Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra Matematiky

Klasické problémy řecké matematiky

Diplomová práce

Autor: Bc. Jan Šedina

Studijní program: N1101 - Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední školy

Učitelství pro střední školy- dějepis

Vedoucí práce: RNDr. Ladislava Francová Ph. D.

Hradec Králové 2016

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Zadání diplomové práce

Autor:	Bc. Jan Šedina
Studijní program:	N1101 - Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro střední školy Učitelství pro střední školy- dějepis

Název závěrečné práce:	**Klasické problémy řecké matematiky**
Název závěrečné práce AJ:	Classical Problems of Greek Mathematics

Cíl, metody, literatura, předpoklady:
Cílem práce je vysvětlit klasické problémy řecké matematiky, to znamená úlohy kvadratura kruhu, trisekce úhlu, zdvojení krychle, rektifikace kružnice a sestrojení pravidelných mnohoúhelníků. Literatura: Kolman, A.: Dějiny matematiky ve starověku.

Garantující pracoviště:	Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta
Vedoucí praxe:	RNDr. Ladislava Francová, Ph. D.
Konzultant:	
Oponent:	RNDr. Marie Kupčáková, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval pod vedením vedoucí diplomové práce samostatně a uvedl jsem všechny použité prameny a literaturu.

V Hradci Králové dne ...

Anotace

ŠEDINA, Jan. *Klasické problémy řecké matematiky,* Přírodovědecká fakulta Hradec Králové, 2016, 60 s. Diplomová práce.

Cílem práce je vysvětlit klasické problémy řecké matematiky, to znamená úlohy kvadratura kruhu, trisekce úhlu, zdvojení krychle, rektifikace kružnice a sestrojení pravidelných mnohoúhelníků. Úkolem práce je dále popsat požadavky na řešení těchto problémů, uvést nejrůznější způsoby jejich řešení od starověku až po současnost a v závěru práce zdůvodnit jejich neřešitelnost při daných požadavcích na jejich řešení.

Literatura: Kolman, A.: Dějiny matematiky ve starověku.

Klíčová slova: Trisekce úhlu, zdvojení krychle, rektifikace kružnice.

Anotace

ŠEDINA, Jan. *Classical Problems of Greek Mathematics* , Faculty Hradec Králové, 2016, 60.p Diploma thesis.

The aim of the thesis is to explain the classical problems of Greek mathematics: squaring a circle, angle trisection, doubling a cube, rectification of a circle and construction of regular polygons. Further goal is to describe conditions for solving these problems, to present various approaches to the solutions from antiquity to present days and to clarify the non-solvability determined by conditions on the solution.

Literature: Kolman, A.: History of mathematics in ancient times.

Keywords: Angle trisection, doubling a cube, rectification of a circle

Obsah

Úvod

Klasické řecké úlohy patří bezesporu k základům dějin matematiky. Jde o matematické problémy, které měly přímý vliv na pozdější vývoj, jelikož při snaze o jejich vyřešení se matematika mohla posunout v mnoha svých odvětvích. Zároveň prezentují to, čím je právě řecká matematika. Prezentují snahu najít přesné teoretické řešení problému i v okamžiku, kdy známe praktické prostředky, jak tyto úlohy vyřešit.

Já osobně jsem si téma nevybral z důvodu, že bych chtěl aplikovat nějaké své předchozí znalosti nebo že bych se po celý život zabýval historií matematiky. Hlavním důvodem bylo, že na rozdíl od jiných možných témat mi toto téma může dát dobrý základ pro další studium dějin matematiky.

Mým úkolem bude tyto problémy popsat, vysvětlit a zasadit do historického kontextu. Podobných prací vznikla celá řada, a já doufám, že moje práce bude mít alespoň nějaký přínos k této problematice.

Jsem rád, že mi škola tuto práci umožnila a chtěl bych zde hlavně poděkovat své vedoucí práce doktorce Ladislavě Francové, která mi poskytla potřebné rady a věnovala veškerý potřebný čas.

Legendy, historie a zavedení úloh.

Řecká geometrická algebra

Řecká matematika se začala úspěšně rozvíjet od 8. stol. př. n. l. Řekové oproti jiným národům, které používaly praktickou geometrii, začali uvažovat o souvislostech mezi matematickými vlastnostmi a mnohem větší důležitost přisuzovali matematickému důkazu a zobecnění matematických poznatků. Za první hlavní představitele můžeme považovat Tháleta z Milétu[1] a Pythágora ze Samu[2]. Pythágorás přispěl objevem nesouměřitelnosti (první krize matematiky) ke vzniku řecké geometrické algebry. Neschopnost vyjádřit hodnotu $\sqrt{a}$ číselně, ale možnost sestrojit úsečku o velikosti této hodnoty, vedla k představě, že jakýkoliv matematický problém lze vyřešit geometricky.

Postupným vývojem matematiky se ale objevily problémy, které geometricky vyřešit možné nebylo. Některé tyto problémy se začaly řadit mezi takzvané klasické řecké úlohy. Nejčastěji mezi ně řadíme kvadraturu kruhu, rektifikaci kružnice, konstrukci pravidelných mnohoúhelníků, trisekci úhlu a zdvojení krychle.

1 **Tháles z Míletu** (cca 624 – 546 př.n.l) První řecký filosof a také první představitel takzvané Míletské školy. Proslavil se hlavně předpověděním zatmění slunce (585 př.n.l). V matematice znám hlavně díky větě o obvodovém úhlu nad průměrem kružnice. Mimo matematiku je Tháles znám také objevy v astronomii. [Sv, s. 612]

2 **Pythágorás ze Samu** (590 – 500 př.n.l). Pro neshody s tyranem Polykratem odešel do jižní Itálie, kde založil školu. Škola měla podobu sekty a hrála významnou úlohu v politickém životě. Z matematického hlediska je potřeba zmínit Pythágorovu větu včetně dalších vlastností pravoúhlého trojúhelníka . Dále objevili dvanáctistěn a dvacetistěn, figurální čísla a různé aritmetické a geometrické posloupnosti, vztah mezi hudbou a matematikou, aritmetický, geometrický a harmonický průměr a znalosti přirozených čísel. Matematika pro ně měla až mystickou podobu a jako sekta byli hodně uzavření [Sv, s. 515],[RV].

Kvadratura kruhu a rektifikace půl kružnice

V každé kultuře se s kružnicí můžeme setkat jako s něčím mystickým. Není proto divu, že je, oproti jiným kuželosečkám, zařazena mezi základní problémy řecké matematiky. Jedná se o jednoduchý útvar, kterému každý rozumí, ale zároveň výpočet jeho některých vlastností není triviální. S výpočtem některých vlastností se můžeme setkat například u Archimeda[3], který měl vypočítat složení kovů v královské koruně. Koruna byla nejen bohatě zdobená, ale navíc kulatého tvaru, takže bylo obtížné vypočítat její objem [Vi, *Arch. VIII, 5*]. Archimédes sice výpočet obešel díky hydrostatické váze, ale otázku obvodu kruhu neopustil.

Dnes se poměr obvodu ku průměru značí řeckým symbolem π[4]. Pro výpočet této hodnoty se postupně dosazovala různá čísla. Babyloňané 3, 125 a Egypťané přibližně[5] 3,16 [Bec, s. 19 – 22]. V helénistickém období pak Archimédes použil opsaný a vepsaný 96-úhelník čímž se dostal na hodnoty 223/71 a 22/7. Hodnotu zpřesnil podobným způsobem arabský matematik Al – Kashi[6], když použil 805 306 368 – úhelník a dostal hodnotu přesnou na 16 desetinných míst [Ji, s.59]. Ludolph van Ceulen[7] provedl

3 **Archimedés ze Syrákus** (287 - 212 př. n. l.) Je považován za největšího vědce Antiky. Měl minimální vhled do filosofie a dalších humanitních věd. Proslavil se nejen jako matematik, ale hlavně jako mechanik. Kromě hledání vlastností kružnice je v matematice znám kvadraturou paraboly, definicí spirály, polopravidelnými tělesy a také svou metodou, kterou se velmi přiblížil k integrálnímu počtu. Z hlediska fyziky je pak znám zákonem páky, hydrostatického vztlaku a zákony optiky. Jeho život je znám spíše z různých legend a anekdot, které vypovídají právě o těchto objevech [Sv, s. 612].

4 Konstantu zavedl poprvé William Jones jako zkratku slova περίμετρος (obvod) [Bec2, s. 145].

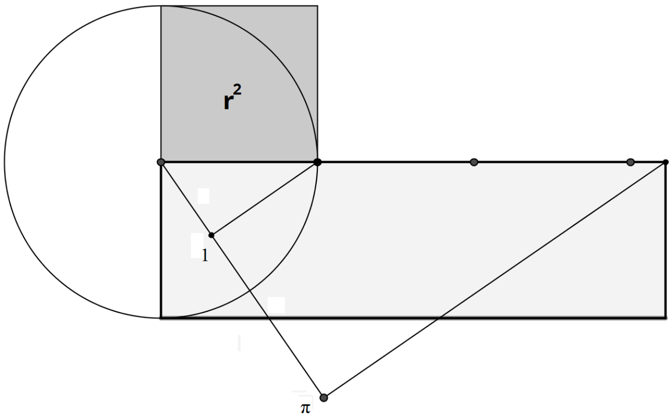
5 Babylon $3+\frac{1}{8}$, Egypt $4\cdot\frac{64}{81}$.

6 **Džemíd al-Káší** (cca 1350 – 1436) znám hlavně jako zprostředkovatel antické matematiky do novodobé Evropy. Arabská matematiaka řešila v této době hlavně kubické rovnice a rozšiřovala antické znalosti. On sám potom sestavil goniometrické tabulky [RV].

7 **Ludolph van Ceulen** (1540 - 1610) Jelikož hledání hodnoty π zasvětil celý život, nese tato hodnota jeho jméno. Pro výpočet používal stejnou metodu jako Archimédes.

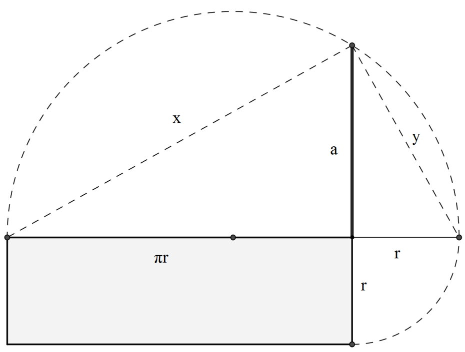
výpočet přes 4 611 686 018 427 387 904-úhelník [Bec2, s. 102]. Dnes se pro výpočet používá počítač, který je schopen najít hodnotu vypsanou na mnoho set stran.

Přesná hodnota π nebyla sice v historii známa, ale analogie druhých odmocnin dávala představu, že tuto hodnotu lze najít geometricky. Aby matematický problém měl formu praktického problému, má úloha podobu: najít ke kruhu čtverec, který bude mít stejný obsah.



Ilustrace 1

U libovolné kružnice, známe jen velikost poloměru. Jelikož vzorec pro obsah je $S=\pi\cdot r^2$, máme i jednu neznámou hodnotu: π. Kdybychom věděli, jak úsečku o velikosti π zkonstruovat, pak bychom byli schopni vytvořit obdélník o stejném obsahu. Dle obrázku (obr. 1) je obsah malého čtverce roven r^2. Potom délku jedné strany násobíme číslem π. Zbývá

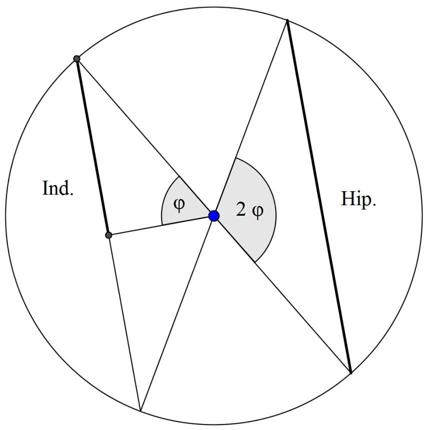


Ilustrace 2

narýsovat čtverec z obdélníku. K tomuto kroku nám už postačí Thaletova a Euklidova věta[8]. Pro úplnost jsem vypsal i početní důkaz tohoto kroku provedený přes Pythagorovu větu. Jediným problematickým krokem je tedy konstrukce π.

Trisekce úhlu

Dnes jsme zvyklí zapisovat velikost úhlů v šedesátkové soustavě. Tento způsob zápisu jsme získali od Babylóňanů během tažení Alexandra Velikého [PO, s. 93]. Hipparchos z Nikaie[9] sestavil tabulky velikosti tětivy ke středovému úhlu v kružnici daného poloměru. Současná podoba sinu potom vznikla v Indii, kde Indové začali hledat pouze polovinu délky tětivy k polovině středového úhlu a tím mohli kromě sinu začít používat i cosinus. Hipparchos ale patří až do závěru helenistického období.



Ilustrace 3

V počátku se řecká geometrická algebra s úhlem musela po

8 $x^2=a^2+(r\cdot\pi)^2, y^2=a^2+r^2, (r\cdot\pi+r)^2=x^2+y^2$

$(r\cdot\pi+r)^2=a^2+(r\cdot\pi)^2+a^2+r^2$

$2\cdot\pi\cdot r^2=2\cdot a^2$

9 **Hipparchos z Níkaie** (190 - 120 př. n. l.) Většinu života strávil na ostrově Rhodos, kde si vybudoval astronomickou observatoř. Ke svým výpočtům používal sférickou geometrii. Jeho objevy jsou hlavně v oblasti astronomie, kde zkoumal délku roku a různé astronomické jevy související se zemí [RV].

teoretické stránce nějak vypořádat. Aristoteles[10] údajně zařadil úhel do kvality, jelikož se jedná o tvar. Proti tomu ostatní namítali, že nemá smysl úhel dělit nebo porovnávat, jestliže se jedná o tvar. Uměle vytvořeným problémem byl navíc takzvaný *rohatý úhel*. Jednalo se o úhel, který svírá tečna s kružnicí. Řekové neměli podmínku, že úhel je mezi dvěma rovnými čarami. Rohatý úhel byl nekonečně malý a nebyla možnost najít úhel mezi dvěma přímkami, který by po libovolném dělení byl menší než tento úhel [Ře, s.52]. Zde je vidět jistý problém s uchopením úhlu po teoretické stránce.

Je zde ale geometrická praxe vypovídající o tom, co může geometr s úhlem provádět, ať už je teoretické zařazení úhlu jakékoliv. Je jasné, že úhel lze libovolně násobit celým číslem a lze ho půlit.

Existují dokonce úhly, které lze rozdělit na třetiny. Známe pravidlo, podle kterého můžeme kružnici rozdělit na šest stejných částí. Pak můžeme ten samý princip použít i pro půl kružnici. Jelikož můžeme libovolně násobit a dělit dvěma, můžeme tento princip využít i pro další úhly. Pokud úhel 90° rozdělíme na 3x30°, pak rozpůlením úhlu třicet jsme získali třetinu úhlu 45°.

Existují různá pravidla pro sestrojení některých úhlů. Pomáhá nám znalost dělení celého kruhu. Problém nastává, když budeme chtít sestrojit třetinu libovolného úhlu, a i dělení určitého úhlu, například 60°, je velikým problémem[11].

10 **Aristotelés ze Stageiry** (384 – 322 př.n.l) Není potřeba ho plně představovat. V matematice se proslavil hlavně svými zákony logiky, ale vzhledem k jeho vědeckému rozhledu se s ním můžeme setkat i v různých dalších matematických oborech. Výrazně třeba zasáhl do geometrie přes mechaniku, kde popisuje pohyb přímočarý a po kružnici [RV].

11 Teoreticky, pokud známe velikost úhlu, můžeme narýsovat i jeho třetinu po určitém počtu kroků. U některých úhlů se ale jedná o nekonečnou posloupnost. Pokud bychom chtěli například třetit úhel 60°, potom můžeme využít dělení plného úhlu $n \rightarrow \infty \Rightarrow 15° + \frac{1}{4}15° + \frac{1}{16}15° + \ldots \frac{1}{4^n}15° = 20°$. Tato rovnost

Zdvojení krychle

V roce 430 př. n. l. propukla epidemie moru, která nadlouho určila hegemona na řeckém území. Mor propukl největší silou v Athénách a v roce 429 př. n. l. tomuto onemocnění podlehl i Periklés [Ol].

