

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

**SBÍRKA PŘÍKLADŮ
PRO ROZVOJ STUDENTŮ GYMNÁZIÍ
NADANÝCH NA MATEMATIKU**

Diplomová práce

Vedoucí práce:

Mgr. Vladimír Vaněk, Ph.D.

Rok odevzdání práce: 2011

Vypracovala:

Bc. Barbora Štenclová

Chemie – Matematika, 2. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením Mgr. Vladimíra Vaňka, Ph.D., a že veškeré literární prameny a jiné zdroje informací využité při tvorbě této práce jsem uvedla v seznamu použité literatury.

Souhlasím se zveřejněním této práce v prezenční formě na Katedře algebry a geometrie Přírodovědecké Fakulty v Olomouci.

V Olomouci dne.....

.....
Bc. Barbora Štenclová

Poděkování

Děkuji Mgr. Vladimíru Vaňkovi, Ph.D., za odborné vedení, cenné rady a připomínky, které mi poskytoval v průběhu tvorby této práce a za čas věnovaný při konzultacích.

Děkuji žákům z Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci a z Gymnázia Olomouc – Hejčín a také jejich vyučujícím za zodpovědný přístup při testování souboru úloh.

Děkuji rodině a přátelům za ochotnou spolupráci při korektuře a trpělivost během studia.

Obsah

Obsah.....	2
Úvod.....	3
I. Historie	4
II. Nadání a práce s nadanými	9
1) Nadaný žák.....	9
Modely nadání	10
Druhy a kritéria nadání.....	13
Charakteristika nadaného žáka	15
2) Metody a principy práce s nadanými žáky	20
Organizace a programy výuky.....	20
Metody výuky	23
3) Zásady tvorby úloh pro nadané žáky	26
III. Sbírka příkladů	29
1) Příklady „důkazové“	29
Příklady řešené	29
Příklady neřešené	33
Výsledky	35
2) Příklady „dělitelnosti“	37
Příklady řešené	37
Příklady neřešené	43
Výsledky	45
3) Příklady „součtů a soustav“	48
Příklady řešené	48
Příklady neřešené	56
Výsledky	58
4) Příklady „kombinatorické“	61
Příklady řešené	61
Příklady neřešené	67
Výsledky	70
5) Příklady „logické“	73
Příklady řešené	73
Příklady neřešené	79
Výsledky	81
6) Příklady „slovní“	84
Příklady řešené	84
Příklady neřešené	88
Výsledky	91
Závěr.....	93
Literatura	94

Úvod

V dnešní době se stále více klade důraz na diferencované vzdělávání žáků, zohledňují se individuální zvláštnosti jednotlivců nějak výjimečných, odlišných od průměrné populace. Nejedná se pouze o skupinu žáků se specifickými problémy vzdělávání, ale stále více jsou zde zmiňováni právě nadaní žáci. Kdo to je nadaný žák?, Jak jej rozpoznat mezi ostatními? a Jakým způsobem s ním pracovat?, to jsou otázky, jimiž se zabývá teoretická část této práce. Praktickou část tvoří sbírka příkladů pro matematicky nadané žáky především prvních a druhých ročníků gymnázií. Cílem práce byla tvorba úloh, které navazují na gymnaziální učivo, rozšiřují je, rozvíjí numerické a verbální dovednosti i logické myšlení a které vyžadují matematickou zručnost a tvořivý přístup řešitele.

Práce je členěna na tři části. První část se zabývá vznikem pojmu nadání a jeho historickému vývoji. Jsou zde uvedeny české i mezinárodní organizace věnující se vyhledávání, výchově a vzdělávání nadaných jedinců. Uvedena jsou také jména významných osobností zabývajících se touto problematikou i obory s ní spojenými. V druhé části je teoreticky zpracován pohled odborníků na nadání. Uvedeny jsou konkrétní modely nadání, kritéria pro posuzování existence a míry nadání a jednotlivé charakteristiky nadaného žáka včetně specifických vlastností matematicky nadaných. V této části jsou také nastíněny možnosti modifikace výuky a výukových programů s ohledem na specifické potřeby nadaných a metody výuky užívané v praxi. Teoretickou část práce uzavírá téma tvorby úloh pro nadané žáky. Třetí část práce je částí stěžejní. Jedná se o sbírku příkladů rozdělenou do šesti skupin podle povahy zadání a postupů řešení. Každá skupina obsahuje nejprve několik vzorově řešených úloh, poté zadání dalších úloh a jejich výsledky včetně krátkého návodu k řešení.

I. Historie

Již od počátku existence lidstva si lidé uvědomovali určité rozdíly v práci jednotlivců. Některé schopnosti byly vzácnější než jiné a také žádoucí. Postupem času vznikly pojmy jako génius, talent či nadání. K jejich chápání vždy přispívaly znalosti a filozofie dané doby. Ani dnes nenajdeme jednotné pojetí tohoto fenoménu. Existuje několik skupin sjednocujících pojetí nadání různých autorů, tzv. linií, které v průběhu staletí získaly na váze a neustále mezi sebou soupeří o nadvládu.

Nejstarší linií je pravděpodobně spiritualismus. Vznik nadání přisuzuje nadpozemským silám, bohům, kteří je rozdělují mezi obyčejné lidi. Tato linie získává převahu především ve společnosti neznalé vědy, moderní filozofie a také u silně nábožensky založených komunit. Do období starověku spadá vznik patologické linie. Tehdejší filozofové vyzorovali časté spojení nadání s nějakým psychickým onemocněním. Odtud pochází jeden z aforismů „není génia bez šílenství“. Současně se objevila další teorie o vzniku nadání. Tzv. biologická linie předpokládá spojení zvláštních schopností s určitými fyzickými rysy organismu, především velikostí a tvarem lebky, a vliv dědičnosti. Mezi modernější pojetí nadání patří psychoanalytická a environmentální linie. Psychoanalytická linie zdůrazňuje sílu motivace k podávání výjimečných výkonů, zajímá se o otázky „jak“ a „proč“ jsou nadaní jedinci motivováni. Podle této linie člověk využívá obranných mechanismů – sublimace a kompenzace. Předpokládá se rozporuplnost lidské psychiky způsobená rozdílem mezi základními pudy a etikou či rozumem. Sublimace značí náhradu pudového cíle za kulturní nebo sociální cíl, kompenzace pak zvýšené úsilí a tvorbu k potlačení vlastních nedostatků a pocitu méněcennosti (S. Freud in Hříbková 2009). Environmentální linie staví do popředí vnější podmínky života. Důraz je kladen na sociokulturní prostředí. Podle této teorie lze výchovou a vzděláním probudit v jedinci jakékoliv nadání.

První pokusy o vysvětlení nadání se přiklání ke spirituální linii. Lidé v prvopospolné společnosti považovali výjimečné schopnosti za „dar boží“. První racionální (vědecké) teorie se objevují již ve starověku (Čína, Indie). Větší přínos je však přisuzován antickým filozofům jako byli Sókratés (469 – 399 př.n.l.), Platón (427 – 347 př.n.l.) či Aristoteles (384 – 322 př.n.l.). V jejich chápání nadání se projevuje patologická i biologická linie, tedy spojování geniality s psychickou chorobností a známá starořecká „jednota těla a duše“.

Z Římských filozofů je nejznámější Quintilianus (35 – 96 nl.), zastánce environmentální linie. Středověk znamenal pro nadání a jeho zkoumání krok zpátky. Křesťanství bylo středem všeho, vědecké názory odporující víře byly okamžitě zamítnuty. Nadaný jedinec byl pouhým prostředníkem mezi bohem a dílem.

Renesance naopak přispěla svým racionalismem a humanismem k rozvoji filozofie a zkoumání nadaných. Významným autorem tohoto období je Ital Tommaso Campanella (1568 – 1639) zabývající se pracovní výchovou s důrazem na vlastní prožitek, zastánce patologické a environmentální linie. V pozdějším období výrazně převažuje environmentální linie. Jeho současníky jsou například Čech Jan Amos Komenský (1592 – 1670) s diferencovaným přístupem a všestrannou výukou, Angličan John Locke (1632 – 1704) upřednostňující zásadní vliv výchovy, Francouz Claude Adrien Helvétius (1715 – 1771) zdůrazňující roli štěstí a náhody, a další. Následující století se nese ve jménu vědy, techniky a především čísel. Převažuje biologická linie, uplatňují se fyzikální měření, vliv dědičnosti a vznik nejrůznějších testů k odhalení nadání. Významnými autory této doby jsou například Angličan Francis Galton (1822 – 1911) zkoumající částí těla fyzikálními metodami a hledající dědičné souvislosti, Francouz Pierre Paul Broca (1824 – 1880), který se zasloužil o rozšíření kranioetrie (měření lebky) v praxi a je autorem hypotézy o hierarchii lidských ras, Ital Cesar Lombroso (1835 – 1909), jenž zavedl antropologii do oboru kriminalistiky, a další.

Od konce 19. století se již uplatňuje rozvoj psychologie (J. B. Watson, C. G. Jung), psychoanalýzy (S. Freud) a experimentální pedagogiky. Objevují se nové směry ve zkoumání nadání, výrazný je především přesun zájmu od dospělých k dětem, snaha o vyhledávání nadaných dětí a jejich další vzdělávání. Neopomenutelným počinem je vznik IQ testů (intelligence quotient tests). Podstatná jsou jména jako Američan Lewis Madison Terman (1877 – 1956) užívající inteligenční testy a zpětnou analýzu životopisů, Američanka Leta Stetter Hollingworth (1886 – 1939), která prosazovala speciální výchovu a sledovala kauzistiku nadaných dětí, nebo Italka Marie Montessori (1870 – 1952), zakladatelka alternativní výchovy a vzdělávání (Montessori škola). Ve 20. století se problematika nadaných dostala do popředí mezinárodního zájmu (nejprve USA, poté Evropa a ostatní). Začaly vznikat různé výzkumné ústavy, odborné časopisy, programy a organizace věnující se výhradně nadaným jedincům.

V České Republice se nadaným žákům, jejich vyhledávání a výchově věnují odborníci již od 50. let minulého století a to zejména v oboru matematiky. Mezi významné odborníky (české a nám jazykově blízké) patří např. Václav Příhoda (1889 – 1979), Cyril Stejskal (1890 – 1969), Miroslav Musil (1950 – /), Lenka Hříbková (1951 – /), Vladimír Dočkal (1952 – /), a další. Pouze několik let po konci 2. světové války vypracovali českoslovenští pedagogové systém oborových olympiád, který se stále těší velké oblibě mezi žáky i učiteli. Lze tedy říct, že máme jakousi národní tradici v otázkách péče a vyhledávání nadaných. Jsou zde hojně rozvíjeny volnočasové (mimoškolní) aktivity, při nichž se nadaní žáci mohou zúčastnit různých exkurzí, besed, letních táborů nebo dlouhodobější spolupráce s odborníky (i staršími studenty) ve formě korespondenčních seminářů.

Významné mezinárodní organizace a organizace v České republice:

- ✓ **AAGC** – *The American Association for Gifted Children*
(Americká asociace pro nadané děti)
USA¹ 1946 (New York)
- ✓ **NAGC** – *The National Association for Gifted Children*
(Národní asociace pro nadané děti, pod stejným názvem v UK² 1967)
USA 1954
- ✓ **Mensa** – *Mensa International*
(světová organizace s mnoha národními pobočkami)
UK 1946 (Oxford)
- ✓ **ECHA** – *European Council for High Ability*
(Evropská rada pro vysoké schopnosti)
NL³ 1986 (Utrecht)
- ✓ **WCGTC** – *World Council for Gifted and Talented Children*
(Mezinárodní rada pro nadané a talentované děti)
UK 1975 (Londýn)
- ✓ **Eurotalent** – *Eurotalent*
(obdoba ECHA pro francouzsky mluvící země)
FR⁴ 1988 (Tours)

¹ USA – Spojené Státy Americké

² UK – Spojené království (Velké Británie a Severního Irska)

³ NL – Nizozemsko

- ✓ **WFNMC** – *World Federation of National Mathematics Competitions*,
(Světová federace národních matematických soutěží)
AUS⁵ 1984 (Adelaide)
- ✓ **STaN-ECHA** – *Společnost pro talent a nadání*, 1989 (Praha)
(česko-slovenská pobočka ECHA)
- ✓ **Mensa ČR** – původně *Mensa ČSR*, 1989 (Praha)
(česká pobočka světové organizace Mensa)
- ✓ **ČSSND** – *Československá společnost pro nadané děti*, 1992 (Bratislava)
(dnes již nefunguje)
- ✓ **NIDM** – *Národní institut dětí a mládeže*
(záštita Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy)
- ✓ **Centrum rozvoje nadaných dětí**

Odborná periodika:

- ✓ **The Gifted Child** – první časopis (dnes pod názvem *Gifted Child Today*)
USA 1951; zakladatelem je Američan Paul Witty (1898 – 1976)
- ✓ **Gifted and Talented International** – mezinárodní periodikum, 1985
- ✓ **ECHA-news** – výroční zprávy a novinky organizace ECHA, 1986
- ✓ **High Ability Studies** – půlroční periodikum pro školy, 1991
(vydává organizace ECHA)
- ✓ **Gazeta matematica** – jeden z nejstarších matematických časopisů, RO⁶, 1895
- ✓ **Sigma** – matematický časopis, AUS, 1958
- ✓ **Kvant** – v originále KBAHT, matematický časopis, RU⁷, 1970
- ✓ **Miniatury matematyczne** – matematický časopis, PL⁸, 1991
- ✓ **Mathematics and Informatics Quarterly** – matematický časopis
Singapur (USA), 1991
- ✓ **Math Horizons** – matematický časopis, USA, 1993
- ✓ **Mathematical Excalibur** – matematický časopis, Hongkong (Čína), 1995

⁴ FR – Francie

⁵ AUS - Austrálie

⁶ RO - Rumunsko

⁷ RU - Rusko

⁸ PL - Polsko

- ✓ **Rozhledy matematicko-fyzikální** – první matematický časopis v ČR
1921 (Praha); (původně *Rozhledy matematicko-přírodovědecké*)
- ✓ **MFI** – Matematika-fyzika-informatika, 1946 (Praha)
(dříve *Matematika ve škole* nebo *Matematika a fyzika ve škole*)

Oborové olympiády v ČR:

- ✓ 1951 – matematika
- ✓ 1959 – fyzika
- ✓ 1964 – chemie
- ✓ 1966 – biologie
- ✓ od 70. let – geografie (zeměpis), jazyky, dějepis, informatika, astronomie, atd.

Matematické soutěže a korespondenční semináře:

- ✓ **Matematická olympiáda** – na úrovni státu (*MO*, ČR-1951),
středoevropská (*MEMO*, 2007) a mezinárodní (*IMO*, 1959)
- ✓ **Matematický klokan** – *Kangaroo*, mezinárodní soutěž na úrovni ČR
(původem z AUS, 1980)
- ✓ **Pythagoriáda** – původní soutěž ČSR, 1978
- ✓ **Turnaj měst** – *Tournament of Towns/Turnir godorov*
mezinárodní soutěž měst; (původem ze SSSR⁹, 1980)
- ✓ **Matematický duel** – mezinárodní soutěž 3 gymnázií, 1993;
(Bílovec, ČR¹⁰ – Chorzów, PL – Graz, AT¹¹)
- ✓ **BRKOS** – *BR*něnský *KO*respondenční *SE*minář, Brno
- ✓ **KOKOS** – *KO*perníkův *KO*respondenční *SE*minář, Bílovec
- ✓ **PRASE** – *PRA*žský matematický korespondenční *SE*minář, Praha
- ✓ **PIKOMAT** – *PI*onýrská *KO*respondenční *MAT*ematika, Praha
- ✓ a další...

⁹ SSSR – bývalý Sovětský svaz (socialistických republik)

¹⁰ ČR – Česká Republika

¹¹ AT - Rakousko

II. Nadání a práce s nadanými

1) Nadaný žák

Podle platného zákona České Republiky (č. 73/2005) je nadaný žák jedinec, jehož rozložení schopností dosahuje mimořádné úrovně při vysoké tvořivosti v celém okruhu činností nebo v jednotlivých rozumových oblastech, pohybových, uměleckých a sociálních dovednostech. Definice podle Hříbkové (2009) říká, že se jedná o žáky schopné pohotově porozumět a použít svých znalostí a dovedností kreativními a originálními způsoby. Takovýchto definic můžeme nalézt mnoho. Téměř každý autor studie o nadání si vytváří svou vlastní teorii o vzniku nadání, rozdílnost takto vzniklých definic je pak založena nejen na daných teoretických podkladech, ale i na snaze o vědeckou přesnost či odlišení se od předchůdců. Dalším aspektem je historický vývoj chápání nadání jako takového. V dnešní době se objevuje snaha o zařazení jednotlivých definic do určitých skupin. Opět však neexistují jednotná kritéria rozdělení. Nejčastěji se odlišují přístupy založené na schopnostech (potenciálu), výkonu, kognitivních vlastnostech, osobnostním vývoji a sociálně-kulturní přístup. Jako příklad uveďme rozdělení podle Porterové (in Machů 2010):

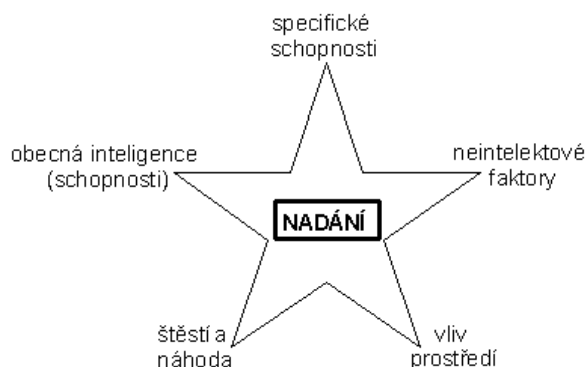
- a) definice založené na jediné schopnosti – nejčastější kritérium identifikace je hodnota IQ, používáno pro přehlednost a srozumitelnost, vychází pouze z rozumových schopností
- b) definice založené na více schopnostech – k identifikaci je využito více metod, pojetí inteligence např. podle Gardnera, Sternberga
- c) definice založené na úrovni zpracování informací – identifikace podle charakteristiky nadaných, např. úroveň koncentrace, paměti, učebních strategií
- d) definice založené na kvalitativních rozdílech – identifikace podle neurologických a sociálních odlišností, např. asynchronní rozvoj osobnosti
- e) definice založené na kreativitě – kritérium identifikace je míra originality, protipól k IQ-definicím
- f) definice založené na principu „ex-post-facto“ – identifikace pomocí zpětného hodnocení produktů práce nadaného, využitelnost pro zjišťování nejvhodnějších podmínek vývoje nadání

- g) definice založené na odlišných kulturních pohledech – kritéria identifikace vychází z kulturních rozdílů a odlišných priorit, např. spiritualita, schopnost intuice, estetické cítění

Modely nadání

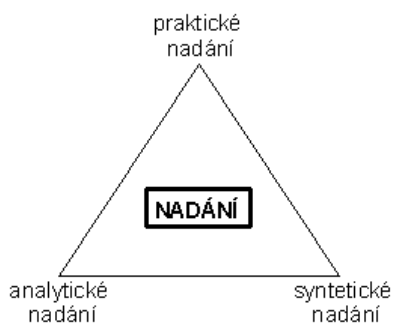
V posledních letech vznikly tzv. modely nadání jako náhrada za rozsáhlé slovní definice nadání. Pomocí těchto modelů můžeme přehledněji specifikovat podstatu nadání. Navíc lze různými způsoby modely modifikovat tak, aby odpovídaly specifikům konkrétní oblasti nadání nebo skupině nadaných. Stejně jako definice jsou i modely značně odlišné a lze je dělit podle různých kritérií. Pro přehlednost uvedeme několik konkrétních modelů se vzestupnou tendencí složitosti (pracovanosti):

1) hvězdicový model – A. J. Tannenbaum



Nadání podle tohoto modelu je dáno souborem pěti faktorů, z nichž každý je nezbytný a nenahraditelný kombinací ostatních. Navíc je každý z nich dále dělen na statickou složku (vrozený nebo jinak neměnný faktor) a dynamickou složku (proces vzdělávání a rozvoj nadání). Obecná inteligence (všeobecné schopnosti) je zde chápána jako souhrn většího počtu individuálně rozdílných schopností, které jsou ovlivňovány ústřední duševní vlohou, tzv. g-faktorem. Tato vloha je měřitelná např. IQ-testy. Specifické schopnosti jsou schopnosti výjimečného výkonu (produktivity) v určitém speciálním oboru nebo činnosti. Neintelektové faktory zahrnují především individuální osobnostní rysy (např. motivace, sociální a emocionální charakteristiky, sebepojetí). Vliv prostředí značí především sociokulturní podmínky rozvoje jedince, vliv školy, rodiny a vrstevníků. Štěstí a náhoda představují nepředvídatelné situace, které mohou (a nemusí) zásadně ovlivnit další zaměření zájmů jedince (např. setkání s odborníkem).

2) triarchický model – R. J. Sternberg



Tímto modelem vyjádřil Sternberg nesouhlas s objektivitou IQ-testů. Podle něj testy hodnotí pouze jednu z více složek inteligence a nezahrnují míru přizpůsobivosti jedince krizovým (neznámým) situacím. Celkové nadání se podle něj skládá ze tří složek – analytického, syntetického a praktického nadání. Analytické nadání poskytuje možnost rozebrání problému na části a jejich porozumění. Toto nadání je dobře měřitelné IQ-testy. Syntetické nadání umožňuje hlubší vhled do problému a souvislostí. Poskytuje lepší podmínky pro adaptaci na neznámé situace. IQ-testy zde nejsou průkazné. Praktické nadání v tomto modelu značí libovolnou aplikaci analytických a syntetických schopností v praxi.

