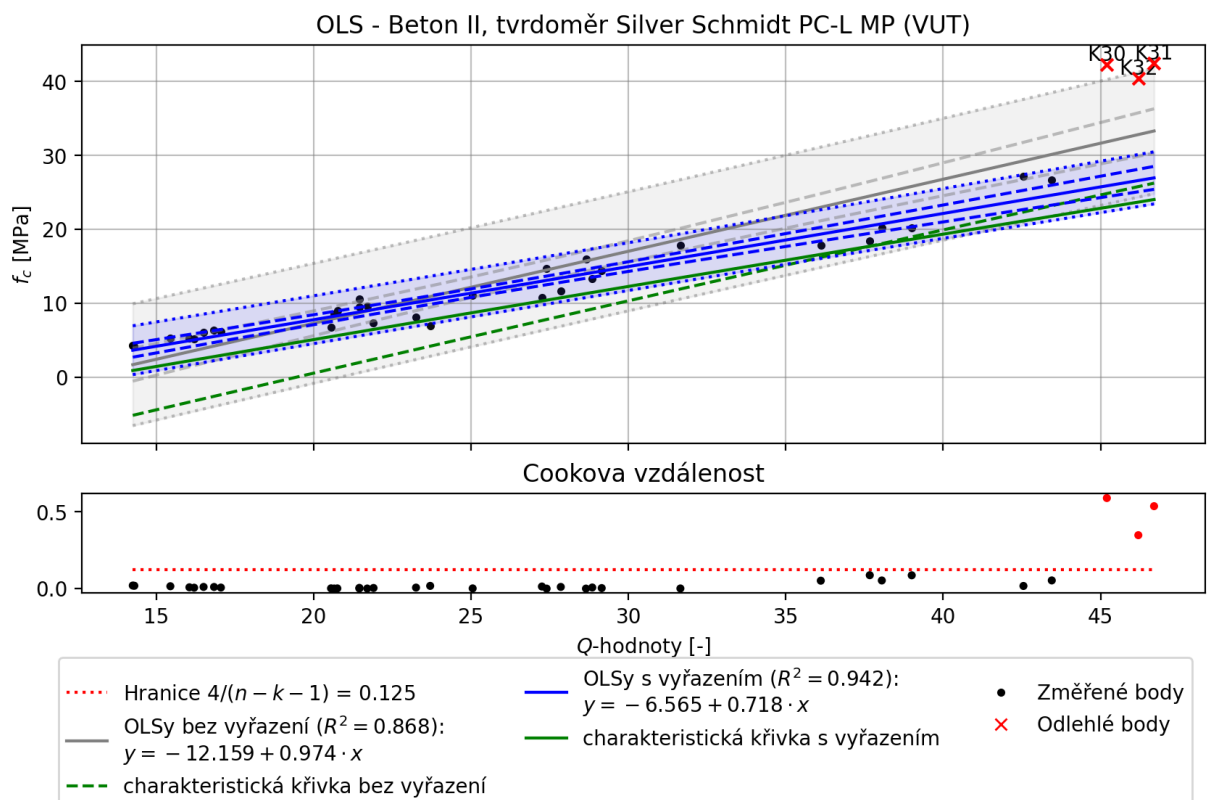


Obr. 45: Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton I, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (VUT).

