UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Zákony velkých čísel

Vedoucí diplomové práce:
prof. RNDr. Ing. Lubomír Kubáček, DrSc., Dr. h. c.
Rok odevzdání: 2011
Vypracoval:
Veronika Mikolášová
MAP, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně za vedení prof. RNDr. Ing. Lubomíra Kubáčka, DrSc., Dr. h. c., a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 4. března 2011

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu bakalářské práce prof. RNDr. Ing. Lubomíru Kubáčkovi, DrSc., Dr. h. c. za cenné rady a obětavost, se kterou se mi věnoval při vytváření této práce. Také chci poděkovat mé rodině za trpělivost a laskavou pomoc po celou dobu mého studia.

Obsah

Seznam obrázků

Úvod

Zákony velkých čísel lze právem považovat za jeden z nejdůležitějších základních poznatků teorie pravděpodobnosti. Podstatnou měrou totiž přispívají k přesvědčení o poznatelnosti světa. Uplatňují se rovněž výrazně ve dvou fundamentálních větách matematické statistiky, zejména v Glivenkově větě o stejnoměrné konvergenci empirické distribuční funkce k jejímu teoretickému protějšku. Interference zákonů velkých čísel s reálným světem se obzvlášť projevuje při experimentálních metodách získávání znalostí o reálných jevech a procesech. Poznatek o zákonech velkých čísel tak pronikl do všech experimentálních disciplín ve formě přesvědčení, že „čím více měření bude provedeno, tím přesnější představu získáme o skutečné hodnotě měřené veličiny.“

Cílem práce je vytvořit relativně uzavřenou teorii zákonů velkých čísel na základě odborné literatury. Výchozím podkladem pro nás bude teorie míry a integrálu, která od první poloviny minulého století tvoří fundamentální metodiku teorie pravděpodobnosti. V závěrečné kapitole bude rovněž poukázáno na využití těchto zákonů v některých statistických úlohách.

1. Základní pojmy

V této části práce budou shrnuty základní pojmy a věty teorie míry a integrálu (zúžené pak na teorii pravděpodobnosti), potřebné pro samotnou práci. V závěru této kapitoly pak bude vysvětleno několik základních pojmů matematické statistiky. Mimo to práce předpokládá základní znalosti teorie množin a elementární analýzy (posloupnosti, řady reálných čísel i funkcí, jejich limita / konvergence).

1.1. Míra a integrál

1.1.1. Míra

Definice 1.1. Systém podmnožin (značíme Σ) množiny X nazveme *σ-algebra nad množinou X*, jestliže $\forall A_n \subset X, n \in \mathbb{N}$, platí:

(i) $A_1 \in \Sigma \wedge A_2 \in \Sigma \quad \Rightarrow \quad (A_1 \setminus A_2) \in \Sigma$

(ii) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

(iii) $X \in \Sigma$

Poznámka 1.1. První dvě podmínky předchozí definice lze slovně vyjádřit tak, že *σ-algebra je systém množin uzavřený na operaci rozdílu a spočetného sjednocení množin.*

Věta 1.1. *Množinová σ-algebra Σ je uzavřená také na operaci spočetný průnik množin.*

D ů k a z: Viz [1, str. 24]

Věta 1.2. *Průnik libovolného systému σ-algeber Σ_i nad X, kde i je z nějaké indexové množiny I, je rovněž σ-algebra nad X.*

D ů k a z: Viz [2, str. 27]; podmínka $X \in \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ je zřejmá.

Věta 1.3. *Nechť $\mathcal{G}$ je libovolný systém podmnožin množiny X. Označme G systém všech σ-algeber obsahujících $\mathcal{G}$. Průnik tohoto systému je* nejmenší σ-algebra generovaná (obsahující) $\mathcal{G}$.

D ů k a z: Viz [2, str. 28]

Definice 1.2. Nechť $\mathcal{G}$ je systém všech otevřených množin v $\mathbb{R}^n$. Nejmenší σ-algebru generovanou tímto systémem nazveme *σ-algebrou borelovských množin v $\mathbb{R}^n$* a značíme $\mathcal{B}_n$.

Poznámka 1.2. V $\mathbb{R}^1$ je tedy σ-algebra borelovských množin definována jako minimální σ-algebra generovaná systémem všech otevřených intervalů.

Definice 1.3. Množinovou funkci μ na σ-algebře Σ nazveme *míra*, jestliže:

(i) $\mu\colon \Sigma \to \langle 0, \infty)$

(ii) $\mu(\emptyset) = 0$

(iii) Jestliže $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ a $E_i \cap E_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, pak

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \quad \text{(řekneme, že } \mu \text{ je } \sigma\text{-}\textit{aditivní}\text{)}.$$

Definice 1.4. Uspořádanou trojici $(X,\ \Sigma,\ \mu)$, kde X je nějaká (neprázdná) množina, Σ je σ-algebra nad X a μ je míra na Σ, nazveme *prostor s mírou* (nebo také *měřitelný prostor*.)

Věta 1.4 (Vlastnosti míry)**.** *Nechť $(X,\ \Sigma,\ \mu)$ je prostor s mírou. Pak platí:*

1. $A, B \in \Sigma, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ *(tzv. monotonie míry)*
2. $A_n \in \Sigma, n = 1, 2, \dots \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
3. $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$
4. $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \wedge \exists n : \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

D ů k a z: Viz [1, str. 37-38]

Poznámka 1.3. Na σ-algebře borelovských množin $\mathcal{B}_1$ lze definovat tzv. *Lebesgueovu míru* μ_L, která vzniká rozšířením míry z okruhu generovaného zleva uzavřenými intervaly. Míra na tomto okruhu vzniká přirozeným rozšířením množinové funkce, která intervalu přiřadí jeho délku. Rozšíření míry z okruhu na minimální σ-okruh lze provést Caratheodoryho postupem pomocí tzv. vnější míry (podrobněji viz [1]).

1.1.2. Měřitelné funkce a jejich konvergence

Pokud nebude řečeno jinak, budeme nadále uvažovat měřitelný prostor $(X,\ \Sigma,\ \mu)$.

Definice 1.5. Funkce $f\colon X \to \mathbb{R}$ se nazývá *měřitelná* (někdy také Σ-měřitelná), jestliže platí:

$$\{x \in X; f(x) < a\} \in \Sigma \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Poznámka 1.4. Podmínce z předchozí definice jsou ekvivalentní také tyto: $\forall a \in \mathbb{R}\colon \{x \in X; f(x) \leq a\}$, resp. $\{x \in X; f(x) > a\}$, resp. $\{x \in X; f(x) \geq a\}$

D ů k a z: [2, str. 72]

Poznámka 1.5. Nechť $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \mu)$, $n \in N$ je měřitelný prostor. Funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme *borelovsky měřitelná (borelovská)*, je-li $\mathcal{B}_n$-měřitelná.

Věta 1.5 (Vlastnosti měřitelných funkcí)**.** *Nechť f a g jsou měřitelné funkce. Pak také funkce:*

1. $cf(x) \quad \forall c \in \mathbb{R}$
2. $f(x)+g(x)$ *po vhodném dodefinování v bodech, kde* $f(x)+g(x)$ *nemá smysl*
3. $|f(x)|$
4. $\max\{f(x), g(x)\}$
5. $f(x) \cdot g(x)$
6. $\frac{1}{f(x)}$ *po dodefinování v bodech, kde* $f(x) = 0$

jsou měřitelné funkce.

D ů k a z: Viz [2, str. 74]

Věta 1.6. *Nechť je dána posloupnost* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *měřitelných funkcí. Pak také funkce* $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *jsou měřitelné.*

D ů k a z: Viz [1, str. 84]

Definice 1.6. Řekneme, že měřitelná funkce $s\colon X \to \mathbb{R}$ je *jednoduchá*, jestliže množina $s(X)$ (obor hodnot) je konečná. Takovou funkci lze také zapsat pomocí tzv. charakteristické funkce χ_A:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x) \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

kde α_i jsou libovolné konstanty a množiny A_i jsou po dvou disjunktní takové, že $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$.

Poznámka 1.6. Libovolnou reálnou funkci f lze rozložit na tzv. kladnou a zápornou část:

$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ ... *kladná část funkce* f

$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}$ ... *záporná část funkce* f

Pak lze psát:

$$f = f^+ - f^- \qquad |f| = f^+ + f^-$$

Věta 1.7. *Nechť* f *je měřitelná funkce. Pak existuje posloupnost* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jednoduchých funkcí, pro které platí:*

i. $|s_1(x)| \leq |s_2(x)| \leq \ldots \qquad \forall x \in X$

ii. $s_n \to f$ *na* X [1]

[1] Pro jistotu zopakujme dva základní druhy konvergence posloupnosti funkcí $\{f_n\}$:

- bodová konvergence (zn. $f_n \to f$) na M:
  $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in M\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
- stejnoměrná konvergence (zn. $f_n \rightrightarrows f$) na M:
  $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\colon n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

iii. pro $f \geq 0$ na X lze zvolit $s_1 \leq s_2 \leq \dots$, tj. $s_n \uparrow f$

D ů k a z: [1, str. 85]

Teorie míry nám umožňuje zavést další druhy konvergence funkčních posloupností, které, jak dále uvidíme, nám poslouží jako postačující podmínky integrovatelnosti:

Definice 1.7. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ skoro všude konečných měřitelných funkcí *konverguje skoro všude na množině* M (značíme $f_n \to f$ s.v. na M), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in M \setminus M_0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

kde $\mu(M_0) = 0$.

Poznámka 1.7. Pojem *skoro všude* na množině znamená, že daná vlastnost neplatí pouze na takové podmnožině dané množiny, která má nulovou míru.

Definice 1.8. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ skoro všude konečných měřitelných funkcí *konverguje k funkci f podle míry* (značíme $f_n \xrightarrow{\mu} f$ s. v. na M), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \lim_{n \to \infty} \mu(\{x; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Věta 1.8. *Nechť $f_n \to f$ s.v. na M, $\mu(M) < \infty$. Pak také $f_n \xrightarrow{\mu} f$ na M.*

D ů k a z: Viz [2, str. 125]

Věta 1.9. *Nechť $f_n \xrightarrow{\mu} f$ na M, $\mu(M) < \infty$. Pak existuje podposloupnost $\{f_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $f_{k_n} \to f$ s. v. na M.*

D ů k a z: Viz [2, str. 126]

1.1.3. Lebesgueův integrál

Definice 1.9. Nechť $s(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, $\mu(A_i) < \infty, i = 1, \dots n$, pak *Lebesgueův integrál z jednoduché funkce s* je definován takto:

$$\int_X s(x) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

Poznámka 1.8. Zřejmě:

1. $\int_X \chi_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A)$

2. $\int_E s(x) \, \mathrm{d}\mu = \int_X \chi_E s(x) \, \mathrm{d}\mu = \int_X \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \chi_{A_i} \chi_E \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$, kde $E \in \Sigma$

Definice 1.10. Nechť $f \geq 0$ je měřitelná funkce taková, že existuje posloupnost jednoduchých funkcí $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{n_i} \chi_{A_{n_i}}(x)$, pro kterou platí $s_n \uparrow f$ pro $n \to \infty$ a $\mu(\bigcup_{i=1}^{m(n)} A_{n_i}) < \infty \; \forall n \in \mathbb{N}$. Pak *Lebesgueův integrál z nezáporné funkce* f položíme:

$$\int_X f(x) \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X s_n(x) \, \mathrm{d}\mu$$

Definice 1.11. Nechť f je libovolná měřitelná funkce. Pak její *Lebesgueův integrál* definujeme

$$\int_X f(x) \, \mathrm{d}\mu = \int_X f^+(x) \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^-(x) \, \mathrm{d}\mu$$

má-li tento výraz smysl.