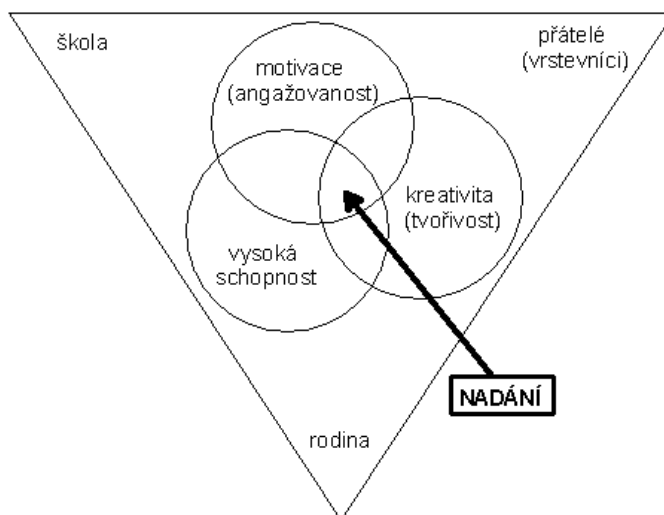
3) tříkomponentový model – J. S. Renzulli



Renzulliho model představuje nadání jako vzájemnou harmonii tří základních složek, z nichž každá je souborem určitých osobnostních charakteristik a musí dosahovat určitého minimálního stupně rozvoje. Vysoká (nadprůměrná) schopnost se skládá ze všeobecných i specifických schopností. Za nejpodstatnější všeobecnou schopnost pokládá procesy zpracování informací, jako specifické schopnosti pak uvažuje objem získaných znalostí a dovedností potřebných pro dosažení kvalitního výkonu. Kreativita (tvořivost) se vztahuje především k originalitě myšlení, přizpůsobivosti, nápaditosti a tvůrčím schopnostem. Motivace (angažovanost) značí zaujetí pro daný úkol, vnitřní motivaci, vytrvalost, trpělivost,

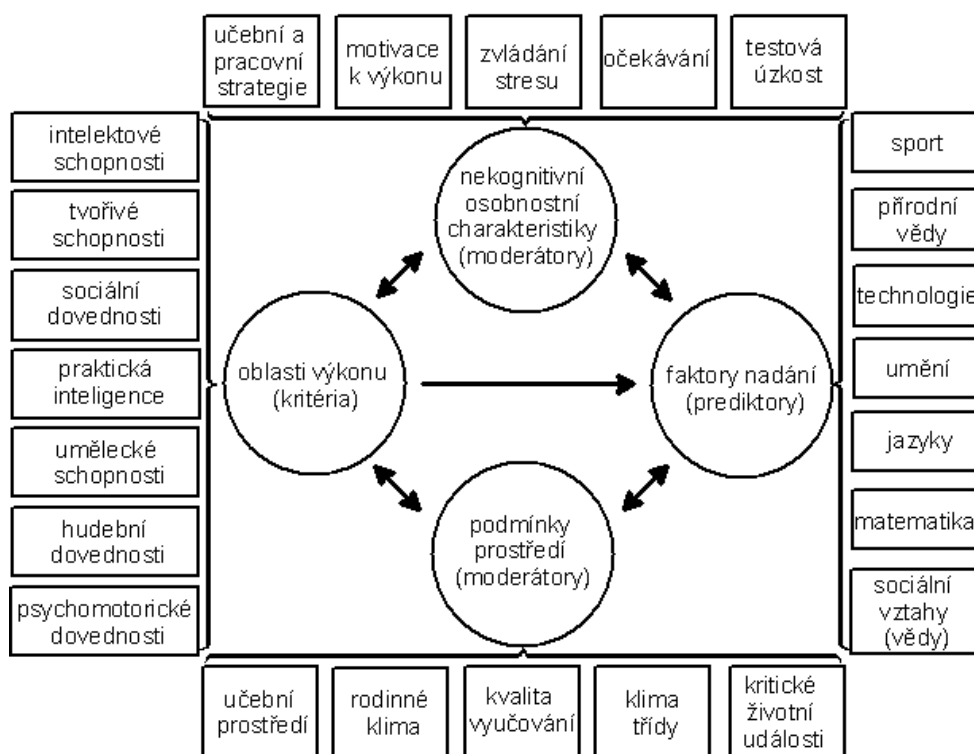
odhodlanost, sebedůvěru. Je to množství energie vynaložené na řešení daného problému. Tento model patří mezi nejznámější, a to pro svou jednoduchost a snadnou aplikovatelnost v praxi.

4) triadický model – F. Mönks



Mönksův model v základním principu vychází z již zmíněného Renzulliho modelu. Kromě tří základních složek, které vyjadřují dynamické osobnostní vlastnosti, se zde navíc vyskytují vazby na sociální prostředí jedince – školu, rodinu a přátele (vrstevníky). Pro optimální vývoj a projevy nadání je nutné, aby všech šest zahrnutých faktorů bylo ve vzájemné shodě. Model vychází z praktických zkušeností a také je v praxi často využíván.

5) mnichovský model

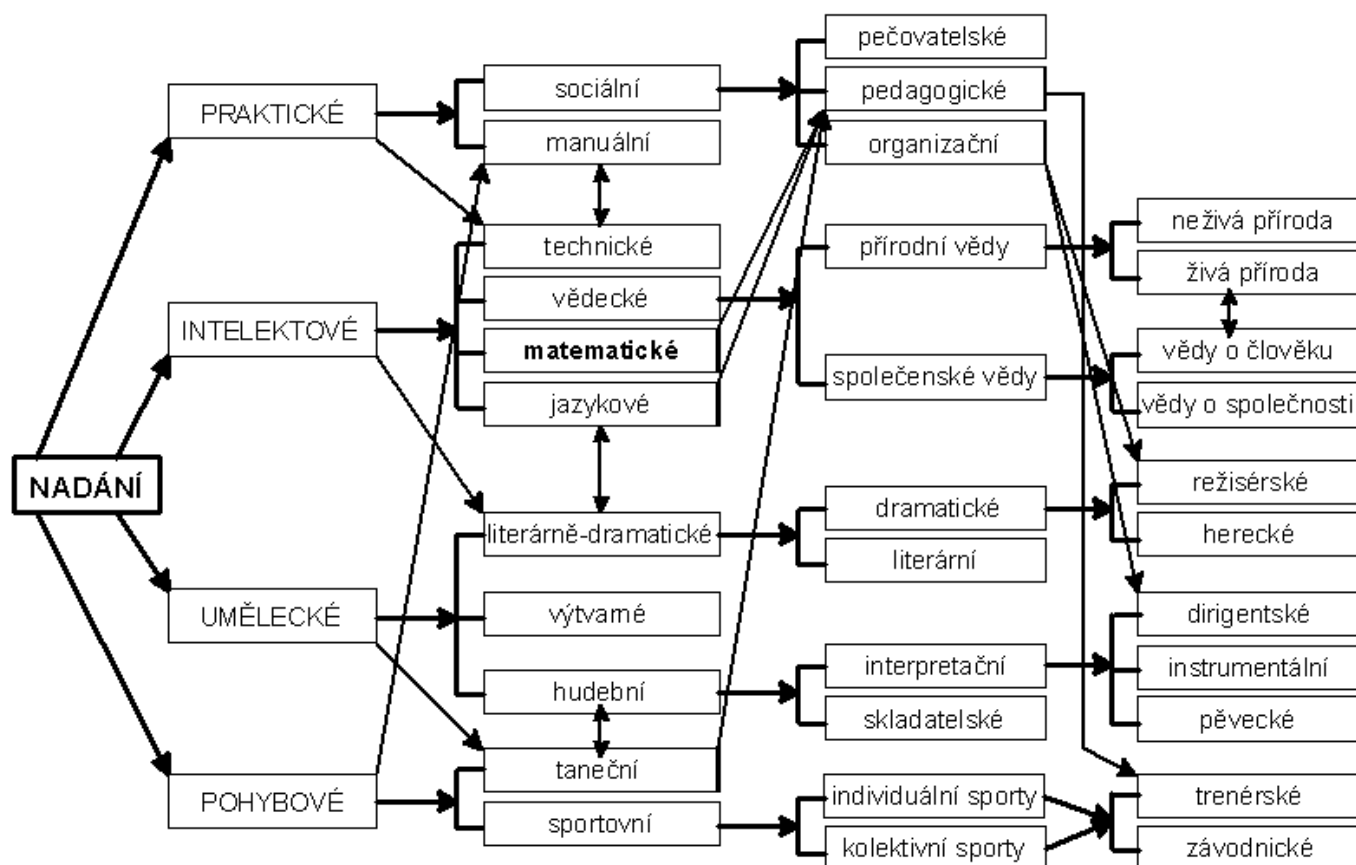


Mnichovský model je případem tzv. multidimenzionálního modelu nadání. Jedná se o velmi podrobnou koncepci, kterou v 90. letech vypracovali němečtí akademici Keller, Hany a Perleth (in Machů 2010). Zahrnuje také některé základní myšlenky předchozích modelů. Obsahuje oblasti vysokého nadání a jim odpovídající vysoké výkony (v daných oblastech). Moderátory vycházejí ze dvou rozdílných charakteristik – z nekognitivních osobnostních znaků a charakteristiky prostředí. Dále rozvíjejí tzv. prediktory, což jsou v tomto případě vlohy jedince. Celkový projev nadání je dán harmonickým působením všech faktorů současně.

Druhy a kritéria nadání

Nadání jedinci se vyskytují v různých oblastech lidské činnosti. Během minulého století se začaly objevovat úvahy o existenci jednotlivých druhů nadání vztažených ke konkrétnímu povolání (činnosti). V současnosti existuje, podobně jako u předchozích, mnoho typů klasifikací. Jednotlivé druhy nadání jsou vzájemně propojeny podobně jako veškerá lidská činnost a navzájem se doplňují. Některé typy nadání pro konkrétní činnost lze zařadit do více skupin najednou a také více druhů nadání lze využít v jedné konkrétní činnosti. Nelze proto vytvořit jednoznačné a vyčerpávající rozdělení ani hierarchizaci. Pro přehlednost uvedeme

klasifikaci podle Dočkala (2005), který rozdělil nadání podle typu činnosti a provedl jeho hierarchizaci:



Hierarchie, postupuje od všeobecného pojmu nadání k charakteristikám a specifickým vlastnostem nadaných jedinců (v grafu zleva doprava). Tato posloupnost, jak již bylo řečeno, však není jednoznačná. Některé vzájemné vztahy jsou naznačeny diagonálními a vertikálními šipkami.

Pro hodnocení existence a úrovně nadání se často využívají kritéria podle Sternberga. Jedná se o pět obecných kritérií, která lze upřesnit pro danou oblast rozvoje nebo obor zájmu podle konkrétních sociokulturních podmínek. Těmito kritérii jsou:

- 1) kritérium excelentnosti – jedinec vykazuje vynikající schopnosti a podává vynikající výkony v některé oblasti (nebo více oblastech najednou) vzhledem k průměrné populaci
- 2) kritérium rarity (vzácnosti) – jedinec má vysokou úroveň rozvoje charakteristického znaku, který se u průměrné populace vykytuje vzácně, nejčastější hranice je mezi 2-10% populace

- 3) kritérium produktivity – jedinec ve své oblasti nadání produkuje a utváří komplexnější dílo (určitý produkt činnosti), nebo k němu směřuje
- 4) kritérium demonstrovatelnosti (prokazatelnosti) – jedinec své nadání opakovaně demonstruje, toto nadání lze prokázat alespoň jedním testem s dostatečnou validitou a reliabilitou
- 5) kritérium hodnotnosti (užitečnosti) – vynikající výkony jedince jsou pro něj (nebo pro společnost) hodnotné, smysluplné a užitečné, jedinec tímto směřuje k vlastnímu rozvoji

Charakteristika nadaného žáka

Od počátku vzniku zájmu o nadané jedince se diskutovalo o jejich specifických charakteristikách, které by umožnily snadnější detekci a výběr nadaných. Přímá souvislost mezi nadáním a určitými osobnostními rysy se však nepotvrdila. Hlavně proto, že nadání jedinci netvoří stejnorodou skupinu, ale každý z nich je silnou individualitou se specifickými rysy osobnosti. Existují však určité odlišnosti ve vývoji, myšlení a chování, které mohou (ale nemusí) indikovat nadaného jedince. Autoři odborných publikací (např. Hříbková 2009, Machů 2010, Dočkal 1987) nejčastěji rozlišují charakteristiky kognitivní a nekognitivní, případně psychomotorické, a charakteristiky učení (resp. projevy ve školním prostředí).

a) kognitivní charakteristiky:

čtení – velký zájem o písmena a čísla již od útlého věku, čtení často i dříve než řeč (před 4 rokem), přirozený zájem o četbu (bez účasti rodičů), zájem o encyklopedie a náročnější literaturu

bohatá slovní zásoba – rychlé rozšiřování slovní zásoby již od útlého věku, používání poměrně složitých vět, správné gramatiky a cizích slov, tvorba netradičních spojení slov a vět

paměť – vynikající krátkodobá i dlouhodobá paměť včetně detailů, upřednostnění logické paměti před memorováním, skvělí pozorovatelé

znalosti – hluboké znalosti v oblastech zájmu (až expertní úroveň), vybavování těchto znalostí v různých souvislostech (i zdánlivě nesouvisejících), samostatné vyhledávání informací

schopnost abstrakce a generalizace – samostatné vyvozování pravidel a zevšeobecňování, vytváření smysluplných celků (originální výtvoř – slovně i prakticky)

koncentrace pozornosti – dlouhodobá koncentrace pozornosti (i několik hodin), vysoké zaujetí zájmovou činností (až ignorace okolí)

pracovní tempo – rozdílné v závislosti na typu činnosti – vybavování a aplikace znalostí velice rychlé, tvořivé nebo problémové úlohy velmi pomalé (hlubší přístup k tématu)

flexibilita a originalita myšlení – přizpůsobivé myšlení, bohatá představivost, vlastní způsoby řešení problému, snaha o jedinečnost (originalitu) nápadu

kritické myšlení – nespokojenost s krátkými nebo neúplnými informacemi, rozpoznávání nesrovnalostí, vlastní ověřování sporných informací, pochybování a polemizace (s rodiči, učiteli), zvýšená sebekritika (perfekcionismus), vlastní kritéria hodnocení

metakognitivní vlastnosti – uvědomělost vlastních strategií řešení problémů i učení, vyspělejší a hlubší styly učení (srovnatelné se staršími vrstevníky nebo dospělými), lepší plánování

záliby a koníčky – třídění (podle různých kritérií) a zevšeobecňování informací, spíše intelektuální zájmy (knihy, složitější technika, hlavolamy, šachy, ...), nejčastější témata jsou exotická zvířata a dinosauři, lidské tělo, vesmír a přírodní zákony, dopravní prostředky, válečná historie, ...

smysl pro humor – vysoká verbální inteligence, trefné poznámky a slovní hříčky (často pochopitelné pouze pro samotného nadaného a dospělé)

b) nekognitivní charakteristiky

motivace – převaha vnitřní motivace, vytrvalost při zájmových činnostech, dyktivost po nových informacích, chování řízeno určitým (stanoveným) cílem, rozmanité zájmy

aktivita – vysoká živost (neunavitelnost), odvaha, výběr náročnějších variant úloh, velké nasazení v oblastech zájmu (vyžadují i po ostatních), menší nasazení u úloh pro ně nezajímavých

přecitlivělost a smyslová vnímavost – intenzivní vnímání okolních věcí a jevů (i detailů), vyšší potřeba emocionální podpory, impulzivní a expresivní vyjadřování, citlivé vnímání rozporů a problémů (morální otázky), cit pro harmonii a estetiku

denní snění – spíše konstruktivní než únikový charakter, následně větší ponoření do problému, současné vnímání okolního dění

socializace – potřeba volnosti, neustálá aktivita, vyžadování neustálé pozornosti okolí, naivita a důvěřivost, odvážné prosazování vlastních názorů se silnou argumentací, vysoké (nebo velmi nízké) sociální dovednosti, komunikace se staršími vrstevníky nebo dospělými

c) psychomotorika

jemná motorika – z hlediska písma spíše neupravený, neúhledný projev

hrubá motorika – hyperaktivita (častá potřeba pohybu), jiní spíše odmítnutí pohybu

d) charakteristiky učení

sociální – rychlá adaptace na nové učební prostředí, potřeba prezentace znalostí a dovedností před publikem (třídou), časté pochybování a polemizace s učiteli, nerespektování příkazů a určování práce, nepříjemné dotazování (proč, jak) a neuznávání autorit

řešení problému – strukturalizace, snaha o dokonalost, oddalování dokončení činnosti (dokud není k jeho spokojenosti), samostatné vyhledávání informací a orientace v nich, vlastní pracovní tempo

proces učení – rychlé a kvalitní nezávisle na výsledku či známkách, znalosti v oblastech zájmu překračující požadovaný rozsah i hloubku učiva (vyhledávání dodatečných informací, ověřování informací z různých pramenů), dokončení úlohy „za každou cenu“, vyšší (vzdálenější) cíle

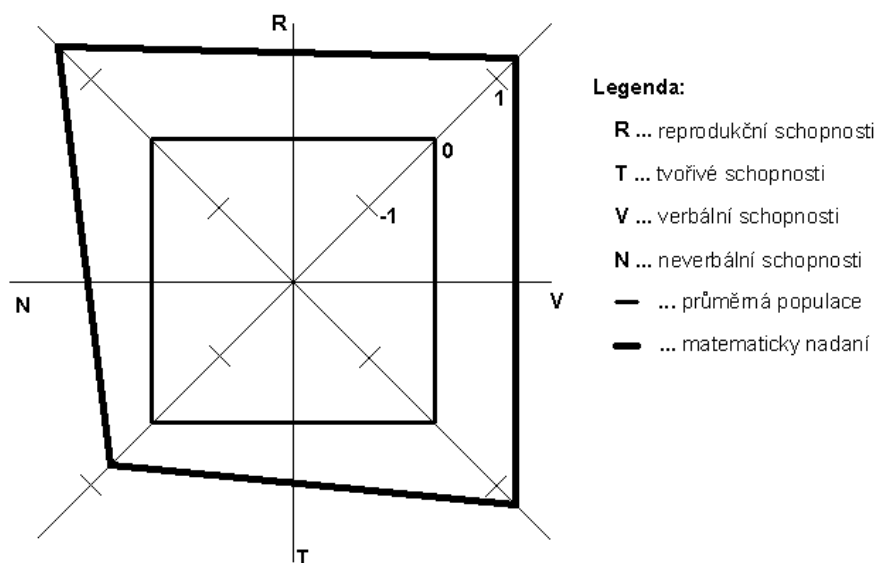
preferované učení – induktivní učení a hledáním souvislostí, individuální práce, problémové úlohy, manipulace s objekty, experimenty, využití fantazie a představivosti

nepreferované učení – mechanické a paměťové učení (memorování), dlouhé procvičování, rutinní a jiná předvídatelná práce

V této práci se budeme zabývat žáky nadanými v oblasti matematiky. Proto zde uvedeme některá specifika těchto jedinců, která ještě nebyla zmíněna nebo dostatečně specifikována. Jmenované schopnosti matematicky nadaných vyzoroval Kruteckij (in Dočkal 1987) na základě svých dlouhodobých výzkumů:

- a) získávání matematických informací – formalizované vnímání, pochopení formální struktury úlohy
- b) zpracování matematických informací – logické myšlení (kvantitativní i prostorové vztahy), bravurní používání symboliky (čísla, znaky), rychlé zevšeobecňování vztahů a operací, koncentrace myšlení na daný problém, flexibilita myšlení, jednoduché a racionální řešení úloh (jasné, ekonomické, ...)
- c) paměť na matematické informace – paměť na čísla a matematické vztahy, typové charakteristiky, metody řešení, zásady analýzy úloh a důkazy
- d) všeobecná struktura schopností – rychlé myšlení, rychlé a přesné počítání (i z paměti, dílčí výpočty jsou jen prostředkem k nalezení řešení), paměť na definice a vzájemné vztahy, prostorová představivost, názorná představa abstraktních vztahů a závislostí

Kruteckij také zjistil, že výjimečně matematicky nadaní mají určité projevy, které je odlišují od vrstevníků. Jedná se především o osobitý zájem o matematiku již od útlého dětství, velmi vysokou koncentraci a vytrvalost práce v matematické oblasti a mimořádnou schopnost vnímání různých jevů prostřednictvím matematických vztahů. Tyto, ale i jiné matematické schopnosti se objevují velmi brzy a nezávisle na vnějších podmínkách vývoje jedince. Projevy matematicky nadaných tak můžeme pozorovat stejně u jedinců z nepodporujícího prostředí, bez dostatečné stimulace a systematické výuky matematiky, jako u těch, kteří mají všestrannou podporu rodiny a silné zázemí z hlediska cílevědomosti výuky matematiky. Z hlediska úrovně a struktury intelektových schopností jsou matematicky nadaní jedinci výrazně nad schopnostmi průměrné populace (Dočkal 1987):



Navíc jsou tyto schopnosti vzhledem k jiným druhům nadání rozvinuty rovnoměrně. Matematicky nadaní jedinci se od průměrné populace nejvíce odlišují především výbornou pamětí (krátkodobou i dlouhodobou), úrovní pozornosti (koncentrace) a mnohými různorodými zájmy. Pokud se zaměříme na úroveň pozornosti při určité časově omezené činnosti, zjistíme, že matematicky nadaní už na začátku činnosti pracují s výrazně větším nasazením. To stále roste a před koncem časového limitu prudce vzrůstá k maximu, což odráží další vlastnosti nadaných – vytrvalost a cílevědomost. Poměrně překvapivá je různorodost zájmů. Kromě výrazné pozornosti věnované matematice se tyto jedinci zajímají také o přírodovědné předměty, ale i o společenské vědy a umění (především hudební). Šířka zájmových aktivit je projevem neobyčejné aktivity a vitality, což lze pozorovat také v časté fyzické aktivitě (sportovních zájmech). Matematicky nadaní jedinci tímto odpovídají starořeckému ideálu krásy a vitality podle citátu „Mens sana in corpore sano“ (ve zdravém těle zdravý duch).

2) Metody a principy práce s nadanými žáky

Na úvod je třeba zdůraznit, že nadaní žáci jsou silné individuality se značně rozdílnými charakteristikami a projevy. Jejich výuka, vzhledem k průměrným žákům, proto vyžaduje odlišný přístup. Je nutné respektovat individuální vzdělávací potřeby konkrétního nadaného žáka, tedy jeho osobnost a oblasti zájmu. Nadaní jedinci jsou přirozeně zvědaví a mají dostatečnou vnitřní motivaci k učení. Potřebují ale podněty, které by je přiměřeným způsobem stimulovaly, a to i k méně zajímavým činnostem. Zde nabízím shrnutí zásad práce s nadanými:

- ✓ podávat množství nových informací (dostatečně složitých a různorodých)
- ✓ pozitivně motivovat a inspirovat k další práci
- ✓ přistupovat individuálně, respektovat specifické zvláštnosti žáka

- ✓ vést se žáky dialog, dát prostor otázkám, argumentům i protiargumentům
- ✓ podporovat komunikaci, zadávat skupinové práce
- ✓ zadávat problémové úlohy, projekty

- ✓ rozvíjet logické, abstraktní, kreativní a kritické myšlení
- ✓ rozvíjet strategické a plánovací schopnosti
- ✓ rozvíjet schopnost vyhledávat a třídit informace
- ✓ rozvíjet samostatnost a odpovědnost za vlastní práci

- ✓ podporovat experimentování a objevování
- ✓ podporovat originalitu řešení úloh

Organizace a programy výuky

Metody a principy práce s nadanými tedy vychází z individualizace a vnitřní diferenciacce žáků. Vzhledem ke klasickým (běžně používaným) metodám práce můžeme modifikovat celý vzdělávací proces nebo obsah výuky. Z hlediska procesu výuky rozlišujeme tři základní organizační prvky. Jsou to segregace (separace), integrace a kombinace obou předchozích.

Považujeme-li nadaného žáka za jedinečnou individualitu s výrazně odlišnými vlastnostmi oproti jeho vrstevníkům, jsme blízko k vytvoření modelu segregace organizace výuky. Separace vychází z odlišení nadaných žáků od běžné populace a vytvoření speciálních skupin jedinců, které budou plně vyhovovat požadavkům na výuku těchto žáků. Zde můžeme zařadit například speciální internátní školy, speciální školy s denní péčí nebo speciální třídy v rámci běžné školy. V našich podmínkách jsou příkladem takovéto organizace například výběrová (víceletá) gymnázia, konzervatoře, případně výběrové třídy některých škol.

Model integrace předpokládá začlenění nadaného žáka do běžné třídy s tím, že vyučující (příp. třídní učitel) se tomuto žákovi zvlášť věnují nebo se žákem pracuje odborný asistent (podpůrný pedagog), což zajišťuje individuální přístup – jedná se především o přípravu alternativních studijních materiálů. V dalším případě má žák možnost odborných konzultací u jiných učitelů či odborných pracovníků z daného oboru zájmu.

