UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Historie čísla e

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Miloslav Závodný
Rok odevzdání: 2014

Vypracovala:
Andrea Ježková
MATEKO, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením RNDr. Miloslava Závodného a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu použité literatury.

V Olomouci dne 4. 4. 2014

Poděkování

Ráda bych poděkovala RNDr. Miloslavu Závodnému za vstřícný přístup, pomoc a podporu při psaní bakalářské práce.

Obsah

Úvod

Tématem mé bakalářské práce je *Historie čísla* e. Symbolem e je značeno tzv. Eulerovo číslo, a je to jedna z nejdůležitějších konstant nejen v matematice, přestože jde o číslo iracionální, tj. nerozumné.

e = 2,718 281 828 459 045 235 360 287 471 352 662 497 757 247 093 699 959 574 966 967 627 724 076 630 353 547 594 571 382 178 525 166 427 427 466 391 932 003 059 921 817 413 596 629 043 572 900 334 295 260 595 630 738 132 328 627 943 490 763 233 829 880 753 195 251 019 011 573 834 187 930 702 154 089 149 934 884 167 509 244 761 460 668 082 264 800 168 477 411 853 742 345 442 437 107 539 077 744 992 069 551 702 761 838 606 261 331 384 583 000 752 044 933 826 560 297 606 737 113 200 709 328 709 127 443 747 047 230 696 977 209 310 141 692 836 819 025 515 108 657 463 772 111 252 389 784 425 056 953 696 770 785 449 969 967 946 864 454 905 987 931 636 889 230 098 793 127 736 178 215 424 999 229 576 351 482 208 269 895 193 668 033 182 528 869 398 496 465 105 820 939 239 829 488 793 320 362 509 443 117 301 238 197 068 416 140 397 019 837 679 320 683 282 376 464 804 295 311 802 328 782 509 819 455 815 301 756 717 361 332 069 811 250 996 181 881 593 041 690 351 598 888 519 345 807 273 866 738 589 422 879 228 499 892 086 805 825 749 279 610 484 198 444 363 463 244 968 487 560 233 624 827 041 978 623 209 002 160 990 235 304 369 941 849 146 314 093 431 738 143 640 546 253 152 096 183 690 888 707 016 768 396 424 378 140 592 714 563 549 061 303 107 208 510 383 750 510 115 747 704 171 898 610 687 396 965 521 267 154 688 957 035 035...

V práci chci ukázat, jak bylo Eulerovo číslo „nalezeno“, které nejdůležitější úlohy s ním souvisí a kde všude s ním musíme „počítat“.

1. Číslo e

1.1. Předpoklady zrodu konstanty e

S rozvojem astronomie v 16. a 17. století v souvislosti s novými pozorováními planet a komet bylo nutné provádět zdlouhavé numerické výpočty. Tycho Brahe, Johannes Kepler a další počítali až s deseti platnými číslicemi. Bylo přirozené, že matematici hledali cesty, jak tyto výpočty zjednodušit. Francouzský matematik François Viète (1540–1603) k tomu užil vztah, který sám odvodil:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Jde o upravený vzorec pro součet kosinů $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

Mějme např. čísla $a = 52\,383$ a $b = 84\,396$. S využitím svého vzorce a pomocí svých tabulek postupoval Viète takto, viz [3]:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha = 0{,}523\,83 \Rightarrow \alpha &= 58{,}410\,487\,224^\circ \\
\cos\beta = 0{,}843\,92 \Rightarrow \beta &= 32{,}443\,593\,209^\circ \\
-\,-\,-\,-\,- \quad & \quad -\,-\,-\,- \\
\alpha+\beta &= 90{,}854\,080\,433^\circ \\
\alpha-\beta &= 25{,}966\,894\,014^\circ \\
-\,-\,-\,-\,- \quad & \quad -\,-\,-\,- \\
\cos(\alpha+\beta) &= -0{,}014\,905\,963 \\
\cos(\alpha-\beta) &= 0{,}899\,047\,190 \\
-\,-\,-\,-\,- \quad & \quad -\,-\,-\,- \\
\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2} &= 0{,}442\,070\,613\,6
\end{aligned}$$

Vyšlo $ab = 4420706136$. Správnost Viètova výpočtu si dnes můžeme rychle ověřit kalkulačkou.

Jen o málo později dostali astronomové další výhodnou pomůcku k výpočtům – logaritmy (Napier, Bürgi). Při násobení, resp. dělení, mocnin o stejném základu se jejich exponenty sčítají, resp. odčítají. Stačí tedy sestavit tabulky, v nich číslům přiřadit mocnitele zvoleného základu (logaritmus při tomto základu) a např. při hledání součinu čísel najít v tabulkách příslušné mocnitele (exponenty), sečíst je, a zpětně v tabulkách najít odpovídající číslo. Postup je to jistě jednodušší, než uvedený výpočet s využitím goniometrických funkcí.

1.2. John Napier (1550–1617)

Ulehčit matematikům výpočty se snažil skotský matematik John Napier.

Obr. 1: Portrét Johna Napiera, datován 1616; vystaven na Univ. of Edinburgh[1)]

Ve své době byl ceněn za tzv. *Napierovy kosti (Napier's Bones)*, které umožňovali mechanický výpočet součinů a mocnin za předpokladu, že alespoň jedno z násobených čísel bylo jednociferné. Těmito „kostmi" bylo deset hůlek, na kterých byla vyryta multiplikační tabulka [9].

