Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Manipulativní činnosti v matematice - užití překládání papíru

Diplomová práce

Autor: Bc. Zdena Kratochvílová

Studijní program: N1101 Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední školy

Učitelství pro střední školy - základy techniky

Vedoucí práce: RNDr. Marie Kupčáková, Ph.D.

Hradec Králové červen 2017

Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Zadání diplomové práce

Autor:	**Bc. Zdena Kratochvílová**
Studijní program:	N1101 Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro střední školy Učitelství pro střední školy - základy technik
Název závěrečné práce:	**Manipulativní činnosti v matematice – užití překládaného papíru**
Název závěrečné práce AJ:	Manipulative Activities in Mathematics - Use Folding Paper

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Cílem této práce je představit možnosti zapojení skládání papíru do výuky matematiky vytvořením několika metodických listů pro učitele. Součástí práce je představení historie a techniky skládání papíru.

Garantující pracoviště:	Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta UHK
Vedoucí práce:	RNDr. Marie Kupčáková, Ph.D.
Konzultant:	
Oponent:	Mgr. Lukáš Vízek
Datum zadání závěrečné práce:	28. 4. 2016
Datum odevzdání závěrečné práce:	30. 6. 2017

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, ze kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové Jméno a příjmení

Anotace

KRATOCHVÍLOVÁ, Z. *Manipulativní činnosti v matematice – užití překládaní papíru.* Hradec Králové, 2017. Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí diplomové práce Marie Kupčáková. 114 s.

Tato diplomová práce seznamuje s možnostmi zapojení skládání papíru do výuky matematiky. Součástí práce je představení historie a techniky skládání papíru. Cílem diplomové práce je vytvoření několika metodických listů, které učitelům pomohou zařadit skládání papíru do výuky. Žáci tak mají možnost rozvíjet nejen svoji představivost a zručnost, ale také si lépe osvojit daná témata.

Klíčová slova

skládání papíru, trisekce úhlu, duplikace krychle, formáty papíru, pravidelné mnohoúhelníky, úhly

Annotationes

KRATOCHVÍLOVÁ, Z. *Manipulative Activities in Mathematics - Use Folding Paper.* Hradec Králové, 2017. Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Marie Kupčáková. 114 p.

This thesis explicates the options of participation of folding paper during a Math lessons. The dissertation includes an introduction to its history and the technique of folding paper. A thesis´ purpose was also to create a few methodical work sheets that would help a teachers to subsume folding of paper into their lessons. And so a pupils have an opportunity to evolve not only their imagination and skills but also to acquire the given themes in a better way.

Keywords

Paper folding, Angle trisection, Duplication of the cube, Paper size, Regular polynoms, Angles

Obsah

Úvod

Nejrůznější skládanky z papíru byly vždy mojí oblíbenou činností, nikdy jsem si však nespojila tuto zábavu s matematikou. To se změnilo při mé návštěvě jedné hodiny pracovních činností na ZŠ. Na této hodině měli žáci za úkol poskládat jednoduchou papírovou hvězdu. Nejednalo se o nic těžkého, takže po chvíli skládání byla hvězda na světě. Učitelka se ovšem rozhodla hodinu oživit a nenásilně zopakovat důležité poznatky z matematiky. U každého přeložení čtverce papíru se ptala, co daný překlad symbolizuje – zda jde o osu souměrnosti, úhlopříčku nebo něco jiného, a zároveň na kolik a jakých částí překlady čtverec dělí. Taková hodina nadchla nejen mne, ale i žáky. Proto jsem se rozhodla tomuto tématu věnovat svou diplomovou práci, která by obsahovala několik námětů pro výuku matematiky, ve kterých se využije skládání papíru.

Cílem práce je obohatit výuku matematiky o názornost a zvýšit motivaci žáků. Teoretická část bude věnována nejprve historii skládání papíru. Dále budou zavedeny základní úlohy, na nichž je celé toto odvětví matematiky založeno. Na základě těchto výchozích úloh uvedu příklady dvou slavných úloh, které jsou pomocí skládání papíru řešitelné na rozdíl od použití euklidovských konstrukcí. Součástí teoretické části bude také seznámení se základními formáty papíru, které se ke skládání využívají.

Praktická část práce nabídne několik metodických listů, které mohou učitelé matematiky využít při svých hodinách. Žáci si tak hravou formou osvojí mnoho geometrických pojmů.

Použité symboly

	plná tlustá čára – zobrazuje hrany papíru
	plná tenká čára – zobrazuje překlady papíru
	tenká čárkovaná čára – zobrazuje překlad v následujícím kroku
	tenká čerchovaná čára – zobrazuje místo, ve kterém bude papír předělen
$\times$	křížek, nebo vpich – modeluje vyznačený bod
	šipka určující směr překladu
	šipka znázorňující otočení
	symbol lupy – u všech obrázků, které jsou zvětšené oproti původnímu
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	množina přirozených čísel
$\blacksquare$	Halmosův symbol označující konec důkazu

1 Historie skládání papíru

Stručný popis historie origami shrnuje Svobodová (2006), následující odstavce představí nejdůležitější milníky tohoto umění.

Když byl na začátku druhého století v Číně vytvořen první list papíru, nikoho nejspíš ani nenapadlo, jak všestranné jednou bude mít jejich vynález využití. Číňané si velmi dlouhou dobu své tajemství střežili, a až v šestém století se díky skupině budhistických mnichů dostala výroba papíru do Japonska. A právě tady začíná historie papírových skládaček. Nelze si však představovat jakékoli skládání pro pobavení. Papír byl velmi ceněný, a proto i výrobky z něj byly považovány za posvátné, a to doslova. Japonské šintoistické svatyně tak začaly zdobit nejrůznější skládanky od květinových až po zvířecí motivy. V osmém století se umění skládání papíru dostává do Španělska. Na rozdíl od Japonska, kde se papírové skládanky staly neodmyslitelnou součástí náboženských ceremoniálů, Španělé na skládání papíru nahlíželi čistě matematicky – především se zajímali o vlastnosti čtverce. Jejich úsilí vedlo ke vzniku jedné z nejznámějších skládanek, která se pro Španěly stala symbolem, a jsou na ni po právu hrdí. Po celém světě je tato skládanka známá jako pajarita a několika překlady se z ní stane buďto koník, větrník, anebo lodička.

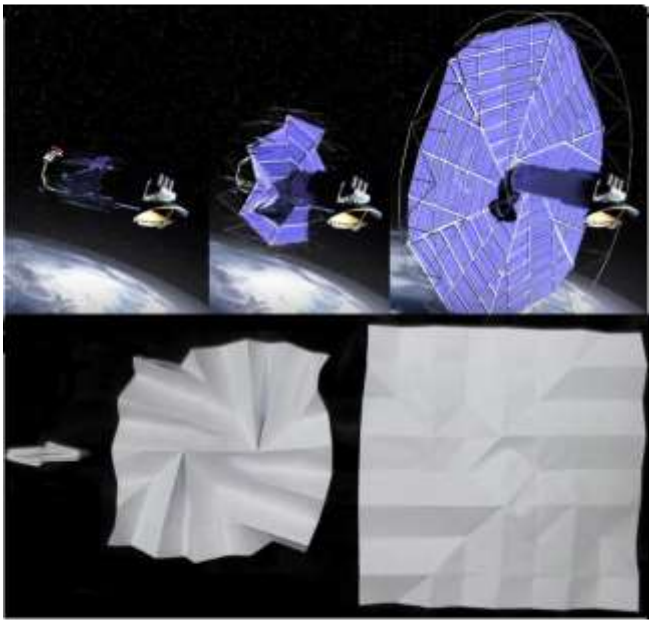
V průběhu staletí se začal papír šířit do Evropy a s ním i umění jeho skládání. Kromě náboženských a matematických účelů získávali skládanky, i další, a to čistě praktické využití. V Číně se s oblibou využívaly papírové misky nebo různé krabičky. Teprve v 17. století se poprvé papír skládal pro zábavu, avšak to bylo dostupné pouze užší části společnosti. Skutečný rozkvět papírových skládanek neboli origami přišel až o dvě století později. Na pulty obchodů s papírem se dostali, i speciální barevné čtvercové formáty pro origami. Původní skládačky, které svým vzhledem připomínají květiny, různé živočichy, nebo jiné věci, jsou v oblibě dodnes a byly postupně doplněny o mnoho dalších vzorů.

V současnosti kromě tradičního origami existuje také origami moderní. Jméno, které se nejčastěji spojuje s tímto odvětvím origami, je Robert Lang. Především díky jeho dlouholeté práci lze dnes poskládat z prapíru téměř cokoli, jak Lang (2008) popisuje ve své přednášce. Papírová zvířátka se tak dočkávají až neskutečně reálné podoby a výstavy origami zdobí například ryby se stovkami šupin, hmyz s článkovitými tykadly a další.

Je překvapivé, že metody aplikované při skládání moderního origami, které prvotně sloužily především k pobavení, našly své využití v medicíně, ve vědě, ve spotřební elektrotechnice, nebo dokonce ve vesmírných projektech. Uveďme několik zajímavých příkladů: Vesmírný teleskop Eyeglass jehož součástí je čočka o velikosti fotbalového hřiště, byl poskládán podle principů origami. Díky tomu se obrovská skleněná plocha dokázala ve své kompaktní podobě velmi jednoduše dostat do vesmíru, kde už stačilo jediné, celé dílo rozložit v obrovskou čočku.

Podobný princip zmenšení plochy je použit v medicíně. Na Oxfordské univerzitě byla vytvořena koronární trubička, která je v kompaktní podobě přivedena do tepny, kde po svém roztažení zlepšuje průtok krve.