Věta 1.10 (Monotonie integrálu)**.** *Nechť* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *s.v. Pak*

$$0 \leq \int_X f(x) \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g(x) \, \mathrm{d}\mu$$

D ů k a z: [2, Str. 95]

Věta 1.11. *Nechť* $f(x)$ *je měřitelná funkce,* c *libovolné reálné číslo. Pak platí:*

$$\int_X cf(x) \, \mathrm{d}\mu = c \int_X f(x) \, \mathrm{d}\mu$$

D ů k a z: [2, str. 107]

Věta 1.12.

1. $\int_X f(x) \, \mathrm{d}\mu < \infty \Rightarrow f < \infty$ *s.v. v* X

2. $\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu > -\infty \Rightarrow f > -\infty$ *s.v. v* X

D ů k a z: Viz [2, str. 96]

Věta 1.13. *Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou měřitelné funkce, které mají konečný integrál, a nechť $h(x) = f(x) + g(x)$ a h je dodefinováno tam, kde tento součet definován není. Pak:*

$$\int_X h(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu$$

D ů k a z: Viz [2, str. 111]

Věta 1.14. *Měřitelná funkce f má konečný Lebesgueův integrál $\Leftrightarrow$ f^+, f^- mají konečný Lebesgueův integrál $\Leftrightarrow$ $|f|$ má konečný Lebesgueův integrál a platí $|\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu| \leq \int_X |f(x)|\,\mathrm{d}\mu$.*

D ů k a z: První ekvivalence plyne přímo z definice Lebesgueova integrálu měřitelné funkce, zbytek viz [2, str. 96].

1.2. Pravděpodobnost

1.2.1. Náhodný jev, definice pravděpodobnosti

Teorie pravděpopodobnosti studuje výsledky tzv. náhodných pokusů, tj. pokusů (určených pevně daným systémem podmínek), které mohou mít více různých výsledků, z nichž nastává vždy právě jeden.
Uvažujme tedy nějaký pevně zvolený pokus. Označme Ω množinu všech možných výsledků tohoto pokusu, $\omega \in \Omega$ jeden konkrétní výsledek.

Definice 1.12.

- Každá podmnožina $A \subset \Omega$ se nazývá *jev*, každá jednoprvková podmnožina $\{\omega\} \subset \Omega$ se nazývá *elementární jev.*

- Řekneme, že při realizaci náhodného pokusu *nastal jev* A, nastal-li takový výsledek ω, pro který platí $\omega \in A$, tedy nastal-li *výsledek příznivý jevu* A.

- Prázdná množina $\emptyset$ se nazývá *nemožný jev*, množina všech výsledků Ω *jistý jev*.
- *Sjednocení jevů* $A_1, \ldots, A_n$ je jev, který nastane, jestliže nastane alespoň jeden z jevů $A_1, \ldots, A_n$; značíme $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ nebo $\bigcup_{i=1}^n A_i$.
- *Průnik jevů* $A_1, \ldots, A_n$ je jev, který nastane, nastanou-li všechny jevy $A_1, \ldots, A_n$ současně; značíme $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ nebo $\bigcap_{i=1}^n A_i$.
- *Rozdíl jevů* A a B je jev, který nastane, nastane-li A a zároveň nenastane B; značí se $A \setminus B$.
- *Jev opačný (doplněk) k jevu* A je jev $A^C = \Omega \setminus A$.
- Jevy A a B nazveme *neslučitelné* (disjunktní), nemohou-li nastat současně, tedy $A \cap B = \emptyset$.

Abychom mohli zavést na Ω funkci pravděpodobnosti, je třeba uvažovat systém jevů obsahující Ω, který je uzavřený na operaci rozdílu a spočetného sjednocení jevů – nám už známou σ-algebru.

Definice 1.13. Nechť Ω je množina výsledků náhodného pokusu. Je-li Σ σ-algebra podmnožin množiny Ω, nazývá se *jevové pole*. Prvky $A \in \Sigma$ se nazývají *náhodné jevy*.

Definice 1.14. Nechť je dána neprázdná množina Ω a na ní definovaná σ-algebra Σ. *Pravděpodobností* (pravděpodobnostní mírou) nazveme každou reálnou funkci $\mathsf{P}()$ definovanou na Σ, která splňuje tyto podmínky:

(i) $\mathsf{P}(A) \geq 0, \quad \forall A \in \Sigma$

(ii) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$

(iii) Jestliže $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ a $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, pak

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n)$$

Definice 1.15. Uspořádanou trojici $(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$ nazýváme *pravděpodobnostní prostor.*

Poznámka 1.9. Pokud nebude řečeno jinak, budeme v dalším textu uvažovat pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$.

Věta 1.15 (Vlastnosti pravděpodobnosti)**.** *Pro libovolné náhodné jevy* $A, B \in \Sigma$, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ *platí:*

(V.1) $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$

(V.2) $\mathsf{P}(A^C) = 1 - \mathsf{P}(A)$

(V.3) $\mathsf{P}(A) \leq 1$

(V.4) $A \subset B \Rightarrow \mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$

(V.5) $\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$,
speciálně $A \subset B \Rightarrow \mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$

(V.6) $\mathsf{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n)$

D ů k a z: Viz [3, str. 11-14]

Poznámka 1.10. Z definičních vlastností (i) a (iii) a z tvrzení (V.1) předchozí věty je patrné, že pravděpodobnost je speciální případ míry. Rovněž lze naopak tvrdit, že míra μ, která splňuje podmínku $\mu(X) = 1$, je pravděpodobností.

Poznámka 1.11. Podle předchozí poznámky tedy lze tvrzení uvedená v sekcích 1.1. - 1.3. aplikovat i na pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$. Pro některé pojmy teorie míry se však v teorii pravděpodobnosti užívají speciální názvy. Pro nás budou v dalším důležité tyto:

a) jestliže $\mathsf{P}(X$ má určitou vlastnost$) = 1$, řekneme, že X má tuto vlastnost *skoro jistě* (s. j.),

b) pojmům konvergence skoro všude a konvergence podle míry odpovídají v teorii pravděpodobnosti po řadě pojmy *konvergence skoro jistě* a *konvergence podle pravděpodobnosti.*

Definice 1.16. Náhodné jevy A, B se nazývají *nezávislé*, jestliže platí

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$$

Věta 1.16. *Pro libovolný náhodný jev A platí, že Ω a A jsou nezávislé, a také $\emptyset$ a A jsou nezávislé.*

D ů k a z: [3, str. 27]

Definice 1.17. Náhodné jevy systému $\mathcal{C} = \{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ se nazývají *nezávislé*, jestliže pro každou konečnou skupinu $\{\lambda_1, \dots \lambda_k\} \subset \Lambda$ platí:

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{\lambda_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathsf{P}(A_{\lambda_i})$$

Věta 1.17. *Jestliže jsou náhodné jevy systému $\mathcal{C} = \{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ nazávislé, pak jsou nezávislé náhodné jevy libovolného podsystému $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}$.*

D ů k a z: Plyne přímo z definice nezávislých náhodných jevů. ■

1.2.2. Náhodná veličina, způsob zadání, číselné charakteristiky

Definice 1.18. Reálnou funkci $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^1$ nazveme *náhodnou veličinou*, jestliže je tato funkce Σ-měřitelná, to znamená, jestliže pro každé $x \in \mathbb{R}^1$ platí

$$\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\} \overset{\text{zn.}}{=} (X \leq x) \in \Sigma$$

Poznámka 1.12. Obdobně zavedeme pro zjednodušení zápisu toto značení:

$$\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\} \overset{\text{zn.}}{=} (X \in B)$$

Definice 1.19. *Rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X* je množinová funkce $P_X(B)\colon \mathcal{B}_1 \to \mathbb{R}^1$ definovaná vztahem:

$$P_X(B) = \mathsf{P}(X \in B), \quad B \in \mathcal{B}_1$$

Věta 1.18. *Nechť X je náhodná veličina, P_X její rozdělení pravděpodobností. Pak $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1, P_X)$ tvoří pravděpodobnostní prostor.*

D ů k a z: Viz [3, str. 36]

Definice 1.20. Nechť X je náhodná veličina. Funkce $F_X\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ definovaná předpisem

$$F_X(x) = \mathsf{P}(X < x), \quad x \in \mathbb{R}^1$$

se nazývá *distribuční funkce náhodné veličiny* X.

Věta 1.19 (Vlastnosti distribuční funkce)**.**

1. F_X *je neklesající funkce*

2. $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

3. F_X *je zleva spojitá v každém bodě* $x \in \mathbb{R}^1$

D ů k a z: Viz [3, str. 37-38] [2]

Definice 1.21. Distribuční funkce F_X se nazývá

a) *diskrétní*, existuje-li (konečná či nekonečná) prostá posloupnost reálných čísel $\{x_n\}$ a jí odpovídající posloupnost kladných čísel $\{p_n\}, \sum p_n = 1$, pro které platí

$$F_X(x) = \sum_{n\colon x_n < x} p_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$$

Funkci $p(x_n) = p_n$ nazýváme *pravděpodobnostní funkcí náhodné veličiny* X.

b) *absolutně spojitá*, existuje-li nezáporná, borelovsky měřitelná funkce $f_X(x)\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, pro kterou platí vztah:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$$

Funkci f_X nazveme *hustotou (rozdělení pravděpopodobností) náhodné veličiny* X.

Jestliže má X *diskrétní* (*absolutně spojitou*) distribuční funkci, pak stejně nazveme i tuto náhodnou veličinu samotnou a její rozdělení pravděpodobností.

[2] Tento důkaz je veden sice pro distribuční funkci definovanou předpisem $F_X(x) = \mathsf{P}(X \leq x), x \in \mathbb{R}^1$, která je spojitá zprava, ovšem důkaz spojitosti zleva námi definované distribuční funkce by se s nezbytnými úpravami vedl analogicky.

Definice 1.22. Nechť X je náhodná veličina. Její *střední hodnotou* rozumíme číslo

$$\mathsf{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega)\,\mathrm{d}\,\mathsf{P}$$

Množinu všech náhodných veličin definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$, které mají konečnou střední hodnotu, budeme značit symbolem $L_1(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$ nebo zkráceně L_1.

Poznámka 1.13. Praktický výpočet střední hodnoty se provádí pomocí těchto vzorců, odvozených z předešlé definice:

$$\mathsf{E}(X) = \sum_n x_n p_n \quad \text{pro } X \text{ diskrétní,}$$

$$\mathsf{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \mathrm{d}x \quad \text{pro } X \text{ absolutně spojitou.}$$

Věta 1.20 (Vlastnosti střední hodnoty náhodné veličiny)**.** *Nechť X, Y jsou náhodné veličiny z množiny L_1 a a, b jsou libovolná reálná čísla. Pak platí:*

1. $\mathsf{E}(aX) = a\,\mathsf{E}(X)$
2. $\mathsf{E}(X + Y) = \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y)$
3. $P(X \leq Y) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{E}(X) \leq \mathsf{E}(Y)$
4. $\mathsf{P}(X = a) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{E}(X) = a$

D ů k a z: [3, str. 54]

Definice 1.23. *Rozptylem (variancí) náhodné veličiny X* rozumíme číslo

$$\mathrm{var}(X) = \sigma^2(X) = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}(X))^2$$

Věta 1.21 (Vlastnosti rozptylu)**.** *Nechť X má konečný rozptyl, $a, b \in \mathbb{R}$. Platí:*

1. $\mathrm{var}(X) \geq 0$
2. $\mathrm{var}(X) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{P}(X = c) = 1$

3. $\mathrm{var}\,(a + bX) = b^2\,\mathrm{var}\,(X)$

4. $\mathrm{var}\,(X) = \mathsf{E}(X^2) - (\mathsf{E}(X))^2$

D ů k a z: [3, str. 58]

Věta 1.22. *Libovolnou náhodnou veličinu X lze transformovat na tzv.* normovanou náhodnou veličinu, *tedy takovou náhodnou veličinu Y, pro kterou platí $\mathsf{E}(Y) = 0$ a $\mathrm{var}(Y) = 1$.*

D ů k a z: Uvažujme

$$Y = \frac{X - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}}$$

Platí:

$$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}\left(\frac{X - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}}\right) = \frac{\mathsf{E}(X - \mathsf{E}(X))}{\mathrm{var}(X)} = \frac{\mathsf{E}(X) - \mathsf{E}(X)}{\mathrm{var}(X)} = 0$$

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}\left(\frac{X - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}}\right) = \frac{\mathrm{var}(X - \mathsf{E}(X))}{\mathrm{var}(X)} = \frac{\mathrm{var}(X)}{\mathrm{var}(X)} = 1$$

■

Definice 1.24. Číslo $x_\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha \in (0,1))$, nazveme *α-kvantil náhodné veličiny* X, jestliže platí:

$$\mathsf{P}(X < x_\alpha)) \leq \alpha \quad \wedge \quad \mathsf{P}(X > x_\alpha) \leq 1 - \alpha$$

Poznámka 1.14.