[1)] zdroj: http://commons.wikimedia.org

Výpočet např. $9 \times 6\ 497$ vypadal takto:

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0/0	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
3	0/0	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
4	0/0	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
5	0/0	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
6	0/0	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
7	0/0	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
8	0/0	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
9	0/0	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

$$\begin{array}{rr}
9 \times 6(1000) = & 54\ 000 \\
9 \times 4(100) = & +3\ 600 \\
9 \times 9(10) = & +810 \\
9 \times 7(1) = & +63 \\
\hline
9 \times 6\ 497 = & 58\ 473
\end{array}$$

Klíčovou roli však v historii čísla e Napier sehrál, když v roce 1614 publikoval knihu *Mirifici logaritmorum canonis descriptio (Popsání podivuhodného zákona logaritmů).* Tato kniha neobsahovala pouze pravidla pro počítání s logaritmy, ale také v ní byla příloha, která obsahovala tabulku funkčních hodnot přirozených logaritmů funkce sinus. Ty umožňovaly převést násobení a dělení, na sčítání a odčítání. Nešlo však o logaritmování v dnešním smyslu slova, Napierův přístup je patrný z následující ukázky strany 2 z knihy *Mirifici logaritmorum canonis descriptio* [2)]. Posmrtně, r. 1619, vyšla Napierova druhá práce *Mirifici logarithmorum canonis constructio…* kde je vysvětleno, jak logaritmy počítat, [6]. Dnes znají lidé Napiera jako vynálezce logaritmů.

[2)] Více se lze dozvědět v [9, A Description of the Admirable Table of Logarithms].

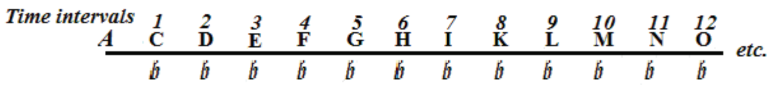
První zmínka o konstantě e se objevuje v pracích Johna Napiera v roce 1618. Její historie je tedy úzce spojena s logaritmy.

John Napier's MIRIFICI LOGARITHMORUM CANONIS DESCRIPTIO 2
LIBER I (Translated and annotated by Ian Bruce.)

***BOOK* 1.**

Chapter 1.
Concerning Definitions.

Def. 1. ***A line is said to increase uniformly, when the point describing it progresses through equal intervals in equal moments or intervals of time.***



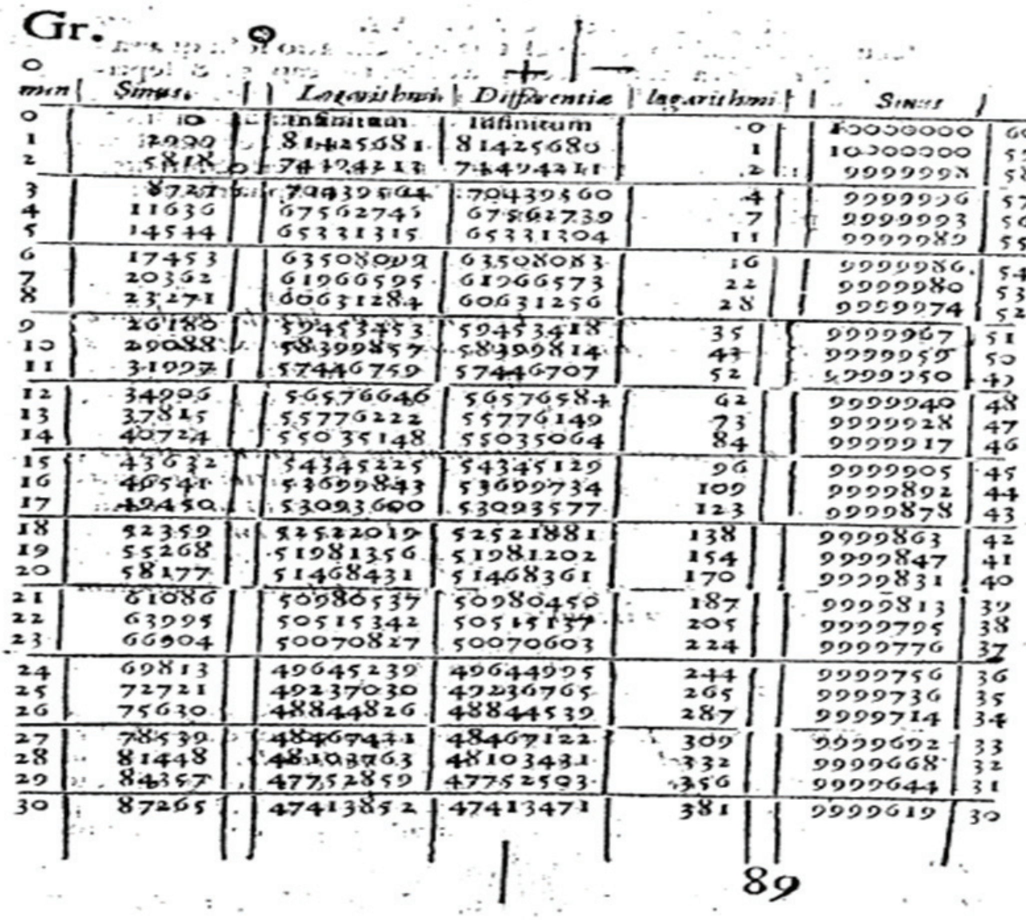
There is a point A, from which a line can be drawn by the flow [*i.e.* regular motion] of another point B, and hence in the first moment [or interval of time] B flows from A to C. In the second moment, from C to D. In the third moment from D to E; and thus henceforth indefinitely, describing the line A C D E F etc. by the equal intervals AC, CD, DE, EF, and with the rest equal successively, and described in equal intervals of time. This line can be said to increase equally by the definition treated above.