Jasným viníkem moru byl válečný konflikt, jelikož obyvatelstvo bylo nuceno se před Spartou schovat za athénské zdi. Obyvatelé Athén se rozhodli kontaktovat věštírnu na ostrově Délu, aby jim bůh Apollón naznačil jak zabránit moru a válkám, které Řecko sužují. Apollón dal Athéňanům za úkol zdvojit krychlový oltář na Délu. Athéňané nebyli schopni problém vyřešit: *for upon doubling all four sides they discovered to their surprise that in their ignorance of the progression from which the linear double is obtained they had produced by this increase a solid eight times as large*[12] [Pl2, 579B].

Na pomoc byl zavolán Platón[13], který Athéňanům naznačil, že obsahem problému je *najít dvě průměrné proporce.* Zároveň vysvětluje účel tohoto úkolu. Apollonovi zřejmě nejde o vlastnictví dvojnásobného oltáře, ale *rozkazoval Řekům, aby se věnovali geometrii* [Pl1, 386E]. Měli tak svojí snahu z bojiště přesunout do odborných diskuzí a pěstovat různé múzy.

Tento, pro nás jako učitele úsměvný, příběh popisuje matematický problém, který ve skutečnosti zavedli pravděpodobně pythagorejci. Spojení

---

ale platí pouze, jestliže se *n* blíží k nekonečnu. Tento úhel tedy nelze narýsovat po určitém počtu kroků.

12 Dle vlastního překladu: *Při zdvojení všech čtyř stran udiveně objevili, že kvůli jejich neznalosti postupu, kterým lineárně zdvojovali, je získána jejich vytvořením zvětšením jednomyslný* (přesně) *osmkrát tak velký* (oltář) (Kupodivu je v anglickém překladu psáno *four sides – do čtyř stran*)

13 **Platón** (427 – 347 př.n.l), jako jeden ze tří nejvýznamějších antických filosofů, měl matematiku ve velké oblibě. Často jí zařazoval do svých prací, rád jezdil do jižní Itálie a snažil se některé problémy sám řešit. Z dnešního pohledu bychom řekli, že se zasadil o popularizaci matematiky v antickém světě [Sv, s. 473].

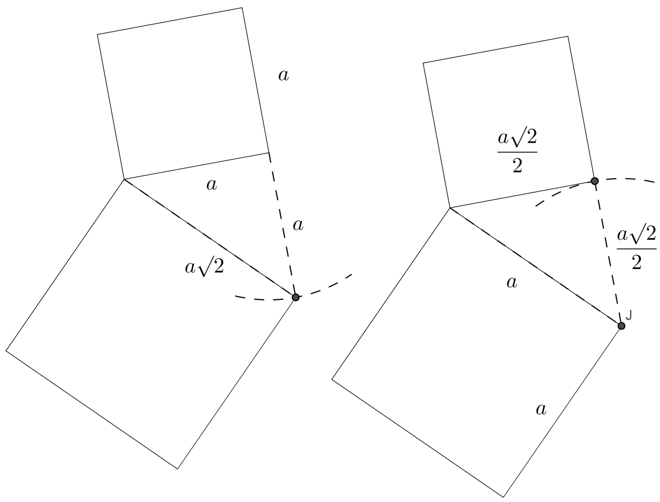
s Platónem může být díky jeho velkému zájmu o matematiku.

Analogie na ploše

Zapřemýšlejme nad jednoduchou otázkou z planimetrie. Jak ke čtverci najít čtverec o polovičním obsahu? Úlohu dokážeme početně velmi jednoduše vyřešit.

$$S_1 = \frac{1}{2} S_2, S_1 = a^2 \rightarrow hrana\, S_2 = a\sqrt{2}$$

Pak můžeme menší čtverec narýsovat dle obrázku (obr. 4). Stejně můžeme najít čtverec o dvojnásobném obsahu.



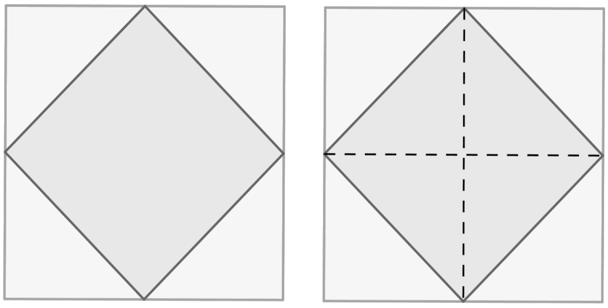
Ilustrace 4

Úlohu, formou didaktické úvahy, najdeme v Platonově dialogu: *Menon* [Pl, č. 83 s. 356]. Tam nám Platon ukazuje jednoduché řešení, které přesně splňuje potřeby euklidovské konstrukce. Obejde se bez znalosti, že pokud má čtverec stranu *a,* potom musí mít větší čtverec stranu $a\sqrt{2}$.

Sokrates[14] se snaží svému příteli Menonovi ukázat, jak probíhá lidské

14 **Sokratés (469 – 399 př.n.l)**. Jde o hlavní postavu Platónových dialogů. Podle menší části filosofů (např. Jan Patočka) se jedná o fiktivní postavu, kterou si Platón vymyslel, ale jedná se opravdu o menšinový názor. Sokratés sám nepsal a informace o něm se dovídáme od různých autorů a to hlavně od Platóna.

poznání. Při té příležitosti si pozve otroka, který se s jeho pomocí dopátrá výsledku. Po krátkém rozhovoru, kdy se ujistí jestli má otrok dostatečné základní znalosti, nakreslí vepsaný čtverec do čtverce, kde vrcholy jsou středy stran většího čtverce (obr. 5). Aby otroka lépe navedl, dokreslí mu



Ilustrace 5

ještě některé pomocné čáry. Z obrázku je pak zřejmé, že vepsaný čtverec má právě poloviční obsah.

Nalézt poloviční čtverec je tedy velmi jednoduché. Můžeme postupovat stejně u zdvojování krychle? Po algebraické stránce je problém přece analogický.

$$V_1 = \frac{1}{2} V_2$$

$$V_1 = x^3 \qquad V_2 = 2x^3$$

$$Hrana\, V_1 = x \qquad Hrana\, V_2 = x\sqrt[3]{2}$$

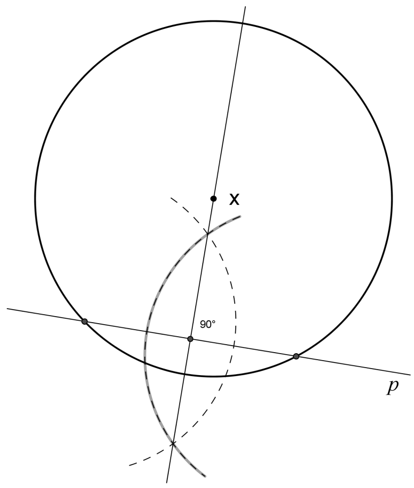
Hodnotu *x* můžeme považovat za základní jednotku, kterou si nahradíme pro zjednodušení číslem 1. Otázkou je, jestli můžeme narýsovat i úsečku o velikosti $\sqrt[3]{2}$.

Euklidovská konstrukce

Většina geometrických pomůcek vzniká pomocí matematických znalostí, přesným odměřením a vytvořením dané pomůcky. Ve chvíli, kdy budeme mít pravítko, na kterém bude zaznamenána vzdálenost, kterou s běžným pravítkem neumíme narýsovat (např. $\sqrt[3]{3}, e, \pi$), je otázkou, jestli tuto hodnotu můžeme považovat za sestrojitelnou.

Proto si zavedeme takzvanou euklidovskou konstrukci. Ta omezuje naše pomůcky pouze na pravítko a kružítko. Pravítko je libovolně dlouhé a nemá hrany ani číselník. Jsme tedy omezeni na možnost vytvoření rovné čáry a kružnice. Další naše možnosti už vycházejí pouze z matematických znalostí.

Například vytvořit střed úsečky umíme velmi snadno. Kolmice z bodu k jiné přímce se zdá možná těžší, ale jenom proto, že máme ve zvyku používat rysku. Pokud nakreslíme z bodu kružnici (obr. 6), která protíná danou přímku, tak máme dva body, ke kterým střed úsečky už dokážeme nalézt [Vo, s. 19]. Takto můžeme zlepšovat naše schopnosti rýsovat v euklidovské geometrii. Naše možnosti pak jsou definované v euklidových postulátech[15] [Ře, s.115].



Ilustrace 6

15 **Euklidés z Alexandrie (325 – 265 př.n.l)** působil na dvoře Ptolemaia I. jako první vedoucí matematické části alexandrijské knihovny. Z tohoto postu měl dobrou pozici pro svojí tvorbu. Kromě matematiky se také zabýval astronomií, optikou a hudbou. Základy byly jeho nejvýznamějším dílem. Zásadní pro ně je, že shrnují tehdejší poznatky v matematice podle pravidel definovaných Aristotelem. Výstavba textu má tak jasný řád a je rozdělena na věty, definice a důkazy. Dohromady tvoří dílo 13 knih. Celé dílo vyšlo v překladu Františka Servíta roku 1907 [Sv, s. 185] [RV].

1. Nechť se požaduje vést přímou čáru z každého bodu do každého bodu[16].

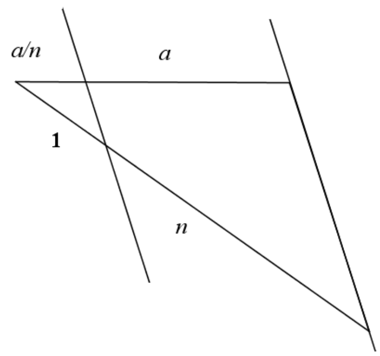
2. A omezenou přímou čáru souvisle prodloužit přímým směrem[17].

3. A pro každý střed a každý rozestup narýsovat kruh.

4. A aby se všechny pravé úhly byly navzájem rovny[18].

5. A jestliže nějaké dvě přímé protne jiná přímá tak, že vytvoří na jedné straně vnitřní úhly menší než dva pravé, pak aby se tyto přímé, budouli prodlouženy do nekonečna, setkaly na té straně, na které jsou úhly menší než dva pravé[19].

V klasických úlohách řecké matematiky se setkáme hlavně s problémem konstrukce různých hodnot. Když bychom postupovali jako při zavádění číselných oborů na střední škole, tak s úsečkou o délce *a* můžeme zkonstruovat různé hodnoty. Jednoduše narýsujeme *2a, 3a, 4a* a další



Ilustrace 7

libovolný násobek úsečky. Stejně tak můžeme najít libovolný zlomek (obr. 7). Můžeme narýsovat libovolnou odmocninu (obr. 8) z celého čísla, kde pro větší celá čísla můžeme použít také Euklidovu větu (obr. 9).

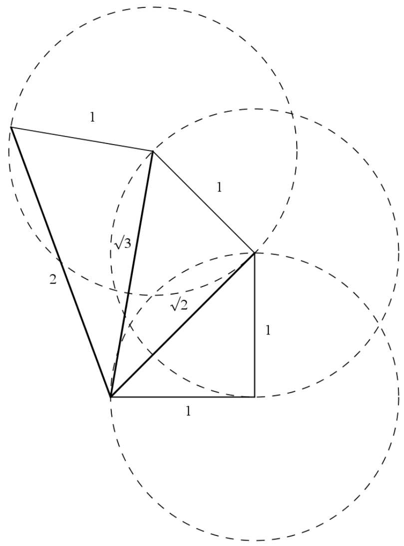
16 Zde je otázka jednoznačnosti takové přímky. Někdy je považována jednoznačnost za implicitní [Ře, s.115], ale některé překlady dopisují potřebnou zásadu [Vo, s. 48]

17 V podstatě můžeme libovolně prodloužit jakoukoliv úsečku. Řekové nepracovali s nekonečnem, tudíž jak píše Vopěnka o Euklidově geometrii: *Jen tak daleko, kam dohlédneme* [Vo, s. 49].

18 Čtvrtý postulát se netýká konstrukce a jeho hlavní důvod je, že předchází pátému postulátu.

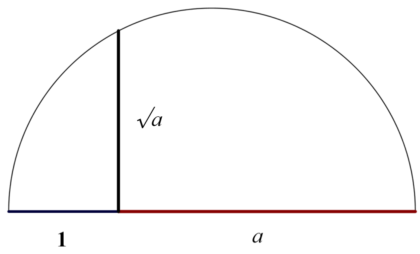
19 Pátý postulát je sice velmi důležitý pro historii matematiky, ale nebudeme ho tu dále rozebírat, jelikož otázka spornosti postulátu se řeší v neeuklidovské matematice a tudíž v euklidovské konstrukci s ním budeme počítat jako s axiomem.

Následně je jasné, že můžeme libovolné číslo násobit nebo dělit odmocninou z celého čísla. Jak ale zjistit, pokud nevíme jak některou



Ilustrace 8

hodnotu sestrojit, jestli ji opravdu sestrojit lze? Abychom tohoto docílili, a tak si byli opravdu jistí, že klasické řecké úlohy nelze vyřešit, musíme se přesunout na pole algebry.



Ilustrace 9

Konstruovatelnost

Důkaz nemožnosti sestrojit některé hodnoty je relativně dlouhý a komplikovaný. Proto se pokusím celý problém rozdělit do celkem čtyř bodů. Za prvé si ukážeme, jaký obecný zápis musí mít průsečík kružnic a přímek. Za druhé se ke stejnému výsledku dostaneme pomocí rozšiřování oboru racionálních čísel. V třetím bodě si projdeme některé vlastnosti kubických rovnic. Ukážeme si, že náš obecný tvar může být řešením obecné kubické rovnice a proč jím nemohou být jiné tvary. Za čtvrté dokážeme, že náš tvar není řešením konkrétních kubických rovnic. Důsledek tohoto faktu povede k jistotě, že některé hodnoty nelze sestrojit.

Průsečíky přímek a kružnic

Nejdříve je potřeba si zrekapitulovat naše možnosti. Můžeme provést konstrukci přímky pomocí dvou bodů, úsečky, neboli vzdálenosti mezi dvěma body, a kružnice se středem v konkrétním bodě. Nový bod můžeme potom získat pomocí přímek a kružnic.

Každý bod na ploše pak můžeme vyjádřit jako průsečík dvou přímek[20],

$$y=a\cdot x+b\wedge y=c\cdot x+d$$

$$x=\frac{d-b}{a-c},\ y=\frac{ad-bc}{a-c}$$

kružnice a přímky,

$$x^2+y^2+ax+by+c=0\wedge y=dx+e$$

$$x^2+d^2x^2+2dxe+e^2+ax+bdx+be+c=0$$ [21]

20 Pro zjednodušení vyjádříme v směrnicovém tvaru.

21 Obecně vyjadřovat průsečík kružnice a přímky je zbytečně složité pro velký počet konstant, a tak si pomůžeme některými úpravami.

$$a, b, c, d, e \in \mathbb{Q} \wedge 1 + d^2 = f \wedge 2de + a + bd = g \wedge e^2 + be + c = h \Rightarrow f, g, h \in \mathbb{Q}$$

$$fx^2 + gx + h = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 - 4fh}}{2f}$$

$$g, f, h \in \mathbb{Q} \wedge \frac{-g}{2f} = k \wedge \frac{1}{2f} = l \wedge g^2 - 4fh = m \Rightarrow k, l, m \in \mathbb{Q}$$

$$x_{1,2} = k \pm l\sqrt{m} \qquad y_{1,2} = (dk + e) \pm dl\sqrt{m}$$

a dvou kružnic.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \wedge x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

$$x(a-d) + y(b-e) + c - f = 0$$

$$y = \frac{f - c - x(a-d)}{b-e}$$

Poslední rovnice představuje rovnici přímky, která prochází průsečíky kružnic a po dosazení se dostaneme jako u běžného průsečíku přímky a kružnice ke tvaru $x_{1,2} = k \pm l\sqrt{m}$, kde hodnoty *k, l, m* jsou racionální. Libovolný průsečík můžeme vyjádřit tímto vzorcem.