V neposlední řadě nesmíme opomenout designéry airbagů, kteří také pomocí origami řeší problém uložení těchto bezpečnostních prvků ve vozidlech. Zde konkrétně využívají princip, který vymysleli matematici při skládání papírového hmyzu. Stejný způsob tak umožňuje vytvořit papírovému hmyzu libovolný počet nožiček a tykadel a zároveň efektivně schovat airbag do palubní desky auta. Zde si dovolím citovat významného origamistu úzce spolupracujícího s NASA, Roberta Langa (2008), který při své přednášce o moderním origami a vědě prohlásil: „A tohle se často v matematice a vědě stává. Když zapojíte matematiku, problémy, které řešíte jen kvůli estetické hodnotě, nebo pro vytvoření něčeho krásného, se změní a nakonec najdou uplatnění ve skutečném životě“



Obrázek 1: Solární panely Hannaflex u kosmické lodi (Zirbel, 2014)

2 Axiomy

Ve třetím století př. n. l. předložil Euklides 14 axiomů, na nichž vystavěl celé své dílo Základy[1]. Pět z těchto axiomů jsou známé jako Euklidovy postuláty, které tvoří základ geometrie[2]. Kuřina (1996, s. 203) poukazuje, že první tři z nich jsou konstrukční a popisují vše, co je důležité pro geometrické konstrukce pomocí kružítka a pravítka. Stejně jako dal Euklides axiomy pro rýsování, tak se v 20. století objevují axiomy pro skládání papíru (Lang, 2004). Většinu z nich prezentoval japonsko-italský matematik Humiaki Huzita (1924-2005) na prvním mezinárodním setkání *Origami Science and Technology*. Poslední sedmý axiom je připisován Japonci se jménem Koshiro Hatori, který jej světu představil roku 2002. Celá sada sedmi axiomů pro skládání papíru je známá jako Huzito-Hatoriovy axiomy[3].

Ve skutečnosti by bylo vhodnější místo termínu „axiomy" používat označení Huzito-Hatoriovy výchozí úlohy. Neboť těchto sedm vět představuje základní úkony, na kterých je založeno veškeré další skládání z papíru. Přestože se tedy označení „výchozí úlohy" jeví jako přesnější, v textu bude dále používáno spojení Huzito-Hatoriovy axiomy, protože je toto ustálené slovní spojení rozšířeno v drtivé většině publikací.

Níže je pro srovnání uvedeno nejdříve pět Euklidových postulátů a následně sedm Huzito-Hatoriových axiomů.

2.1 Euklidovy postuláty

(podle Hlavatého (1949, s. 11)):

1) *Dva body lze vždy spojit jedinou přímkou.*
2) *Přímou čáru omezenou lze vždy prodloužiti.*
3) *Z libovolného středu a poloměru lze vždy sestrojiti kružnici.*
4) *Všechny pravé úhly jsou mezi sebou ekvivalentní.*
5) *Protíná-li příčka dvě přímky a tvoří-li s nimi na téže straně dva vnitřní úhly o součtu menším, než dva pravé (180°), tyto dvě přímky – v případě nutnosti prodlouženy – protínají se na téže straně příčky, kde je součet zmíněných úhlů vnitřních menší než dva pravé.*

[1] Podle Euklidových Základů se matematika vyučovala téměř dvě tisíciletí.
[2] V případě platnosti všech pěti postulátů se jedná o Euklidovskou geometrii.
[3] Již roku 1989 znal všech sedm axiomů matematik Jacques Justin, proto jsou axiomy v některé literatuře označeny také jako Husito-Justinovy axiomy.

2.1.1 Komentář

Předchozích pět postulátů je základem pro euklidovskou geometrii v rovině. První čtyři postuláty platí v jakémkoli prostoru, tj. euklidovském i eliptickém[4] a hyperbolickém[5]. Avšak o platnosti pátého postulátu matematici vedli dlouhé diskuze. Mnoho z nich se snažilo poslední postulát dokázat pomocí předchozích. Některé věty uvedené v Základech jsou s 5. postulátem rovnocenné. Hlavatý (1949, s. 14) uvádí například následující věty:

Věta 1: *Součet úhlů v trojúhelníku je 180°.*

Věta 2: *Daným bodem, který neleží na dané přímce, lze vést právě jednu přímku rovnoběžnou.*

Pokud bychom nahradili pátý postulát právě uvedenou větou 1, zabývající se součtem vnitřních úhlů v trojúhelníku, mnohem snadněji, oproti úvahám o přímkách rovnoběžných ve větě 2, bychom dokázali rozlišovat, v jakém z výše uvedených prostorů se pohybujeme.

Tak například v hyperbolické geometrii, kterou jako první představil ruský matematik Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792-1856), by věta o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku zněla následovně:

Věta 3: *Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je menší než 180° a zároveň větší než 0°.*

Naopak eliptická geometrie, jejímž objevitelem byl německý matematik G. F. Bernhard Riemann (1826-1866), by vyžadovala znění následující:

Věta 4: *Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je větší než 180° a menší než 270°.*

V případě eliptické i hyperbolické geometrie se jedná o konstrukce na nerozvinutelných plochách. Z listu papíru, se kterým budeme pracovat, můžeme téměř dokonalou rovinu vytvořit kdykoli. Je tedy logické, že u geometrie skládaného papíru budeme využívat principy Euklidovské geometrie. Co se však liší od geometrie, kterou většina zná ze školních lavic, je způsob konstrukce. Možnosti, jakými lze papír překládat, představuje následující výčet sedmi axiomů.

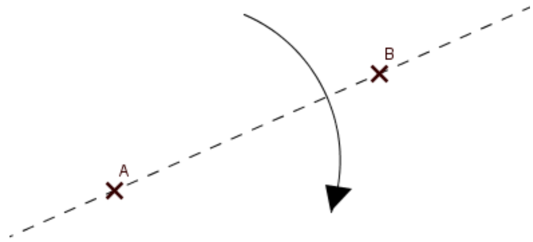
---

[4] Povrch koule.
[5] Povrch rotačního hyperboloidu.

2.2 Huzito-Hatoriovy axiomy

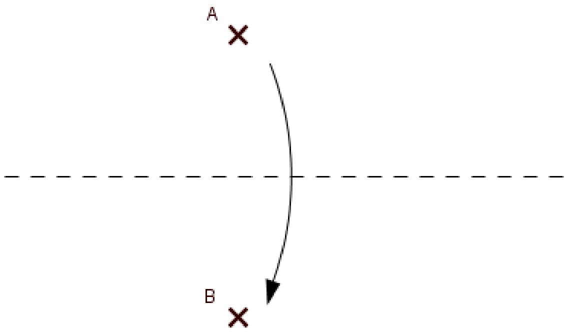
(podle Grebeníčka (2002)):

1) *Jsou-li dány dva různé body A a B, existuje právě jeden přehyb procházející body A a B.*



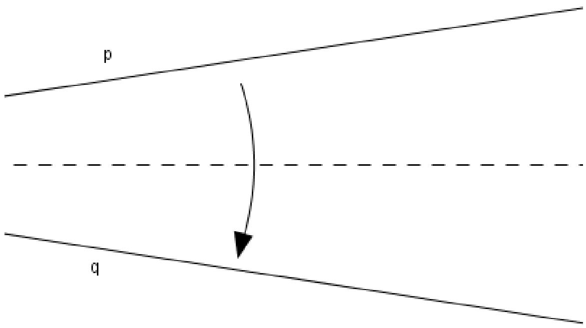
Obrázek 2: Huzitův axiom 1

2) *Jsou-li dány dva různé body A a B, existuje právě jeden přehyb, který umisťuje bod A do bodu B.*



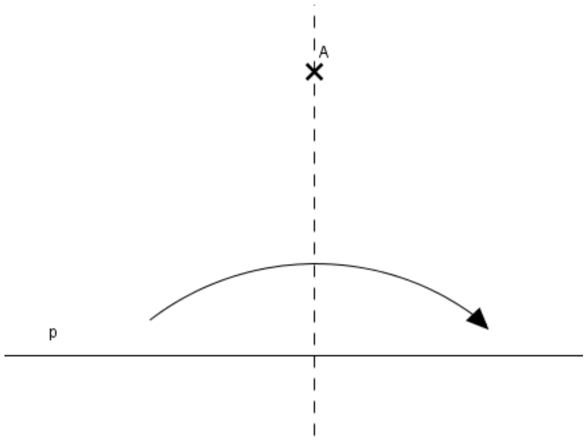
Obrázek 3: Huzitův axiom 2

3) *Jsou-li dány dvě přímky p a q, existuje přehyb umisťující přímku p na q.*



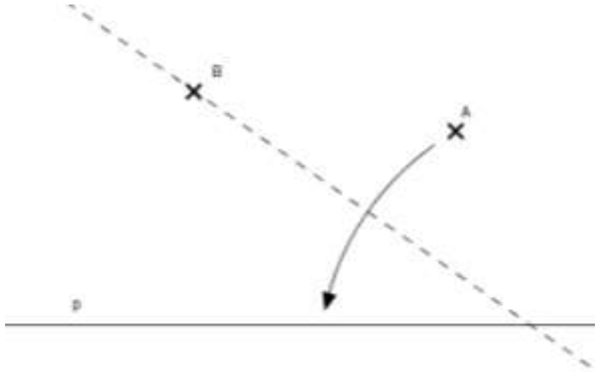
Obrázek 4: Huzitův axiom 3

4) *Je-li dán bod A a přímka p, existuje právě jeden přehyb kolmý k přímce p, který prochází bodem A.*



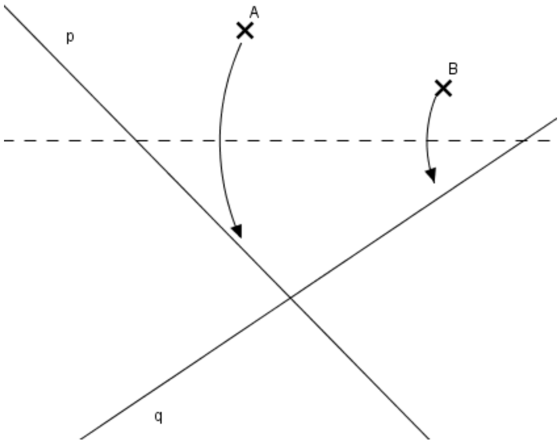
Obrázek 5: Huzitův axiom 4

5) *Jsou-li dány dva různé body A a B a přímka p, existuje přehyb umisťující bod A na přímku p a zároveň procházející bodem B.*



