PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Relace turnaje

2013 Richard Biolek

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Michala Botura, Ph.D., a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Olomouci 29. července 2013 ....

Zde bych rád poděkoval Mgr. Michalu Boturovi, Ph.D., vedoucímu mé práce, za podněty, cenné rady a čas, který mi věnoval.

Obsah

1 Úvod

Zkoumání turnajů a jejich chování je zejména záležitostí teorie grafů. Náplní této práce je však zkoumat je jako relační systémy a zejména zabývat se kongruencemi na turnajích. Proto nejprve shrneme poznatky o binárních relacích a uspořádaných množinách. Dále přejdeme k teorii svazů, kde nás budou zajímat zejména úplné a algebraické svazy. Algebraická část práce je zakončena teorií uzávěrových operátorů a jejich vztahem vůči úplným a algebraickým svazům.

V druhé části stručně zavedeme pojem relačního systému. Pak se dostaneme již k samotné definici turnaje z pohledu relačního systému a zavedeme kongruence na turnaji. Hlavní snahou této práce je dokázat, že množina kongruencí na turnaji tvoří úplný svaz. Poslední kapitola se věnuje turnajům z pohledu teorie grafů a zabývá se zejména Hamiltonovskou cestou a Hamiltonovskou kružnicí.

1.1 Binární relace

Binární relace je jedna z typických a nejčastěji se vyskytujících relací. Rovněž disponuje některými zajímavými vlastnostmi, jež si zde stručně popíšeme.

Příkladem binární relace v praxi jsou třeba příbuzenské vazby, např. otec - syn, dále pak dvojice dopravní prostředek - průměrná rychlost. Obecně se mluví o vztahu objekt x atribut. Atributem je chápána vlastnost být otcem, mít jistou průměrnou rychlost (viz výše) a mnoho jiných příkladů.

Binární relaci R mezi množinami A a B můžeme interpretovat jako podmnožinu *kartézského součinu* daných množin, matematicky řečeno $R \subseteq A \times B$. Binární relace je tedy množina dvojic. Takže relace „otec — syn“ může být relací mezi množinami všech lidí, mezi množinami všech lidí v Evropě nebo v Praze. Množinu můžeme omezit i jiným směrem, můžeme říci, že tu relaci definujeme mezi množinami všech mužů, ne lidí obecně.

Pro binární relaci bude v této práci používáno značení aRb, což znamená, že a je v relaci R s b. Další možným zápisem stejného vztahu je $\langle a, b \rangle \in R$.

Pro budoucí účely je nutné zadefinovat inverzní relaci i skládání relací.

Definice 1. *Mějme binární relaci R na množinách A a B.* Inverzní relací $R^{-1} \subseteq B \times A$ *k původní relaci R rozumíme relaci definovanou vztahem*

$$bR^{-1}a \text{ právě když } aRb \text{ pro } a \in A, b \in B.$$

Je zřejmé, že ke každé relaci existuje relace inverzní.

Definice 2. *Nechť $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$ jsou binární relace. Pak* složení relací *R a S je relace $R \circ S \subseteq A \times C$ definovaná takto:*

$a(R \circ S)c$, právě když existuje $b \in B$ tak, že aRb a bSc, kde $a \in A$ a $c \in C$.

V praxi se setkáváme s relacemi, které mohou disponovat některými z následujících vlastností. Abychom nemuseli pokaždé zdlouhavě popisovat dané relace, máme pro ně speciální názvy.

Definice 3. *Binární relace R na množině A se nazývá:*

1, reflexivní, jestliže pro každé $a \in A$ platí aRa,

2, symetrická, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí $aRb \Rightarrow bRa$,

3, tranzitivní, jestliže pro každé $a, b, c \in A$ platí $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$,

4, antisymetrická, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$.

Příklady:

1. Relace "být kolmý"na množině všech přímek v rovině je symetrická.
2. Relace "být rovnoběžný"na množině všech přímek v rovině je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
3. Relace "být dělitelem"na množině celých čísel je reflexivní a tranzitivní.
4. Relace "být dělitelem"na množině přirozených čísel je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Nyní přistoupíme k ekvivalencím, jelikož s nimi budeme pracovat při faktorizaci turnajů.

Definice 4. *Relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní nazveme* ekvivalencí.

Relace ekvivalence tedy představuje jakési zobecnění relace rovnosti. Vždy je možné určit, že jsou dva prvky množiny stejné, tj. že $a = a$. Avšak někdy je vhodné zjistit, zda jsou si dva prvky pouze podobné, ne nutně stejné. Neboli — zda mají stejnou nějakou zásadní vlastnost. Například dva studenty můžeme považovat za podobné, bydlí-li ve stejném městě — nebo pomocí ekvivalence: dva studenti jsou ekvivalentní, pokud bydlí ve stejném městě. Podrobněji, uvažujme tři studenty: Pankráce, Serváce a Bonifáce. Zjevně Pankrác bydlí ve stejném městě jako Pankrác, což nám zaručuje reflexivitu. Dále bydlí-li Pankrác ve stejném městě jako Servác, pak Servác bydlí ve stejném městě jako Pankrác, čímž je splněna symetrice. Nakonec pokud Pankrác bydlí ve stejném městě jako Servác a zároveň Servác bydlí ve stejném měste jako Bonifác, tak nevyhnutelně Pankrác bydlí ve stejném městě jako Bonifác, což značí tranzitivitu.

Relace ekvivalence velmi úzce souvisí s rozklady množin.

Definice 5. *Nechť A je neprázdná množina. Systém $\overline{A} = \{A_i; i \in I\}$ neprázdných podmnožin množiny A nazveme* rozkladem A na třídy*, jestliže platí:*

i) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

ii) podmnožiny A_i a A_j jsou navzájem disjunktní pro $i \neq j$, $i, j \in I$

Tvrzení 1. *Nechť A je neprázdná množina a $Eq(A)$ je množina ekvivalencí na množině A. Pro prvek $a \in A$ a ekvivalenci $R \in Eq(A)$ položme*

$$[a]_R = \{x \in A, aRx\},$$

$$A/R = \{[a]_R, a \in A\},$$

pak systém A/R je rozklad na množině A a nazýváme jej faktorovou množinou podle relace R.

Důkaz. i) Nejprve dokážeme, že platí $\bigcup_{a \in A}[a]_R = A$. Jelikož R je ekvivalence, tak je reflexivní. Pak pro každé $a \in A$ platí $a \in [a]_R$, tedy $[a]_R \neq \emptyset$ a $\bigcup_{a \in A}[a]_R = A$.

ii) Zbývá tedy dokázat, že každé dvě třídy A/R jsou mají buď prázdný průnik nebo jsou totožné. Nechť tedy pro dvě třídy z $[a]_R, [b]_R$ platí $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$. Pak existuje prvek $x \in [a]_R \cap [b]_R$, což je totéž jako aRx, bRx. Odtud ze symetrie a tranzitivity relace R plyne bRa. Buď nyní $y \in [a]_R$ libovolný prvek, pak aRy. Ze vztahů bRa, aRy pomocí tranzitivity plyne bRy, což je totéž jako $y \in [b]_R$. Tímto jsme dokázali inkluzi $[a]_R \subseteq [b]_R$. Analogicky se dokáže inkluze $[b]_R \subseteq [a]_R$.