Rozšiřování $\mathbb{Q}$

Množina $\mathbb{Q}$ je z hlediska násobení, dělení, sčítání a odčítání uzavřená[22]. My ale víme, že kromě libovolného racionálního čísla můžeme sestrojit druhou odmocninu. Pokud $\mathbb{Q}$ rozšíříme například o $\sqrt{2}$, tak taková množina bude mít všechny prvky právě ve tvaru $a + b\sqrt{2}$, jelikož po libovolném sčítání, odčítání, násobení a dělení dvou prvků dostaneme zase stejný tvar [Ro, s.9].[23] Množina $\mathbb{Q}$, rozšířená pouze o $\sqrt{2}$, má podle stejné úvahy všechny prvky ve tvaru $a + b\sqrt{2}$. Pokud množinu $\mathbb{Q}$ rozšíříme o

22 $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b, a - b, a \cdot b, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

23 $(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}), a, b, c\, d \in \mathbb{Q} \rightarrow (a \pm c + (b \pm d)\sqrt{2}) \rightarrow e + f\sqrt{2} \wedge e, f \in \mathbb{Q}$

$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}), a, b, c\, d \in \mathbb{Q} \rightarrow ac + 2db + (ad + bc)\sqrt{2} \rightarrow e + f\sqrt{2} \wedge e, f \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{3}$, potom bude mít jakékoli číslo, které úpravami získáme, podobu $a+b\sqrt{3}$. Postupným rozšiřováním množiny nakonec dosáhneme tvaru:

$$a+b\sqrt{c}\wedge a,b,c\in\mathbb{Q}$$

Určitě může čtenáře napadnout, že při rozšiřování dosáhneme různorodých tvarů typu:

$$\sqrt{a+b\sqrt{c}},a+b\sqrt{c}+d+\sqrt{e}$$

Abychom se tomuto prozatím vyhnuli, můžeme $\mathbb{Q}$ rozšířit jako Jindřich Bečvář [Be, s.90] do tvaru

$$\mathbb{Q}(\sqrt{c})=a+b\sqrt{c}\wedge a,b,c\in\mathbb{Q}$$

a říci, že sčítání odmocnin a odmocniny z odmocnin také patří do této množiny a dostaneme se k nim po určitém počtu kroků.

Vytvoříme-li množinu racionálních čísel rozšířenou o odmocniny, je tato množina uzavřená vzhledem k operacím sčítání a násobení. Pro takovouto množinu použijeme algebraický pojem těleso[24], neboli podmnožina reálných čísel, která je uzavřená na operaci sčítání, odčítání, násobení a dělení nenulovým prvkem [Ro, s.9]. Víme, že v této množině jsou čísla náležící pouze do racionálních čísel nebo do druhých odmocnin.

Otázkou je, jestli toto těleso obsahuje všechna konstruovatelná čísla. Kladná odpověď by měla vyplývat z výstavby množiny, jelikož používáním pouze pravítka a kružítka na ploše zkonstruujeme vzdálenosti pouze pomocí lineární nebo kvadratické[25] rovnice a po konečném počtu kroků budeme mít zase hodnotu, kterou lze vyjádřit pomocí racionálních čísel a druhých odmocnin. Můžeme tedy říci, že těleso, které jsme vytvořili, je tělesem všech sestrojitelných čísel [Ro, s.10].

$$\frac{(a+b\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})},a,b,c\,d\in\mathbb{Q}\rightarrow\frac{(a+b\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})}\cdot\frac{(c-d\sqrt{2})}{(c-d\sqrt{2})}=ca-2\,db+(bc-ad)\sqrt{2}\rightarrow e+f\sqrt{2}\wedge e,f\in\mathbb{Q}$$

24 Okruh, kde operace (+) tvoří abelovskou grupu a operace (–) tvoří grupu a platí distributivní zákony.

25 Maximálně kvadratické, ať počítáme vzdálenost dvou bodů přes Pythagorovu větu, souřadnice průsečíků dvou přímek, přímky a kružnice nebo dvou kružnic.

Kubická rovnice

Už na předchozích stránkách jsme se setkali s problémem konstrukce $\sqrt[3]{2}$. Víme, že toto číslo není racionální[26]. Problém si také můžeme vyjádřit přes kubickou rovnici $x^3-2=0$. Kořenem bude pravděpodobně $\sqrt[3]{2}$, ale tuto hodnotu dle předpokladu neumíme sestrojit. Podle základní věty algebry má rovnice tři kořeny.

Když si vezmeme obecný tvar kubické rovnice a její rozklad,

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

tak po vydělení *a* a roznásobení dostáváme tři vztahy [Ro, s.13]:

$$x_1+x_2+x_3=\frac{-b}{a}\wedge x_1\cdot x_2+x_3\cdot x_1+x_2\cdot x_3=\frac{c}{a}\wedge x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\frac{d}{a}$$

Pokud by kořen rovnice měl tvar $e+f\cdot\sqrt{g}$, potom musí být kořenem rovnice i $e-f\cdot\sqrt{g}$ [27].

Zde nastává otázka, jestli může mít kořen i jiný tvar z našeho tělesa konstruovatelných čísel. Když provedeme podobnou úvahu pro $\sqrt{e+f\sqrt{g}}\vee e+f\sqrt{g}+h\sqrt{i}$, jako jsme je udělali pro tvar $e\pm f\cdot\sqrt{g}$, zjistíme, že tyto tvary nesplňují podmínky pro kubickou rovnici v obecném tvaru s celočíselnými koeficienty. Abychom například splnili podmínku:

$$x_1+x_2+x_3=\frac{-b}{a}$$

musel by druhý kořen mít podobu: $-\sqrt{e+f\sqrt{g}}\vee e-f\sqrt{g}-h\sqrt{i}$ a tato podoba nesplňuje podmínku:

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\frac{d}{a} \quad .$$

Můžeme tedy říct, že $e\pm f\cdot\sqrt{g}$ je jediný možný tvar z našeho tělesa sestrojitelných čísel.

26 Můžeme použít stejný důkaz jako známý důkaz pro $\sqrt[2]{2}$.

27 Důkaz [Ro s.14] $\overline{e+f\sqrt{g}}=e-f\sqrt{g}\wedge\overline{(e+f\sqrt{g})^2}=(e-f\sqrt{g})^2\wedge\overline{(e+f\sqrt{g})^3}=(e-f\sqrt{g})^3$

Zdvojení krychle

Jelikož naše kubická rovnice $x^3-2=0$ má celočíselné koeficienty, tak podle pravidla hledání celočíselných kořenů je jasné, že nemá racionální kořen[28]. Přitom podle vztahu

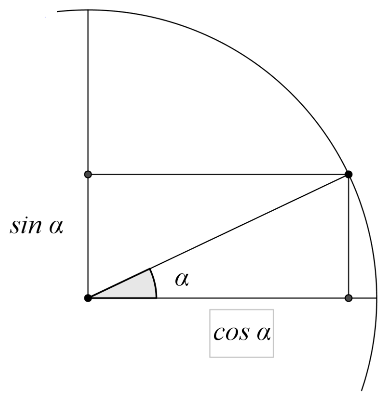
$$x_1+x_2+x_3=\frac{-b}{a}$$

a předpokladu, že rovnice má kořen ve tvaru $e+f\cdot\sqrt{g}$, by měl jeden kořen být v racionálním tvaru[29]. To je spor a je jasné, že hodnota $\sqrt[3]{2}$ není v tělese konstruovatelných čísel.

Trisekce úhlu

Jedná se o obdobný problém jako u zdvojení krychle. Libovolný úhel můžeme vyjádřit jako velikost sinu (cosinu) na jednotkové kružnici, když vedeme kolmici z průsečíku ramene úhlu a jednotkové kružnice na osu y (x) podle obrázku (obr. 10).

Některé třetiny úhlů narýsovat lze, ale naším úkolem je ukázat, že toto neplatí pro každý úhel, tedy ani pro úhel neznámé velikosti. Proto nám stačí dokázat jeden jediný úhel. Můžeme začít úhlem 60° [Ro, s.6], u kterého



Ilustrace 10

---

28 Výpočet jsem provedl podle postupu z předmětu Algebra 3 v bakalářském studiu. Rovnice $x^3-2=0$ má celočíselné koeficienty a prvek $a_0\neq 0$. Víme, že $a_0=2, a_3=1 \rightarrow r=(1,2), s=1$, protože musí platit pravidlo $r|a_0 \wedge s|a_n$. Možnosti řešení tedy jsou: $\left(\frac{-1}{1},\frac{1}{1,}-\frac{2}{1},\frac{2}{1}\right)$. Jelikož máme málo hodnot a jednoduchou rovnici, nemusíme použít pravidlo $(r-s)|f_{(1)} \wedge (r+s)|f_{(2)}$ a můžeme rovnou dosadit. Je jasné, že žádná z těchto čtyř hodnot není kořenem rovnice, neboli rovnice nemá racionální řešení.

29 $x_1+e+f\sqrt{g}+e-f\sqrt{g}=\frac{-b}{a} \rightarrow x_1=\frac{-b}{a}-2e \Rightarrow x_1\in\mathbb{Q}$

jsme si už dříve v poznámkách ukázali, že jeho konstrukci lze provést nekonečným počtem kroků[30]. Pokud uvažujeme úhel 60°, potom stačí najít velikost cos60°. Můžeme zde využít vzorec z tabulek [Ba, s. 164]:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Za předpokladu, že hledáme úhel 20°, tak můžeme vzorec upravit

$$0{,}5 = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

a pokud $x = \cos\alpha$, tak nám vznikne kubická rovnice

$$0 = 8x^3 - 6\cos x - 1$$

a stejným způsobem jako u $x^3 - 2 = 0$ zjistíme, že rovnice nemá racionální řešení[31]. Pokud bychom chtěli důkaz 30°, tak je vhodnější použít vzorec

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

Úpravou se dostaneme na tvar

$$0 = 8x^3 - 6\cos x + 1$$

Výpočtem se dostaneme znovu ke sporu, ale předem je jasné, že když nedokážeme najít třetinu úhlu 60°, tak logicky nepůjde ani 30°.

Závěrem lze problém shrnout. Dokázali jsme, že neexistuje kořen kubických rovnic ve tvaru $e + f \cdot \sqrt{g}$. Tudíž hodnoty potřebné pro trisekci úhlu a zdvojení krychle nemají tento tvar a tento tvar je jediný možný pro kubickou rovnici při konstrukci pravítkem a kružítkem.

Důkazů neřešitelnosti je větší množství. Podobným způsobem, rozšiřováním číselného oboru $\mathbb{Q}$, postupuje Jindřich Bečvář [Be, s.90], který ale neprovádí důkazy jednotlivých vět. Dosti odlišný důkaz, na který jsem narazil v některých pracích, je dobře zpracován na stránkách wikipedie.

---

30 $n \rightarrow \infty \Rightarrow 15° + \frac{1}{4}15° + \frac{1}{16}15° + \ldots . \frac{1}{4^n}15° = 20°$

Nejedná se o uzavřený algoritmus, takže nejde o euklidovskou konstrukci.

31 $a_0 = -1, a_3 = 4 \rightarrow r = 1, s = (1,2,4) \Rightarrow \left(\frac{-1}{1}, \frac{1}{1,} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2,} - \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

Ani jedna hodnota není řešením rovnice.

Kvadratura kruhu

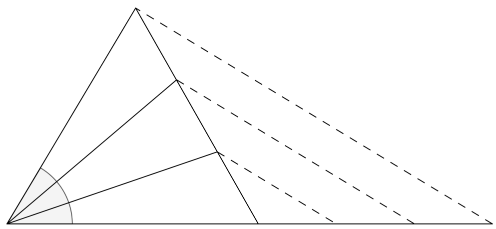
Konstanta π udává poměr mezi obvodem a průměrem kružnice. Jedná se o číslo iracionální a transcendentní. Transcendence znamená, že neexistuje polynom s racionálními koeficienty, kde by hodnota π byla kořenem. Odmocnina z π je transcendentní, právě když je transcendentní π. Důkaz je proto čistě algebraický a navíc delší. Rozhodl jsem se proto ho do této práce nezařadit[32].

32 V principu důkaz vycházi z pravidla, že pokud je transcendentní π, tak musí být transcendentní i $i\pi$ a pracuje s komplexními čísly. Důkaz můžete najít v různých publikacích (například [Ma, s.100])

Přibližná konstrukce

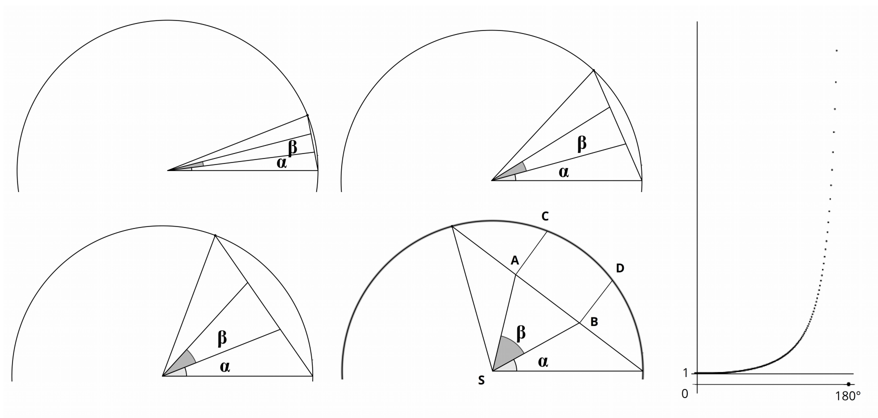
Trisekce

Když zadáme někomu bez hlubších matematických znalostí, aby rozdělil úhel na tři stejné části, většinou ho jako první napadne vytvořit postup podle obrázku (obr. 11).



Ilustrace 11

Tento postup je pro některé hodnoty hned viditelně špatný. Stačí vznést námitku s úhlem 180°. Na obrázku (obr. 12) vidíme vývoj, kde úhly vytvořené z úhlu blížícího se 0° mají mezi sebou minimální rozdíly, zatímco rozdíly mezi úhly vzniklými z úhlu blížícího se 180° jsou

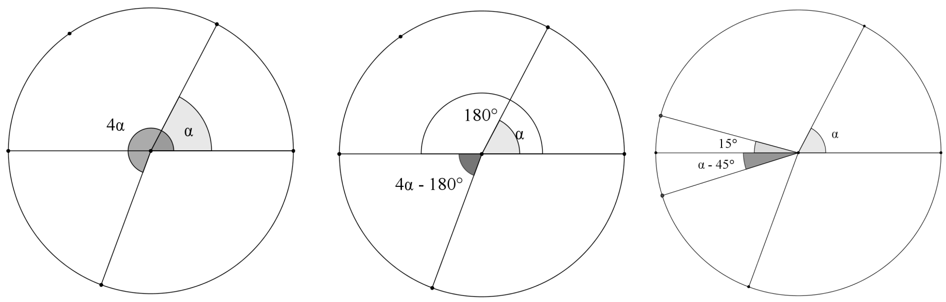


$\frac{\beta}{(\alpha)}=$ *a)* 1,0327 *b)* 1,0822 *c)* 1,1976 *d)* 1,6301

Ilustrace 12

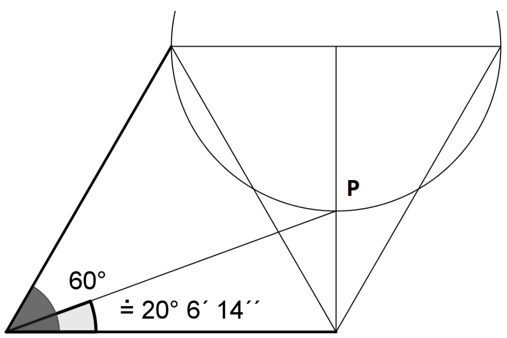
extrémní. O malých úhlech se dá tedy tvrdit, že tento způsob je jejich přibližným řešením. Pokud navíc vedeme podle posledního obrázku (obr. 12) kolmice z bodů A,B na kruhový oblouk (C,D), tak úhel CSD je ještě přesnější[33]. Přesto i tato metoda při dělení úhlu 90° znamená přibližně 4° chybu.

Mohli bychom úvahy rozvíjet dál. Například víme, že úhel se dá dělit dvěma. Podle obrázku (obr. 13) můžeme násobit úhel dvěma, dokud nedostaneme úhel větší než 180°.



Ilustrace 13

Následně bychom provedli částečnou trisekci[34]. Výsledek je ale stejný, jako když postupně odkrajujeme po třech stejných částech. Po praktické stránce je nejlepším způsobem postupné odkrajování. Existuje potom celá řada různých přibližných konstrukcí, ale jejich možnosti jsou ovlivněny tím, že se jedná o libovolný úhel, který tím, že nemá danou velikost, je špatně konstrukčně uchopitelný. Následují některé zajímavé přibližné konstrukce pro úhly, u kterých nelze sestrojit třetinu.



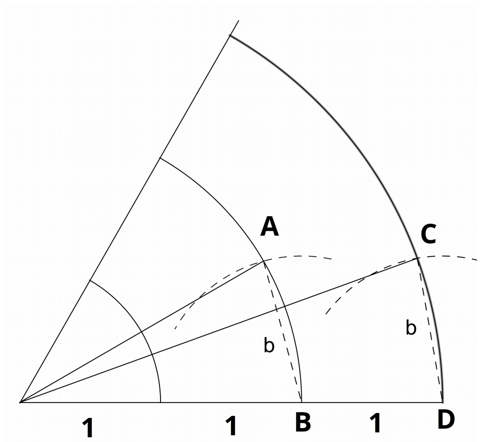
Ilustrace 14

33 Větší rozdíly naopak vzniknou u trisekce velmi malých úhlů

34 Dostaneme tak část třetiny úhlu (15°) a druhou část z třetiny úhlu v trojnásobné velikosti (α-45°). Postup můžeme opakovat.