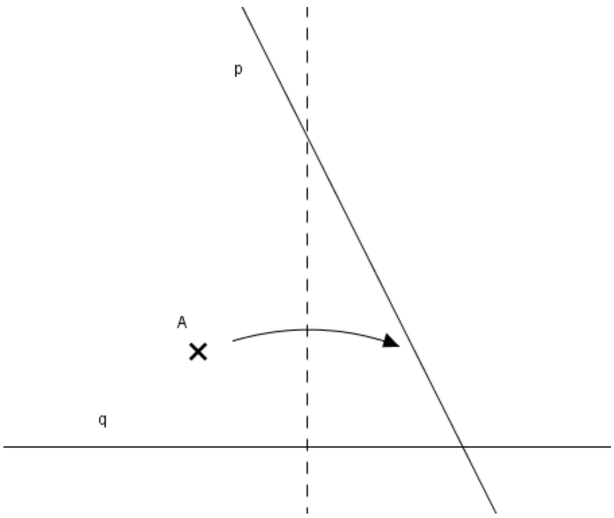
Obrázek 6: Huzitův axiom 5

6) *Jsou-li dány dva různé body A a B a dvě různé přímky p a q, existuje přehyb umisťující bod A na přímku p a bod B na přímku q.*



Obrázek 7: Huzitův axiom 6

7) *Je-li dán bod A a dvě různé přímky p a q, existuje přehyb umisťující bod A na přímku p a zároveň kolmý k přímce q.*



Obrázek 8: Hatoriův axiom 7

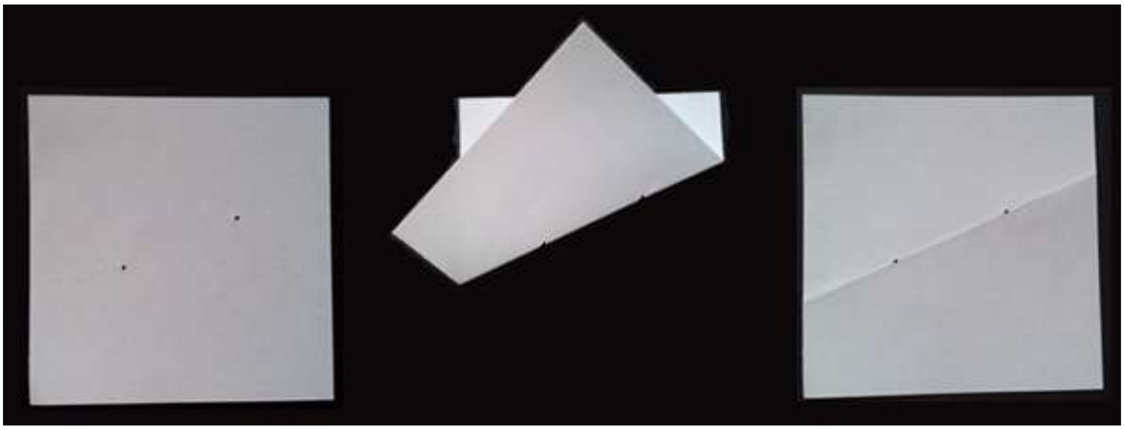
2.2.1 Komentář

Pro lepší představu uvedu komentovanou sérii obrázků, které demonstrují postup vymodelování šesti Huzitových a jednoho Hatoriho axiomu. Při skládání jsou body vytvořeny vpichem do papíru, zatímco přehyby papíru reprezentují přímky. Zároveň je důležité si uvědomit, že při skládání papíru vznikají určité nepřesnosti dané například tloušťkou papíru, nebo obecně lidskou chybou při překládání papíru. Navíc přehyb papíru nikdy nemůže dokonale reprezentovat určitou úsečku či přímku, a podobně ani vpich není dokonalým představitelem bodu. S určitou nepřesností se tak při práci s papírem musí vždy počítat.

Axiom 1

První Huzitův axiom říká, že dvěma různými body v rovině lze proložit právě jednu přímku. Totožnou myšlenku v sobě nese i první z Euklidových postulátů.

Nejprve uděláme do papíru dva vpichy, které modelují body. Následně papír přeložíme tak, aby oba body byly součástí překladu. Po rozložení v místě přeložení papíru zůstává viditelná přímá omezená čára, která modeluje hledanou přímku.



Obrázek 9: Ilustrace prvního axiomu

Axiom 2

Pokud máme na papíře dva body, existuje právě jeden způsob přeložení papíru, kterým se body umístí na sebe.

Představme si, že dané dva body jsou krajní body úsečky, potom by druhý axiom umožňoval modelovat osu úsečky.

Stejně jako u prvního axiomu nejprve dvěma vpichy do papíru vytvoříme body. Pak papír přeložíme tak, aby se oba body kryly. Díky vpichům do papíru pro nás bude modelování jednodušší, snadno tak natočením papíru proti světlu zjistíme, zda se body kryjí. Po rozložení překlad vyznačuje hledanou přímku.

Obrázek 10: Ilustrace druhého axiomu

Axiom 3

Huzita ve třetím axiomu představuje jedinou možnost umístění dvou různých přímých čar na sebe. Protože papír představuje rovinu, dvě různé přímky na něm mohou být buďto rovnoběžné nebo různoběžné. Rozeberme si obě možnosti.

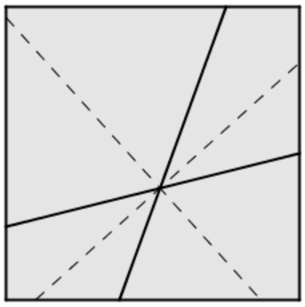
Přímky rovnoběžné

Máme-li na papíře vytvořeny dvě rovnoběžky, jediným přeložením papíru je můžeme umístit na sebe. Vzniklý překlad tvoří osu rovinného pásu.

Obrázek 11: Osa pásu rovnoběžek

Přímky různoběžné

Víme, že jakákoli přímka dělí rovinu na dvě poloroviny. Přidáme-li k ní ještě druhou s ní různoběžnou přímku, pak budeme mít rovinu rozdělenou na čtyři úhly. Bude-li součástí papíru průsečík dvou různoběžek, zjistíme, že jsou právě dvě možnosti[6], jak přeložením papíru umístit dvě přímky na sebe (viz obr. 12). Papír je ovšem omezená plocha, je tedy možné, že se dvě různoběžky budou protínat mimo něj. Ale i v takovém případě máme díky třetímu Huzitovu axiomu jistotu, že pokud papír obsahuje dvě různoběžky, bude jeho součástí i překlad, který umístí jednu přímku na druhou.



Obrázek 12: Osy úhlů

[6] Po bližším zkoumání zjistíme, že tyto překlady jsou ve skutečnosti osy těch úhlů, které vymezily dvě různoběžné přímky.

Při konstrukcích, ve kterých je zapotřebí položit na sebe dvě přímky, doporučuji využít průsvitného papíru. Průsvitnost papíru spolu s natočením proti světlu pomůže provést přeložení co možná nejpřesněji.

Opět si nejprve přeložením vytvoříme dvě různé přímky, které se snažíme umístit na sebe. Vzniklý překlad modeluje buďto osu rovinného pásu, nebo jednu osu úhlu vymezeného dvěma různoběžkami.

Obrázek 13: Ilustrace třetího axiomu

Axiom 4

Čtvrtý axiom říká: Máme-li na papíře zadán bod a přímku, existuje právě jeden překlad, který obsahuje daný bod a zároveň je kolmý k dané přímce.

Je to poprvé, co Huzita ve svých axiomech používá termín kolmost. Ve skutečnosti by pro sestrojení kolmých přímek stačily první dva axiomy. V komentáři u druhého Huzitova axiomu jsem uvedla, že pokud by zadané body tvořily krajní body úsečky, potom by po přiložení bodů na sebe byl vzniklý přehyb osou úsečky. A právě osa úsečky je kolmá na samotnou úsečku.

Následující obrázek 14 demonstruje jednoduchý způsob rozdělení roviny na čtyři pravé úhly. Nejprve přeložením papíru vymodelujeme libovolnou přímku. Druhý překlad umístí přímku samu na sebe. Po rozložení papíru vidíme čtyři pravé úhly. A podle čtvrtého postulátu „ všechny pravé úhly jsou shodné“.

Obrázek 14: Modelování pravého úhlu

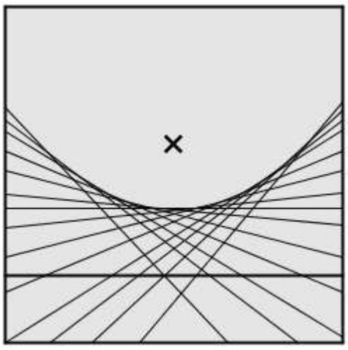
Podobně budeme postupovat při konstrukci podle čtvrtého axiomu, s tím rozdílem, že kromě přímky máme zadán i bod. Překlad, který umístí přímku samu na sebe, musí zároveň procházet daným bodem.

Obrázek 15: Ilustrace čtvrtého axiomu

Axiom 5

V případě pátého axiomu z důvodů, které následně rozepíšu, jsem se rozhodla jej znovu doslovně odcitovat podle Grebeníčka (2002): „Jsou-li dány dva různé body A a B a přímka p, existuje přehyb umisťující bod A na přímku p a zároveň procházející bodem B."

Z toho, jak je axiom napsán, vidíme, že Huzita nezadal žádné podmínky pro polohu bodů A a B. Je skutečně správné domnívat se, že na poloze jednotlivých bodů nezáleží? Představme si nyní takovouto úlohu: Mějme dánu přímku a libovolný bod[7]. Bod budeme postupně přikládat na danou přímku. Vyplní nám vzniklé přehyby celou rovinu?