□

Tato věta nám říká, že ke každé ekvivalenci R množiny ekvivalencí $Eq(A)$ existuje určitý rozklad A/R na množině A. Tomuto rozkladu říkáme *rozklad indukovaný ekvivalencí.*

Definice 6. *Relaci, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní nazveme* uspořádáním.

Uspořádání je běžný pojem, se kterým pracujeme i v běžném životě. Spoustu věcí můžeme nějakým způsobem uspořádat — slova podle abecedy (lexikální uspořádání), nebo například zboží podle ceny. Uvažujme tedy relaci být levnější nebo být roven na množině doprvních prostředků, ze které vybereme tři prvky - auto, kolo a letadlo. Zjevně kolo je levnější nebo rovno kolu, což nám zaručuje reflexivitu. Dále zřejmě nebude platit, že pokud je kolo levnější než auto,tak i auto bude levnější než kolo. Relace být levnější nebo roven tedy není symetrická, ale je antisymetrická, což znamená, že pokud bude jeden objekt levnější nebo stát stejně jako druhý objekt a zároveň druhý objekt bude levnější nebo roven jako první objekt, pak se zjevně jedná o stejný objekt, nebo-li relace je antisymetrická. Nakonec pokud je auto je cenově levnější nebo rovno letadlu a zároveň kolo je levnější nebo stejně drahé jako auto, pak nevyhnutelně platí, že cena kola je menší nebo rovna ceně letadla.

2 Algebraické základy

V této kapitole bude ukázano několik základních definic a vět z *teorie svazů*, na které se budu v dalších kapitolách odkazovat. Dále se budeme zabývat teorií *uzávěrových operátorů* a *algebraických úzávěrových operátorů* a jejich vztahem vzhledem k *úplným* a *algebraickým svazům.*

2.1 Uspořádané množiny

Než přejdeme k teorii svazů, musíme nejprve zadefinovat několik pojmů týkajících se uspořádaných množin.

Definice 7. *Je-li R relace uspořádaní na A, pak dvojici (A, R) nazveme* uspořádaná množina. *Jestliže je uspořádání R takové, že pro každé prvky $a, b \in A$ platí buď aRb nebo bRa, pak se R nazývá* úplné uspořádání *a A se nazývá* úplně uspořádaná množina *nebo také* řetezec.

Definice 8. *Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina. Prvek $a \in A$ se nazývá*

minimální*, jestliže pro každé $x \leq a$ platí $x = a$;*

nejmenší*, jestliže pro každé $x \in A$ platí $a \leq x$;*

maximální*, jestliže pro každé $a \leq x$ platí $x = a$;*

největší*, jestliže pro každé $x \in A$ platí $x \leq a$.*

Je patrné, že má-li $(A, \leq)$ největší (resp. nejmenší) prvek, pak je jediný a je zároveň maximální (resp. minimální). Jiné maximální (resp. minimální) prvky v dané uspořádané množině neexistují.

Definice 9. *Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina a $M \subseteq A$. Označme symbolem*

$U(M) = \{x \in A; y \leq x \textit{ pro každé } y \in M\}$

$$L(M) = \{x \in A; x \leq y \text{ pro každé } y \in M\}$$

Množina U se nazýva horní kužel *množiny M, množin a L se nazývá* dolní kužel *množiny M. Má-li $U(M)$ nejmenší prvek, pak tento prvek se nazývá* supremum *M a značí se* $\sup M$*; má-li $L(M)$ největší prvek, pak tento prvek se nazývá* infimum *M a značí se* $inf\, M$.

Uspořádanou množinou jsou například *přirozená čísla* s relací $\leq$. Stejně tak *přirozená čísla* s relací dělitelnosti na nich je uspořádaná množina.

2.2 Polosvazy a svazy

Nejprve si zadefinujeme polosvaz jako algebraickou strukturu.

Definice 10. Polosvazem *nazveme grupoid $(G, \circ)$, který pro každé tři prvky $a, b, c \in G$ splňuje následující identity:*

1, $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (asociativita)

2, $a \circ b = b \circ a$ (komutativita)

3, $a \circ a = a$ (idempotence)

Nyní si ukážeme, jak se dá polosvaz interpretovat jako uspořádaná množina.

Tvrzení 2. *Nechť $G, \leq$ je uspořádáná množina a pro každé $a, b \in G$ existuje $\sup(a, b)$. Definujme*

$$a \circ b = \sup(a, b);$$

pak $(G, \circ)$ je polosvaz.

Důkaz. 1) $\sup(a, a) = a$ implikuje, že operace $\circ$ je idempotentní.

2) $\sup(a, b) = \sup(b, a)$ implikuje, že operace $\circ$ je komutativní.

3) $\sup(a(b, c)) = \sup(a, b, c) = \sup((a, b), c)$ implikuje, že operace $\circ$ je asociativní. $\square$

Příklady:

1. Nechť M je neprázdná množina. Pak $(ExpM, \cup)$ je spojový polosvaz.

2. Duálně $(ExpM, \cap)$ je průsekový polosvaz.

3. Na množině přirozených čísel N zaveďme relaci dělitelnosti $a|b$ právě když a dělí b. Pak $|$ je uspořádání na N a pro každé $a, b \in N$ platí

   $\sup(a, b) =$ nejmenší společný násobek čísel a, b,

   $\inf(a, b) =$ největší společný dělitel čísel a, b;

   tedy (N, NSN) je spojový polosvaz a (N, NSD) je průsekový polosvaz.

Nejprve si opět zadefinujeme svaz jako algebraickou strukturu se dvěma binárními operacemi.

Definice 11. *Buď L neprázdná množina, nechť $\vee$, $\wedge$ jsou binární operace na L a nechť $(L, \vee)$, $(L, \wedge)$ jsou polosvazy. Pak platí-li pro každé $a, b \in L$*

$$a \wedge (a \vee b) = a$$

a

$$a \vee (a \wedge b) = a$$

,

pak se $(L, \vee, \wedge)$ se nazývá svaz.

Svazové operace $\vee$ a $\wedge$ se nazývají *spojení* a *průsek.*

Definice 12. *Nechť $(L, \vee, \wedge)$ je svaz, nechť $\emptyset \neq A \subseteq L$. A se nazývá podsvaz svazu $(L, \vee, \wedge)$, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí $a \vee b \in A$, $a \wedge b \in A$.*

Definice 13. *Nechť $(L, \vee, \wedge)$ je svaz a $\leq$ je indukované uspořádání. Má-li $(L, \leq)$ nejmenší prvek, nazýváme jej* nula svazu *a značíme 0; má-li $(L, \leq)$ největší prvek, nazýváme jej* jednotka svazu *a značíme 1.*

Nyní si opět ukážeme svaz z pohledu uspořádané množiny.

