Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulkta
Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Objevujeme vlastnosti funkcí pomocí matematického programu GeoGebra

Vypracovala: Bc. Veronika Mládková

Vedoucí práce: Mgr. Hana Štěpánková, Ph.D.

České Budějovice, 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma "Objevujeme vlastnosti funkcí pomocí matematického programu GeoGebra" jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ______________

____
podpis

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat mé vedoucí paní Mgr. Haně Štěpánkové Ph.D. za cenné rady, připomínky a výborné vedení.

Anotace

Diplomová práce se zabývá vlastnostmi funkcí, jako jsou lineární, kvadratické, goniomterické ad. Cílem práce je navrhnout vhodné matematické úlohy se zaměřením na funkční vztahy, ve kterých by žáci pomocí matematického programu GeoGebra mohli objevovat a osvojit si potřebné vlastnosti funkcí. V práci také najdete pravoúhlou soustavu souřadnic a přehled základních vlastností.

Klíčová slova

lineární, kvadratické, goniometrické funkce, přímá a nepřímá úměrnost, pravoúhlá soustava souřadnic, applet, GeoGebra

Annotation

My thesis is about functions, like linear functions, quadratic functions, goniometric functions etc. Goal of my work ist to design appropriate tasks with focus on function links. Students can with help of matematic program GeoGebra discover and adopt needed properties of functions. In this work you can find Cartesian coordinates and overview of basic properties of functions too.

Key words

linear, quadratic, goniometric functions, direct and indirect proportionality, Cartesian coordinates, applet, GeoGebra

Obsah

Seznam obrázků

Úvod

Tato diplomová práce slouží jako sbírka úloh z matematiky, která je určena především žákům a učitelům matematiky na II. stupni ZŠ. Najdete tu ale i trochu teorie.

Cílem mé diplomové práce je navrhnout vhodné matematické úlohy se zaměřením na funkční vztahy, ve kterých by žáci pomocí matematického programu GeoGebra mohli objevovat a osvojit si potřebné vlastnosti funkcí. Vytvořit učební materiál, který by sloužil ve výuce matematiky k lepšímu pochopení, osvojení a procvičení všech důležitých pojmů a dovedností k tomuto tématu.

Struktura práce se skládá celkem ze sedmi kapitol. Práce začíná kapitolou: "Obecné povídání", pokračuje kapitolou "Pravoúhlá soustava souřadnic". V práci najdete přehledem základních vlastností funkcí. Nejrozsáhlejší kapitolou této práce jsou "Lineární funkce", se kterými se žáci setkávají ve výuce nejdříve. Dále pokračuje nepřímou úměrností a kvadratickými funkcemi. Kapitola "Goniometrické funkce" je zaměřena především na seznámení s funkcemi $\sin$, $\cos$, tg a cotg.

Ke každé úloze je vytvořený applet, který slouží jako pomůcka k řešení příkladů nebo ke kontrole jejich řešení v této diplomové práci.

Applety jsou vytvářeny v softweru GeoGebra. Jedná se o matematický program pro interaktivní geometrii, algebru i analýzu, který je určen především pro učitele a studenty. Jedna z jeho výhod je, že je k dispozici ke stažení zdarma do počítače i do mobilního telefonu. Aplikaci GeoGebra můžete také využívat online, tedy bez nutnosti stažení, na adrese *https://www.geogebra.org*.

Má diplomová práce je psaná v programu LaTeX. Obrázky jsou tvořeny v programu GeoGebra.

Kapitola 1

Obecné povídání

Kde se žáci s funkcemi setkávají a co potřebují umět než začnou probírat jednotlivé funkce?

Ve škole i mimo ni se můžeme setkat s tím, že některé veličiny závisí na jiných. Dobrým příkladem je například nákup. Když budeme nakupovat nanuky, zaplatíme za větší počet nanuků více peněz (přímá úměrnost). Nebo při práci ve škole, čím více žáků bude uklízet třídu, tím rychleji budou mít uklizeno (nepřímá úměrnost). Tyto závislosti v matematice označujeme pojmem funkce.

Matematika je plná nejrůznějších funkcí, jako jsou lineární, kvadratické, goniometrické a další. Žáci se s těmito funkcemi setkávají na druhém stupni základních škol. Nejdříve se seznamí s lineárními funkcemi, později s grafy přímé a nepřímé úměrnosti. Toto učivo je zařazeno do 7. třídy. V 9. ročníku navazují a rozšiřují učivo o kvadratické, lomené a goniometrické funkce. Aby žáci vše dobře pochopili, musí umět pracovat v pravoúhlé soustavě souřadnic, kam zakreslují body, sestavit tabulku a sestrojit graf dané funkce. Především musí umět pracovat s čísly, výrazy a rovnicemi, bez kterých se při počítání neobejdou.

Ve škole se žáci s funkcemi setkávají i ve fyzice. Např. když jedeme na kole, doba jízdy záleží na rychlosti kola. Čím rychleji pojedeme, tím ujedeme větší dráhu za daný čas. Nebo při působení síly na plochu. Čím větší silou budeme působit na určitou plochu, tím větší vzniká tlak.

Kapitola 2

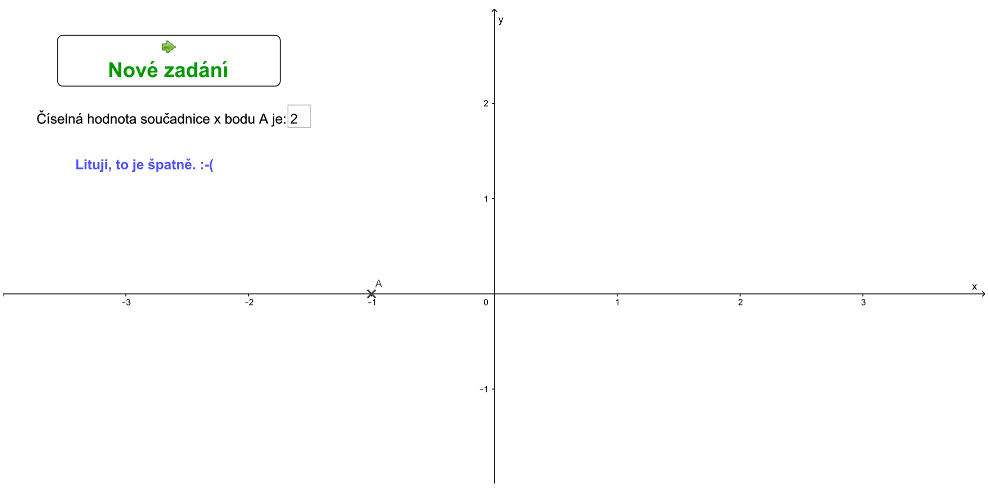
Pravoúhlá soustava souřadnic

Dříve než začneme probírat jednotlivé funkce, zopakujme si, jak se znázorňují body v pravoúhlé soustavě souřadnic.

Jak se vlastně body v soustavě hledají? Je to celkem jednoduché. Mějme dvě na sebe kolmé přímky, nazýváme je osy x (vodorovná) a y (svislá). Tam kde se osy protínají se nachází bod, který nazýváme počátkem. Jeho souřadnice zapíšeme takto $[0; 0]$. Na osách zvolíme hodnoty, jak znázorňuje obr. 2.1. Pojďme si to zkusit na příkladech.

1. **Applet 2.1:** Souřadnice x

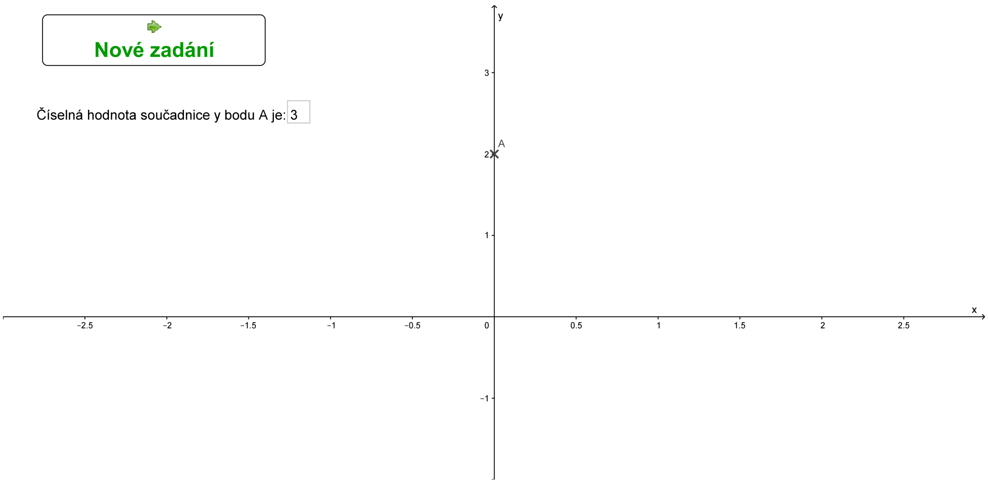
   Vaším úkolem je nalézt hodnotu souřadnice x bodu A. Svoji odpověď napište do příslušného textového pole. Pokud budete mít příklad správně, zmáčkněte tlačítko: "Nové zadání," tím se změní souřadnice bodu A.



Obrázek 2.1: Body - souřadnice x.

2. **Applet 2.2:** Souřadnice y

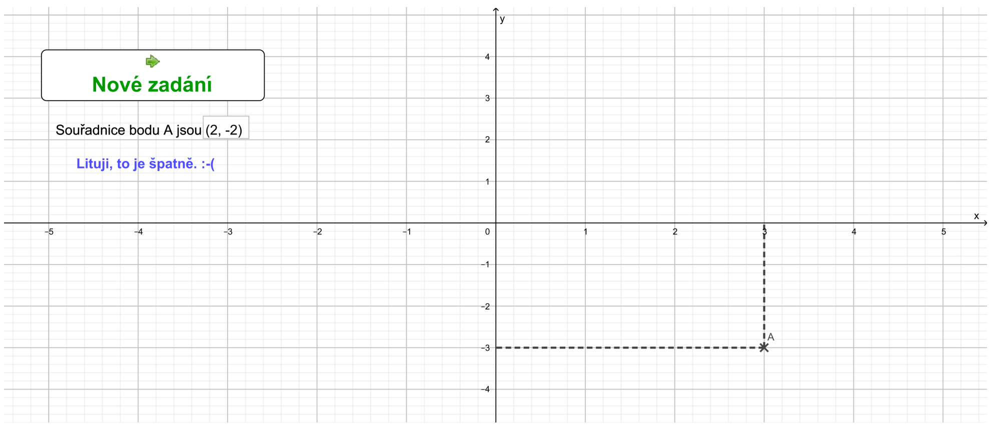
   Nalezněte hodnotu souřadnice y bodu A. Svoji odpověď napište do příslušného textového pole. Pokud to budete mít správně, zmáčkněte tlačítko: "Nové zadání."



Obrázek 2.2: Body - souřadnice y.

3. **Applet 2.3:** Souřadnice bodu A

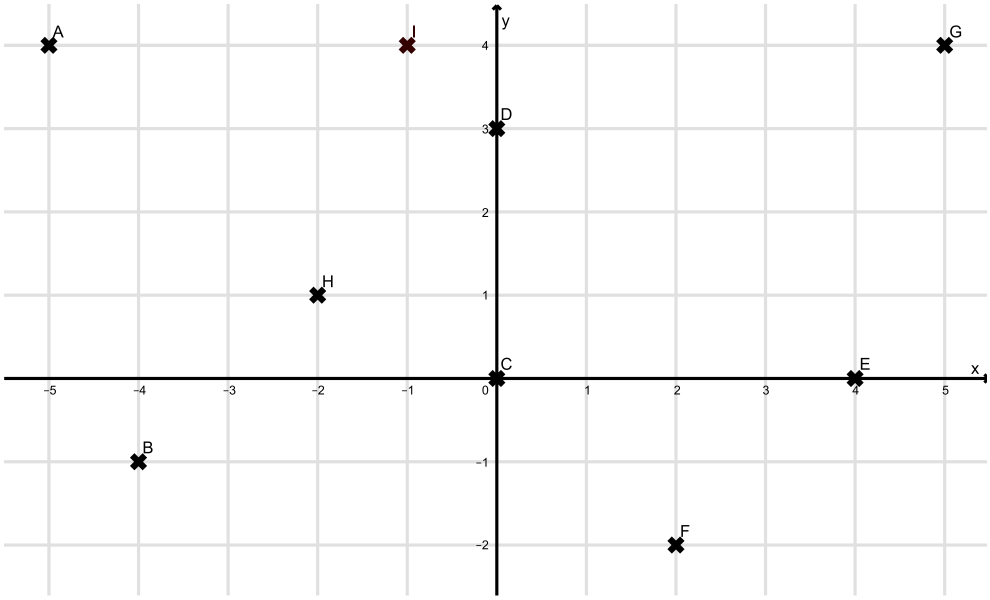
   V appletu zapište do textového pole obě souřadnice bodu A. Pokud souřadnice napíšete správně, zmáčkněte na tlačitko: "Nové zadání"a úkol si několikrát procvičte.



Obrázek 2.3: Body - souřadnice x i y.

4. Applet 2.4: Body

V soustavě souřadnic jsou znázorněny body A až I. Určete jejich souřadnice, které tvoří dvě čísla v daném pořadí $[x,\ y]$. Jaký bod byste označili počátkem?



Obrázek 2.4: Body

5. Znázornění bodů

Otevřete si program GeoGebra a znázorněte body:

a) A = [1,2], b) B = [-1,0], c) C = [-2,2], d) D = [5,-4], e) E = [0,0].

<u>**Nápověda:**</u> Jak to uděláte? Buď pomocí tlačítka: "Nový bod", pomocí kterého umístíte bod na příslušné místo v soustavě souřadné nebo napíšete do okénka "Vstup"např. A=(1,2) a hledaný bod se vám sám zobrazí.

<u>**Poznámka:**</u>

Všimněte si, že v programu GeoGebra se používají k zápisu hodnot souřadnic kulaté závorky. Ve většině učebnic jsou to ale závorky hranaté.

Kapitola 3

Vlastnosti funkcí

Nyní si vytvoříme přehled vlastností, které můžeme pozorovat u jednotlivých funkcí. Funkcí rozumíme zobrazení z množiny reálných čísel do množiny reálných čísel. U funkcí můžeme určovat definiční obor, obor hodnot, spojitost, paritu, monotonii, periodičnost, omezenost, její extrémy ad.

Definice jsou převzaty z publikace [8].

3.1 Definiční obor a obor hodnot

Definice:

- **Definiční obor funkce** f je množina $D(f) = \{x; [x; y] \in f\}$, což je množina všech hodnot nezávisle proměnné x, které se ve funkci vyskytují.

- **Obor hodnot funkce** f je množina $H(f) = \{y; [x; y] \in f\}$, což je množina všech hodnot funkce y, které se ve funkci vyskytují.

3.2 Spojitost

Definice: Funkce je spojitá na nějakém intervalu, pokud graf je možné narýsovat v tomto intervalu bez přerušení jedním tahem.

3.3 Parita funkce

<u>**Definice:**</u> Funkce f se nazývá:

a) **SUDÁ FUNKCE** pokud platí: $(\forall x \in D(f))\ f(-x) = f(x)$,

b) **LICHÁ FUNKCE** pokud platí: $(\forall x \in D(f))\ f(-x) = -f(x)$.

Graf **sudé** funkce je souměrný podle osy y. Graf **liché** funkce je středově souměrný podle počátku soustavy souřadné.

3.4 Monotonie funkcí

<u>**Definice:**</u> Funkce je:

a) **rostoucí**, právě když platí $(\forall x_1, x_2 \in D(f))\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$,

b) **klesající**, právě když platí $(\forall x_1, x_2 \in D(f))\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$,

c) **neklesající**, právě když platí $(\forall x_1, x_2 \in D(f))\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$,

d) **nerostoucí**, právě když platí $(\forall x_1, x_2 \in D(f))\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.

Je-li funkce f neklesající nebo neroustoucí, nazýváme funkci f **MONOTÓNNÍ**.
Je-li funkce f rostoucí nebo klesající, nazýváme funkci f **RYZE MONOTÓNNÍ**.

3.5 Periodická funkce

<u>**Definice:**</u> Funkce f se nazývá **periodická** s periodou $p \neq 0$, platí-li:

$$(\forall x \in D(f))\ (f(x + kp) = f(x),\ kde\, k \in Z).$$

Existuje-li nejmenší číslo $p_0 > 0$ takové, že funkce f je periodická s periodou p_0, nazveme toto číslo p_0 nejmenší kladnou periodou funkce f.

3.6 Omezenost

Definice: Říkáme, že funkce f je

- **OMEZENÁ SHORA** (konstantou K), platí-li:

$$(\exists K \in R)\,(\forall x \in D(f))\, f(x) \leq K.$$

- **OMEZENÁ ZDOLA** (konstantou K,) platí-li:

$$(\exists K \in R)\,(\forall x \in D(f))\, f(x) \geq K.$$

- **OMEZENÁ**, je-li omezená zdola i shora.

3.7 Extrémy

Definice: Nechť $A \subseteq D(f)$, $a \in A$, $b \in A$. Funkce f má na množině A:

- v bodě a **NEJMENŠÍ** hodnotu, právě když pro všechna $x \in A$ je $f(x) \geq f(a)$. Hodnotu $f(a)$ nazýváme minimem funkce f na množině A.
- v bodě b **NEJVĚTŠÍ** hodnotu, právě když pro všechna $x \in A$ je $f(x) \leq f(b)$. Hodnotu $f(b)$ nazýváme maximem funkce f na množině A.

3.8 Funkce prostá

Definice: Funkci f na definičním oboru D označujeme jako **prostou** na D, pokud pro každé dvě hodnoty $x_1 \neq x_2$ z D platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

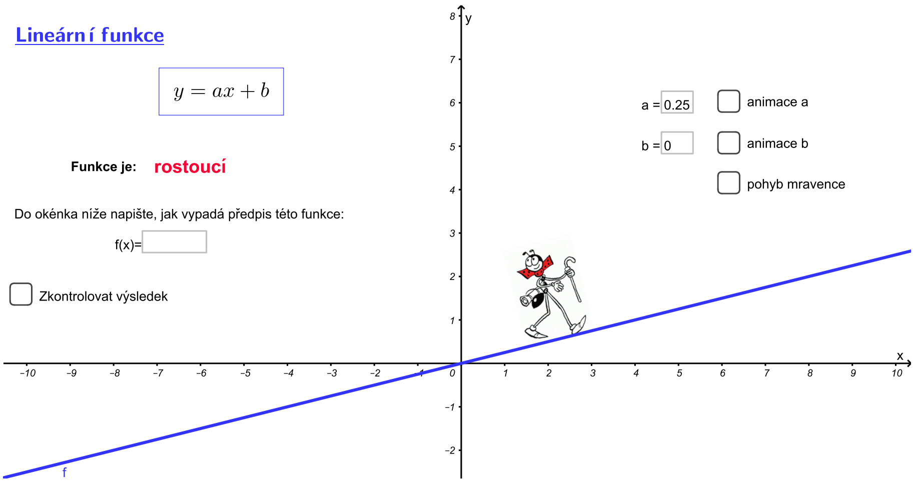
Kapitola 4

Lineární funkce

4.1 Co je to lineární funkce?

1. **Applet 4.1.1:** Ferda Mravenec

   Co je to lineární funkce a jaké má vlastnosti? Na to zkusíme přijít pomocí tohoto appletu 4.1.1, kde vidíme jakým předpisem je zadaná lineátní funkce. Pomocí animací můžeme zjistit, jak se daná funkce mění a jaké má vlastnosti v různých situacích.



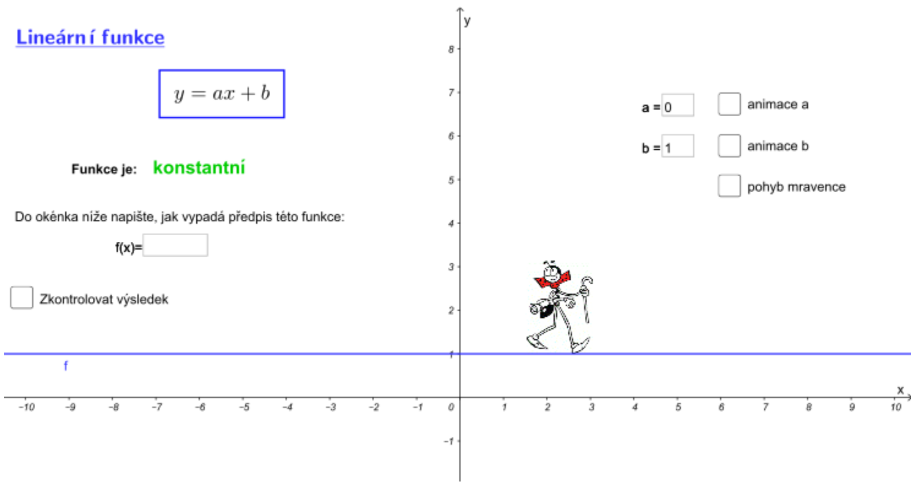
Obrázek 4.1: Funkce rostoucí: $a > 0$

Jak je vidět **grafem** lineární funkce je **PŘÍMKA** různoběžná s osou y. Pohyb Ferdy Mravence ukazuje, zda je funkce **rostoucí** (Ferda Mravenec jde nahoru), **klesající** (Ferda Mravenec se pohybuje dolů) či **konstantní** (Ferda Mravenec jde vodorovně).