- Kvantily normovaného normálního rozdělení obvykle značíme u_α, $\alpha \in (0,1)$.
- Druhou nerovnost v předešlé definici lze psát $1 - \mathsf{P}(X \leq x_\alpha) \leq 1 - \alpha$, dohromady pak $\mathsf{P}(X < x_\alpha)) \leq \alpha \leq \mathsf{P}(X \leq x_\alpha)$ a tedy x_α je takové číslo, které splňuje $F_X(x_\alpha) \leq \alpha \leq F_X(x_\alpha + 0)$.
- Jestliže je X absolutně spojitá náhodná veličina, platí $\alpha = F_X(x_\alpha)$.

1.2.3. Náhodný vektor, nezávislé náhodné veličiny

Definice 1.25. Zobrazení $\mathbb{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ nazveme *(n-rozměrný) náhodný vektor*, jestliže je Σ-měřitelné.

Poznámka 1.15. Pro zjednodušení zápisu zavedeme následující označení:

$$\mathbb{X}(\omega) \leq \mathbf{x} \Leftrightarrow X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n, \text{ kde } \mathbf{x} = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Poznámka 1.16. Σ-měřitelnost zobrazení $\mathbb{X}$ znamená, že platí:

- $\{\omega \in \Omega;\ \mathbb{X}(\omega) \leq \mathbf{x}\} \in \Sigma \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$ nebo ekvivalentně
- $\{\omega \in \Omega;\ \mathbb{X}(\omega) \in B\} \in \Sigma \quad \forall B \in \mathcal{B}_n$

Věta 1.23. $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *je náhodným vektorem právě tehdy, když X_i je náhodná veličina pro všechna $i = 1, \dots, n$.*

D ů k a z: [3, str. 80]

Definice 1.26. *(Sdruženou) distribuční funkcí* náhodného vektoru $\mathbb{X}$ rozumíme funkci $F_{\mathbb{X}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovanou vztahem:

$$F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = \mathsf{P}(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n) = \mathsf{P}(\mathbb{X} < \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Poznámka 1.17.

- Distribuční funkce $F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots x_n)$ náhodného vektoru $\mathbb{X}$ se nazývá *diskrétní*, existuje-li prostá posloupnost $\{\mathbf{x}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ (konečná nebo nekonečná) a jí odpovídající posloupnost kladných čísel $\{p_m\}, \sum p_m = 1$, takové, že platí

  $$F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = \sum_{m\colon\ \mathbf{x}_m < \mathbf{x}} p_m, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

  Řekneme pak, že náhodný vektor $\mathbb{X}$ je *diskrétní*.

- Distribuční funkce $F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots x_n)$ náhodného vektoru $\mathbb{X}$ se nazývá *absolutně spojitá*, existuje-li nezáporná borelovsky měřitelná funkce $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots x_n)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taková, že:

  $$F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n)\ \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Funkce $f(\mathbf{x})$ se nazývá *hustota náhodného vektoru* $\mathbb{X}$ a o vektoru $\mathbb{X}$ rovněž říkáme, že je *absolutně spojitý*.

Definice 1.27. Náhodný vektor $(X_{i_1}, \dots X_{i_k})$, $k = 1, \dots, n-1$; $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, se nazývá *marginální náhodný vektor příslušný k náhodnému vektoru* $\mathbb{X}$ a jeho distribuční funkce $F_{X_{i_1},\dots,X_{i_k}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ *marginální distribuční funkce* k funkci $F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n)$.

Věta 1.24. *Nechť* $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ *je náhodný vektor s distribuční funkcí* $F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n)$. *Pro distribuční funkci náhodného vektoru* $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$, $k = 1, \dots, n-1$; $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ *platí*

$$F_{X_{i_1},\dots,X_{i_k}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \lim_{x_j \to \infty \; \forall j \neq i_1,\dots,i_k} F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n)$$

D ů k a z: [3, str. 88]

Definice 1.28. Nechť $\mathcal{X} = \{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ je systém náhodných veličin. Řekneme, že náhodné veličiny tohoto systému jsou *nezávislé*, jestliže pro každou konečnou podmnožinu $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ platí

$$F_{X_{\lambda_1},\dots,X_{\lambda_n}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} F_{X_{\lambda_j}}(x_j) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Věta 1.25 (Nutná a postačující podmínka nezávislosti náhodných veličin)**.** *Nechť* $F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)$ *je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru* $\mathbb{X} = X_1, \dots, X_n$ *a* $F_{X_j}(x)$, $j = 1, \dots, n$, *jsou marginální distribuční funkce příslušné náhodné veličiny* X_j. *Náhodné veličiny* $X_1, \dots, X_n$ *jsou nezávislé právě tehdy, když platí*

$$F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n} F_{X_j}(x_j) \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

D ů k a z: Viz [3, str. 95]

Věta 1.26. *Nechť* $X_1, \dots, X_n$ *jsou nezávislé náhodné veličiny a nechť* $\phi_j(x) \colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $j = 1, \dots, n$, *jsou borelovsky měřitelné funkce. Potom jsou náhodné veličiny* $\mathbb{Y}_j = \phi_j(\mathbb{X}_j)$, $j = 1, \dots, n$, *rovněž nezávislé.*

D ů k a z: Viz [3, str. 97]

Věta 1.27. *Jsou-li $X_1, \dots, X_n$ mezávislé náhodné veličiny s konečnými druhými momenty, potom platí:*

$$\operatorname{var}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{var}(X_j)$$

D ů k a z: Viz [3, str. 104]

1.2.4. Některá rozdělení pravděpodobností náhodných veličin

Definice 1.29. Řekneme, že diskrétní náhodná veličina X má *binomické rozdělení pravděpodobností s parametry n a p*, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$, (značíme $X \sim Bi(n,p)$), jestliže nabývá pouze hodnot $j = 0, \dots, n$, a to s pravděpodobnostmi

$$\mathsf{P}(X = j) = \binom{n}{j} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j}, \quad j = 0, \dots, n$$

Definice 1.30. Řekneme, že diskrétní náhodná veličina X má *Poissonovo rozdělení pravěpodobností s parametrem λ*, $\lambda > 0$, (značíme $X \sim Po(\lambda)$), jestliže nabývá pouze hodnot $j = 0, 1, \dots$ s pravděpodobnostmi

$$\mathsf{P}(X = j) = \frac{\lambda^j}{j!} \cdot e^{-\lambda} \quad j = 0, 1, \dots$$

Poznámka 1.18. Náhodná veličina $X \sim Po(\lambda)$ má tyto charakteristiky:

$$\mathsf{E}(X) = \lambda \qquad \operatorname{var}(X) = \lambda$$

Definice 1.31. Řekneme, že absolutně spojitá náhodná veličina X má *rovnoměrné rozdělení s parametry a a b*, $a, b \in \mathbb{R}$, jestliže má hustotu

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0 & x \notin (a,b) \end{cases}$$

Poznámka 1.19. Náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením o parametrech (a, b) má tyto charakteristiky:

$$\mathsf{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \mathrm{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Definice 1.32. Řekneme, že absolutně spojitá náhodná veličina X má *normální (Gaussovo) rozdělení s parametry μ a σ^2*, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$, jestliže má hustotu

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Poznámka 1.20. Náhodná veličina X, která má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, má tyto charakteristiky:

$$\mathsf{E}(X) = \mu \qquad \mathrm{var}(X) = \sigma^2$$

Poznámka 1.21. Pro libovolnou náhodnou veličinu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ platí:

$$\mathsf{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 68,3\%$$
$$\mathsf{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 95,5\%$$
$$\mathsf{P}(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 99,7\%$$

Poslední výraz je známý pod názvem *pravidlo tří sigma* a v podstatě říká, že mimo uvedený interval se realizuje pouze velmi malý zlomek hodnot náhodné veličiny $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Definice 1.33. Nechť $X_1, \dots, X_k$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $N(0, 1)$. Pak řekneme, že náhodná veličina

$$Q = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$$

má *χ^2-rozdělení s k stupni volnosti*. Značíme $Q \sim \chi_k^2$.

1.2.5. Centrální limitní věta

Oblast centrálních limitních vět přesahuje rámec námi probírané teorie, ale s jejich využitím budeme moci snáze ilustrovat Glivenkovu větu zmiňovanou v úvodu (viz příklad 3.3). Proto alespoň okrajově zmíníme jednu z těchto vět, a to Moivre-Laplaceovu, kterou později v uvedeném příkladu použijeme.

Definice 1.34. Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost náhodných veličin a nechť X je náhodná veličina, každá z nich definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$. Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ *konverguje k X v distribuci (podle rozdělení)*, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \text{ v každém bodě spojitosti funkce } F_X.$$

Značíme

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$$

Věta 1.28 (Moivreova-Laplaceova věta)**.** *Mějme posloupnost $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezávislých náhodných veličin, $Y_n \sim Bi(n,p)$. Potom*

$$Z_n = \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim N(0,1)$$

Řekneme, že posloupnost $\{Z_n\}$ má asymptoticky rozdělení $N(0,1)$ *(značíme $\{Z_n\} \overset{as}{\sim} N(0,1)$).*

D ů k a z: Viz [3, strana 128]

Poznámka 1.22. Z tvrzení předchozí věty a podle vět 1.20 a 1.21 je zřejmé, že

$$Y_n \overset{as}{\sim} N(np, np(1-p)), \qquad \frac{Y_n}{n} \overset{as}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

1.3. Statistika

V praktickém životě neznáme přesné teoretické rozdělení pravděpodobností (či distribuční funkci) zkoumané náhodné veličiny (statistického znaku) – např. pravděpodobnosti výskytu vadného výrobku, počtu mikroorganismů ve vzorku, chyby měření. Ovšem provedením několika na sobě nezávislých pokusů lze získat představu o tom, jak teoretická distribuční funkce vypadá. Pomocí zákonů velkých čísel pak můžeme dokázat, že pokud provedeme dostatečně velké množství pokusů, můžeme se s libovolnou přesností blížit teoretickým výpočtům teorie pravděpodobnosti.

Definice 1.35. Náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$, jehož složky jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením pravděpodobností Q, se nazývá *náhodný výběr o rozsahu n z rozdělení Q*.

Definice 1.36. Každou borelovsky měřitelnou funkci $\phi(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ náhodného výběru $\mathbb{X} = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ nazýváme *výběrovou funkcí* nebo také *statistikou* náhodného výběru $\mathbb{X}$.

Poznámka 1.23. Jednou z nejznámějších a nejužívanějších statistik náhodného výběru je tzv. *výběrový průměr* $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Věta 1.29. *Nechť $\mathbb{X} = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Pak výběrový průměr $\overline{X}_n$ má rozdělení $N\Big(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\Big)$.*

Realizací náhodného výběru o rozsahu n získáme n-tici hodnot $(x_1, \ldots, x_n)$. Vytvoříme tzv. vektor variant – získané hodnoty uspořádáme a opakující se hodnoty zahrneme pouze jednou. Vektor variant značíme $(x_{[1]}, \ldots, x_{[r]})$.