Cor. ***From this it is necessary that equally differing quantities are produced by equally differing increments of time.***

Since in the above figure, in a single moment B has progressed from A to C, and in three moments from A to E. Thus in six moments, B has progressed from A to H, and in eight moments from A to K. Moreover, the differences of these moments of time, one and three, and of the other six and eight, obviously are equal to two. Thus also, as above, there are equal differences of these quantities, AC and AE, CE ; and of these AH and AK, HK

Def. 2. ***A line is said to decrease proportionally in becoming shorter, when the point describing the line in equal moments of time, continually cuts off segments in the same ratio to the length of the line left, from which they are being cut off.***

Obr. 2



Gr. 0

min	Sinus	Logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	
0	0	Infinitum	Infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562745	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52
9	26180	59453453	59453418	35	9999967	51
10	29088	58399857	58399814	43	9999959	50
11	31997	57446759	57446707	52	9999950	49
12	34906	56576646	56576584	62	9999940	48
13	37815	55776222	55776149	73	9999928	47
14	40724	55035148	55035064	84	9999917	46
15	43632	54345225	54345129	96	9999905	45
16	46541	53699843	53699734	109	9999892	44
17	49450	53093600	53093577	123	9999878	43
18	52359	52522019	52521881	138	9999863	42
19	55268	51981356	51981202	154	9999847	41
20	58177	51468431	51468361	170	9999831	40
21	61086	50980537	50980450	187	9999813	39
22	63995	50515342	50515137	205	9999795	38
23	66904	50070827	50070603	224	9999776	37
24	69813	49645239	49644995	244	9999756	36
25	72721	49237030	49236765	265	9999736	35
26	75630	48844826	48844539	287	9999714	34
27	78539	48467431	48467122	309	9999692	33
28	81448	48103763	48103431	332	9999668	32
29	84357	47752859	47752593	356	9999644	31
30	87265	47413852	47413471	381	9999619	30

89

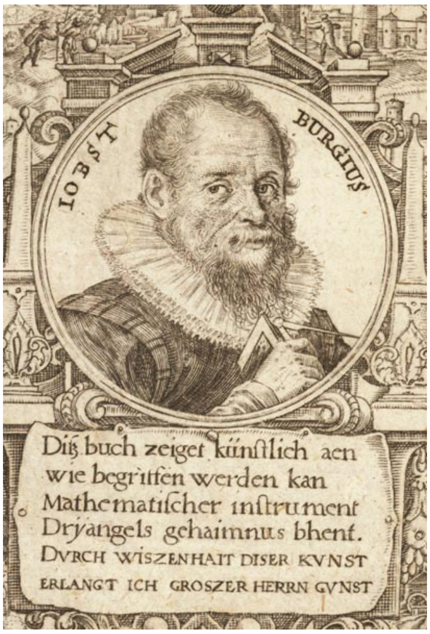
Obr. 3: Ukázka tabulky z knihy *Mirifici logaritmorum canonis descriptio*

1.3. Joost Bürgi (1552–1632)

Joost Bürgi se narodil v Lichtensteigu ve Švýcarsku (informace o Bürgim jsou převzaty z [11]). Vyučil se hodinářem, odešel do Štrasburku, kde se podílel na stavbě astronomických hodin na věži místní katedrály, které navrhl matematik Konrad Dasypodius. Od něho se Bürgi naučil základům vyšší matematiky, přestože měl jen základní vzdělání. Po odchodu ze Švýcarska žil v Německu a v Čechách (1605–1631 v Praze).

Bürgi se zabýval usnadněním matematických výpočtů důležitých pro astronomii. Šlo o zjednodušení výpočtů tabulek hodnot goniometrických funkcí, které se pro tyto výpočty používaly, viz odstavec 1.1.

S prací začal v roce 1585. Jeho tabulky *Canon Sinuum*, používal při svých výpočtech Jan Kepler. Kolem roku 1611 byl Bürgi s prací na svých tabulkách hotov. S vydáním tabulek však otálel a tím přišel o prvenství, předstihl jej Napier a nový početní nástroj nazval logaritmy. Bürgiho tabulky *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen (Pokrokové aritmetické a geometrické tabulky)* vyšly v Praze až v roce 1620.



Obr. 4: Joost Bürgi[3)]

Bürgiho tabulky používal především Kepler, jinak se příliš nerozšířily. O Bürgiho prvenství svědčí Keplerova poznámka v Rudolfínských tabulkách z roku 1627: „Bürgi, člověk váhavec a strážce svých tajemství opustil plod při porodu a nevychoval jej k veřejnému užitku … jeho tabulky vznikly mnoho let před Napierovým vydáním.“

Konstanta e se tak díky Bürgiho váhání poprvé „projevila“ roku 1618 v práci Johna Napiera. Samotný objev konstanty (někdy zvané Napierova konstanta) je však připisován Jacobu Bernoullimu.

Napierova podnětu využil anglický matematik Henry Briggs (1556–1630), který v díle *Arithmetica logarithmia* uvedl logaritmické tabulky celých čísel od 1

[3)] zdroj: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Jost_Bürgi_Porträt.jpg do 20 000 a od 90 000 do 100 000. Na objevu logaritmů se podílel i holandský geometr Ezechiel de Decker, který jim dal současnou podobu. Roku 1622 pak sestavil William Oughred (1575–1660) logaritmické pravítko, viz [4].

Zkoumáním logaritmů se zabýval také E. Torricelli a r. 1646 nakreslil graf logaritmické funkce, tzv. logaritmickou křivku, do dopisu Ch. Huygensovi. Ten hledal r. 1651 číslo a tak, aby plocha omezená křivkami $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = a$ („kvadratura hyperboly") měla jednotkovou velikost, viz. [6].[4].

1.4. Jacob Bernoulli (1654–1705)

Jacob Bernoulli byl významný švýcarský matematik a fyzik.

Obr. 5: Jakob Bernoulli[5]

Bernoulli se snažil vypořádat s problémem složeného úrokování a došel k limitě tvaru

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

V [10] je uveden tento příklad: Na účtu máme částku 1.00, roční úroková míra je 100 %. Jestliže připíšeme úrok jednou, až na konci roku, budeme mít 2.00. Je-li

[4]Hledaným číslem je číslo e. Až r. 1675 G. W. Leibniz přišel se vztahem $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x$ (pro $x > 0$). Výpočtem hodnoty čísla e se zabýval i Isaac Newton, který konstantu zapsal pomocí součtu nekonečné řady.