Obrázek 16: Tečny paraboly

Je samozřejmé, že papír je omezená část roviny. Zkusme si i přesto na něm vytvořit několik překladů, které umístí daný bod na danou přímku. Po chvilce skládání zjistíme, že nám přehyby vytvoří obálku pro jednu z kuželoseček. Jinými slovy přikládáním bodu k přímce vytváříme tečny paraboly[8], ty nám ovšem celou rovinu nevyplní. Co z toho vyplývá pro Huzitův pátý axiom? Pokud by byl tento axiom matematickou větou, tak by vytvoření tečen paraboly bylo dostatečným argumentem pro její neplatnost. Neboť pro body ležící ve vnitřní části paraboly by neplatila.

[7] Pro lepší ilustraci zvolíme bod neležící na přímce.
[8] Zadaný bod v úloze je ohniskem vzniklé paraboly a zadaná přímka je řídicí přímkou paraboly.

Při snaze najít o pátém axiomu něco více, jsem objevila pouze blok Nicoláse Henríqueze (2008), který spojoval axiom s konstrukcí paraboly.

Při konstrukci pomocí pátého axiomu si tedy musíme dát pozor, na umístění jednotlivých bodů a přímky v rovině. Obrázek 17 demonstruje, jak skládání vypadá ve skutečnosti. Nejprve dvěma vpichy do papíru určíme polohu bodů a poté přeložením vytvoříme přímku. Jeden z bodů umístíme na přímku tak, aby vzniklý překlad procházel druhým bodem.

Obrázek 17: Ilustrace pátého axiomu

Axiom 6

Poslední z Huzitových axiomů představuje Grebeníček (2002) takto: „Jsou-li dány dva různé body A a B a dvě různé přímky p a q, existuje přehyb umisťující bod A na přímku p a bod B na přímku q."

Stejně jako u axiomu pátého si položme otázku, zda je možné provést konstrukci podle při libovolném umístění bodů a přímek na papíře. A protože se jedná o přikládání bodu na přímku, odpověď bude skryta v konstrukci tečen paraboly. Konkrétně nás bude zajímat možnost sestrojení společné tečny dvou různých parabol.

Překlad umisťující bod A na přímku p je jednou z tečen paraboly, která je určena ohniskem v bodě A a řídicí přímkou p. Zároveň překlad, který umístí bod B na přímku q, bude také některá z tečen paraboly, tentokrát ovšem určenou ohniskem v bodě B a řídicí přímkou q. Tečny dvou různých parabol by při současném umisťování bodu A na přímku p a bodu B na přímku q, měly splynout v jedinou přímku. Dostali jsme se tedy k úloze o sestrojení společné tečny dvou parabol.

Modelování axiomu nejprve vyžaduje vytvoření dvou přímek pomocí přeložení papíru a současně dvěma vpichy umístit na papír dva body. Poté s papírem proti světlu vytvoříme překlad umisťující body na dané přímky.

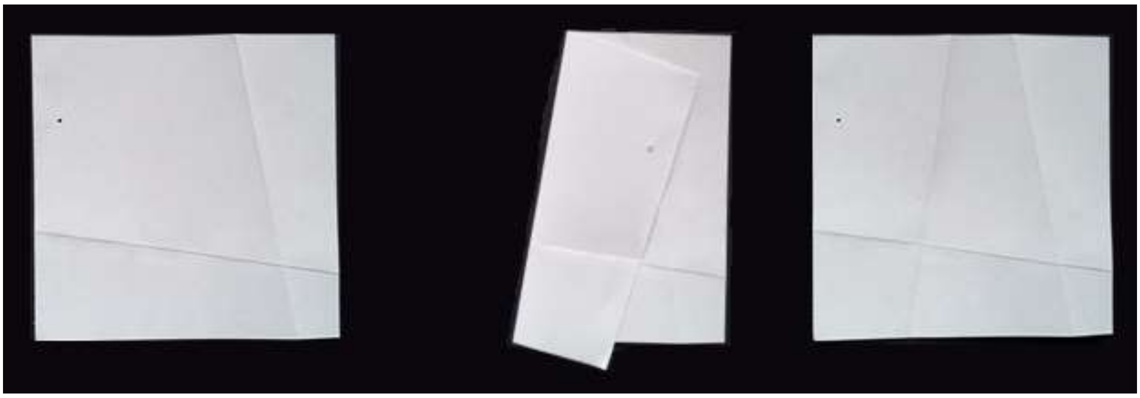
Obrázek 18: Ilustrace šestého axiomu

Axiom 7

Poslední axiom říká, že pokud máme dvě různé přímky a jeden bod, existuje překlad umisťující bod na jednu z přímek, který je zároveň kolmý k přímce druhé.

Jak je uvedeno výše, sedmý axiom je počinem japonského matematika Hatoriho. Avšak ani on neurčil žádné podmínky pro polohu přímek a bodu. Prozkoumáme-li znovu obr. 16, zjistíme, že tečny paraboly jsou s řídicí přímkou buďto rovnoběžné (vrcholové tečny) nebo různoběžné. V případě, že jsou různoběžné, svírají mezi sebou úhel v rozmezí 0° až 180°, vyjma 90°. To znamená, že nikdy nenastane případ, ve kterém by byla tečna paraboly kolmá k řídicí přímce. Nyní se vraťme k zadání axiomu. Pokud by byl zadán bod a dvě rovnoběžné přímky, nikdy by se nám konstrukce popsána Hatoriem nepodařila vymodelovat. Ať bychom bod přikládali k přímce jakkoli, nikdy by překlad nebyl na tuto přímku kolmý, a tím pádem ani na přímku druhou by překlad nebyl kolmý.

V konstrukcích podle sedmého axiomu musí být zadané přímky navzájem různoběžné. Bod vyznačený vpichem do papíru přiložíme k jedné z přímek tak, aby byl vzniklý překlad kolmý na přímku druhou.



Obrázek 19: Ilustrace sedmého axiomu

Na základě těchto sedmi axiomů můžeme z papíru poskládat téměř cokoli. Pojďme se ale od zábavného skládání vrátit k čisté geometrii. Na první pohled je jasné, že se Huzito-Hatoriovy axiomy od těch Euklidových liší, a navíc je jich více. Nastává tedy otázka, zda mohou geometrické konstrukce pomocí překládaného papíru nabídnout větší možnosti, než ty euklidovské. To, že je odpověď kladná, si ukážeme na několika příkladech. Zde je výčet čtyř nejzajímavějších úloh, které uvádí Lang (2004) a jsou řešitelné pomocí skládání papíru.

- Řešení všech rovnic druhého, třetího a čtvrtého stupně s kladnými koeficienty.
- Trisekce libovolného úhlu.
- Konstrukce třetí odmocniny, která je úzce spjata s řešením duplikace krychle.
- Konstrukce pravidelných n-úhelníků, pro $n = 2i \cdot 3j \cdot (2k \cdot 3l + 1)$, pro $i, j, k, l \in \mathbb{N}$ a zároveň pokud člen v závorce je prvočíslo[9].

Trisekce úhlu a duplikace krychle představí následující kapitola. Konstrukci pravidelných mnohoúhelníků bude věnován jeden z metodických listů v praktické části práce.

[9] Jedná se o Pierpontovo prvočíslo. Podobný vztah platí mezi Fermatovými prvočísly a euklidovskou konstrukcí pravidelných mnohoúhelníků.

3 Tři klasické problémy antické matematiky

Snad žádný problém netrápil matematiky tak dlouho jako tři následující úlohy, které po sobě zanechali matematici antického Řecka.

- Trisekce úhlu
- Duplikace krychle
- Kvadratura kruhu

Tři klasické problémy antické matematiky, jak se úlohy někdy označují, odolávaly všem snahám o vyřešení[10] více než dva tisíce let. V průběhu staletí se sice objevovala různá více či méně přesná řešení, ale žádné z nich nesplňovalo podmínky euklidovských konstrukcí. Mareš (2011, s. 68, 69) popisuje, jakým způsobem 19. století vyneslo nad problémy konečný verdikt. Roku 1837 uveřejňuje francouzský matematik Pierre Laurent Wantzel (1814-1848) v *Journal de Mathématique* stěžejní větu. Ta ukazuje, že pomocí pravítka a kružítka lze provádět pouze následující operace – sčítání, odčítání, násobení, dělení a druhou mocninu – nic víc. Tím jsou ze hry vyloučeny trisekce úhlu i duplikace krychle, protože obě konstrukce obsahují krok, při němž je nutno využít třetí odmocniny. Ovšem otázka konstrukce kvadratury kruhu zůstala až do roku 1882 otevřená. Nejdůležitější pro řešení bylo sestrojit číslo π. Nemožnost této konstrukce dokázal Němec Ferdinand Lindermann (1852-1939).

Dvě první úlohy našly své řešení díky skládání papíru. V následujících podkapitolách se s nimi seznámíme blíže a ukážeme si jejich konstrukci.

3.1 Trisekce úhlu

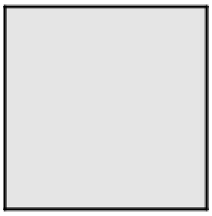
Úkolem je rozdělit libovolný úhel na tři stejně velké části. Právě proto, že úloha na první pohled vypadá tak jednoduše, se mnoho lidí stále nesmířilo s její neřešitelností a vynakládalo nemalé úsilí k jejímu pokoření (Mareš, 2011, s. 68). Důkaz z roku 1837 však všechny tyto snahy předem odsoudil k neúspěchu. Nezbývá tedy, než opustit tradiční metody a pokusit se vyřešit problém jinak. A tady nastupuje skládání papíru. Znovu si připomeňme v pořadí šestý Huzitův axiom, který bude pro tuto konstrukci klíčový (Grebeníček, 2002).

Jsou-li dány dva různé body A a B a dvě různé přímky p a q, existuje přehyb umisťující bod A na přímku p a bod B na přímku q.

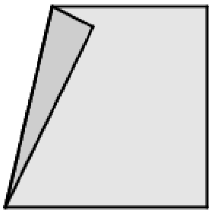
Následuje postup, pomocí kterého rozdělíme libovolný úhel α na tři stejné části:

[10] Jedná se o řešení euklidovskou konstrukcí.

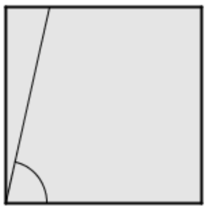
Výchozím formátem je čtverec. Lze použít i jakýkoli formát obdélníku, postup je analogický.