Definice 1.37.

- Počet všech výskytů varianty $x_{[i]}$ v této realizaci nazveme *absolutní četností* této varianty a značíme n_i.
- Číslo $r_i = \frac{n_i}{n}$ nazveme *relativní četností* varianty $x_{[i]}$.
- Součet všech relativních četností variant menších či rovných $x_{[i]}$ nazveme *relativní kumulativní četnost* a značíme F_i.

Definice 1.38. *Empirická distribuční funkce* F je funkce definovaná tímto předpisem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_{[1]} \\ F_i & x_{[i]} < x \leq x_{[i+1]}, \quad i = 1, \dots r-1 \\ 1 & x > x_{[r]} \end{cases}$$

Poznámka 1.24. Empirická distribuční funkce je tedy schodovitá distribuční funkce, na ose x jsou vyneseny naměřené varianty $x_{[i]}$, a skoky v nich mají velikost n_i/n, (tedy relativní četnost dané varianty).

2. Zákony velkých čísel

2.1. Slabý zákon velkých čísel

Věta 2.1 (Čebyševova nerovnost)**.** *Nechť X je náhodná veličina se střední hodnotou $\mathsf{E}(X)$ a rozptylem $\sigma^2(X)$. Pak $\forall\varepsilon > 0$:*

$$\mathsf{P}(\{\omega; |X(\omega) - \mathsf{E}(X)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sigma^2(X)$$

D ů k a z: Označme $A = \{\omega; |X(\omega) - \mathsf{E}(X)| \geq \varepsilon\}$, A^C její doplněk, tedy $A^C = \{\omega; |X(\omega) - \mathsf{E}(X)| < \varepsilon\}$. Můžeme psát:

$$\sigma^2(X) = \int (X - \mathsf{E}(X))^2 \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int_A (X - \mathsf{E}(X))^2 \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} + \int_{A^C} (X - \mathsf{E}(X))^2 \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} \geq$$
$$\geq \int_A (X - \mathsf{E}(X))^2 \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} \geq \varepsilon^2\,\mathsf{P}(A)$$

Odtud přímo plyne tvrzení věty. ■

Věta 2.2 (Slabý zákon velkých čísel)**.** *Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, která splňuje následující podmínky:*

(i) $\mathsf{E}(X_n) = \int X_n \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\sigma^2(X_n) = \int X_n^2 \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(X_i) = 0$

Pak posloupnost aritmetických průměrů

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} \text{ konverguje k 0 podle pravděpodobnosti.}$$

D ů k a z: Uvažujme náhodnou veličinu

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Podívejme se na její střední hodnotu a rozptyl:

$$\mathsf{E}(X) = \mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) = 0$$

$$\sigma^2(X) = \sigma^2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2(X_i)$$

Použijeme Čebyševovu nerovnost:

$$\mathsf{P}(\omega; |X(\omega)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2(X_i)$$

Tedy

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\omega; |X(\omega)| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2(X_i) = 0$$

přičemž první nerovnost plyne z definičních vlastností míry a poslední rovnost zaručuje předpoklad (iii) tvrzení věty. Odtud plyne:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\omega; |X(\omega)| \geq \varepsilon) = 0$$

což znamená, že X konverguje k 0 podle pravděpodobnosti, a to je ovšem požadovaný výsledek. ■

Poznámka 2.1. První předpoklad tvrzení 2.2 lze zobecnit: stačí předpokládat, že všechny uvažované náhodné veličiny mají konečnou střední hodnotu, tedy $|\mathsf{E}(X_n)| < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak za platnosti ostatních předpokladů věty platí:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathsf{E}(X_i)) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$$

Tedy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathsf{P}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i).$$

D ů k a z: Budeme uvažovat náhodnou veličinu $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathsf{E}(X_i))$. Dále využijeme stejný postup jako v předešlém důkaze:

$$\mathsf{E}(Y_n) = \mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathsf{E}(X_i))\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathsf{E}(X_i) - \mathsf{E}(X_i)) = 0$$

$$\sigma^2(Y_n) = \sigma^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathsf{E}(X_i))\right) = \frac{1}{n^2}\sigma^2(X_i)$$

Z Čebyševovy nerovnosti tedy:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\omega; |Y_n(\omega)| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i) = 0$$

Odtud plyne, že $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathsf{E}(X_i))$ konverguje k nule podle pravděpodobnosti. ∎

Definice 2.1. Nechť $\{X_i\}$ je posloupnost náhodných veličin, pro které platí

$$\forall i \in \mathbb{N}\colon\ \sigma^2(X_i) \leq b, \quad 0 \leq b < \infty$$

Pak řekneme, že náhodné veličiny X_i mají *stejnoměrně omezené rozptyly.*

Věta 2.3 (o aritmetickém průměru). *Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost po dvou nezávislých náhodných veličin, které mají stejnoměrně omezené rozptyly, a platí pro ně $\mathsf{E}(X_n) = a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathsf{P}} a$$

D ů k a z: Předpoklad (ii) tvrzení věty 2.2 je zřejmě splněn. Rovněž platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i - a) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} = 0$$

A podle poznámky 2.1 platí:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathsf{P}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot a}{n} = a$$

∎

Věta 2.2 vyjadřuje pouze postačující podmínky k tomu, aby posloupnost náhodných veličin splňovala slabý zákon velkých čísel. V následující větě uvidíme, že náhodné veličiny X_i nemusí za určitých podmínek být ani nezávislé.

Věta 2.4 (Markovova). *Nechť pro posloupnost náhodných veličin* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí:*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}\operatorname{var}\left(\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\right]=0$$

Pak posloupnost

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mathsf{E}(X_j))\right\}\ \textit{konverguje k 0 podle pravědpodobnosti.}$$

D ů k a z: Použijme na posloupnost$\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mathsf{E}(X_j))\right\}$ Čebyševovu nerovnost:

$$0\le\mathsf{P}\left(\left|\tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mathsf{E}(X_j))\right|\ge\varepsilon\right)=\mathsf{P}\left(\left|\tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j-\tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}(X_j)\right|\ge\varepsilon\right)=$$

$$=\mathsf{P}\left(\left|\tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j-\mathsf{E}\left(\tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{\operatorname{var}(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j)}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{1}{n^2}\operatorname{var}\left(\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\right]$$

Poslední člen konverguje k 0 podle předpokladu, čímž je dokázáno tvrzení věty. ■

Pro úplnost uveďme ještě větu, která neklade žádná omezení na rozptyl uvažovaných náhodných veličin:

Věta 2.5 (Chinčinova). *Nechť* $\{X_j\}$ *je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, které mají konečnou střední hodnotu* $\mathsf{E}(X_j)=a,\ \forall j\in\mathbb{N}$. *Pak*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\xrightarrow{\mathsf{P}}a$$

D ů k a z: Viz [3, str. 118-120]

2.2. Silný zákon velkých čísel

Věta 2.6 (Kolmogorovova nerovnost). *Nechť* $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ *je posloupnost nezávislých náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konečnými rozptyly a nechť* $X(\omega)=\max_{1\le k\le n}\{|\sum_{i=1}^{k}X_i(\omega)|\}$ *(tedy* $X(\omega)$ *je maximum absolutních hodnot částečných součtů). Pak* $\forall\varepsilon>0$:

$$\mathsf{P}(\{\omega;|X(\omega)|\ge\varepsilon\})\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2(X_k)$$

D ů k a z: Označme:

$E = \{\omega; |X(\omega)| \geq \varepsilon\}$ *(hledaný jev)*

$s_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ *(k-tý částečný součet)*

$E_k = \{\omega; |s_k(\omega)| \geq \varepsilon\} \cap \bigcap_{1 \leq i < k} \{\omega; |s_i(\omega)| < \varepsilon\}$ *(k-tý částečný součet je první, který vyskočí z epsilonového okolí nuly, tedy $E_k, k = 1, 2, \dots$ jsou neslučitelné jevy)*

Platí:

$$\int_{E_k} s_n^2 \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int_{E_k} \left(s_k + \sum_{i=k+1}^{n} X_i \right)^2 \mathrm{d}\,\mathsf{P} =$$

$$= \int_{E_k} \left(s_k^2 + 2 s_k \sum_{i=k+1}^{n} X_i + \sum_{i=k+1}^{n} {X_i}^2 + 2 \sum_{i=k+1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_i X_j \right) \mathrm{d}\,\mathsf{P}$$

Rozeberme podrobněji jednotlivé sčítance:

$$\int_{E_k} 2 s_k \sum_{i=k+1}^{n} X_i \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int \chi_{E_k} 2 s_k \sum_{i=k+1}^{n} X_i \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} = 2 \int \chi_{E_k} \; s_k \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} \int \sum_{i=k+1}^{n} X_i \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} = 0$$

(veličiny $\chi_{E_k} \cdot s_k$ a $X_i, i \geq k+1$, jsou nezávislé, tedy integrál lze rozdělit na součin; druhý integrál je nulový podle předpokladu a z aditivity integrálu)

$$\int_{E_k} \sum_{i=k+1}^{n} {X_i}^2 \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} = \sum_{i=k+1}^{n} \int \chi_{E_k} X_i^2 \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} = \mathsf{P}(E_k) \sum_{i=k+1}^{n} \int X_i^2 \, \mathrm{d}\,\mathsf{P}$$

(opět χ_{E_k} a X_i, $i \geq k+1$ jsou nezávislé)

$$2 \int_{E_k} \sum_{i=k+1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_i X_j \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} = 2 \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \int_{E_k} X_i X_j \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} = 2 \sum_{i=k+1}^{n} \left(\int_{E_k} X_i \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} \right) \cdot$$

$$\cdot \sum_{j=i+1}^{n} \left(\int_{E_k} X_j \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} \right) = 2 \sum_{i=k+1}^{n} \left(\int \chi_{E_k} X_i \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} \right) \cdot \sum_{j=i+1}^{n} \left(\int \chi_{E_k} X_j \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} \right) =$$

$$= 2 \sum_{i=k+1}^{n} \left(\mathsf{P}(E_k) \int X_i \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} \right) \sum_{j=i+1}^{n} \left(\mathsf{P}(E_k) \int X_j \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} \right) = 0$$

(podle předpokladů jsou náhodné veličiny X_i a X_j, $i \neq j$ nezávislé, rovněž jsou pro $i \geq k+1$ všechny nezávislé s funkcí χ_{E_k}, střední hodnota $\int X_n \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} = 0$, $\forall n$, takže výsledek je nulový)

Tedy souhrnem:

$$\int_{E_k} s_n^2 \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int_{E_k} s_k^2 \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} + \mathsf{P}(E_k) \sum_{i=k+1}^{n} \int X_i^2 \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} \geq \int_{E_k} s_k^2 \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} \geq \mathsf{P}(E_k)\varepsilon^2$$

Pak lze psát:

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma^2(X_k) = \sigma^2 \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right) = \int \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right)^2 \mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int s_n^2 \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} s_n^2 \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(E_k)\varepsilon^2 = \mathsf{P}(E)\varepsilon^2$$

Odtud už přímo plyne tvrzení. ∎

Věta 2.7. *Nechť $\{y_n\}$ je posloupnost reálných čísel, pro kterou je $lim_{n\to\infty} y_n = y$ konečná. Pak také*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = y$$

D ů k a z: Z předpokladů plyne, že

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \colon |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nechť n_1 je přirozené číslo větší než n_0 takové, pro které platí:

$$\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_0} |y_i - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pro $n > n_1$ platí:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i - y \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{1}{n} ny \right| \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_0} (y_i - y) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{i=n_0+1}^{n} (y_i - y) \right| <$$

$$< \left| \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_0} (y_i - y) \right| + \frac{n - n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