Kombinovaná organizace spojuje model separace a integrace. Příkladem mohou být běžné třídy, kde část výuky garantuje odborný pracovník daného oboru nebo speciální pedagog. Další možností je začlenění nadaného žáka do běžné třídy, kdy na část vyučování (konkrétní předměty) dochází do speciální třídy nebo třídy vyššího ročníku. Poslední variantou je docházka nadaného žáka do speciální třídy, přičemž část vyučování je spojena s běžnou třídou (např. volitelný předmět, estetická výchova).

Při výuce by se nadání mělo rozvíjet z několika hledisek. To můžeme učinit více různými způsoby. Nejčastěji se využívá prohlubování znalostí (větší detailnost a náročnost učiva), rozšiřování obsahu (témata nad rámec běžných osnov ročníku) a rychlejší tempo práce. V současné době se za základní kameny vzdělávání nadaných (z hlediska obsahu) považují programy „akcelpace“ (urychlování) a „enrichment“ (obohacování).

Program akcelpace, jak je patrné již z názvu, je založen na urychlení výuky nadaných žáků. Využívá jejich rychlého pochopení nového učiva a schopnosti řešit úlohy vyšší úrovně obtížnosti, než odpovídá jejich věku. Uspokojuje tak poznávací a výkonové potřeby žáka. Navíc se může zkrátit čas věnovaný opakování a tím eliminovat nuda. Při tomto programu často dochází ke zkrácení obvyklé délky školní docházky. Jedná se například o dřívější vstup do školy (od 5 let), dřívější přechod na střední školu nebo univerzitu. Například v USA lze studovat univerzitu již od 14 let věku. Podle české legislativy může být nadaný žák na základě

komisní zkoušky přeřazen do vyššího ročníku, aniž by absolvoval ročník předchozí. V našem státě ne příliš častý jev, ale tato možnost tu je. Další variantou je výuka zvoleného předmětu ve vyšším ročníku, případně výuka více předmětů na jiné škole nebo univerzitě (tzv. paralelní studium) nebo absolvování dvou ročníků v jednom roce.

Program akcelerace se nejlépe uplatňuje u oborů, kde je možné jednotlivé celky učiva organizovat do postupných kroků s logickou i obsahovou návazností. Příkladem takového oboru je matematika. Podle Stanleyho studie z 80. let 20. století (in Hříbková 2009) je akcelerace nejefektivnější právě u žáků s matematickým nadáním. Nevýhodou tohoto programu je nerovnoměrnost vývoje žáka. V oblasti svého nadání může dalece překročit možnosti svých vrstevníků a při „přeskočení“ jednoho či více ročníků se vyrovná svým novým spolužákům. Naproti tomu fyzická a sociální nevypěstlost může v takovém případě způsobovat nadanému žákovi potíže se začleněním se do kolektivu, což může přetrvávat i v dospělosti. Další nevýhodou může být absence některých základních znalostí a dovedností vyučovaných v přeskočených ročnících. Při akceleraci se nejčastěji využívá organizační forma separace, jako je například zařazení žáků do výběrových tříd nebo do specializovaných škol.

Program enrichment, jak lze opět vyvodit z názvu, je založen na obohacování výuky nadaných žáků. Využívá jejich zvědavosti a touhy po poznání. Na rozdíl od předchozího programu se nesnaží dobu studia zkrátit, ale naopak dodržet standardní délku docházky. Obsah učiva je nadanému žákovi přizpůsoben tak, aby témata odpovídala plánu pro jeho vrstevníky. Navíc je však rozšiřován o nová fakta a probírán více do hloubky, což umožňuje pochopení širších souvislostí a lepšímu porozumění danému tématu. Využívá se různých aktivit rozvíjejících schopnosti a zájmy nadaného žáka. Využití zde nachází projektová a skupinová výuka i samostudium. Žákům se zadává větší množství složitějších či nestandardních úloh a problémové úlohy vyžadující hlubší přístup k řešení. Dále pak mohou být vyzváni k nastudování určitého tématu, které pak prezentují před třídou namísto vyučujícího, nebo se účastní různých výzkumů jako jednotlivci i v menších skupinách (různé stupně obtížnosti zadání pro jednotlivé skupiny). Důraz je zde položen na vyhledávání, zpracovávání a využívání informací z různých zdrojů. Je vyžadován kreativní přístup k řešení zadaných problémů, což plně odpovídá charakteristice nadaného žáka.

Nejčastěji využívaná forma organizace výuky při obohacování je začlenění nadaného žáka do běžné třídy. Jedná se tedy o již zmíněnou integraci. Takto je eliminována případná nerovnoměrnost vývoje žáka. Program enrichment však může být zařazen i mimo kmenovou třídu. Mluvíme pak o zájmových kroužcích (úzce spojených s probíhající výukou ve třídě) pro skupinu nadaných žáků, případně o tvorbě individuálního vzdělávacího plánu pro jednotlivce.

Metody výuky

Volba metody výuky pro konkrétního nadaného jedince závisí na jeho osobnostních zvláštěnostech, oblasti nadání, druhu zamýšlené činnosti a konkrétnímu zájmu z hlediska sociálně-emočních charakteristik nadaného. Vhodnou kombinací více metod lze dosáhnout nejen hlubokých znalostí v určitém oboru, ale také značné přizpůsobivosti změnám okolního prostředí, odhalování nových problémů a jejich řešení a v neposlední řadě otevření se novým tématům a trendům. Mezi tyto metody výuky patří: individuální práce, skupinová výuka, projektová výuka, partnerská výuka; dialog a diskuse, vyhledávání a výzkum, laboratorní a praktické práce; heuristická metoda, mentální mapy a brainstorming, didaktické hry.

Individuální práce rozvíjí samostatnost při řešení úloh, vyhledávání informací a jejich zpracování. Rozvíjí se kreativní a kritické myšlení. Žáci mohou úlohy řešit vlastním tempem, zvolit hloubku ponoření do problému, učí se odpovědnosti za svou práci. Zadávány jsou nadstandardní a problémové úlohy. Učitel do samostatné práce nezasahuje, má pouze funkci poradce na vyžádání.

Skupinová práce vychází ze spolupráce menší skupiny žáků. Žáci mohou na úkolech pracovat společně nebo si je rozdělit na dílčí úkoly. Učitel skupině zadává soubor úloh různé úrovně obtížnosti, žáci si mezi sebou volí jednotlivé úlohy. Výstupem je společná prezentace skupiny. Učitel má funkci organizátora, kontroluje role jednotlivých žáků ve skupině.

Projektová výuka může být krátkodobá (několik hodin) nebo dlouhodobá (až několik dní). Využívají se zde různě zaměřené problémové úlohy s důrazem na praktickou stránku věci. Řešení úloh často propojuje více oborů (předmětů). Projekt může být zpracováván individuálně i ve skupině. Práce probíhá podle předem dohodnutého plánu. Výstupem je prezentace výsledků projektu, zhodnocení postupu práce i samotného výsledku. Učitel plní

funkci organizátora – sleduje průběh projektu a vyhodnocuje pokroky při plnění zadaných úkolů.

Partnerská výuka spočívá ve vzájemné spolupráci dvou žáků, přičemž mohou nastat dvě situace. Oba žáci jsou ve svých znalostech na stejné úrovni, jsou si navzájem rovnoprávními partnery, nebo je jeden z nich na úrovni vyšší (učitel) a druhý na úrovni nižší (žák). V obou případech dochází ke vzájemné výměně názorů na řešení úloh a kontrole vyřešených úloh, společnému shromažďování informací, atd. Kromě znalostí a dovedností také dochází k rozvoji sociálních vztahů žáků.

Dialog je nejčastěji veden mezi žákem a učitelem, diskuse mezi všemi žáky (učitel ji řídí). Žáci si po předložení problému vytvoří vlastní názory, které si vzápětí vyměňují. Dochází tak k výběru optimálního řešení daného problému. Pro diskusi jsou podstatné dostatečně vyspělé řečnické a sociální dovednosti. Příkladem využití diskuse je například metoda zvaná „přímka postojů“. Na myšlené přímce vymezíme prostor pro odpovědi ano–nevím–ne. Učitel postupně vyslovuje tvrzení, žáci se rozmísťují podle svého názoru. Poté probíhá diskuse, žáci mohou v závislosti na argumentech měnit svůj postoj k tvrzení.

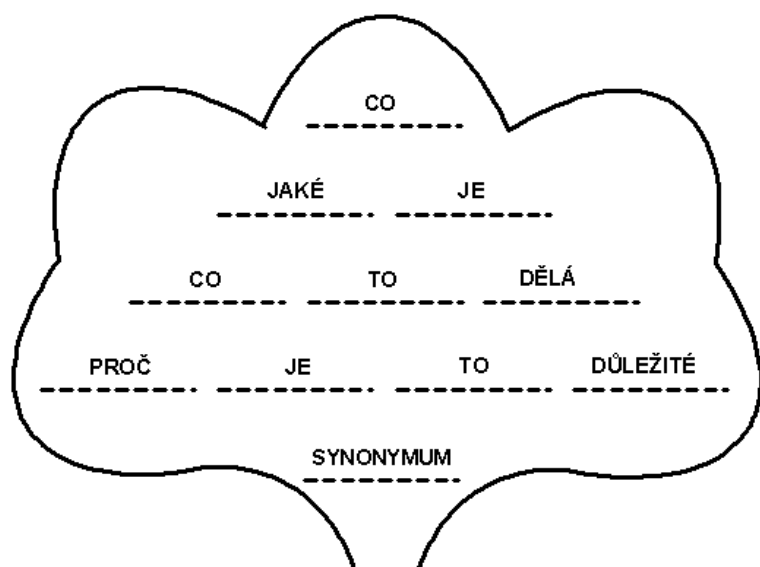
Vyhledávání a výzkum využívá přirozené zvědavosti nadaných žáků. Žák si samostatně vyhledává potřebné informace, plánuje postup bádání a řešení badatelských úloh. Získané výsledky bádání zdůvodňuje a ověřuje z dalších zdrojů. Výstupem je prezentace výsledků výzkumu, zhodnocení postupu práce i samotného výsledku. Učitel má funkci organizátora – sestavuje soubor úloh, zadává podmínky řešení, kontroluje průběh práce jednotlivých žáků.

Laboratorní a praktické práce navazují na předchozí získané vědomosti, rozvíjejí praktické dovednosti a motoriku. Mohou být součástí výzkumu, podkladem pro další výuku, metodou ověřování hypotéz či převedením získaných znalostí do praxe.

Heuristická metoda podněcuje samostatné a tvořivé myšlení. Učitel klade žákům problémové otázky (úlohy), žáci se snaží samostatně formulovat odpovědi, hypotézy, postupy řešení. Nové poznatky tak získávají žáci z vlastního úsilí, tedy s minimální pomocí učitele. V postatě jde o zkusmé řešení problému. Heuristické řešení je založeno na intuici, zkušenosti a intelektových schopnostech žáka.

Mentální mapy, nebo také pojmové mapy, vytváří žák na základě předloženého textu. Jedná se v podstatě o vizuální znázornění vzájemných vztahů pojmů nebo myšlenek. Žák získává z textu nové informace a na základě svých znalostí a zkušeností vytváří schéma. V tomto schématu jsou jasně vidět vztahy příčina – následek a hierarchie pojmů či informací, či další souvislosti. Můžeme zde zařadit např. metodu zvanou „pětílístek“, jejímž cílem je jasná formulace myšlenek, shrnutí tématu a zjištění vlastních znalostí. Každý žák si vytvoří svůj vlastní pětílístek, následuje vzájemná prezentace nebo diskuse. Brainstorming, česky „mozková bouře“, spočívá v produkci co nejvíce nápadů za co nejkratší dobu. Žákům je představen problém (úloha), každý si zapíše bezprostřední myšlenku či nápad, následuje diskuse, společné posouzení vhodnosti jednotlivých řešení a výběr řešení nejlepšího.

Schéma pětílístku:



1. řádek: 1 slovo (podstatné jméno) - název, námět, téma

2. řádek: 2 slova (přídavná jména) - vyjádření jaké je téma

3. řádek: 3 slova (slovesa) - co dělá téma

4. řádek: 4 slova (věta) - souvislé vyjádření o důležitosti tématu

5. řádek: 1 slovo (přejmenování tématu) - vyjádření podstaty, pointa

Didaktické hry jsou žáky velmi oblíbené. Rozvíjejí logické a kreativní myšlení, strategické a plánovací schopnosti. Jedná se o různé hlavolamy, šifry, slovní přesmyčky, hádanky a křížovky. Nadaní žáci preferují složitější hry, především taktické (šachy), různé simulace a problémové hry.

3) Zásady tvorby úloh pro nadané žáky

Jak již zde bylo uvedeno, žáci nadaní na matematiku jsou velmi vnímaví k rozporným informacím, lákají je úlohy s nejasným či „nemožným“ řešením (to, co nevidí na první pohled; zdánlivá neřešitelnost úlohy). Rádi hledají originální, ekonomická a jednoduchá řešení a také různé alternativy k již známým řešením. Úlohy pro takto zaměřené žáky by proto měly splňovat některá kritéria.

V první řadě jde o zaujetí pozornosti. Nelze donekonečna opakovat jeden určitý algoritmus, nadaní žáci v takovém případě velmi rychle sklouznou k nudit. Je potřeba vytvářet problémové úlohy, nejlépe z reálného prostředí, které vyžadují důkladné promyšlení, nápad a případně experimentování. V ideálním případě by zadané úlohy měly být řešitelné více způsoby, měly by rozvíjet argumentační schopnosti žáka (otázky typu „proč“, „jak“), logické myšlení a v neposlední řadě také vybízet k samostatnému vyhledávání informací potřebných pro řešení dané úlohy. Důležitá je rovněž motivace k řešení zadaných úloh. Každá práce by měla být nějakým způsobem pro žáky „přitažlivá“. Například lze využít úlohy s nečekaným (překvapivým) výsledkem nebo úlohy prakticky zaměřené (sport, astronomie, architektura/stavitelství, historie, ochrana přírodního prostředí, atd.).

Jedním z prvních kroků při tvorbě úloh pro nadané žáky je vymezení obsahu látky, kterou již žák ovládá, a určení dalšího postupu jeho rozvoje. Ke konkrétním početním úkonům, známým algoritmům a dosavadním zkušenostem žáka tímto lze vytvořit úlohy určité náročnosti tak, aby při jejich řešení žák využil své stávající dovednosti a vhodnou volbou „něčeho navíc“ získal nové znalosti. Lze tak využít přirozenou zvědavost nejen nadaných žáků a nenásilně předat nové poznatky. Výhodou je také fakt, že vlastním vyhledáváním a praktickým využitím si žáci lépe zafixují potřebné znalosti.

Žádoucí jsou rovněž úlohy spojující jednotlivé oblasti matematiky (učební celky), které spolu zdánlivě nesouvisí. Tzv. komplexní úlohy často vyžadují užití znalostí z různých kapitol matematiky při dílčích výpočtech nebo je lze řešit různými způsoby v závislosti na žákově dosažené úrovni znalostí, případně můžeme vznést požadavek na více způsobů řešení. Při řešení takových úloh žák může dobře využít abstrakce a řetězení jednotlivých myšlenek, stejně tak náhledu nad matematikou jako celkem, kreativity a dalších potřebných

vlastností dobrého matematika. Zároveň lze rozvíjet dialog a kritické myšlení poskytnutím prostoru pro diskusi k možnostem různých typů řešení, hodnocení jejich výhod a nevýhod, případně nalezení nejefektivnějšího a elegantního řešení.

Kromě získávání matematických znalostí a zkušeností by měly vytvořené úlohy dbát na co nejvyšší úroveň matematické kultury. Matematickou kulturou je zde myšlena přehlednost, systematičnost, srozumitelnost a odborná přesnost v zadání úloh i při zápisu celého řešení. Žáci se tímto naučí nejen vnímat, ale i vyžadovat a sami vytvářet matematicky a logicky precizní zápisy. Uvedme tedy obecné zásady tvorby matematických úloh (J. Houf in Hejný 2004):

- 1) určení problematiky, jíž se má daná úloha zabývat
 - určitá oblast/více oblastí matematiky, související/nesouvisející
- 2) určení pojmů vystupujících v úloze, včetně určení povahy výsledku
 - pojmy v zadání, při řešení, ve výsledku úlohy a další blízké pojmy
- 3) určení postupů, algoritmů, úprav a úvah vedoucích k řešení
 - úroveň obtížnosti – nízká/střední/vysoká, standardní/nadstandardní
- 4) určení konkrétních otázek a formulací zadání
 - různé varianty zadání, otázky jednoduché/vícebodové/navazující
- 5) výběr konkrétního zadání úlohy podle požadované náročnosti
- 6) kontrola znění úlohy, vzorové řešení
 - korekce srozumitelnosti a jednoznačnosti textu
 - vzorový výpočet včetně alternativních řešení a poznámek k důležitým mezikrokům

Pořadí uvedených zásad není úplně jednoznačné. První tři body lze podle potřeby použít v opačném pořadí (případně první bod provést dodatečně na konci postupu). Nejdůležitějším je bod poslední. Od něj se odvíjejí veškerá nedorozumění a nepochopení textu úlohy vedoucí k jejímu chybnému řešení. Méně zkušeného tvůrce úloh může také žák překvapit alternativním řešením, které tvůrce při svém propočtu neuvažoval. Proto je vhodné se k již vytvořeným úlohám vracet s určitým odstupem a doplnit případné poznámky. Úlohy pro nadané žáky by měly být určitým způsobem pro ně atraktivní, proto je vhodné hledat neškolské, netradiční, neotřelé náměty. Pro náměty jednotlivých úloh lze využít vlastní fantazii nebo různé druhy literatury, např. sbírky příkladů, matematické časopisy, soutěže,

apod. Abychom se vyhnuli tupému opakování a neustálému přejímání týchž úloh, převezmeme pouze hlavní pointu úlohy, která nás zaujala, a uvedeným postupem ji modifikujeme. Úlohu můžeme podle potřeby zjednodušit nebo ztížit. Zjednodušení lze provést například rozdělením na několik podúloh, které na sebe mohou a nemusí navazovat, doplněním návodných úloh nebo vzorovým vyřešením úlohy podobného typu. Ztížení je pak procesem opačným, lze je například provést vypuštěním „prozrazených“ mezivýsledků (lehčí podúlohy).

III. Sbírka příkladů

1) Příklady „důkazové“

Jak název napovídá, jsou v této skupině zařazeny především úlohy vyžadující znalost základních principů důkazu. Využity mohou být například při výuce důkazových metod, úprav složitějších (iracionálních) výrazů a řešení rovnic či nerovnic s více neznámými. Jedná se o úlohy řešitelné pomocí přímých algebraických úprav daného výrazu (rovnosti či nerovnosti) a úlohy vyžadující jednoduché úvahy a znalosti vztahů. Využijí se zde vlastnosti kvadratického trojčlenu, Viètovy vztahy, pravidla umocňování a odmocňování, binomické vzorce, Dirichletův princip, matematická indukce a další.

Příklady řešené

1. Určete koeficienty a , b mnohočlenu $x^2 + ax + b$; víte-li, že součet jeho kořenů je roven rozdílu koeficientů $(a - b)$ a součin kořenů je roven podílu $\left(\frac{a}{b}\right)$.

Řešení:

– úvaha: $x^2 + ax + b = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$,
kde x_1 , x_2 jsou kořeny mnohočlenu $x^2 + ax + b$

– soustava rovnic podle zadání: $x_1 + x_2 = a - b$
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{a}{b}$

– soustava rovnic podle Viètových vztahů: $x_1 + x_2 = -a$
 $x_1 \cdot x_2 = b$

– výpočet:

$$(1) \quad a - b = -a$$

$$(2) \quad \frac{a}{b} = b \quad \Rightarrow \text{podmínka: } b \neq 0$$

$$\begin{array}{lcl}
\text{-- úprava rovnic} & a = \frac{1}{2} \cdot b & \\
& \underline{a = b^2} & \\
\text{-- rozdíl rovnic} & b^2 - \frac{1}{2} \cdot b = 0 & \\
& b \cdot \left(b - \frac{1}{2}\right) = 0 & \Rightarrow b \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \wedge b \neq 0 \\
& & \Rightarrow \underline{\underline{b = \frac{1}{2}}}, \underline{\underline{a = \frac{1}{4}}}
\end{array}$$

– výsledek: Zadání vyhovuje pouze uspořádaná dvojice $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, daný mnohočlen má tvar $x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

2. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y , platí nerovnost $x^2 - 4 \cdot xy + 8 \cdot y^2 - 6 \cdot x - 28 \cdot y + 109 \geq 0$.

Řešení:

$$\begin{array}{lcl}
\text{-- úprava levé strany nerovnosti} & x^2 - 4 \cdot xy + 8 \cdot y^2 - 6 \cdot x - 28 \cdot y + 109 \geq 0 & \\
& (x^2 - 4 \cdot xy - 6 \cdot x) + 8 \cdot y^2 - 28 \cdot y + 109 \geq 0 & \\
\text{-- využití vzorce } (A - B - C)^2 & (x - 2 \cdot y - 3)^2 - 4 \cdot y^2 - 12 \cdot y - 9 + 8 \cdot y^2 - 28 \cdot y + 109 \geq 0 & \\
& (x - 2 \cdot y - 3)^2 + 4 \cdot y^2 - 40 \cdot y + 100 \geq 0 & \\
\text{-- vytknutí 4} & (x - 2 \cdot y - 3)^2 + 4 \cdot (y^2 - 10 \cdot y + 25) \geq 0 & \\
\text{-- využití vzorce } (A - B)^2 & (x - 2 \cdot y - 3)^2 + 4 \cdot (y - 5)^2 \geq 0 &
\end{array}$$

– výsledek: Součet dvou a více sudých mocnin reálných čísel je vždy nezáporný, nerovnost nutně platí pro všechna reálná čísla x, y .

cbd.

3. Dokažte, že pro libovolná tři kladná reálná čísla x, y, z platí nerovnost

$$(x^x \cdot y^y \cdot z^z)^2 \geq x^{y+z} \cdot y^{z+x} \cdot z^{x+y}.$$

Řešení:

– pravidlo umocňování: $(a \leq b) \Rightarrow (a^r \leq b^r)$, pro všechna kladná reálná čísla a, b, r

– úvaha: A) $x^x \cdot y^y \geq x^y \cdot y^x$? B) $y^y \cdot z^z \geq y^z \cdot z^y$? C) $x^x \cdot z^z \geq x^z \cdot z^x$?
 $x^{x-y} \geq y^{x-y}$ $y^{y-z} \geq z^{y-z}$ $x^{x-z} \geq z^{x-z}$

– pro úvahu A) dostaneme 3 případy: a) $x > y$
 b) $x = y$
 c) $x < y$

– případ a): $x > y \dots$ tedy $x - y > 0$
 platí $x^{x-y} \geq y^{x-y}$

– případ b): $x = y \dots$ tedy $x - y = 0$
 platí $x^0 \geq y^0$, tj. $1 \geq 1$, tj. $x^{x-y} \geq y^{x-y}$

– případ c): $x < y \dots$ tedy $x - y < 0$, tzn. $-(x - y) > 0$
 platí $x^{-(x-y)} \leq y^{-(x-y)}$, tj. $x^{x-y} \geq y^{x-y}$

– tímto je dokázána správnost úvahy A),
 úvahy B) a C) lze dokázat obdobně (nerovnosti s ? jsou správné)

– soustava 3 nerovnic

$$x^x \cdot y^y \geq x^y \cdot y^x$$

$$y^y \cdot z^z \geq y^z \cdot z^y$$

$$x^x \cdot z^z \geq x^z \cdot z^x$$

– součin všech 3 nerovnic

$$x^x \cdot x^x \cdot y^y \cdot y^y \cdot z^z \cdot z^z \geq x^y \cdot x^z \cdot y^x \cdot y^z \cdot z^x \cdot z^y$$

$$(x^x)^2 \cdot (y^y)^2 \cdot (z^z)^2 \geq x^{y+z} \cdot y^{x+z} \cdot z^{x+y}$$

$$(x^x \cdot y^y \cdot z^z)^2 \geq x^{y+z} \cdot y^{z+x} \cdot z^{x+y}$$

– výsledek: Libovolná mocnina kladného reálného čísla je opět kladné reálné číslo, součin dvou (či více) kladných reálných čísel je opět kladné reálné číslo, při úpravě nerovnosti jsou proto všechny úpravy ekvivalentní. Nerovnost nutně platí pro všechna kladná reálná čísla x, y, z .

cbd.