Definice 14. *Uspořádaná množina $(L, \leq)$ se nazývá svaz, jestliže pro každé dva prvky $a, b \in L$ existuje $\sup(a, b)$ a $\inf(a, b)$, kde toto infinum a supremum patří do množiny L.*

Tvrzení 3. *Nechť $(L, \wedge, \vee)$ je svaz. Relace $\leq$ definovaná na L předpisem*

$a \leq b$ právě když $a \vee b = b$ je uspořádání.

V uspořádané množině $(L, \leq)$ existuje pro každé $a, b \in L$ $\inf(a, b), \sup(a, b)$ a platí

$\inf(a,b) = a \wedge b$, $\sup(a,b) = a \vee b$. *Dálé platí* $a \leq b$ *právě když* $a \wedge b = a$.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že relace $\leq$ je uspořádání na množině L.

1, Z idempotence operace ihned plyne $a \leq a$ pro každé $a \in L$, tedy $\leq$ je reflexivní.

2, Je-li $a \leq b$, $b \leq c$, kde $a, b, c \in L$, pak z asociativity dostávame $a \circ c = a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = b \circ c = c$, tedy $a \leq c$, čili $\leq$ je tranzitivní.

3, Z komutativity operace dostáváme $b = a \circ b = b \circ a = a$, tedy $\leq$ je antisymetrická.

To znamená, že $\leq$ je uspořádání na L.

Dále nechť $a \leq b$, což je ekvivalentní s $a \vee b = b$. Dle zákonu absorpce platí $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$, tedy platí $a \leq b$ právě když $a \wedge b = a$.

□

Příklady:

1. Každý řetězec je svaz a platí $a \vee b = \max(a,b)$, $a \wedge b = \min(a,b)$.
2. Nechť $M \neq \emptyset$. Pak $(ExpM, \cup, \cap)$ je svaz. Největším prvkem je M a nejmenším prvkem je $\emptyset$.
3. Nechť N je množina přirozených čísel. Pak $(N, \vee, \wedge)$ je svaz, kde svazové operace jsou definovány následovně:

   $a \vee b$ je nejmenší společný násobek dvojice (a,b) a $a \wedge b$ je největší společný dělitel dvojice (a,b).
4. Nechť G je grupa. Pak množina všech normálních podgrup grupy G tvoří svaz $(G, \vee, \wedge)$, kde svazové operace jsou definovány takto:

   $A \vee B = A \cap B$, $A \wedge B = A \times B$, kde A, B jsou normální podgrupy.

Ukázali jsme si, že svazem je každá uspořádaná množina $(L, \leq)$, v níž existují $\sup(a,b)$ a $\inf(a,b)$ pro každé dva prvky $a, b \in L$. Indukcí lze dokázat existenci sup a inf pro každou *konečnou* podmnožinu $S \subseteq L$. Nicméně zatím nemůžeme nic říct o sup a inf nekonečných podmnožin. Proto zavádíme následující definici.

Definice 15. *Uspořádaná množina* $(L, \leq)$ *se nazývá* úplný svaz, *jestliže pro každou* $S \subseteq L$ *existuje* $\sup S$ *a* $\inf S$ *v* L.

Zřejmě každý úplný svaz je svazem, jelikož stačí vzít S jako dvouprvkovou podmnožinu. Dále každý úplný svaz má nejmenší a největší prvek - jsou to prvky $1 = \sup L$ a $0 = \inf L$. V úplném svazu stačí předpokládat existenci všech sup (resp. inf) pro libovolnou podmnožinu, druhý prvek lze již zkostruovat. Tento postup ilustruje následující tvrzení.

Tvrzení 4. *Nechť $(L, \leq)$ je uspořádaná množina, v níž existuje $inf\, S$ pro každou $S \subseteq L$. Pak $(L, \leq)$ je úplný svaz.*

Důkaz. Nechť $S \subseteq L$ a nechť $U(S)$ je horní kužel množiny S. Zřejmě $U(S) \neq \emptyset$, neboť $1 = \inf \emptyset$, $1 \in U(S)$. Označme $x = \inf U(S)$. Zřejmě $s \leq x$ pro každé $s \in S$ a dále, je-li $s \leq y$ pro každé $s \in S$, pak $y \in U(S)$, tedy $x = \inf U(S) \leq y$, tedy $x = \sup S$. $\square$

Příklady:

1. Konečné svazy jsou úplné svazy.
2. $ExpA$ s množinovou inkluzí je úplný svaz.
3. Příkladem svazu, který není úplný, jsou *reálná čísla* při běžném uspořádání podle velikosti. Ale množina $R \cup \{-\infty, \infty\}$ s uspořádáním dle velikosti je již úplným svazem.

Konkrétněji se podíváme na příklad s množinou ekvivalencí na jisté množině.

Tvrzení 5. *Nechť A je neprázdná množina. Pak $Eq(A)$ je množina ekvivalencí na množině A a spolu s částečným uspořádaním $\subseteq$ tvoří úplný svaz.*

Důkaz. Pro ekvivalence $\theta_1, \theta_2 \in Eq(A)$ je zjevné, že $\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2$. Jednodušší část důkazu je hotova, abychom mohli pokračovat, musíme se podívat na následující tvrzení, kde se budeme zabývat předpisem $\theta_1 \vee \theta_2$. $\square$

Tvrzení 6. *Jsou-li θ_1, θ_2 dvě ekvivalence na množině A, pak platí*

$$\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup (\theta_1 \circ \theta_2) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1 \circ \theta_2) \cup \ldots,$$

nebo ekvivalentně

$a(\theta_1 \vee \theta_2)b$ *pokud existuje posloupnost prvků* $c_1, c_2, \ldots, c_n \in A$ *takových, že* $c_i \theta_1 c_{i+1}$ *nebo* $c_i \theta_2 c_{i+1}$ *pro* $i = 1, \ldots, n-1$ *a* $a = c_1$, $b = c_n$.

Důkaz. Zjevně pravá strana rovnice je ekvivalence a rovněž každá relace vzniklá skládáním relací v závorkách je obsažena v $\theta_1 \vee \theta_2$. $\square$

Pokud tedy $\{\theta_i\}_{i\in I}$ je podmnožinou $Eq(A)$, pak je jednoduché nahlédnout, že $\bigwedge_{i\in I}\theta_i$ je jednoduše $\bigcap_{i\in I}\theta_i$. Následující věta zobecňuje předcházející tvrzení pro libovolná suprema v $Eq(a)$.

Tvrzení 7. *Pokud ekvivalence θ_i náleží do $Eq(A)$ pro každé $i \in I$, pak*

$$\bigvee_{i\in I}\theta_i = \bigcup\{\theta_{i0}\circ\theta_{i1}\circ\cdots\circ\theta_{ik} : i_0,\ldots,i_k \in I,\, k<\infty\}.$$

Nyní zavedeme další důležitý pojem.