∎

Věta 2.8. *Nechť $\{y_n\}$ je posloupnost reálných čísel taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n} = s < \infty$. Pak*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$

D ů k a z: Označme:

$s_0 = 0 \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{i} \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad$ pro $n \in \mathbb{N}$

Odtud:

$$y_i = (s_i - s_{i-1})i$$

$$t_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} y_i = \sum_{i=1}^{n+1} is_i - \sum_{i=1}^{n+1} is_{i-1} = \sum_{i=1}^{n+1} is_i - \sum_{i=0}^{n} (i+1)s_i =$$

$$= -s_0 + \sum_{i=1}^{n} (is_i - (i+1)s_i) + (n+1)s_{n+1} = -\sum_{i=0}^{n} s_i + (n+1)s_{n+1}$$

Rovnost vydělíme výrazem (n+1):

$$\frac{t_{n+1}}{n+1} = -\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} s_i + s_{n+1}$$

Tedy:

$$lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}}{n+1} = -s + s = 0 \text{ (z předchozí věty)}$$

∎

Věta 2.9. *Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, pro kterou platí:*

(i) $\int X_n \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(X_n) < \infty$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \textit{ konverguje skoro jistě.}$$

D ů k a z: Označme:

$$s_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$$
$$a_m(\omega) = \sup\{|s_{m+k}(\omega) - s_m(\omega)|; k \in \mathbb{N}\}$$
$$a(\omega) = \inf\{a_m(\omega); m \in \mathbb{N}\}$$

Dokažme nejprve, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \text{ konverguje } \Leftrightarrow a(\omega) = 0$$

“$\Rightarrow$”

Podle Cauchy–Bolzanova kritéria konvergence řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n_0\ \forall k \in \mathbb{N}\colon |s_{m+k}(\omega) - s_m(\omega)| < \varepsilon$$

Tato nerovnost platí pro všechna k, tedy rovněž

$$a_m(\omega) = \sup\{|s_{m+k}(\omega) - s_m(\omega)|; k \in \mathbb{N}\} < \varepsilon$$

Tvrzení pak plyne z libovolnosti ε:

$$\inf\{\varepsilon, \varepsilon > 0\} = 0 \quad \Rightarrow \quad a(\omega) = \inf\{a_m(\omega), m \in \mathbb{N}\} = 0$$

“$\Leftarrow$”

Předpokládejme, že $a(\omega) = \inf\{a_m(\omega), m \in \mathbb{N}\} = 0$. Odtud vyplývá, že:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0 \in \mathbb{N}\colon a_{m_0}(\omega) < \varepsilon$$

tj.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0 \in \mathbb{N}\colon \sup\{|s_{m_0+k}(\omega) - s_{m_0}(\omega)|; k \in \mathbb{N}\} < \varepsilon$$

tj.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\colon |s_{m_0+k}(\omega) - s_{m_0}(\omega)| < \varepsilon$$

Pro libovolná přirozená čísla $n, p > m_0$ pak platí:

$$|s_n(\omega) - s_p(\omega)| \leq |s_n(\omega) - s_{m_0}(\omega)| + |s_p(\omega) - s_{m_0}(\omega)| < 2\varepsilon$$

Čímž jsme dokázali cauchyovskost (a tedy konvergenci):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, p > m_0 : |s_n(\omega) - s_p(\omega)| < 2\varepsilon$$

Tímto je ekvivalence dokázána.

Z Kolmogorovovy nerovnosti $\forall \varepsilon > 0,\ \forall m, n \in \mathbb{N}$:

$$\mathsf{P}\left(\{\omega; \sup\{|s_{m+k}(\omega) - s_m(\omega)|; k\ = 1, 2, \dots n\} \geq \varepsilon\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{m+n} \sigma^2(X_k)$$

Při limitním přechodu $n \to \infty$ se nerovnost nezmění:

$$\mathsf{P}(\{\omega; a_m(\omega) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma^2(X_k)$$

Protože $a(\omega) = \inf\{a_m(\omega)\}$, zřejmě platí i nerovnost:

$$0 \leq \mathsf{P}(\{\omega; a(\omega) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma^2(X_k) < \infty$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(X_n)$ konverguje (a tedy posloupnost zbytků této řady konverguje k 0: $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} \sigma^2(X_n) = 0$), platí:

$$0 \leq \mathsf{P}(\{\omega; a(\omega) \geq \varepsilon\}) \leq 0$$

Z libovolnosti ε pak plyne $a(\omega) = 0$ s. v., a tvrzení je tímto dokázáno. ■

Věta 2.10 (Silný zákon velkých čísel)**.** *Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, která splňuje následující podmínky:*

(i) $\mathsf{E}(X_n) = \int X_n \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\sigma^2(X_n) = \int X_n^2 \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(X_n)}{n^2} < \infty$

Pak posloupnost aritmetických průměrů

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right\} \text{ konverguje k 0 skoro jistě.}$$

D ů k a z: Označme $Y_n(x) = \frac{X_n(x)}{n}$. Podívejme se, zda posloupnost $\{Y_n\}$ splňuje předpoklady předchozí věty:

$$\mathsf{E}(Y_n) = \mathsf{E}\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\,\mathsf{E}(X_n) = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2\left(\frac{X_n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(X_n)}{n^2} < \infty \text{ podle předpokladu (iii)}$$

Předpoklady věty 2.9 jsou splněny, tedy platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n} \text{ konverguje skoro jistě.}$$

Pak z věty 2.8 o posloupnostech plyne, že

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \text{ skoro jistě}$$

a tedy tvrzení věty je dokázáno. ■

Poznámka 2.2. Předpoklad (i) předešlé věty lze rovněž zobecnit – stačí uvažovat $\mathsf{E}(X_n) < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) \to 0 \text{ skoro jistě}$$

Tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i)$ s. j.

D ů k a z: Za $\{Y_n\}$ nyní vezmeme $Y_n = \frac{X_n - \mathsf{E}(X_n)}{n}$ a důkaz vedeme analogicky jako v předchozí větě. ■

Poznámka 2.3. Předpoklady silného ZVČ jsou zřejmě silnější než předpoklady slabého ZVČ.

D ů k a z:

Dokažme nejprve, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(X_n)}{n^2} < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(X_i) = 0$$

Protože rozptyl $\sigma^2(X)$ je nezáporný, zřejmě platí:

$$\forall n, p \in \mathbb{N}\colon \sum_{i=1}^{p} \frac{\sigma^2(X_{n+i})}{(n+p)^2} \leq \sum_{i=1}^{p} \frac{\sigma^2(X_{n+i})}{(n+i)^2}$$

Nekonečná číselná řada $X_1 + X_2 + \dots$ konverguje právě tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů je cauchyovská, tedy:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\colon \left| \sum_{i=n_0+1}^{n_0+p} \frac{\sigma^2(X_i)}{i^2} \right| < \varepsilon$$

Z předchozích dvou nerovností plyne:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\colon \left| \sum_{i=n_0+1}^{n_0+p} \frac{\sigma^2(X_i)}{(n_0+p)^2} \right| < \left| \sum_{i=n_0+1}^{n_0+p} \frac{\sigma^2(X_i)}{i^2} \right| < \varepsilon$$

Odtud tedy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(X_i) = 0$$

Příklad takové posloupnosti, která splňuje podmínky slabého ZVČ a nesplňuje podmínky silného ZVČ, najdeme v příkladu 3.1 v další kapitole. Tím bude tvrzení poznámky dokázáno. ∎

Poznámka 2.4. Rovněž předpoklady věty 2.10 jsou pouze postačujícími podmínkami, nikoli nutnými. Lze tedy například najít takovou posloupnost $\{Y_n\}$, která konverguje k 0 skoro jistě, přičemž $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(Y_n)}{n^2}$ diverguje.

Klíčem k sestrojení takové posloupnosti bude následující definice. V příkladu 3.2 pak jednu takovou posloupnost zkonstruujeme.

Definice 2.2. Řekneme, že dvě posloupnosti funkcí $\{X_n\}$ a $\{g_n\}$ jsou *ekvivalentní v Chinčinově smyslu*, jestliže

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\{\omega; X_n(\omega) \neq Y_n(\omega)\}) < \infty$$

2.3. Empirická distribuční funkce, Glivenkova věta

Pomocí silného zákona velkých čísel si nyní dokážeme tzv. Glivenkovu větu. Ta říká, že empirická funkce $F_n(x)$ náhodného výběru z rozdělení Q konverguje skoro jistě k teoretické distribuční funkci $F(x)$ tohoto rozdělení.

$$\text{Připomeňme, že } F_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_{[1]} \\ F_i = & x_{[i]} < x \leq x_{[i+1]}, \quad i = 1, \dots r-1 \\ 1 & x > x_{[r]} \end{cases}$$

Lze tedy říct, že $F_n(x) = \frac{k}{n}$, kde k je počet realizovaných hodnot menších než x. Mějme náhodný výběr o rozsahu n z rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$. Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny $Y(x) \colon \mathbb{R} \to \{0, 1, \dots, n\}$ vyjadřující, kolik hodnot bude při libovolné realizaci tohoto náhodného výběru nalevo od bodu x, má zřejmě binomické rozdělení $Bi(n, F(x))$:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} (F(x))^k (1 - F(x))^{(n-k)} \quad k = 0, 1, \dots n$$

Vypočítejme střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny:

$$\mathsf{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} (F(x))^k (1 - F(x))^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k \cdot n!}{k!(n-k)!} (F(x))^k (1 - F(x))^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} (F(x))^k (1 - F(x))^{n-k} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (F(x))^k (1 - F(x))^{n-k} =$$

$$= nF(x) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (F(x))^k (1 - F(x))^{n-k-1} = nF(x)(F(x) + (1 - F(x)))^{n-1} = nF(x)$$

K určení rozptylu využijeme následujícího výpočtu:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(Y(Y-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}(F(x))^k(1-F(x))^{n-k} = \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}(F(x))^k(1-F(x))^{n-k} = \\ &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}(F(x))^k(1-F(x))^{n-k} = \\ &= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k}(F(x))^k(1-F(x))^{n-2-k} = n(n-1)F^2(x)\end{aligned}$$

Tedy:

$$\mathsf{E}(Y^2) - \mathsf{E}(Y) = n(n-1)F^2(x) \quad \Rightarrow \quad \mathsf{E}(Y^2) = n(n-1)F^2(x) + nF(x)$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(Y) &= \mathsf{E}(Y^2) - \mathsf{E}^2(Y) = n(n-1)F^2(x) + nF(x) - n^2F^2(x) = \\ &= nF(x)(1-F(x))\end{aligned}$$

Nyní uvažujme posloupnost $\{F_n(x)\}$, tedy posloupnost empirických distribučních funkcí realizací náhodného výběru o rostoucím rozsahu n a ověřme, zda splňuje předpoklady věty 2.10 ve znění poznámky 2.2:

$$\mathsf{E}(F_n(x)) = \mathsf{E}\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{\mathsf{E}(Y)}{n} = \frac{nF(x)}{n} = F(x)$$

$$\sigma^2(F_n(x)) = \sigma^2\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{\sigma^2(Y)}{n^2} = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}$$

Uvažujme posloupnost $\{F_n(x)\}$ tedy posloupnost empirických distribučních funkcí realizací náhodného výběru o rostoucím rozsahu n a ověřme, zda splňuje předpoklad (iii) věty 2.10 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(f_n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(x)(1-F(x))}{n \cdot n^2}$$

K důkazu konvergence této řady využijeme integrální kriterium. Budeme uvažovat funkci $f(x) = \frac{1}{x^3}$, která je zřejmě na $(1, \infty)$ definovaná, nezáporná a nerostoucí, tedy splňuje předpoklady pro toto kriterium. Vypočítejme nyní integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^\infty = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < \infty$$

Protože tento integrál konverguje, konverguje i uvažovaná řada, a tedy posloupnost empirických distribučních funkcí $\{F_n(x)\}$ splňuje předpoklady silného zákona velkých čísel a konverguje skoro všude k $F(x)$.