4. Určete, které z čísel 5^{500} , 7^{300} je větší.

Řešení:

- postup 1): úprava na nižší mocninu a porovnání celých čísel
– pravidlo umocňování ... $(a < b) \Rightarrow (a^n < b^n)$, platí pro reálná $a > 1$, $b > 1$ a $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{r} 5^{500} \qquad \qquad 7^{300} \\ \hline (5^5)^{100} \qquad (7^3)^{100} \\ 5^5 = 3\,125 \qquad 7^3 = 343 \end{array}$$

- postup 2): logaritmování a porovnání desetinných hodnot
– pravidlo logaritmování ... $\ln(a^b) = b \cdot \ln a$, platí pro všechna $a \in \mathbb{R}^+$ a $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{r} 5^{500} \qquad \qquad 7^{300} \\ \hline \ln(5^{500}) \qquad \ln(7^{300}) \\ 500 \cdot \ln 5 \qquad 300 \cdot \ln 7 \\ 804,72 \qquad \qquad 583,77 \end{array}$$

- výsledek: Pro daná čísla platí $7^{300} < 5^{500}$.

5. Dokažte, že ze sta libovolných navzájem různých prvočísel je vždy možné vybrat 9 prvočísel tak, že rozdíl každých dvou je dělitelný 13.

Řešení:

- úvaha: ze 100 libovolně vybraných navzájem různých prvočísel může být pouze jedno dělitelné 13 (tj. prvočíslo 13), zbývajících 99 prvočísel pak lze rozdělit do zbytkových tříd po dělení číslem 13, ve zbytkové třídě $\bar{0}$ je pouze prvočíslo 13, v každé další ze 12 zbytkových tříd je tedy (při maximálně rovnoměrném rozdělení) $\frac{99}{12} = 8 + \frac{1}{4}$ prvočísel
- výsledek: Podle Dirichletova principu je v některé zbytkové třídě alespoň 9 prvočísel. Rozdíl libovolných dvou prvočísel ze stejné zbytkové třídy po dělení číslem 13 je nutně tímto číslem dělitelný.

cbd.

Příklady neřešené

1. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla p , q a reálné číslo $a \neq 0$ má rovnice

$$\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} = \frac{1}{a^2}$$
 dva různé reálné kořeny.

2. Určete koeficienty a , b mnohočlenu $x^2 + ax + b$; víte-li, že součet jeho kořenů je roven podílu koeficientů $\left(\frac{a}{b}\right)$ a součin kořenů je roven rozdílu koeficientů $(a - b)$.

3. Dokažte, že pokud součin některých 2 kořenů mnohočlenu $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ je roven součinu zbylých dvou kořenů, pak platí $a^2 d = c^2$.

4. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x , y , platí nerovnost $x^2 + 2 \cdot xy + 4 \cdot y^2 - 8 \cdot x - 26 \cdot y + 43 \geq 0$.

5. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x , y , z platí nerovnost $x^2 + 3 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2 + 2 \cdot xz - 10 \cdot x + 12 \cdot y - 22 \cdot z + 73 \geq 0$.

6. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x , y , z platí nerovnost $x^2 + 3 \cdot y^2 + 3 \cdot z^2 + 2 \cdot xy + 2 \cdot xz - 4 \cdot yz \geq 0$.

7. Dokažte, že pro libovolné reálné číslo $x > 1$ platí nerovnice $\frac{1}{\sqrt{x}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$.

8. Dokažte, že pro libovolné reálné číslo $x > 1$ platí nerovnice $\frac{1}{\sqrt{x}} > 2 \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

9. Dokažte, že pro kladné reálné číslo $x > 1$ platí nerovnice $\frac{x^{2010} + 1}{x^{2011} + 1} > \frac{x^{2011} + 1}{x^{2012} + 1}$.

10. Určete, které z čísel 7^{500} , 3^{700} je větší.

11. Seřadte daná čísla od nejmenšího po největší: 3^{500} ; 3^{700} ; 5^{300} ; 5^{500} ; 5^{700} ; 7^{300} ; 7^{500} .
12. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a , b , c platí implikace $(a \leq b \leq c) \Rightarrow \left(\frac{a}{a+1} \leq \frac{b}{b+1} \leq \frac{c}{c+1} \right)$.
13. Dokažte, že pro libovolnou posloupnost kladných reálných čísel $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, kde $n \geq 2$ je přirozené číslo, platí nerovnost $\frac{a_i}{a_i+1} \leq \frac{a_{i+1}}{a_{i+1}+1}$, pro všechna $i = 1, \dots, (n-1)$.
14. Dokažte, že ze 70 libovolných navzájem různých prvočísel je vždy možné vybrat 12 prvočísel tak, že rozdíl každých dvou je dělitelný 7.
15. Ve čtverci o straně 1,4 m je dáno 300 bodů. Dokažte, že existuje kružnice o poloměru $\frac{2}{7}$ m, uvnitř které leží alespoň 7 z daných bodů.
16. V kouli o poloměru 1 m je dáno 2000 bodů. Dokažte, že existuje koule o poloměru 20 cm, uvnitř které leží alespoň 5 z daných bodů.

Výsledky

1. úprava na kvadratickou rovnici s parametry a, p, q za podmínek $x \neq p$ a $x \neq q$, výpočet diskriminantu $D = 4 \cdot a^4 + (p - q)^2 \Rightarrow$ součet dvou sudých mocnin reálných čísel je vždy nezáporný $\Rightarrow$ cbd.
2. řešení: $a = -2, b = -1$;
využití Viětových vztahů pro kvadratickou rovnici, výpočet soustavy 2 rovnic o 2 neznámých za podmínky $b \neq 0$
3. rozklad mnohočlenu 4. řádu na součin dvou kvadratických trojčlenů, využití Viětových vztahů pro kvadratickou rovnici, úprava mnohočlenu 4. řádu $\Rightarrow$ porovnání koeficientů podle zadání $\Rightarrow$ cbd.
4. úprava levé strany nerovnosti (využití vzorců, postupné vytýkání) až na tvar $(x + y - 4)^2 + 3 \cdot (y - 3)^2 \geq 0 \Rightarrow$ součet dvou a více sudých mocnin reálných čísel je vždy nezáporný $\Rightarrow$ cbd.
5. úprava levé strany nerovnosti (využití vzorců, postupné vytýkání) až na tvar $(x + z - 5)^2 + 3 \cdot (y + 2)^2 + (z - 6)^2 \geq 0 \Rightarrow$ součet dvou a více sudých mocnin reálných čísel je vždy nezáporný $\Rightarrow$ cbd.
6. úprava levé strany nerovnosti (využití vzorců, postupné vytýkání) až na tvar $(x + y + z)^2 + 2 \cdot (y - z)^2 \geq 0 \Rightarrow$ součet dvou a více sudých mocnin reálných čísel je vždy nezáporný $\Rightarrow$ cbd.
7. z vlastností odmocniny a vztahu $0 < (x - 1) < (x + 1)$ vyplývá, že obě strany nerovnosti jsou kladné, úprava ekvivalentními kroky až na tvar $0 < 1 \Rightarrow$ cbd.
8. z vlastností odmocniny a vztahu $0 < x < (x + 1)$ vyplývá, že obě strany nerovnosti jsou kladné, úprava ekvivalentními kroky až na tvar $0 < 1 \Rightarrow$ cbd.

9. pro všechna $y \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ platí nerovnost $\frac{x^y + 1}{x^{y+1} + 1} > \frac{x^{y+1} + 1}{x^{y+2} + 1}$,

úprava nerovnosti ekvivalentními kroky až na tvar $x^{2010} \cdot (x-1)^2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{cbd.}}$

10. řešení: $3^{700} < 7^{500}$

úprava mocnin na tvar $(a^b)^{100}$, přímý výpočet nižších mocnin a porovnání, nebo logaritmizace a porovnání přibližných desetinných hodnot

11. řešení: $5^{300} < 3^{500} < 7^{300} < 3^{700} < 5^{500} < 7^{500} < 5^{700}$

úprava mocnin na tvar $(a^b)^{100}$, přímý výpočet nižších mocnin a porovnání, nebo logaritmizace a porovnání přibližných desetinných hodnot

12. úprava nerovností $a \leq b$, $b \leq c$ z předpokladu ekvivalentními kroky až na tvar

$$\frac{a}{a+1} \leq \frac{b}{b+1}, \frac{b}{b+1} \leq \frac{c}{c+1} \text{ a tranzitivní zákon} \Rightarrow \underline{\text{cbd.}}$$

13. úprava nerovností $a_1 \leq a_2$ z předpokladu ekvivalentními kroky až na tvar

$$\frac{a_1}{a_1+1} \leq \frac{a_2}{a_2+1}, \text{ důkaz pomocí matematické indukce a tranzitivní zákon} \Rightarrow \underline{\text{cbd.}}$$

14. Dirichletův princip (7 zbytkových tříd po dělení sedmi, pouze jedno možné prvočíslo ve zbytkové třídě $\bar{0}$) $\Rightarrow \underline{\text{cbd.}}$

15. rozdělení čtverce na čtverečky o straně 0,2 m, kterým lze opsat kružnici o poloměru

$$\frac{2}{7} \text{ m} \left(\sqrt{2} \cdot 0,2 < \frac{2}{7} \right), \text{ čtverečků o straně 0,2 m je ve čtverci o straně 1,4 m celkem 49}$$

$\Rightarrow$ Dirichletův princip (alespoň 1 čtvereček obsahuje alespoň 7 bodů) $\Rightarrow \underline{\text{cbd.}}$

16. kouli o poloměru 1 m lze vepsat do krychle o hraně 2 m, rozdělení krychle na krychličky o hraně 25 cm vypsatečné do koulí o poloměru $\sqrt{2} \cdot 12,5$ cm $(\sqrt{2} \cdot 12,5 < 20)$, kouli o poloměru 1 m náleží pouze $(8^3 - 8 - 12 \cdot 6)$ krychliček o hraně 25 cm $\Rightarrow$ Dirichletův princip (alespoň 1 krychlička obsahuje alespoň 5 bodů) $\Rightarrow \underline{\text{cbd.}}$

2) Příklady „dělitelnosti“

V této skupině jsou zařazeny především úlohy vyžadující znalost základních vlastností a kritérií dělitelnosti. Vztaženy mohou být například k tématu číselných množin (přirozená a celá čísla) a řešení rovnic o více neznámých. Jedná se o úlohy řešitelné pomocí jednoduché úvahy a pravidel dělitelnosti. Využijí se zde pravidla umocňování, ciferný zápis přirozených čísel a tzv. kongruence (tj. rozklad množiny všech celých čísel na zbytkové třídy po dělení číslem $n \geq 2$).

Příklady řešené

1. Určete všechna přirozená trojciferná čísla, jestliže víte, že při dělení tohoto čísla číslem 9 dostaneme součet druhých mocnin jeho cifer.

Řešení:

- zápis hledaného čísla $x = \overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c = 9 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$
kde $a, b, c \in C^* = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \wedge a \neq 0$
- úprava zápisu (rovnice) $(99 \cdot a + 9 \cdot b) + (a + b + c) = 9 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$
 $(a + b + c) = 9 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - 11 \cdot a - b) \quad (*)$
- odhad řešení součet $(a + b + c)$ je dělitelný 9
zároveň platí $1 \leq (a + b + c) \leq 27$
proto součet $(a + b + c) \in \{9, 18, 27\}$
- uvažujeme 3 případy:
 - a) součet $(a + b + c) = 9$
 - b) součet $(a + b + c) = 18$
 - c) součet $(a + b + c) = 27$
- případ a): součet $(a + b + c) = 9 \dots$ tedy $c = 9 - b - a$
- dosazení do rovnice (*) $9 = 9 \cdot (a^2 + b^2 + (9 - b - a)^2 - 11 \cdot a - b)$
- úprava na kvadratickou rovnici s parametrem b
 $1 = 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 + 81 - 18 \cdot a - 18 \cdot b + 2 \cdot ab - 11 \cdot a - b$
 $0 = 2 \cdot a^2 + (2 \cdot b - 29) \cdot a + (2 \cdot b^2 - 19 \cdot b + 80)$
- diskriminant dané rovnice $D = (2 \cdot b - 29)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2 \cdot b^2 - 19 \cdot b + 80) =$

$$= -12 \cdot b^2 + 36 \cdot b + 201$$

– podmínka reálného řešení $D \geq 0 \wedge b \in C^*$

– odhad parametru b $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

– výpočet a z kvadratické rovnice a dopočet řešení:

$$b = 0: \quad 0 = 2 \cdot a^2 - 29 \cdot a + 80 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{201}}{4}; \quad a_1, a_2 \notin C^*$$

$$\underline{\underline{K_1 = \{/\}}}$$

$$b = 1: \quad 0 = 2 \cdot a^2 - 27 \cdot a + 63 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{27 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{27 \pm 15}{4};$$

$$a_1 = \frac{27+15}{4} = \frac{21}{2} \notin C^*, \quad a_2 = \frac{27-15}{4} = 3 \in C^* \quad \Rightarrow \quad c_2 = 9 - 1 - 3 = 5 \in C^*$$

$$\underline{\underline{K_2 = \{(3, 1, 5)\}}}$$

$$b = 2: \quad 0 = 2 \cdot a^2 - 25 \cdot a + 50 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{25 \pm 15}{4};$$

$$a_1 = \frac{25+15}{4} = 10 \notin C^*, \quad a_2 = \frac{25-15}{4} = \frac{5}{2} \notin C^*$$

$$\underline{\underline{K_3 = \{/\}}}$$

$$b = 3: \quad 0 = 2 \cdot a^2 - 23 \cdot a + 41 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{201}}{4}; \quad a_1, a_2 \notin C^*$$

$$\underline{\underline{K_4 = \{/\}}}$$

$$b = 4: \quad 0 = 2 \cdot a^2 - 21 \cdot a + 36 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{153}}{4}; \quad a_1, a_2 \notin C^*$$

$$\underline{\underline{K_5 = \{/\}}}$$

$$b = 5: \quad 0 = 2 \cdot a^2 - 19 \cdot a + 35 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{19 \pm 9}{4};$$

$$a_1 = \frac{19+9}{4} = 7 \in C^*, \quad a_2 = \frac{19-9}{4} = \frac{5}{2} \notin C^* \quad \Rightarrow \quad c_1 = 9 - 5 - 7 = -3 \notin C^*$$

$$\underline{\underline{K_6 = \{/\}}}$$

– případ b): součet $(a + b + c) = 18$... tedy $c = 18 - b - a$

– dosazení do rovnice (*) $18 = 9 \cdot (a^2 + b^2 + (18 - b - a)^2 - 11 \cdot a - b)$

– úprava na kvadratickou rovnici s parametrem b $2 = 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 + 324 - 36 \cdot a - 36 \cdot b + 2 \cdot ab - 11 \cdot a - b$
 $0 = 2 \cdot a^2 + (2 \cdot b - 47) \cdot a + (2 \cdot b^2 - 37 \cdot b + 322)$

– diskriminant dané rovnice $D = (2 \cdot b - 47)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2 \cdot b^2 - 37 \cdot b + 322) =$
 $= -12 \cdot b^2 + 108 \cdot b - 367$

– podmínka reálného řešení $D \geq 0 \wedge b \in C^*$

– odhad parametru b $b \in \{/\}$

– výpočet a z kvadratické rovnice a dopočet řešení:

$K_7 = \{/\}$

– případ c): součet $(a + b + c) = 27$... tedy $c = 27 - b - a$

– dosazení do rovnice (*) $27 = 9 \cdot (a^2 + b^2 + (27 - b - a)^2 - 11 \cdot a - b)$

– úprava na kvadratickou rovnici s parametrem b $3 = 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 + 729 - 54 \cdot a - 54 \cdot b + 2 \cdot ab - 11 \cdot a - b$
 $0 = 2 \cdot a^2 + (2 \cdot b - 65) \cdot a + (2 \cdot b^2 - 55 \cdot b + 726)$

– diskriminant dané rovnice $D = (2 \cdot b - 65)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2 \cdot b^2 - 55 \cdot b + 726) =$
 $= -12 \cdot b^2 + 180 \cdot b - 1583$

– podmínka reálného řešení $D \geq 0 \wedge b \in C^*$

– odhad parametru b $b \in \{/\}$

– výpočet a z kvadratické rovnice a dopočet řešení:

$K_8 = \{/\}$

– výsledek: Množina řešení je $K = \bigcup_{i=1}^8 K_i = \{(3, 1, 5)\}$, $315 = 9 \cdot 35 = 9 \cdot (9 + 1 + 25)$.

Existuje jediné přirozené trojčíslo odpovídající zadání, a to je číslo 315.

2. Nalezněte poslední cifru součtu všech 57. mocnin všech různých čtyřciferných čísel, která vzniknou záměnou cifer čísla 3357 včetně jeho.

Řešení:

– výpis a rozdělení všech uvažovaných čísel podle poslední cifry:

poslední cifra							mocniny končí cifrou	57. mocnina končí cifrou
3	3573	3753	5373	5733	7353	7533	3, 9, 7, 1, 3, atd.	3
5	3375	3735	7335	---	---	---	5, 5, 5, 5, 5, atd.	5
7	3357	3537	5337	---	---	---	7, 9, 3, 1, 7, atd.	7

– součet posledních cifer všech mocnin: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5 + 7 + 7 + 7 = \underline{54}$

– výsledek: Součet všech 57. mocnin uvažovaných čísel končí cifrou 4.

3. Nalezněte poslední 2 cifry čísla $13^{13^{13}}$.

Řešení:

– úvaha: libovolná přirozená mocnina čísla 13 končí některou z cifer 3, 9, 7, 1, poslední cifry se pravidelně opakují v závislosti na mocnině, poslední 2 cifry libovolného čísla odpovídají zbytku po dělení tohoto čísla stem

– využití kongruencí: $13^{13} \equiv 3 \pmod{4}$... $13^{13} = 4 \cdot k + 3$

$$13^4 \equiv 61 \pmod{100} \quad \dots \quad 13^4 = 100 \cdot l + 61$$

– úprava zadání $13^{13^{13}} = 13^{4 \cdot k + 3} = 13^{4 \cdot k} \cdot 13^3 = 13^{4 \cdot k} \cdot 2197$

– výpočet kongruence $13^{4 \cdot k} \cdot 2197 \equiv 61 \cdot 2197 \pmod{100}$

$$13^{4 \cdot k} \cdot 2197 \equiv 134017 \pmod{100}$$

$$13^{4 \cdot k} \cdot 2197 \equiv 17 \pmod{100}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{13^{13^{13}} \equiv 17 \pmod{100}}}$$

– výsledek: Číslo $13^{13^{13}}$ končí ciframi 17.

4. Určete den v roce, víte-li, že součet čísla dne vynásobeného číslem 12 a čísla měsíce vynásobeného číslem 31 je 531.

Řešení:

- označení: d ... číslo dne
 m ... číslo měsíce

- sestavení rovnice a úprava na kongruenci (vzhledem k neznámé d)

$$\begin{aligned} 12 \cdot d + 31 \cdot m &= 531 \\ 31 \cdot m &\equiv 531 \pmod{12} \\ 7 \cdot m &\equiv 3 \pmod{12} \\ 7 \cdot m &\equiv -21 \pmod{12} \\ m &\equiv -3 \pmod{12} \\ m &\equiv 9 \pmod{12} \end{aligned}$$

- výpočet neznámé m

$$m = 9 + 12 \cdot t, t \in \mathbb{Z}$$

- dosazení do původní rovnice

$$531 = 12 \cdot d + 31 \cdot (9 + 12 \cdot t)$$

- výpočet neznámé d

$$12 \cdot d = 531 - 279 - 372 \cdot t$$

$$12 \cdot d = 252 - 372 \cdot t$$

$$d = 21 - 31 \cdot t, t \in \mathbb{Z}$$

- dopočet řešení

$$m = 9 + 12 \cdot t, t \in \mathbb{Z} \wedge m \leq 12$$

$$d = 21 - 31 \cdot t, t \in \mathbb{Z} \wedge d \leq 31$$

$$t = 0 \Rightarrow \underline{\underline{m = 9}}, \underline{\underline{d = 21}}$$

- výsledek: Hledané datum je 21. září (tj. 21.9.).

5. Na množině celých čísel řešte rovnici $12 \cdot x^2 + 3 \cdot y - 11 \cdot x + 5 = 0$.

Řešení:

- úprava rovnice na kongruenci (vzhledem k neznámé y) $12 \cdot x^2 + 3 \cdot y - 11 \cdot x + 5 = 0$
 $12 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 5 \equiv 0 \pmod{3}$
- výpočet kongruence $x + 2 \equiv 0 \pmod{3}$
 $x \equiv -2 \pmod{3}$
 $x \equiv 1 \pmod{3}$
- výpočet neznámé x $x = 1 + 3 \cdot t, t \in \mathbb{Z}$
- dosazení do původní rovnice $0 = 12 \cdot (1 + 3 \cdot t)^2 + 3 \cdot y - 11 \cdot (1 + 3 \cdot t) + 5$
- výpočet neznámé y $-3 \cdot y = 12 + 72 \cdot t + 108 \cdot t^2 - 11 - 33 \cdot t + 5$
 $y = -36 \cdot t^2 - 13 \cdot t - 2, t \in \mathbb{Z}$
- výsledek: Rovnice má nekonečně mnoho řešení ve tvaru uspořádaných dvojic $(1 + 3 \cdot t, -36 \cdot t^2 - 13 \cdot t - 2)$, kde t je celočíselný parametr

Příklady neřešené

1. Určete všechna přirozená trojciferná čísla, jestliže víte, že při dělení tohoto čísla číslem 12 dostaneme součet druhých mocnin jeho cifer.
2. Určete, kolika nulami končí číslo $111!$.
3. Určete, kolikrát lze číslo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 999 \cdot 1000$ dělit deseti beze zbytku.
4. Určete, kolikrát lze číslo $2011!$ dělit číslem 10 beze zbytku.
5. Nalezněte poslední cifru součtu všech 169. mocnin všech různých trojciferných čísel, která vzniknou záměnou cifer čísla 169 včetně jeho.
6. Nalezněte poslední cifru součtu všech 2011. mocnin všech různých čtyřciferných čísel, která vzniknou záměnou cifer čísla 2011 včetně jeho.
7. Nalezněte poslední 2 cifry čísla 7^{7^7} .
8. Nalezněte poslední 2 cifry čísla 12^{8^8} .
9. Nalezněte poslední 2 cifry čísla $14^{14^{14}}$.
10. Na množině celých čísel řešte rovnici $7 \cdot x^2 + 3 \cdot y - 11 \cdot x + 13 = 0$.
11. Na množině celých čísel řešte rovnici $x^2 + 4 \cdot y^2 + 8 \cdot x + 24 \cdot y + 11 \cdot z = 3$.
12. Určete den v roce, víte-li, že součet čísla dne vynásobeného číslem 12 a čísla měsíce vynásobeného číslem 31 je 273.
13. Určete den v roce, víte-li, že součet čísla dne vynásobeného číslem 12 a čísla měsíce vynásobeného číslem 31 je 136.