H.2 Beton II

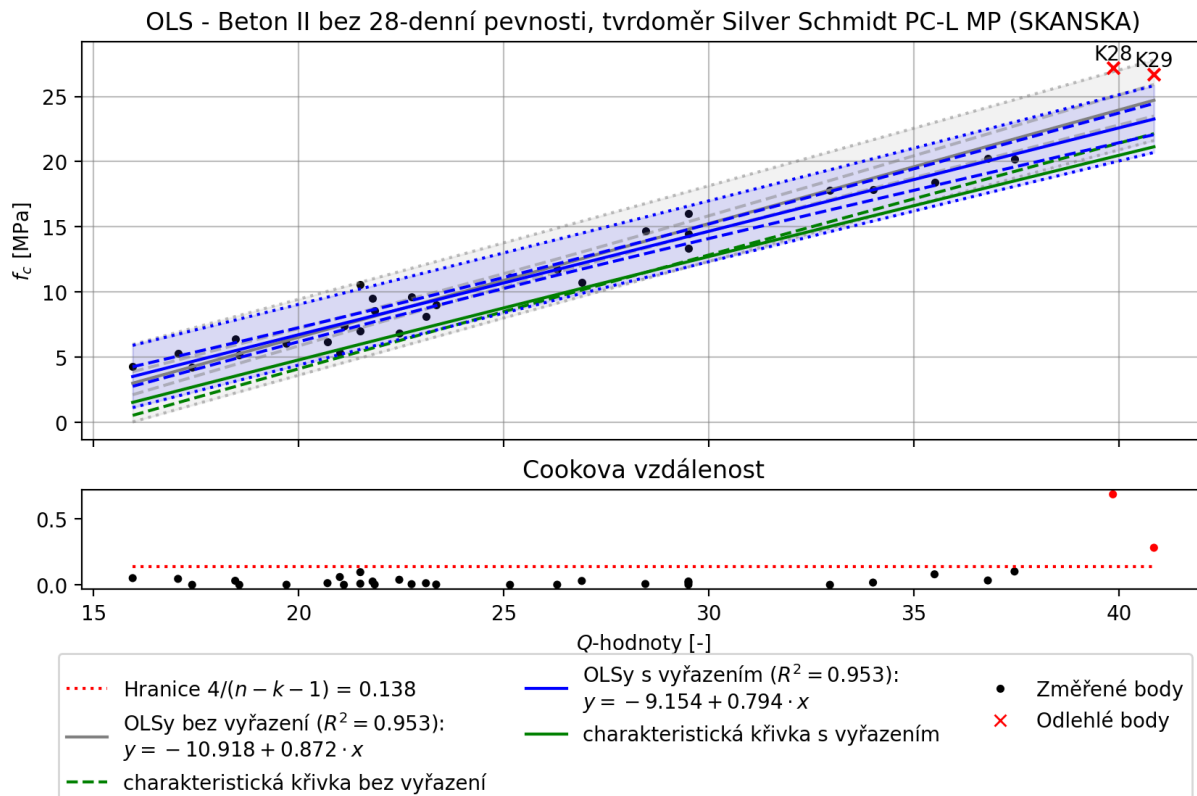


Obr. 46: Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehých bodů a po vyřazení. Beton II, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).