Na obrázku vidíme úhel 60°. K sestrojenému rovnostrannému trojúhelníku dokreslíme shodný dle obrázku (obr. 14). Následně podle obrázku naneseme na výšku polovinu základny a dokreslíme úhel, který by měl odpovídat přibližně úhlu 20° 6´ 14´´[Du, s. 108]. Vypočet lze provést přes tangens, jelikož známe pozici bodu P na výšce. Za předpokladu, že strana má velikost *a,* má vzorec podobu:

$$tg\frac{60°}{3} \simeq \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2} - a\frac{1}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$



Ilustrace 15

Další přibližnou metodou zaměřenou na úhel 60°, je způsob, kdy k úhlu nakreslíme kružnice o poloměru 1, 2, 3 (obr. 15)[Du, s. 128].

Následně provedeme na prostřední kružnici půlení úhlu a tu samou vzdálenost, jako je mezi body AB, naneseme na kruhový oblouk do bodu D a sestrojíme průsečík C, který by měl ležet přibližně ve třetině kruhového oblouku.

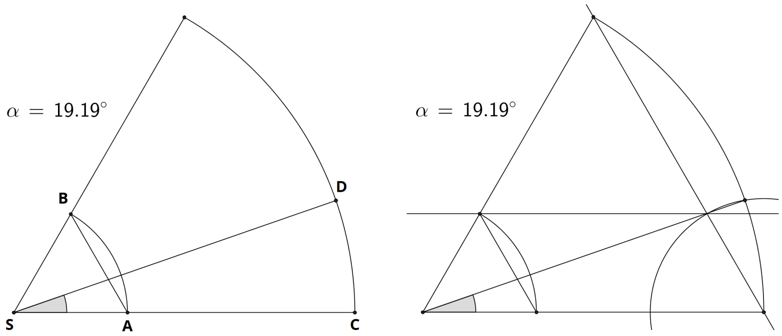
Máme před sebou dva rovnoramenné trojúhelníky. Oba dva mají základnu *b* a jeden má ramena o velikosti 2 a jeden o velikosti 3. Z prvního dopočítáme b:

$$b = 4\sin 15°$$

Potom stačí dopočítat větší rovnoramenný trojúhelník, jehož úhel má velikost:

$$sinx=\frac{4}{3}\sin 15°=20°11´14´´$$

Za zmínku ještě pro jednoduchost konstrukce stojí, trisekce (obr. 16) [Du, s. 157], kde velikost úsečky SC se rovná trojnásobku velikosti úsečky

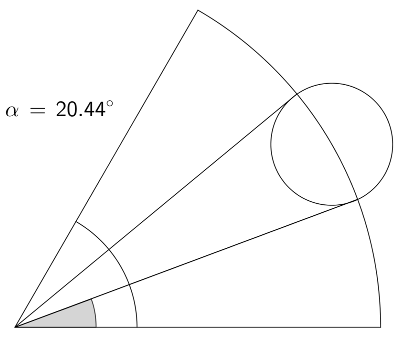


Ilustrace 16

SA. Zároveň velikost úsečky AB je rovna velikosti úsečky CD. Pro doplnění uvádím i přenesení velikosti AB v euklidovské geometrii. Pro kontrolu stačí jenom provést výpočet na trojúhelníku SDC, kde úsečky SD a SC mají stejnou velikost, a to třikrát větší než CD. Dostaneme se k vyjádření úhlu:

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{6}$$

Výhodou je rychlá konstrukce, ale trisekce není tak přesná. Konstrukci lze mírně zpřesnit nanesením této velikosti do středu oblouku (obr. 17).



Ilustrace 17

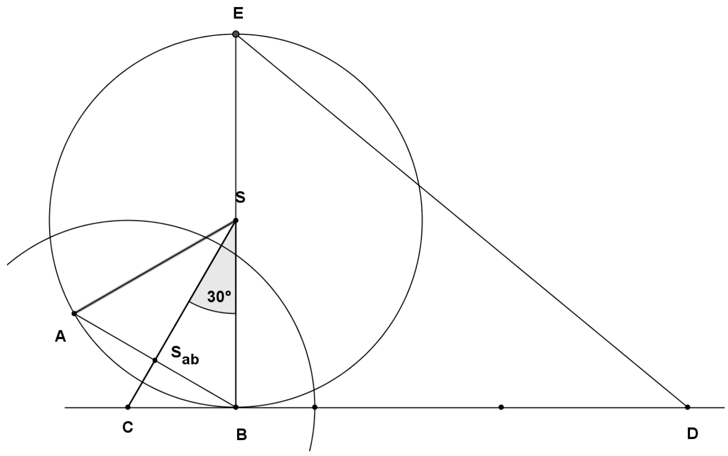
Principem se ale konstrukce podobá dělení úsečky, které jsme si ukázali na začátku.

Rektifikace půl-kružnice

Mezi přibližné řešení rektifikace kružnice můžeme určitě zařadit Kocháňského rektifikaci. K bodu na kružnici (B) sestrojíme tečnu, na kterou podle obrázku (obr. 18) narýsujeme bod C. Od Bodu C pak ve směru B naneseme třikrát poloměr, až nám vznikne bod D. Úsečka ED by potom měla mít velikost:

$$|ED| = r \cdot \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} = r \cdot 3{,}141533339$$

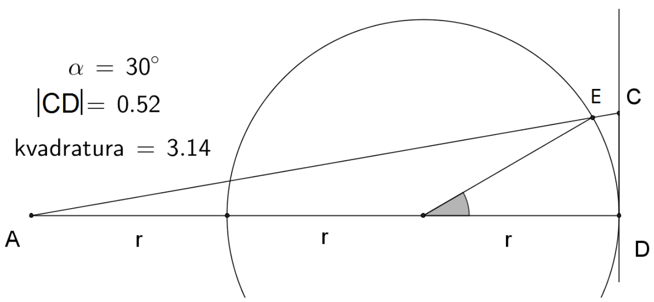
K této velikosti se dostaneme dopočítáním velikosti úsečky CB[35], kterou



Ilustrace 18

odečteme od 3r abychom získali BD. Zbytek je už jenom Pythagorova věta.

Mezi další rektifikace se řadí i tzv. Sobotkova rektifikace[36] [Ka].



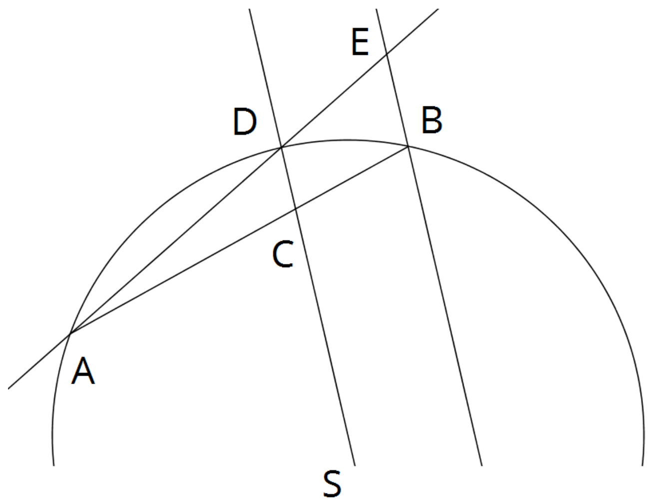
Ilustrace 19

35 $|CB| = \frac{r \cdot \sqrt{3}}{3}$, $|BD| = 3r - \frac{r \cdot \sqrt{3}}{3}$, $|DE| = (2r)^2 + \left(3r - \frac{r \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2$

36 Jan Sobotka (1862 – 1931) byl významný český geometr.

Podle obrázku (obr. 19) si k bodu D dokreslíme tečnu, na které sestrojíme bod C jako průsečík tečny a přímky AE. Pokud tak sestrojíme úsečku CD například k úhlu 30°, pak tato úsečka bude velikostí šestinou půl-kružnice. Problém je, že konstrukce je relativně přesná jen okolo úhlu 30°, a když budeme hledat úsečku CD k úhlu většímu než 60°, odchylka od hodnoty πr bude výrazně větší. Rektifikaci lze použít i jako trisekci úhlu. Poslední dvě rektifikace [Ka] uvedu jenom obrázkem a nebudu se je snažit dokázat. Podmínkou obou je, že úhel musí být menší než 90°.

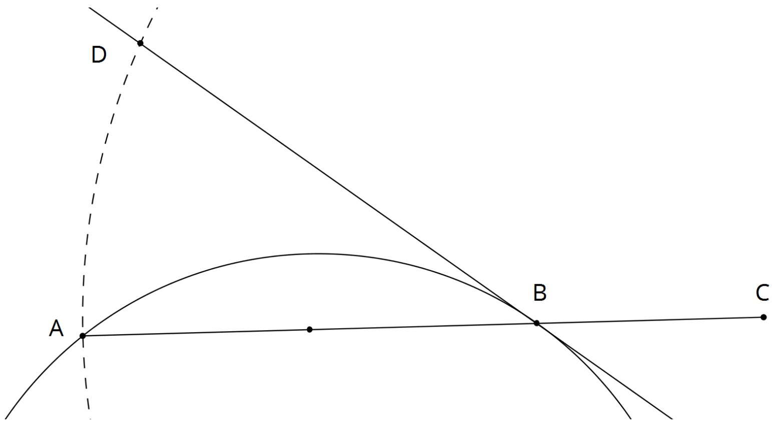
Bod C leží ve 2/3 úsečky AB a bod E leží na rovnoběžce s SD (obr. 20). Velikost úsečky AE by měla být rektifikací kruhového oblouku AB.



Ilustrace 20

Druhou rektifikací je rektifikace Rankineho. Podle obrázku (obr. 21) narýsujeme tětivu AB. Úsečku AB prodloužíme o polovinu do bodu C. Následně bod použijeme jako střed pro kružnici s poloměrem AC. Zároveň sestrojíme tečnu v bodě B a najdeme průsečík této tečny s kružnicí (D). Úsečka BD přibližně rektifikuje kruhový oblouk AB.

Publikace, ze které jsem vycházel pro přibližnou trisekci [Du], má průměrně jednu trisekci na stránku. Stejně tak rektifikací půlkružnice je



Ilustrace 21

celá řada a nemá smysl je v této práci dále rozvíjet.

Pro zdvojení krychle jsem bohužel nenašel žádnou vhodnou konstrukci. Rektifikace se odráží od kružnice a trisekce pracuje s narýsováním úhlu, ale jelikož krychli na ploše sestrojit nemůžeme, tak ani nemůžeme využít jejích vlastností. Zbývá tak se zamyslet nad vhodnou rychlou konstrukcí alespoň přibližné hodnoty:

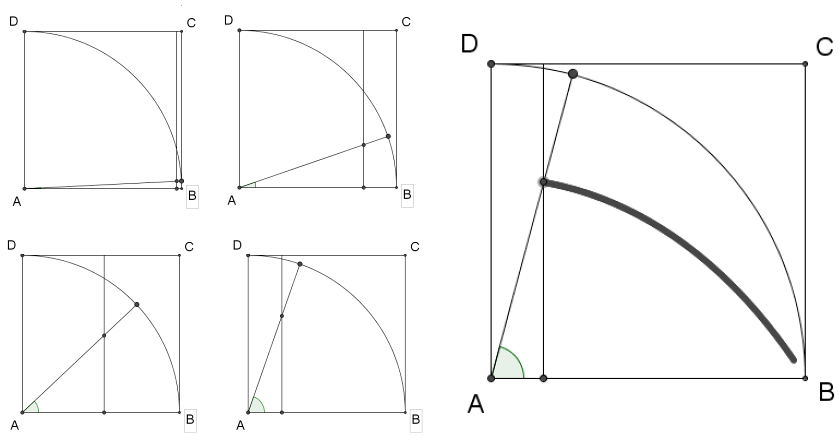
$$\sqrt[3]{2}=1{,}25992105\ldots$$

Pokud chceme rychle rýsovat, tak můžeme sestrojit hodnotu 1,25 jako polovinu hodnoty 2,5. Dále můžeme pouze uvažovat nad použitím některých odmocnin a nebo sestrojit hodnotu 1,26 jako po praktické stránce velice přesné číslo. Pro sestrojení hodnoty je možné použít poměr $\frac{6{,}3}{5}$.

Řešení pomocí křivek

Hippiova Kvadratix

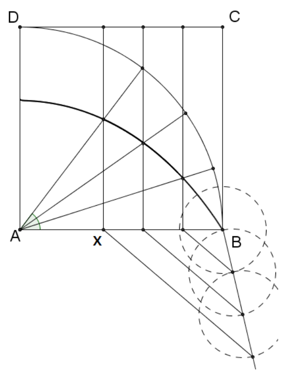
Představme si čtverec ABCD, kde se úsečka AB rovnoměrně otáčí kolem bodu A, dokud nesplyne s úsečkou AD a úsečka BC ve stejném časovém úseku přejde do úsečky AD [Lo, s.44]. Průsečík těchto úseček



Ilustrace 22

vytvoří novu křivku. Pro lepší představu uvedu sérii obrázků (obr. 22), pro kterou jsem využil funkci animace v programu Geogebra, která Hippiovu[37] kvadratix sestrojí.

Následně můžeme provést trisekci úhlu. Podle obrázku (obr. 23)



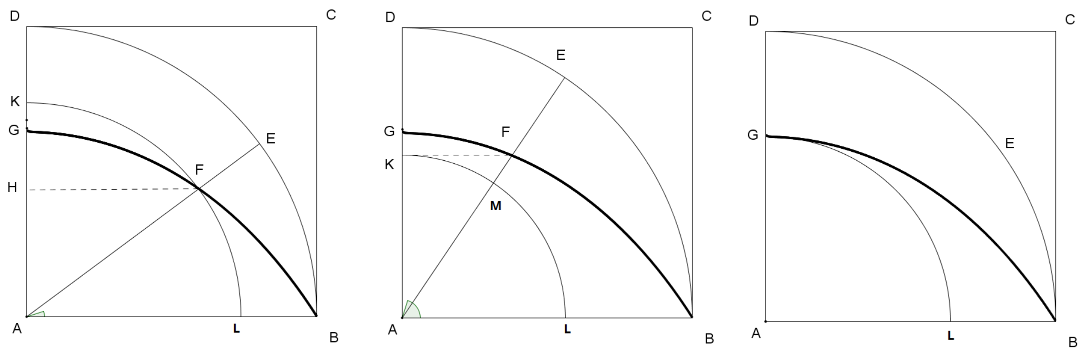
Ilustrace 23

37 **Hippiás** (5 stol př.n.l) byl řecký sofista. Měl zájem o matematiku, astronomii, gramatiku, hudbu, literaturu, historii a ovládal i některá řemesla. (Neplést s Hippiásem, synem Peisisstrata) [Sv, s. 235].

vztyčíme kolmici z průsečíku ramene úhlu a kvadratixu na úsečku AB (patu kolmice označíme X) a úsečku XB rozdělíme na tři stejné části. Následně vztyčíme znovu kolmice a dostaneme průsečíky, kterými procházejí ramena hledaných úhlů.

Problém musí být hned každému zřejmý, a to v tom, že daná křivka není euklidovsky sestrojitelná a obdobný problém jako u trisekce úhlu řešíme už při její konstrukci. Předpokládejme, že máme libovolný úhel, u kterého chceme provést trisekci. Přes kolmici si najdeme bod X a úsečku XB rozdělíme na tři stejné části. Následně chceme narýsovat kvadratix pro nalezení třetin úhlu. Abychom ho mohli narýsovat k těmto třem bodům na ose x, museli bychom najít právě tyto třetiny kruhového oblouku k hledanému úhlu. Trisekci tak řešíme už při konstrukci kvadratixu.