- 14.** Určete den v roce, víte-li, že součet čísla dne vynásobeného číslem 12 a čísla měsíce vynásobeného číslem 31 je 660.
- 15.** Určete den v roce, víte-li, že součet čísla dne vynásobeného číslem 12 a čísla měsíce vynásobeného číslem 31 je 744.

Výsledky

1. řešení: pouze číslo 240, $240 = 12 \cdot 20 = 12 \cdot (2^2 + 4^2 + 0^2)$;
využití různých zápisů hledaného čísla (ciferný, v desítkové soustavě), úprava rovnice, odhad minimální (resp. maximální) hodnoty levé strany rovnice a využití dělitelnosti, vyjádření jedné z neznámých a úprava na kvadratickou rovnici s jedním parametrem, vyjádření existence reálného řešení kvadratické rovnice, dopočet ostatních neznámých
2. řešení: číslo 111! končí 26 nulami;
každá nula na konci čísla značí dělitelnost číslem 10 ($10 = 2 \cdot 5$), využití prvočíselného rozkladu daného čísla, násobnost prvočísla 5 odpovídá počtu nul na konci daného čísla
3. řešení: číslo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 999 \cdot 1000$ dělit deseti 249-krát;
každá nula na konci čísla značí dělitelnost číslem 10 ($10 = 2 \cdot 5$), využití prvočíselného rozkladu daného čísla, násobnost prvočísla 5 odpovídá počtu nul na konci daného čísla
4. řešení: číslo 2011! dělit číslem deset 501-krát;
každá nula na konci čísla značí dělitelnost číslem 10 ($10 = 2 \cdot 5$), využití prvočíselného rozkladu daného čísla, násobnost prvočísla 5 odpovídá počtu nul na konci daného čísla
5. řešení: daný součet končí cifrou 2;
rozdělení uvažovaných čísel podle poslední cifry (1, 6 nebo 9), určení poslední cifry pro 169. mocninu čísla 1 (resp. 6 a 9), součet posledních cifer všech vypočtených mocnin ($1 + 1 + 6 + 6 + 9 + 9 = 32$)
6. řešení: daný součet končí cifrou 0;
rozdělení uvažovaných čísel podle poslední cifry (0, 1 nebo 2), určení poslední cifry pro 2011. mocninu čísla 0 (resp. 1 a 2), součet posledních cifer všech vypočtených mocnin ($0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 8 + 8 = 20$)

7. řešení: číslo 7^{7^7} ciframi 43;
využití kongruencí $7^7 \equiv 3 \pmod{4}$ a $7^4 \equiv 1 \pmod{100}$, zápis mocniny základu (čísla 7) pomocí dělitelnosti číslem 4, výpočet posledních dvou cifer daného čísla pomocí kongruence modulo 100
8. řešení: číslo 12^{8^8} končí ciframi 84;
využití kongruencí $8^8 \equiv 2 \pmod{4}$ a $12^4 \equiv 36 \pmod{100}$, zápis mocniny základu (čísla 12) pomocí dělitelnosti číslem 4, výpočet posledních dvou cifer daného čísla pomocí kongruence modulo 100
9. řešení: číslo $14^{14^{14}}$ končí ciframi 36;
využití kongruencí $14^{14} \equiv 2 \pmod{4}$ a $14^4 \equiv 16 \pmod{100}$, zápis mocniny základu (čísla 14) pomocí dělitelnosti číslem 4, výpočet posledních dvou cifer daného čísla pomocí kongruence modulo 100
10. řešení: $x = 1 + 3t$, $y = -21 \cdot t^2 - 3 \cdot t - 3$, kde parametr $t \in \mathbb{Z}$;
úprava rovnice na kongruenci modulo 3 (koeficient u členu y) o neznámé x , úprava až na tvar $(x-1)^2 \equiv 0 \pmod{3}$, odhad neznámé x pomocí zbytkových tříd, dopočet y
11. řešení: $x = -4 + 11 \cdot t$, $y = -3 + 11 \cdot s$, $z = -11 \cdot t^2 - 44 \cdot s^2 - 5$, kde parametry $t, s \in \mathbb{Z}$;
úprava rovnice na kongruenci modulo 11 (koeficient u členu z) o neznámých x a y ,
úprava až na tvar $(x+4)^2 + [2 \cdot (y+3)]^2 \equiv 0 \pmod{11}$, využití pravidla o prvočísle (*),
výpočet neznámých x a y , dopočet z
- (*) Jestliže pro prvočíslo p platí, že $[p \equiv 3 \pmod{4}] \wedge [a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}]$,
pak platí, že $[a \equiv 0 \pmod{p}] \wedge [b \equiv 0 \pmod{p}]$
12. řešení: 15. března (15.3.);
úprava rovnice na kongruenci (např. modulo 12), výpočet neznámé m (měsíc),
dopočet neznámé d (den), určení parametru $(m \leq 12 \wedge d \leq 31)$ a hledaného data

13. řešení: 1. dubna (1.4.);

úprava rovnice na kongruenci (např. modulo 12), výpočet neznámé m (měsíc),
dopočet neznámé d (den), určení parametru $(m \leq 12 \wedge d \leq 31)$ a hledaného data

14. řešení: 24. prosince (24.12.);

úprava rovnice na kongruenci (např. modulo 12), výpočet neznámé m (měsíc),
dopočet neznámé d (den), určení parametru $(m \leq 12 \wedge d \leq 31)$ a hledaného data

15. řešení: 31. prosince (31.12.);

úprava rovnice na kongruenci (např. modulo 12), výpočet neznámé m (měsíc),
dopočet neznámé d (den), určení parametru $(m \leq 12 \wedge d \leq 31)$ a hledaného data

3) Příklady „součtů a soustav“

V této skupině jsou zařazeny úlohy na součet několika prvních členů dané posloupnosti a soustavy rovnic (cyklické, s parametrem). Vztaženy mohou být například k tématu úprava rovnic, rovnice s parametrem nebo k posloupnostem. Využijí se zde metody součtu a rozdílu při řešení soustav rovnic, pravidla umocňování, kombinatorické identity, binomická věta, a další. Úlohy vyžadují pozornost při jednotlivých úpravách, v případě důsledkových úprav je potřeba výsledné řešení ověřit zkouškou. Některé z úloh na součet několika prvních členů dané posloupnosti lze se zadáním výsledku přeformulovat na důkazové úlohy řešitelné podle principu matematické indukce.

Příklady řešené

1. Určete součet prvních n -členů posloupnosti $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n$.

Řešení:

– označení: $s_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n$

– výpočet:

$$\begin{array}{l} s_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n \\ \text{– trojnásobek součtu} \quad 3 \cdot s_n = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^n + 3^{n+1} \\ \text{– rozdíl} \quad \begin{array}{r} (3-1) \cdot s_n = -3 + 3^2 - 3^2 + 3^3 - 3^3 + \dots + 3^n - 3^n + 3^{n+1} \\ 2 \cdot s_n = -3 + 3^{n+1} \\ s_n = \frac{3^{n+1} - 3}{2} \end{array} \end{array}$$

– výsledek: Součet prvních n -členů dané posloupnosti je $s_n = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$.

3. Určete součet prvních n -členů posloupnosti $1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} + \dots + n \cdot \binom{n}{n}$.

Řešení:

– označení: $s_n = 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} + \dots + n \cdot \binom{n}{n}$

– výpočet:

$$s_n = 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \dots + (n-1) \cdot \binom{n}{n-1} + n \cdot \binom{n}{n}$$

– opačné pořadí členů součtu
úprava podle pravidla (*)

$$s_n = n \cdot \binom{n}{0} + (n-1) \cdot \binom{n}{1} + \dots + 2 \cdot \binom{n}{n-2} + 1 \cdot \binom{n}{n-1}$$

– součet

$$2 \cdot s_n = n \cdot \binom{n}{0} + [1 + (n-1)] \cdot \binom{n}{1} + \dots + [(n-1) + 1] \cdot \binom{n}{n-1} + n \cdot \binom{n}{n}$$

$$2 \cdot s_n = n \cdot \binom{n}{0} + n \cdot \binom{n}{1} + n \cdot \binom{n}{2} + \dots + n \cdot \binom{n}{n-1} + n \cdot \binom{n}{n}$$

– vytknutí n

$$2 \cdot s_n = n \cdot \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right]$$

– úprava podle pravidla (**)

$$2 \cdot s_n = n \cdot 2^n$$

$$\underline{\underline{s_n = 2^{n-1} \cdot n}}$$

– pravidla (kombinatorická identita, binomická věta):

$$(*) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$(**) \quad (a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n-1}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n,$$

speciálně pro $a = 1, b = 1$: $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$

– výsledek: Součet prvních n -členů dané posloupnosti je $s_n = 2^{n-1} \cdot n$.

4. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$1 + x^2 = y + z$$

$$1 + y^2 = z + x$$

$$1 + z^2 = x + y$$

Řešení:

– výpočet:

$$(1) \quad 1 + x^2 = y + z$$

$$(2) \quad 1 + y^2 = z + x$$

$$(3) \quad 1 + z^2 = x + y$$

– rozdíl rovnic

$$(1) \quad 1 + x^2 = y + z$$

$$(1) - (2) = (2') \quad x^2 - y^2 = y - x$$

$$(1) - (3) = (3') \quad x^2 - z^2 = z - x$$

– úprava rovnic

$$(1) \quad 1 + x^2 = y + z$$

$$(2') \quad x^2 + x = y^2 + y$$

$$(3') \quad x^2 + x = z^2 + z$$

– odhad řešení z rovnic (2), (3)

$$\Rightarrow y^2 + y = x^2 + x = z^2 + z$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = y = z}}$$

– dopočet řešení z rovnice (1)

$$1 + x^2 = x + x$$

$$x^2 - 2 \cdot x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

– výsledek: Při výpočtu byly použity pouze ekvivalentní úpravy, zkouška není nutná.

Zadání vyhovuje pouze uspořádaná trojice $(1, 1, 1)$.

5. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 = 1$$

$$5 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 = 2$$

$$4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + x_3 + 2 \cdot x_4 + 3 \cdot x_5 = 3$$

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + x_4 + 2 \cdot x_5 = 4$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + x_5 = 5$$

Řešení:

– označení: $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

– výpočet:

$$(1) \quad x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 = 1$$

$$(2) \quad 5 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 = 2$$

$$(3) \quad 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + x_3 + 2 \cdot x_4 + 3 \cdot x_5 = 3$$

$$(4) \quad 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + x_4 + 2 \cdot x_5 = 4$$

$$(5) \quad 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + x_5 = 5$$

– součet všech rovnic $15 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 + 15 \cdot x_4 + 15 \cdot x_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

$$15 \cdot s = 15$$

$$\underline{\underline{s = 1}}$$

– rozdíl rovnic $(1) - (2) = (1')$ $-4 \cdot x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1$

$$(2) - (3) = (2') \quad x_1 - 4 \cdot x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1$$

$$(3) - (4) = (3') \quad x_1 + x_2 - 4 \cdot x_3 + x_4 + x_5 = -1$$

$$(4) - (5) = (4') \quad x_1 + x_2 + x_3 - 4 \cdot x_4 + x_5 = -1$$

$$(5) - (1) = (5') \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4 \cdot x_5 = 4$$

– úprava rovnic $(1') \quad s - 5 \cdot x_1 = -1$

$$(2') \quad s - 5 \cdot x_2 = -1$$

$$(3') \quad s - 5 \cdot x_3 = -1$$

$$(4') \quad s - 5 \cdot x_4 = -1$$

$$(5') \quad s - 5 \cdot x_5 = 4$$

$$\begin{aligned}
 (1') \quad & 5 \cdot x_1 = s + 1 \\
 (2') \quad & 5 \cdot x_2 = s + 1 \\
 (3') \quad & 5 \cdot x_3 = s + 1 \\
 (4') \quad & 5 \cdot x_4 = s + 1 \\
 (5') \quad & 5 \cdot x_5 = s + 4
 \end{aligned}$$

– dopočet řešení

$$\underline{\underline{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{s+1}{5} = \frac{2}{5}, \quad x_5 = \frac{s-4}{5} = -\frac{3}{5}}}$$

– zkouška

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} - 5 \cdot \frac{3}{5} = 1 \\
 & \frac{2+4+6+8-15}{5} = 1 \\
 & \frac{5}{5} = 1 \quad \Rightarrow \underline{\underline{L = P}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & 5 \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} - 4 \cdot \frac{3}{5} = 2 \\
 & \frac{10+2+4+6-12}{5} = 2 \\
 & \frac{10}{5} = 2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{L = P}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & 4 \cdot \frac{2}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} - 3 \cdot \frac{3}{5} = 3 \\
 & \frac{8+10+2+4-9}{5} = 3 \\
 & \frac{15}{5} = 3 \quad \Rightarrow \underline{\underline{L = P}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & 3 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - 2 \cdot \frac{3}{5} = 4 \\
 & \frac{6+8+10+2-6}{5} = 4 \\
 & \frac{20}{5} = 4 \quad \Rightarrow \underline{\underline{L = P}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5} - \frac{3}{5} = 5 \\
 & \frac{4+6+8+10-3}{5} = 5 \\
 & \frac{25}{5} = 5 \quad \Rightarrow \underline{\underline{L = P}}
 \end{aligned}$$

– výsledek: Při výpočtu byly použity důsledkové úpravy, zkouška je nutnou součástí

řešení. Zadáni vyhovuje pouze uspořádaná pětice $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

6. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$(p+1) \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + (p+1) \cdot x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + (p+1) \cdot x_3 = 1$$

Proveďte diskuzi vzhledem k parametru p .

Řešení:

– označení: $s = x_1 + x_2 + x_3$

– výpočet:

$$(1) \quad (p+1) \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$(2) \quad x_1 + (p+1) \cdot x_2 + x_3 = 1$$

$$(3) \quad x_1 + x_2 + (p+1) \cdot x_3 = 1$$

– úprava rovnic	(1)	$s + p \cdot x_1 = 1$	$\Rightarrow x_1 = \frac{1-s}{p}$
	(2)	$s + p \cdot x_2 = 1$	$\Rightarrow x_2 = \frac{1-s}{p}$
	(3)	$s + p \cdot x_3 = 1$	$\Rightarrow x_3 = \frac{1-s}{p}$

– součet všech rovnic $3 \cdot s + p \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = 3$

$$3 \cdot s + p \cdot s = 3$$

$$(3+p) \cdot s = 3$$

$$s = \frac{3}{p+3}$$

– dopočet řešení $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1-s}{p}$

$$\frac{1-s}{p} = \frac{1 - \frac{3}{p+3}}{p} = \frac{\frac{p+3-3}{p+3}}{p} = \frac{\frac{p}{p+3}}{p} = \frac{1}{p+3}$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{p+3}$$

– diskuse vzhledem k parametru p :

– pro parametr $p = -3$

$$(1) \quad -2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad \Rightarrow x_3 = 1 + 2 \cdot x_1 - x_2$$

$$(2) \quad x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 = 1$$

$$(3) \quad x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 = 1$$

– úprava rovnic

$$(2') \quad x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 + 2 \cdot x_1 - x_2 = 1$$

$$(3') \quad x_1 + x_2 - 2 \cdot (1 + 2 \cdot x_1 - x_2) = 1$$

$$(2') \quad 3 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 = 0$$

$$(3') \quad -3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 3$$

– součet rovnic

$$(2') + (3') \quad \underline{\underline{0 = 3}} \quad \Rightarrow \text{tato soustava nemá řešení}$$

– pro parametr $p = 0$

$$(1) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$(2) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$(3) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$\Rightarrow$ všechny 3 rovnice jsou ekvivalentní

$\Rightarrow$ tato soustava má nekonečně mnoho řešení

– výsledek: Při výpočtu byly použity pouze ekvivalentní úpravy, zkouška není nutná. Daná soustava rovnic nemá pro parametr $p = -3$ žádné řešení, pro parametr $p = 0$ má daná soustava rovnic nekonečně mnoho řešení ve tvaru uspořádané trojice $(t, s, 1 - t - s)$, kde t a s jsou reálné parametry, a pro ostatní reálné parametry p má daná soustava rovnic právě jedno řešení ve tvaru uspořádané trojice $\left(\frac{1}{p+3}, \frac{1}{p+3}, \frac{1}{p+3} \right)$.

Příklady neřešené

1. Určete součet $1 + 2 + \dots + 2011$.
2. Určete součet prvních n -členů posloupnosti všech lichých čísel.
3. Určete součet prvních n -členů posloupnosti všech sudých čísel.
4. Určete součet prvních n -členů posloupnosti $1 - 3 + 5 - 7 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot (2n - 1)$.
5. Určete součet $2011 + 2011^2 + \dots + 2011^{2011}$.
6. Určete součet prvních n -členů posloupnosti $2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{2n-1}$.
7. Určete součet prvních n -členů posloupnosti $2^0 \cdot 3^1 + 2^1 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3^3 + \dots + 2^{n-1} \cdot 3^n$.
8. Určete součet prvních n -členů posloupnosti $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{5^{n-1}}$.
9. Určete součet prvních n -členů posloupnosti $1^2 \cdot \binom{n}{1} + 2^2 \cdot \binom{n}{2} + 3^2 \cdot \binom{n}{3} + \dots + n^2 \cdot \binom{n}{n}$.
10. Určete součet prvních n -členů posloupnosti $1 \cdot 2 \cdot \binom{n}{2} + 2 \cdot 3 \cdot \binom{n}{3} + 3 \cdot 4 \cdot \binom{n}{4} + \dots + n \cdot (n-1) \cdot \binom{n}{n}$.
11. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:
$$\begin{aligned}x^2 &= y + 6 \\ y^2 &= x + 6\end{aligned}$$

12. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$x^2 = y + z$$

$$y^2 = z + x$$

$$z^2 = x + y$$

13. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$3 \cdot (x^2 + 1) = 5 \cdot (y + z)$$

$$3 \cdot (y^2 + 1) = 5 \cdot (z + x)$$

$$3 \cdot (z^2 + 1) = 5 \cdot (x + y)$$

14. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$x = (y + z)^2$$

$$y = (z + x)^2$$

$$z = (x + y)^2$$

15. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 2$$

$$x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2 \cdot x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2 \cdot x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2 \cdot x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2 \cdot x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + 2 \cdot x_8 + x_9 + x_{10} = 8$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2 \cdot x_9 + x_{10} = 9$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + 2 \cdot x_{10} = 10$$

16. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$p \cdot x_1 + (p + 1) \cdot x_2 + (p + 2) \cdot x_3 = p$$

$$(p + 1) \cdot x_1 + (p + 2) \cdot x_2 + p \cdot x_3 = 2p$$

$$(p + 2) \cdot x_1 + p \cdot x_2 + (p + 1) \cdot x_3 = 3p$$

Proveďte diskuzi vzhledem k parametru p . Kdy má soustava celočíselné řešení?

Výsledky

1. řešení: $s_{2011} = 2\,023\,066$;

součet dané řady a řady s týmiž členy zapsanými v opačném pořadí

2. řešení: $s_n = n^2$;

součet dané řady a řady s týmiž členy zapsanými v opačném pořadí

3. řešení: $s_n = n^2 + n$;

součet dané řady a řady s týmiž členy zapsanými v opačném pořadí

4. řešení: $s_n = (-1)^{n+1} \cdot n$;

rozdělení na 2 případy (n je sudé, resp. liché), součet dané řady a řady s týmiž členy zapsanými v opačném pořadí

5. řešení: $s_{2011} = \frac{2011^{2012} - 2011}{2010}$;

rozdíl dané řady a 2011-násobku téže řady

6. řešení: $s_n = \frac{2^{2 \cdot n+1} - 2}{3}$;

rozdíl dané řady a 2^2 -násobku téže řady

7. řešení: $s_n = \frac{2^n \cdot 3^{n+1} - 3}{5}$;

rozdíl dané řady a 6-násobku téže řady

8. řešení: $s_n = \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6 \cdot 5^{n-1}}$;

součet dané řady a 5^{-1} -násobku téže řady

9. řešení: $s_n = 2^{n-2} \cdot n \cdot (n+1)$;

počáteční úvaha $k^2 = k \cdot (k-1) + k$ a úprava součtu, využití kombinatorických pravidel (*), (**) a binomické věty (***)

$$(*) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$(**) \quad \frac{n+1}{k+1} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$(***) \quad (a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n-1}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n,$$

$$\text{speciálně pro } a=1, b=1: \quad 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

10. řešení: $s_n = 2^{n-2} \cdot n \cdot (n-1)$;

využití kombinatorických pravidel (*), (**) a binomické věty (***) – viz předchozí

$$11. \text{ řešení: } (x, y) \in \left\{ (-2, -2), (3, 3), \left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \right), \left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \right) \right\};$$

vyjádření jedné neznámé, úprava soustavy na 1 rovnici 4. řádu o jedné neznámé, odhad kořenů např. pomocí Hornerova schématu, dopočet dalších kořenů z kvadratické rovnice a celého řešení

12. řešení: $(x, y) \in \{(0, 0, 0), (2, 2, 2)\}$;

úprava soustavy postupným odečtením rovnic, porovnání rozdílů (odtud vyplývá $x = y = z$), dopočet řešení

$$13. \text{ řešení: } (x, y) \in \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), (3, 3, 3) \right\};$$

úprava soustavy postupným odečtením rovnic, porovnání rozdílů (odtud vyplývá $x = y = z$), dopočet řešení

14. řešení: $(x, y) \in \left\{ (0, 0, 0), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \right\};$

úprava soustavy postupným odečtením rovnic, porovnání rozdílů (z podmínky při dělení vyplývá $x = y = z$), dopočet řešení včetně zkoušky po důsledkové úpravě

15. řešení: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}) \in \{(-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5)\};$

označení $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}$, součet všech rovnic a výpočet s , výpočet neznámých z jednotlivých rovnic

16. řešení pro $x_1, x_2, x_3 \in R, p \in R$:

$$p = -1 \quad \dots \quad K = \{ \}$$

$$p \in R - \{-1\} \quad \dots \quad K = \left\{ \left(\frac{p \cdot (1-p)}{3 \cdot (1+p)}, \frac{p \cdot (1-p)}{3 \cdot (1+p)}, \frac{2}{3} \cdot p \right) \right\};$$

řešení pro $x_1, x_2, x_3 \in Z, p \in Z$:

$$p = 3 \cdot k, k \in Z_0^- \quad \dots \quad K = \left\{ \left(\frac{p \cdot (1-p)}{3 \cdot (1+p)}, \frac{p \cdot (1-p)}{3 \cdot (1+p)}, \frac{2}{3} \cdot p \right) \right\}$$

$$\text{pro ostatní } p \in Z \quad \dots \quad K = \{ \};$$

označení $s = x_1 + x_2 + x_3$, součet všech rovnic a výpočet s s parametrem p , výpočet neznámých vzhledem k parametru p z rozdílů jednotlivých rovnic, určení podmínek pro celočíselná řešení (z obecného řešení, určení podmínek dělitelnosti)

4) Příklady „kombinatorické“

V této skupině jsou zařazeny úlohy vyžadující především znalost základních kombinatorických vzorců (kombinace, variace, permutace) a pravidel. Využity mohou být například při výuce kombinatoriky a základních pojmů z tématu množin. Jedná se o úlohy řešitelné pomocí jednoduché úvahy a znalosti vztahů, využije se zde například princip inkluze a exkluze.