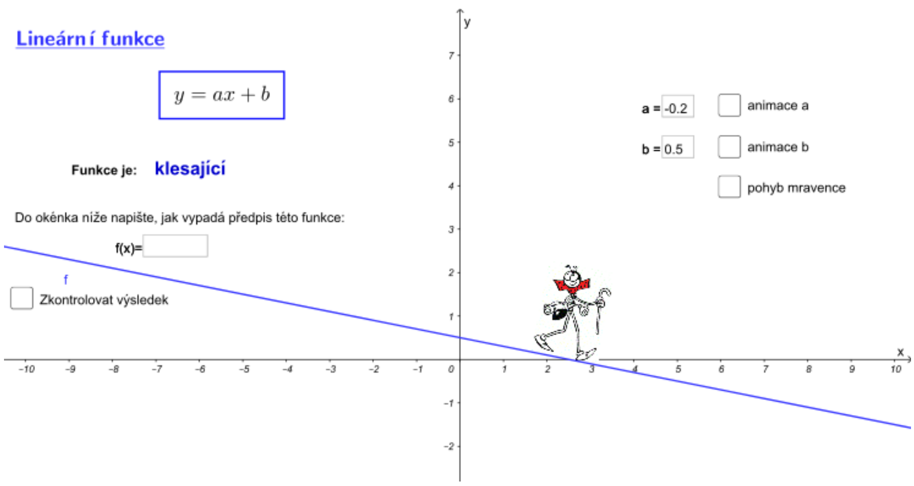
Musíme si, ale položit otázku: ***Proč se Ferda Mravenec pohybuje zrovna takto?*** Když se podíváme na předpis funkce

$$\boxed{\mathrm{y} = \mathrm{ax} + \mathrm{b},}$$

kde a, $b \in R$ a pustíme animace, zjistíme, že záleží na hodnotě čísla a. Pokud je $a > 0$ jedná se o funkci **rostoucí**, ovšem je-li $a < 0$ je funkce **klesající**, a když se $a = 0$ je funkce **konstantní**.

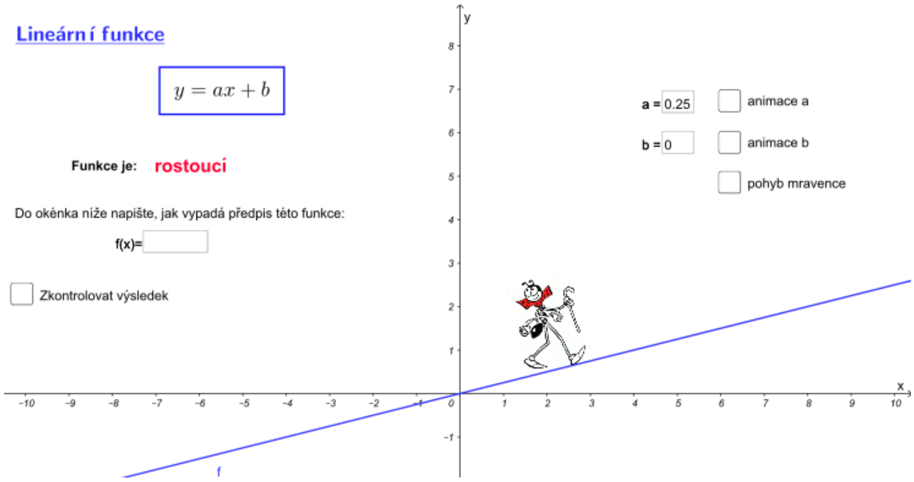


Obrázek 4.2: Funkce konstantní: $a = 0$



Obrázek 4.3: Funkce klesající: $a < 0$

Dále záleží na hodnotě čísla b. Parametr b vlastně lineární funkci posouvá o b jednotek nahoru nebo dolů. Záleží zda $b > 0$ nebo $b < 0$. Pokud $b = 0$ přímka vždy bude procházet počátkem $[0, 0]$, tedy nedojde k posunutí a tuto funkci označujeme jako **přímou úměrnost** viz obrázek níže.



Obrázek 4.4: Přímá úměrnost: $b = 0$

Mějme dvě veličiny. Pokud budou přímo úměrné, musí platit, že když jednu veličinu **zvětšíme** (zmenšíme) x krát, druhou veličinu také **zvětšíme** (zmenšíme) x krát. **Uveďme si dva příklady:**

1. Dva kilogramy jablek stojí 52 Kč. Půl kilogramu stojí 13 Kč.

2. Ze 3 kg švetek získáme 900 g švestkových povidel. Ze 6 kg získáme 1800 g švestkových povidel.

Přehled základních vlastností:

a) $a < 0$

$D(f) = (-\infty, \infty), H(f) = (-\infty, \infty)$. Není omezená ani shora, ani zdola. Je klesající, tedy prostá. Nemá maximum, ani minimum. Je spojitá v R.

b) $a = 0$

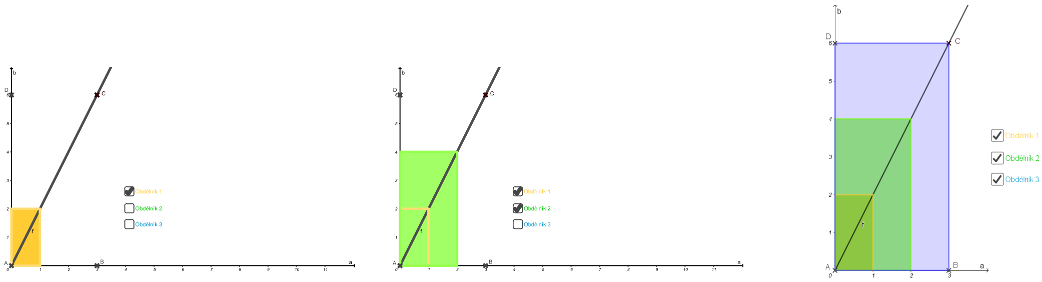
$D(f) = (-\infty, \infty), H(f) = (b)$. Je sudá, pro $b = 0$ i lichá. Je omezená. Je neroustoucí a neklesající (konstantní). Má maximum a minimum pro každé $x \in R$. Je spojitá v R.

c) $a > 0$

$D(f) = (-\infty, \infty), H(f) = (-\infty, \infty)$. Není omezená ani shora, ani zdola. Je rostoucí, tedy prostá. Nemá maximum, ani minimum. Je spojitá v R.

2. **Applet 4.1.2:** Obdélník

   Z appletu pozorujte rozměry obdélníků. Všimněte si, že rozměr b je vždy dvojnásobkem roměru a. Takové závislosti říkáme přímá úměrnost (dále jen PÚ). A jak už dobře víte, PÚ je speciálním případem lineární funkce. Grafem je přímka nebo její část. Tuto závislost bychom mohli zapsat vzorcem $b = 2a$.



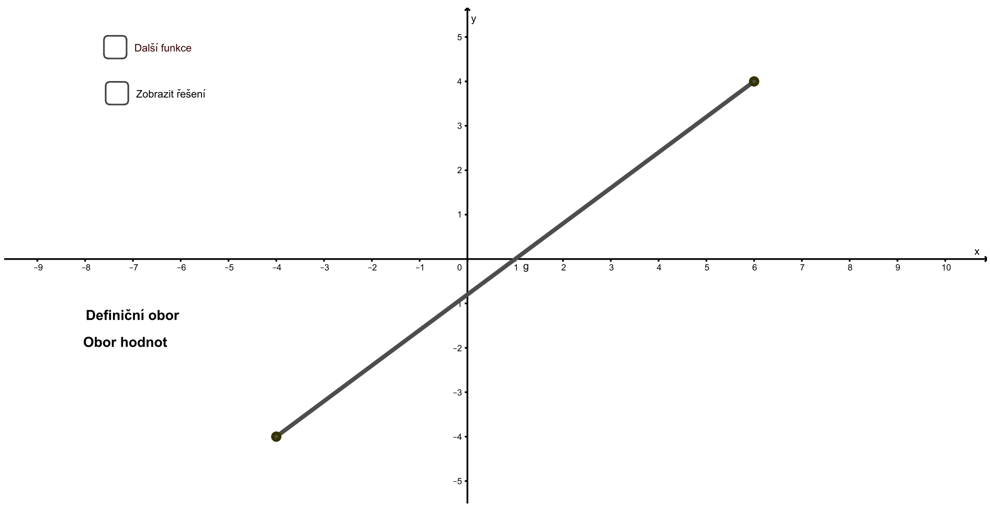
Obrázek 4.5: Obdélník

   Jaký rozměr bude mít strana b, když a bude $1, 2, 3, 4, 5, 6$?

4.2 Definiční obor a obor hodnot

1. **Applet 4.2.1:**

   Zjistěte definiční obory a obory hodnot v tomto appletu 4.2.1. Správné řešení zobrazíte zaškrtnutím okénka "Zobrazit řešení."

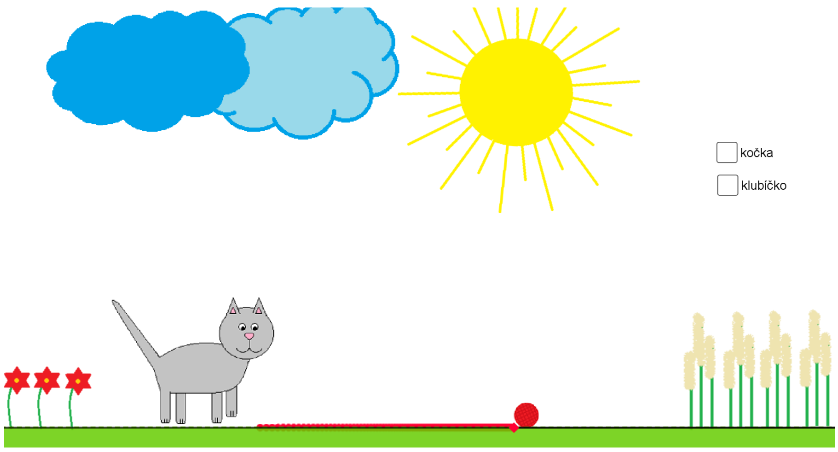


Obrázek 4.6: Lineární funkce

4.3 Monotonie lineární funkce

1. **Applet 4.3.1:** Kočka

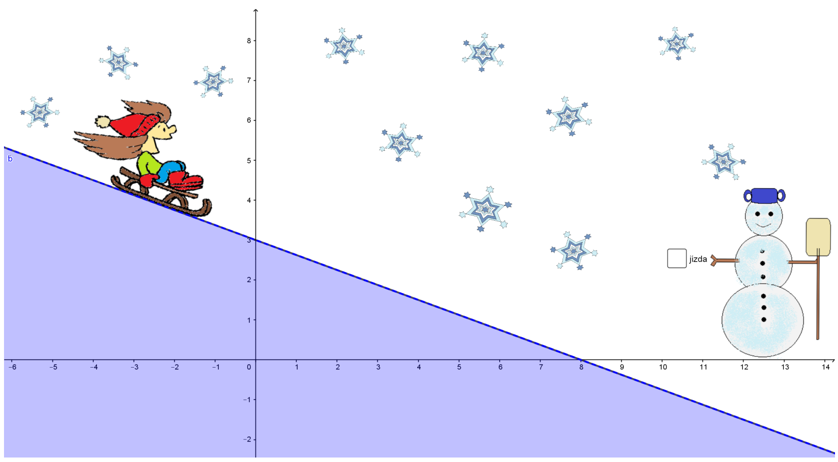
   Byla jednou jedna kočička Micka, která si moc ráda hrála s klubíčkem. Ale jednoho dne se kočičce klubíčko zakutálelo. Když se kutálelo, zanechávalo po sobě červenou stopu. Pomocí appletu rozhodněte, po které funkci se klubíčko pohybovalo. Jedná se o funkci rostoucí, klesající nebo konstantní?



Obrázek 4.7: Kočka

2. **Applet 4.3.2:** Sáňkování

   Na obrázku sáňkuje holčička. Pomocí appletu rozhodněte, po jaké funkci holčička jezdí a určete monotonii této funkce.



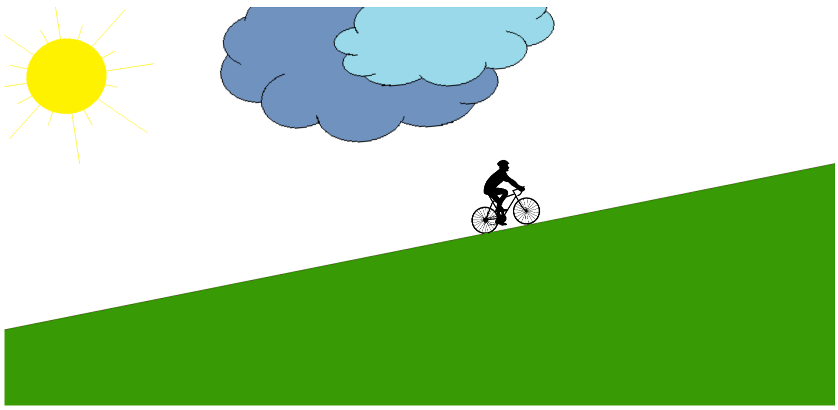
Obrázek 4.8: Sáňkování

3. Applet 4.3.3: Cyklista

Pepík jede na kole na výlet, jeho část cesty můžete pozorovat v appletu.

a) Rozhodněte o jakou funkci se jedná.

b) Určete monotonii této funkce.



Obrázek 4.9: Cyklista

4.4 Grafy lineárních funkcí

1. Applet 4.4.1

Narýsujte graf funkce: a) $y = x + 2$ b) $y = x - 1$

Řešení:

První způsob: POČETNÍ

1. Do rovnice dosadíme za proměnnou x libovolná čísla, a tím získáme hodnoty y.
2. Zjištěné údaje zapisujeme do tabulky a naneseme do pravoúhlé soustavy souřadnic.
3. Nakonec body propojíme přímkou.

Zkusme si do funkce $y = x + 2$ dosadit za x číslo -2. Jak to bude vypadat?

$$\begin{aligned} y &= -2 + 2 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Tímto jsme zjistili, že když $x = -2$ tak $y = 0$.

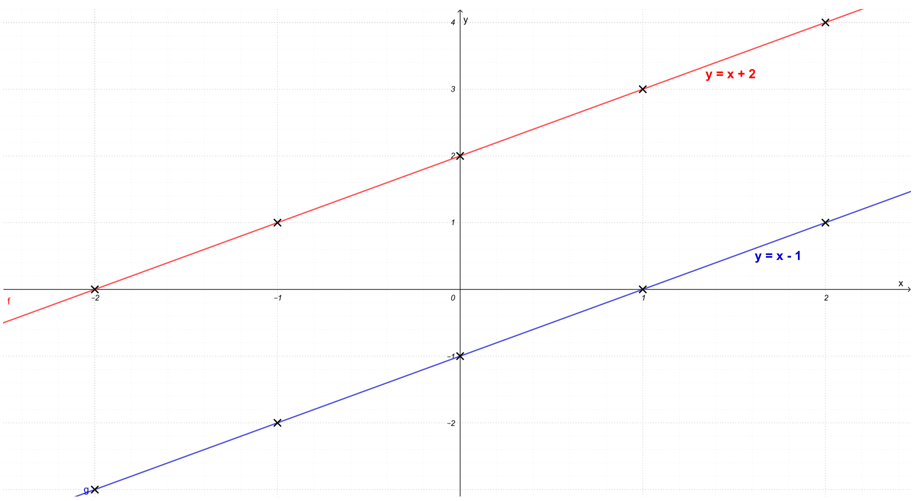
Vytvořme tabulku pro $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

x	-2	-1	0	1	2
y	0	1	2	3	4

To samé pro funkci $y = x - 1$.

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-2	-1	0	1

Vypočítané hodnoty naneseme do kartézské soustavy souřadnic a spojíme přímkou.

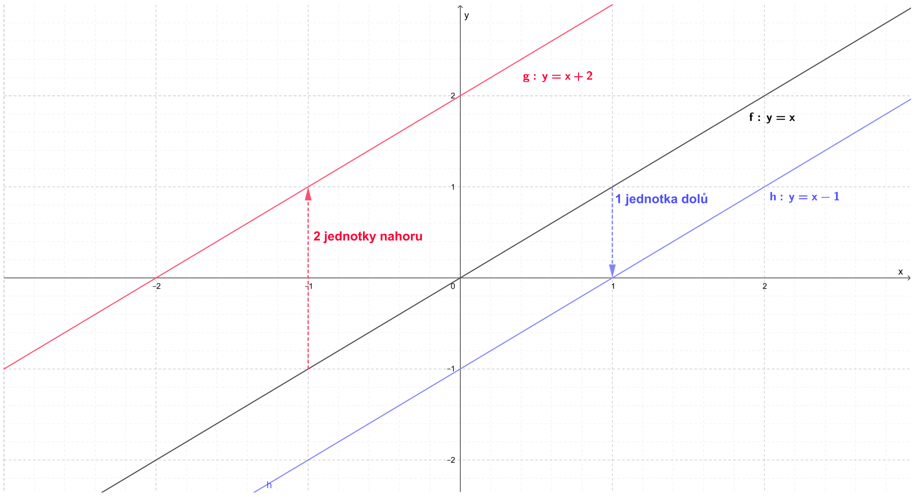


Obrázek 4.10: Graf

Druhý způsob: GRAFICKÝ

Tento způsob je spíše pro bystřejší hlavičky, ale posuďte sami, je docela jednoduchý. Obě funkce jsou rovnoběžné s funkcí $f : y = x$ a této vlastnosti využijeme. Jde totiž o funkci f v posunutí. Pokud $b > 0$, funkci posouváme nahoru o b jednotek, jestliže je ale $b < 0$, funkci posouváme dolů o b jednotek.

V našem případě za a) se bude funkce f posouvat nahoru o dvě jednotky, za b) se funkce f bude posouvat dolů o jednu jednotku.



Obrázek 4.11: Graf

Tohoto poznatku využijte i v následujícím cvičení.

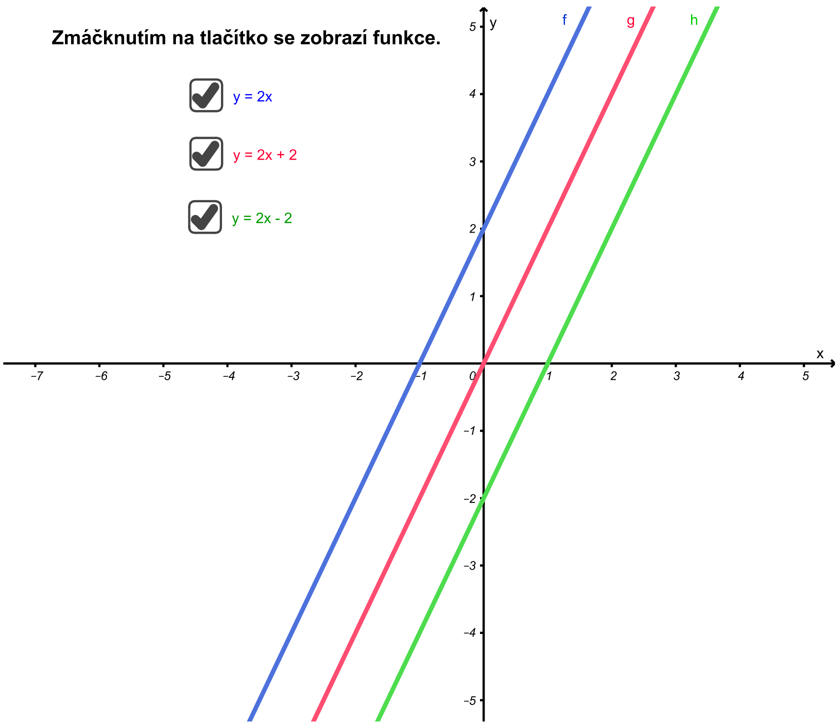
2. Applet 4.4.2

Narýsujte graf lineární funkce, která je dána vzorcem:

a) $y = 2x$, b) $y = 2x + 2$, c) $y = 2x - 2$.

Pomocí appletu zkontrolujte, zda jste pracovali správně.

Řešení



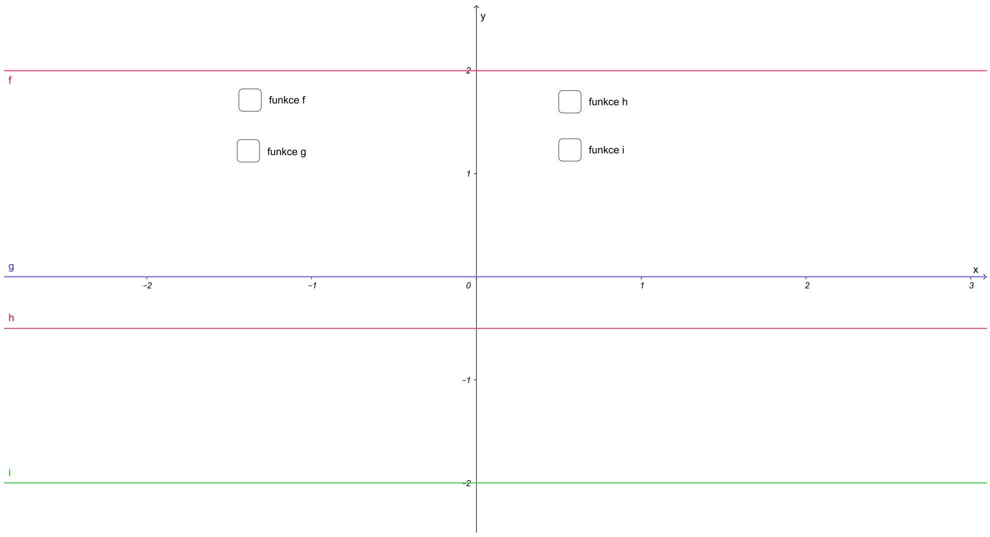
Obrázek 4.12: Lineární funkce - grafy

Řešení následujících úloh zkontrolujte pomocí appletů jimž určeným.