Definice 16. *Nechť $(L,\leq)$ je úplný svaz. Prvek $a\in L$ nazveme* kompaktní*, jestliže pro každou podmnožinu $X\subseteq L$ platí, že jestliže $a\leq \sup X$, pak existuje konečná podmnožina $\{y_1,\ldots,y_n\}\subseteq X$ tak, že $a\leq \sup(y_1,\ldots,y_n) = y_1\vee\cdots\vee y_n$. Úplný svaz se nazývá* algebraický*, je-li každý prvek z L supremem kompaktních prvků.*

Příklady:

1. Konečné svazy jsou algebraické svazy.
2. Svaz podgrup grupy $(G,\circ)$ je algebraický svaz, kde kompaktními prvky jsou konečně generované grupy.
3. Svaz podmnožin dané množiny je algebraický svaz, kde kompaktními prvky jsou konečné množiny.

2.3 Uzávěrové operátory

Jedním ze způsobů, jak identifikovat a případně konstruovat úplné a algebraické svazy, je právě skrz teorii uzávěrových operátorů.

Definice 17. *Mějme množinu A, pak zobrazení $C : Exp(A)\to Exp(A)$ se nazývá* uzávěrový operátor *na množině A, jestliže pro $X,Y\subset A$ platí:*

1, $X\subseteq C(X)$ (extenzivita)

2, $C(C(X)) = C(X)$ (idempotence)

3, $X\subseteq Y$ implikuje $C(X)\subseteq C(Y)$ (izotonie)

Nyní si ukážeme vztah uzávěrového operátoru a úplného svazu.

Tvrzení 8. *Nechť C je uzávěrový operátor na A. Pak $L_C\subseteq ExpA$ je úplný svaz, kde operace průnik a spojení jsou definovány následovně:*

$\bigwedge C(A_i) = \bigcap_{i\in I} C(A_i)$

$\bigvee C(A_i) = C(\bigcup_{i\in I} A_i)$

Důkaz. Nechť $(A_i)_{i\in I}$ jsou uzavřené podmnožiny A.

$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i$

odtud pro každé i dostaneme

$C(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq C(A_i) = A_i$

tedy

$C(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$,

a tak

$C(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} A_i$

je tedy patrné, že $\bigcap_{i\in I} A_i$ náleží do L_C. Jelikož A náleží do L_C, je žrejmé, že L_C je úplný svaz.

□

Je zajímavé, že tato věta platí i obráceně, tedy že svaz L_C vzniklý z uzávěrových operátorů je typickým příkladem úplného svazu.

Tvrzení 9. *Každý úplný svaz je izomorfní systému uzavřených podmnožin některé množiny A s uzávěrovým operátorem C na dané množině.*

Důkaz. Buď L úplný svaz. Pro $X \subseteq L$ definujme

$$C(X) = \{a \in L : a \leq \sup X\}.$$

Pak C je uzávěrový operátor na L a zobrazení $a \mapsto \{b \in L : b \leq a\}$ je kýžený izomorfizmus mezi L a L_C. □

Uzávěrové operátory, ze kterých se dají zkonstruovat algebraické svazy, se nazývají algebraické uzávěrové operátory.

Definice 18. *Uzávěrový operátor C se nazývá* algebraický, *jestliže pro každou podmnožinu $X \subseteq A$ platí $C(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X; Y$ je konečná množina $\}$*

Tvrzení 10. *Je-li C algebraický uzávěrový operátor na množině A, pak L_C je algebraický svaz, kde kompaktními prvky jsou právě uzavřené množiny $C(X)$, kde X je konečná podmnožina A.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že $C(X)$ je kompaktní, pokud je X konečná. Předpokládejme, že $X = \{a_1, \ldots, a_k\}$ a

$$C(X) \subseteq \bigvee_{i\in I} C(A_i) = C(\bigcup_{i\in I} A_i).$$

Pro každé $a_j \in X$ máme z definice algebraického uzávěrového operátoru konečnou množinu $X_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ kde $a_j \in C(X_j)$. Jelikož množin A_i je konečný počet, řekněme $A_{j1}, \ldots, A_{jn_j}$, takových že

$$X_j \subseteq A_{j1} \cup \cdots \cup A_{jn_j},$$

pak

$$a_j \in C(A_{j1} \cup \cdots \cup A_{jn_j}).$$

Avšak pak

$$X \subseteq \bigcup_{1\leq j\leq k} C(A_{j1} \cup \cdots \cup A_{jn_j}),$$

čili

$$X \subseteq C(\bigcup_{1\leq j\leq k} A_{ji}),$$

a tudíž

$$C(X) \subseteq C(\bigcup_{1\leq j\leq k} A_{ji}) = \bigvee_{1\leq j\leq k} A_{ji}),$$

a tedy $C(X)$ je kompaktní.

Nyní předpokládejme, že $C(Y)$ je různé od $C(X)$ pro jakoukoliv konečnou množinu X. Z definice platí

$$C(Y) \subseteq \bigcup\{C(X) : X \subseteq Y \text{ a } X \text{ je konečná množina }\},$$

je zřejmé, že $C(Y)$ nemůže být obsaženo v libovolném konečném sjednocení operátorů $C(X)$, tudíž $C(Y)$ není kompaktní. □

Příklady:

1. Lineární obal ve vektorových prostorech je uzávěrovým operátorem.
2. Nechť G je grupa a platí $X \subseteq G$ a nechť $C(X)$ je podgrupou grupy G generovanou množinou X. Pak C je algebraický uzávěrový operátor.

Nyní vyslovíme lemma, které nám výrazně usnadní práci při dokazování následujících vět.

Tvrzení 11. *Mějme binární relaci R na množině A. Pak platí*

i) R je reflexivní, *právě když $Id \subseteq R$*

ii) R je symetrická, *právě když $R = R^{-1}$*

iii) R je tranzitivní, *právě když $R \circ R \subseteq R$*

iv) pokud je R reflexivní, *pak $R \subseteq R \circ R$*

Důkaz. i) $\Rightarrow$ Jestliže $a \in A$, potom z reflexivity plyne aRa pro každé a a tedy $Id = \{(a,a)|x \in A\} \subseteq R$.

$\Leftarrow$ Je-li $a \in A$, platí $a(Id)a$ a tedy $Id \subseteq R$ implikuje aRa.

ii) $\Rightarrow$ Jestliže $a, b \in A$, aRb potom ze symetrie plyne bRa a tedy $R = R^{-1}$. $\Leftarrow$ Jestliže $a, b \in R$, aRb, pak platí $aR^{-1}b$. Z toho plyne bRa, tudíž je relace symetrická.

iii) $\Rightarrow$ Nechť R je tranzitivní relace na A a nechť pro $a, b \in A$ platí $a(R \circ R)b$. Pak existuje $c \in A$ tak, že aRc, cRb, odtud aRb a tedy $R \circ R \subseteq R$.