Příklady řešené

1. Označme M množinu všech nezáporných celých čísel menších než 10^7 . M_1 je její podmnožina obsahující všechna čísla, která mají ve svém zápise alespoň jednu cifru 7. M_2 je její podmnožina obsahující všechna čísla, která nemají ve svém zápise žádnou cifru 7. Která z podmnožin M_1 , M_2 je početnější?

Řešení:

– označení: m ... počet prvků množiny M platí: $m = 10^7 = 10\,000\,000$
 m_1 ... počet prvků množiny M_1 $m = m_1 + m_2$
 m_2 ... počet prvků množiny M_2

– úvaha: M_2 je množina obsahující všechna čísla ve tvaru $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7}$,
kde cifra $x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ pro všechna $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

– výpočet: $m_2 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^7 = 4\,782\,969$
 $m_1 = m - m_2 = 10^7 - 9^7 = 5\,217\,031$
 $5\,217\,031 > 4\,782\,969 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{m_1 > m_2}}$

– výsledek: Početnější je množina M_1 , tj. podmnožina množiny M obsahující všechna čísla, která mají ve svém zápise alespoň jednu cifru 7.

2. Určete počet všech přirozených trojčiferných čísel z cifer 1, 8, 9 a součet všech těchto čísel, jestliže cifry se v číslech mohou libovolně opakovat.

Řešení:

– označení: n ... počet všech uvažovaných čísel z cifer 1, 8, 9
 s_n ... součet všech uvažovaných čísel

– úvaha: n je počet všech čísel ve tvaru $\overline{x_1x_2x_3}$, kde cifry $x_1, x_2, x_3 \in \{1, 8, 9\}$; v součtu s_n přičítáme každou cifru na místě jednotek (1), desítek (10) a stovek (100), příspěvek každé cifry je na všech třech místech rovnocenný

– výpočet:

– počet všech čísel $n = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$
 $\underline{\underline{n = 27}}$

– počet každé z cifer na místě jednotek $\frac{n}{3} = \frac{27}{3} = 9$

– počet každé z cifer na místě desítek $\frac{n}{3} = \frac{27}{3} = 9$

– počet každé z cifer na místě stovek $\frac{n}{3} = \frac{27}{3} = 9$

– součet všech čísel $s_n = 1 \cdot 9 \cdot (1 + 10 + 100) + 8 \cdot 9 \cdot (1 + 10 + 100) + 9 \cdot 9 \cdot (1 + 10 + 100)$
 $s_n = (1 + 8 + 9) \cdot 9 \cdot (1 + 10 + 100)$
 $s_n = 18 \cdot 9 \cdot 111$
 $\underline{\underline{s_n = 17\,982}}$

– výsledek: Počet všech uvažovaných čísel je 27, součet všech těchto čísel je 17 982.

3. Určete počet všech anagramů (tj. slov, která vzniknou z původního tak, že se použijí všechna písmena ve slově obsažená a změní se jejich pořadí) ze slova MATEMATIKA, jestliže žádná dvě stejná písmena nesmí být vedle sebe. Kolik je takových anagramů, jestliže se pravidelně střídají souhlásky a samohlásky?

Řešení:

– úvaha: slovo MATEMATIKA má 10 písmen, z toho 5 samohlásek a 5 souhlásek, písmeno A je v tomto slově 3-krát, taková písmena od sebe neodlišíme, písmena M, T jsou v tomto slově 2-krát, taková písmena od sebe neodlišíme, písmena E, I, K jsou v tomto slově pouze 1-krát; dvojici stejných písmen vedle sebe lze při výpočtu brát jako jedno písmeno; při střídání souhlásek a samohlásek nejsou nikdy 2 stejná písmena vedle sebe, takový anagram může začínat buď souhláskou nebo samohláskou

– označení: $n_{stejná}$... počet anagramů, kde žádná 2 stejná písmena nejsou vedle sebe
 $n_{stř.}$... součet anagramů, kde se pravidelně střídají souhlásky a samohlásky
 n_1 ... počet všech možných anagramů slova MATEMATIKA
 n_2 ... počet anagramů s 1 dvojicí stejných písmen vedle sebe
 n_3 ... počet anagramů se 2 dvojicemi stejných písmen vedle sebe
 n_4 ... počet anagramů se 3 dvojicemi stejných písmen vedle sebe

– výpočet:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{10!}{6 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{10!}{24} \\ n_2 &= \frac{9!}{3! \cdot 2!} + \frac{9!}{3! \cdot 2!} + \frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 3} = 3 \cdot \frac{9!}{3! \cdot 2!} = \frac{9!}{4} \\ n_3 &= \frac{8!}{3!} + \frac{8!}{2! \cdot 3} + \frac{8!}{2! \cdot 3} = 3 \cdot \frac{8!}{3!} = \frac{8!}{2} \\ n_4 &= \frac{7!}{3} \end{aligned}$$

– počet anagramů, kde žádná 2 stejná písmena nejsou vedle sebe

$$\begin{aligned} n_{stejná} &= n_1 - n_2 + n_3 - n_4 \\ n_{stejná} &= \frac{10!}{24} - \frac{9!}{4} + \frac{8!}{2} - \frac{7!}{3} \\ n_{stejná} &= \frac{10! - 6 \cdot 9! + 12 \cdot 8! - 8 \cdot 7!}{24} \\ n_{stejná} &= \frac{(10 \cdot 9 - 6 \cdot 9 + 12 - 1) \cdot 8!}{24} = \frac{47 \cdot 8!}{24} \\ n_{stejná} &= 78\,960 \end{aligned}$$

- počet anagramů, kde se pravidelně střídají souhlásky a samohlásky

$$n_{stř.} = 2 \cdot \frac{5!}{3!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2!}$$

$$n_{stř.} = \frac{5! \cdot 5!}{3! \cdot 2!}$$

$$n_{stř.} = \frac{120 \cdot 120}{12}$$

$$\underline{\underline{n_{stř.} = 1\,200}}$$

- výsledek: Počet všech anagramů ze slova MATEMATIKA, kde žádná 2 stejná písmena nejsou vedle sebe, je 78 960. Počet všech takových anagramů, kde se pravidelně střídají souhlásky a samohlásky, je 1 200.

4. V seznamu historických památek jsou vyznačena města, která mají nějakou památku v gotickém (G), renesančním (R), barokním (B) nebo klasicistním (K) slohu. Některá města mají více památek v různých slozích. Kolik měst je v seznamu historických památek vyznačeno? Kolik z nich má památky pouze jednoho slohu?

Přehled počtu měst s památkami podle typu slohu:

G	R	B	K	GR	GB	GK	RB	RK	BK	GRB	GRK	GBK	RBK	GRBK
76	75	76	69	33	40	37	36	30	37	19	15	23	17	7

Pozn.: Zkratka GR značí počet měst s památkami v gotickém i renesančním slohu (bez ohledu na to, jsou-li ve městě památky i v jiném slohu).

Řešení:

- označení: $n_{celk.}$... počet měst vyznačených v seznamu historických památek
 n_1 ... počet měst s památkami pouze v jednom slohu
 n_G ... počet měst s památkami pouze v gotickém slohu
 n_R ... počet měst s památkami pouze v renesančním slohu
 n_B ... počet měst s památkami pouze v barokním slohu
 n_K ... počet měst s památkami pouze v klasicistním slohu

- úvaha: určujeme počet prvků dané množiny (všechna města vyznačená v seznamu, města s památkami pouze v jednom slohu), v tabulce jsou vypsány počty prvků podmnožin (G, R, B, K), hledaný výsledek je dán počtem prvků sjednocení

těchto podmnožin, výpočet provedeme podle principu inkluze a exkluze (*)
(pozn. podmnožina $A_1 \cap A_2$ odpovídá podmnožině GR z tabulky)

$$(*) \quad |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum (-1)^{k+1} \cdot |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

– výpočet:

$$\begin{aligned} n_G &= |G| - (|GR| + |GB| + |GK|) + \\ &\quad + (|GRB| + |GRK| + |GBK|) - |GRBK| \\ n_G &= 76 - (33 + 40 + 37) + (19 + 15 + 23) - 7 = 16 \\ n_R &= |R| - (|GR| + |RB| + |RK|) + \\ &\quad + (|GRB| + |GRK| + |RBK|) - |GRBK| \\ n_R &= 75 - (33 + 36 + 30) + (19 + 15 + 17) - 7 = 20 \\ n_B &= |B| - (|GB| + |RB| + |BK|) + \\ &\quad + (|GRB| + |GBK| + |RBK|) - |GRBK| \\ n_B &= 76 - (40 + 36 + 37) + (19 + 23 + 17) - 7 = 15 \\ n_K &= |K| - (|GK| + |RK| + |BK|) + \\ &\quad + (|GRK| + |GBK| + |RBK|) - |GRBK| \\ n_K &= 69 - (37 + 30 + 37) + (15 + 23 + 17) - 7 = 13 \end{aligned}$$

– počet měst s památkami
pouze v jednom slohu

$$\begin{aligned} n_1 &= n_G + n_R + n_B + n_K \\ n_1 &= 16 + 20 + 15 + 13 \\ \underline{\underline{n_1}} &= 64 \end{aligned}$$

– počet měst v seznamu

$$\begin{aligned} n_{celk.} &= (|G| + |R| + |B| + |K|) - \\ &\quad - (|GR| + |GB| + |GK| + |RB| + |RK| + |BK|) + \\ &\quad + (|GRB| + |GRK| + |GBK| + |RBK|) - |GRBK| \\ n_{celk.} &= (76 + 75 + 76 + 69) - (33 + 40 + 37 + 36 + 30 + 37) + \\ &\quad + (19 + 15 + 23 + 17) - (7) \\ n_{celk.} &= 296 - 213 + 74 - 7 \\ \underline{\underline{n_{celk.}}} &= 150 \end{aligned}$$

– výsledek: V seznamu historických památek je vyznačeno celkem 150 měst, z toho 64 měst má památky pouze jednoho slohu

5. Podlahu místnosti o rozloze 10 m^2 zakryl malíř 19 kusy igelitu, z nichž každý pokrývá plochu 1 m^2 . Dokažte, že existují alespoň dva kusy igelitu, které se na podlaze překrývají plochou o obsahu alespoň $\frac{1}{19} \text{ m}^2$.

Řešení:

- úvaha: pokud první kus igelitu zakrývá přesně 1 m^2 , pak zbývajících 9 m^2 kryjí alespoň 2 kusy igelitu zároveň, existuje $\binom{19}{2} = \frac{19!}{2! \cdot 17!} = 19 \cdot 9 = 171$ takových dvojic, tedy existují alespoň dva kusy (z použitých 19 kusů) igelitu pokrývající alespoň $\frac{9}{171} \text{ m}^2$, tj. $\frac{1}{19} \text{ m}^2$, zároveň
- výsledek: Alespoň dva kusy igelitu se překrývají plochou o obsahu $\frac{1}{19} \text{ m}^2$.

cbd.

Příklady neřešené

1. Označme M množinu všech nezáporných celých čísel menších než 10^5 . M_1 je její podmnožina obsahující všechna čísla, která mají ve svém zápise alespoň jednu cifru 5. M_2 je její podmnožina obsahující všechna čísla, která nemají ve svém zápise žádnou cifru 5. Která z podmnožin M_1 , M_2 je početnější?
2. Označme M množinu všech nezáporných celých čísel menších než 10^{12} . M_1 je její podmnožina obsahující všechna čísla, která mají ve svém zápise alespoň jednu cifru 1 nebo alespoň jednu cifru 2. M_2 je její podmnožina obsahující všechna čísla, která nemají ve svém zápise žádnou cifru 1 ani cifru 2. Která z podmnožin M_1 , M_2 je početnější?
3. Určete, kolik přirozených čtyřciferných čísel lze sestavit z cifer čísla 13 531.
4. Určete, kolik přirozených čtyřciferných čísel lze sestavit z cifer čísla 2 468 642.
5. Určete počet všech přirozených trojciferných čísel z cifer 2, 4, 6 a součet všech těchto čísel, jestliže cifry se v číslech nesmí opakovat.
6. Určete počet všech přirozených trojciferných čísel z cifer 2, 4, 6 a součet všech těchto čísel, jestliže cifry se v číslech mohou libovolně opakovat.
7. Určete počet všech přirozených čtyřciferných čísel z cifer 1, 3, 5, 7 a součet všech těchto čísel, jestliže cifry se v číslech nesmí opakovat.
8. Určete počet všech přirozených čtyřciferných čísel z cifer 1, 3, 5, 7 a součet všech těchto čísel, jestliže cifry se v číslech mohou libovolně opakovat.
9. Určete počet všech anagramů (tj. slov, která vzniknou z původního tak, že se použijí všechna písmena ve slově obsažená a změní se jejich pořadí) ze slova SOUSTAVA, jestliže žádná dvě stejná písmena nesmí být vedle sebe. Kolik je takových anagramů, jestliže se pravidelně střídají souhlásky a samohlásky?

10. Určete počet všech anagramů (tj. slov, která vzniknou z původního tak, že se použijí všechna písmena ve slově obsažená a změní se jejich pořadí) ze slova ARITMETIKA, jestliže žádná dvě stejná písmena nesmí být vedle sebe. Kolik je takových anagramů, jestliže se pravidelně střídají souhlásky a samohlásky?
11. Určete počet všech anagramů (tj. slov, která vzniknou z původního tak, že se použijí všechna písmena ve slově obsažená a změní se jejich pořadí) ze slova STEREOMETRIE, jestliže žádná dvě stejná písmena nesmí být vedle sebe. Kolik je takových anagramů, jestliže se pravidelně střídají souhlásky a samohlásky?
12. Plochu 15 m^2 střechy garáže pokrývají dělníci vlnitým plechem. Dokažte, že při použití 29 kusů plechu, každý o obsahu 1 m^2 , se budou alespoň dva z těchto kusů překrývat plochou o obsahu alespoň $\frac{1}{29} \text{ m}^2$.
13. Pracovní plocha o rozloze 4 m^2 je pokryta deseti různými látkami, z nichž každá zaujímá plochu 1 m^2 . Dokažte, že existuje alespoň jedna trojice látek, které současně překrývají plochu o obsahu alespoň $\frac{1}{40} \text{ m}^2$.
14. Sportovní středisko prodává registrovaným zákazníkům permanentky na aerobic (A), spinning (S), do posilovny (P) a plaveckého bazénu (B). Určete počet registrovaných zákazníků. Kolik z nich má alespoň 2 permanentky?
Přehled počtu registrovaných zákazníků podle druhu permanentky:

A	S	P	B	AS	AP	AB	SP	SB	PB	ASP	ASB	APB	SPB	ASPB
51	45	50	46	23	25	20	20	18	25	13	9	14	10	7

Pozn.: Zkratka AS značí počet zákazníků s permanentkou na aerobic i spinning (bez ohledu na to, mají-li zákazníci i jiné permanentky).

15. Jazyková škola nabízí žákům prvního ročníku výuku čtyř jazyků – angličtiny (A), francouzštiny (F), němčiny (N) a ruštiny (R). Určete počet žáků v prvním ročníku, jestliže každý z nich si zvolil alespoň jeden jazyk. Kolik žáků si vybralo pouze jeden jazyk? Kolik jich studuje více jazyků současně?

Přehled počtu žáků podle vybraného jazyka:

A	F	N	R	AF	AN	AR	FN	FR	NR	AFN	AFR	ANR	FNR	AFNR
71	61	53	74	31	28	46	19	31	28	6	19	18	5	4

Pozn.: Zkratka AF značí počet žáků studujících angličtinu a francouzštinu zároveň (bez ohledu na to, studují-li tito žáci další jazyky).

Výsledky

1. řešení: množina M_2 je početnější;

určení celkového počtu prvků množiny M , určení počtu prvků množiny neobsahující žádnou cifru 5 (množina M_2 , součtové pravidlo), určení počtu prvků množiny M_1 (rozdíl obou předchozích), porovnání výsledků

2. řešení: množina M_1 je početnější;

určení celkového počtu prvků množiny M , určení počtu prvků množiny neobsahující žádnou cifru 1 ani cifru 2 (množina M_2 , součtové pravidlo), určení počtu prvků množiny M_1 (rozdíl obou předchozích), porovnání výsledků

3. řešení: $n = 30$;

součet počtu čtyřciferných čísel s opakováním jedné cifry (1 nebo 3) a počtu čísel s opakováním obou cifer

4. řešení: $n = 150$;

součet počtu čtyřciferných čísel bez opakování cifer, počtu čísel s opakováním jedné cifry (2, 4 nebo 6) a počtu čísel s opakováním dvou cifer (dvojice z cifer 2, 4, 6)

5. řešení: $n = 6$, $s_n = 2\,664$;

určení počtu všech uvažovaných čísel, úvaha – každá cifra dává do součtu rovnocenný příspěvek na místě jednotek, desítek i stovek – celkový součet se dán součtem cifer, příspěvkem cifer a součtem pozic desítkové soustavy, tj. $(2 + 4 + 6) \cdot 2 \cdot (1 + 10 + 100)$

6. řešení: $n = 27$, $s_n = 11\,988$;

určení počtu všech uvažovaných čísel, úvaha – každá cifra dává do součtu rovnocenný příspěvek na místě jednotek, desítek i stovek – celkový součet se dán součtem cifer, příspěvkem cifer a součtem pozic desítkové soustavy, tj. $(2 + 4 + 6) \cdot 9 \cdot (1 + 10 + 100)$

7. řešení: $n = 24$, $s_n = 106\,656$;

určení počtu všech uvažovaných čísel, úvaha – každá cifra dává do součtu rovnocenný příspěvek na místě jednotek, desítek, stovek i tisícovek – celkový součet se dán součtem cifer, příspěvkem cifer a součtem pozic desítkové soustavy, tj. $(1+3+5+7) \cdot 6 \cdot (1+10+100+1\,000)$

8. řešení: $n = 256$, $s_n = 1\,137\,664$;

určení počtu všech uvažovaných čísel, úvaha – každá cifra dává do součtu rovnocenný příspěvek na místě jednotek, desítek, stovek i tisícovek – celkový součet se dán součtem cifer, příspěvkem cifer a součtem pozic desítkové soustavy, tj. $(1+3+5+7) \cdot 64 \cdot (1+10+100+1\,000)$

9. řešení: $n_{\text{stejná}} = 5\,760$, $n_{\text{stř.}} = 288$;

dvě stejná písmena – všechny anagramy minus anagramy s 1 dvojicí stejných písmen vedle sebe plus anagramy s oběma dvojicemi stejných písmen vedle sebe, při střídání souhlásek a samohlásek nejsou nikdy 2 stejná písmena vedle sebe – součin počtu pořadí pouze souhlásek a počtu pořadí pouze samohlásek vynásobený dvěma

10. řešení: $n_{\text{stejná}} = 236\,880$, $n_{\text{stř.}} = 3\,600$;

dvě stejná písmena – všechny anagramy minus anagramy s 1 dvojicí stejných písmen vedle sebe plus anagramy se 2 dvojicemi stejných písmen vedle sebe minus anagramy se všemi 3 dvojicemi vedle sebe, při střídání souhlásek a samohlásek nejsou nikdy 2 stejná písmena vedle sebe – součin počtu pořadí pouze souhlásek a počtu pořadí pouze samohlásek vynásobený dvěma

11. řešení: $n_{\text{stejná}} = 2\,358\,720$, $n_{\text{stř.}} = 10\,800$;

dvě stejná písmena – všechny anagramy minus anagramy s 1 dvojicí stejných písmen vedle sebe plus anagramy se 2 dvojicemi stejných písmen vedle sebe minus anagramy se všemi 3 dvojicemi vedle sebe, při střídání souhlásek a samohlásek nejsou nikdy 2 stejná písmena vedle sebe – součin počtu pořadí pouze souhlásek a počtu pořadí pouze samohlásek vynásobený dvěma

12. každých 14 m^2 kryjí alespoň 2 kusy plechu zároveň, existuje 406 takových dvojic,
aspoň jedna dvojice kryje alespoň $\frac{1}{29} \text{ m}^2 \Rightarrow \underline{\underline{\text{cbd.}}}$
13. každých 3 m^2 kryjí alespoň 3 kusy látky zároveň, existuje 120 takových dvojic,
aspoň jedna dvojice kryje alespoň $\frac{1}{40} \text{ m}^2 \Rightarrow \underline{\underline{\text{cbd.}}}$
14. řešení: celkem 100 registrovaných zákazníků, 60 zákazníků má aspoň 2 permanentky;
výpočet podle principu inkluze a exkluze (*)
- $$(*) \quad |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum (-1)^{k+1} \cdot |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$
15. řešení: celkem 120 žáků v prvním ročníku, pouze 1 jazyk si vybralo 21 žáků, 99 žáků
studuje více jazyků současně;
výpočet podle principu inkluze a exkluze (*) – viz předchozí

5) Příklady „logické“

V této skupině jsou zařazeny úlohy vyžadující logickou úvahu či odhad řešení. Vztaženy mohou být například k tématu mocnin, řešení rovnic i s více neznámými a soustav rovnic, nebo využity jako zpestření hodiny a probuzení zájmu žáků. Jedná se především o slovní úlohy, úlohy řešitelné pomocí odhadu maximální (resp. minimální) hodnoty a tzv. Diofantovy úlohy (tj. úlohy vedoucí na soustavu n rovnic o více neznámých než je n). Využijí se zde pravidla dělitelnosti, vlastnosti kvadratického trojčlenu, a další.

Příklady řešené

1. Určete, které z čísel 13^{31} , 31^{13} je větší.

Řešení:

– odhad: $8^{31} < 13^{31} < 16^{31}$... přitom $8^{31} = 2^{3 \cdot 31} = 2^{93}$, $16^{31} = 2^{4 \cdot 31} = 2^{124}$
 $16^{13} < 31^{13} < 32^{13}$... přitom $16^{13} = 2^{4 \cdot 13} = 2^{52}$, $32^{13} = 2^{5 \cdot 13} = 2^{65}$
tedy platí: $2^{52} < 31^{13} < 2^{65} < 2^{93} < 13^{31} < 2^{124}$

– výsledek: Pro daná čísla platí $31^{13} < 13^{31}$.

2. Kouzelník „čte myšlenky“. Mám si vybrat 5 libovolných reálných čísel (mohou být i totožná) a na lístek napsat výsledky 10 součtů vždy různých dvojic z vybraných čísel. Rozhodněte, zda může kouzelník z daných 10 součtů vždy získat všechna původní čísla. Pokud ano, jakým způsobem?