Nyní si tedy odvodíme jednu z podstatných vět matematické statistiky – Glivenkovu(–Cantelliho) větu. Ta nám dává podklad k tvrzení, že při dostatečném množství pozorování lze s libovolnou přesností aproximovat skutečné zastoupení pozorovaného jevu v celku.

Věta 2.11 (Glivenkova)**.** *Nechť náhodné veličiny $X_1, \ldots X_n$ jsou prvky náhodného výběru z rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$. Dále nechť $F_n(x)$ značí empirickou distribuční funkci a konečně označme*

$$\Delta_n = \sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - F(x)|$$

Potom platí

$$\mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0) = 1$$

D ů k a z: Pro každé $M \in \mathbb{N}$ a $k = 1, 2, \ldots M$ označme $x_{M,k}$ nejmenší takové číslo, pro které platí $F(x) \leq \frac{k}{M} \leq F(x+0)$ (kde $F(x+0) = \lim_{y\to x+} F(y)$).
Tyto body se nacházejí tam, kde $F(x) = \frac{k}{M}$, nebo v bodech nespojitosti teoretické distribuční funkce.
Označme:

$$\Delta_n^{(1)} = \max_{1\leq k\leq M} |F_n(x_{M,k}) - F(x_{M,k})|, \Delta_n^{(2)} = \max_{1\leq k\leq M} |F_n(x_{M,k}+0) - F(x_{M,k}+0)|$$

Dokažme, že pak platí:

$$\Delta_n \leq \max(\Delta_n^{(1)}, \Delta_n^{(2)}) + \frac{1}{M}$$

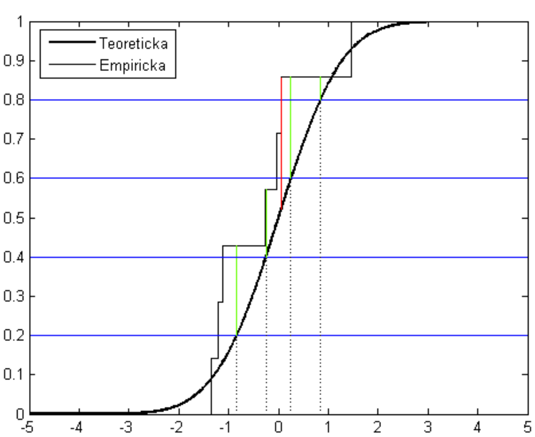
Uvažujme nejprve, že maximum v předchozí nerovnosti bude $\Delta_n^{(1)}$ a předpokládejme, že je této hodnoty dosaženo v bodě $x_{M,k}$. Když půjdeme od tohoto bodu doleva, rozdíl mezi empirickou a teoretickou distribuční funkcí se může zvětšovat. Ovšem maximálně do bodu, kdy se teoretická distribuční funkce sníží na (resp. pod) hodnotu $\frac{k-1}{M}$, tedy do bodu $x_{M,k-1}$. Ovšem v tom případě by uvažované maximum muselo být právě v bodě $x_{M,k-1}$, což je spor s předpokladem.

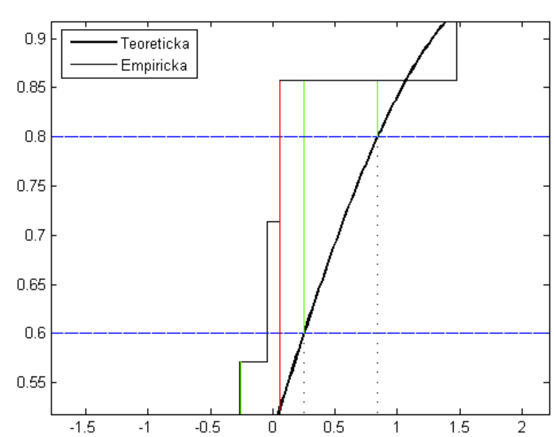
Hodnota teoretické distribuční funkce tedy může klesnout maximálně o $\frac{1}{M}$, přičemž $F_n(x)$ nemůže směrem doleva stoupat - a tedy celkově se rozdíl mezi nimi zvýší o maximálně $\frac{1}{M}$ (a tohoto maxima nelze dosáhnout).

Pokud bychom se pohybovali od bodu $x_{M,k}$ napravo, okamžitě narazíme na limitu $|F_n(x_{M,k}+0)-F(x_{M,k}+0)|$, která je podle předpokladů menší než naše maximum (a platí pro ni analogické tvrzení, že při pohybu napravo od ní nemůžeme její hodnotu přesáhnout o více než $\frac{1}{M}$).

Analogické úvahy je možno provést i v případě, že maximum v předchozí nerovnosti je $\Delta_n^{(2)}$.

Následující dva obrázky ilustrují popsanou situaci pro výběr z normovaného normálního rozdělení o rozsahu 7 pro $M = 5$. Zelenou barvou jsou vykresleny rozdíly funkčních hodnot v bodech $x_{M,k}$, resp. $x_{M,k}+0$, červenou je pak maximum rozdílu teoretické a empirické distribuční funkce na celé reálné ose.





Podle silného ZVČ (viz také předchozí příklady) platí:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)) = 1 \quad \wedge \quad \mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} F_n(x+0) = F(x+0)) = 1$$

Odtud tedy:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} |F_n(x) - F(x)| = 0) = 1 \quad \wedge \quad \mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} |F_n(x+0) - F(x+0)|) = 1$$

Z čehož vyplývá

$$\max(\Delta_n^{(1)}, \Delta_n^{(2)}) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ s. v.} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \Delta_n \leq \frac{1}{M} \text{ s. v.}$$

Což se dá přepsat pomocí pravděpodobnosti:

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \Delta_n \leq \frac{1}{M}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \Delta_n > \frac{1}{M}\right) = 0$$

Odtud limitním přechodem pro $M \to \infty$

$$\mathsf{P}(\limsup_{n\to\infty} \Delta_n > 0) = 0$$

Odtud už přímo plyne dokazované tvrzení. ■

3. Příklady

Příklad 3.1. Najděme příklad posloupnosti, která splňuje předpoklady slabého ZVČ a nesplňuje silný ZVČ.

Zkonstruujme posloupnost $\{f_n\}$ nezávislých náhodných veličin, pro které $\sigma^2(f_n) = \frac{n+1}{\ln(n+1)}$. Posloupnost $\{\frac{n+1}{\ln(n+1)}\}$ je pro $n > 1$ rostoucí, tedy lze psát:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(f_i) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2 \ln(n+1)} = 0$$

Nyní dokažme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 \ln(n+1)}$ diverguje. Využijeme k tomu obměněné majorantní kriterium a integrální kriterium.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 \ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2 \ln(n+1)} + \frac{1}{n^2 \ln(n+1)} \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)}$$

Na tuto řadu aplikujeme integrální kriterium:
Mějme funkci $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$. Ta je zřejmě pro $x \in (1, \infty)$ definovaná, nezáporná a nerostoucí, a tedy splňuje předpoklady integrálního kriteria.
Uvažujme nyní funkci $F(x) = \ln(\ln(x))$. Její derivace podle x má tvar:

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x \ln(x)} \Rightarrow \int \frac{1}{x \ln(x)} \,\mathrm{d}x = \ln(\ln(x)) = F(x)$$

Protože ovšem $F(\infty) = \infty$ a $F(1) = -\infty$, integrál $\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)} \,\mathrm{d}x$ zřejmě diverguje, proto divergují i obě řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)} \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 \ln(n+1)}$$

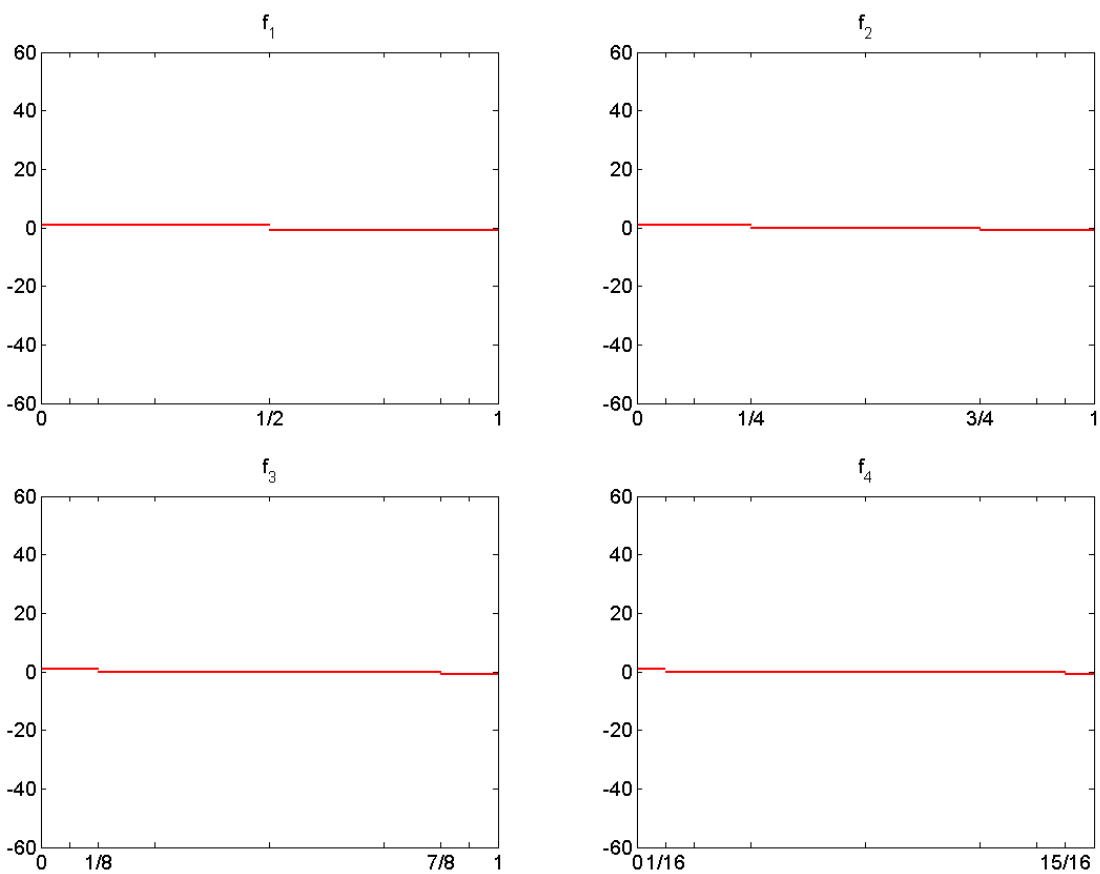
Příklad 3.2. Najděme příklad takové posloupnosti, která konverguje skoro všude k 0, a přitom nesplňuje předpoklady silného ZVČ.

Jak už bylo řečeno, k sestrojení této posloupnosti využijeme definici 2.2.

Nejprve definujme posloupnost $\{f_n(x)\}$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2^n}\rangle = A_n^1 \\ -1 & \text{pro } x \in \langle 1 - \frac{1}{2^n}, 1\rangle = A_n^2 \\ 0 & \text{jinde} \dots \text{označme } A_n^c \end{cases}$$

Toto je posloupnost náhodných veličin definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(J, \mathcal{B}_J, \mathsf{P})$, kde $J = \langle 0, 1\rangle$, $\mathcal{B}_J$ je systém průniků borelovských množin $\mathcal{B}_1$ s J a P je Lebesgueova míra (viz poznámka 1.3) na $\mathbb{R}^1$ ($\mathsf{P}(J) = 1$, tedy P je pravděpodobnostní míra).