3. Applet 4.4.3: Konstantní funkce

Na obrázku jsou grafy konstantních funkcí. Přiřaďte ke každému grafu vzorec, kterým je funkce vyjádřená.

a) $y = 0$, b) $y = 2$, c) $y = -0.5$, d) $y = -2$.

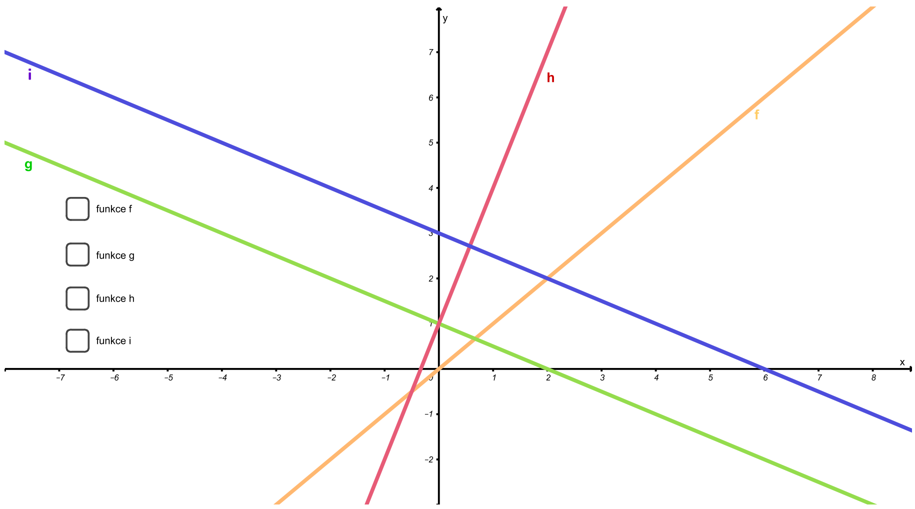


Obrázek 4.13: Konstatní funkce

4. **Applet 4.4.4:** Hledejte grafy

Na obrázku jsou grafy lineárních funkcí. Přiřaďte ke každému grafu vzorec, kterým je funkce vyjádřená.

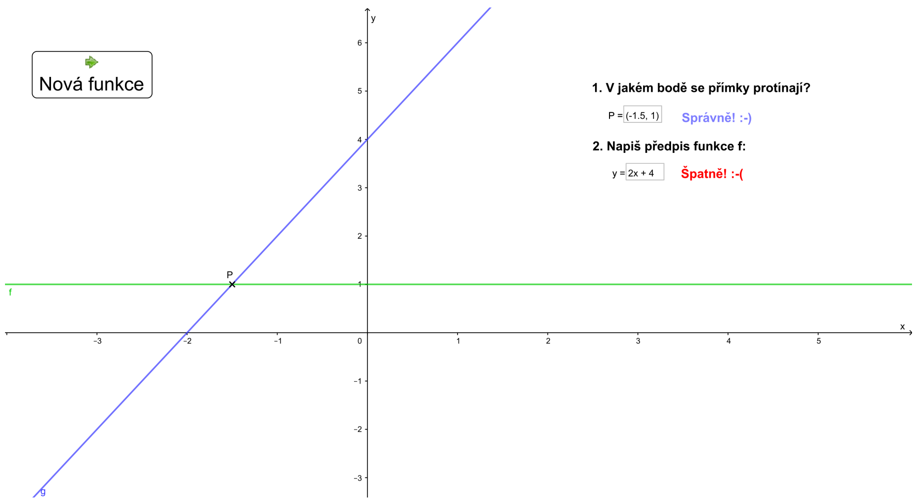
a) $y = x$, b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$, c) $y = 3x + 1$, d) $y = -\frac{1}{2}x + 3$.



Obrázek 4.14: Applet 4.4.4.

5. Applet 4.4.5: Hledání funkce

Napište do okénka předpis funkce f a průsečík funkce f a g. Pokud jste vše napsali správně, zmáčkněte tlačítko "Nová funkce".

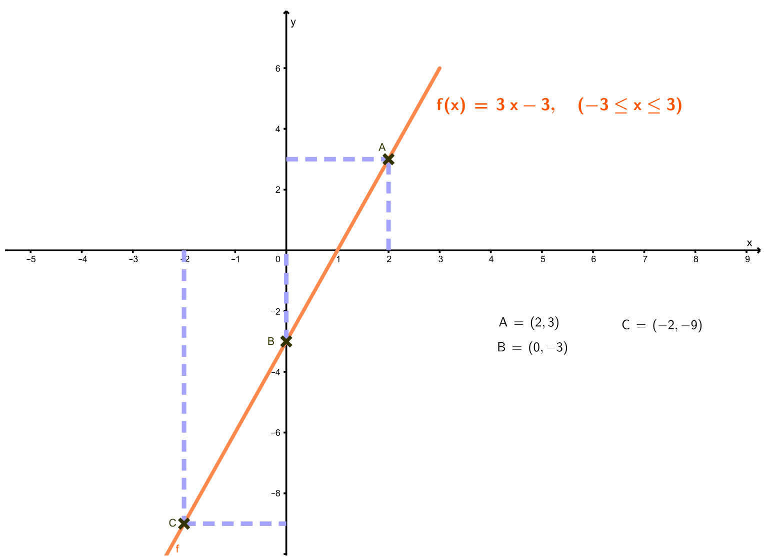


Obrázek 4.15: Nová funkce

6. Applet 4.4.6: Sestrojte funkci

Je dána funkce $y = 3x - 1, x \in \langle -3,\ 3 \rangle$. Vypočítejte hodnoty této funkce v bodech 0, 2, -2 a narýsujte funkci na milimetrový papír. Řešení ověřte pomocí appletu. [5]

Řešení:



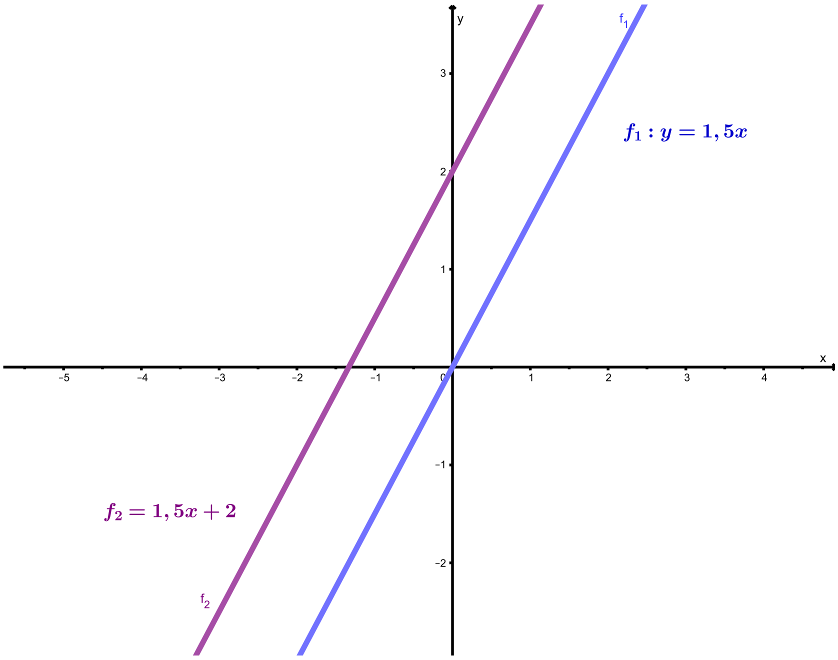
Obrázek 4.16: Applet 4.4.6

7. Applet 4.4.7

Sestrojte grafy těchto funkcí:

a) $f_1 : y = 1,5x$, b) $f_2 : y = 1,5x + 2$.

Řešení:

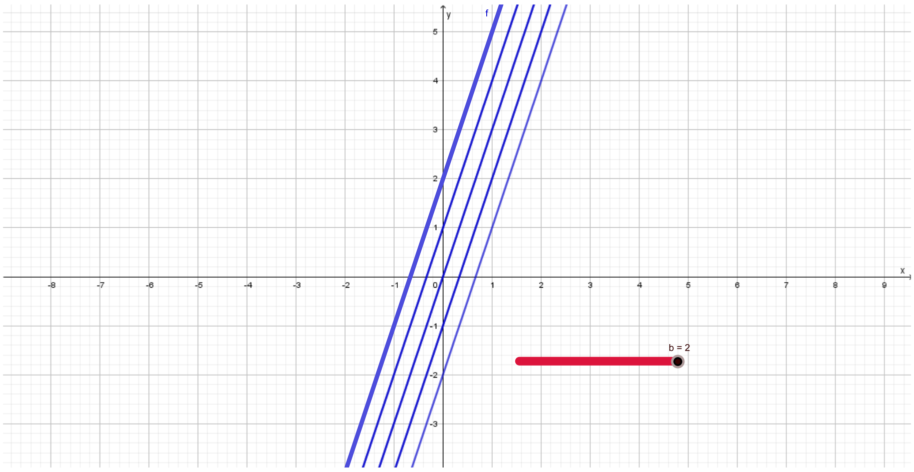


Obrázek 4.17: Applet

8. Applet 4.4.8: Narýsujte funkci

Sestrojte v téže pravoúhlé soustavě souřadnic grafy funcí typu $y = 3x + b$, kde $b = -2, -1, 0, 1, 2$.

Řešení:

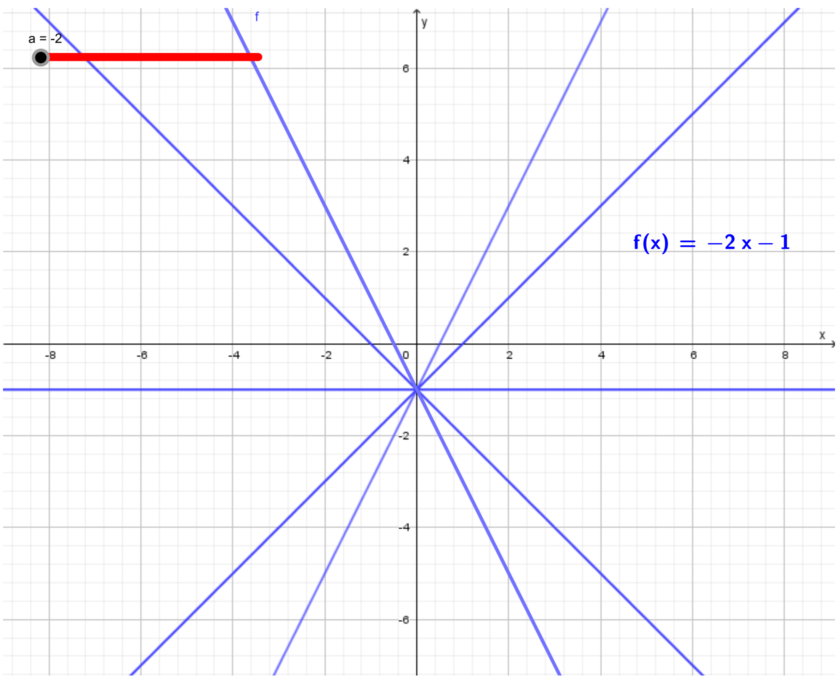


Obrázek 4.18: Applet 4.4.8

9. Applet 4.4.9: Sestrojte funkce

Sestrojte v téže pravoúhlé soustavě souřadnic grafy funcí typu $y = ax - 1$, kde $a = -2, -1, 0, 1, 2$. [5]

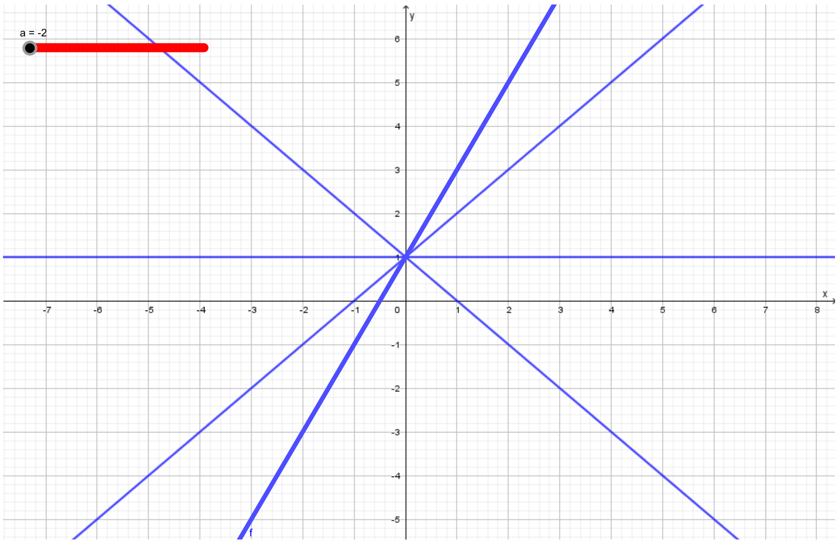
Řešení:



Obrázek 4.19: Applet 4.4.9

10. Applet 4.4.10: Narýsujte funkci

Sestrojte v téže pravoúhlé soustavě souřadnic grafy funcí typu $y = -ax + 1$, kde $a = -2, -1, 0, 1, 2$.

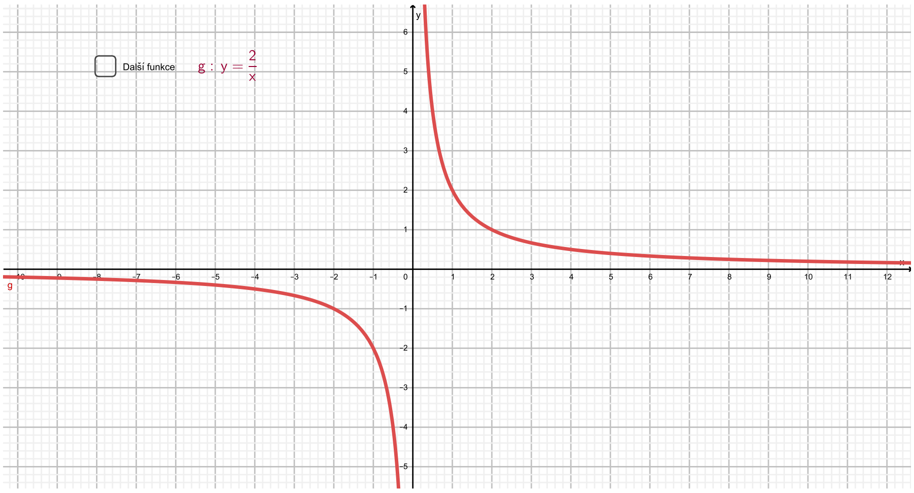


Obrázek 4.20: Applet 4.4.10

11. Applet 4.4.11: Jedná se o lineární funkci?

Z tabulky vyberte předpisy, které označují lineární funkce. Jestli si nevíte rady, otevřete si applet 4.4.11, ve kterém se vám zobrazí zadané funkce v grafické podobě.

$y = 2x$	$y = \frac{2}{x}$	$y = x^3 - 2x$	$y = 3x + 3$
$y = -7x + 5$	$y = -2$	$y = x^2 + 3x + 1$	$y = \frac{6}{x}$

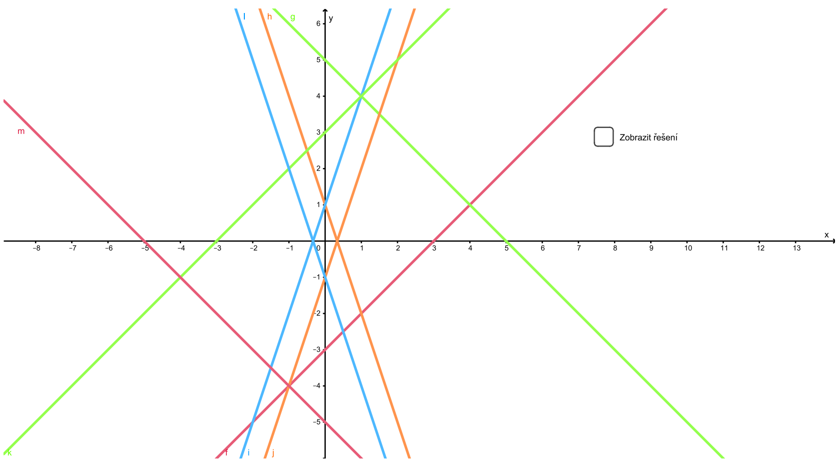


Obrázek 4.21: Applet 4.4.11

12. Applet 4.4.12

Spojte dvojice předpisů funkcí, jejichž grafy jsou rovnoběžné přímky. Pokud si nebudete jistí, otevřete si applet 4.4.12.

$y = x - 3$	$y = -x + 5$	$y = -3x + 1$	$y = 3x + 1$
$y = 3x - 1$	$y = x + 3$	$y = -3x - 1$	$y = -x - 5$



Obrázek 4.22: Rovnoběžnost

4.5 Lineární funkce v praxi

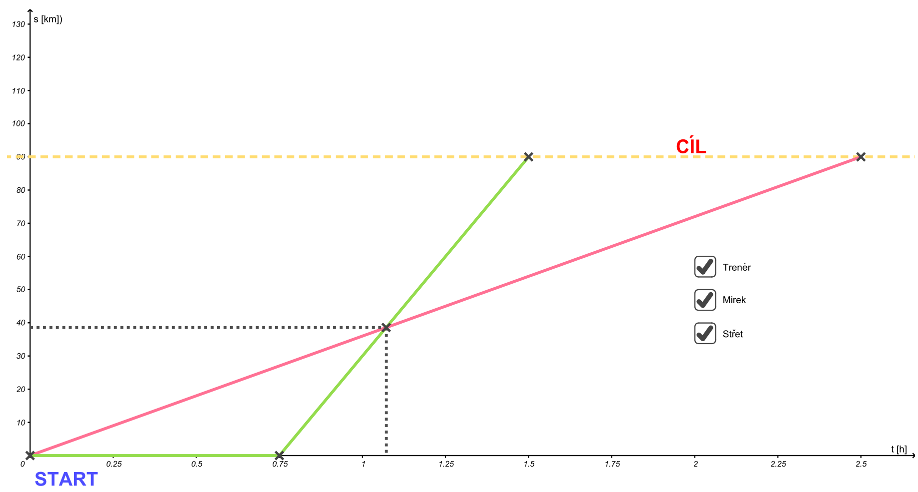
1. **Applet 4.5.1:** Na kole a autem

   Cyklista Mirek trénuje na silniční závody. Svoji obvyklou okružní devadesátikilometrovou trasu zvládne přibližně za $2,5$ hodiny. Tři čtvrtě hodiny po Mirkově odjezdu vyjíždí autem Mirkovi naproti trenér. Tuto trasu zvládne přibližně za 75 minut.

   Z appletu určete:

   a) za kolik minut po Mirkově startu ho trenér potká,

   b) v jaké vzdálenosti od cíle trasy se setkají. [7]



Obrázek 4.23: Applet 4.5.1

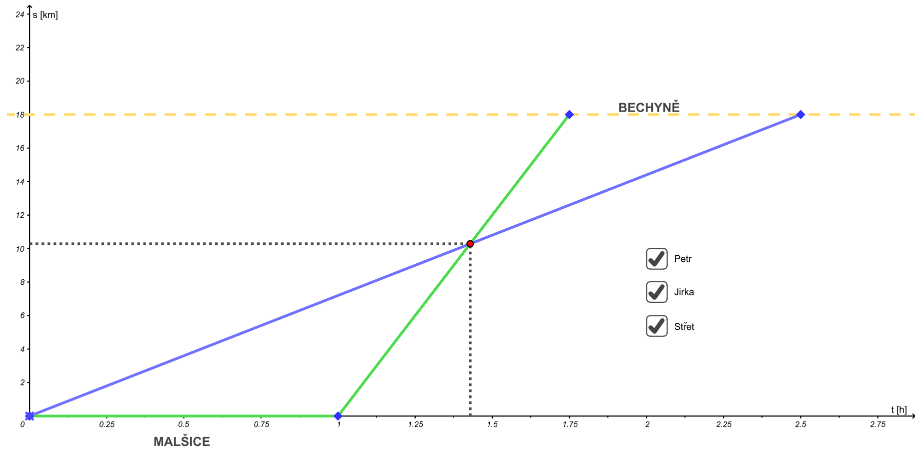
2. **Applet 4.5.2:** Pohybová úloha

   Petr se vydal z Malšic do Bechyně, což je 18 km. Cesta mu obvykle trvá $2,5$ hodiny. O hodinu později za ním vyjel na kole Jirka, který cestu obvykle zvládne za $\frac{3}{4}$ hodiny.