Řešení:

– označení: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ... vybraná reálná čísla (hledáme)
 $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}$... výsledné součty (známe)
 $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$
 $S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8 + s_9 + s_{10}$

– seřazení čísel podle velikosti $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$
 $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4 \leq s_5 \leq s_6 \leq s_7 \leq s_8 \leq s_9 \leq s_{10}$

– výpočet:
 $S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8 + s_9 + s_{10}$
 $S = (x_1 + x_2) + (x_1 + x_3) + \dots + (x_3 + x_5) + (x_4 + x_5)$
 $S = 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5$
 $S = 4 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 4 \cdot s$
 $s = \frac{S}{4}$

– minimální součty $s_1 = x_1 + x_2 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = s_1 - x_1}}$

$s_2 = x_1 + x_3 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = s_2 - x_3}}$

– maximální součty $s_9 = x_3 + x_5 \Rightarrow \underline{\underline{x_5 = s_9 - x_3}}$

$s_{10} = x_4 + x_5 \Rightarrow \underline{\underline{x_4 = s_{10} - x_5}}$

$\Rightarrow x_3 = s - s_1 - s_{10}$

$\underline{\underline{x_3 = \frac{S}{4} - s_1 - s_{10}}}$

– výsledek: Kouzelník může vždy získat všech 5 původních čísel jako uspořádanou pětiici ve tvaru $\left(s_2 - x_3, s_1 - x_1, \frac{S}{4} - s_1 - s_{10}, s_{10} - x_5, s_9 - x_3 \right)$, seřazenou podle velikosti, kdy v prvním kroku určí číslo x_3 , ve druhém kroku čísla x_1 a x_5 a ve třetím kroku čísla x_2 a x_4 .

3. K očíslování všech svazků v knihovně je zapotřebí na hřbety knih natisknout čtyřikrát tolik cifer, kolik je svazků. Kolik knih má knihovna?

Řešení:

– označení: x ... počet svazků
 $y = 4 \cdot x$... počet cifer

– úvaha: $x > 0$, existence a počet řešení závisí na počtu cifer čísla x

– počet cifer čísla x	odpovídající tvar rovnice	řešení
1	$4 \cdot x = x$ $\Rightarrow 3 \cdot x = 0$	$x = 0$
2	$4 \cdot x = 9 + 2 \cdot (x - 9)$ $\Rightarrow 2 \cdot x = 9 - 18$	$x = -\frac{9}{2}$
3	$4 \cdot x = 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot (x - 99)$ $\Rightarrow x = 9 + 180 - 297$	$x = -108$
4	$4 \cdot x = 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot (x - 999)$ $\Rightarrow 0 \cdot x = 9 + 180 + 2\,700 - 3\,996$	$0 = -1107$
5	$4 \cdot x = 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 9\,000 + 5 \cdot (x - 9\,999)$ $\Rightarrow -x = 9 + 180 + 2\,700 + 36\,000 - 49\,995$	<u><u>$x = 11\,106$</u></u>

– úvaha: pokud je v knihovně více než 11 106 knih, pak $x = 11\,106 + z$, kde $z \in \mathbb{N}$, a podle zadání je pak předpokládaný počet cifer $4 \cdot x = 4 \cdot (11\,106 + z)$, počet natištěných cifer je alespoň $4 \cdot 11\,106 + 5 \cdot z = 4 \cdot (11\,106 + z) + z$, to je ale více než předpokládaný počet cifer $4 \cdot (11\,106 + z) < 4 \cdot (11\,106 + z) + z$

– výsledek: Knihovna má přesně 11 106 knih.

4. Kbelík základní barvy stojí 3 stokoruny, kbelík oranžové barvy 10 stokorun. Kolik kbelíků jaké barvy mám, jestliže počet stokorun zaplacených za obě barvy je roven druhé mocnině některého přirozeného čísla? Pokud k této částce přičtu číslo 88, dostanu opět druhou mocninu nějakého (jiného) přirozeného čísla a toto číslo zároveň udává celkový počet kbelíků barvy.

Řešení:

– označení: x ... celkový počet kbelíků
 x_1 ... počet kbelíků základní barvy
 x_2 ... počet kbelíků oranžové barvy
 y ... některé přirozené číslo

– sestavení rovnic:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & x \\ 3 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 & = & y^2 \\ y^2 + 88 & = & x^2 \\ \hline x_1 + x_2 & = & x \\ 3 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 & = & x^2 - 88 \end{array}$$

– odhad celkového počtu kbelíků:

(pozn.: bereme v úvahu pouze kladné kořeny kvadratických rovnic)

– pouze základní barva, $x = x_1$

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot x & = & x^2 - 88 \\ x^2 - 10 \cdot x - 88 & = & 0 \\ x_1 & = & \frac{10 + \sqrt{452}}{2} \end{array}$$

– pouze oranžová barva, $x = x_2$

$$\begin{array}{rcl} 10 \cdot x & = & x^2 - 88 \\ x^2 - 3 \cdot x - 88 & = & 0 \\ x_2 & = & \frac{3 + \sqrt{361}}{2} \\ \hline \text{platí } x_1 \leq x \leq x_2 & \Rightarrow & 11,0 \leq x \leq 15,6 \\ x \in \{11, 12, 13, 14, 15\} \end{array}$$

– zkouška:

$$\begin{array}{ll} x = 11: & x^2 - 88 = 33 \neq y^2 \\ x = 12: & x^2 - 88 = 56 \neq y^2 \\ x = 13: & x^2 - 88 = 81 = 9^2 = y^2 \quad \Rightarrow \text{vyhovuje zadání} \\ x = 14: & x^2 - 88 = 108 \neq y^2 \\ x = 15: & x^2 - 88 = 137 \neq y^2 \end{array}$$

– výpočet soustavy rovnic:

$$\begin{array}{r}
 x_1 + x_2 = x \\
 3 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 = x^2 - 88 \\
 \hline
 x_1 + x_2 = 13 \\
 3 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 = 81 \\
 \hline
 x_2 = 13 - x_1 \\
 3 \cdot x_1 + 10 \cdot (13 - x_1) = 81 \\
 7 \cdot x_1 = 49 \\
 \underline{\underline{x_1 = 7}}, \quad \underline{\underline{x_2 = 6}}
 \end{array}$$

– výsledek: Celkový počet kbelíků je 13, z toho 7 kbelíků základní barvy a 6 kbelíků barvy oranžové, neznámé přirozené číslo je číslo 9.

5. Arabský kupec chce za 160 zlatých mincí koupit celkem 30 zvířat ze 3 druhů. Kůň stojí 7 zlatých mincí, velbloud 5 a osel 2 mince. Kolik koní, velbloudů a oslů kupec získá za všechny své peníze?

Řešení:

– označení: x ... počet koní
 y ... počet velbloudů
 z ... počet oslů

– sestavení rovnic:

$$\begin{array}{r}
 x + y + z = 30 \\
 7 \cdot x + 5 \cdot y + 2 \cdot z = 160 \\
 \hline
 \end{array}$$

– eliminace neznámé z (rozdíl rovnic)

$$5 \cdot x + 3 \cdot y = 100$$

– vyjádření neznámé x

$$x = \frac{100 - 3 \cdot y}{5} = 20 - \frac{3}{5} \cdot y$$

– odhad neznámé y

$$\begin{array}{l}
 x, y \in \mathbb{N} \wedge 5|y \wedge (0 \leq y \leq 30) \\
 \frac{3}{5} \cdot y \leq 20 \Rightarrow y \leq \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor \Rightarrow y \leq 33
 \end{array}$$

$$y \in \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$$

– dopočet řešení:

$$y = 0: \quad x = 20 - \frac{3}{5} \cdot y = 20 - 0 = 20, \quad z = 30 - y - x = 30 - 0 - 20 = 10$$

$$\underline{\underline{K_1 = \{(20, 0, 10)\}}}$$

$$y = 5: \quad x = 20 - \frac{3}{5} \cdot y = 20 - 3 = 17, \quad z = 30 - y - x = 30 - 5 - 17 = 8$$

$$\underline{\underline{K_2 = \{(17, 5, 8)\}}}$$

$$y = 10: \quad x = 20 - \frac{3}{5} \cdot y = 20 - 6 = 14, \quad z = 30 - y - x = 30 - 10 - 14 = 6$$

$$\underline{\underline{K_3 = \{(14, 10, 6)\}}}$$

$$y = 15: \quad x = 20 - \frac{3}{5} \cdot y = 20 - 9 = 11, \quad z = 30 - y - x = 30 - 15 - 11 = 4$$

$$\underline{\underline{K_4 = \{(11, 15, 4)\}}}$$

$$y = 20: \quad x = 20 - \frac{3}{5} \cdot y = 20 - 12 = 8, \quad z = 30 - y - x = 30 - 20 - 8 = 2$$

$$\underline{\underline{K_5 = \{(8, 20, 2)\}}}$$

$$y = 25: \quad x = 20 - \frac{3}{5} \cdot y = 20 - 15 = 5, \quad z = 30 - y - x = 30 - 25 - 5 = 0$$

$$\underline{\underline{K_6 = \{(5, 25, 0)\}}}$$

– výsledek: Množina řešení je $K = \bigcup_{i=1}^6 K_i$. Existuje 6 možných řešení (*tabulka **).

koně	20	17	14	11	8	5
velbloudi	0	5	10	15	20	25
osli	10	8	6	4	2	0

Příklady neřešené

1. Určete, které z čísel 11^{33} , 33^{11} je větší.
2. Určete, které z čísel 20^{11} , 11^{20} je větší.
3. Určete, které z čísel 23^{29} , 79^{13} je větší.
4. Čtyřčlenná rodina (otec, matka, 2 děti) došla na procházce k řece, přes kterou nevede žádný most. U břehu je uvázaná malá loďka, ta však uveze pouze jednoho z dospělých nebo obě děti. Jakým způsobem se rodina dostane na druhý břeh suchou nohou, jestliže děti jsou jednovaječná dvojčata (nerozlišíme je od sebe)? Jakým způsobem se rodina dostane na druhý břeh suchou nohou, jestliže děti jsou starší chlapec a mladší dívka? Jaký je vztah mezi oběma řešeními?
5. V roce 1660 se pán domu dohodl se sluhou takto: Bude-li sluha pracovat, dostane za den kromě stravy 6 stříbrných navíc; bude-li však odpočívat, za stravu zaplatí 2 stříbrné denně. Za ten rok si sluha vydělal 1220 stříbrných. Kolik dní sluha pracoval a kolik odpočíval?
6. Na jednom konci pole dlouhého 150 stop stál pes. Uviděl na druhém konci pole zajíce a rozběhl se za ním. Pes urazí jedním skokem 9 stop, zajíc jen 7 stop. Urči, kolik skoků udělá pes než zajíce chytí. Jak daleko zajíc doběhne než je chycen?
7. Lovec poštal psa na lišku, která má před psem náskok 60 liščích skoků. Zatímco liška udělá 9 skoků, pes udělá 6 skoků. Ale 3 skoky psí jsou rovny 7 skokům liščím. Kolik skoků udělá pes, než dožene lišku?
8. Pro označení aut závodu rallye bylo použito přesně dvojnásobné množství cifer. Kolik aut se závodu zúčastnilo?

9. Petr má na výměnu 42 starých karet fotbalových hráčů stejné hodnoty. Chce získat 32 nových karet. Jeden útočník je za 3 staré karty, jeden brankář za 2 staré karty a za 1 starou kartu dostane šest obránců. Kolik útočníků, obránců a brankářů získá Petr za všechny své karty?
10. Maminka vybrala v cukrárně 30 zákusků, pro sebe koláčky po 5 Kč, pro Míšu věnečky po 13 Kč a pro tatínka tvarohové řezy po 16 Kč. Kolik jakých zákusků koupila, když za celý balíček zaplatila 350 Kč?
11. Na loutkové divadlo se ve školce vybíralo symbolické vstupné. Děti ze školky platily po koruně, starší děti po 9 korunách a dospělí po 15 korunách. Celkem se vybralo 250 Kč a v hledišti bylo zaplněno přesně 50 sedadel. Kolik dospělých, starších a mladších dětí bylo na loutkovém divadle?
12. Pavel si za 400 Kč přinesl z papírnictví celkem 25 kusů zboží. Balíček výkresů stojí 35 Kč, poznámkový blok 16 Kč a 3 obyčejné tužky jsou za 10 Kč. Kolik balíčků výkresů, poznámkových bloků a tužek Pavel koupil?
13. Můj bratr dnes oslavil narozeniny, dosáhl tak přesně $\frac{2}{3}$ mého věku. Když od součinu našich let odečtu prvočíslo 23, dostanu druhou mocninu jiného prvočísla. Kolik je každému z nás let, jestliže nám oběma dohromady je více než 20, ale méně než 50 let.
14. Jana si koupila nové sponky do vlasů. Větší byly za 9 Kč za kus, menší po 4 Kč. Suma, kterou zaplatila, je druhou mocninou některého přirozeného čísla. Jestliže k této částce přičteme číslo 57, dostaneme opět druhou mocninu nějakého (jiného) přirozeného čísla a toto číslo je zároveň celkovým počtem sponek, které Jana koupila. Kolik jakých sponek Jana koupila?
15. Obchodník smísil 2 druhy vína. Litř kvalitnějšího za 7 zlatých, litř méně kvalitního za 4 zlaté. To, co za oba druhy zaplatil, je čtvercové číslo a jeho strana udává celkové množství vína, které smísil. Kolik kterého druhu vína obchodník nakoupil, jestliže objem jednotlivých druhů vína nemusí být nutně v celých litrech, ale celkové množství vína ano? Za jakou cenu má obchodník smíšené víno prodávat, aby na každém litru získal 1 zlatý?

Výsledky

1. řešení: $33^{11} < 11^{33}$;

odhad přes nejbližší mocniny čísla 2 ($33^{11} < 2^{66} < 2^{99} < 11^{33}$)

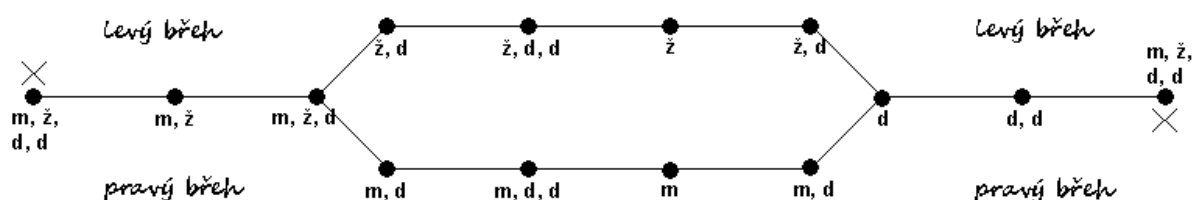
2. řešení: $20^{11} < 11^{20}$;

odhad přes nejbližší mocniny čísla 2 ($20^{11} < 2^{55} < 2^{60} < 11^{20}$)

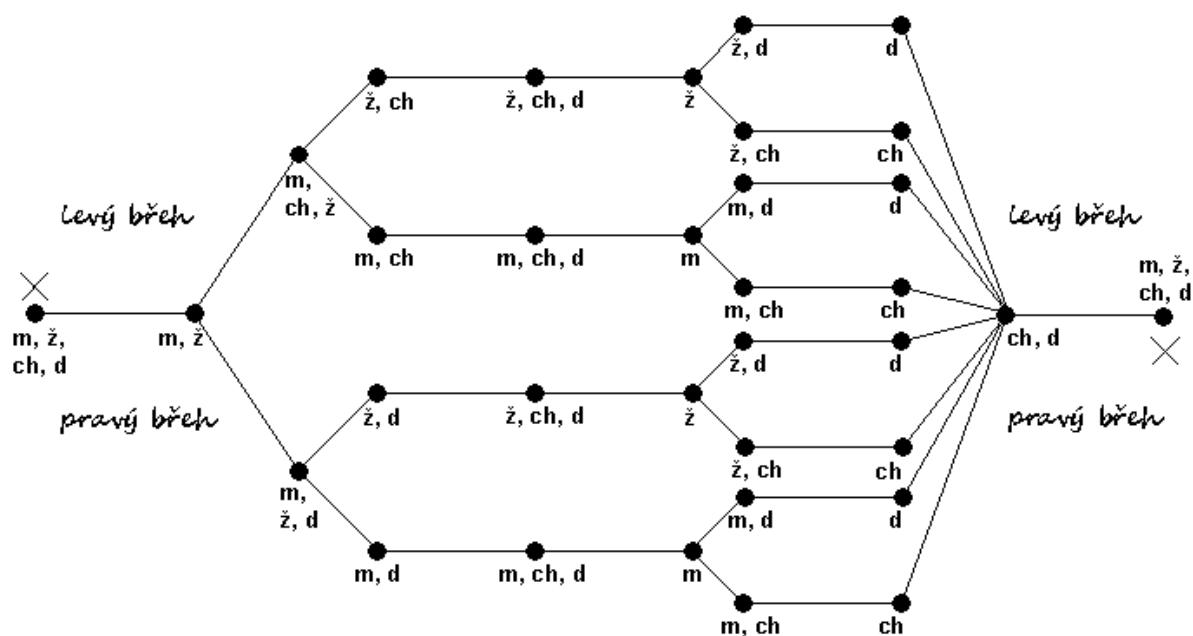
3. řešení: $79^{13} < 23^{29}$;

odhad přes nejbližší mocniny čísla 3 ($79^{13} < 3^{52} < 3^{58} < 23^{29}$)

4. řešení pro jednovaječná dvojčata: existují 2 způsoby (graf 1)



řešení pro chlapce a dívku: existuje 8 způsobů (graf 2)



využití tzv. uzlových grafů (m-muž, ž-žena, dd-děti dvojčata, ch-chlapec, d-dívka), vztah mezi jednotlivými řešeními určuje počet větvení grafu (oddělení jednoho z dětí od sourozence), počet řešení pro chlapce a dívku je 4-krát větší než počet řešení pro nerozeznatelná dvojčata (počet řešení narůstá geometrickou řadou)

5. řešení: sluha 244 dní pracoval a 122 dní odpočíval;
rok 1660 je přestupný (je dělitelný 4, tzn. má 366 dní), výpočet lineární rovnice o jedné neznámé
6. řešení: pes udělá 75 skoků, zajíc uběhne 525 stop;
frekvence skoků psa a zajíce je stejná, výpočet lineární rovnice o jedné neznámé
7. řešení: pes udělá 72 skoků;
frekvence skoků psa a lišky je různá, přepočtení liščích skoků na 1 skok psí (časově i délkově), výpočet lineární rovnice o jedné neznámé
8. řešení: závodu se zúčastnilo 108 aut;
vyjádření počtu aut a počtu cifer pomocí jedné neznámé, výpočet lineární rovnice o jedné neznámé postupně pro maximálně jednociferná čísla, maximálně dvojciferná čísla, atd. až po dosažení výsledku, důkaz neexistence dalšího řešení
9. řešení: Petr za všechny své karty získá – 2 řešení (*tabulka 1*);

útočníci	0	11
brankáři	20	9
obránci	12	12

sestavení soustavy 2 lineárních rovnic o 3 neznámých, eliminace 1 neznámé, odhad řešení metodou maximálního (minimálního) prvku, využití dělitelnosti a nezápornosti řešení, dopočet řešení

10. řešení: maminka koupila – 3 řešení (*tabulka 2*);

tvarohové řezy	0	8	16
věnečky	25	14	3
koláčky	5	8	11

sestavení soustavy 2 lineárních rovnic o 3 neznámých, eliminace 1 neznámé, odhad řešení metodou maximálního (minimálního) prvku, využití dělitelnosti a nezápornosti řešení, dopočet řešení

11. řešení: na loutkovém divadle bylo – 4 řešení (*tabulka 3*);

dospělí	0	4	8	12
starší děti	25	18	11	4
děti ze školky	25	28	31	34

sestavení soustavy 2 lineárních rovnic o 3 neznámých, eliminace 1 neznámé, odhad řešení metodou maximálního (minimálního) prvku, využití dělitelnosti a nezápornosti řešení, dopočet řešení

12. řešení: Pavel koupil – 6 řešení (*tabulka 4*);

výkresy	10	8	6	4	2	0
bloky	0	5	10	15	20	25
tužky	15	12	9	6	3	0

sestavení soustavy 2 lineárních rovnic o 3 neznámých, eliminace 1 neznámé, odhad řešení metodou maximálního (minimálního) prvku, využití dělitelnosti a nezápornosti řešení, dopočet řešení

13. řešení: bratr má 16 let, já mám 24 let, (neznámé prvočíslo je 19);

sestavení 1 rovnice o 2 neznámých, odhad řešení metodou maximálního (minimálního) prvku, využití dělitelnosti, dopočet řešení

14. řešení: Jana koupila 4 větší sponky a 7 menších sponek, (neznámé prvočíslo je 8);

sestavení soustavy 2 rovnic o 3 neznámých, odhad celkového počtu sponek metodou maximálního (minimálního) prvku, výpočet soustavy 2 rovnic o 2 neznámých

15. řešení: obchodník koupil – 2 řešení (*tabulka 5*);

kvalitnější víno	4 litry	$\frac{5}{3}$ litru
méně kvalitní víno	2 litry	$\frac{10}{3}$ litru
prodej 1 litru směsi	7 zlatých	6 zlatých

sestavení soustavy 2 rovnic o 3 neznámých, odhad celkového množství vína metodou maximálního (minimálního) prvku, výpočet soustavy 2 rovnic o 2 neznámých, dopočet řešení

6) Příklady „slovní“

V této skupině jsou zařazeny slovní úlohy vyžadující jednoduchou úvahu, jejichž řešení vede na lineární nebo kvadratickou rovnici či soustavu rovnic o více neznámých. Vztaženy mohou být například k tématu rovnic a soustav rovnic nebo posloupností. Jedná se především o známé úlohy o směsích, pohybu, společné práci a úlohy řešitelné pomocí základních vztahů pro aritmetickou a geometrickou posloupnost.

Příklady řešené

1. Ke skupině kamarádů čekajících před kinem se přidalo 7 dalších chlapců. Po skončení filmu jich polovina odešla domů, ale 5 z nich se po chvíli vrátilo. Nakonec před kinem zůstalo o jednoho víc než na začátku. Kolik kamarádů čekalo před kinem?

Řešení:

– označení: x ... počet kamarádů v původní skupině (čekající před kinem)

– sestavení a výpočet rovnice:

$$\begin{aligned}x + 7 - \frac{x + 7}{2} + 5 &= x + 1 \\ \frac{2 \cdot x + 14 - x - 7 + 10}{2} &= x + 1 \\ 2 \cdot x + 14 - x - 7 + 10 &= 2 \cdot x + 2 \\ -x &= -15 \\ \underline{\underline{x &= 15}}\end{aligned}$$

– výsledek: Před kinem čekalo 15 kamarádů.

2. Nádobu, která váží 600 g, je vyrobena ze zlata, stříbra, mědi a cínu. Stříbra obsahuje třikrát více než zlata, mědi třikrát více než stříbra a cínu má třikrát více než mědi. Kolik gramů každého kovu bylo při výrobě nádoby spotřebováno?