Zároveň ve starověkém Řecku Deinostratos[38] dokázal, že křivka má souvislost s kvadraturou kruhu. Důkaz provedl nepřímo. Představme si, že



Ilustrace 24

délku kruhového oblouku BED můžeme vyjádřit jako poměr délek úseček. Do již sestrojeného obrázku s kvadratixem chceme sestrojit čtvrt kružnici s poloměrem AK tak, aby platil vztah [Th[39]] :

$$\frac{arc\,BED}{|AB|}=\frac{|AB|}{|AK|}$$

38 Současník Aristotela

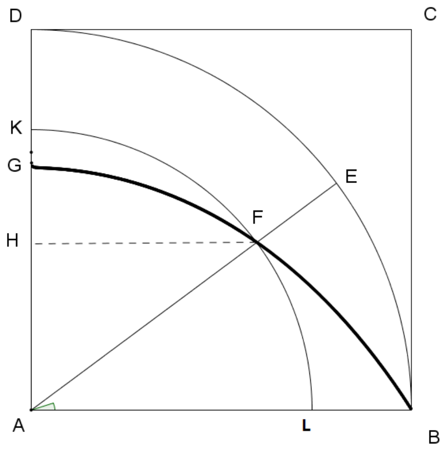
39 Bohužel jsem knihu získal pouze v elektronické podobě (epub), která neobsahovala stránkování. Jedná se o kapitolu VII. SPECIAL PROBLEMS.

Potom můžeme s jistotou říci, že musí platit jeden ze tří případů (obr. 24), neboli: $|AK|>|AG| \vee |AK|<|AG| \vee |AK|=|AG|$

a) Pokud předpokládáme $|AK|>|AG|$, pak dle obrázku (obr. 25) musí platit:

1)[40] $\frac{arc\,BED}{arc\,KFL}=\frac{|AB|}{|AK|}$ 2)[41] $\frac{|AB|}{|FH|}=\frac{arc\,BED}{arc\,ED}$

3)[42] $\frac{arc\,BED}{|AB|}=\frac{|AB|}{|AK|}$ 4) $\frac{arc\,LFK}{arc\,FK}=\frac{arc\,BED}{arc\,ED}$



Ilustrace 25

1,3) $\frac{arc\,BED}{|AB|}=\frac{arc\,BED}{arc\,KFL} \Rightarrow AB=arc\,KFL$

Pokud dosadíme do vztahu 4): $\frac{|AB|}{arc\,FK}=\frac{arc\,BED}{arc\,ED}$ a porovnáme se vztahem 2), tak výsledný vzorec je $|FH|=arc\,FK$, což je spor. Víme tedy, že vztah $|AK|>|AG|$ neplatí. Přesuneme se tedy k druhému obrázku.

b) $|AK|<|AG|$

$$\frac{|AB|}{|FK|}=\frac{arc\,BED}{arc\,ED}=\frac{arc\,LMK}{arc\,MK}$$

Z této rovnosti plyne, že $|FK|=arc\,MK$, což je spor. Vidíme proto, že ani tento vztah neplatí, a tak aby náš předpoklad platil, musí bod K splývat s bodem G. To znamená, že pokud sestrojíme kvadratix, platí vztah:

$$\frac{arc\,BED}{|AB|}=\frac{|AB|}{|AG|}$$

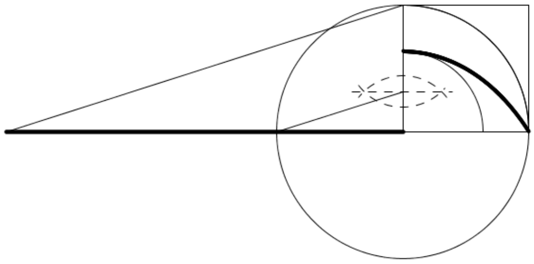
$$\frac{\frac{1}{4}2\pi|AB|}{|AB|}=\frac{|AB|}{|AG|} \rightarrow \pi=\frac{2\cdot|AB|}{|AG|}$$

---

40 $arc\,BED=\frac{1}{4}2\pi|AB| \wedge arc\,KFL=\frac{1}{4}2\pi|AK|$

41 Podle vlastnosti kvadratixu

42 Předpoklad



Ilustrace 26

Ostatní křivky

Pravděpodobně v souvislosti se zdvojením krychle se v Antice začalo pracovat s kuželosečkami [Lo, s.45]. Hippokratés z Chiu[43] převedl problém zdvojení krychle na nalezení *středních geometrických úměrných*[44], jak jsme se později setkali u Platóna.

$$a:x=x:y=y:2a$$

Od Eutokia[45] se dále dozvídáme, že Menaichmos[46] nalezl dva způsoby řešení a to přes průsečík dvou parabol a průsečík paraboly a rovnoosé hyperboly. Přesná konstrukce není známa, ale tyto kuželosečky měly pravděpodobně v dnešní terminologii předpisy vycházející z výše uvedených dvou rovností, které můžeme přepsat do tvaru

$$x^2=ay\,,\;y^2=2ax\,,\;xy=2a^2$$

Po dosazení *1* za konstantu *a*, získáme konstrukcí těchto rovnic průsečík splňující podmínku[47]. Za předpokladu, že je *a* rovno 1, má průsečík všech tří křivek souřadnice $P=[\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}]$ (obr. 27). Znovu ale jako u kvadratixu

43 **Hippokratés z Chiu** (2 pol. 5.stol př.n.l) ionský filosof známý hlavně tzv. Hippokratovy měsíčky. Pravděpodobně sepsal svoje matematické Základy. Zkoumal útvary ohraničené přímkou nebo kruhovým obloukem. (Neplést s Hippokratem - známým lékařem) [Sv, s. 370][St, s.36]

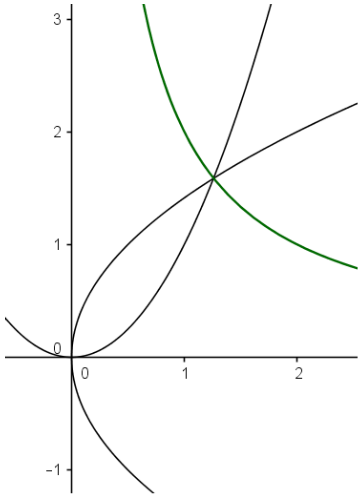
44 $a:x=x:y=y:2a$

45 **Eutokios z Aškelonu** (480 – 540) Znám hlavně svými komentáři k různým antickým matematikům. Nejčastěji píše o Archimedovi a Appolóniovi [CR].

46 Bratr Deinostratose

47 Téma dále rozvádí Lenka Lomatidze ve své práci [Lo, s.48].

nedokážeme tyto křivky euklidovsky sestrojit. Sice máme způsob hledání bodů pro libovolné souřadnice x, ale souřadnici x najít neumíme.



Ilustrace 27

Stejným způsobem bychom mohli uvažovat nad kubickou rovnicí, kde pro předpis $y=x^3$ můžeme hledat průsečík s funkcí $y=2$. Podobné úvahy bychom mohli rozvíjet i u jiných kuželoseček.

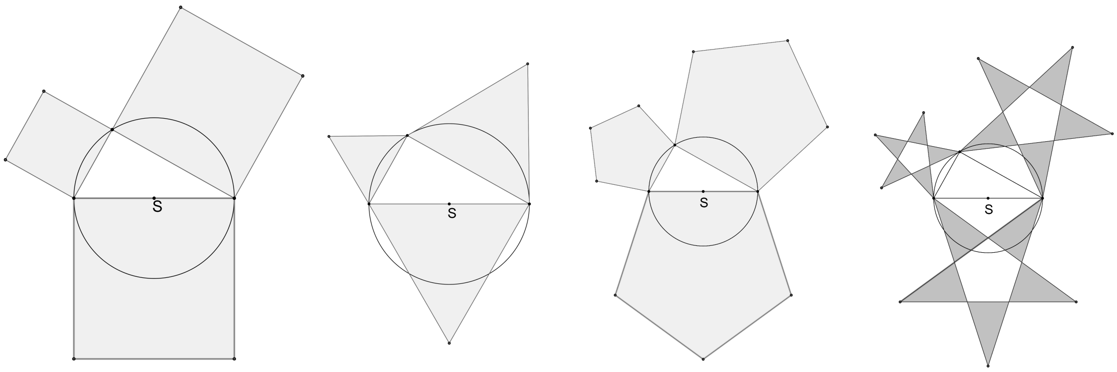
Zároveň se setkáváme i s prostorovým uvažováním, kdy podle Eutokia Archytás z Tarentu[48] využívá rotační válcové a kuželové plochy a axoidu (anuloidu s nulovým vnitřním průměrem) [Lo, s. 61].

Pro trisekci úhlu bychom mohli využít pro změnu funkci sinus a cosinus, které nám převádějí velikost úhlu na velikost úsečky.

Důvodem, proč se také tak usilovně zkoumaly křivky pro řešení klasických řeckých úloh, byl objev Hippokratových měsíčků, které řešily kvadraturu konkrétní křivky a dávaly zde jistý pocit, že i kvadratura kruhu je možná pomocí nějaké křivky.

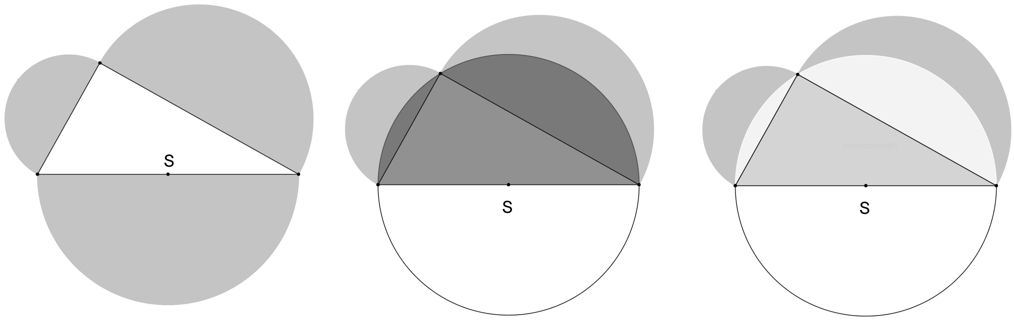
Měsíčky vycházejí z Pythagorovy věty a z úvahy, že jakékoliv podobné útvary sestrojené nad stranami pravoúhlého trojúhelníku jsou ve vztahu, jak ho definuje Pythagorova věta (obr. 28). To znamená, že vztahu vyhovují i půlkružnice, které můžeme nad stranami sestrojit. Půlkružnici

48 **Archytás z Tarentu** (428 – 365 př.n.l) byl významný Pythágorejec [St, s. 38].



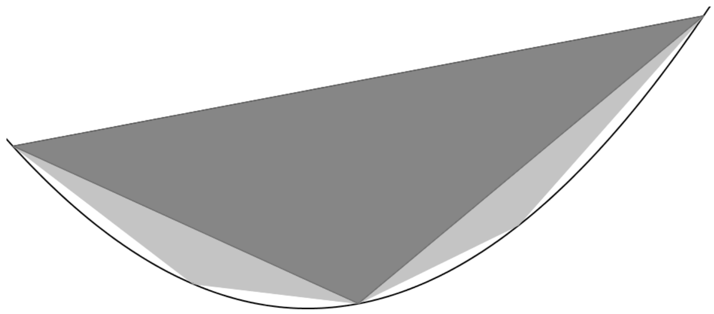
Ilustrace 28

nad přeponou potom můžeme překlopit a odečíst to, co má společné s půlkružnicemi nad odvěsnami (obr. 29).



Ilustrace 29

Stejně jako Hippokratovy měsíčky mohla dodat optimismus pro řešení úlohy Archimedova kvadratura paraboly [Archimedes, Kvadratura paraboly, věta 18 [Ře, s.283]]. Archimédes ji provedl tak, že do úseče paraboly vepsal obsahem co největší trojúhelník[49]. Jeho dvě kratší strany jsou zároveň sečny paraboly a zároveň základny dalších dvou menších vepsaných trojúhelníků (obr. 30). Spočítal, že obsah dvou menších je



Ilustrace 30

49 Nejdříve sestrojíme tečnu rovnoběžnou se sečnou. Tečný bod je pak vrcholem trojúhelníku.

čtvrtinou většího. Představil si, že by proces mohl neustále opakovat a vytvořil geometrickou řadu:

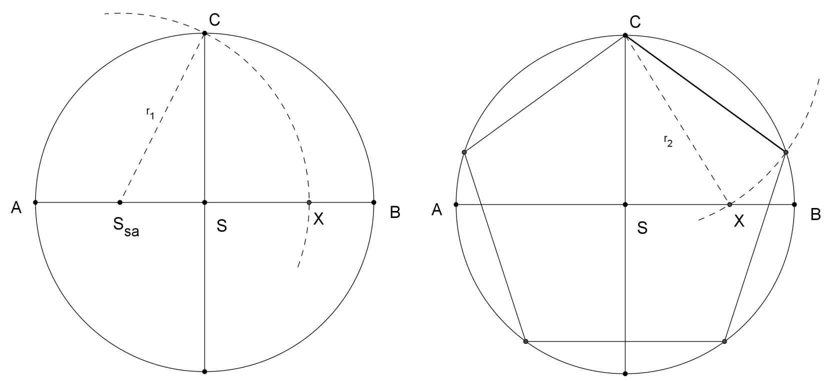
$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}=\frac{4}{3}$$

Výsledek znamenal, že úseč paraboly je čtyřmi třetinami vepsaného trojúhelníku.

Mnohoúhelníky

Mezi klasické řecké úlohy se občas zařazuje i otázka konstrukce pravidelných mnohoúhelníků. V dnešní terminologii tím myslíme prostý mnohoúhelník, kde každá strana spojuje dva vrcholy, strany se neprotínají a mnohoúhelníku lze opsat kružnici, která obsahuje všechny jeho vrcholy. Eukleides si vystačil s pojmem stejnostranný a stejnoúhlý[50]

Ptáme se tedy: Které pravidelné mnohoúhelníky lze a které nelze narýsovat v Euklidovské geometrii? Trojúhelník a čtyřúhelník definuje už ve svých základech Euklides[51], který zároveň ukazuje návod konstrukce pětiúhelníku (dále jen 5-úhelník (obr. 31)), 6-úhelníku a 15-úhelníku.[52]



Ilustrace 31

Ke každému mnohoúhelníku můžeme jednoduše sestrojit mnohoúhelník o dvojnásobném počtu vrcholů. Víme tedy jistě, že bychom sestrojili mnohoúhelníky o počtu vrcholů 8,10,12,16,20,24, 30, …. .

Konstrukce úzce souvisí s konstrukcí úhlů. Pokud jsme schopni sestrojit 10-úhelník, potom víme jak najít úhel 36°. Můžeme dále uvažovat

50 *Do daného kruhu vpiš patnáctiúhelník stejnostranný a stejnoúhlý.* [Euklides, Základy IV, Věta 16, [Se, s. 68]]

51 *Mezi trojstrannými útvary je rovnostranný trojúhelník, útvar, který má tři strany stejné ... Mezi čtyřstrannými útvary je čtverec ten, který je rovnostranný a pravoúhlý...*[Euklides, Základy I Definice 20, [Ře, s.113] Definice 22, [Ře, s.115]]

52 [Euklides, Základy IV, Věta 11 [Ře, s.165], 16 [Se, s. 68]]

nad chybějícími mnohoúhelníky.

Německý matematik Carl Fridrich Gauss[53] dokázal spojitost mezi Fermatovými čísly a konstrukcí pravidelného mnohoúhelníka, a to přes hledání kořenů binomické rovnice $x^n=1$ [Kr, s. 3 (244)].

Gaussova věta. *Pravidelný mnohoúhelník je eukleidovsky konstruovatelný tehdy a jen tehdy, když počet jeho vrcholů je roven číslu* (k=) $2^i p_1 p_2 ... p_j, i\geq 0, j\geq 0, k\geq 3$ *jsou celá čísla a p1,p2,...,p_j navzájem různá Fermatova prvočísla.*

Pierre Fermat[54] vyslovil hypotézu, že všechna čísla ve tvaru $F_n=2^{2^n}+1$ jsou prvočísla. To se sice ukázalo jako nepravdivé, ale ta čísla, která jsou prvočísly (tzv. Fermatova prvočísla[55]), tvoří základ pro hledání pravidelných mnohoúhelníků.

Po dosazení do rovnice v Gaussově větě začnou vycházet postupně

---

53 **Johann Carl Friedrich Gauss** (1777 – 1855) je jeden z největších matematiků. V roce 1799 získal doktorát a od roku 1807 působil jako ředitel v astronomické observatoři v Göttingenu. Už v 17 letech nalezl v teorii čísel kvadratický zákon reciproty. Jeho disertace podává první přesný důkaz základní věty algebry (každá algebraická rovnice s reálnými koeficienty má komplexní kořen a proto má n kořenů). Jeho práce je v tomto odvětví tak bohatá, že je občas považován za zakladatele teorie čísel. Zájem o astronomii získal, když vypočítal dráhu planetoidu Ceres přes rovnici osmého stupně. Dále přispěl výrazně i k oboru geodézie, kde vyložil již známou Metodu nejmenších čtverců a další objevy. Popis jeho další práce by byl na několik stran. Za zmínku ještě stojí, že objevil neeuklidovskou geometrii, ale narozdíl od Lobačevského ji nezveřejnil. [St s. 77]

54 **Pierre de Fermat** (1601 – 1655) nebyl primárně matematik, ale právník. Přesto se proslavil tzv. Velkou Fermatovou větou. S Pascalem je považován za zakladatele teorie pravděpodobnosti a objevení extrémních hodnot křivky v matematické analýze [Z přednášek na UHK].