   Z appletu určete:

   a) za jak dlouho Jirka dohoní Petra,

   b) kolik kilometrů od Bechyně to bude. [7]

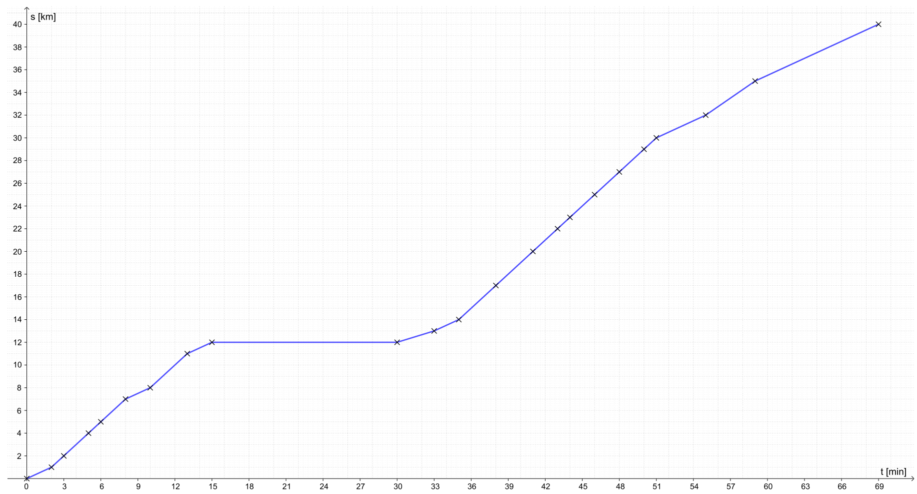


Obrázek 4.24: Pohybová úloha

Nyní úloha k zamyšlení.

3. **Applet 4.5.3:** Cesta do práce

   Každé ráno jezdí Veronika autobusem do práce z Bechyně do Českých Budějovic. Její cestu popisuje graf v závislosti dráhy na čase. Otevřete si applet 4.5.3 a zamyslete se nad otázkou: *Co lze z grafu vyčíst?*



Obrázek 4.25: Cesta do práce

Co vás mohlo napadnout: Jak dlouho trvá cesta do Českých Budějovic? Jakou vzdálenost

Veronika ujede? Jak dlouho a po kolika kilometrech stojí autobus na zastávce? Kdy jede rychleji, a kdy pomaleji?

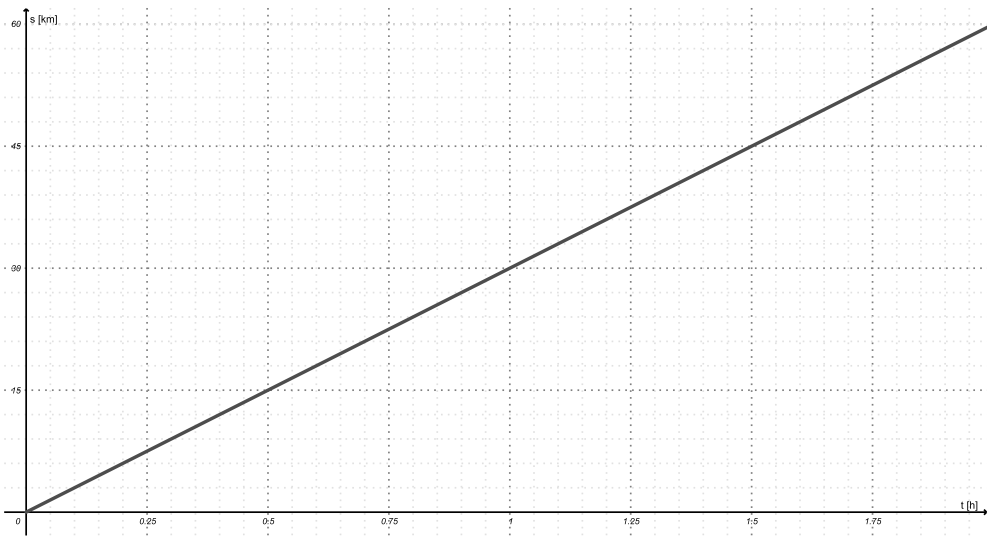
4. Úkol pro vás

Sestrojte grafické znázornění dráhy na čase z místa vašeho bydliště do školy nebo k babičce. Použijte k tomu program GeoGebra.

5. Applet 4.5.4

Cyklista jede průměrnou rychlostí 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Pomocí appletu zjistěte kolik km ujede za:

a) $0,5$ hod, b) 45 minut, c) $1,5$ hod, d) $1,75$ hod.



Obrázek 4.26: Cyklista

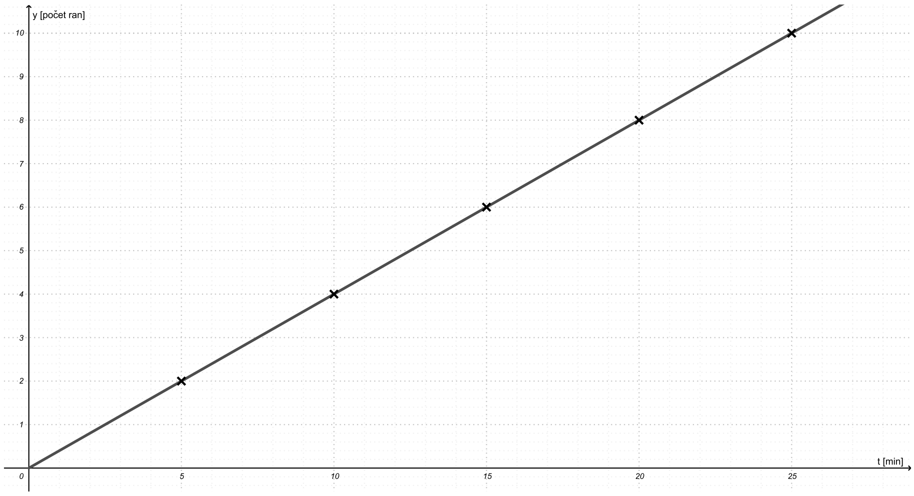
6. Applet 4.5.5: Střelba

Závodník ve střelbě pistolí nastřílí za $2,5$ hodiny 60 ran (střílí rovnoměrně). Sestavte tabulku pro počty vystřelených ran za 5, 10, 15, 20 a 25 minut a sestrojte graf této závislosti. [3]

Řešení: Jistě jste si všimli, že jde o přímou úměrnost, proto

x	5	10	15	20	25	150
y	2	4	6	8	10	60

V matematickém programu GeoGebra sestrojíme graf:



Obrázek 4.27: Střelba

7. Applet 4.5.6: Rychlost zvuku

Rychlost zvuku ve vzduchu při tepltě 0 °C je 331 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Zvýší-li se teplota vzduchu o 1 °C, zvýší se rychlost zvuku o 0,6 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

a) Zapište rovnici vyjadřující závislost rychlosti zvuku c na teplotě t, která se mění od 0 °C do 22 °C a sestrojte graf téfo funkce.

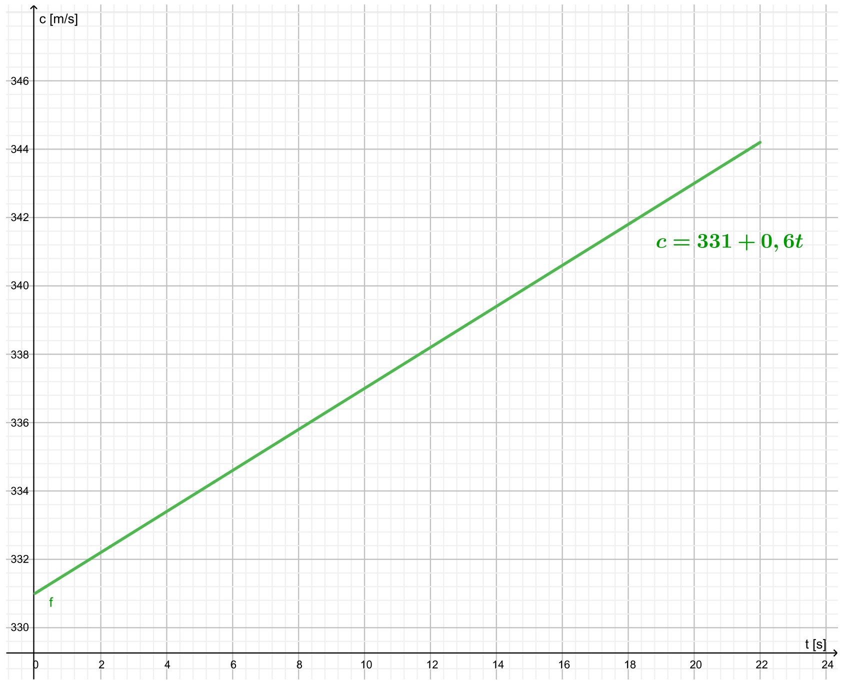
b) Z rovnice vypočítejte rychlost zvuku při těplotě 22 °C.

c) Určete, při jaké teplotě je rychlost zvuku ve vzduchu 340 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

d) Své výsledky porovnejte s grafem funkce, který jste sestrojili v bodě a). [7]

Řešení:

a) $c = 331 + 0,6t,\ t \in \langle 0, 22 \rangle$ [*]



Obrázek 4.28: Rychlost zvuku

b) Do rovnice $c = 331 + 0,6t$ za t dosadíme hodnotu 22, tím zjistíme rychlost zvuku.

$$\begin{aligned} c &= 331 + 0,6 \cdot 22, \\ c &= 344,2. \end{aligned}$$

Rychlost zvuku při teplotě 22 °C je 344,2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

c) Nyní do rovnice [*] dosadíme za c hodnotu 340$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

$$\begin{aligned} 340 &= 331 + 0,6t, \\ t &= 15. \end{aligned}$$

Rychlost zvuku 340 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ je při teplotě 15 °C.

8. Applet 4.5.7: Sud

Ze sudu, v němž je 150 litrů vody, vyteče každou minutu 30 litrů. Zapište rovnici funkce, která určuje objem vody v sudu v závilosti na době vypouštění. Stanovte též definiční obor této funkce a sestrojte graf. [7]

Řešení: Rovnice je:

$$y = 150 - 30x.$$

kde x ... čas [min], y ... objem vody [l].
Definiční obor je $\langle 0, 5\rangle$ a obor hodnot je $\langle 0, 150\rangle$.

Z rovnice zjistíme, kolik vody vyteče ze sudu každou minutu během 5 minut.

x	0	1	2	3	4	5
y	150	120	90	60	30	0

Nyní sestrojíme graf.

Obrázek 4.29: Sud

Kapitola 5

Nepřímá úměrnost

5.1 Co je to nepřímá úměrnost?

Mějme dvě veličiny. Pokud budou nepřímo úměrné, musí platit, že když jednu veličinu **zvětšíme** (zmenšíme) x krát, tak druhou **zmenšíme** (zvětšíme) x krát.

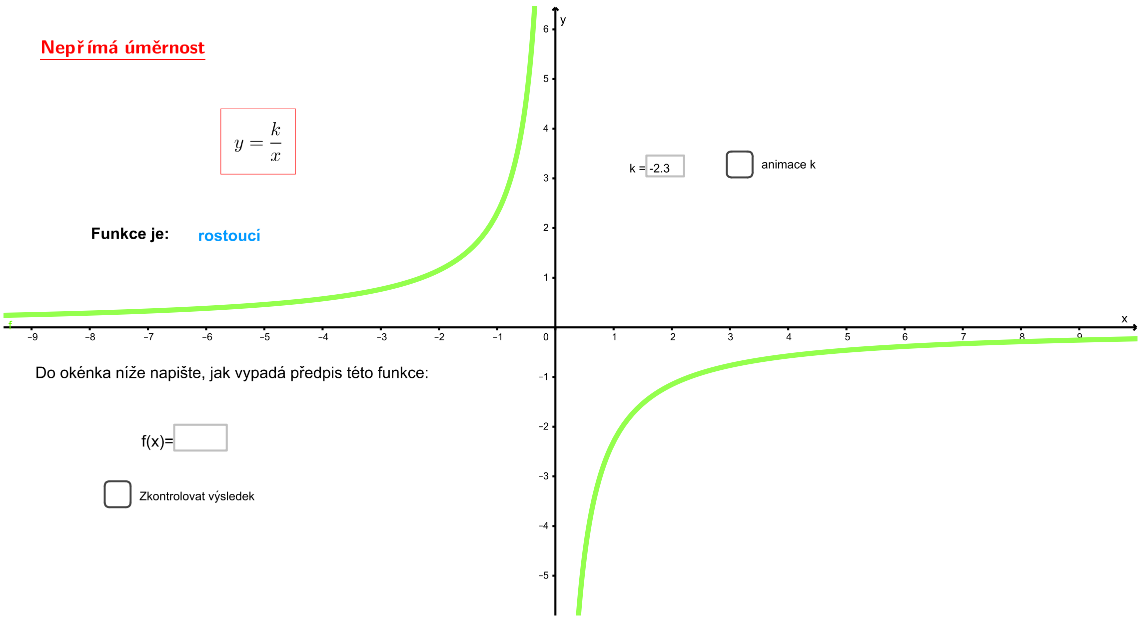
Uveďme si dva příklady:

1. Čím rychleji řidič osobního automobilu pojede, tím méně času bude potřebovat k ujetí dané vzdálenosti.

2. Čím víc pracovníků bude pracovat, tím méně budou potřebovat času k vykonání zadané práci.

1. **Applet 5.1.1**

   V appletu 5.1.1 prozkoumejte vlasntosti nepřímé úměrnosti.



Obrázek 5.1: Nepřímá úměrnost

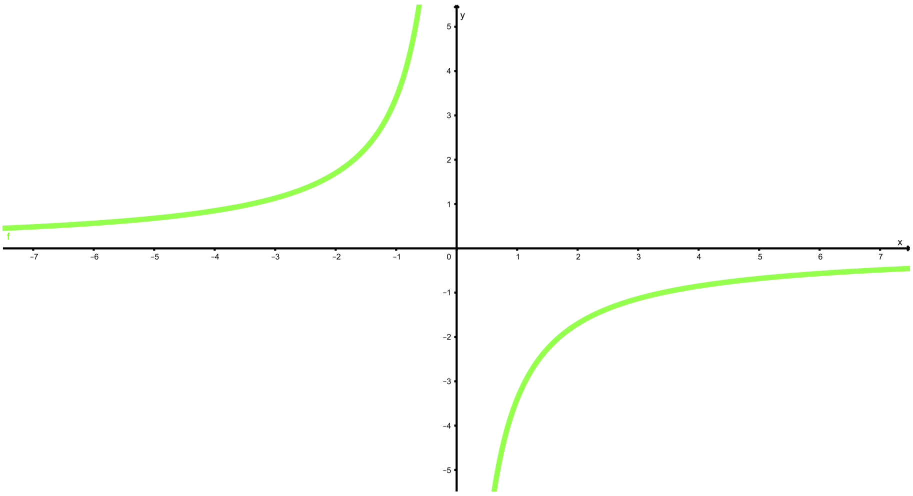
Nepřímou úměrnost nazýváme každou funkci, která je dána předpisem $y = \frac{k}{x}$, $k \in R - \{0\}$, $x \neq 0$. Kde x je nezávisle proměnná, y závisle proměnná a k je koeficient nepřímé úměrnosti.

Grafem nepřímé úměrnosti je křivka zvaná **HYPERBOLA**, nebo její část.

Přehled základních vlastností pro:

a) $k < 0$

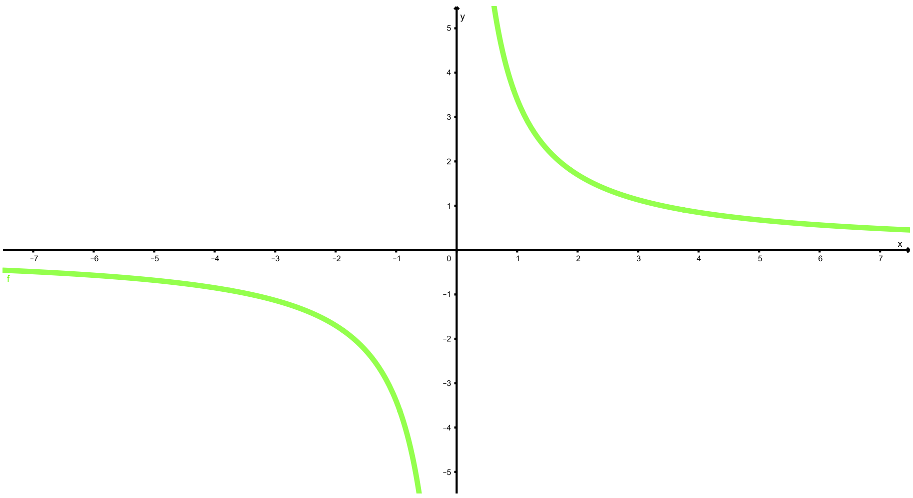
$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $H(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Je lichá. Není ani shora, ani zdola omezená. Je rostoucí pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$. Je prostá. Nemá maximum, ani minimum. Je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$.



Obrázek 5.2: Funkce NÚ: $k < 0$

b) $k > 0$

$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ $H(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Je lichá. Není ani shora, ani zdola omezená. Je klesající pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$. Je prostá. Nemá maximum, ani minimum. Je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$.

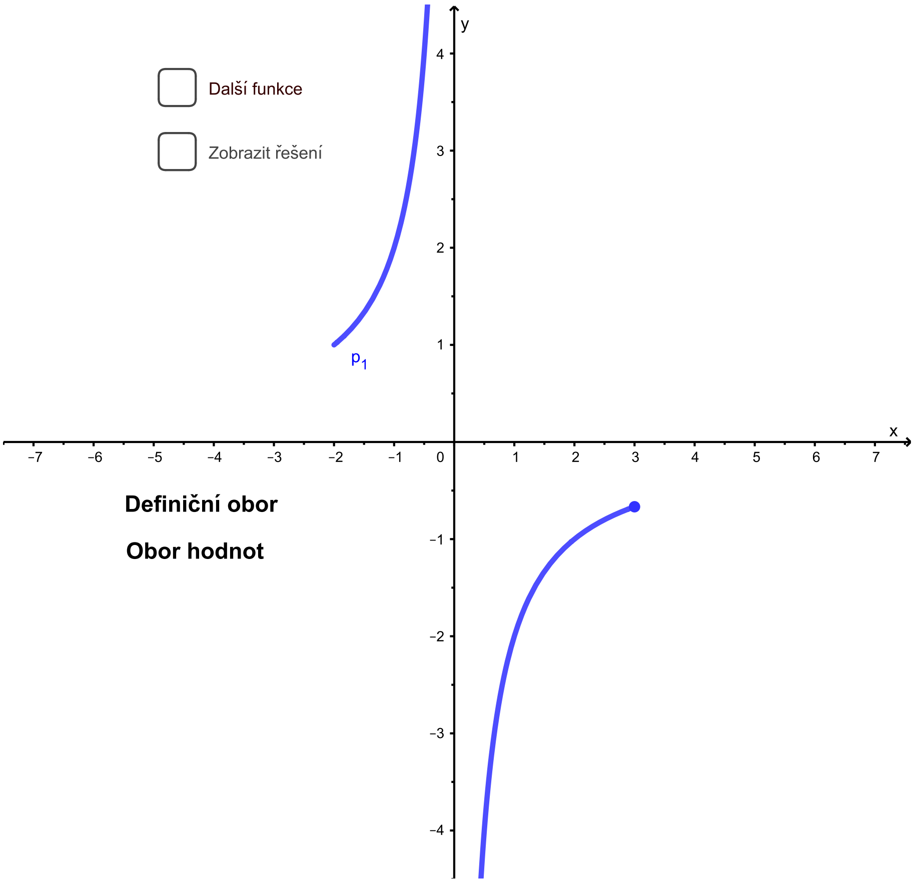


Obrázek 5.3: Funkce NÚ: $k > 0$

5.2 Definiční obor a obor hodnot

1. Applet 5.2.1

Zjistěte definiční obory a obory hodnot v appletu 5.2.1. Správné řešení zobrazíte zaškrutnutím okénka "Zobrazit řešení."



Obrázek 5.4: Definiční obor a obor hodnot

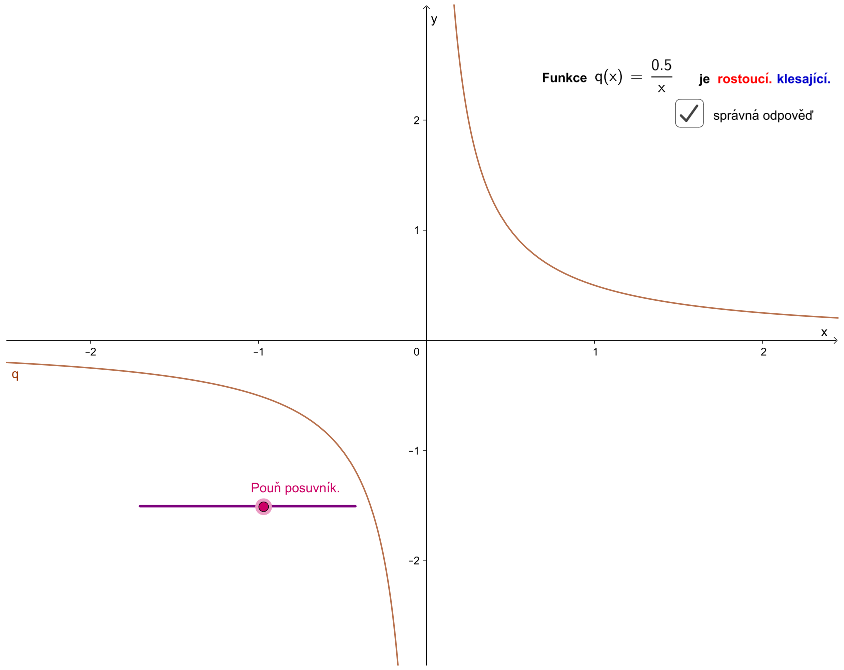
5.3 Monotonie nepřímé úměrnosti

1. Applet 5.3.1

Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou roustoucí, a které klesající na svých dvou částech:

$y = -\frac{2}{x}$	$y = \frac{5}{x}$	$y = -\frac{3}{x}$	$y = \frac{2}{x} - 1$
$y = \frac{0.5}{x}$	$y = \frac{2}{x}$	$y = -\frac{2}{x} + 1$	$y = -\frac{3}{x} - 1$

Správnost řešení ověřte kliknutím na tlačítko: "správná odpověď."