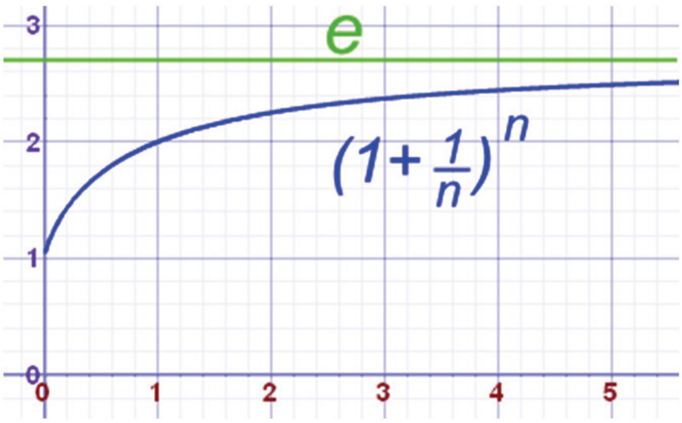
[5]zdroj: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jakob_Bernoulli.jpg

úrok připisován každého půl roku, musíme částku 1.00 násobit 1.5 dvakrát (50 % úroku z částky 1.00 nám připíší za půl roku, ale na konci roku již dostaneme 50 % z částky zvýšené během předchozího půlroku). Budeme tak mít $1.5^2 = 2.25$. Při čtvrtletním úročení budeme na konci roku mít $1.25^4 = 2.4414\ldots$, při měsíčním úročení $(1.0833\ldots)^{12} = 2.613035\ldots$ atd. až při týdenním připisování úroku bude na našem účtu $2.692597\ldots$, zatímco při denním $2.714567\ldots$

Obecně, rozdělíme-li dané období na n intervalů, se ziskem $\frac{100\ \%}{n}$ v každém z nich, bude částka na účtu na konci období

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Pro velké n se tato částka blíží Napierově konstantě.



Obr. 6

Pro zajímavost uvádíme hodnotu uvedeného výrazu, získanou pomocí programu Matlabu, pro některá n:

$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2.593\,742\,460\ldots$

$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2.704\,813\,829\ldots$

$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2.716\,923\,932\ldots$

$\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2.718\,145\,926\ldots$

$\left(1+\frac{1}{100000}\right)^{100000} = 2.718\,268\,237\ldots$

$\left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2.718\,280\,469\ldots$

$\left(1 + \frac{1}{1000000000}\right)^{1000000000} = 2.718\,282\,052\ldots$

Symbol e byl k označení zmíněné limity použit v roce 1728 matematikem Leonhardem Eulerem. Od této doby je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

(Někdy se za rok použití značky e uvádí r. 1736, jindy r. 1727, námi uvedené datum vychází z poznámky na reprodukci strany z Eulerovy knihy, obr. 8, str. 16.)

1.5. Leonhard Euler (1707–1783)

Leonhard Euler byl významný švýcarský matematik a fyzik, narodil se v Basileji r. 1707, zemřel v Petrohradě r. 1783. Svůj život prožil mimo Švýcarsko, a to v Německu a v Rusku.

Obr. 7: Leonhard Euler[6)]

Leonhard Euler působil v rozmanitých oblastech matematiky. Byl významný také v oblasti mechaniky, optiky a astronomie. Je považován za největšího ma-

[6)]zdroj: http://http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/Leonhard_Euler_2.jpg tematika všech dob. Jeho podoba je na švýcarské desetifrankové bankovce, na švýcarských, německých a ruských poštovních známkách.

Euler zavedl pojem funkce: „Funkce proměnné veličiny je analytický výraz, který lze nějakým způsobem sestavit z proměnné veličiny, čísel a konstantních veličin.“ Zavedl označení $f(x)$ (r. 1734), představující funkci f aplikovanou na argument x. Použil také písmeno e (r. 1728) pro označení základu přirozeného logaritmu, řecké písmeno Σ (r. 1755) pro sčítání a písmeno i pro $\sqrt{-1}$ (r. 1777). Také podpořil používání řeckého písmena π k označení poměru obvodu kruhu k jeho průměru, a to i přes to, že nepocházelo od něho.

Euler je jediný matematik, po němž jsou pojmenovaná dvě čísla, a to číslo e (o němž je tato práce), a Eulerova–Mascheroniho konstanta γ, kde

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right),$$

s přibližnou hodnotou 0,57721.

Leonhard Euler se zabýval diferenciálním a integrálním počtem, jeho myšlenky vedly k pokrokům v matematice. Zkoumal také vyjádření funkcí pomocí součtu řad, např.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

Odtud

$$\mathrm{e} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

Euler jako první odvodil řetězový zlomek pro číslo e:

$$\mathrm{e} = (2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, \ldots, 2m, 1, 1, \ldots) = (2, (1, 2m, 1))_{m\geq 1}.$$

Pro číslo e tak známe (na rozdíl od čísla π) vytvořující zákon jeho řetězového zlomku. Důkaz tohoto vytvořujícího zákonu lze nalézt v knize [7]. Podobě bylo dokázáno, že

$$\mathrm{e}^2 = (7, 2, 1, 1, 3, 18, 5, 1, 1, 6, 30, 8, 1, 1, 9, 42, \ldots),$$

neboli $\mathrm{e}^2 = (7, (3m-1, 1, 1, 3m, 12m+6))_{m\geq 1}$, viz [1] .