Obrázek 1: Grafy prvních čtyř členů posloupnosti $\{f_n(x)\}$

Ukažme, že tato posloupnost splňuje podmínky věty 2.10, a tedy konverguje skoro všude k 0:

$$E(f_n) = \int f_n \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int_0^1 f_n \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \mathsf{P}(A_n^1) \cdot 1 + \mathsf{P}(A_n^2) \cdot (-1) + \mathsf{P}(A_n^c) \cdot 0 =$$

$$= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} + 0 = 0$$

$$\sigma^2(f_n) = \int f_n^2 \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int_0^1 f_n^2 \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \mathsf{P}(A_n^1) \cdot 1^2 + \mathsf{P}(A_n^2) \cdot (-1)^2 + \mathsf{P}(A_n^c) \cdot 0^2 =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2^n} < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(f_n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} < \infty$$

Nyní sestrojme posloupnost $\{g_n\}$, která je k $\{f_n\}$ ekvivalentní v Chinčinově smyslu:

$$g_n(x) = \begin{cases} e^n & \text{pro } x \in A_n^1 \\ -e^n & \text{pro } x \in A_n^2 \\ 0 & \text{pro } x \in A_n^c \end{cases}$$

Dokažme, že je tato posloupnost je opravdu ekvivalentní s $\{f_n\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\{x; f_n(x) \neq g_n(x)\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n^1 \cup A_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 < \infty$$

Platí:

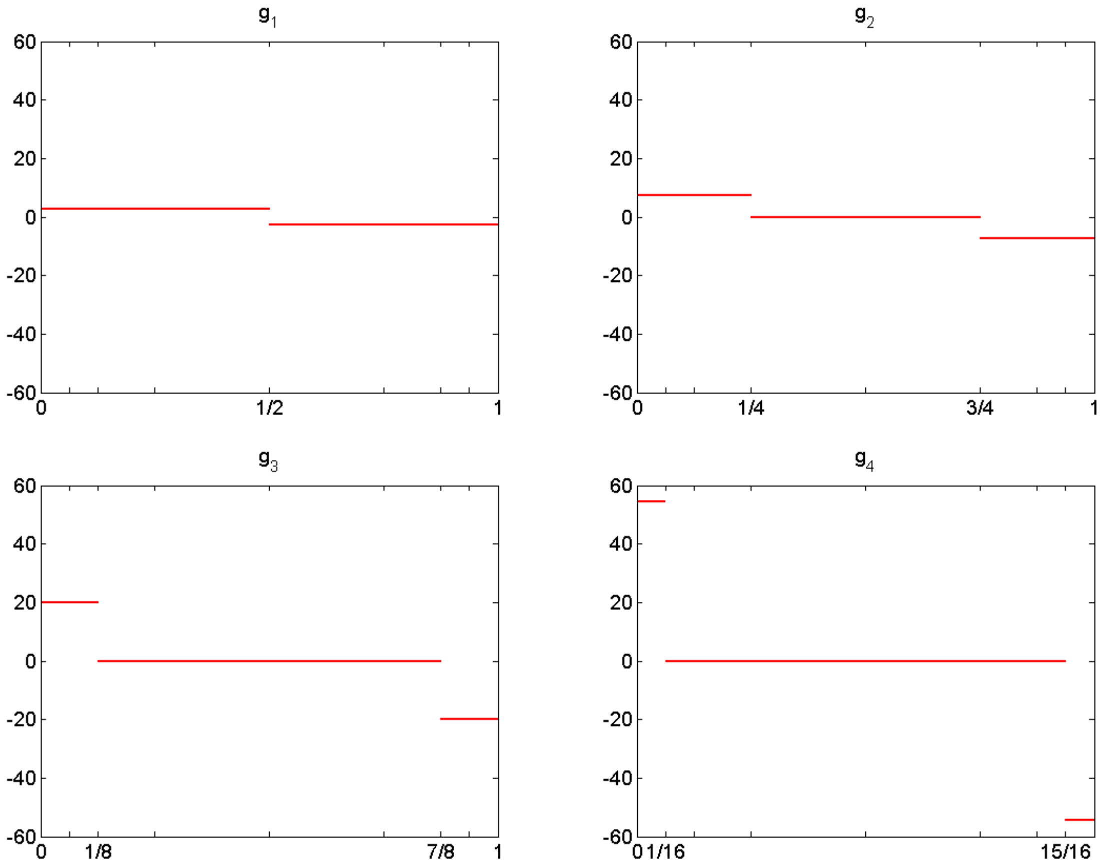
$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in (0,1) \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in N \colon n \geq n_0 \Rightarrow g_n(x) = 0 \Rightarrow |g_n(x) - 0| = 0 < \varepsilon$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{g_n\}$ nekonverguje pouze v bodech 0 a 1, přičemž $\mathsf{P}(\{0,1\}) = 0$, a tedy

$$\{g_n\} \to 0 \text{ s. v.}$$

Nyní dokažme, že posloupnost $\{g_n\}$ nesplňuje podmínku (iii) silného ZVČ.

$$\sigma^2(g_n^2) = \int_0^1 g_n^2 \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = 2 \cdot \mathsf{P}(A_n^1) \cdot e^{2n} = \frac{2e^{2n}}{2^n}$$



Obrázek 2: Grafy prvních čtyř členů posloupnosti $\{g_n(x)\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(g_n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{2n}}{2^n n^2} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{2^n n^2}$$

Tato řada diverguje podle limitního Cauchyova odmocninového kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{2^n n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^2}{2\sqrt[n]{n^2}} = \frac{e^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{e^2}{2} > 1$$

Příklad 3.3. Graficky ukažme, že empirická distribuční funkce náhodného výběru z rozdělení a) chí-kvadrát, b) Poissonova, skutečně konverguje k teoretické distribuční funkci toho rozdělení.

Z výpočtů v sekci 2.3. víme, že náhodná veličina Y_n vyjadřující počet naměřených hodnot vyskytujících se při realizaci náhodného výběru rozsahu n nalevo od bodu x má binomické rozdělení $Bi(n, F(x))$. Dále víme, že

$$\mathsf{E}(F_n(x)) = \mathsf{E}\left(\frac{Y_n}{n}(x)\right) = F(x), \qquad \operatorname{var}(F_n(x)) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Rovněž z poznámky za větou 1.28 víme, že náhodná veličina $\frac{Y_n}{n}$ má asymptoticky rozdělení $N\left(F(x), \frac{F(x)(1-F(x))}{n}\right)$, tedy

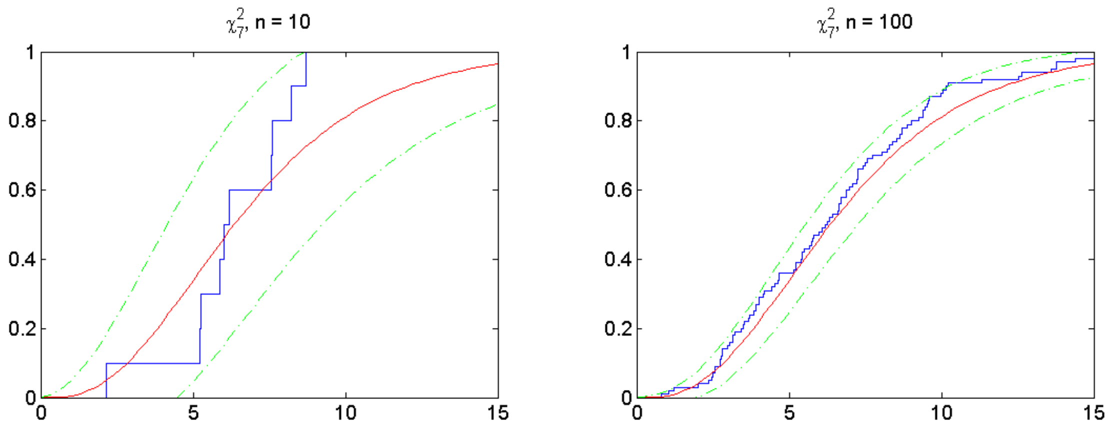
$$\frac{F_n(x) - F(x)}{\sqrt{F(x)(1-F(x))}\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ můžeme sestrojit interval, v němž se bude hodnota $F_n(x)$ pohybovat s pravděpodobností 95% (95% interval spolehlivosti):

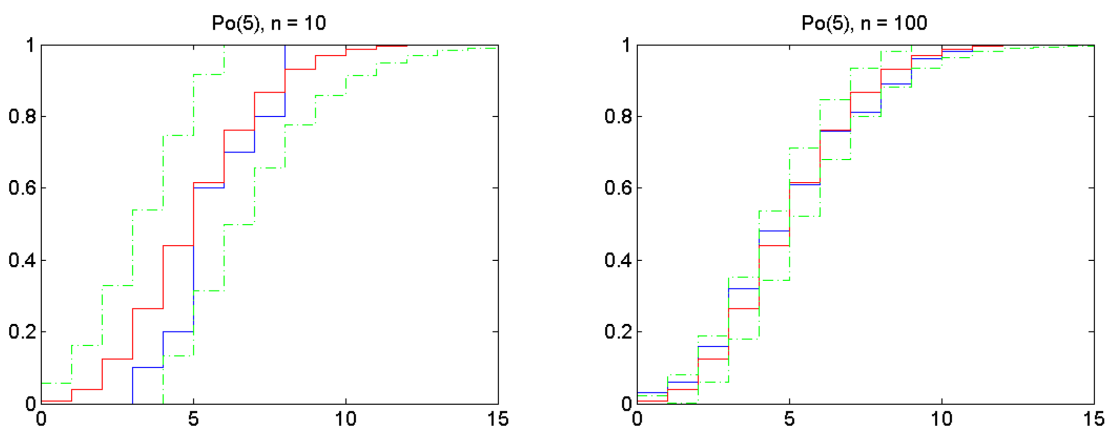
$$\mathsf{P}\left(u_{0{,}025} \leq \frac{F_n(x) - F(x)}{\sqrt{F(x)(1-F(x))}}\sqrt{n} \leq u_{0{,}975}\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(F(x) - u_{0{,}975}\frac{\sqrt{F(x)(1-F(x))}}{\sqrt{n}} \leq F_n(x) \leq F(x) + u_{0{,}975}\frac{\sqrt{F(x)(1-F(x))}}{\sqrt{n}}\right)$$

Grafy pro Poissonovo a χ^2 rozdělení vytvoříme v programu Matlab (použitý zdrojový kód viz příloha). Červenou barvou je vyznačena teoretická distribuční funkce daného rozdělení, zelenou hranice výše uvedeného intervalu a modrou empirická distribuční funkce pro jednu vygenerovanou realizaci náhodného výběru z tohoto rozdělení.



Obrázek 3: Konvergence empirické distribuční funkce – χ^2_7



Obrázek 4: Konvergence empirické distribuční funkce – $Po(5)$

Z obrázků je jasně patrné, že interval spolehlivosti se pro rostoucí n zužuje, což lze ostatně jednoduše dokázat výpočtem:

$$l(x) = F(x) + u_{0,975}\frac{\sqrt{F(x)(1-F(x))}}{\sqrt{n}} - \left(F(x) - u_{0,975}\frac{\sqrt{F(x)(1-F(x))}}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$2 \cdot u_{0,975}\frac{\sqrt{F(x)(1-F(x))}}{\sqrt{n}} \text{ což pro } n \text{ rostoucí klesá}$$

Rovněž je zřejmé, že limitu horní i dolní hranice intervalu tvoří teoretická distribuční funkce $F(x)$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(F(x) - u_{0,975}\frac{\sqrt{F(x)(1-F(x))}}{\sqrt{n}}\right) = F(x) - u_{0,975}\sqrt{F(x)(1-F(x))}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = F(x)$$

Příklad 3.4. Pro Poissonovo, rovnoměrné a normální rozdělení, pro které platí a) $\mathsf{E} = 1$, var $\doteq 1$, b) $\mathsf{E} = 6$, var $\doteq 6$, graficky znázorněte konvergenci aritmetických průměrů náhodných výběrů o rostoucím rozsahu k teoretické střední hodnotě E daného rozdělení.