Obrázek 5.5: Monotonie

5.4 Grafy nepřímé úměrnosti

1. Applet 5.4.1:

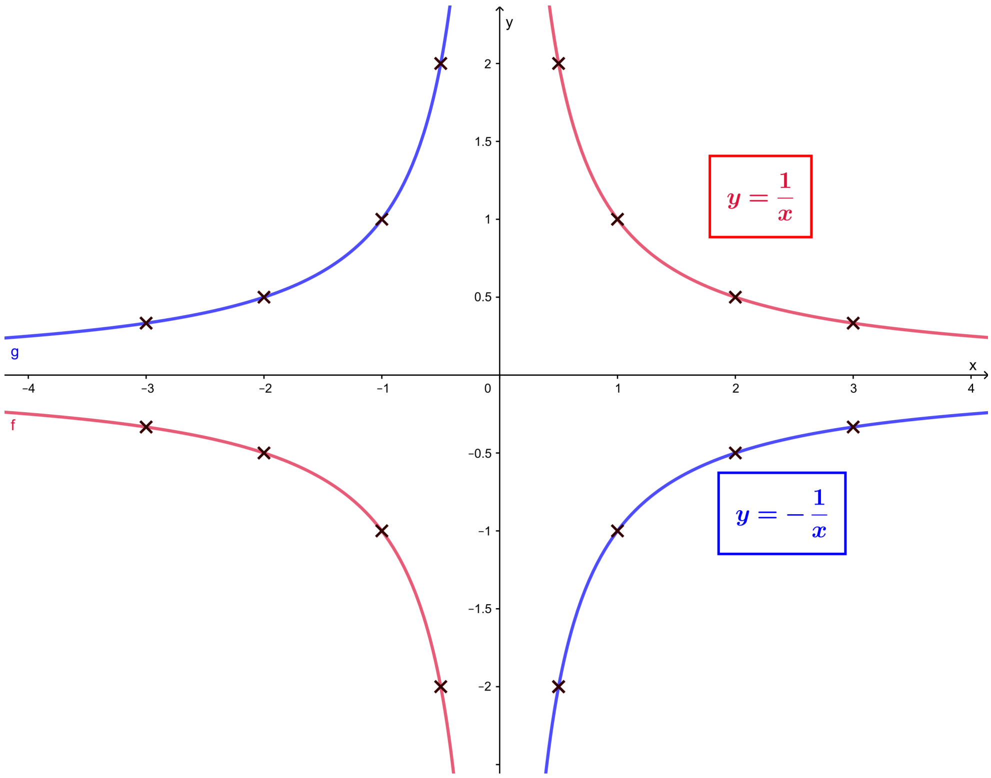
Sestrojte grafy funcí $f : y = \frac{1}{x}$ a $g : y = -\frac{1}{x}$.

<u>Řešení:</u>

Nejprve sestrojíme tabulku.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
hodnoty fce f	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
hodnoty fce g	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$

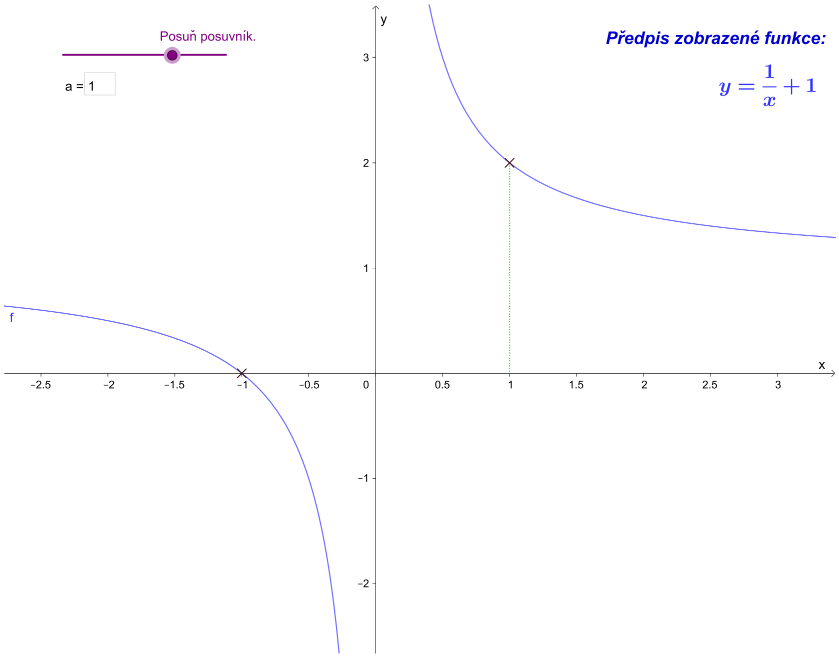
Dále znázorníme body v kartézské soustavě souřadnic a spojíme je.



Obrázek 5.6: Grafy nepřímé úměrnosti

2. Applet 5.4.2: Posunutí funkce 1

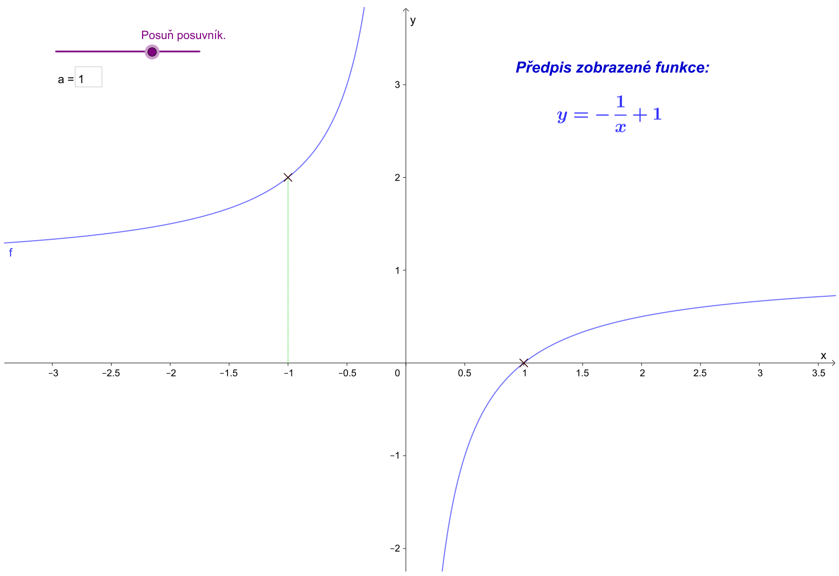
V appletu pozorujte, jak se posouvá funkce $y = \frac{1}{x} + a$, kde $-3 \leq a \leq 3$.



Obrázek 5.7: Posunutí 1

3. Applet 5.4.3: Posunutí funkce 2

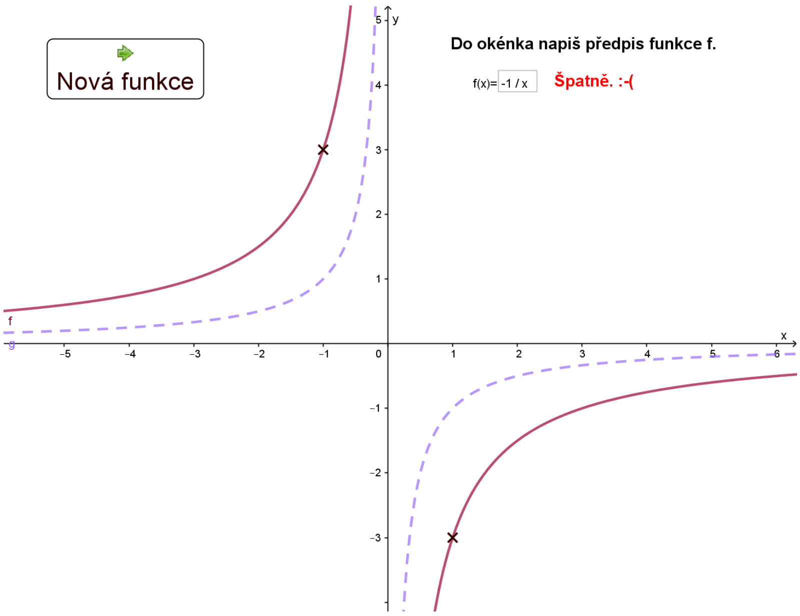
V appletu pozorujte, jak se posouvá funkce $y = -\frac{1}{x} + a$, kde $-3 \leq a \leq 3$.



Obrázek 5.8: Posunutí 2

4. Applet 5.4.4: Hledání funkce 1

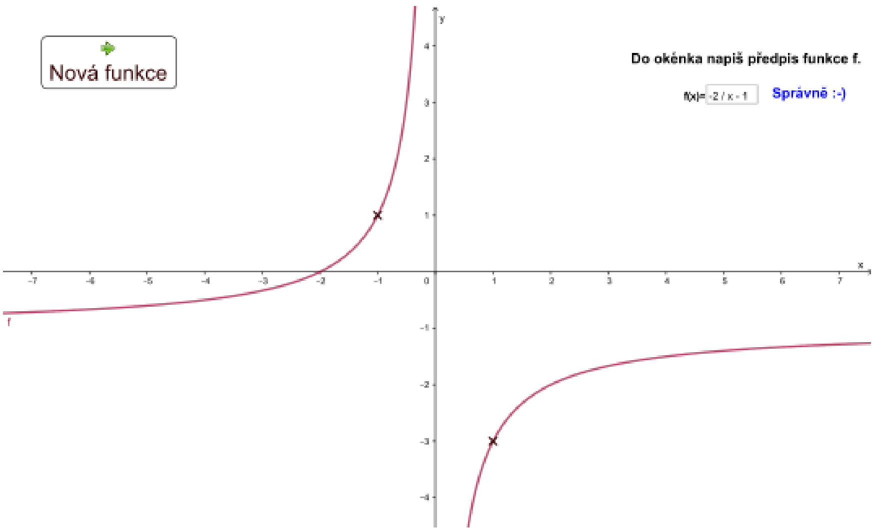
V appletu do okénka: "$f(x) =$"napište předpis zobrazené funkce. Pokud jej napíšete správně, zmáčkněte na tlačítko "Nová funkce."



Obrázek 5.9: Hledání funkce 1

5. Applet 5.4.5: Hledání funkce 2

V appletu do okénka: "$f(x) =$"napište předpis zobrazené funkce. Pokud jej napíšete správně, zmáčkněte na tlačítko "Nová funkce."

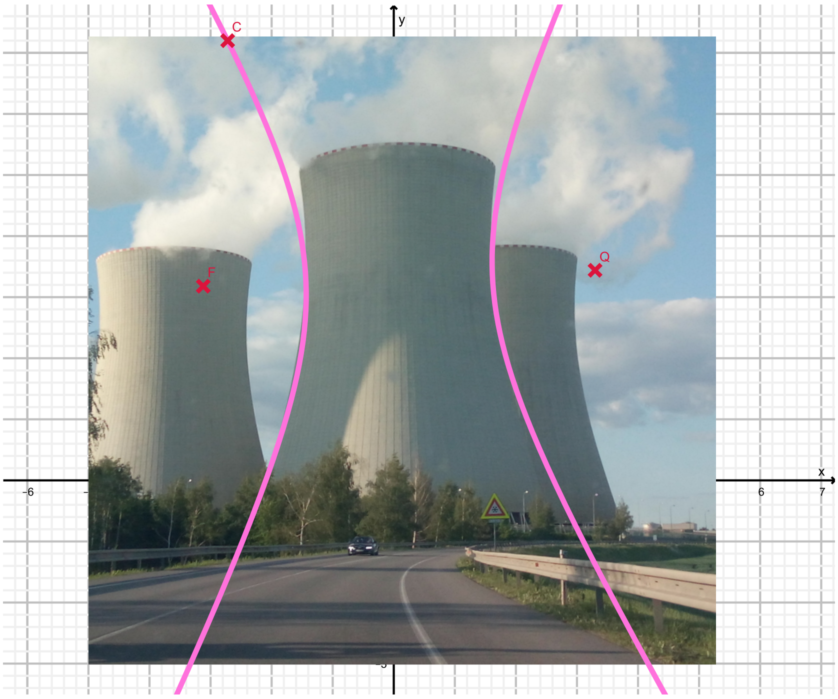


Obrázek 5.10: Hledání funkce 2

5.5 Nepřímá úměrnost v praxi

1. Applet 5.5.1

Posuňte body tak, aby jste našli funkci, která se shoduje s tvarem chladící věže jaderné elektrárny Temelín.



Obrázek 5.11: Temelín

2. Applet 5.5.2

V appletu 5.5.2 rozhodněte, zda se jedná o **přímou** nebo **nepřímou** úměrnost. Zda jste odpověděli správně, zjistíte kliknutím na tlačítko PÚ nebo NÚ.

a) 20 litrový sud se naplní vodou za 40 minut. Za jak dlouho se naplní 60 litrový sud?

b) Jeden rohlík stojí 1,90 Kč. Kolik stojí dva rohlíky?

c) Vojta zaplatí za kino 180 Kč. Kolik korun zaplatí, když zaplatí i za svoji přítelkyní?

d) Aneta s Patrikem uklidí pokoj za 3 hodiny. Jak dlouho jim to bude trvat, když jim s úklidem pomůže ještě maminka?

e) 24 čerpadel vyčerpá nádrž za 5 hodin. Jak dlouho by to trvalo 10 čerpadlům?

f) Otec vymaluje pokoj za 1 hodinu. Za jak dlouho vymaluje pokoj, když mu přijde na pomoc jeho syn a bude pracovat se stejným výkonem jako otec?

g) Chodec ujde za 10 minut 1 km. Kolik ujde za 20 minut, když půjde stejným tempem?

h) Závislost hustoty tělesa na jeho hmotnosti.

i) Závislost spotřeby nafty na počtu ujetých kilometrů. Předpokládáme-li, že spotřeba paliva zůstává stejná.

j) Závsilost objemu tělesa na jeho hustotě.

Kapitola 6

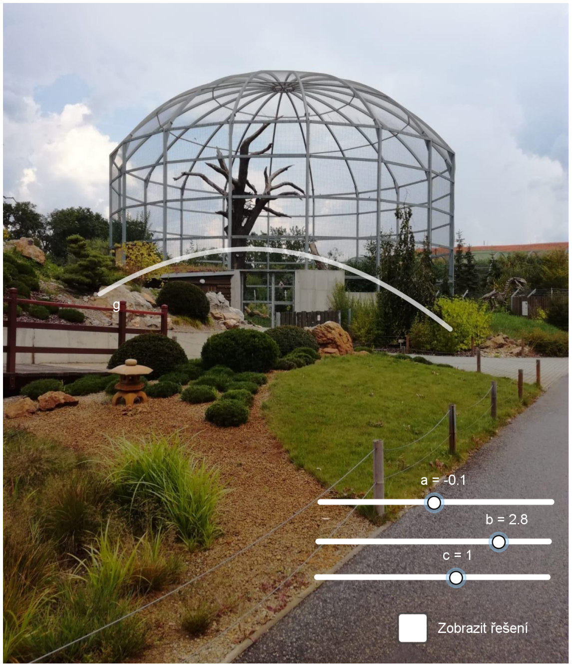
Kvadratické funkce

6.1 Co je to kvadratická funkce?

Kde jste se mohli setkat s kvadratickou funkcí? Nic vás nenapadá? Budete se divit, kvadratická funkce je na každém rohu. Pojďme se spolu podívat na fotografie a pomocí GeoGebry graf kvadratické funkce zvýrazníme.

1. Applet 6.1.1

Pomocí posuvníku najděte funkci, která se shoduje s tvarem klece.



Obrázek 6.1: Klec

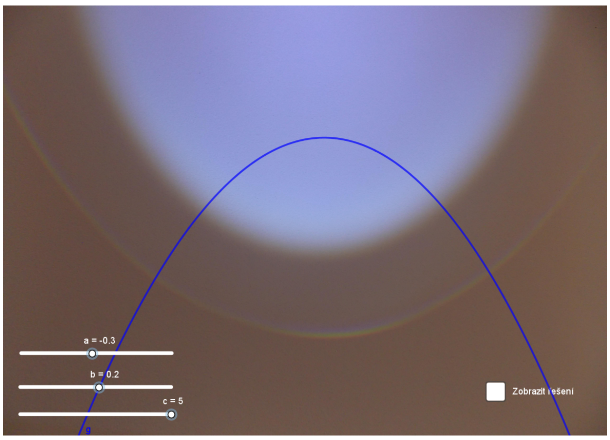
2. Applet 6.1.2

Pomocí posuvníku najděte funkci, která se shoduje s tvarem podstavce, ze kterého tryská voda.

Obrázek 6.2: Kašna

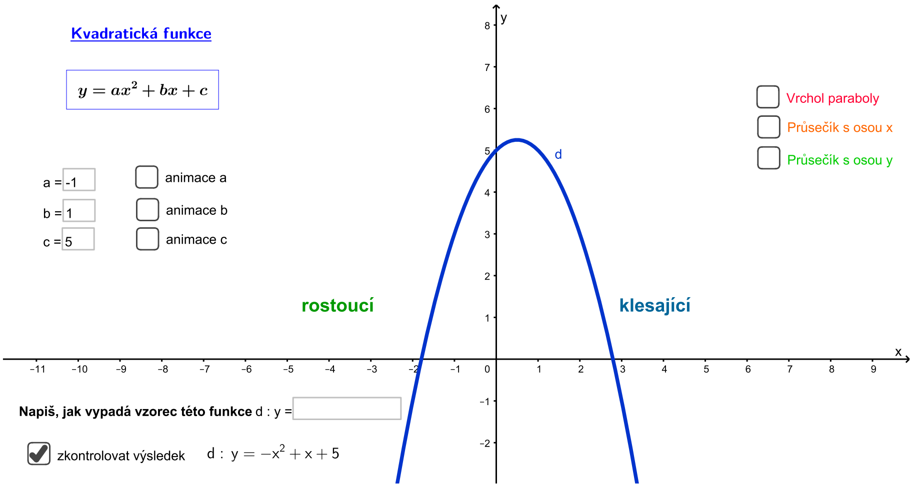
3. Applet 6.1.3

Pomocí posuvníku najděte funkci, která se shoduje s tvarem světla.



Obrázek 6.3: Světlo

Jistě jste si všimli, že některé fotografie, spíše kvadratické funkce připomínají. Otevřete si nyní **applet 6.1.4** a pojďme prozkoumat kvadratické funkce a jejich vlastnosti.



Obrázek 6.4: Applet 6.1.4

Cílem tohoto ***appletu 6.1.4*** *je získat vědomosti o kvadratických funkcích. Pomocí animací můžeme zjistit, jak se daná funkce mění a jaké má vlastnosti v různých situacích.*

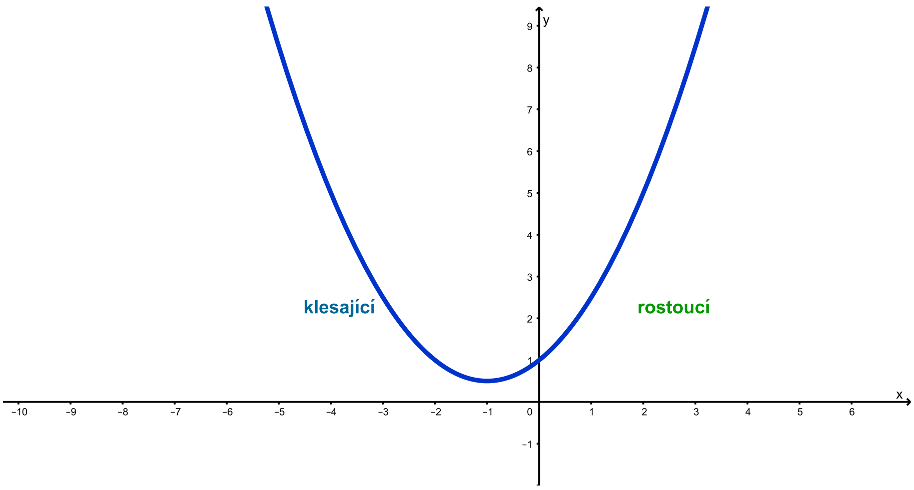
Kvadratickou funkci nazýváme každou funkci, která je dána předpisem: $f : y = ax^2 + bx + c$, kde $a \in$ R - $\{0\}$, b, $c \in$ R. Grafem je **parabola** s osou souměrnosti $o \| y$. Průsečík osy o s parabolou se nazývá **vrchol** paraboly: V[-$\frac{b}{2a}$; $c - \frac{b^2}{4a}$].

Nyní pojďme prozkoumat vlastnosti kvadratické funkce. Jak bude vypadat graf, když $a > 0$ nebo $a < 0$. A proč jsme v předchozím odstavci vyřadili možnost, aby $a = 0$?