$\Leftarrow$ Nechť platí $R \circ R \subseteq$ a nechť pro $a, b, c \in A$ platí současně aRc a cRb. Pak $a(R \circ R)b$ a vzhledem k předpokladu máme aRb. Tedy R je tranzitivní relace.

iv) Jestliže $a, b \in A$, aRb, pak z reflexivity jistě platí bRb a tedy $a(R \circ R)b$.

□

Následující tvrzení je velmi užitečné, jelikož nadále nebudeme muset předpokládat případnou reflexivitu a symetrii relací. Navíc získaný uzávěrový operátor budeme používat v další práci.

Tvrzení 12. *Ke každé relaci $R \subseteq A^2$ lze najít nejmenší symetrickou a reflexivní relaci $\overline{R}$, která je nad původní relací R. Nechť R je relace,pak zobrazení dané předpisem $R \longmapsto \overline{R} = \{R \cup R^{-1} \cup Id\}$ je uzávěrový operátor na množině všech relací na A. Navíc platí, že uzavřené relace jsou právě všechny reflexivní a symetrické relace.*

Důkaz. Skládáním a sjednocením relací dostane opět relaci, čili $\overline{R}$ je relace. Jelikož $Id \subseteq \overline{R}$, jedná se o reflexivní relaci. Dále jelikož

$$\begin{aligned}\overline{R}^{-1} &= \{R \cup R^{-1} \cup Id\}^{-1} \\ &= \{R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1} \cup Id^{-1}\} \\ &= \{R^{-1} \cup R \cup Id\} \\ &= \overline{R}\end{aligned}$$

čili se jedná o symetrickou relaci.

Jelikož $\overline{R}$ je reflexivní a symetrická, platí rovnost $\overline{\overline{R}} = \overline{R}$. Tudíž se opravdu jedná o nejmenší takovou relaci.

Nyní si ukážeme, že $\overline{R}$ je uzávěrový operátor na množině všech relací na A.

1. Extenzivita je zjevná, jelikož $R \subseteq \{R \cup R^{-1} \cup Id\} = \overline{R}$
2. Je-li $R_1 \subseteq R_2$, pak jistě platí $\{R_1 \cup R_1^{-1} \cup Id\} \subseteq \{R_2 \cup R_2^{-1} \cup Id\}$, tedy $\overline{R_1} \subseteq \overline{R_2}$. Monotonie je rovněž splněna.
3. Jak již bylo zmíněno, tak platí $\overline{\overline{R}} = \overline{R}$, což nám zaručuje idempotenci.

$\square$

Tvrzení 13. *Mějme relaci $R \subseteq A^2$. Pak Eq dané předpisem $Eq = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\overline{R} \circ \cdots \circ \overline{R}}_{n}$ je uzávěrový operátor na množině $ExpA^2$, kde uzavřené relace jsou právě ekvivalence.*

Důkaz. i) Nejprve ukážeme, že EqR je opravdu ekvivalence. Z věty 12 víme, že ke každé relaci R lze najít nejmenší symetrickou a reflexivní relaci $\overline{R}$, která je nad původní relací R. Jelikož složení i sjednocení reflexivních (resp. symetrických) relací je refelxivní (resp. symetrická) relace, pak EqR je reflexivní a symetrická. Zbývá dokázat tranzitivitu. Předpokládejme, že $a(EqR)b$ a zároveň $b(EqR)c$. Pak platí

$$a\,\underbrace{(\overline{R} \circ \cdots \circ \overline{R})}_{m}\,b,$$
$$b\,\underbrace{(\overline{R} \circ \cdots \circ \overline{R})}_{n}\,c$$

kde m, n jsou přirozená čísla, z toho plyne

$$a\,\underbrace{(\overline{R} \circ \cdots \circ \overline{R})}_{m+n}\,c,$$

a relace EqR je tedy tranzitivní.

ii) Nyní je třeba ověřit, že EqR je opravdu uzávěrový operátor na množině všech relací na A.

1, $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R \circ \cdots \circ R$,

z toho vyplývá

$R \subseteq EqR$

čili extenzivita je splněna.

2, Nechť platí

$R_1 \subseteq R_2$

pak platí

$EqR_1 \subseteq EqR_2$

a tedy monotonie je rovněž splněna.

3, Pokud je θ ekvivalence, pak z reflexivity a symetrie θ plyne $\overline{\theta} = \theta$. Dále z věty 11

Jelikož jsme již dokázali, že EqR je ekvivalence, tak platí, že

$Eq(EqR) = EqR$

a idempotence je tedy splněna.

$\square$

Tvrzení 14. *Mějme relaci $R \subseteq A^2$. Pak EQ dané předpisem*

$$EQR = \bigcup\{EqX \,|\, X \subseteq R\},$$

kde X je konečná množina, je algebraický, uzávěrový operátor na $ExpA$, kde uzavřené relace jsou konečně generované ekvivalence.

Důkaz. Nechť $a(EQR)b$. Z toho vyplývá $aRx_1Rx_2 \dots Rx_nRb$, nebo-li existuje přirozené číslo n takové, že $a(\underbrace{R \circ \dots \circ R}_{n})b$. Nyní si zavedeme množinu

$$X = \{\langle a, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle, \langle x_n, b\rangle\}$$

O této množině platí následující:

i) X je konečná množina

ii) $X \subseteq R$

iii) $(a, b) \in X \circ X \dots \circ X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{x \circ \dots \circ x}_{n} = EqX.$

$\square$

2.4 Relační systémy

V této kapitole zadefinujeme pojmy *relační systém*, *kongruenci na relačním systému* a *homomorfismus relačních systémů.*

Definice 19. *Buď množina M a binární relace $R \subseteq M \times M$. Pak* relačním systémem *rozumíme uspořádanou dvojici $(M; R)$.*

Definice 20. *Mějme relační systém $(M; R)$ a na něm ekvivalenci θ. Pak θ je kongruencí na relačním systému $(M; R)$ tehdy a jen tehdy, je-li $(M/\theta; R/\theta)$ relační systém.*

Definice 21. *Buďte (M;R) a (N;S) relační systémy. Potom zobrazení $f : M \longrightarrow N$ splňující pro každé $\langle a, b\rangle \in R : \langle f(a), f(b)\rangle \in S$ nazveme* homomorfismus *relačních systémů.*

3 Turnaje

Nyní se již dostáváme k samotným turnajům. V této kapitole zadefinujeme turnaj jako relační systém, zadefinujeme kongruenci a ukážeme, kdy je ekvivalence na turnaji kongruencí.

3.1 Základní pojmy

Definice 22. *Buď $(T; R)$ relační systém. Je-li R reflexivní, antisymetrická a úplná relace, pak $(T; R)$ nazýváme* turnaj.