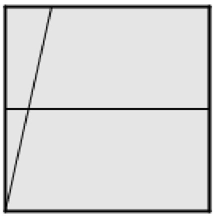
Jednoduchým přeložením vytvoříme libovolný úhel mezi spodní stranou čtverce a přehybem.



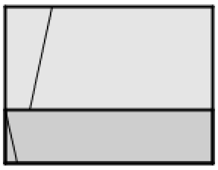
Úhel, který budeme dělit na třetiny, je zde vyznačen obloučkem.



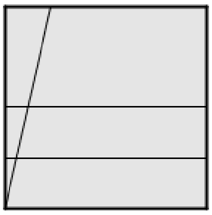
Přeložíme čtverec podle vodorovné osy souměrnosti.



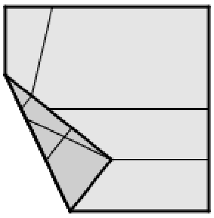
Ke vzniklé ose přiložíme spodní stranu čtverce.



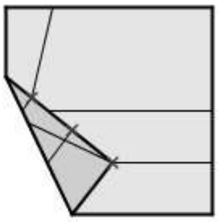
Rozložíme. Získali jsme tak dvě rovnoběžky se spodní stranou čtverce.



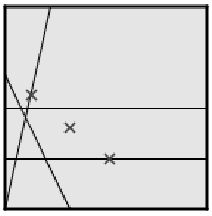
Střed levé strany čtverce přiložíme k rameni úhlu a zároveň jeho vrchol přiložíme k úsečce, která dělí plochu (obsah) čtverce v poměru 3:1.



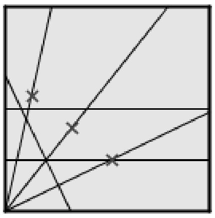
Tužkou vyznačíme body podle obrázku.



Vytvoříme přehyby, které procházejí třemi body a vrcholem úhlu.



Vzniklé dva přehyby dělí úhel na třetiny.

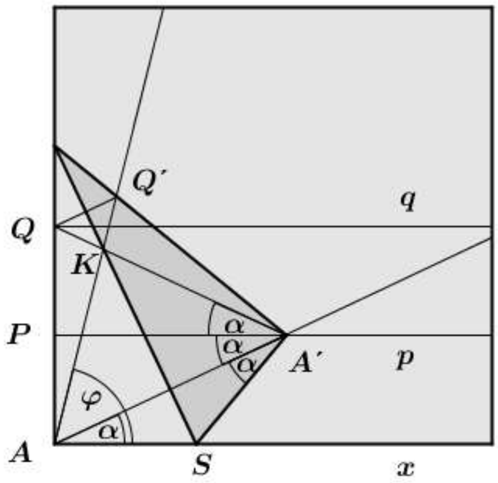


Obrázek 20: Postup pro sestrojení trisekce úhlu (Chajda, 2011)

Důkaz:

Postup důkazu je inspirován Chajdou (2011).

Máme dokázat (dle obr. 21), že úhel α vymodelovaný v závěrečném kroku jako úhel mezi stranou čtverce a prvním přehybem, je třetinou zadaného úhlu φ.



Obrázek 21: Důkaz trisekce úhlu

Z rovnosti $|AP| = |PQ|$ vyplývá $|\sphericalangle AA'P| = |\sphericalangle PA'Q| = \alpha$. Víme, že $x \parallel p$, tudíž pro střídavé úhly platí $|\sphericalangle SAA'| = |\sphericalangle PA'A|$. Jelikož $|AS| = |SA'|$, tak $|\sphericalangle AA'S| = |\sphericalangle A'AS|$. Z postupu skládání vyplynulo, že $\Delta ASK \cong \Delta A'SK$, proto $\varphi = 3\alpha$. Po elementární úpravě rovnice vzniká vztah $\alpha = \frac{1}{3}\varphi$. ■

3.2 Duplikace krychle

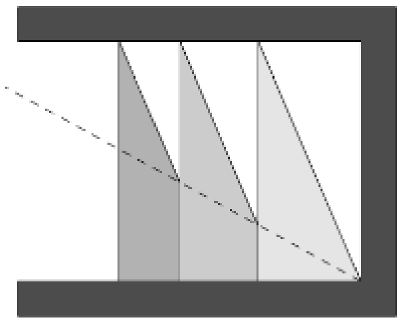
Označením duplikace, neboli zdvojení krychle, rozumíme úlohu, jejímž cílem je vytvořit krychli, která by měla dvojnásobný objem než krychle původní.

K úloze se váže několik legend. Následující řádky představí tu, díky které si duplikace krychle získala také označení délfský problém (Heath, 1921, s. 244-270).

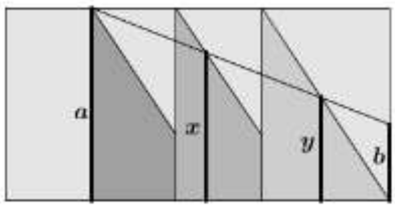
Když v pátém století před naším letopočtem propukl na ostrově Délos mor, jeho obyvatelé se obrátili na známou Apolónovu věštírnu v Délfách. Díky orákulu dostali brzy odpověď s úkolem, jehož splnění by znamenalo konec morové pohromy. Znění bylo následovné: „Zdvojnásobte velikost původního krychlového oltáře boha Apolóna." Mnoho místních matematiků se snažilo problém vyřešit, ale rozměry nového oltáře nedokázali najít. Ve svém zoufalství se obrátili na řeckého matematika Platóna, který jim místo řešení vzkázal: „Bohové si nejspíš přejí, aby se na vašem ostrově více rozvíjelo geometrické umění." To byla odpověď, kterou obyvatelé Délu opravdu slyšet nechtěli. Oltář tedy zůstal ve své původní velikosti a mor si bral další a další životy. Tady by legenda o nespokojených bozích, moru a oltáři jednoduše mohla skončit. Pojďme se na ní podívat ještě jednou z úplně jiného pohledu a se zcela jinými aktéry.

O jedno století dříve žil známý matematik Pythagoras, který kolem sebe shromáždil skupinku stejných nadšenců pro matematiku, jako byl on sám. Společně tak objevili mnoho zákonitostí a zajímavých vlastností čísel, které jsou známé až dodnes. Po smrti Pythagora se ještě dlouhou dobu skupina Pythagorejců, jak si jeho učenci říkali, scházela. Není divu, že po každodenním bádání nad čísly brzy narazili na něco, co je dnes známé jako třetí odmocnina[11]. Ačkoli Pythagorejci problému věnovali věškerá svá úsilí, výsledku se nedobrali. Zbývala možnost se podělit o problém s jinými matematiky. Slib mlčenlivosti však všechny členy zavazoval k tomu, že se nikdo nedozví žádná jejich tajemství. Nakonec se rozhodli problém *třetí odmocniny* zaobalit tak, aby nikdo nepoznal na čem pracují. Pak stačilo jen vyčkat na správnou příležitost a předložit vše veřejnosti. Když na ostrově Délos propukl mor, podplatili Pythagorejci tamní věštce, aby lidem oznámili smyšlený požadavek boha Apolóna. A co se dělo dál, už víme.

Pravděpodobně první, kdo si s délským problémem poradil, byl Erasthotenés z Kyrény (276-194 př. n. l.). Ten sestrojil jednoduchý přístroj (viz obr. 22), který je znám pod jménem mezolabon nebo také mezolabium. Bečvář (2008) mezolabon popisuje jako dřevěný rám a několik pravoúhlých trojúhelníků (dva nebo tři), z nich je jeden napevno přidělán k rámu a zbylé jsou posuvné. Díky mezolabonu mohl kdokoli pohodlně vyhledat k daným délkám a, b délky x, y, pro které platí vztah $a : x = x : y = y : b$. Jesliže $a = 2b$, pak $y = b\sqrt[3]{2}$.



Obrázek 22: Mezolabon (schéma)



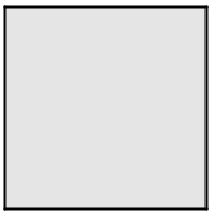
Obrázek 23: Mezolabon (označení)

I když byl problém takto mechanicky vyřešen, euklidovská konstrukce stále chyběla. Díky Pierru Wantzelovi dnes víme, že se jí ani v budoucnu nedočkáme.

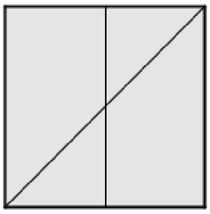
Mezolabon poskytl velmi elegantní řešení. Nám ale pro sestrojení duplikace krychle postačí pouhý čtverec papíru. Způsob, jak využít skládání papíru, objevil roku 1986 Peter Messer, a tady je jeho řešení:

[11] V této době se k číslům povětšinou přistupovalo graficky. Pythagorejci se tedy snažili najít konstrukci, díky které by získali třetí odmocninu.

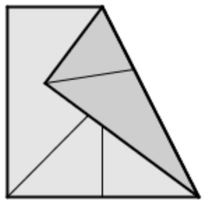
Výchozím formátem je čtverec.



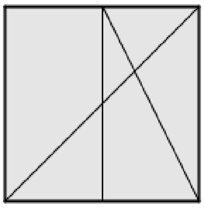
Ve čtverci pomocí překladů vymodelujeme dvě osy souměrnosti; jedna z os leží v úhlopříčce čtverce, druhá je svislá.



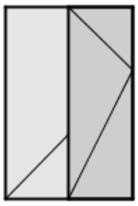
Překlady byl čtverec rozdělen na dva obdélníky. V jednom z těchto obdélníků vymodelujeme úhlopříčku.



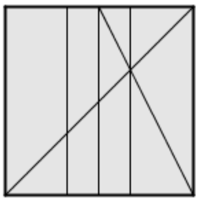
Průsečík úhlopříčky čtverce a úhlopříčky obdélníku rozděluje obě úhlopříčky v poměru 1:2.