V programu Matlab nasimulujeme provádění náhodného pokusu z daného rozdělení, tím nám vznikne posloupnost čísel, kterou označíme $\{x_j\}$. Hodnotu aritmetického průměru naměřených hodnot budeme vyšetřovat vždy po k (ve zdrojovém kódu uvedeném v přílohách se tato proměnná nazývá `krok`) měřeních a tyto průměry vyneseme do grafu s vyznačenou teoretickou střední hodnotou daného rozdělení. Tento výpočet provedeme celkem n-krát (v Matlabu n nazýváme `pocet`). Maximální rozsah souboru tedy bude roven $n \cdot k$.

Jak je vidět z níže vyobrazených grafů, pro rozdělení s rozptylem 1 bylo obecně třeba mnohem menší rozsah náhodného výběru, aby se jeho průměr ustálil v intervalu $\langle \mathsf{E} - 0,1; \mathsf{E} + 0,1 \rangle$.

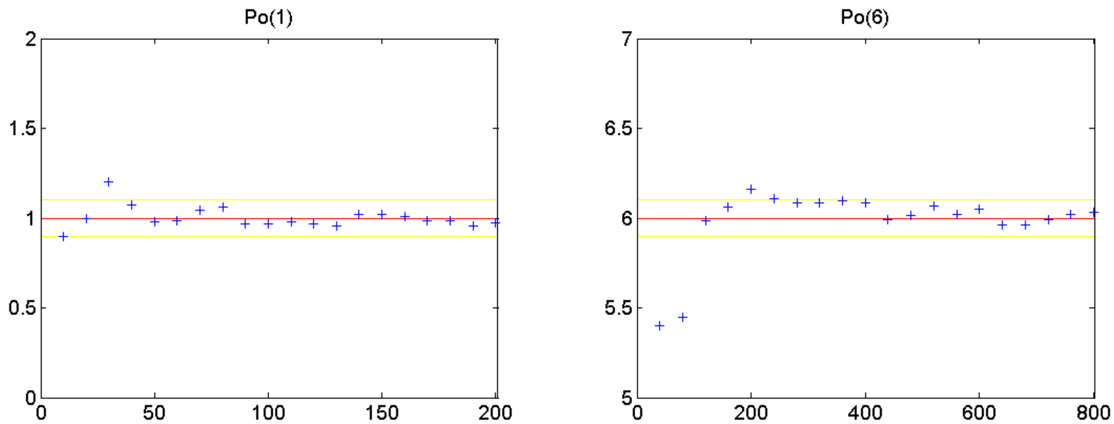
Porovnání všech tří zadaných typů rozdělení přináší poměrně zajímavé zjištění – totiž že „nejméně korektní“ vlastnosti vykazuje normální rozdělení: aritmetický průměr se k teoretické střední hodnotě blíží relativně nejpomaleji a má největší výkyvy.

Ovšem podle věty 1.29 platí $\overline{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. Výběrový průměr má tedy normální rozdělení a lze použít *pravidlo tří sigma* (poznámka 1.21): hodnoty náhodné veličiny $\overline{X}_n$ se budou s pravděpodobností zhruba 0.997 pohybovat v intervalu

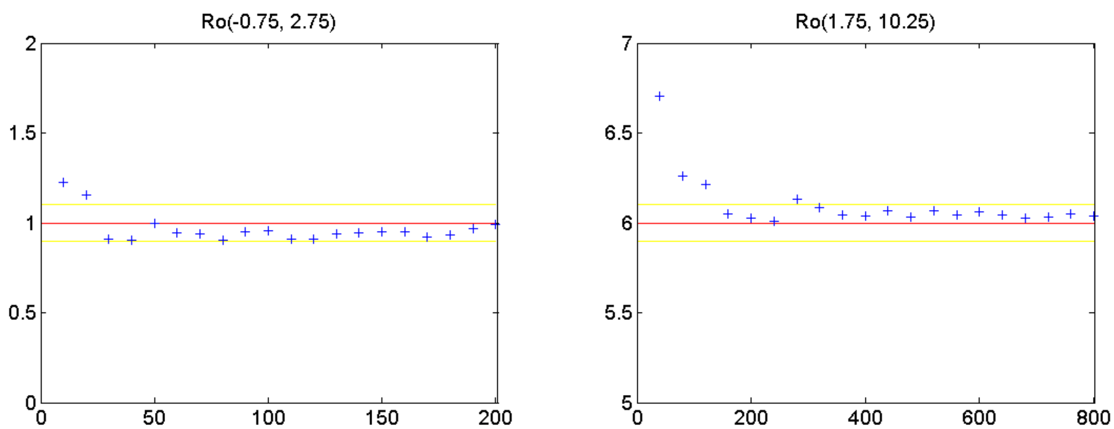
$$I_n = \left\langle \mathsf{E}(\overline{X}_n) - 3\sqrt{\mathrm{var}(\overline{X}_n)}, \mathsf{E}(\overline{X}_n) + 3\sqrt{\mathrm{var}(\overline{X}_n)} \right\rangle$$

Tento interval se pro $n \to \infty$ zužuje až k jedinému bodu – $\mathsf{E}(\overline{X}_n) = \mu$. Když hranice tohoto intervalu vykreslíme do grafu (zelenou barvou), vidíme, že hodnoty aritmetického průměru se v tomto intervalu vesměs pohybují.

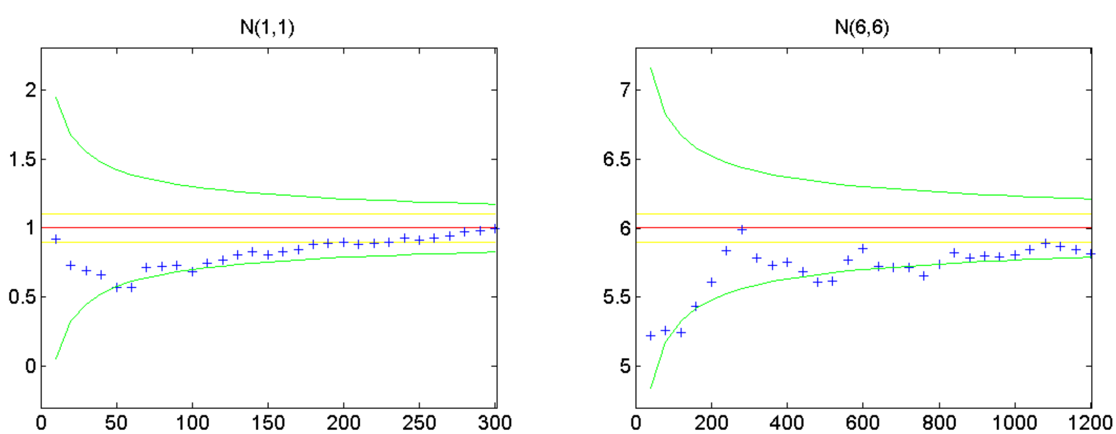
Poznámka 3.1. *Pravidlo tří sigma* nám v tomto případě zaručuje, že pro každý rozsah $k \cdot i$, $i = 1, ..n$ je pravděpodobnost, že křížek označující aritmetický průměr realizace náhodného výběru $\overline{x}_{k \cdot i}$ bude uvnitř intervalu $I_{k \cdot i}$, rovna 0.997, nikoli,



Obrázek 5: Konvergence aritmetických průměrů – Poissonovo rozdělení



Obrázek 6: Konvergence aritmetických průměrů – rovnoměrné rozdělení



Obrázek 7: Konvergence aritmetických průměrů – normální rozdělení

že je to pravděpodobnost počtu křížků vyskytujících se uvnitř oblasti vyznačené hranicemi I_n v rámci jednoho pozorování (simulace).

Poznámka 3.2. Obdobné intervaly I_n by se daly vykreslit i pro ostatní rozdělení, ovšem k jejich sestrojení je třeba další teorie, která není předmětem této práce.

Závěr

V rámci této bakalářské práce jsem se zabývala zákony velkých čísel. Na základě literatury jsem dokázala základní znění slabého a silného zákona velkých čísel, i některé jejich obecnější varianty, a na příkladě ukázala jejich rozdílnost. Práce rovněž obsahuje důkaz Glivenkovy věty o stejnoměrné konvergenci empirické distribuční funkce k teoretické, jejíž platnost je pak také demonstrována na příkladu. Dále jsem se zabývala vyšetřováním konvergence aritmetických průměrů náhodného výběru z určitého rozdělení ke střední hodnotě tohoto rozdělení v závislosti na jeho typu - konkrétně jsem zkoumala normální, Poissonovo a rovnoměrné rozdělení. Z příkladu je patrné, že nejpomalejší konvergenci v tomto smyslu jeví normální rozdělení, ale i u něj se s rostoucím rozsahem náhodného výběru tato konvergence projevuje.

Reference

[1] Halmos, Paul R. Measure Theory. Springer Verlag, New York Inc., 1974

[2] Jarník, Vojtěch. Integrální počet II. Academia. Praha. 1984

[3] Kunderová, Pavla. Úvod do teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. 2. vydání. Olomouc: VUP. 2004

[4] Rényi, Alfred. Teorie pravděpodobnosti. Praha: Academia. 1972

Seznam příloh

Přílohy

Příloha A. Zdrojové kódy pro tvorbu grafů ilustrujících konvergenci empirické distribuční funkce k teoretické (příklad 3.3) v programu Matlab :

```
function poissemp(n, lambda)
R = poissrnd(lambda,[1 n]);
[f,Rf]=ecdf(R);
stairs(Rf,f);
x = 0:0.2:15;
F = poisscdf(x,lambda);
hold on;
stairs(x,F,'r')
inf=F-1.96*sqrt(F.*(1-F)/n);
sup=F+1.96*sqrt(F.*(1-F)/n);
stairs(x,inf,'g-.')
stairs(x,sup,'g-.')
hold off;
```

```
function chi2emp(n, st)
R = chi2rnd(st,[1 n]);
[f,Rf]=ecdf(R);
stairs(Rf,f);
x = 0:0.2:15;
F = chi2cdf(x,st);
hold on;
plot(x,F,'r')
inf=F-1.96*sqrt(F.*(1-F)/n);
sup=F+1.96*sqrt(F.*(1-F)/n);
plot(x,inf,'g-.')
plot(x,sup,'g-.')
```

```
hold off;
```

Příklad volání:

```
poissemp(10, 5)
title('Po(5), n = 10', 'fontsize', 14)
```

Příloha B. Příklad zdrojového kódu funkcí pro tvorbu grafů konvergence aritmetických průměrů náhodného výběru k teoretické střední hodnotě (příklad 3.4). Normální rozdělení (ostatní obdobně):

```
function normalni(E, var, pocet, krok)


max=pocet*krok;
x=0:0.1:max;
plot(x,E,'Color', 'Red');
axis([0,max+1,E-1.3,E+1.3])
set(gca,'YTick', [E-1:0.5:E+1])
set(gca,'YTickLabel', [E-1:0.5:E+1], 'fontsize', 14)
hold on
plot(x, E-0.1, 'Color', 'Yellow');
plot(x, E+0.1, 'Color', 'Yellow');

prumer=zeros(1,pocet);
vyber=normrnd(E,var,[pocet krok]);
for i=1:pocet
     suma(i)=sum([vyber(i,:)]);
     prumer(i)=sum(suma)/(i*krok);
     xove(i)=i*krok;
     yove(i)=3*sqrt(var/(i*krok));
end

plot(xove,prumer,'b+');
plot(xove,E+yove,'Color', 'green');
plot(xove,E-yove,'Color', 'green');
```