Příkladem turnaje, který je v souladu s výše uvedenou definicí, je například uzavřený šachový turnaj se dvěma zanedbatelnými úpravami. První je, že každý hráč nad sebou vyhrál nebo prohrál, tím je splněna reflexivita. Druhou úpravou oproti klasickému chápání uzavřeného šachového turnaje je absence remízy. Tedy nutně hráč a porazil hráče b, což interpretujeme jako aRb nebo naopak hráč b porazil hráče a, což analogicky zapisujeme bRa. Títmo je splněna antisymetrie. Úplnost relace je splněna automaticky, jelikož každý hráč turnaje hraje s každým.

Definice 23. *Buď zobrazení $f : M \longrightarrow N$. Potom ekvivalencí θ_f indukovanou tímto zobrazením rozumíme $\theta_f = \{\langle a, b\rangle \in M^2; f(a) = f(b)\}$.*

Definice 24. *Buďte relační systém $(M; R)$ a ekvivalence θ na množině M. Potom* faktorovým relačním systémem *$(M; R)/\theta$ rozumíme uspořádanou dvojici $(M/\theta; R/\theta)$, kde*

$$M/\theta = \{[a]_\theta; a \in M\} \text{ a } R/\theta = \{\langle [a]_\theta, [b]_\theta\rangle; existuje\, c \in [a]_\theta, existuje\, d \in [b]_\theta : cRd\}$$

3.2 Kongruence na turnaji

Definice 25. *Buď $\tau = (T; R)$ turnaj, pak $\theta \in \mathrm{Eq}A$ je kongruence, jestliže $\tau/\theta = (A/\theta; R/\theta)$ je turnaj.*

Nyní vyslovíme důležitou větu, abychom mohli rozhodnout kdy ekvivalence θ na turnaji T je kongruence a kdy není.

Tvrzení 15. *Buď $\tau = (T; R)$ turnaj a θ ekvivalence na něm. Pak je ekivavelentní*

1, θ je kongruence na turnaji

2, pro každé dvě různé třídy $[a]_\theta$, $[b]_\theta$ platí že: pro každé $a \in [a]_\theta$, $b \in [b]_\theta$ platí aRb, nebo pro každé $a \in [a]_\theta$, $b \in [b]_\theta$ platí bRa

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$

Protože R/θ je úplná, antisymetrická relace, potom platí, že $[a]_\theta \neq [b]_\theta$, $[a]_\theta \, R/\theta \, [b]_\theta$ nebo $[b]_\theta$, $R/\theta \, [a]_\theta$ ale ne současně oboje. Bez újmy na obecnosti $[a]_\theta \, R/\theta \, [b]_\theta$, potom pokud $x \in [a]_\theta, y \in [b]_\theta$, pak $yRx \Rightarrow [b]_\theta \, R/\theta \, [a]_\theta$ (spor). Z úplnosti plyne xRy.

$2 \Rightarrow 1$

i) Reflexivita: Nechť $a \in [a]_\theta$. Jelikož je R ekvivalencí, pak platí aRa což ihned implikuje $[a]_\theta R/\theta [a]_\theta$.

ii) Úplnost: Nechť $a \in [a]_\theta$, $b \in [b]_\theta$. Pak aRb nebo bRa, proto $[a]_\theta \, R/\theta \, [b]_\theta$ nebo $[b]_\theta R/\theta [a]_\theta$.

iii) Antisymetrie: Pokud by platilo, že $[a]_\theta R/\theta [b]_\theta$ a zároveň $[b]_\theta R/\theta [a]_\theta$, pak by existovaly prvky $a_1 \in [a]_\theta$, $b_1 \in [b]_\theta$ takové, že $a_1 R b_1$, ale také by existovaly prvky $a_2 \in [a]_\theta$, $b_2 \in [b]_\theta$ takové, že $b_2 R a_2$. Jelikož jsme předpokládali různost tříd $[a]_\theta$ a $[b]_\theta$, pak platí pouze existence $a_1 \in [a]_\theta$, $b_1 \in [b]_\theta$ takové, že $a_1 R b_1$, což vede k sporu.

□

Z předešlého tvrzení bezprostředně vyplývá následující kritérium.

Tvrzení 16. *Buď $\tau = (T; R)$ turnaj a θ ekvivalence na něm. Nechť $\langle x, y\rangle \in \theta$, $\langle x, z\rangle \notin \theta$.*

Pak θ je kongruence, jestliže xRz implikuje yRz a zároveň zRx implikuje zRy.

Nyní se ukážeme, že průnik dvou kongruencí na turnaji je opět kongruence. To bude nezbytné pro konstrukci algebraického svazu kongruencí.

Tvrzení 17. *Buď T turnaj a* θ_1 *a* $\theta_2 \in \mathrm{Con}T$*. Pak i* $\theta_1 \cap \theta_2 \in \mathrm{Con}T$*.*

Důkaz. Jelikož θ_1, θ_2 jsou ekvivalence, pak je jistě i $\theta_1 \cap \theta_2$ ekvivalence. Můžeme tedy podle ekvivalence $\theta_1 \cap \theta_2$ udělat rozklad turnaje T. Buďte třídy $[a]_{\theta_1 \cap \theta_2}$, $[b]_{\theta_1 \cap \theta_2}$, $[a]_{\theta_1 \cap \theta_2} \neq [b]_{\theta_1 \cap \theta_2}$. Buďte $c \in [a]_{\theta_1 \cap \theta_2}$, $d_{\in [b] \theta_1 \cap \theta_2}$. Z definice kongruence plyne, že pro $c \in [a]_{\theta_1}$, $d \in [b]_{\theta_1}$ je buď cRd nebo dRc. Stejně tak pro $c \in [a]_{\theta_2}$, $d \in [b]_{\theta_2}$ je buď cRd nebo dRc. Odtud plyne, že pro každé $c \in [a]_{\theta_1 \cap \theta_2}$ a pro každé $d \in [b]_{\theta_1 \cap \theta_2}$ je buď cRd nebo dRc, tudíž $\theta_1 \cap \theta_2$ je kongruence. □

Tvrzení 18. *Buď T turnaj, pak* $\theta = \bigcap \{\theta_i \in \mathrm{Con}T; i \in I\}$ *je kongruence na T, kde I je libovolná indexová množina.*

Důkaz. Protože θ_i jsou ekvivalence, je zřejmé, že θ je ekvivalence a tedy indukuje rozklad na třídy. Buďte $[a]_\theta$, $[b]_\theta$ a nechť $c \in [a]_\theta$, $d \in [b]_\theta$. Pro některé $i \in I$ platí $[a]_{\theta_i} \neq [b]_{\theta_i}$. Z z předcházejícího tvrzení a z toho, že θ_i je kongruence plyne $[a]_\theta \subseteq [a]_{\theta i}$, $[b]_\theta \subseteq [b]_{\theta i}$. □

3.3 Svaz kongruencí

Tato kapitola je logickým vyústěním nabytých poznatků z teorie svazů a zejména teorie uzávěrových operátorů. Ukážeme, že množina kongruencí na libovolném turnaji tvoří úplný podsvaz množiny ekvivalencí na danom turnaji.