Uveďme pro zajímavost ještě další formule, odvozenou Eulerem (pro $a \geq 1$):

$$\frac{\mathrm{e}^{2/a}+1}{\mathrm{e}^{2/a}-1} = (a, 3a, 5a, 7a, \ldots),$$

speciálně tedy

$$\frac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}^2-1} = (1, 3, 5, 7, \ldots), \qquad \frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1} = (2, 6, 10, 14, \ldots).$$

$$\frac{\mathrm{e}-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\ldots}}}}}$$

a

$$\mathrm{e}-1 = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}}}}}$$

Tyto zlomky ukazují na to, že číslo e nebude racionální, viz [8]. Uznává se, že Euler dokázal iracionalitu čísla e.

Euler studoval také funkce v oboru komplexních čísel. Ve svém díle *Introductio in analysin infinitorum* (1748), uvedl pro reálné x vztah

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x. \qquad (*)$$

(Na pravé straně rovnosti se vyskytuje komplexní jednotka vyjádřená v goniometrickém tvaru.)

qui termini, si in fractiones decimales convertantur atque actu addantur, praebebunt hunc valorem pro a

$$2{,}71828\,18284\,59045\,23536\,028,$$

cuius ultima adhuc nota veritati est consentanea.

Quodsi iam ex hac basi logarithmi construantur, ii vocari solent logarithmi *naturales* seu *hyperbolici*, quoniam quadratura hyperbolae per istiusmodi logarithmos exprimi potest. Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,71828 18284 59 etc. constanter litteram

$$e,$$

quae ergo denotabit basin logarithmorum naturalium seu hyperbolicorum[1]), cui respondet valor litterae $k = 1$; sive haec littera e quoque exprimet summam huius seriei

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc. in infinitum.}$$

123. Logarithmi ergo hyperbolici hanc habebunt proprietatem, ut numeri $1+\omega$ logarithmus sit $=\omega$ denotante ω quantitatem infinite parvam, atque cum ex hac proprietate valor $k=1$ innotescat, omnium numerorum logarithmi hyperbolici exhiberi poterunt. Erit ergo posita e pro numero supra invento perpetuo

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

Ipsi vero logarithmi hyperbolici ex his seriebus invenientur, quibus est

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \text{etc.}$$

et

$$l\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \text{etc.},$$

1) Hac littera e EULERUS iam a. 1728 basin logarithmorum naturalium designaverat; confer G. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 14_3, p. 81, et 5_3, p. 310. Haec eadem significatio occurrit constanter in libro, qui inscribitur *Mechanica sive motus scientia analytice exposita,* Petropoli 1736; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series II, vol. 1 et 2. In Commentatione quidem 28 (indicis ENESTROEMIANI): *Specimen de constructione aequationum differentialium etc.*, Comment. acad. sc. Petrop. 6 (1732/3), 1738, *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 20, p. 1, invenitur (uti etiam antea) loco litterae e littera c, haec autem dissertatio iam a. 1733 scripta est. A. K.

Obr. 8[7]

[7]Euler, Leonhard (1707–1783). Opera mathematica. Volumen VIII, Leonhardi Euleri introductio in analysin infinitorum. Tomus primus / ediderunt Adolf Krazer et Ferdinand Rudio. 1922, str. 128. Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Zvláštní případ výše uvedeného vzorce, kdy $x = \pi$, je známý jako Eulerova identita

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0.$$

Tento vzorec je dnes považován za „nejkrásnější matematický vzorec“. Z v něm vystupujících konstant 0, 1, i, π, e má konstanta e kratší historický vývoj, který ale sleduje vývoj moderní matematiky.

1.6. Číslo e a další matematikové

V roce 1864 Benjamin Peirce (1809–1880) napsal svým studentům na tabuli formuli

$$\mathrm{i}^{-\mathrm{i}} = \sqrt{\mathrm{e}^{\pi}}$$

a řekl jim: „Pánové, nemáme ani v nejmenší tušení, co tato rovnost znamená, ale můžeme si být jisti, že je to něco velmi důležitého.“ [8] Uvedený vztah získáme z Eulerova vztahu $(*)$ pro $x = \frac{\pi}{2}$.

Charles Hermite (1822–1901) dokázal r. 1873 , že e je transcendentní číslo. [8]

David Hilbert (1862–1943) na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži v roce 1900 představil v přednášce *Problémy matematiky* 23 problémů, kterými se chtěl zabývat. Jedním z těchto problémů byl důkaz toho, že je a^b je transcendentní číslo pro všechna algebraická čísla $a \neq 0, 1$ a iracionální číslo b. Nikdy toto tvrzení nedokázal, důkaz nebyl tak jednoduchý, jak předpokládal. [12] Jako příklad uvedl čísla $2^{\sqrt{2}}$ a e^{π}. (A. O. Gelfond dokázal nezávisle na T. Schneiderovi větu, dnes nazývanou Gelfondova–Schneiderova: Mějme algebraická čísla α a β a nechť navíc β je iracionální. Potom každá hodnota α^{β} je transcendentní.)

Otevřenou otázkou zůstává, zdali je e^{e} algebraické číslo, žádný matematik však toto neočekává.

1.7. Historie výpočtu desetinných míst konstanty e

Matematik	Rok	Počet desetinných míst
L. Euler	1748	23
W. Shanks	1853	137
W. Shanks	1871	205
J. M. Boorman	1884	346
J. von Neumann	1949	2 010
D. Shanks a J. W. Wrench	1961	100 265
S. Wozniak	1978	116 000
R. Nemiroff a J. Bonnell	1994	1 000 000
P. Demichel	1997	50 000 817
S. Wedeniwski	1999	869 894 101
X. Gourdon	1999	1 250 000 000
X. Gourdon a C. Martin	2000	3 221 225 472
X. Gourdon	2000	12 884 901 000
S. Kondo a X. Gourdon	2003	50 100 000 000
S. Kondo a S. Pagliarulo	2007	100 000 000 000
R. Bohara a S. Pagliarulo	2009	200 000 000 000
S. Kondo a A. J. Yee	2010	1 000 000 000 000

2. Číslo e v matematice

2.1. Důkaz existence čísla e

Uvedli jsme, že

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Musíme však ukázat, že tato limita existuje.