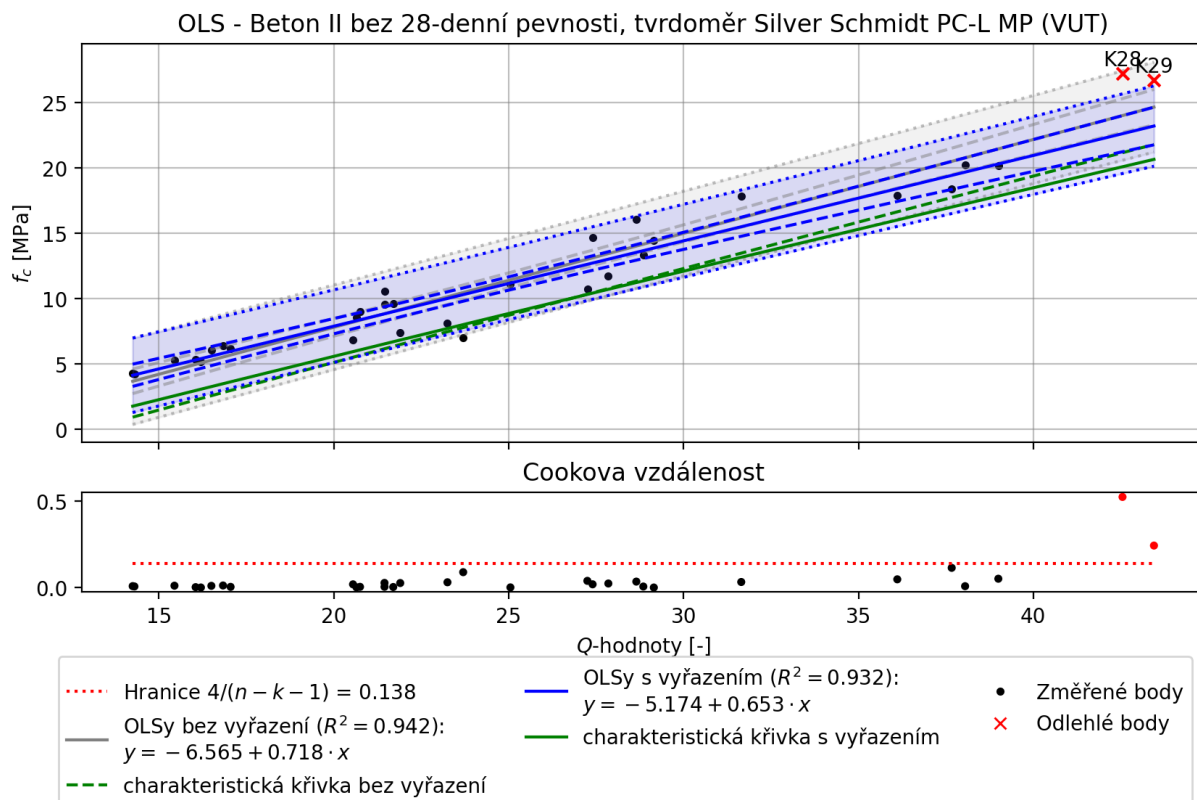


Obr. 47: Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehých bodů a po vyřazení. Beton II, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (VUT).

H.3 Beton II bez 28-denní pevnosti

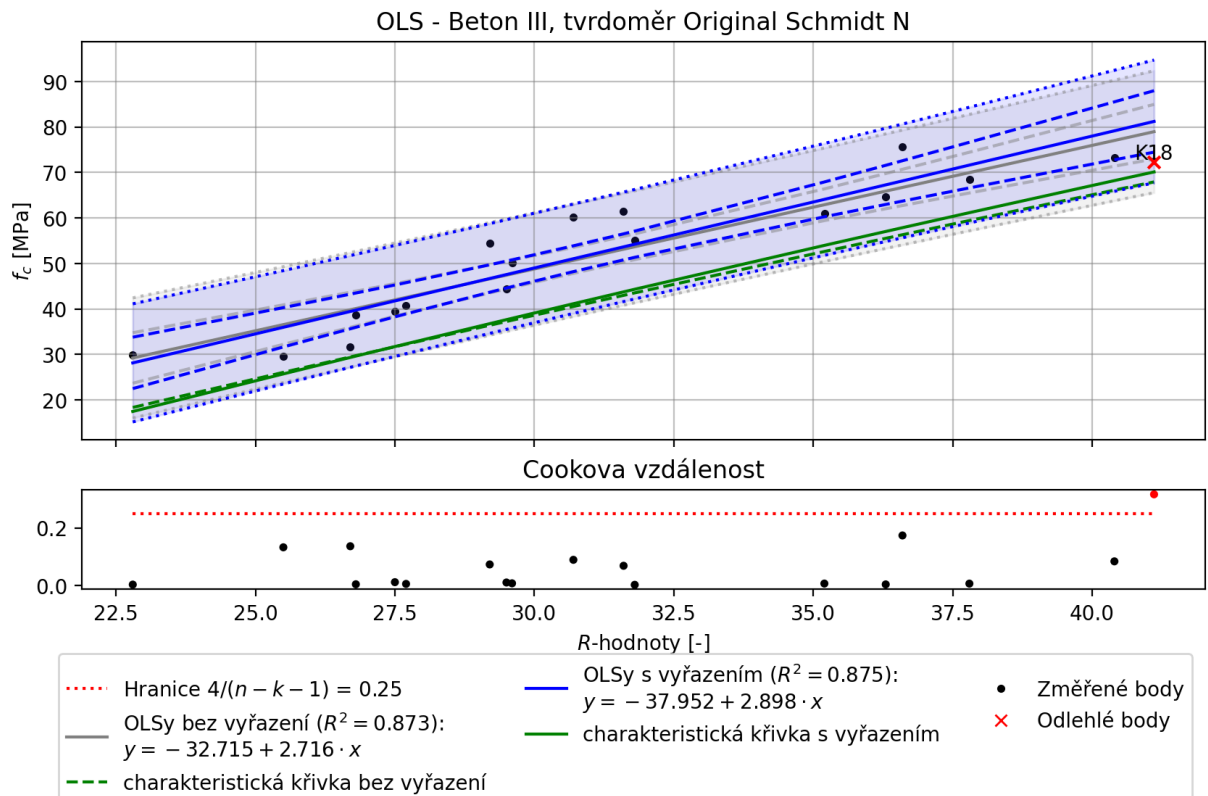


Obr. 48: Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton II bez 28-denní pevnosti, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (SKANSKA).