55 $F_0=2^{2^0}+1=3, F_1=2^{2^1}+1=5, F_2=2^{2^2}+1=17, F_3=2^{2^3}+1=257, F_4=2^{2^4}+1=65537$

$F_5=2^{2^5}+1=4294967297$.

Číslo F_5 ovšem není prvočíslo. Důkaz přinesl Leonard Euler 1732 (rozložil číslo na $641\cdot 6700417$) a tím vyvrátil tuto hypotézu [Kr] .

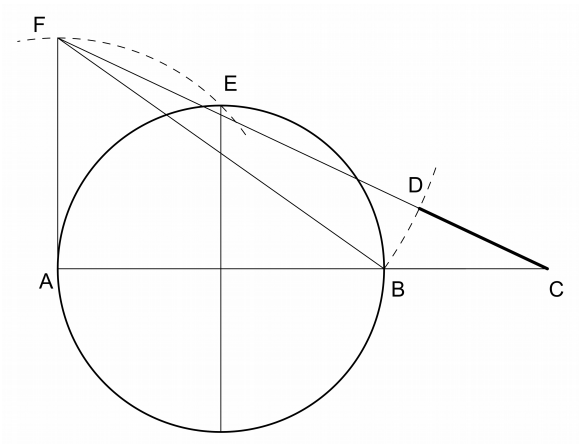
hodnoty k = 3,4,5,6,8,10,12,15,16,17… . Jelikož jde o nutnou podmínku pro konstrukci, můžeme určit množinu mnohoúhelníků, které zkonstruovat nelze. Jsou to 7, 9,11,13,14,18,…-úhelníky. Tyto mnohoúhelníky sice nelze euklidovsky sestrojit, ale můžeme najít přibližné řešení, které lze prakticky použít.

Konstrukce rovnostranného trojúhelníku a čtverce je triviální a 5-úhelník jsme si již ukázali. Je jasné, že dvojnásobky konstruovatelných n-úhelníků (např. 6-úhelník) jsou taktéž triviální. 7-úhelník nelze zkonstruovat přesně, ale známe jeho přibližnou konstrukci. Když si přes sinus vypočítáme délku strany, dostaneme $a \doteq 0{,}867767$. Vhodnou aproximaci uvádí Bedřich Šofr ve své knize [Šo, s. 168]:

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{3}\doteq 0.866025$$

Stačí tedy sestrojit $\sqrt{3}$ a nanést polovinu na kružnici.

Dále uvádí ještě přesnější konstrukci. Podle obrázku (obr. 32) narýsujeme úsečku AF, která je kolmá na AB a má délku stejnou jako AE ($\sqrt{2}$) Dále sestrojíme bod C, který leží na přímce AB ve vzdálenosti

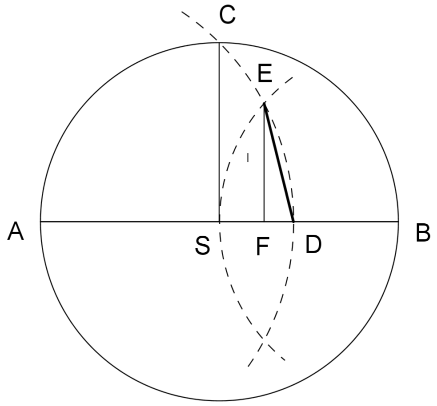


Ilustrace 32

poloměru od bodu B. Dle vztahů pak vidíme, že pokud je kružnice jednotková, tak musí platit výpočet:

$$|FB|=\sqrt{6}\wedge|FC|=\sqrt{11}\wedge|FC|-|FB|=\sqrt{11}-\sqrt{6}\doteq 0.867135$$

Pravidelný 8-úhelník lze snadno sestrojit ze čtverce. Pravidelný 9-úhelník lze sestrojit znovu pouze přibližně, kde podle obrázku (obr. 33) narýsujeme do kružnice dvě kružnice - jednu se středem v bodě A a procházející bodem C a jednu v bodě B a procházející bodem S. Velikost



Ilustrace 33

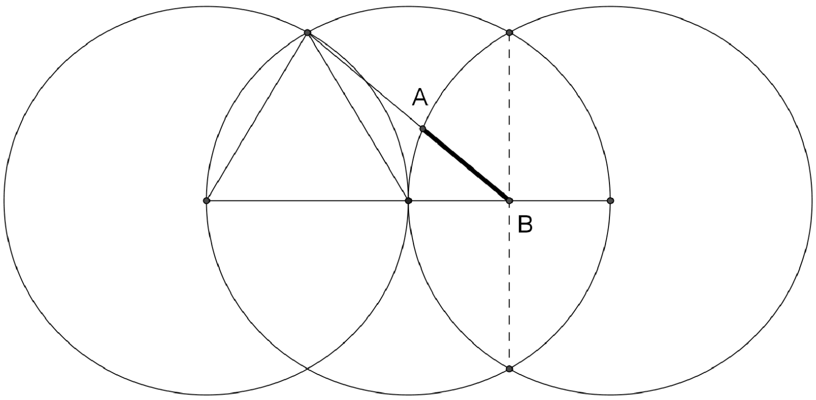
úsečky ED by měla přibližně odpovídat straně 9-úhelníku. Pro ověření pak Bedřich Šofr využívá pravoúhlý trojúhelník EFD a průsečík E (jako průsečík dvou kružnic). Zdá se ale, že pokud se jedná o jednotkovou kružnici a S je středem souřadnic, stačí vypočítat pouze vzdálenost dvou bodů[56], kde E spočítáme jako průsečík.

Konstrukci 11-úhelníku [Šo, s. 172] uvedu v práci jenom obrázkem (obr. 34). Pro lepší orientaci jsem postup zakreslil do tří kružnic se stejným poloměrem. Velikost úsečky AB by měla odpovídat velikosti strany 11-úhelníku. Ověřit tuto velikost bychom mohli znovu umístěním středu prostřední kružnice do středu kartézské soustavy souřadnic.

Pravidelný 15-úhelník je možné sestrojit a postup konstrukce ukázal už Euklides [Euklides Základy IV, Věta 16, [Se, s. 68]], který popsal, že stačí sestrojit do kružnice rovnostranný trojúhelník a pravidelný 5-úhelník tak, aby měli jeden vrchol společný (obr. 35). Důkaz zde není dle mého

---

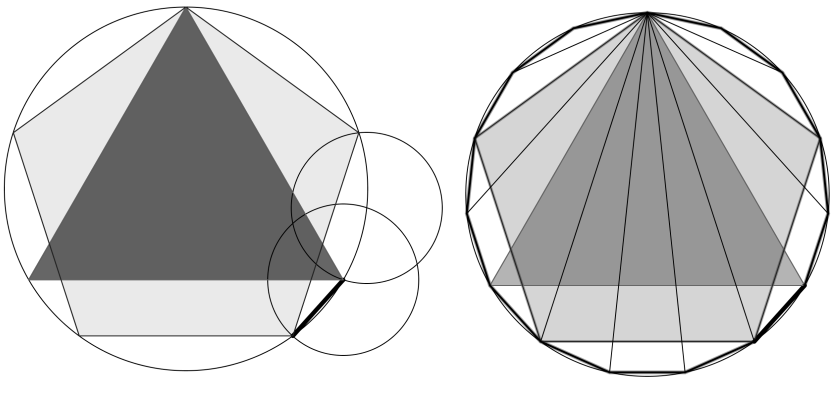
56 Vyjádříme rovnici kružnice v bodě A: $(x+1)^2+y^2=2$ a v bodě B: $(x-1)^2+y^2=1$, potom jejich průsečík je v bodě $E=\left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right]$ a z obrázku vyčteme $D=[\sqrt{2}-1, 0] \rightarrow |ED|=\sqrt{4-\frac{5}{2}\sqrt{2}} \doteq 0{,}681517$.



Ilustrace 34

názoru třeba, jelikož z obrázku je vidět, že oba obrazce jsou tvořeny úhlopříčkami 15-úhelníku. Je totiž zřejmé, že pokud by se nám podařilo pravidelně rozdělit kruhový oblouk vyznačený dvěma vrcholy například 5-úhelníku, tak se ze stran 5-úhelníku stanou právě úhlopříčky.

Jedná se zde o zajímavý úkaz, který se dá zobecnit. Kdybychom byli schopni nakreslit například 150-úhelník, potom v něm můžeme najít



Ilustrace 35

3,5,6,10,15,25,30,50,75-úhelník, jelikož rozklad čísla je $150=2\cdot3\cdot5\cdot5$, kde čísla 3,5 jsou Fermatova.

Existuje celá řada dalších objevených řešení různých mnohoúhelníků. U některých Euklidovsky sestrojitelných se používá pro mnohem jednoduší postup přibližné řešení[57].

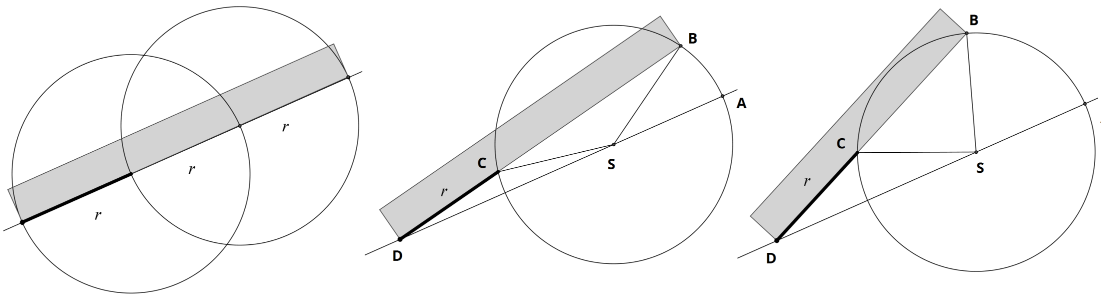
57 Například pravidelný 17-úhelník Gaussovo pravidlo označuje za sestrojitelný, Zvláštností je, že Gauss sice objevil číselné vyjádření velikosti strany splňující podmínky euklidovské konstrukce, ale zápis čísla pro konstrukci byl přespříliš komplikovaný. Díky tomu se postupně objevovala právě různá přibližná

Speciální pomůcky

Mechanické pomůcky

Do speciálních pomůcek bychom prakticky mohli řadit běžné pravítko a nebo úhloměr, kde dané hodnoty můžeme zakreslit. Tyto pomůcky ale nejsme sami schopni vyrobit tak, abychom mohli provést přesnou konstrukci. To samé platí pro různá křivítka. Můžeme si vytisknout sinusoidu a s její pomocí provést trisekci úhlu, ale sinusoida není euklidovsky sestrojitelná. Některé pomůcky ale lze euklidovsky sestrojit a některé jsou tak jednoduché, že se hodí i po praktické stránce.

Asi nejpraktičtější takovou metodou je pravítko se dvěma body (obr. 36), jelikož pro tuto metodu můžeme použít i běžně používané pravítko. S touto metodou přišel Archimedes, když si na pravítko nanesl velikost poloměru dle obrázku a pravítko přiložil k bodu B tak, aby bod C



Ilustrace 36

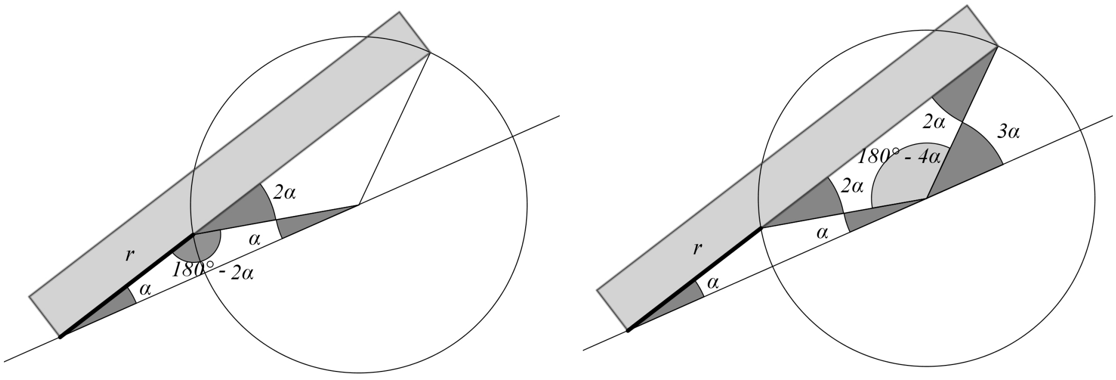
ležel na kružnici a bod D na přímce SA. Úhel CDS pak je třetinou úhlu BSA [Pol, s. 46].

Důkaz je velmi jednoduchý. Pokud úhel, který svírá pravítko s přímkou SD označíme jako α, pak vidíme postupným doplňováním úhlů, že náš libovolný úhel má velikost 3α (obr. 37).

Další podobnou pomůckou je tzv. Platónův křižák (obr.38)[58], který

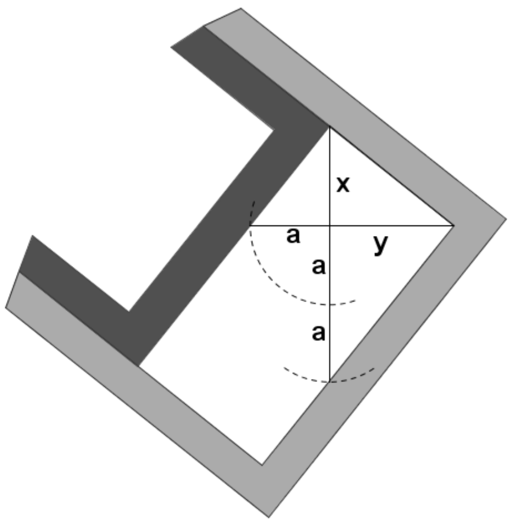
řešení i přesná řešení o různě náročném postupu.

58 Konstrukci této pomůcky, stejně jako pomůcky Tomahawk, jsem našel ve skriptech Jihočeské



Ilustrace 37

řeší zdvojení krychle. Jedná se o využití tesařských úhelníků. Velikost hrany krychle *a* sestrojíme dvakrát na kolmici. Následně přiložíme dvě tesařská pravítka tak, abychom přímky dostali do dvou rohů pomyslného obdélníku.



Ilustrace 38

Důkaz provedeme porovnáním tří podobných trojúhelníků, které nám zde vznikly. Když porovnáme menší odvěsny s většími, pak musí platit:

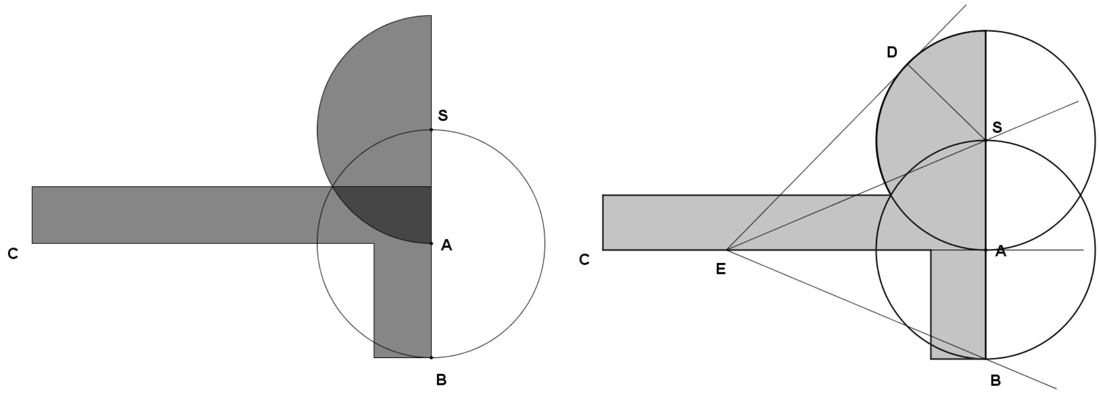
$$\frac{y}{2a}=\frac{x}{y}=\frac{a}{x}$$

Tento vzorec jsme viděli už v kapitole o křivkách a je to vyjádření poměrů u zdvojení krychle.