Důkaz probíhá ve 2 krocích: Ukážeme, že

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je neklesající,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je omezená shora.

ad 1) Označme $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Jestliže je posloupnost (a_n) neklesající, musí být $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n.$$

Protože pro $x > -1$ platí $(1+x)^n \geq (1+nx)$,[8] dostáváme

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.$$

Posloupnost (a_n) je tedy neklesající.

ad 2) Využijeme vztah

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Jeho důkaz se provádí matematickou indukcí.

[8] Dokazuje se matematickou indukcí: pro $n = 1$ je $1 + x \geq 1 + x$, při platnosti předpokladu máme $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2$ a $nx^2 > 0$.

Pro $k = 1$ máme $1 + \frac{1}{n} \le 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, a tedy $0 \le \frac{1}{n^2}$, a to platí.

Za předpokladu platnosti vzorce pro k ukážeme, že vzorec platí i pro $k + 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k} \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} = 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k^2+k}{n^2} + \frac{k^2}{n^3},$$

ale protože $k \le n$ je $k^2 \le kn$, tedy

$$\frac{k^2}{n^3} \le \frac{kn}{n^3} = \frac{k}{n^2} \le \frac{k+1}{n^2},$$

proto

$$1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k^2+k}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} \le 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k(k+1)}{n^2} + \frac{k+1}{n^2} =$$

$$= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k+1}{n^2} \cdot (k+1) = 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2},$$

což jsme měli dokázat.

Speciálně pro $k = n$ dostaneme

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \le 3.$$

Posloupnost $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je tedy neklesající a omezená shora, proto má limitu. Tato limita se značí e.

2.2. Exponenciální a logaritmické funkce

Definice 1 *Exponenciální funkcí* o základu $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, nazýváme funkci

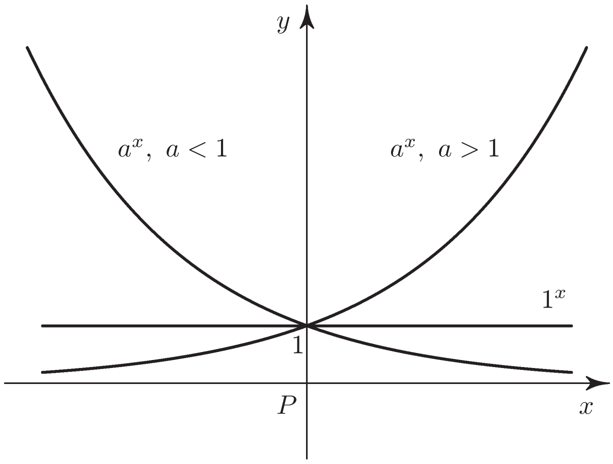
$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

a každou její část.

Funkce a^x je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $a < 1$.

Funkce a^x zobrazuje $(-\infty, +\infty)$ na $(0, +\infty)$, tj. nabývá jen kladných hodnot.

Grafy:



Význačnou exponenciální funkcí je e^x, kde základem je *číslo* e. Pro tuto funkci platí, že *přímka daná rovnicí* $y = x + 1$ *je tečnou grafu funkce* e^x. Takto je číslo e někdy definováno – jako základ exponenciální funkce jejíhož grafu se dotýká přímka daná rovnicí $y = x + 1$.

2.2.1. Logaritmická funkce

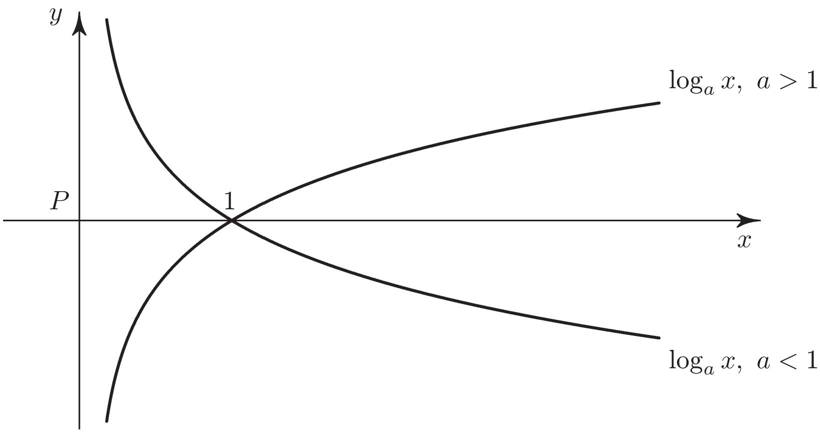
Definice 2 *Logaritmickou funkcí* o základu $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ nazýváme funkci inverzní k a^x. Značíme

$$f(x) = \log_a x, \quad x \in (0, +\infty).$$

Funkce $\log_a x$ je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $a < 1$.

Funkce $\log_a x$ zobrazuje $(0, +\infty)$ na $(-\infty, +\infty)$.

Grafy:



Protože

$$y = \log_a x \iff a^y = x,$$

platí

$$a^{\log_a x} = x.$$

Z tohoto vztahu můžeme dokázat, že

$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_b x$

S tabulkami hodnot jediné logaritmické funkce bychom výpočet předvedený na úvod naší práce provedli mnohem pohodlněji.

Význačnou logaritmickou funkcí je *přirozený logaritmus*, jehož základem je *číslo* e. Značíme ho $\ln x$.

2.2.2. Derivace funkce $\ln x$

Vypočteme

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \ln \frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \ln \left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{t\to\infty} \ln \left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{t}\right)^{t} = \lim_{t\to\infty} \ln \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x},$$

když jsme použili vztah $\lim\limits_{t\to\infty} \left(1 + \frac{a}{t}\right)^t = e^a$.