Řešení:

– označení:

$x_1 = x$	... váha zlata (v gramech)
$x_2 = 3 \cdot x$	... váha stříbra (v gramech)
$x_3 = 3 \cdot (3 \cdot x)$	... váha mědi (v gramech)
$x_4 = 3 \cdot (3 \cdot (3 \cdot x))$	... váha cínu (v gramech)

– sestavení a výpočet rovnice:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 600 \\
 x + 3 \cdot x + 3 \cdot (3 \cdot x) + 3 \cdot (3 \cdot (3 \cdot x)) &= 600 \\
 40 \cdot x &= 600 \\
 \underline{\underline{x &= 15}}
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{x_1 = 15}}, \underline{\underline{x_2 = 45}}, \underline{\underline{x_3 = 135}}, \underline{\underline{x_4 = 405}}$$

- výsledek: Při výrobě nádoby bylo spotřebováno 15 g zlata, 45 g stříbra, 135 g mědi a 405 g cínu.

3. V zahradě u jezírka stojí 4 fontány. První naplní jezírko za 1 den, druhá za 2 dny, třetí za 3 dny a čtvrtá za 4 dny. Za jak dlouho se jezírko naplní, jsou-li puštěny všechny fontány zároveň?

Řešení:

- označení: x ... celkový čas, za který se jezírko naplní (ve dnech)

– naplnění jezírka:

1. fontána ...	x
2. fontána ...	$\frac{x}{2}$
3. fontána ...	$\frac{x}{3}$
4. fontána ...	$\frac{x}{4}$

– sestavení a výpočet rovnice:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$$

$$\frac{12 \cdot x + 6 \cdot x + 4 \cdot x + 3 \cdot x}{12} = 1$$

$$25 \cdot x = 12$$

$$x = \frac{12}{25}$$

– výsledek: Při spuštění všech fontán se jezírko naplní za $\frac{12}{25}$ dne, tj. asi 11 h 31 min.

4. Chodec a cyklista, ze dvou měst vzdálených od sebe 40 km, se vydali po cestě proti sobě. Po dvou hodinách se cyklista a čtyřikrát pomalejší chodec potkali. Jakou rychlostí jel cyklista? Jakou vzdálenost urazil chodec, než se setkali?

Řešení:

– označení: x ... rychlost chodce (v km/h)
 $y = 4 \cdot x$... rychlost cyklisty (v km/h)

– úvaha: ve chvíli setkání chodec a cyklista urazí dohromady celou vzdálenost mezi městy, využijeme vzorce $v = \frac{s}{t}$ (nebo $s = v \cdot t$), kde v je rychlost (km/h), s je dráha (km), t je čas (h)

– sestavení a výpočet rovnice: $2 \cdot x + 2 \cdot (4 \cdot x) = 40$
 $10 \cdot x = 40$
 $x = 4$

– dopočet řešení $y = 4 \cdot x = 4 \cdot 4$
 $y = 16$
 $s = x \cdot 2 = 4 \cdot 2$
 $s = 8$

– výsledek: Cyklista jel rychlostí 16 km/h, chodec za 2 hodiny chůze urazil 8 km.

5. V chemické laboratoři je několik různě velkých odměrných válců, z nichž nejmenší má objem 10 ml a každý větší je o 15 ml objemnější. Kolik válců je v laboratoři, jestliže dohromady v nich lze odměřit přesně 2,21 l? Jaký objem má největší válec?

Řešení:

– úvaha: výpočet lze provést pomocí součtu prvních n členů (n odměrných válců) aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 15$ ml a prvním členem $a_1 = 10$ ml

– označení: n ... počet odměrných válců
 s_n ... celkový objem (součet objemů všech válců, 2,21 l = 2 210 ml)

– výpočet:

(pozn.: bereme v úvahu pouze kladný kořen kvadratické rovnice)

– sestavení rovnice $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (a_1 + a_n)$$

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d)$$

– výpočet rovnice $2\,210 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (2 \cdot 10 + (n-1) \cdot 15)$

$$4\,420 = 20 \cdot n + 15 \cdot n^2 - 15 \cdot n$$

$$0 = 15 \cdot n^2 + 5 \cdot n - 4\,420$$

$$0 = 3 \cdot n^2 + n - 884$$

$$n = \frac{-1 + \sqrt{10609}}{6} = \frac{-1 + 103}{6}$$

$$\underline{\underline{n = 17}}$$

– dopočet řešení $a_{17} = 10 + (17-1) \cdot 15$

$$\underline{\underline{a_{17} = 250}}$$

– výsledek: Celkem je v laboratoři 17 odměrných válců, největší z nich má objem 250 ml.

Příklady neřešené

1. Zlatník má vyrobit královskou korunu ze směsi zlata, mědi, cínu a železa. Hotová koruna má vážit 0,6 kg. Kolik kterého kovu si má zlatník připravit, jestliže zlato s mědí má vážit $\frac{2}{3}$ celkové hmotnosti koruny, zlato a cín $\frac{3}{4}$ celku a zlato se železem $\frac{3}{5}$ celkové hmotnosti koruny?
2. Bazén je vypouštěn třemi čerpadly. První čerpadlo by jej samo vypustilo za $\frac{1}{8}$ dne. Druhé čerpadlo za 4 hodiny a třetí za $\frac{1}{3}$ dne. Jak dlouho by musela být puštěna všechna 3 čerpadla zároveň?
3. V tiskárně pracují tři vazači knih. První z nich sváže za osmihodinovou směnu 100 knih. Druhý za 3 směny sváže 200 knih, třetí za stejnou dobu o 50 knih více. Jak dlouho jim bude trvat svázat celkem 300 knih? Stihnou objednávku splnit za 1 směnu?
4. Dvě vlaková nádraží jsou od sebe vzdálená 130 km. Z jednoho nádraží vyjíždí osobní vlak a o 2 hodiny později také rychlík. Rychlík ujede za hodinu o 30 km více než osobní vlak, proto dorazí do cílové stanice o 10 min před osobním vlakem. Jaké jsou průměrné rychlosti obou vlaků?
5. Ondra jel na kole k babičce do sousedního města. O půl hodiny později se za ním pěšky vypravil bratr. Ondra mezitím dorazil k babičce a s druhým kolem se vydal bratrovi naproti. Kolikrát rychlejší musí být Ondra, aby se s bratrem setkal přesně v půli cesty? Jaká je rychlost bratra – chodce, jestliže Ondra jel na kole rychlostí 9 km/h celou 1 hodinu?
6. Otec odkázal svým dvěma synům 1000 zlatých mincí. Kolik mincí získá každý ze synů, jestliže $\frac{1}{5}$ dědictví vlastního syna je o 16 mincí větší než $\frac{1}{3}$ dědictví syna nevlastního.

7. Otec odkázal svým dvěma synům 1000 zlatých mincí. Kolik mincí získá každý ze synů, jestliže $\frac{1}{3}$ dědictví staršího syna je o 45 mincí větší než $\frac{1}{2}$ dědictví mladšího syna.
8. Můj pradědeček byl chlapcem čtvrtinu, mladíkem pětinu a mužem třetinu svého života. Jak dlouho žil, když starcem byl dalších 13 let?
9. Splňte úkol z Diofantova náhrobku: „Zde tento náhrobek přikrývá Diofanta – zázrak na pohled! Aritmetickým uměním sděluje kámen jeho věk. Šestinu života popřál mu Bůh být chlapcem, když pak dvanáctina uplynula, nechal mu vyrašit vous; ještě sedmina, tu rozžehl mu svatební pochodeň, a 5 let nato mu udělil synáčka. Běda, nešťastné dítě! Dosáhlo teprve poloviny otcova věku, když přijal ho Hádes, ten strašný. Ještě 4 roky snášel bolest, žije vědě. A nyní řekni cíl, kterého on sám dosáhl.“
10. Kouzelník má zázračnou krabičku. Když se do ní vloží kuličky, zdvojnásobí jejich počet, ale pak si 3 kuličky vezme zpět. Vložím-li do této krabičky všechny své kuličky třikrát bezprostředně po sobě, dostanu nakonec 67 kuliček. Kolik kuliček mám?
11. Honza vstoupil do zahrady postupně 3 branami, aby si natrhal jablka. Při odchodu dal prvnímu vrátnému polovinu jablek a ten mu vrátil 12 jablek. Druhému vrátnému dal opět polovinu jablek a ten mu vrátil 10 jablek. Nakonec i třetí vrátný dostal polovinu jablek a vrátil Honzovi 4 jablka. Když se Honza vrátil domů, měl přesně polovinu jablek, které natrhal v zahradě. Kolik jablek v zahradě natrhal?
12. Sběratel daroval muzeu 5 různě velkých vyřezávaných truhlic. Všechny dohromady vážily 100 kg a přitom každá větší byla o 500 g těžší. Kolik vážila nejmenší a kolik největší truhlice?
13. Radka celý týden trénovala skok do dálky. Každý den si zapsala délku nejlepšího skoku a zjistila, že dohromady naskákala 28,28 m a přitom se každý den zlepšila o stejnou délku. O jakou délku se denně zlepšovala, jestliže první den skočila do vzdálenosti 365 cm? Jaký byl její nejdelší skok?

14. Poločas rozpadu (tj. doba, za kterou se rozpadne právě polovina daného množství jaderného materiálu) lehkého jaderného odpadu je 61 dní. V barelech je uložena jedna tuna takového odpadu. Jaké množství jaderného materiálu zůstane v barelech přesně po roce a dni?
15. Jedna buňka bakterie E. Coli má obsah přibližně $1,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ a během hodiny se počet jejích buněk zosminásobí. Jak velkou plochu by pokryly buňky E. Coli po jednom dni množení z jedné mateřské buňky, kdybychom je mohli rozprostřít v jednu souvislou vrstvu?

Výsledky

1. řešení: na korunu je potřeba 305 g zlata, 95 g mědi, 145 g cínu a 55 g železa;
sestavění soustavy 4 rovnic o 4 neznámých, vyjádření 3 neznámých z jednotlivých rovnic, výpočet lineární rovnice o jedné neznámé, dopočet řešení
2. řešení: všechna 3 čerpadla společně vypustí bazén za $\frac{24}{17}$ hodiny (cca 1 h 25 min);
převod hodnot ze zadání na stejné jednotky (dny nebo hodiny, 1 den = 24 hodin),
výpočet lineární rovnice o jedné neznámé
3. řešení: společně svážou 300 knih za $\frac{18}{15}$ směny (přesně 9 h 36 min);
převod hodnot ze zadání na stejné jednotky (směny nebo hodiny, 1 směna = 8 hodin)
vzhledem k objednávce, výpočet lineární rovnice o jedné neznámé
4. řešení: osobní vlak jede průměrnou rychlostí 30 km/h, rychlík 60 km/h;
využití vztahu pro rychlost (v závislosti na čase a dráze), vyjádření vzájemného vztahu mezi rychlostmi a časy obou vlaků, úprava vztahu až na kvadratickou rovnici (vzhledem k časové neznámé), dopočet řešení
5. řešení: Ondra musí být $\frac{3}{t} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$ -krát rychlejší (t je doba jízdy Ondry), bratr jde rychlostí 6 km/h;
využití vztahu pro rychlost (v závislosti na čase a dráze), vyjádření vzájemného vztahu mezi rychlostmi a časy obou bratrů, obecný výpočet rychlosti Ondry, dopočet řešení
6. řešení: vlastní syn dostane 655 mincí, nevlastní syn 345 mincí;
sestavění soustavy 2 rovnic o 2 neznámých, eliminace jedné neznámé a dopočet řešení
7. řešení: starší syn dostane 654 mincí, mladší syn 346 mincí;
sestavění soustavy 2 rovnic o 2 neznámých, eliminace jedné neznámé a dopočet řešení

8. řešení: pradědeček žil 60 let;
sestavění a výpočet lineární rovnice o jedné neznámé
9. řešení: Diofantos z Alexandrie žil 84 let (řecký matematik, asi 326 – 410 n. l.);
sestavění a výpočet lineární rovnice o jedné neznámé
10. řešení: mám 11 kuliček;
sestavění a výpočet lineární rovnice o jedné neznámé
11. řešení: Honza v zahradě natrhal 32 jablek;
sestavění a výpočet lineární rovnice o jedné neznámé
12. řešení: nejmenší truhlice vážila 19 kg, největší truhlice 20 kg;
výpočet pomocí součtu prvních pěti členů aritmetické posloupnosti, nebo sestavění
a výpočet soustavy 5 rovnic o 5 neznámých
13. řešení: Radka se denně zlepšovala o 13 cm, nejdelší skok byl 443 cm;
výpočet pomocí součtu prvních sedmi členů aritmetické posloupnosti, nebo sestavění
a výpočet soustavy 7 rovnic o 7 neznámých
14. řešení: za rok a den (tj. 366 dní) zůstane v barelech 15,625 kg jaderného odpadu;
výpočet pomocí vzorce pro sedmý člen $\left(\frac{366}{61} + 1 = 7\right)$ geometrické posloupnosti
s kvocientem $\frac{1}{2}$
15. řešení: po jednom dni množení (tj. 24 h) buňky pokryjí plochu přibližně 7 083 km²;
výpočet pomocí vzorce pro 25. člen $(24 + 1 = 25)$ geometrické posloupnosti
s kvocientem 8

Závěr

Hlavním cílem této práce bylo vytvoření souboru úloh pro nadané žáky gymnázií, a to přednostně pro první dva ročníky. Soubor je rozdělen do šesti skupin o celkovém rozsahu 123 úloh. Každá ze skupin obsahuje pět typových řešených úloh (v jednom případě šest), alespoň patnáct dalších úloh neřešených a jejich výsledky včetně zkráceného návodu k řešení. Z hlediska obsahového je soubor úloh zaměřen na algebraickou a analytickou stránku matematiky. Záměrně byla vynechána témata funkce, komplexní čísla, diferenciální a integrální počet, pravděpodobnost a statistika, goniometrie a trigonometrie. Zcela vypuštěny byly geometrické úlohy. Doplnění souboru o typové úlohy z těchto témat by vydalo na celou další práci.

Vybrané úlohy z této práce byly otestovány v několika gymnaziálních třídách zaměřených na matematiku a současně bylo testování provedeno ve srovnávací třídě všeobecné větve. Podle předpokladu byly matematické třídy v řešení úloh úspěšnější než třída srovnávací. Přesto v průměru na jednoho žáka zůstalo 20% zadaných úloh nevyřešeno. Toto vysoké procento připisuji momentálnímu demografickému stavu kraje, kdy do gymnaziálních tříd dochází stále méně žáků a je tedy nižší pravděpodobnost výskytu nadaných žáků v daných ročnících. Mezi nejčastější chyby při řešení zadaných úloh patřily chybějící podmínky, neúplné řešení (hlavně u důkazů a úloh s více řešeními) a chyby z nepozornosti (při opisování znamének). Častěji a také úspěšněji byly řešeny úlohy s přísně matematickým zadáním („řešte“, „vypočtete“, atd.), na rozdíl od úloh se slovním zadáním. Z tohoto důvodu jsem do souboru přidala poslední skupinu úloh (tzv. „slovní“), v níž jsou zařazeny poměrně jednoduché úlohy s řešením na několik řádků.

Doufám, že tato práce a především vytvořená sbírka úloh nabídne inspiraci dalším učitelům a bude často využívána v praxi k oživení výuky a k získání zájmu o matematiku nejen nadaných žáků.

Literatura

- [1] CALÁBEK, P. et al. (ed.): *Makos 2002: sborník materiálů z podzimní školy péče o talenty, Malá Morávka 9.-12. října 2002*. 1. vyd. Olomouc: UP, 2003. 95 s. ISBN 80-244-0549-0
- [2] CALÁBEK, P. et al. (ed.): *Makos 2006: sborník materiálů z podzimní školy péče o talenty s mezinárodní účastí, Janské Lázně 4.-7. října 2006*. 1. vyd. Olomouc: UP, 2007. 111 s. ISBN 978-80-244-1760-8
- [3] CALÁBEK, P.; ŠVRČEK, J.; VANĚK, V.: *Péče o matematické talenty v České republice*. 1. vyd. Olomouc: UP, 2008. 40 s. ISBN 978-80-244-1884-1
- [4] DOČKAL, V.: *Psychológia nadania*. 1. vyd. Bratislava: SPN, 1987. 184 s. PNA 067-214-87
- [5] DOČKAL, V.: *Zaměřeno na talenty, aneb, Nadání má každý*. 1. vyd. Praha: NLN, 2005. 245 s. ISBN 80-7106-840-3
- [6] FOŘTÍKOVÁ, J. et al. (ed.): *Úspěšná výuka mimořádně nadaných dětí*. 1. vyd. Praha: Triton, 2008. 168 s. ISBN 978-80-7387-173-4
- [7] FRÖMEL, K.; TOLLINGEROVÁ, D. et al.: *Studia paedagogica 1, Learning activities and their perfectioning*. 1. vyd. Praha: SPN, 1991. 164 s. ISBN 80-7067-792-9
- [8] FUCHS, E.; KUBÁT, J. et al.: *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2001. 148 s. ISBN 80-7196-095-0
- [9] GÁBOR, O.; KOPANEV, O.; KRIŽALKOVIČ, K.: *Teória vyučovania matematiky 1*. 1. vyd. Bratislava: SPN, 1989. 328 s. ISBN 80-08-00285-9
- [10] HECHT, T.; SKLENÁRIKOVÁ, Z.: *Metódy riešenia matematických úloh*. 1. vyd. Bratislava: SPN, 1992. 246 s. ISBN 80-08-00340-5
- [11] HEJNÝ, M. et al.: *Teória vyučovania matematiky 2*. 1. vyd. Bratislava: SPN, 1989. 560 s. ISBN 80-08-00014-7
- [12] HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J. et al.: *International Symposium Elementary Math Teaching: Proceedings*. 1. vyd. Praha: UK, 1993. 121 s. ISBN 80-7066-791-5
- [13] HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J.; STEHLÍKOVÁ, N. (eds.): *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. 1. vyd. Praha: UK, 2004. 244 s. ISBN 80-7290-189-3

- [14] HERMAN, J.; KUČERA, R.; ŠIMŠA, J.: *Metody řešení matematických úloh I.* 1. vyd. Praha: SPN, 1990. 344 s. ISBN 80-210-0120-8
- [15] HERMAN, J.; KUČERA, R.; ŠIMŠA, J.: *Metody řešení matematických úloh II.* 1. vyd. Brno: MU, 2004. 356 s. ISBN 80-210-3528-5
- [16] HŘÍBKOVÁ, L.: *Nadání a nadaní.* 1. vyd. Praha: Grada Publishing, 2009. 256 s. ISBN 978-80-247-1998-6
- [17] JEŘÁBEK, O.; BÍLEK, M.: *Teorie a praxe tvorby didaktických testů.* 1. vyd. Olomouc: UP, 2010. 92 s. ISBN 978-80-244-2494-1
- [18] LEPIL, O.: *Teorie a praxe tvorby výukových materiálů.* 1. vyd. Olomouc: UP, 2010. 98 s. ISBN 978-80-244-2489-7
- [19] MAČÁK, K.: *Tři středověké sbírky matematických úloh.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2001. 101 s. ISBN 80-7196-215-5
- [20] MACHŮ, E.: *Nadaný žák.* 1. vyd. Brno: Paido, 2010. 124 s. ISBN 978-80-7315-197-3
- [21] MÖNKS, F. J.; YPENBURG, I. H.: *Naše dítě je velmi nadané: rukověť pro rodiče a učitele.* 1. vyd. Praha: Grada Publishing, 2002. 98 s. ISBN 80-247-0445-5
- [22] PASSOW, H. et al.: *The Gifted and the Talented: Their Education and Development.* 1. vyd. Chicago: The National Society for the Study of Education, 1979. 473 s. ISSN 0077-5762
- [23] ŠENEKLOVÁ, J. et al. (ed.): *Práce s talentovanou mládeží: sborník příspěvků z mezinárodní konference, Brno 25. – 27. září 2008.* 1. vyd. Brno: JCMM, 2008. 240 s. ISBN 978-80-254-3376-8
- [24] ŠIMONÍK, O.; VÍTKOVÁ, M. et al.: *Education and talent 1: partial research team 5 – Education of talented pupils.* 1. vyd. Brno: MSD, 2008. 88 s. ISBN 978-80-7392-033-3
- [25] ŠVEDA, D.: *Tvorba systémů úloh v matematice.* 1. vyd. Prešov: Metodické centrum, 1992. 43 s. ISBN 80-85410-36-2
- [26] ŠVRČEK, J.: *Tvorba a využití gradovaných řetězců matematických úloh.* 1. vyd. Olomouc: UP, 2008. 48 s. ISBN 978-80-244-2135-3
- [27] ŠVRČEK, J.; CALÁBEK, P.: *Sbírka netradičních matematických úloh.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7
- [28] ZELINKA, R. (ed.): *Druhý ročník matematické olympiady.* 1. vyd. Praha: SPN, 1954. 84 s.
- [29] ZELINKA, R. (ed.): *Třetí ročník matematické olympiady.* 1. vyd. Praha: SPN, 1955. 138 s.

- [30] ZELINKA, R. (ed.): *Čtvrtý ročník matematické olympiady*. 1. vyd. Praha: SPN, 1956. 209 s.
- [31] ZHOUF, J. et al. (ed.): *Ani jeden matematický talent nazmar: sborník příspěvků 1. ročníku konference učitelů matematiky a přírodních oborů*. 1. vyd. Hradec Králové: Pedagogické centrum, 2003. 210 s. ISBN 80-7015-936-7
- [32] ZHOUF, J. et al. (ed.): *Ani jeden matematický talent nazmar: sborník příspěvků 2. ročníku konference učitelů matematiky a přírodních oborů*. 1. vyd. Praha: UK, 2005. 166 s. ISBN 80-7290-224-5
- [33] ZHOUF, J. et al. (ed.): *Ani jeden matematický talent nazmar: sborník příspěvků 3. ročníku konference učitelů matematiky a přírodních oborů*. 1. vyd. Praha: UK, 2007. 250 s. ISBN 978-80-7290-332-0
- [34] ZHOUF, J.: *Přijímací zkoušky na střední školy s rozšířenou výukou matematiky*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1997. 132 s. ISBN 80-7196-075-6

ODKAZY:

- [1] Péče o nadané žáky. *Učitelské noviny* [online]. č. 20/2004. [cit. 29. března 2011]
Dostupné na WWW: <<http://www.ucitelskenoviny.cz/?archiv&clanek=4381>>
- [2] Péče o mimořádně nadané žáky. *Národní ústav odborného vzdělávání* [online]. [cit. 29. března 2011]
Dostupné na WWW: <<http://www.nuov.cz/pece-o-mimoradne-nadane-zaky>>
- [3] Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. *Metodický portál RVP* [online]. [cit. 29. března 2011] Dostupné na WWW:
<<http://clanky.rvp.cz/clanek/c/G/9639/ramcovy-vzdelavaci-program-pro-gymnazia.html/>>
- [4] Vyhláška č. 73/2005 Sb., o vzdělávání dětí, žáků a studentů se speciálními vzdělávacími potřebami a dětí, žáků a studentů mimořádně nadaných. *Dokumenty MŠMT* [online]. [cit. 29. března 2011]
Dostupné na WWW: <<http://www.msmt.cz/dokumenty/vyhlaska-c-73-2005-sb-1>>
- [5] Vzdělávání mimořádně nadaných žáků a studentů. *Pedagogicko-psychologická poradna, Bruntál* [online]. [cit. 29. března 2011]
Dostupné na WWW: <<http://www.pppbruntal.cz/texty/nadani.html>>