---

univerzity. Bohužel jsem nedohledal autora, ale do pdf se dá nahlédnout na: https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/DejinyM.pdf s.39

Dalším pomůckou je tzv. Tomahawk. Jedinými podmínkami při konstrukci je, aby se velikost BA rovnala AS (obr. 39), a aby úsečka CA byla kolmá na SB.



Ilustrace 39

Trojúhelníky EDS, EAS, EAB jsou shodné, jelikož strany DS, SA, AB mají stejnou velikost, všechny trojúhelníky jsou pravé a SE je společná pro EDS, EAS a strana EA pro EAB, EAS. Můžeme tak provést trisekci úhlu EDB.

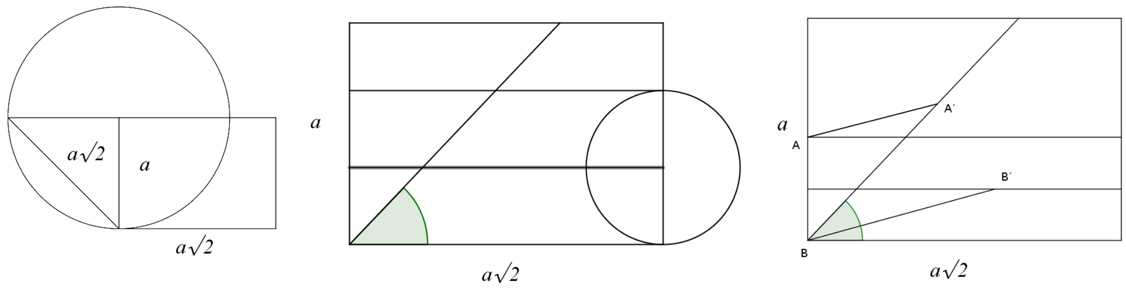
Papírové pomůcky

Většinu těchto pomůcek si můžeme vyrobit z běžného papíru a spočívají v přeložení a posunování pomůcky, dokud její poloha nesplňuje určité vlastnosti. Z tohoto pohledu se dá použít i samotný papír.

Překládání papíru (populárnějším názvem origami) představuje zajímavý příklad neeuklidovského řešení některých geometrických úloh. Jako budoucí pedagog jsem považoval za vhodné tuto problematiku do práce přidat.

Abychom zachovali co nejvíce školskou geometrii, můžeme téměř vše euklidovsky zakreslit. Na trisekci úhlu [So] budeme potřebovat běžný papír libovolného formátu A, který si můžeme i narýsovat jako obdélník o stranách $a, a\sqrt{2}$. Na stránku si narýsujeme libovolný úhel a zároveň narýsujeme dvě přímky rovnoběžné s delším okrajem papíru, z nichž jedna bude dvakrát vzdálenější okraji než druhá.

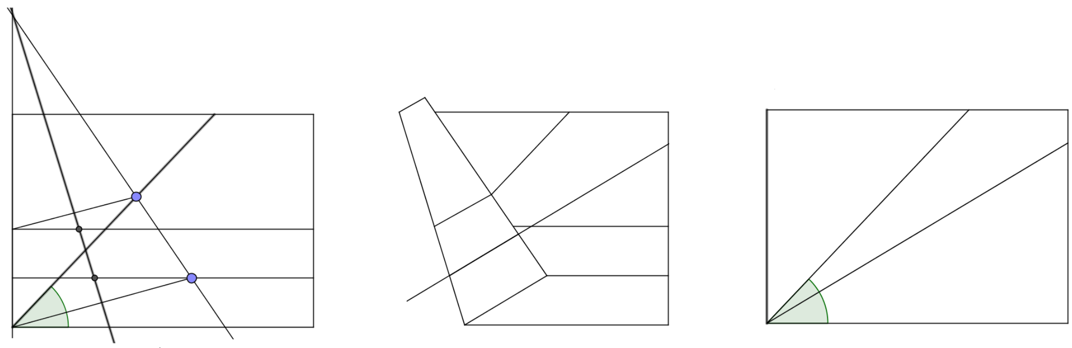
Následně provedeme úpravu, která jako jediná není euklidovská. Přeložíme papír tak, abychom podle obrázku bod A přesunuli na bod A' (na



Ilustrace 40

rameno úhlu) a bod B do bodu B' (na první pomocnou čáru).

Jak tento proces vysvětlit geometricky? Když si narýsujeme přímky AB, A´B´, $S_{AA'}S_{BB'}$ a tyto přímky se protnou v jednom bodě, pak je to stejné jako kdybychom papír přeložili.



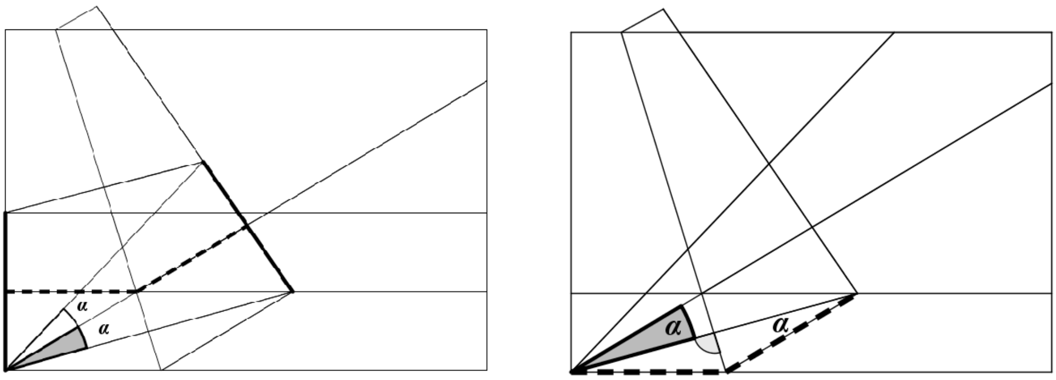
Ilustrace 41

Přeložením papíru vlastně vytvoříme osovou souměrnost, ale takovým způsobem, že nejdříve určíme oba obrazy bodů v osové souměrnosti (ohnutím papíru) a až následně samotnou osu (přejetím prstu po ohybu), což by v euklidovské konstrukci možné nebylo[59].

59 K origami existuje i řada axiomů, například Huzitovy axiomy, kde problematický úkon provádíme

Přeložením se nám zde vytvoří nová přímka, která úhel rozděluje v poměru 1:2. Proč tomu tak je? Když se podíváme na první obrázek níže, vyznačené úhly se musejí rovnat, jelikož jejich společné rameno je kolmé na obraz okraje papíru a vznikají nám zde dva shodné trojúhelníky.

Další obrázek pak ukazuje (obr. 42), že se zde vyskytují dva střídavé úhly a část spodního okraje se svým obrazem tvoří ramena rovnoramenného trojúhelníku. Je tedy jasné, že všechny tři úhly jsou stejné a jedná se o trisekci úhlu.



Ilustrace 42

Konstrukce hrany dvojnásobné krychle se dá potom vytvořit podobným principem[60]. Narýsujeme čtverec, který rozdělíme na třetiny a provedeme překlopení dle obrázku.

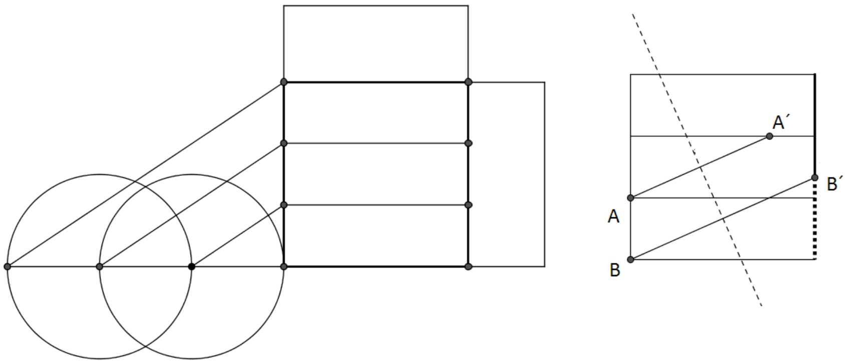
Znovu se jedná o vytvoření osové souměrnosti pomocí přeložení papíru, kde bod A má obraz A´ na příčce ve čtverci a bod B obraz B´ na straně čtverce. Bod B´nám zároveň hranu dělí v poměru $\sqrt[3]{2}:1$.

Je otázkou, jestli jsme takto opravdu získali poměr $\sqrt[3]{2}:1$. Z obrázku vidíme, že musí platit tyto čtyři vztahy a pátý předpokládáme.

---

pomocí posledního šestého axiomu. Bohužel se mi nepodařilo sehnat žádný zdroj, pomocí kterého bych mohl problematiku rozvést [Gr]

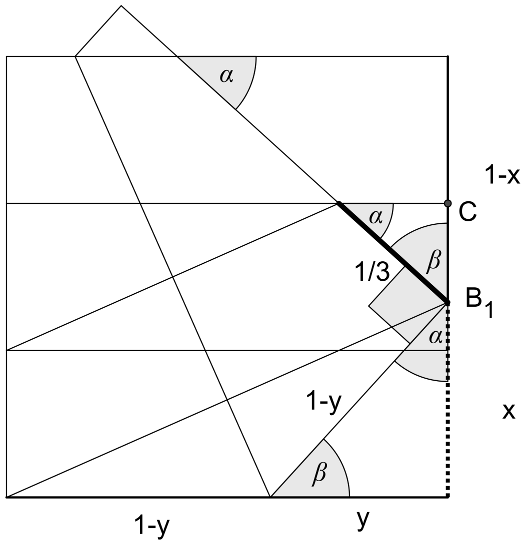
60 http://www.origami.cz/Geometrie/axiomy.html



Ilustrace 43

$$1)\ \ |B_1C|=\frac{1}{3}\cos\beta \quad 2)\ \ \cos\beta=\frac{y}{1-y} \quad 3)^{61}\ \ y=\frac{1-x^2}{2}$$

$$4)\ \ |B_1C|+x=\frac{2}{3} \quad 5)^{62}\ \ x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$$



Ilustrace 44

Dále nám stačí dosazovat, dokud nezískáme rovnici o jedné neznámé.[63] Tato rovnice má podobu: $3x^3-3x^2+3x-1=0$.

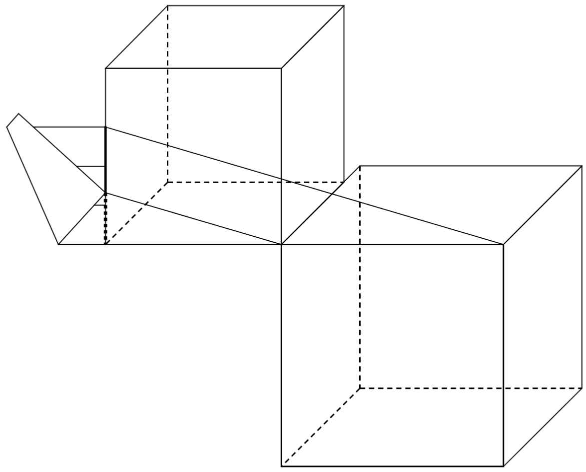
61 Z Pythágorovy věty $x^2=(1-y)^2-y^2=-2y+1 \rightarrow y=\frac{1-x^2}{2}$

62 $\frac{1-x}{x}=\sqrt[3]{2} \rightarrow 1-x=x\cdot\sqrt[3]{2} \rightarrow x\cdot(\sqrt[3]{2}+1)=1$

63 $|B_1C|+x-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\cos\beta+x-\frac{2}{3}=\frac{y}{3\cdot(1-y)}+x-\frac{2}{3}=\frac{\frac{1-x^2}{2}}{3\cdot(1-\frac{1-x^2}{2})}+x-\frac{2}{3}=\frac{1-x^2}{2-1+x^2}+3x-2=$

Po dosazení[64] předpokládaného kořene $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$ a roznásobení vidíme, že se jedná opravdu o kořen rovnice a vztah $\frac{1-x}{x}=\sqrt[3]{2}$ platí.

Po didaktické stránce pak úlohu můžeme zavést během hodiny při kreslení na tabuli přímo praktickou ukázkou, nebo celý problém nejdříve dát na zamyšlení za domácí úkol.[65]



Ilustrace 45

Mezi klasické úlohy patří již zmíněné pravidelné mnohoúhelníky. Poprvé se překládání papíru věnoval až indický výběrčí daní Tandalam Sundala Row v roce 1893.

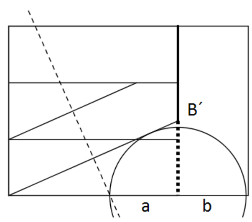
$$=\frac{1-x^2}{1+x^2}+3x-2=1-x^2+3x(1+x^2)-2(1+x^2)$$

64 $3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}\right)^3-3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}\right)^2+3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}\right)-1=0 \rightarrow 3-3(\sqrt[3]{2}+1)+3(\sqrt[3]{2}+1)^2-(\sqrt[3]{2}+1)^3=0$

$$3-3\cdot\sqrt[3]{2}-3-3\cdot\sqrt[3]{4}+6\cdot\sqrt[3]{2}+3-2+3\cdot\sqrt[3]{4}-3\cdot\sqrt[3]{2}-1=3-3+3-2-1+3\cdot\sqrt[3]{4}-3\cdot\sqrt[3]{4}-3\cdot\sqrt[3]{2}+6\cdot\sqrt[3]{2}-3\cdot\sqrt[3]{2}=0$$

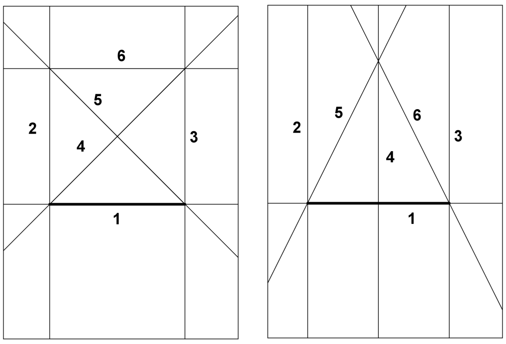
65 Zdvojení pomocí papíru jsem provedl vícekrát. Poprvé, díky chybě, jsem po výpočtu zjistil, že pokud by se $a=b$ (viz obrázek), pak by bod B´ dělil přímku v poměru $\sqrt[2]{2}:1$.

Provedl jsem postup znovu na novém papíru a dostal se po přeměření na poměr 11,7: 9,3, což dává hodnotu přibližně 1,2508. Třetí odmocnina ze dvou je rovna přibližně 1,2599. Podobné úvahy by se daly rozvíjet i během hodiny.



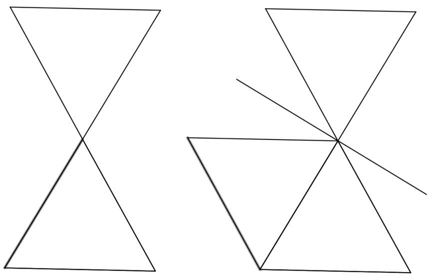
Ilustrace 46

Postupně nadefinoval konstrukci 3,4,5,6,8,9,15-úhelníku. První dva jsou jednoduché (obr. 47) a podobají se běžné konstrukci [Fi s. 13].



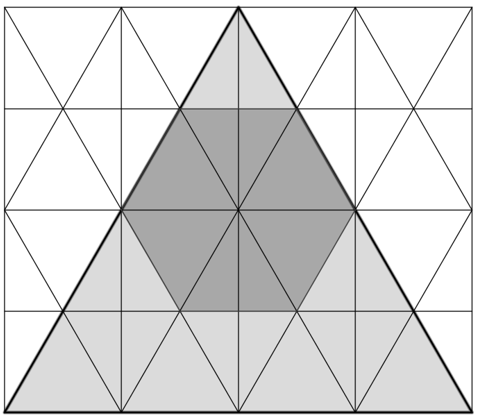
Ilustrace 47

Následně 6 – úhelník je pouze pokračování rovnostranného trojúhelníku nejdříve podle středové a potom osové souměrnosti (obr. 48). Row [Row s. 36] 6-úhelník skládá taktéž z trojúhelníka (obr. 49) a to pravidelným ohýbáním papíru. Stejně tak využívá pravidlo pro konstrukci



Ilustrace 48

pravidelného 15-úhelníka. Je jasné, že podle pravidel můžeme i ohýbáním papíru získat ze čtverce 8-úhelník.



Ilustrace 49

Row pak provádí i konstrukci 5-úhelníka, ale konstrukce už začíná být složitá a po praktické stránce přestává být tak přesná jako trisekce úhlu nebo zdvojení krychle, nehledě na možnost 5-úhelník sestrojit klasicky.