<u>Přehled základních vlastností:</u>

1. $a > 0$

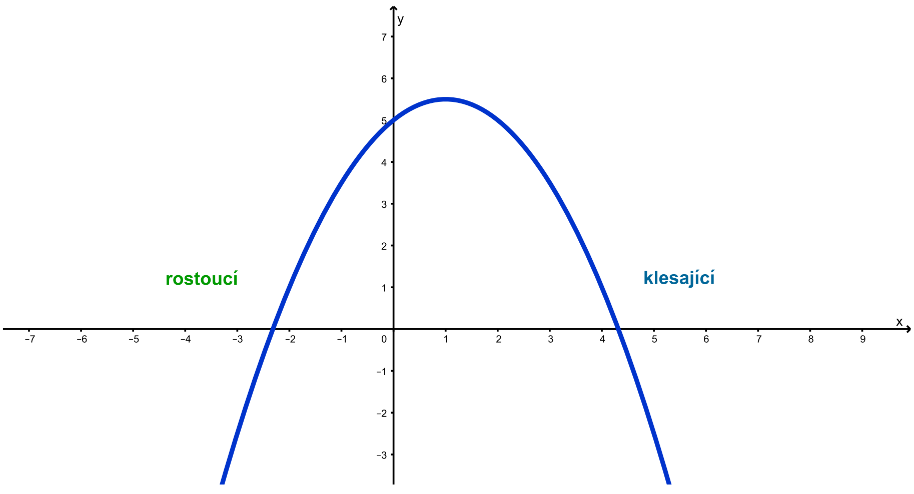
D(f) $= (-\infty, \infty)$, H(f) $= \langle c - \frac{b^2}{4a}, \infty)$. Pokud $b = 0$ je funkce sudá, jinak není ani sudá ani lichá. Omezená zdola. Rostoucí pro $x \in \langle -\frac{b}{2a}, \infty)$. Klesající pro $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a} \rangle$. Minimum v bodě $\langle -\frac{b}{2a} ; c - \frac{b^2}{4a} \rangle$. Není prostá. Je spojitá v R.



Obrázek 6.5: Kvadratická funkce: $a > 0$

2. $a < 0$

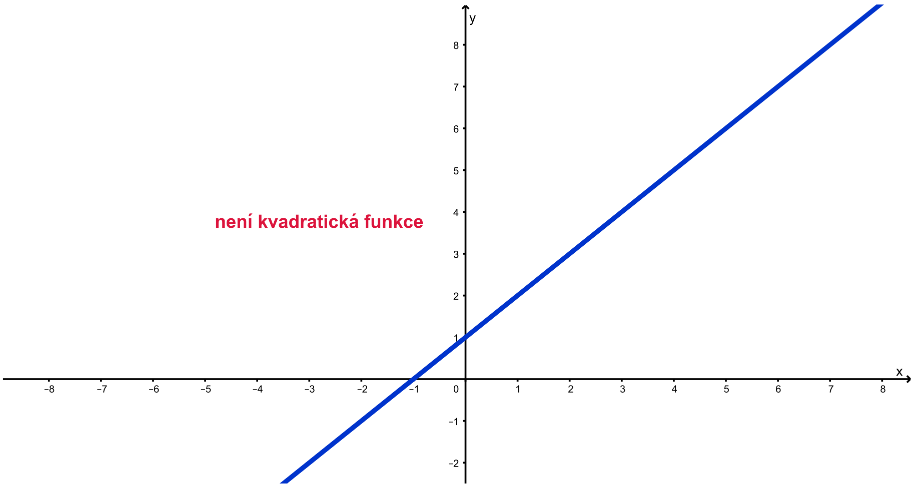
D(f) $= (-\infty, \infty)$, H(f) $= (-\infty, c - \frac{b^2}{4a}\rangle$. Pokud $b = 0$ je funkce sudá, jinak není ani sudá ani lichá. Omezená shora. Rostoucí pro $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a}\rangle$. Klesající pro $x \in \langle -\frac{b}{2a}, \infty)$. Maximum v bodě $\langle -\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\rangle$. Není prostá. Je spojitá v R.



Obrázek 6.6: Kvadratická funkce: $a < 0$

3. $a = 0$

Nejedná se o kvadratickou funkci, ale o lineární s předpisem $y = ax + b$.

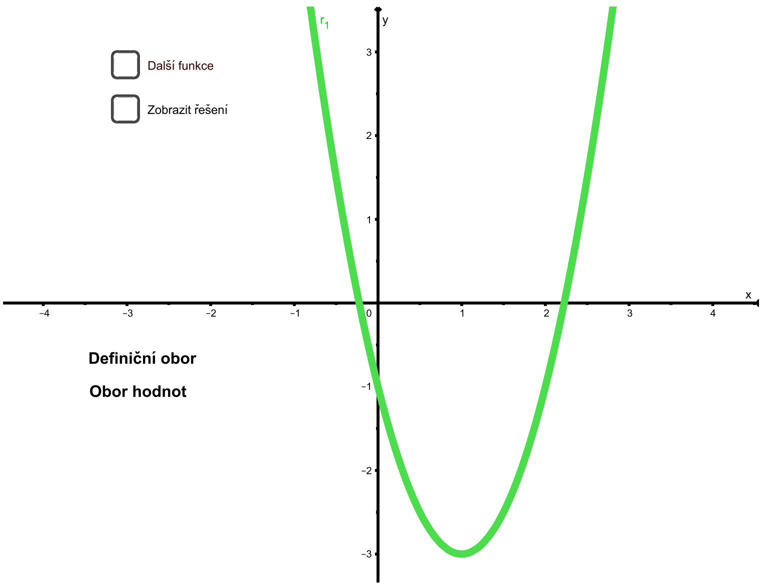


Obrázek 6.7: Případ: $a = 0$

6.2 Definiční obor a obor hodnot

1. Applet 6.2.1

Zjistěte definiční obory a obory hodnot v tomto appletu.

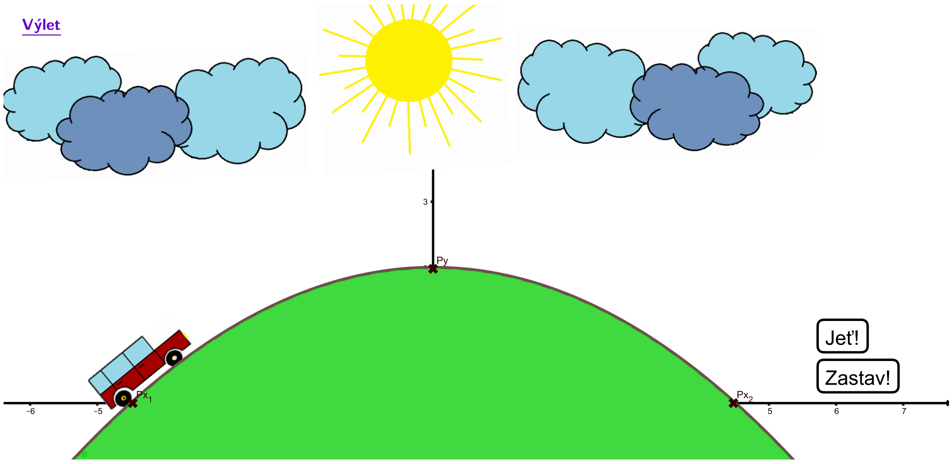


Obrázek 6.8: Definiční obor a obor hodnost

6.3 Monotonie kvadratické funkce

1. **Applet 6.3.1:** Jedeme na výlet autem

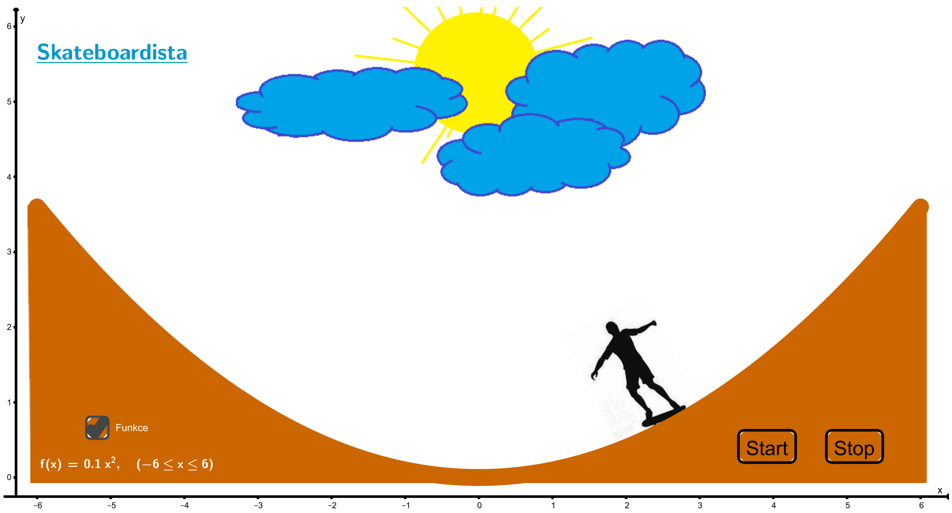
   Vojta se svými kamarády se rozhodl jet na výlet do Krkonoš. Popište část jeho cesty z hlediska monotonie funkce trajektorie jeho cesty.



Obrázek 6.9: Výlet

2. **Applet 6.3.2:** Skateboardista

   Na rampě jezdí Petr na skejtu. Zjistěte, po které funkci skejtuje a zkoumejte vlastnosti této funkce.

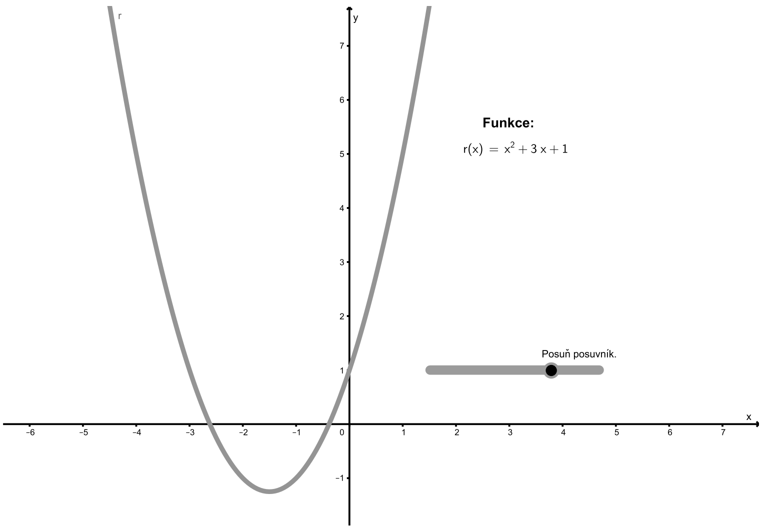


Obrázek 6.10: Skateboardista

3. Applet 6.3.3: Monotonie

Pomocí appletu 6.3.3 rozhodněte, v jakém intervalu jsou zadané funkce rostoucí nebo klesající.

$y = 2x^2 + x$	$y = x^2 - 2x$	$y = x^2 + x + 1$	$y = -x^2 + x - 1$
$y = -x^2 + x$	$y = -x^2 + 2x$	$y = x^2 + 3x + 1$	$y = -x^2 - 3x$



Obrázek 6.11: Monotonie

6.4 Grafy kvadratických funkcí

1. Applet 6.4.1

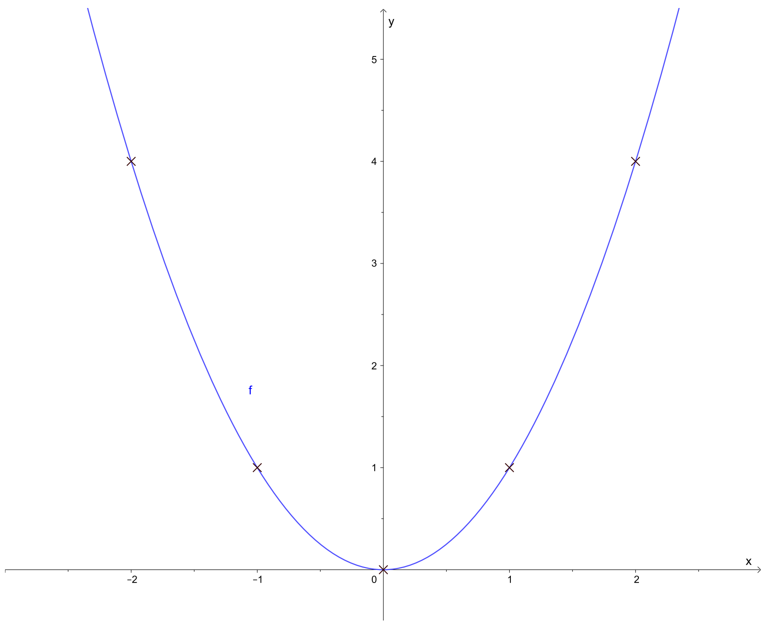
Narýsujte graf funkce $f : y = x^2$.

Řešení:

- Pomocí programu GeoGebra v pravoúhlé soustavě souřadnic znázorníme body z tabulky, které jsme zjistili po dosazení do zadaného předpisu.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

- Dále zvolíme tlačítko: ”*Kuželosečka daná pěti body*,”vybereme pět bodů a zobrazí se nám hledaná funkce $y = x^2$.



Obrázek 6.12: Funkce $y = x^2$

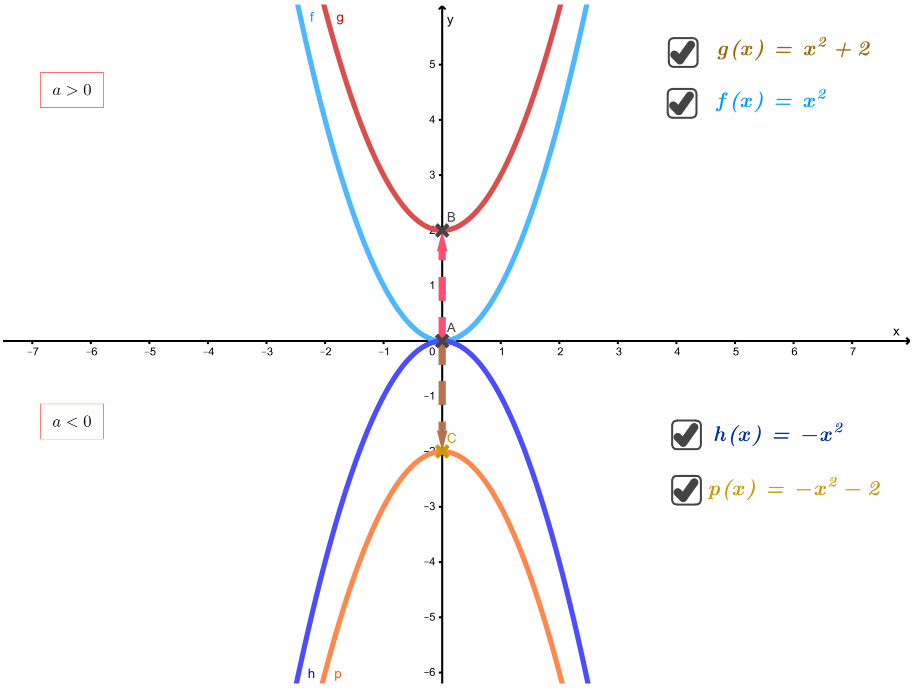
Poznámka: V programu GeoGebra lze rovnou vykreslit funkci přes zadání předpisu funkce do řádku ”Vstup”.

2. Applet 6.4.2: Posunutí

Sestrojte grafy funkcí:

$y = x^2$, $\quad y = x^2 + 2$, $\quad y = -x^2$, $\quad y = -x^2 - 2$.

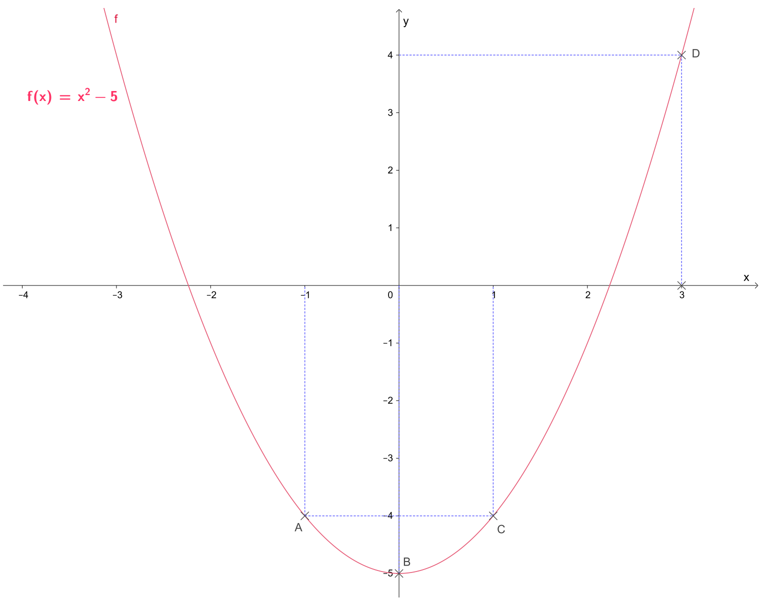
Řešení:



Obrázek 6.13: Posunutí

3. Applet 6.4.3

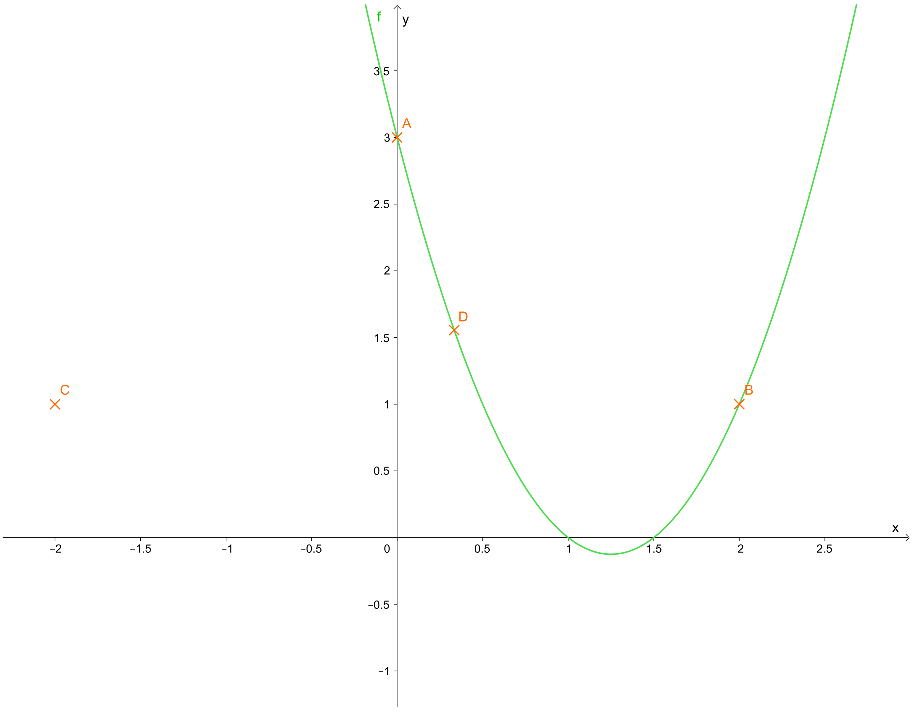
Určete hodnoty kvadratické funkce $y = x^2 - 5$ v bodech $x = -1; 0; 1; 3$.



Obrázek 6.14: Funkce $y = x^2 - 5$

4. Applet 6.4.4

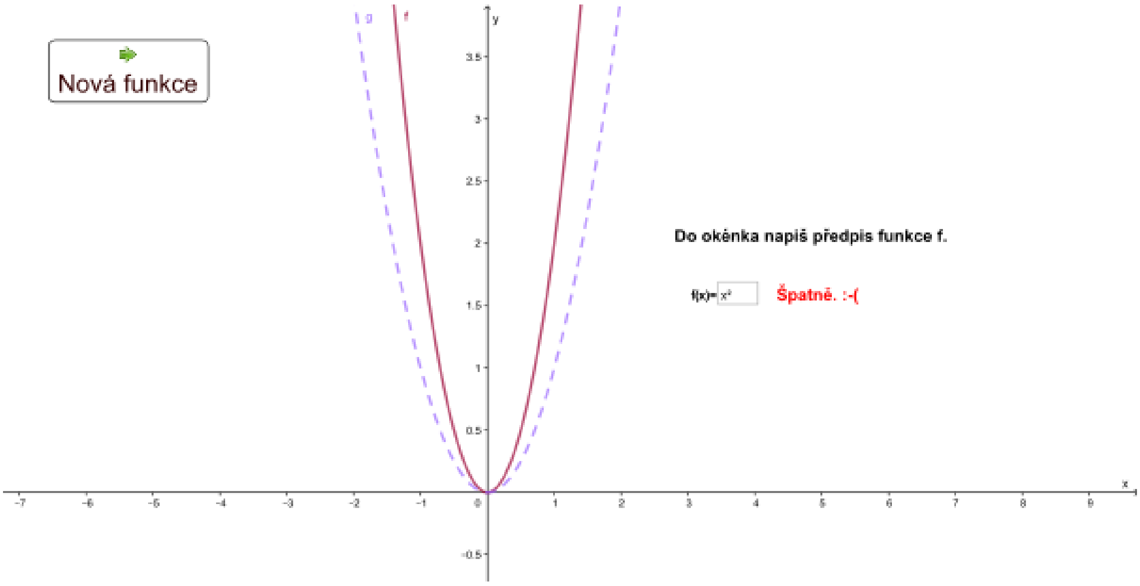
Je dána kvadratická funkce $f : y = 2x^2 - 5x + 3$. Rozhodněte, zda body leží na funkci f: $A = [0, 3]$, $B = [2, 1]$, $C = [-2, 1]$, $D = [\frac{1}{3}, \frac{14}{9}]$.