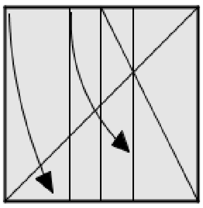
Průsečík úhlopříček tak využijeme k přeložení čtverce na tři shodné obdélníky.



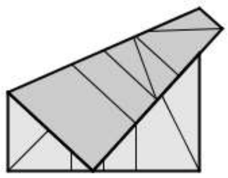
Rozložíme.



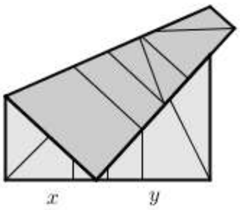
Šipky naznačují umístění dvou bodů na straně čtverce na dvě různé úsečky uvnitř čtverce.



Přeložíme.



Horní vrchol čtverce po přeložení rozdělil spodní stranu v poměru $x: y = 1: \sqrt[3]{2}$



Obrázek 24: Postup pro sestrojení duplikace krychle (Hull, 2013, s. 67)

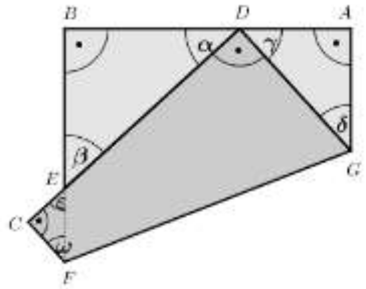
Kromě vymodelování úsečky rozdělené v poměru $1:\sqrt[3]{2}$ popisuje Hull (2013, s. 68) také důkaz vytvořeného poměru. Nejprve dokážeme Hagaovu větu[12].

Věta 5 (Hagaova): *Přehybem umísťujícím vrchol čtverce k protilehlé straně získáme tři podobné trojúhelníky.*

Důkaz Hagaovy věty

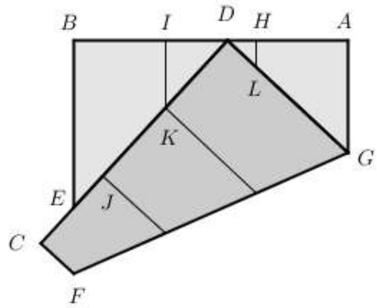
Označíme body a úhly podle obrázku 25. Máme dokázat, že trojúhelníky BED, ADG a CEF jsou podobné.

Z obrázku můžeme vyvodit následující vztahy $\beta \cong \gamma \cong \varepsilon$, $\alpha \cong \delta \cong \omega$. Z toho vyplývá podle věty uu, podobnost trojúhelníků pro každé dva z nich $\Delta BED \sim \Delta ADG \sim \Delta CEF$. ■



Obrázek 25: Ilustrace Hagaovy věty

Důkaz rozdělení strany čtverce v poměru 1: $\sqrt[3]{2}$



Obrázek 26: Duplikace krychle

Opět označíme body podle obrázku 26, body J a K dělí stranu čtverce na třetiny, stejně jako I a H (viz obr. 24)

Pokud $|AD| = 1$ a $|DB| = x$, tak strana čtverce má velikost $|AB| = x + 1$. Dále $|AG| = a$,

$$|GD| = x + 1 - a.$$

Z uvedených vztahů můžeme podle Pythagorovy věty dopočítat hodnotu a.

$$|GD|^2 = |AD|^2 + |AG|^2$$

$$(x + 1 - a)^2 = 1^2 + a^2$$

$$x^2 + x - ax + x + 1 - a - ax - a - a^2 = 1 + a^2$$

$$x^2 + 2x - 2ax - 2a = 0$$

$$2ax + 2a = x^2 + 2x$$

$$a = \frac{x^2 + 2x}{2x + 2}$$

[12] V případě Hagaovy věty se ve skutečnosti jedná o popis určité konstrukce; ta ukazuje, jak lze například získat určitá racionální čísla. Pro následující důkaz bude důležité, že konstrukcí získáme tři podobné trojúhelníky.

Dále $|DK| = \frac{x+1}{3}$, $|DI| = x - \frac{x+1}{3} = \frac{2x-1}{3}$.

Protože $\Delta DBE \sim \Delta DIK$, z Hagaovy věty vyplyne $\Delta ADG \sim \Delta IKD$, tedy

$$\frac{|AG|}{|GD|} = \frac{|DI|}{|DK|}$$

$$\frac{a}{x+1-a} = \frac{\frac{2x-1}{3}}{\frac{x+1}{3}}$$

$$\frac{\frac{x^2+2x}{2x+2}}{x+1-\frac{x^2+2x}{2x+2}} = \frac{\frac{2x-1}{3}}{\frac{x+1}{3}}$$

$$\frac{x^2+2x}{x^2+2x+2} = \frac{2x-1}{x+1}$$

$$(x^2+2x)(x+1) = (2x-1)(x^2+2x+2)$$

$$x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x = 2x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 2x - 2$$

$$x^3 = 2$$

$$x = \sqrt[3]{2}$$

■

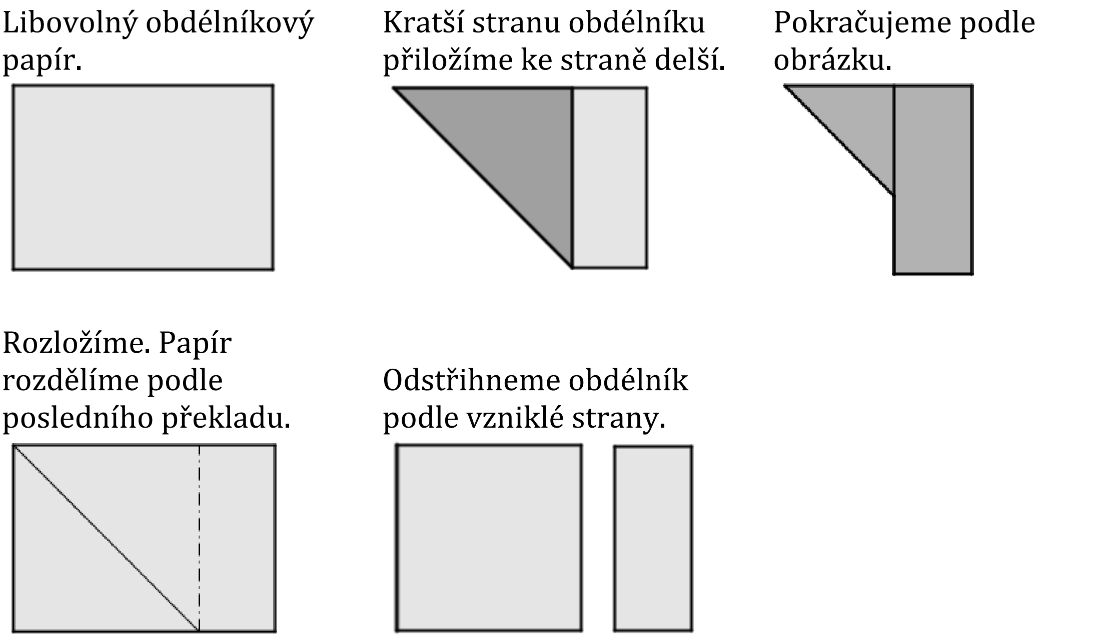
4 Formáty papíru

Pro skládání origami se nejčastěji používá papír čtvercového formátu. V obchodech lze najít papíry určené přímo pro origami, které se vyznačují speciálními vlastnostmi. Takto je popisuje Grebeníček (2012): jemnost, ohebnost, věrnost (trvalost a možnost zopakování překladů) a pevnost. Tyto vlastnosti zaručují možnost několikanásobných skladů s dobrou viditelností přeložených hran a netrhavostí v přehybech. U nás mají origami čtverce nejčastější rozměry 10x10, 15x15 a 20x20 cm. Avšak v Japonsku je standardní formát 17x17 cm a minimalisté s oblibou používají čtverec 6x6 cm.

Pro školní potřeby plně postačí kancelářský papír, ze kterého se dá velmi snadno vytvořit čtverec, nebo jej lze použít v původním formátu A4 nebo A5.

4.1 Čtverec

Následující schéma ilustruje jednoduchý postup, při kterém lze z libovolného obdélníku vytvořit čtvercový formát papíru.



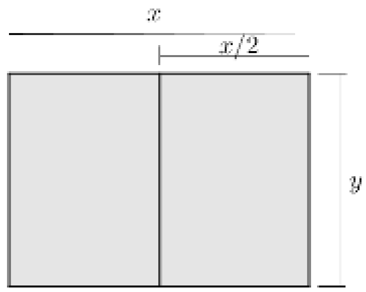
Obrázek 27: Schéma pro vymodelování čtverce

4.2 Stříbrný obdélník

Stříbrný obdélník má poměr stran $\sqrt{2}$: 1.

Jak je uvedeno výše, nejčastěji budeme k práci využívat kancelářský papír formátu A4. Ukažme si nyní, jak tento formát papíru vznikl a díky kterým svým vlastnostem si získal oblibu v každodenním životě.