Nakonec se vrátíme k základní dovednosti, kterou se učí už děti ve školce, a to k vázání uzlů. Uzly poutaly a poutají zájem matematiků už od roku 1847, kdy jim značnou část ve své topologii věnoval Listing [De, s. 248]. Nás ale nebude zajímat tzv. uzlovitost, ale které uzly utvoří po úpravě právě pravidelné mnohoúhelníky. V této části budu odkazovat na obrázky v příloze. Vezmeme si pásek z papíru a uvážeme na něm uzel. Po pečlivém utáhnutí nám vznikne útvar, který může být pravidelný mnohoúhelník. V knize Q.E.D [Pol s. 30] najdeme takto sestrojený 5-úhelník (1.očko), 6-úhelník (2. ambulanční uzel) a 7-úhelník (3). Je jasné, že různé uzly nám mohou vytvořit plošné obrazce, jako kdybychom silou uzel přimáčkli. Některé, jako liščí (4.), nám dají obrazec, který sice není pravidelný mnohoúhelník, ale po jisté upravě papíru by jím mohl být. Podoba uzlu ale není jednoznačná (po přimáčknutí může vypadat různě), tudíž nejde o případ pravidelného mnohoúhelníku, jako u očka a ambulančního uzlu. Jiné uzly, jako dračí uzel, můžeme rovnou vyloučit pro jejich specifický tvar, který nám nedovoluje smyčku dostatečně utáhnout. Jak tedy mnohoúhelník nalézt? Kniha Q.E.D nám poskytuje pouze již tři zmíněné uzly, ale žádný klíč či důkaz.

Můžeme zkusit proces otočit. Pro konstrukci rovnostranného trojúhelníku najdeme uzel v podobě vznikající smyčky (6.). Vidíme tedy, že sestrojení rovnostranného trojúhelníka a 5-úhelníka se podobá. Když znovu pohlédneme na 7-úhelník, vidíme, že i tam je základem očko, přes které znovu jistým způsobem provlékneme provázek.

Jak správně provázek uzlem prostrčit, je otázka technického rázu, ale je pravděpodobné, že opětovným prostrčením provazu bychom získali

9,11,13,…-úhelník. Jak získat mnohoúhelníky, které zde nemáme (sudého počtu vrcholů), zůstává otázkou. Je možné, že stačí správným způsobem pracovat s ambulančním uzlem. Každopádně celá problematika už by musela dostat dostatečný topologický základ, jak o tom píše Keith Devlin, a vyložení by asi přesáhlo rozsah této práce.

Existují další a další pomůcky. Řadu n-úhelníků můžeme narýsovat pomocí běžných konstruovatelných úhlů nebo pomůcek pro trisekci úhlu (hlavně pravítko o dvou bodech). Stejně tak, pokud bychom měli sestrojenou sinusoidu, stačí úsečku o velikosti π rozdělit na n stejných částí. Pokud by někdo potřeboval urychleně nakreslit 13-úhelník, pak stačí vytáhnout z peněženky dvacetikorunu, která tento tvar má.

Závěr

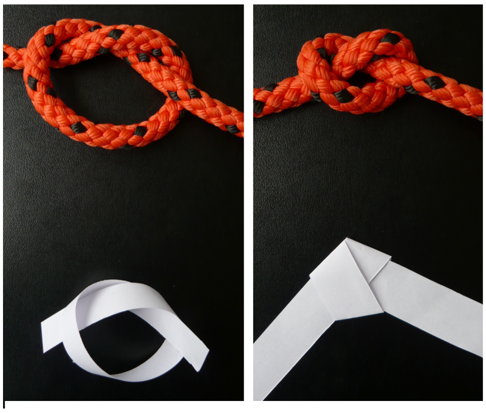
Závěrem mi už jen zbývá zhodnotit tuto práci ze svého pohledu. Postupem času jsem zjistil, že o tomto tématu, na rozdíl od mé bakalářské práce, je napsané velké množství české a cizojazyčné literatury. To mi poskytovalo řadu výhod, ale i některé nevýhody. Výhodou bylo rychlé sehnání velkého množství literatury, ve které, pokud jsem něčemu neporozuměl, jsem měl po ruce jinou publikaci, knihu, článek, který mi opět napomohl pokračovat v sepisování této práce. Spíše nevýhodou se zdála být již sepsaná diplomová práce na toto téma, kterou napsala Michaela Švecová v roce 2006. Když jsem poprvé tuto práci otevřel, zjistil jsem, že se v některých ohledech dost podobá mému dosud napsanému textu. Důvodem byla podobná literatura. Až nakonec, když jsem měl práci hotovou, jsem si uvědomil, že, přestože se v některých kapitolách práce podobají, jsou jako celek velice odlišné. To je i nenápadná odpověď na otázku, jestli práce, která už byla jednou sepsaná, má nějaký smysl.

Další častou otázkou je, jak by se dalo v diplomové práci ještě pokračovat. Po sepsání práce jsem měl jisté možnosti, kam práci rozšířit. Zdálo se mi ale, že práce by ztratila svoji celistvost. Určitě by šlo ještě vysledovat další osudy klasických řeckých úloh v starověkém světě a koneckonců i v pozdější matematice. Mohl bych rozebrat například tzv. *Morley's trisector theorem*, který jsme si v prvním ročníku ukazovali v hodinách geometrie, a další různé úvahy a předpoklady o klasických řeckých úlohách.

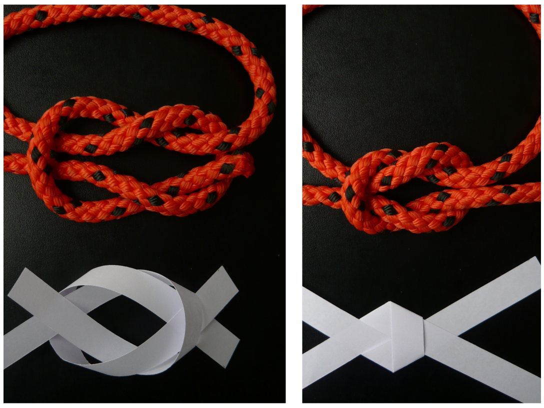
Kapitola konstruovatelnost by šla rozšířit o důkaz transcendence π. Nejvíce by šlo zapracovat na kapitole přibližných konstrukcí, kde existuje ohromná řada rektifikací i trisekcí, stejně jako kapitola o mnohoúhelnících.

V kapitole o křivkách bych mohl psát o Archimedově spirále, o které jsem psal ve své bakalářské práci, a nebo například o křivce s názvem *Sectrix of Maclaurin.* Stejně tak jsem se ale mohl inspirovat prací Michaely Švecové a připsat do pomůcek Carpentův příložník, nebo popsat české příspěvky k této problematice. Nakonec i konečná zmínka o uzlech by se dala rozšířit o zamyšlení se nad některými dalšími uzly (například o uzel dobrého skutku).

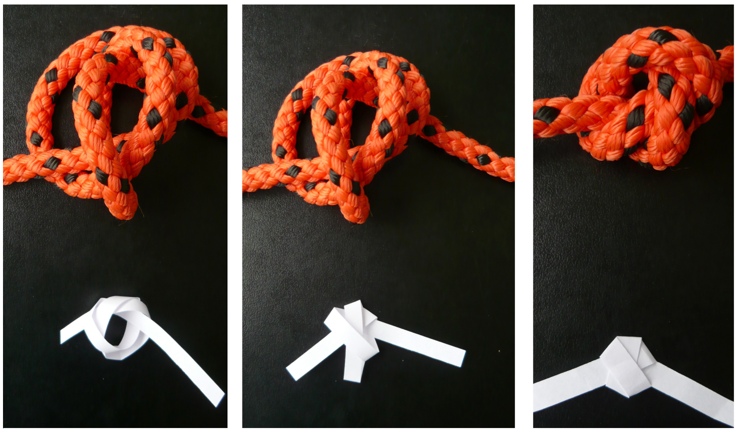
Je pravda, že mám pocit, že jsem mohl sepsat stránek více, ale práce by tak ztratila svoji vyváženost. Tak, jak jsem tyto možnosti teď popsal, by mohl postupovat i někdo jiný, pokud by chtěl udělat velikou a hlubokou práci o těchto matematických problémech.



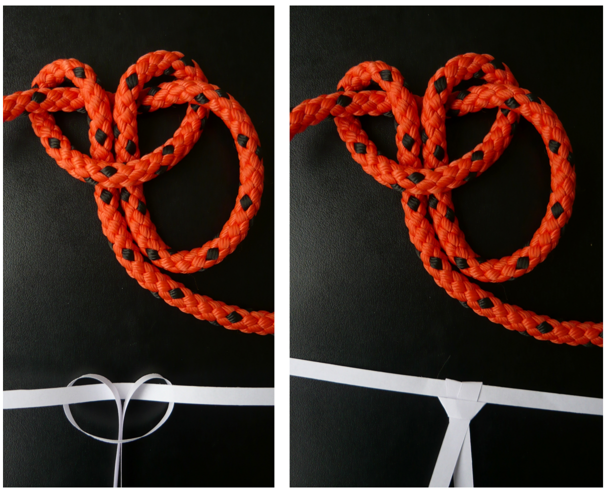
1. očko



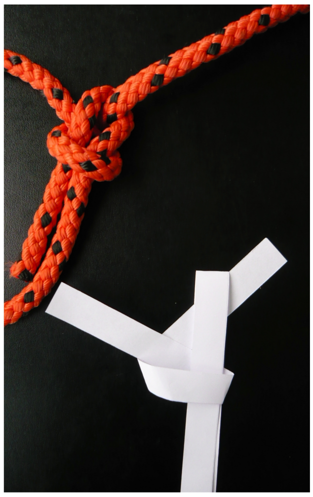
2. ambulanční uzel



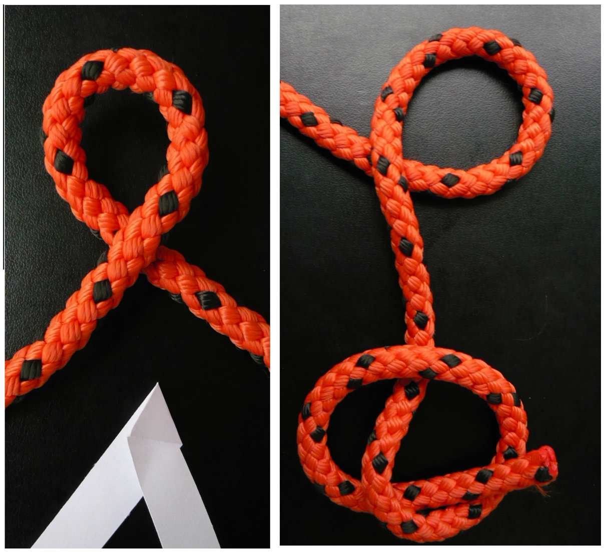
3. 7-úhelník



4. Liščí uzel



5. dračí uzel



6. trojúhelník a očko

7. rozklad 6-úhelníka

Zdroje:

Prameny

[Pla] PLATÓN., *Platónovy spisy: Menón,* Praha: OIKOYMENH. 2003, ISBN 80-729-8066-1.

[Pl1] PLÚTARCHOS., *O delfskémm.* překlad: Radek Chlup, Praha: Herrman & synové 1995

[Pl2] PLÚTARCHOS., *De Genio Socratios.* na http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Plutarch/Moralia/De_genio_Socratis*/A.html

[Ře] *Řecke matematicke texty*: řecko-česky, překlad Richard Mašek, Adam Šmid, Praha: Oikoymenh, 2011, ISBN 978-807-2983-087

[Se] SERVÍT, František., *Euklidovy základy.* Praha: Nakladatelství českých matematiků 1907, scan bookmarks Zdeněk Halas, dostupné na: http://msekce.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Eukleides.pdf (zhlédnuto 14.3.2016).

[Vi] VITRUVIUS POLLIO, Marcus., *Deset knih o architektuře.* Praha: Arista, 2001. ISBN 80-864-1023-4.

Literatura

[Ba] BARTSCH, Hans Jochen., *Handbook of mathematical formulas*. New York: Academic Press, 1974, ISBN 01-208-0050-0.

[Bec] BECKMANN, Petr., *Historie čisla pi*. Praha: Academia, 1998, ISBN 80-200-0655-9.

[Bec2] BECKMANN, Petr., *A history of [pi] (pi)*. Colo.: Golem Press, 1971, ISBN 09-117-6212-4.

[Be] BEČVÁŘ, FUCHS (ed.)., *Historie matematiky I*, Sborník, Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko,1993, JČMF, Brno, 1994.

[De] DEVLIN, Keith J., *Jazyk matematiky: jak zviditelnit neviditelné*. Praha: Argo, 2002. ISBN 80-865-6909-8.

[Du] DUDLEY, Underwood., *A Budget of Trisections*. New York: Springer-Verl., 1987, ISBN 03-879-6568-8.

[Fi] FIALA, Jiří., *Papírová geometre v devíti jednáních.* s. 11-29 *Historie matematiky: .. mezinárodní konference, ..* Praha: Matfyzpress, 2004, ISBN 9788073781729.

[Ji] [BEČVAŘ, BEČVAŘOVA., (ed. Historie matematiky: 34. mezinarodni konference: Poděbrady: 23.8.-27.8.2013), Praha: Matfyzpress, ISBN 978-80-7378-234-4.

[Ka] KAŠPAROVÁ, Martina., *Přibližné rektifikace kruhového oblouku,* s. 53-79, Praha: Matfyzpress, 2010, ISBN 978-80-7378-121-7.

[Kr] KŘÍŽEK, M., *O Fermatových číslech*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 1995, roč. 40, č. 5, s. 243-253, dostupné na: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/138304/PokrokyMFA_40-1995-5_2.pdf (zhlédnuto 20.2.2016).

[Lo] LOMTATIDZE, Lenka., *Historický vývoj pojmu křivka,* Brno: Nadace Universitas, 2007, ISBN 978-80-7204-492-4.

[Ma] MASÁKOVÁ, PELANTOVÁ., *Teorie čísel*, skriptum Czech Technical University, 2010.

[Ol] OLIVA, Pavel., *Dějiny starověkého světa,* Praha: Scientia, pedagogické nakladatelství, 1998, ISBN 80-718-3147-6.

[PO] POLÁK, Josef., *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně,* Plzeň: Fraus, 2014, ISBN 978-80-7238-449-5.

[POL] POLSTER, Burkard., *Q.E.D.: krása matematického důkazu,* Praha: Dokořán, 2014, ISBN 978-80-7363-532-9.

[Ro] ROKYTA, Mirko., *Trisekce úhlu, kvadratura kruhu a podobné ńemožné'úlohy,* Praha: Adaptabilita. CZ.2.17/3.1.00/31165. Dostupné na: http://www.talnet.cz/documents/18/39cdd2ad-93d3-4dca-afb4-97796ebeaed8 (zhlédnuto 11.6.2015)

[Row] ROW, T. Sundara., *Geometric Exercises in Paper Folding,* Chicago: London Open Court publishing company, 1917.

[St] STRUIK, Dirk., *Dějiny matematiky,* Praha: Orbis, 1963.

[Sv] SVOBODA, Ludvík., *Encyklopedie antiky*, Praha: Academie, 1973.

[Šo] ŠOFR, Bedřich., *Euklidovské geometrické konštrukcie,* Bratislava: Alfa, 1976.

[Šv] ŠVECOVÁ, Michaela., *Klasické úlohy řecké matematiky,* (Diplomová práce) Praha: Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky, 2009.

[Th] SIR THOMAS HEATH., *A history of Greek mathematics*, New York: Dover Publications, 1981, ISBN 978-048-6162-690.

[Vo] VOPĚNKA, Petr., *Příležitostné rozpravy s matematikou,* Kanina, 2014, ISBN 978-80-87269-37-4.

webové zdroje

[Gr] GREBENÍČEK, František., *Origami a geometrie, dostupné* na: http://www.origami.cz/Geometrie/axiomy.html (zhlédnuto 21.1. 2016)

[CR] O´CONNOR, ROBERTSON., *The MacTutor History of Mathematics archive* na http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/ (zhlédnuto 3.3.2016)

[RV] REICHL, VŠETIČKA., *Encyklopedie fyziky,* dostupné na: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1400-dejiny-matematiky-a-fyziky (zhlédnuto 15.2.2016)

[So] SOLOVSKÝ, Jakub., *Origami a trisekce úhlu,* dostupné na: https://www.youtube.com/watch?v=gWbMRiEf6h4 (zhlédnuto 20.1. 2016)(Publikováno 19.6.2014)