Obrázek 6.15: Kvadratická funkce

5. Applet 6.4.5: Nová funkce 1

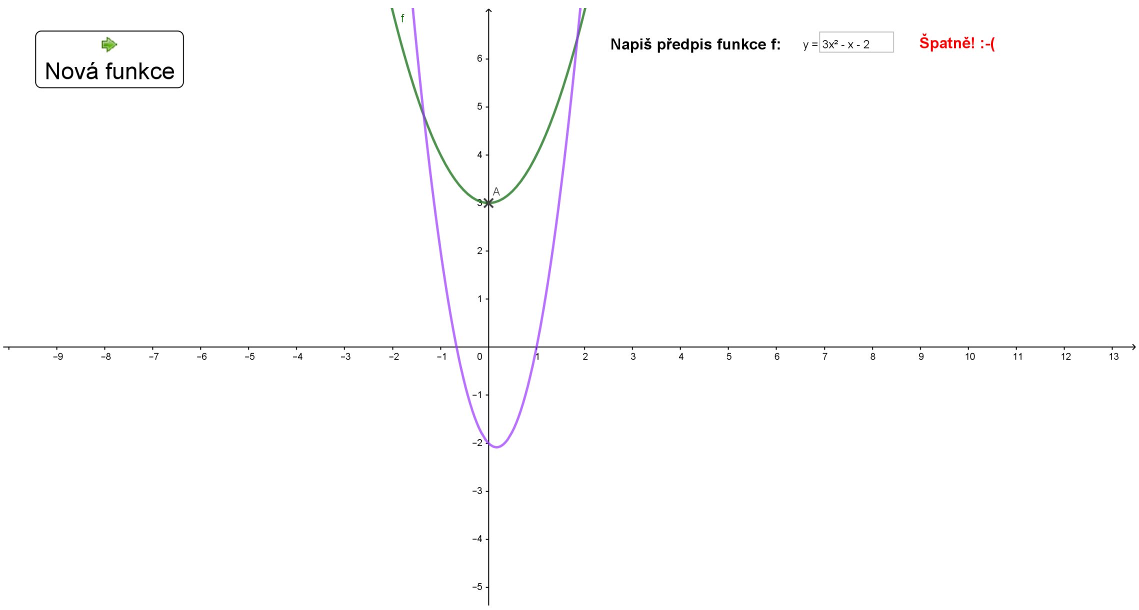
V appletu 6.4.5 napište do okénka předpis funkce f, pokud jej napíšete správně, zmáčkněte na tlačítko: "Nová funkce"a zkuste to znova.



Obrázek 6.16: Nová funkce 1

6. Applet 6.4.6: Nová funkce 2

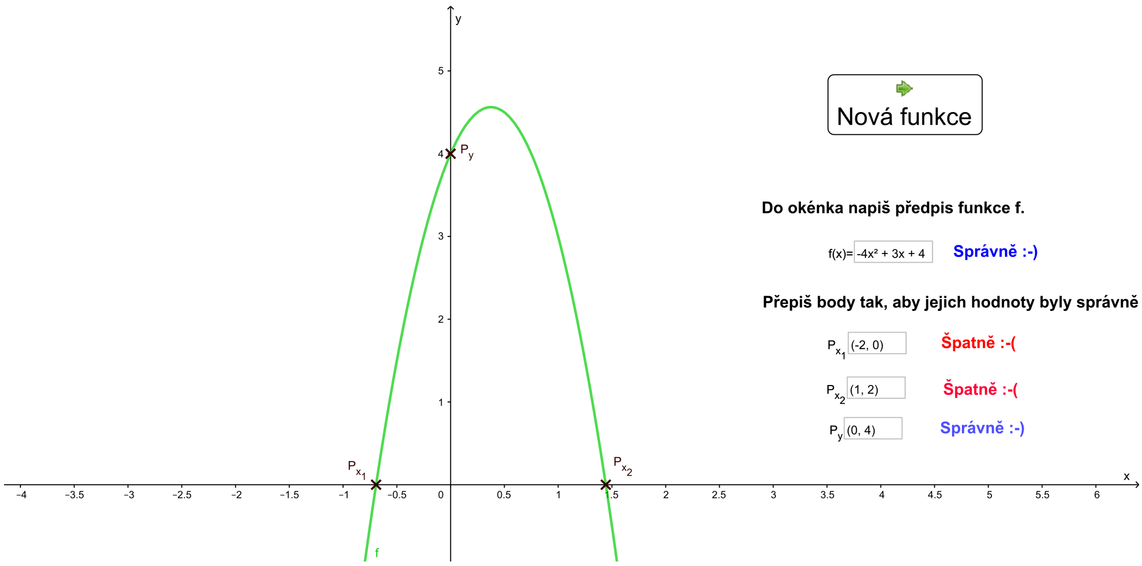
V appletu 6.4.6 napište do okénka předpis funkce f, pokud jej napíšete správně, zmáčkněte na tlačítko: ”Nová funkce”a zkuste to znova.



Obrázek 6.17: Nová funkce 2

7. Applet 6.4.7: Nová funkce 3

Napište do okénka předpis funkce f a průsečíky s osou x a y. Pokud jste hodnoty napsali správně, zmáčkněte tlačítko "Nová funkce."V jakých případech se nejedná o kvadratickou funkci? Své tvrzení odůvodněte.



Obrázek 6.18: Nová funkce 3

8. Applet 6.4.8: Rovnice

Určete rovnici kvadratické funkce $y = ax^2 + 1$ [**], jestliže její graf prochází bodem se souřadnicemi: A = [2,3], B = [1,4], C = [-2,8], D = [-5,2], E = [3,5], F = [4,-1] a funkci narýsujte.

Řešení:

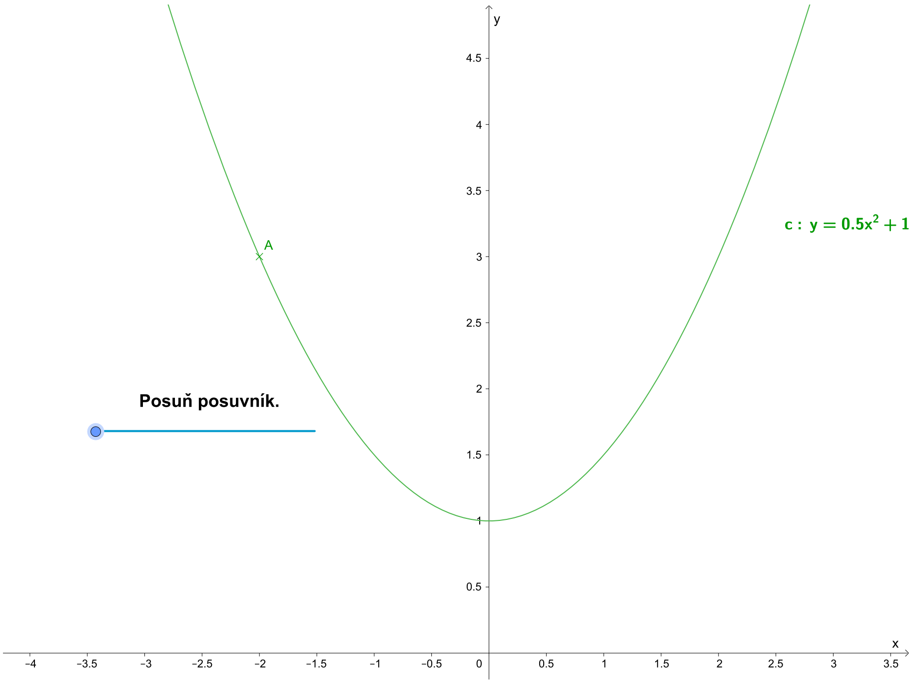
Abychom zjistili rovnici, musíme dosadit souřadnice bodu A do předpisu funkce a vyjádřit neznámou a. Pak se vrátíme zpět k předpisu [**] a dosadíme za a vypočítanou hodnotu.

Ukážeme si to pro bod A.

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + 1, \\ 3 &= 4a + 1, \\ 2 &= 4a, \\ a &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že hodnota $a = \frac{1}{2}$. Nyní ji dosadíme do [**] a tím získáme hledanou rovnici, která je $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Pomocí GeoGebry zobrazíme graf.



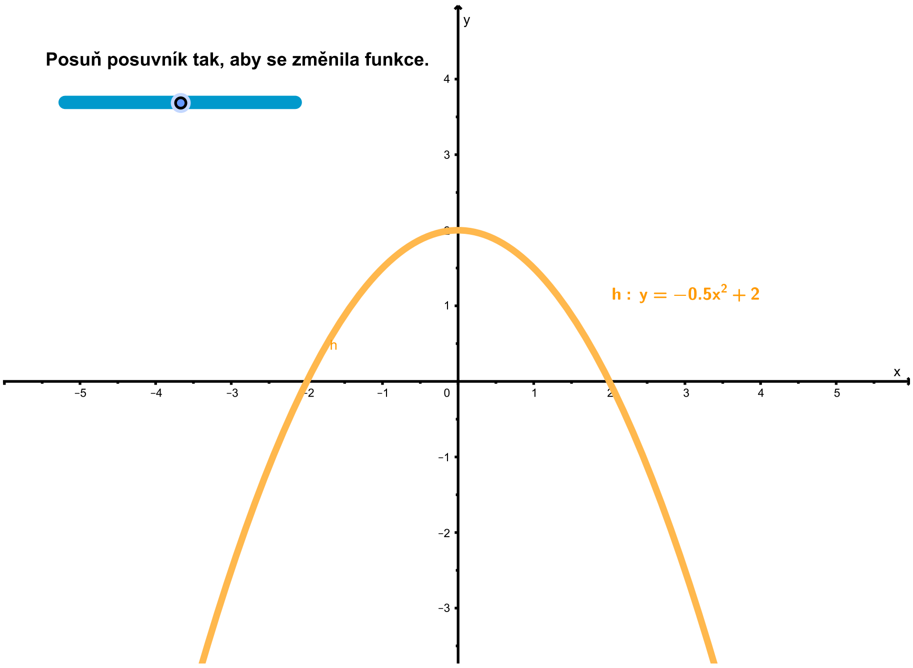
Obrázek 6.19: Rovnice

Řešení pro další body: pro B $y = 3x^2 + 1$, pro C $y = \frac{7}{4}x^2 + 1$, pro D $y = 0,04x^2 + 1$, pro E $y = 0,44x^2 + 1$ a pro F $y = -0,13x^2 + 1$.

9. Applet 6.4.9: Omezenost

Pomocí appletu rozhodněte, zda uvedené funkce mají maximum nebo minimum. Zvládli byste to sami?

$$y = x^2 + 1, \qquad y = x^2 + 3x + 2, \qquad y = -x^2 - 0,5x,$$
$$y = x^2 - x, \qquad y = -0,5x^2 + 2, \qquad y = 0,4x^2 + 3x,$$
$$y = 3 - 2x^2, \qquad y = -2x^2 + x + 3, \qquad y = -x^2 + 1.$$



Obrázek 6.20: Omezenost

10. Vrchol paraboly

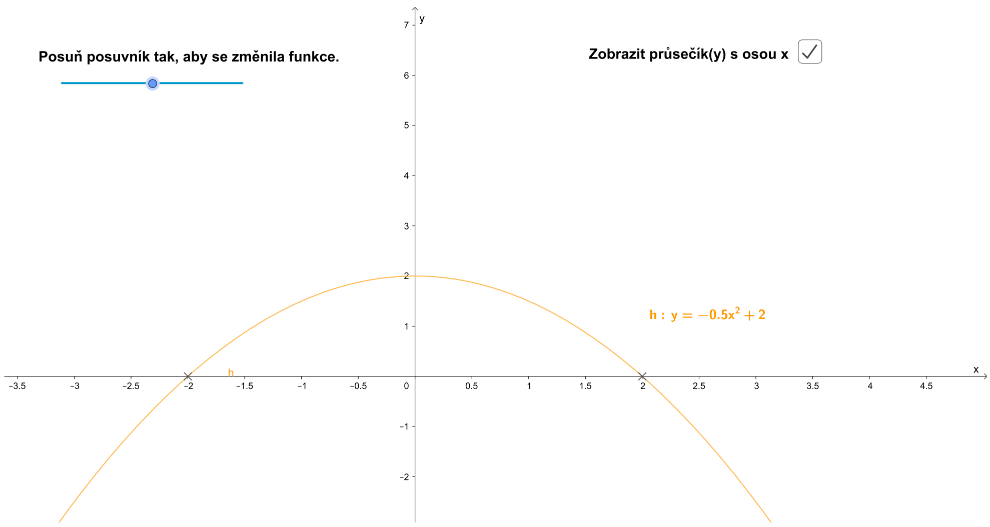
Určete souřadnice vrcholu paraboly, která je grafem funkce:

$$y = x^2 + 1, \qquad y = x^2 + 3x + 2, \qquad y = -x^2 - 0,5x,$$
$$y = x^2 - x, \qquad y = -0,5x^2 + 2, \qquad y = 0,4x^2 + 3x,$$
$$y = 3 - 2x^2, \qquad y = -2x^2 + x + 3, \qquad y = -x^2 + 1.$$

Určitě jste si všimli, že zadané funkce jsou stejné jako v předchozím příkladě. Otevřete si applet 6.4.9 a pojďme společně hledat extrémy těchto funkcí. Jak? Pomocí tlačítka "Extrémy"- vyberete funkci a zobrazí se extrémy.

11. Applet 6.4.10: Průsečík s osou x

Určete průsečíky paraboly s osou x.



Obrázek 6.21: Průsečíky s osou x

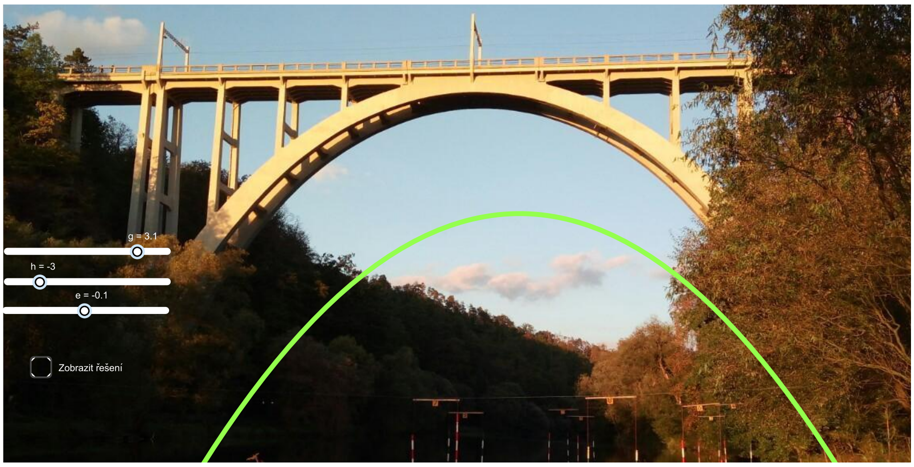
6.5 Kvadratická funkce v praxi

1. Applet 6.5.1: Bechyňský most

Bechyňský most se začal stavět už v roce 1926 a otevřen byl za 2 roky. Jedná se o železobetonový most přes řeku Lužnici, po kterém jezdí nejenom auta ale i elektrifikovaný vlak. Tento most je dlouhý 190,5 m a široký 8,9 m. Díky oblouku, který připomíná svým tvarem duhu, dostal most přezdívku bechyňká duha.

a) Pomocí posuvníků v appletu najděte funkci, která se shoduje s obloukem mostu.

b) Určete vlastnosti této funce.



Obrázek 6.22: Bechyňská duha

Kapitola 7

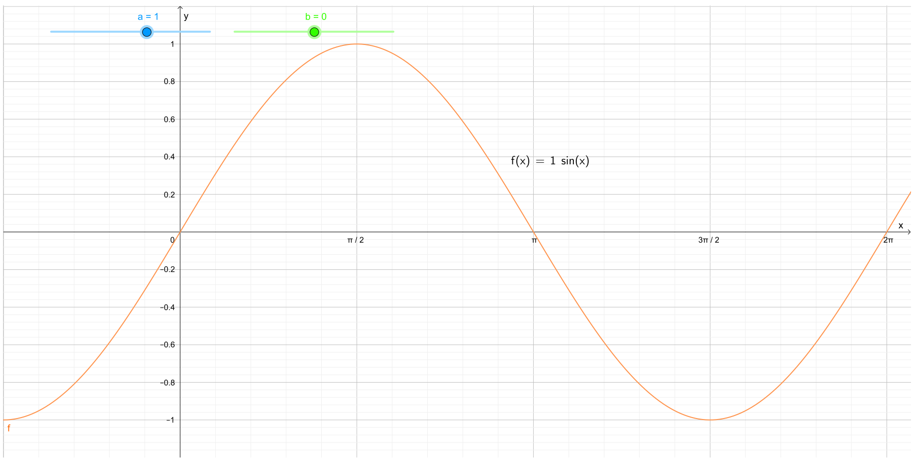
Goniometrické funkce

V 9. ročníku se žáci setkávají poprvé s funkcemi $\sin, \cos, \operatorname{tg}$ a cotg, definovanými pro ostrý úhel v pravoúhlém trojúhelníku. Teprve až na střední škole toto učivo probírají podrobněji.

Pomocí appletů pojďme prozkoumat vlastnosti těchto funkcí.

1. Applet 7.1: Funkce sinus

Pomocí posuvníků a, b zkoumejte, jak se mění funkce sinus daná předpisem $y = a \cdot \sin x + b$.



Obrázek 7.1: Funkce sinus

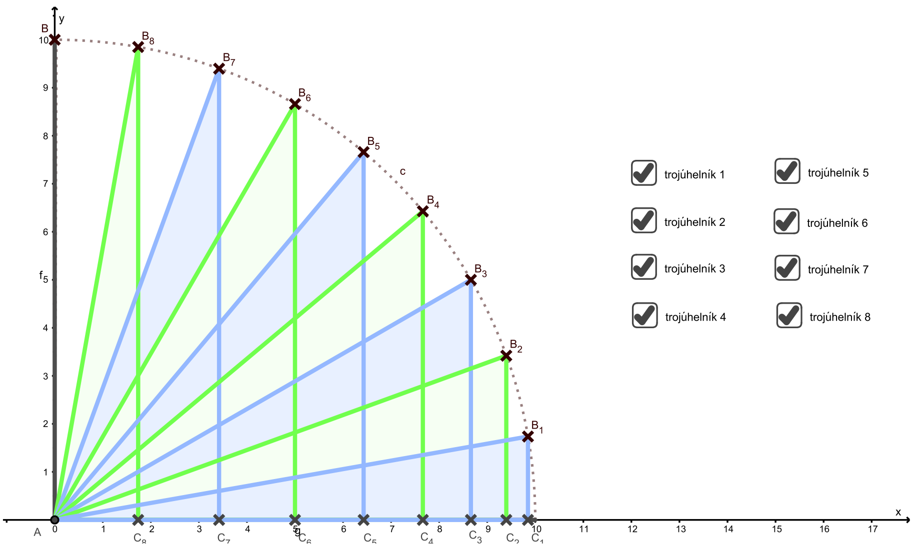
Grafem funkce sinus je křivka zvaná **SINUSOIDA**.

Přehled základních vlastností:

$D(f) = (-\infty, \infty); H(f) = \langle -1, 1 \rangle$. V intervalu $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle \wedge k \in Z$ je funkce **rostoucí** a v intervalu $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle \wedge k \in Z$ **klesající**. Je lichá. Je omezená v celém definičním oboru zdola, i shora. Má maximum v každém bodě $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ a minimum v bodě $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \wedge k \in Z$. Hodnota maxima je 1 a minima je -1. Je spojitá. Je periodická s nejmenší periodou 2π.

2. Applet 7.2: Pravoúhlý trojúhelník 1.

Otevřete si applet 7.2 a určete délky odvěsny a. Vytvořte tabulku a ze získaných údajů sestrojte graf funkce sinus.



Obrázek 7.2: Pravoúhlý trojúhelník 1.

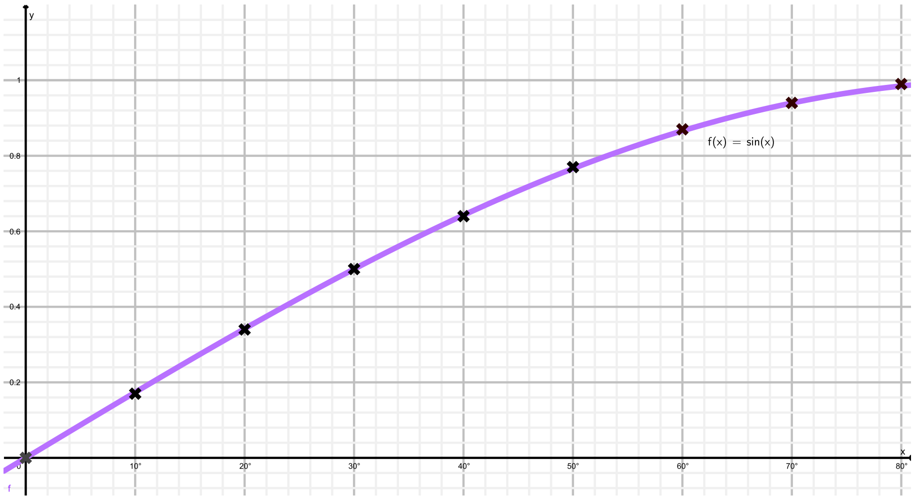
Řešení:

Jak budeme postupovat? Z trojúhelníku 1 zjistíme, že velikost úhlu $\alpha = 10°$ a přepona $c = 10$ cm. Z appletu dále zjistíme, že strana $a = 1,74$ cm.