Svobodová (2006) popisuje, že pokud si vezmeme do ruky papír formátu A4 a přeložíme jej napůl, můžeme si všimnout, že poměry stran obdélníku zůstávají zachovány. Označíme tedy delší stranu původního obdélníku x a stranu kratší y, potom obdélník poloviční bude mít delší stranu y a tu kratší $x/2$. Jednoduše nyní sestavíme následující rovnost, vyjadřující myšlenku, že poměry stran obdélníku zůstávají zachovány:



Obrázek 28: Stříbrný obdélník

$$x : y = y : \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{x}{2}}$$

$$x^2 = 2y^2$$

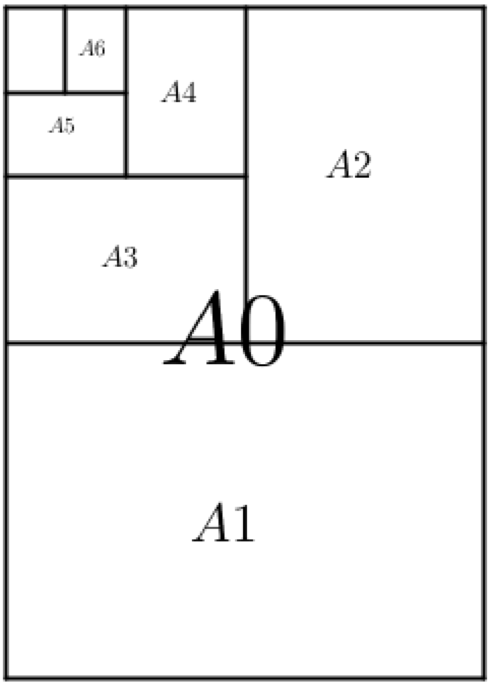
$$x = \sqrt{2}y$$

$$\frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

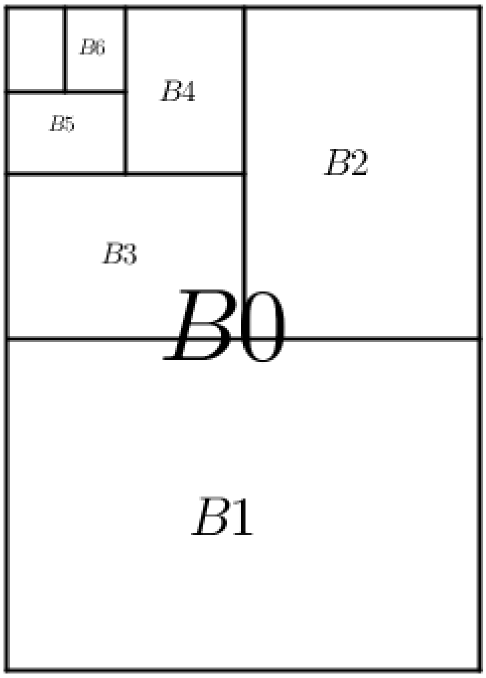
$$x : y = \sqrt{2} : 1$$

Celé kouzlo spočívá v odmocnině ze dvou. Ta zajišťuje vlastnost, že po přeložení papíru napůl zůstává poměr stran zachován. Podle tohoto pravidla nebyly utvořeny pouze formáty papíru typu A, ale také typu B. Jejich rozdíl je následující:

- Formát typu A: Základní formát A0 má rozměry $1189 \times 841\ mm$ a obsah $1\ m^2$.
- Formát typu B: Základní formát B0 má rozměry $1414 \times 1000\ mm$ a obsah $1{,}414\ m^2$.



Obrázek 29: Formát typu A



Obrázek 30: Formát typu B

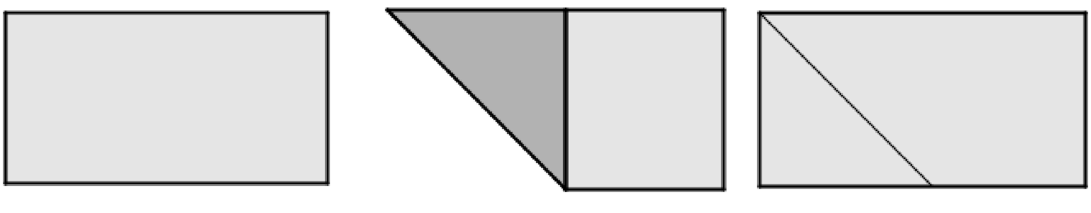
Jak uvádí Svobodová (2006), roku 1979 se britská origami společnost rozhodla dát obdélníku s výše popsanými vlastnostmi speciální název – stříbrný obdélník. Přestože je stříbrný obdélník jeden z nejčastějších formátů papíru, je možné, že si jej budeme muset vytvořit z jiného obdélníku. Ke stříbrnému obdélníku vedou dvě různé cesty. Nejprve si ukážeme postup, který přímo využívá poměru stran obdélníku $1:\sqrt{2}$. Druhou možností je vytvoření stříbrného obdélníku na základě znalosti jeho speciálních vlastností.

1. možnost

Ideální arch papíru bude mít téměř dvojnásobnou délku než šířku.

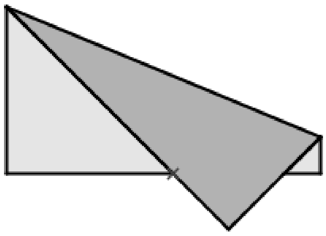
Rozměr kratší strany označíme jako jedna. Odmocninu ze dvou získáme jako úhlopříčku čtverce.

Rozložíme.

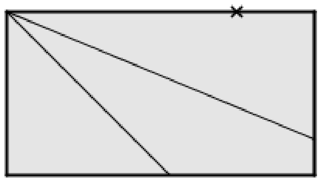


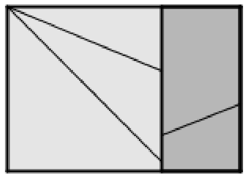
Obrázek 31: Schéma modelování stříbrného obdélníku (1. část)

Délku odmocniny ze dvou přeneseme na horní stranu obdélníku.

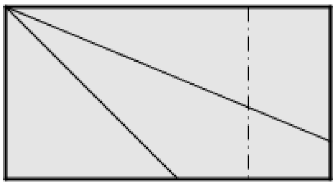


V označeném bodu vymodelujeme kolmici k delší straně obdélníku.

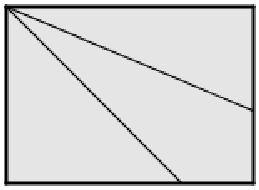


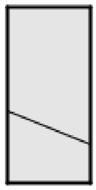


Rozložíme a odstřihneme podle posledního překladu.



Vzniklý obdélník je stříbrný (vlevo); poměry jeho stran jsou 1: $\sqrt{2}$.



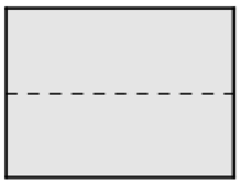


Obrázek 32: Schéma modelování stříbrného obdélníku (2. část)

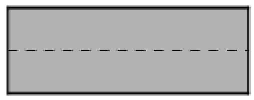
2. možnost

Pro sestrojení použijeme libovolný obdélníkový základ.

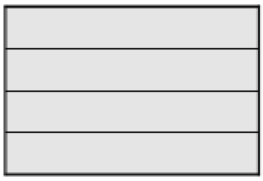
Papír přeložíme podle delší osy souměrnosti.



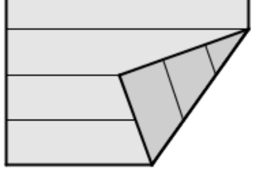
Vzniklý obdélník opět přeložíme podle delší osy souměrnosti.



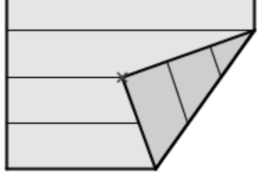
Papír je nyní překlady rozdělen na čtvrtiny.



Podle obrázku přiložíme vrchol obdélníku k již vyznačené ose souměrnosti obdélníku.



Bod označíme.

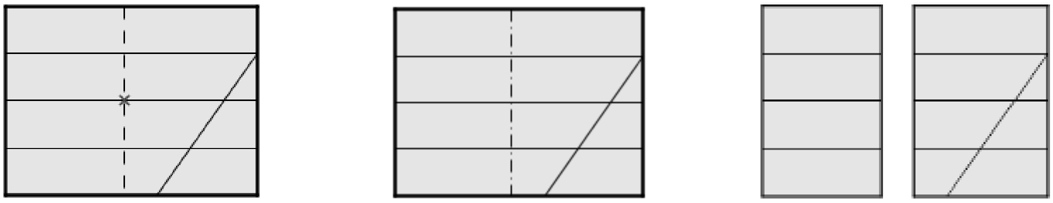


Obrázek 33: Schéma modelování stříbrného obdélníku (1. část)

V označeném bodu vymodelujeme kolmici k delší straně obdélníku.

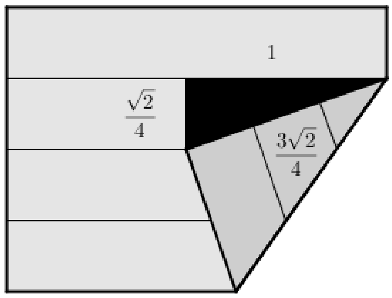
Rozstřihneme původní obdélník ve vyznačeném přehybu na dvě části a získáme tak stříbrný obdélník.

Vpravo je stříbrný obdélník.



Obrázek 34: Schéma modelování stříbrného obdélníku (2. část)

Komentář



Obrázek 35: Ilustrace pro odvození vzniku stříbrného obdélníku

V kroku pět můžeme najít pravoúhlý trojúhelník (viz obr. 35), jehož strany jsou $a = 1, b = \frac{\sqrt{2}}{4}$ a $c = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Velikost strany b je zároveň čtvrtinou velikosti strany původního obdélníku. Z toho vyplývá, že kratší strana obdélníku je $\sqrt{2}$ vzhledem k vyznačenému trojúhelníku. A protože druhá z odvěsen trojúhelníku má velikost 1, není těžké získat obdélník s hledaným poměrem stran $1 : \sqrt{2}$.

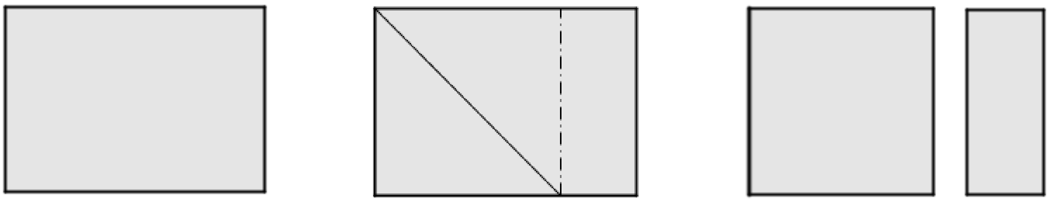
4.3 Zbytkový obdélník ve stříbrném obdélníku

Oddělíme-li od stříbrného obdélníku čtverec, zbylou část nazýváme zbytkovým obdélníkem. Následující řádky v krátkosti představí jednoduchý postup pro získání zbytkového obdélníku a následně ukáže jednu z jeho zajímavých vlastností, kterou popisuje Svobodová (2006).