Tvrzení 19. *Buď* $\tau = (T; R)$ *turnaj. Pak* $(\mathrm{Con}T; \subseteq)$ *je úplným podsvazem svazu ekvivalencí na turnaji* T*.*

Důkaz. Ukázali jsme, že množina kongruencí je uzavřena na libovolné průniky. Vzhledem k větě 4 tedy $(\mathrm{Con}T, \subseteq)$ tvoří úplný svaz. Nyní dokážeme, že s jedná o podsvaz množiny ekvivalencí. Dokážeme, že

$$\bigvee_{i \in I} \theta_i = \theta = \bigcup_{k=1}^{infty} \theta_{i_1} \circ \theta_{i_2} \circ \theta_{i_k} : i_1, \ldots, i_k \in I\}$$

je kongruence. Nechť $\langle x, y \rangle \in \theta$ a $\langle x, z \rangle \notin \theta$ a předpokládejme, že platí xRz. Využijeme kritéria z tvrzení 16. Jelikož $\langle x, y \rangle \in \theta$, pak $\langle x, y \rangle \in \theta_{i_1} \circ \theta_{i_2} \circ \theta_{i_k}$, a proto existují prvky $x_0, x_1, \ldots, x_k$ takové, že platí $x_0 \theta_{i_1} x_1 \theta_{i_2} x_2 \ldots x_{k-1} \theta_{i_k} x_k$, kde $x_0 = x$ a $x_k = y$. Zřejmě $\langle x, z \rangle \notin \theta_i$ pro každé $i \in I$. Z toho, že θ_{i_1} je kongruence, plyne $x_1 R z$. Analogicky $x_2 R z, \ldots x_k R z$, nebo-li yRz. Tedy θ je kongruence. □

Tvrzení 20. *Buď $\tau = (T, R)$ turnaj. Pak $(\mathrm{Con}T; \subseteq)$ je algebraický svaz.*

Důkaz. Jestliže T je turnaj, potom zavedeme uzávěrový operátor C na množině T^2 takový, že se množině $R \subseteq R^2$ přiřadí nejmenší kongruence na turnaji T obsahující množinu R. Protože množina všech kongruencí tvoří úplný svaz, je tato definice korektní (přesněji množině R přiřadíme průnik všech kongruencí na turnaji T obsahující množinu R). Jestliže θ je libovolná relace ekvivalence na T, potom dokážeme, že platí: $xC(\theta)y$ tehdy a jen tehdy existují-li nějaké n-prvkové posloupnosti

$$x\theta a_1, \ldots, a_n\theta y \in T$$

a

$$x\theta b_1, \ldots, b_n\theta y \in T$$

takové, že $a_i\theta b_i$ pro každé $i = 1 \ldots, n$ a platí-li

$$a_1Ra_2\theta a_3Ra_4\theta \ldots a_{n-1}Ra_n$$

. a také

$$b_nRb_{n-1}\theta b_{n-2}Rb_{n-3}\theta \ldots b_2Rb_1$$

.

Nejprve, jestliže $a\theta b$, potom jednoprvkové posloupnosti a a b splňují ihned předpoklady pro $a(C(\theta))b$. Proto $\theta \subseteq C(\theta)$ a v důsledku $C(\theta)$ je reflexivní.

Jestliže v definici $C(\theta)$ přehodíme posloupnosti $a_1, \ldots a_n$ a $b_1, \ldots b_n$ dokážeme, že relace $C(\theta)$ je symetrická.

Jestliže platí $x(C(\theta))y$ a $y(C(\theta))z$, potom existují posloupnosti

$$a_1Ra_2\theta a_3Ra_4\theta \ldots a_{n-1}Ra_n, \tag{1}$$

$$b_nRb_{n-1}\theta b_{n-2}R_{n-3}\theta \ldots b_2Rb_1, \tag{2}$$

$$c_1Rc_2\theta c_3Rc_4\theta \ldots c_{m-1}Rc_m, \tag{3}$$

$$d_mRd_{m-1}\theta d_{m-2}Rd_{m-3}\theta \ldots d_2Rd_1, \tag{4}$$

takové, že

- $x\theta a_1, b_1$,
- $a_n, b_n\theta y\theta c_1, d_1$,
- $c_m, d_m\theta z$,
- $a_i\theta b_i$ pro všechna $i = 1 \ldots n$,

– $c_i \theta d_i$ pro všechna $i = 1 \dots m$.

Nyní lze vidět, že „spojením“ posloupnosti (1) a (2) za sebe a (4) a (3) za sebe dokazuje, že $x(C(R))z$. Proto je $C(R)$ relace ekvivalence.

Předpokládáme-li, že θ je kongruence na turnaji T, potom platí pro libovolné $2i = 1, \dots, n$, že $a_{i-1} R a_i$, $b_i R b_{i-1}$ a navíc $a_{i-1} \theta b_{i-1}$ a $a_i \theta b_i$. Z kritéria kongruence 16 ihned plyne, že všechny čtyři prvky $a_{i-1}, a_i, b_{i-1}, b_i$ jsou navzájem ekvivalentní podle ekvivalence θ. Proto platí, že $C(\theta) = \theta$.

Analogicky z Věty 16 ihned plyne, že $C(\theta)$ je kongruence na turnaji T pro libovolnou relaci ekvivalenci θ. Proto také $CC(\theta) = C(\theta)$.

Nyní dokážeeme, že operátor C zavedený na množině T^2 je algebraický. Jestliže $R \subseteq T^2$, potom $Eq\, R$ je relace ekvivalence. Protože $C(R)$ je také ekvivalence, platí $Eq\, R \subseteq C(R)$. V důsledku tako platí, že $C(Eq\, R) \subseteq CC(R) = C(R)$. Nyní již je vidět, že pokud $x(C(R))y$, potom platí,že

$$x(C(Eq\,(\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle)))).y$$

Jelikož

$$C(Eq\,(\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle))) = C(\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle),$$

platí, že operátor C je algebraický.

Dokázali jsme, že operátor C je algebraický, přičemž uzavřené prvky jsou právě kongruence na turnaji T. Proto také svaz kongruencí na turnaji je algebraický svaz.

$\square$

3.4 Turnaje z hlediska teorie grafů

Jak již bylo zmíněno, turnaje jsou především záležitostí teorie grafů. Náplní této závěrečné kapitoly bude zkoumání *Hamiltonovy kružnice* na turnaji.

Definice 26. *Turnaj je orientovaný graf, kde pro každou dvojici vrcholů u, v existuje buď hrana z u do v nebo z v do u, ale ne obě.*

Tvrzení 21. *Buď v vrchol mající maximální počet výstupní hran v turnaji T. Pak pro každý vrchol w v turnaji T existuje přímá cesta z v do w o délce maximálně 2.*

Důkaz. Buď m počet výstupních hran z vrcholu v a nechť $v_1, v_2, \ldots, v_m$ jsou všechny vrcholy, do kterých vede z vrcholu v hrana. Nechť turnaj T má n, pak každý ze zbývajících $n - m - 1$ vrcholů $u_1, u_2, \ldots, u_n - m - 1$ je z definice turnaje spojeno s v, tedy existují hrany z u_j do v, $1 \leq j \leq n - m - 1$.