2.2.3. Derivace funkce e^x

Využijeme toho, že funkce e^x je inverzní k funkci $\ln x$. Tedy jestliže $y = \ln x$, inverzní funkcí je $x = \ln y$, takže

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}.$$

Funkční předpis $x = \ln y$ je totéž co $y = \mathrm{e}^x$, proto

$$\frac{dy}{dx} = y = \mathrm{e}^x.$$

Je tedy

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x.$$

2.2.4. Tečna k funkci e^x v bodě [0,1]

Uvedli jsme, že číslo e je někdy definováno jako základ exponenciální funkce jejíhož grafu se dotýká přímka daná rovnicí $y = x + 1$. Ukážeme, že tomu tak opravdu je a že žádná jiná exponenciální funkce tuto vlastnost nemá.

Předpokládejme, že tečna ke grafu funkce e^x v bodě $[0, 1]$ má rovnici $y = kx+q$, potom $k = (\mathrm{e}^x)'_{x=0} = 1$. Dostáváme tečnu ve tvaru $y = x + q$, kde parametr q musí splňovat vztah $1 = 0+q$, tj. $q = 1$. Tečna k funkci e^x v bodě $[0, 1]$ má rovnici $y = x + 1$.

Protože

$$(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{\ln a^x}\right)' = \left(\mathrm{e}^{x \ln a}\right)' = \mathrm{e}^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a,$$

má tečna ke grafu funkce a^x směrnici $\ln a$. Přímka $y = x + 1$ má s grafem funkce a^x společný bod $[0, 1]$, a protože pro $a \neq \mathrm{e}$ platí $\ln a \neq 1$, je přímka $y = x + 1$ sečnou grafů všech exponenciálních funkcí, právě s výjimkou grafu funkce e^x, jejíž je tečnou.

2.2.5. Číslo e jako součet řady

Definice 3 (viz [5]) Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a nechť funkce $f(x)$ má v bodě $c \in \mathbb{R}$ derivace až do řádu n. Polynom $T_n(x)$ daný vztahem

$$T_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

se nazývá *Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ v bodě c.*

V případě, že $c = 0$, se $T_n(x)$ nazývá *Maclaurinovým polynomem* a je tvaru

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jestliže má $f(x)$ v c derivaci řádu n, pak má $f(x)$ v c derivaci řádu $n-1$, a dále derivaci řádu $n-2$, atd. To znamená, že výroky „$f(x)$ má v c derivaci řádu n“ a „$f(x)$ má v bodě c derivace až do řádu n“ jsou ekvivalentní.

Taylorův polynom je jediný polynom stupně $\leq n$, který má s funkcí $f(x)$ v bodě c stejnou funkční hodnotu a stejnou funkční hodnotu všech derivací až do řádu n.

Definice 4 (viz [5]) Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a nechť funkce $f(x)$ má v bodě $c \in \mathbb{R}$ derivace až do řádu n. Nechť $T_n(x)$ je Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ v bodě c. Pak vztah

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$$

se nazývá *Taylorův vzorec* pro funkci $f(x)$ v bodě c. Funkce $R_{n+1}(x)$ se nazývá *zbytek v Taylorově vzorci* (nebo *Taylorův zbytek funkce $f(x)$ v bodě c*).

Pro $c = 0$ nazýváme uvedený vztah *Maclaurinovým vzorcem.*

V praxi za $R_{n+1}(x)$ volíme:

- *Lagrangeův tvar zbytku:*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \quad \xi \text{ leží mezi body } x \text{ a } c$$

- *Cauchyův tvar zbytku:*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-c)(x-\xi)^{n}, \quad \xi \text{ leží mezi body } x \text{ a } c$$

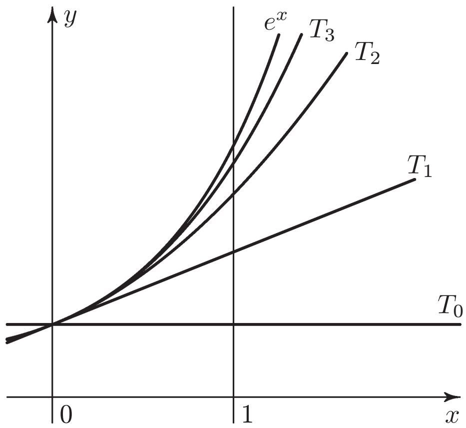
Maclaurinův vzorec pro funkci e^x má tvar

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad |\xi| < |x|,$$

kde zbytek má Langrangeův tvar.

Funkce e^x a její Maclaurinův polynom mají stejnou hodnotu v bodě 0 a rozdíl jejich hodnot v bodě 1 ukazují následující tabulky a obrázek ($\mathrm{e} \doteq 2{,}718$)

Maclaurinův polynom T	$T(1)$	$\mathrm{e} - T(1)$
$T_0(x) = 1$	$T_0(1) = 1$	$R_1(1) \doteq 1.718$
$T_1(x) = 1 + x$	$T_1(1) = 2$	$R_2(1) \doteq 0.718$
$T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$	$T_2(1) = 2.5$	$R_3(1) \doteq 0.218$
$T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$	$T_3(1) = 2.\overline{6}$	$R_4(1) \doteq 0.0513$



Definice 5 (viz [5]) Nechť $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $c \neq x$, a funkce $f(t)$ nechť má derivace všech řádů na uzavřeném intervalu, jehož krajní body jsou c, x. Platí-li

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots, \tag{$*$}$$

nazýváme pravou stranu rovnosti $(*)$, tj.

$$f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n,$$

Taylorovou řadou pro funkci $f(x)$ v bodě c.

Pro $c = 0$ nazýváme pravou stranu rovnosti $(*)$, tj.

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

Maclaurinovou řadou pro funkci $f(x)$.