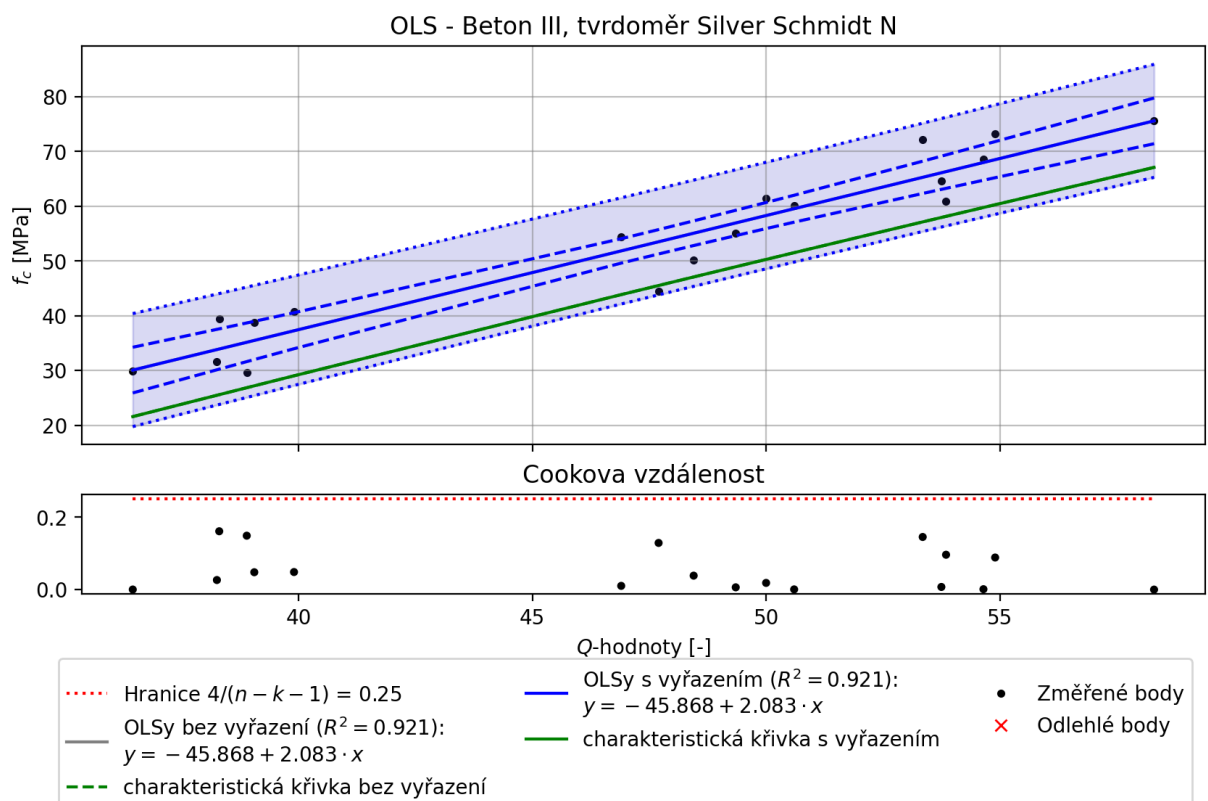


Obr. 49: Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton II bez 28-denní pevnosti, tvrdoměr SilverSchmidt PC-L MP (VUT).

H.4 Beton III



Obr. 50: Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton III, tvrdoměr Original Schmidt N.



Obr. 51: Data 2: vykreslení Cookovy vzdálenosti regresní křivky před vyřazením identifikovaných odlehlých bodů a po vyřazení. Beton III, tvrdoměr Silver Schmidt N.