Zřejmě cesta z v do v_i, $1 \leq i \leq m$, je délky 1. Zbývá dokázat, že existuje cesta délky 2 z v do v_j, $1 \leq j \leq n - m - 1$.

Buď vrchol u_j takový, že pokud existuje hrana z v_i u_j pro některé i, pak vv_iu_j je cesta požadovaného typu. Nyní předpokládejme, že existuje u_k, $1 \leq k \leq n - m - 1$, tak že žádný vrchol v_i, $1 \leq i \leq m$, nemá hranu z v_1 do u_k. Avšak z definice turnaje pak musí z vrcholu u_k vést hrana do všech m vrcholů v_1. Jelikož vede i hrana z u_k do v, tak počet výstupních hran z $u_k \geq m + 1$. Což je spor s předpokladem, že v je vrchol mající maximální počet výstupních hran v Turnaji T. Tudíž každý u_j musí mít hranu z nějakého v_i, a tak je důkaz hotový.

□

Nyní si zavedeme dva pojmy, který jsou hlavní náplní této kapitoly.

Definice 27. Direktní Hamiltonova cesta *v orientovaném grafu je cesta obsahující všechny vrcholy.*

Definice 28. Hamiltonovskou kružnicí (cyklem) *v orientovaném grafu je kružnice (cyklus) procházející každým vrcholem grafu, a která má počáteční i koncový vrchol totožný.*

Tvrzení 22. *Každý turnaj T má direktní Hamiltonovu cestu.*

Důkaz. Nechť T má n vrcholů. Pro $n = 1, 2, 3$ je existence Direktní Hamiltonovy cesty zjevná. Tudíž předpokládejme $n \geq 4$.

Zvolme takové n a předpokládejme, že věta platí pro všechny turnaje o $n - 1$ vrcholech. Buď v vrchol turnaje T. Pak $T - v$ má $n - 1$ vrcholů, a tak díky výše zmíněné poznámce je $T-v$ turnaj, tudíž dle předpokladu je v tomto turnaji direktní Hamiltonova cesta. Buď $P = v_1v_2\dots v_{n-1}$ taková cesta.

Nyní pokud existuje hrana z v do v_1, pak

$$P' = vv_1v_2\dots v_{n-1}$$

je direktní Hamiltonova cesta v T. Podobně pokud existuje hrana z v_{n-1} do v pak

$$P'' = v_1v_2\dots v_{n-1}v$$

je direktní Hamiltoonova cesta v T. Tudíž v obou případech jsme hotovi.

Můžeme tedy předpokládat, že neexistují hrany z v do v_1 a z v_{n-1} do v. Pak existuje nejméně jeden vrchol w na cestě P s vlastností, že existuje hrana z w do v a w není v_{n-1}. Buď v_i poslední takový vrchol na P s danou vlastností, čili vrchol $vi+1$ nemá tuto vlastnost. Pak konkrétně existují hrany z v_1 do v a z v do $vi+1$, jak je ilustrováno na obrázku. Avšak pak

$$Q = v_1v_2\dots v_ivv_{i+1}v_{i+2}\dots v_{n-1}$$

je direktní Hamiltonova cesta v D. Důkaz byl proveden matematickou indukcí. □

Nyní se vrátíme zpátky k chápání turnaje jako relační systém. Nejprve si zadefinujeme *extrém* turnaje.

Definice 29. *Buď $\tau = (T;R)$ turnaj a prvek $a \in A$. Potom a nazveme* maximem turnaje*, platí-li aRx pro každé $x \in T$. Analogicky a nazveme* mimimem turnaje*, platí-li xRa pro každé $x \in T$. Existuje-li v turnaji T maximum nebo minimum, potom řekneme, že se jedná o* turnaj s extrémem.

Turnaj tedy může mít zároveň maximum i minimum, ale nemusí mít ani jeden z extrémů. Zřejmě ale může mít nejvýše jedno maximum a nejvýše jedno minimum.

Definice 30. *Hamiltonovská kružnice na relačním systému (M,R) se dá interpretovat jako posloupnost $a_1Ra_2R\dots Ra_nRa_1$, kde prvky $a_1Ra_2\dots a_n$ jsou právě všechny prvky množiny M.*

Tvrzení 23. *Je-li $\tau = (T;R)$ turnaj s extrémem, pak v daném turnaji neexistuje Hamiltonova kružnice.*

Důkaz. Jelikož pro extrémní prvek $a \in T$ platí buď aRx pro každé $x \in T$ nebo xRa pro každé $x \in T$, pak zřejmě neexistuje posloupnost $a_1Ra_2R\dots Ra_nRa_1$ a tudíž daný turnaj nemá Hamiltonovskou kružnici. □

Nosičem Hamiltonovské kružnice rozumíme množinu prvků této kružnice. Řekneme, že kružnice má v daném grafu maximální nosič (nebo zkráceně, že kružnice je maximální), jestliže v daném grafu neexistuje kružnice, jejíž nosič je ostrou nadmnožinou původní kružnice.

Tvrzení 24. *Mějme konečný turnaj T. Zavedeme-li ekvivalenci θ tak, že platí $x\theta y$ tehdy a jen tehdy, leží-li na stejné maximální kružnici, potom θ je ekvivalence na turnaji a T/θ je lineárně uspořádaná množina.*

Důkaz. Jestliže dvě kružnice mají průsečík, potom snadno existuje kružnice, která spojuje obě původní. Proto dvě maximální kružnice nemají průsečík.

Mějme dvě různé kružnice A a B. Existují-li prvky $a_1, a_2 \in A$ a $b_1, b_2 \in B$ takové, že $a_1 R b_1$ a $b_2 R a_2$, potom lze snadno sestavit z prvků kružnic A a B takovou kružnici, která protíná obě kružnice A i B. Z kritéria 16 plyne, že zavedená relace kongruence na turnaji T.

Nyní konečně, jestliže A, B a C jsou kružnice takové, že $A(T/\theta)B$, $B(T/\theta)C$ a $C(T/\theta)A$, potom opět lze snadno sestavit kružnici, která protíná všechny tři kužnice. Což je spor. Vzhledem k tomu, že T/θ je úpná relace, musí být T/θ tranzitivní. Důsledkem je, že T/θ je turnaj. $\square$

4 Závěr

Cílem této práce bylo ukázat základní vlastnosti turnajů a kongruencí na nich. Podařilo se nám dokázat, že svaz kongruencí na turnaji tvoří algebraický svaz. V poslední kapitole jsme uvedli pár souvislostí s teorií grafů.