Vypočítáme $\sin\alpha$ podle vzorce: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, kde přepona $c = 10$ cm a stranu a zjistíme z appletu 7.2.

trojúhelník	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
a	1,7	3,4	5,0	6,4	7,7	8,7	9,4	9,9
$\sin\alpha$	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,99

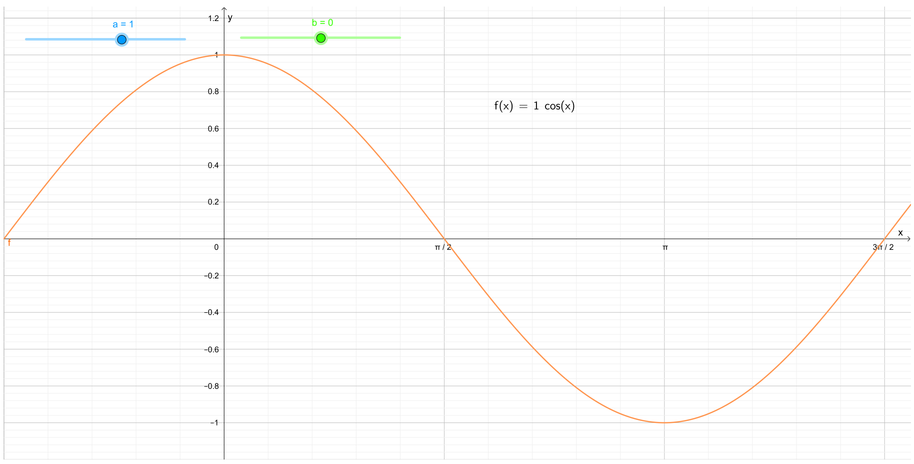
Graf této funkce je na obrázku 7.3 níže.



Obrázek 7.3: Funkce sinus

3. Applet 7.3: Funkce kosinus

Pomocí posuvníků a, b zkoumejte, jak se mění funkce kosinus ve tvaru $y = a \cdot \cos x + b$.



Obrázek 7.4: Funkce kosinus

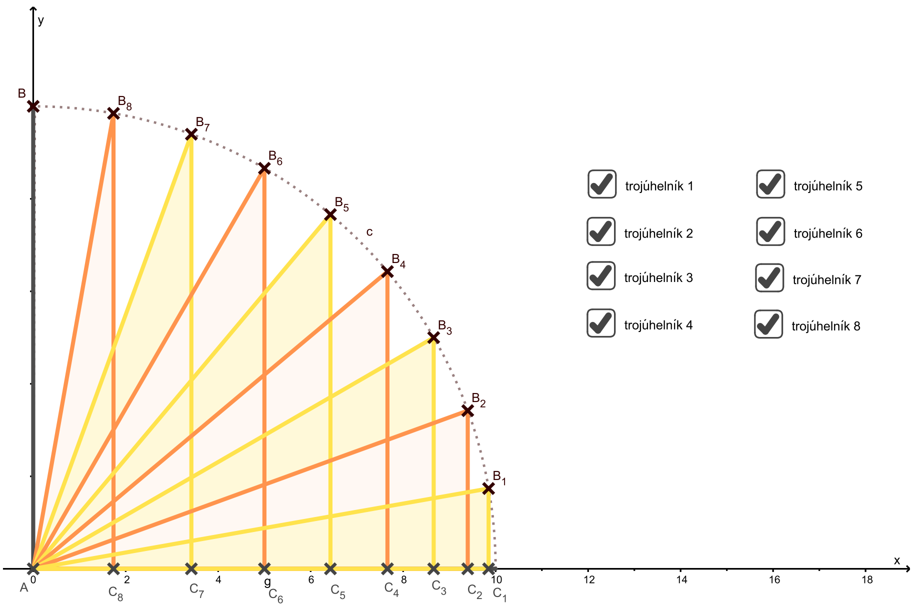
Grafem funkce kosinus je křivka zvaná **KOSINUSOIDA**.

<u>Přehled základních vlastností:</u>

$D(f) = (-\infty, \infty); H(f) = \langle -1, 1 \rangle$. V intervalu $x \in \langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle \wedge k \in Z$ je funkce **rostoucí** a v intervalu $x \in \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle \wedge k \in Z$ **klesající**. Je sudá. Je omezená v celém definičním oboru zdola i shora. Má maximum v bodě $[2k\pi; 1]$ a minimum v bodě $[\pi + 2k\pi; -1] \wedge k \in Z$. Je spojitá. Je periodická s nejmenší periodou 2π.

4. Applet 7.4: Pravoúhlý trojúhelník 2.

Otevřete si applet 7.4 a určete délky odvěsny b. Vytvořte tabulku a ze získaných údajů sestrojte graf funkce kosinus.



Obrázek 7.5: Pravoúhlý trojúhelník 2.

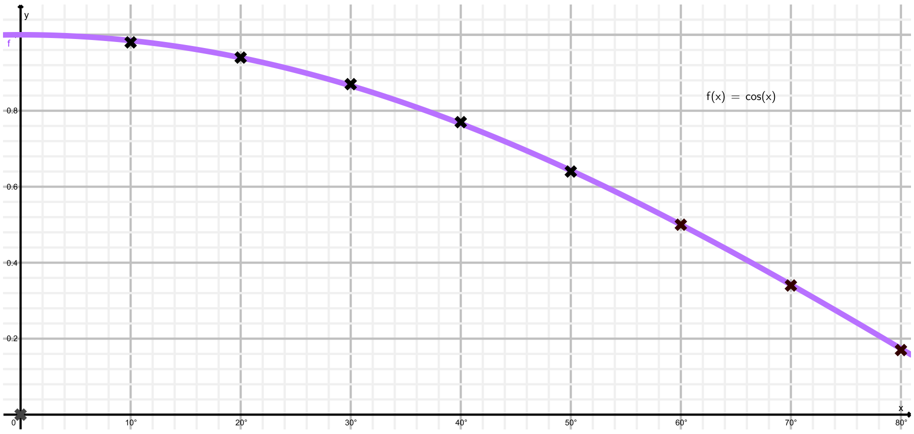
Řešení:

Jak budeme postupovat? Z trojúhelníku 1 zjistíme, že velikost úhlu $\alpha = 10°$ a přepona $c = 10$ cm. Z appletu dále zjistíme, že strana $b = 9,8$ cm.

Vypočítáme $\cos\alpha$ podle vzorce: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, kde přepona $c = 10$ cm a stranu b zjistíme z appletu 7.4.

trojúhelník	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
b	9,8	9,4	8,7	7,7	6,4	5,0	3,4	1,7
$\cos\alpha$	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,50	0,34	0,17

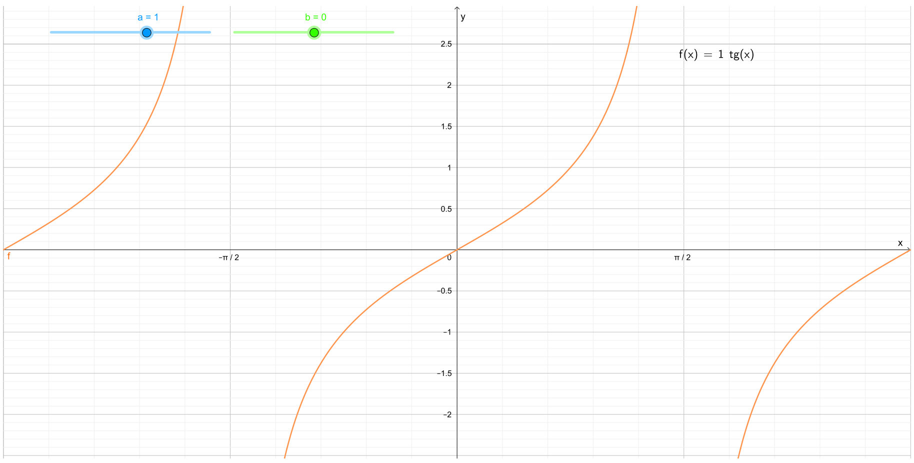
Graf této funkce je na obrázku 7.6 níže.



Obrázek 7.6: Funkce kosinus

5. Applet 7.5: Funkce tangens

Pomocí posuvníků a, b zkoumejte, jak se mění funkce tangens daná předpisem $y = a \cdot \operatorname{tg} x + b$.



Obrázek 7.7: Funkce tangens

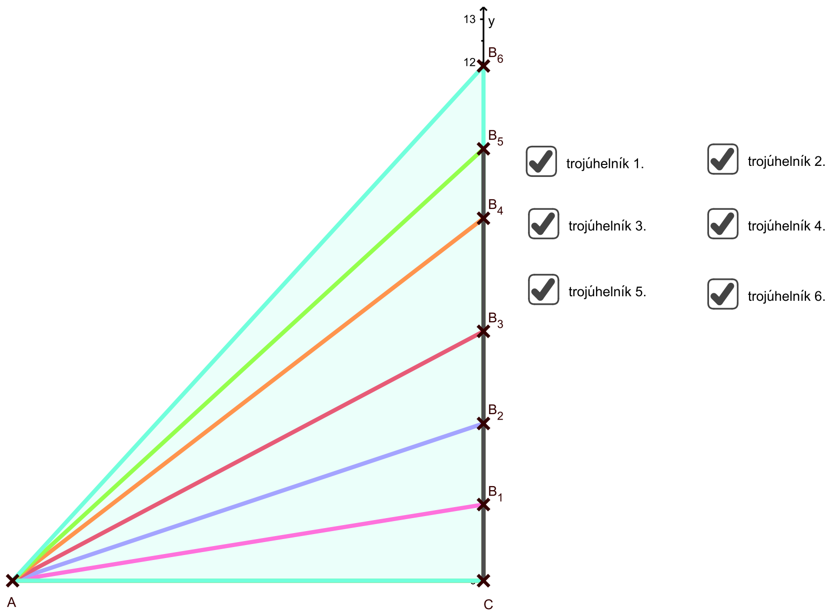
Grafem funkce sinus je křivka zvaná **TANGENTOIDA**.

<u>Přehled základních vlastností:</u>

$D(f) \in R-\{\frac{\pi}{2}+k\pi\},\ k \in Z; H(f) = (-\infty, \infty)$. V intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\rangle \wedge k \in Z$ je funkce **rostoucí**. Je lichá. Není omezená zdola, ani shora. Je periodická s nejmenší periodou π.

6. Applet 7.6: Pravoúhlý trojúhelník 3.

Otevřete si applet 7.6 a určete délky odvěsny a. Vytvořte tabulku a ze získaných údajů sestrojte graf funkce tangens.



Obrázek 7.8: Pravoúhlý trojúhelník 3.

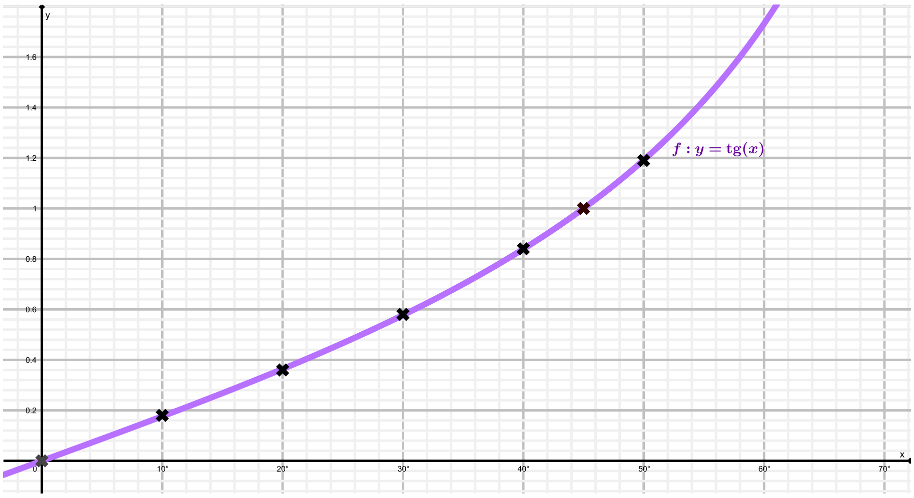
<u>Řešení:</u>

Jak budeme postupovat? Z trojúhelníku 1 zjistíme, že velikost úhlu $\alpha = 10°$ a odvěsna $b = 10$ cm. Z appletu dále zjistíme, že odvěsna $a \doteq 1,8$ cm.

Vypočteme $\operatorname{tg} \alpha$ podle vzorce $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, kde odvěsna $b = 10$ cm a odvěsnu a zjistíme z appletu 7.6. To opakujeme pro ostatní trojúhelníky.

trojúhelník	1.	2.	3.	4.	5.	6.
α	10°	20°	30°	40°	45°	50°
a	1,8	3,6	5,8	8,4	10	11,9
$\operatorname{tg} \alpha$	0,18	0,36	0,58	0,84	1	1,19

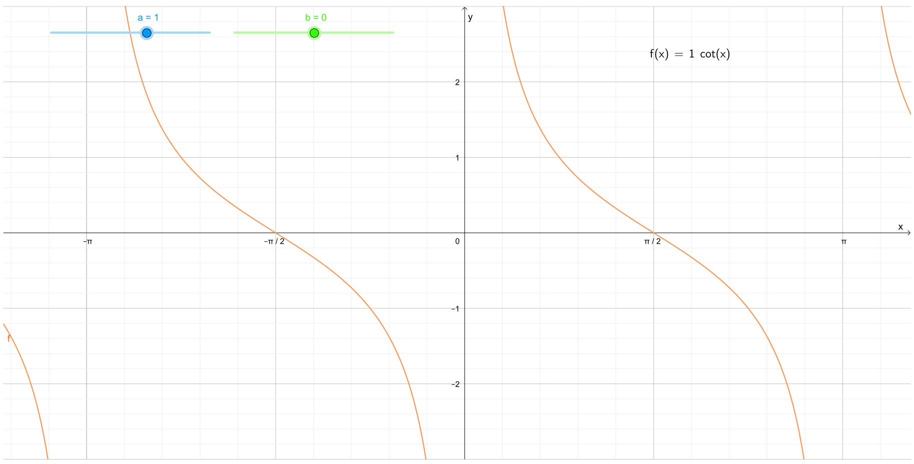
Graf této funkce je na obrázku 7.9 níže.



Obrázek 7.9: Funkce tangens

7. Applet 7.7: Funkce kotangens

Pomocí posuvníků a, b zkoumejte, jak se mění funkce kontangens s předpisem $y = a \cdot \operatorname{cotg} x + b$.



Obrázek 7.10: Funkce kotangens

Grafem funkce sinus je křivka zvaná **KOTANGENTOIDA**.

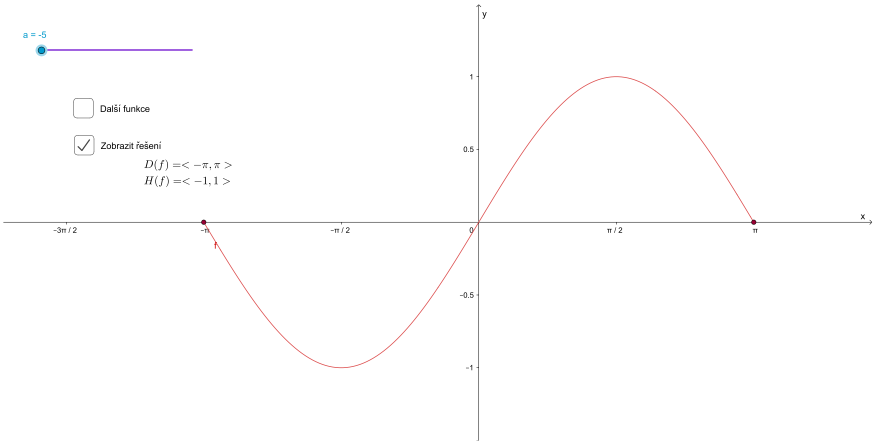
<u>Přehled základních vlastností:</u>

$D(f) \in R - \{k\pi\},\ k\ \in Z; H(f) = (\infty, \infty)$. Je **klesající** v intervalu $\langle k\pi; \pi + k\pi\rangle$ $\wedge\ k \in Z$. Je lichá. Není omezená ani zdola, ani shora. Je periodická s nejmenší periodou π.

7.1 Definiční obor a obor hodnot

1. Applet 7.1.1

Z grafu určete definiční obory a obory hodnot daných funkcí.

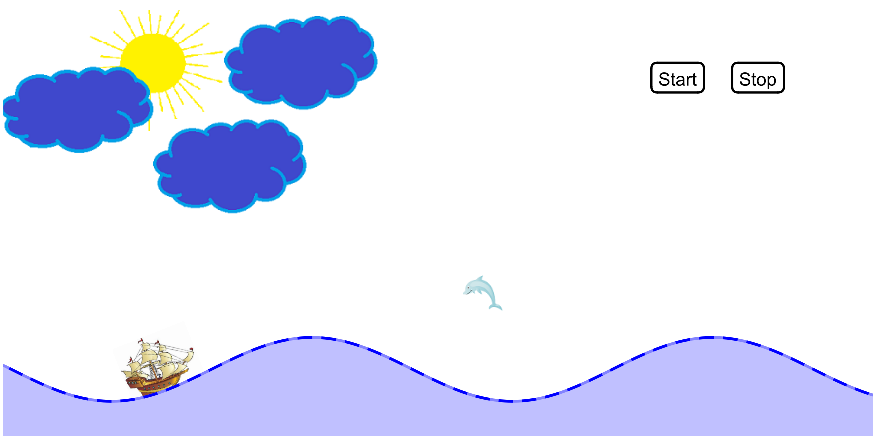


Obrázek 7.11: Definiční obor a obor hodnot

7.2 Goniometrická funkce v praxi

1. 7.2.1: Široké moře

Na širokém moři pluje pirátská loď a plave delfín. Pomocí appletu 7.2.1 zjistěte, po jaké funkci pluje a určete její vlastnosti. Věděli byste, po které funkci plave delfín?



Obrázek 7.12: Široké moře

Závěr

Myslím si, že jsem zadané cíle beze zbytku splnila. Vytvořila jsem učební materiál, který slouží ve výuce matematiky k lepšímu pochopení, osvojení a procvičení všech nejdůležitějších pojmů k tomuto tématu.

Uvědomuji si, že v této práci by se dalo pokračovat např. více rozepsat kapitolu "Goniomerické funkce"nebo vytvořit další kapitoly jako jsou: Mocninné funkce, Logaritmické funkce a další.

Vytváření appletů v programu GeoGebra bylo pro mne nejdříve těžké, ale časem jsem se s ním naučila dobře zacházet. Pořád si, ale uvědomuji, že program GeoGebra umí daleko více věcí, o kterých ještě nevím nebo jsem je v práci nepoužila. V budoucnoti bych se s tímto programem ráda ještě více seznámila.

Program GeoGebra je přínosem v mém pedagogickém povolání. Žákům vytvářím applety, které jim sdílím přes internetové stránky https://www.geogebra.org.

Svoji práci jsem psala v programu LaTeX, ve kterém se mi matematická sazba psala více než dobře.

Literatura

[1] Dytrych, M., Dobiasová, I., Livňanská, L. *Sbírka úloh z matematiky pro nižší ročníky víceletých gymnázií a pro 2. stupeň základních škol.*. Praha 1, Fortuna, 2001, 240 s., ISBN 80-7168-784-7.

[2] Molnár, J., Lepík, L.,Lišková, H., Slouka, J., Růžičková, B. *Matematika 9.* Prodos, Olomouc, 2011, 127 s. ISBN 80-7230-109-8.

[3] Molnár, J., Lepík, L.,Lišková, H., Slouka, J., Růžičková, B. *Matematika 7.* Prodos, Olomouc, 2010, 159 s. ISBN 80-7230-032-6.

[4] Hohenwarter, M., Hohenwarter, J. GeoGebra Help Official manual 3.2 [online]. ⟨https://app.geogebra.org/help/docuen.pdf⟩, 2009.

[5] Odvárko, O., Řepová, J., Skříček, L. *Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU - 2.část* 7. vydání, Prometheus, Praha 4, 2010, 142 s. ISBN 978-80-7196-406-3.

[6] Odvárko, O., Řepová, J. *Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU - 3.část* 5. vydání, Prometheus, Praha 4, 2009, 200 s. ISBN 978-80-7196-039-3.

[7] Odvárko, O., Kadleček, J. *Pracovní sešit z maematiky pro 9. ročník základní školy* 1. vydání, Prometheus, Praha 4, 2009, 200 s. ISBN 80-7196-227-9.

[8] Petrášková, V.,Zmeškalová, E. *Algebraické funkce* 1. vydání, Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2005, 167 s. ISBN 80-7040-825-1.

[9] Pech, J. Stručný přehled příkazů LaTeX[online]. ⟨http://home.pilsfree.net/tonny/navody-manualy/LaTeX⟩, 2008.

[10] Polák, J. *Přehled středoškolské matematiky* 10. vydání, Prometheus, Praha 4, 2015, 608 s. ISBN 978-80-7196-458-2.

[11] Vošický, Z., Lank, V., Vondra, M. *Matematika a fyzika.* 1. vyd., Fragmant, 2007, ISBN 978-80-253-0523-2.

[12] Ženatá, E. *Sbírka úloh z matematiky pro 7. ročník* 2. vydání, Blug, 2006, 212 s. ISBN 80-7274-961-7.

[13] Ženatá, E. *Přehled učiva matematiky s příklady a řešením pro 6.-9. ročník ZŠ a odpovídající ročníky víceletých gymnnázií* 2. vydání, Blug, 2011, 550 s. ISBN 978-80-7274-014-7.