Pro e^x a $\ln(1+x)$ dostáváme Maclaurinovy řady:

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$$

Speciálně:

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

2.3. Iracionálnost čísla e

Důkaz sporem, viz. [1, s. 96]. Ukázali jsme, že $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Předpokládejme, že e je racionální, dá se tedy vyjádřit zlomkem. Nechť tedy $\mathrm{e} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Pro $k \geq b$, $k \in \mathbb{Z}$, uvažujme výraz

$$c = k!\left(\mathrm{e} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{k!}\right). \qquad (**)$$

Pro $k \geq b$ je $k! \cdot \mathrm{e}$ celé číslo. Číslem b lze vydělit výraz $k!$, a tedy

$$k! \cdot \mathrm{e} = k! \cdot \frac{a}{b} = a \cdot \frac{k!}{b}.$$

Výsledkem je součin dvou celých čísel a a $\frac{k!}{b}$, a to je celé číslo.

Proto je i $c \in \mathbb{Z}$, neboť po roznásobení pravé strany v $(**)$

$$c = k!\mathrm{e} - k! - \frac{k!}{1!} - \frac{k!}{2!} - \dots - 1$$

dostaneme celá čísla.

Z rovnosti $(**)$ dále, po nahrazení e jeho Maclaurinovou řadou, plyne

$$0 < c = k!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{k!}\right) =$$

$$= k!\left(\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \dots\right) = \frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots <$$

$$< \frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)^2} + \dots = \frac{1}{(k+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(k+1)}} = \frac{1}{k},$$

neboť sčítáme geometrickou řadu s kvocientem $\frac{1}{(k+1)}$ a prvním členem $\frac{1}{(k+1)}$. Dostáváme $0 < c < \frac{1}{k}$, tedy $c \notin \mathbb{Z}$, což je spor se závěrem $c \in \mathbb{Z}$ plynoucím z předpokladu, že e je racionální. Tento předpoklad je tedy nesprávný, e je iracionální.

2.4. Kvadratura hyperboly

Eulerovo číslo je s hyperbolou spojené tak, jako kružnice s Ludolfovým číslem π. kvadratura hyperboly Ch. Huygens hledal číslo a takové, aby rovinný útvar rozprostřený mezi rovnoosou hyperbolou o rovnici $y = 1/x$, osou x a přímkami $x = 1$ a $x = a$ měl plochu o obsahu 1.

Dnes plochu pod hyperbolou vypočítáme pomocí integrálu:

$$\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = [\ln a - \ln 1] = \ln a - 0 = \ln a$$

Má-li být obsah uvedené plochy 1, musí $\ln a = 1$, a tedy $a = e$.

Závěr

Mým úkolem bylo podat přehled o tom, jak se číslo e objevilo a jak s ním bylo v historii nakládáno (používáno, zpřesňováno, apod.).

V práci jsem se tedy snažila o popsání historického vývoje Eulerova čísla. Pokoušela jsem se jeho dějiny uspořádat tak, aby byla jasná hlavní cesta vývoje našeho problému.

Čtenářům jsem ukázala, jak číslo e bylo nalezeno a jak někteří matematici s tímto číslem pracovali. K číslu e se dostalo mnoho z nich, způsoby jeho nalezení ale byly často odlišné, např. součet řady, kvadratura hyperboly (Huygens), limita (Bernoulli), logaritmy (Napier). Také jsem si všimla toho, jak se vyvíjel výpočet číslic za desetinnou čárkou tohoto čísla.

Historie čísla e není ale příliš bohatá, proto práce obsahuje i část, propojující různé formule obsahující číslo e a související s jeho historií. Přitom jsem se snažila, aby tato část byla logicky konzistentní. Začala jsem „Bernoulliovou limitou" a skončila Maclaurinovou řadou pro funkci e^x. Samozřejmě jsem nemohla vynechat zmínku o exponenciální a logaritmické funkci a definici čísla e jako základu exponenciální funkce jejíž tečnou je rovnoběžka s osou I. a III. kvadrantu kartézské soustavy souřadnic posunutá do bodu [0,1].

Při zpracování mé práce jsem využila dostupné informace z uvedené literatury. Použité zdroje byly často nejednotné v odpovědi na otázku, odkdy se značka e pro Eulerovo číslo používá. Mnoho zdrojů, ze kterých jsem čerpala bylo psáno v anglickém jazyce, jejich překlad mi také zlepšil angličtinu. Psaní mé práce pro mě bylo často zábavou, její téma mě velmi zaujalo.

Přála bych si, aby i její čtenář z ní měl potěšení a aby význam čísla e patřičně docenil.

Literatura

[1] Halaš, R.: Teorie čísel. Vydavatelství UP, Olomouc, 2014, 2. vyd. (skripta).

[2] Horděјčuk, V.: Eulerovo číslo. [online], dostupné z: http://voho.cz/wiki/matematika/eulerovo-cislo/ [cit. 22.1.2014].

[3] Jáchim, F.: François Viète a počátek novověké matematiky. Rozhledy matematicko-fyzikální **88** (2013), 23–26.

[4] Kašpárková, S.: Historický vývoj přírodovědného poznání (od starověku do konce 19. století). Fakulta humanitních studií UTB, Zlín, [online], dostupné z: http://www.google.cz/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCoQFjAA&url=http [cit. 22.1.2014].

[5] Kojecká, J.: Matematická analýza I. Vydavatelství UP, Olomouc, 1997 (skripta).

[6] Lefort, X.: History of the Logarithms: An Example of the Development of a Concept in Mathematics. [online], [cit. 23.1.2014], dostupné z: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:am9pgdjV3D0J:www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/fundoro/archivos.

[7] Ribenboim, P.: My Numbers, My Friends. Springer Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 2000.

[8] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/e.html

[9] http://www.johnnapier.com/

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Jacob_Bernoulli

[11] http://www.techmania.cz/edutorium/art_vedci.php?key=1021

[12] http://mathworld.wolfram.com/HilbertsProblems.html