Výchozí formát je stříbrný obdélník

Stříbrný obdélník rozdělíme na dvě části; čtverec a obdélník.

Vpravo je zbytkový obdélník.



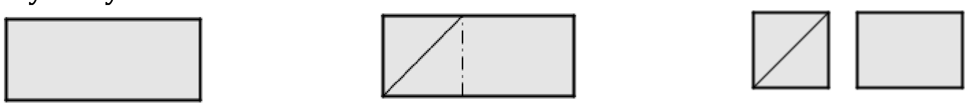
Obrázek 36: Zbytkový obdélník

Vlastnost zbytkového obdélníku

Zbytkový obdélník

Od zbytkového obdélníku oddělíme čtverec.

Oddělením čtverce vznikl opět stříbrný obdélník.



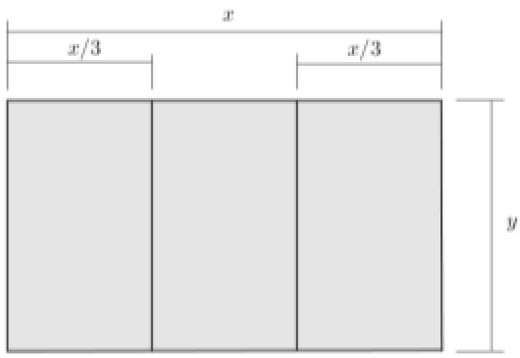
Obrázek 37: Vlastnost zbytkového obdélníku

Oddělováním čtverce tedy střídavě získáváme ze stříbrného obdélníku zbytkový a ze zbytkového obdélníku stříbrný.

Zbývá tedy otázka, zda kromě stříbrného obdélníku máme také obdélníky zlaté, nebo bronzové? To, že je odpověď kladná, ukážou následující podkapitoly. Doplníme tak sbírku obdélníků „z drahých kovů“ a ukážeme si jejich zajímavé vlastnosti a možné využití při skládání papíru. Začneme obdélníkem bronzovým.

4.4 Bronzový obdélník

Bronzový obdélník má strany s poměrem $\sqrt{3}:1$.



Obrázek 38: Bronzový obdélník

Oficiální stránky Origami Resource Center (2016) popisují bronzový obdélník jako analogii stříbrného obdélníku. Po přeložení stříbrného obdélníku na poloviny jsme získali opět stříbrný obdélník, který měl stejný poměr stran jako původní. Tentokrát ovšem nebudeme překládat obdélník na polovinu, ale na třetiny[13]. Označíme-li delší stranu obdélníku x a kratší y, můžeme s využitím jednoduché rovnice zjistit poměr, který je mezi stranami obdélníku.

$$x : y = y : \frac{x}{3}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{x}{3}}$$

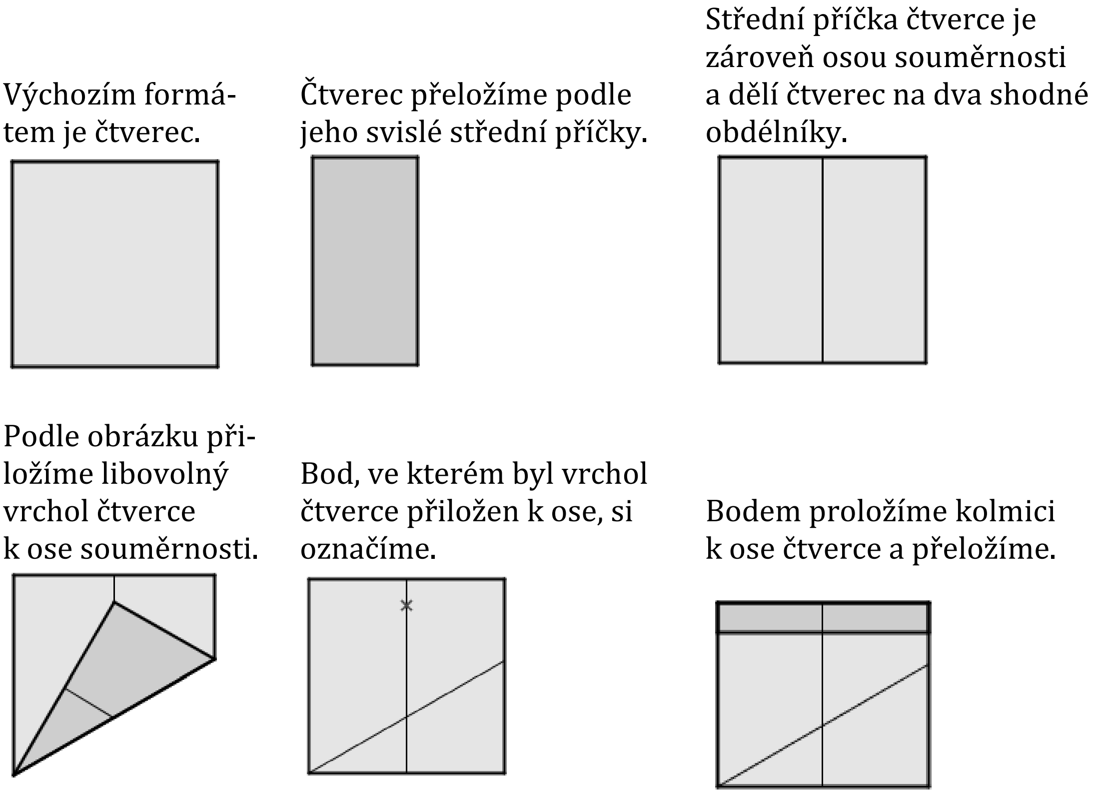
$$x^2 = 3y^2$$

$$x = \sqrt{3}y$$

$$\frac{x}{y} = \sqrt{3}$$

$$x : y = \sqrt{3} : 1$$

Výsledek prozrazuje, že vzniklý poměr delší a kratší strany je $\sqrt{3}$. Následuje postup, jak ze čtverce můžeme několika přehyby vytvořit bronzový obdélník, který ve své knize představuje Morales (2009, s. 14-18).

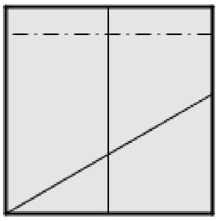


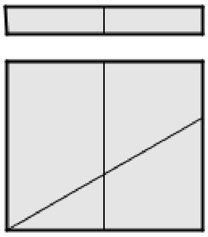
Obrázek 39: Schéma modelování bronzového obdélníku (1. část)

---

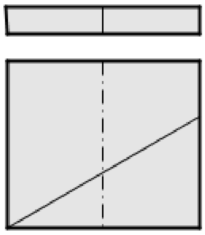
[13] Postup, jak přeložit papír na přesné třetiny, jsme již použili v krocích 1-6 při konstrukci duplikace krychle, str. 25.

Podle vzniklé kolmice rozstřihneme čtverec na dva obdélníky.

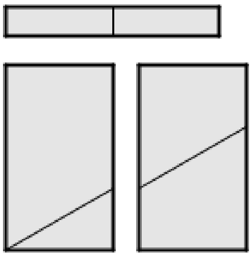




Větší obdélník rozdělíme podle jeho vyznačené osy.



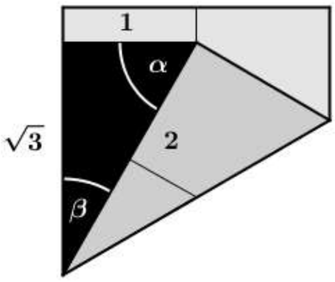
Osa rozdělila obdélník na dva shodné a zároveň bronzové obdélníky.



Obrázek 40: Schéma modelování bronzového obdélníku (2. část)

Komentář:

Pravoúhlý trojúhelník vyznačený na obrázku 41 má odvěsny s rozměry $a = \sqrt{3}j$ a $b = 1j$, přeponu $c = 2j$. Odvěsny trojúhelníku jsou zároveň stranami bronzového obdélníku.



Obrázek 41: Ilustrace vzniku bronzového obdélníku

Bronzový obdélník, nebo některé kroky jeho konstrukce, se často využívá pro vytváření útvarů s úhly o velikostech 30°, 60°, nebo 120°. Z obrázku můžeme pomocí goniometrických funkcí dopočítat velikosti úhlů α a β.

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$$

$$\sin\beta = \frac{1}{2} \rightarrow \beta = 30°$$

Tuto konstrukci pomocí modelování využijeme například při sestrojování rovnostranného trojúhelníku[14]. Obdobně v origami prostorových těles se

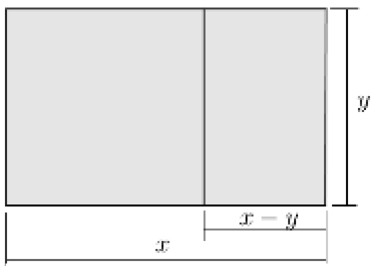
[14] Rovnostranný trojúhelník je součástí pracovních listů s námětem pravidelné mnohoúhelníky.

můžeme s bronzovým obdélníkem setkat při skládání pravidelného čtyřstěnu nebo pravidelného dvacetistěnu.

4.5 Zlatý obdélník

Zlatým obdélníkem se nazývá obdélník, jehož strany jsou v poměru $\varphi: 1$, *kde* φ *je hodnota tzv. zlatého řezu, to je číslo iracionální s přibližnou hodnotou* $\varphi = 1{,}618$.

Poslední z trojice je zlatý obdélník. Je pravda, že ve skládání papíru nemá zlatý obdélník téměř žádné využití, pokud bychom se nerozhodli z něj poskládat například lodičku[15]. Proto v tomto oddílu nepůjde o sestrojení obdélníku, který bychom dále využívali ke konstrukcím, ale čistě o konstrukci samotného zlatého obdélníku.



Obrázek 42: Zlatý obdélník

Z definice zlatého řezu vyplývá, že úsečky x, y jsou v poměru φ právě tehdy, když

$$x: y = y: (x - y)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x - y}$$

Položíme-li $y = 1$ a označíme $x = a$, pak

$$a = \frac{1}{a - 1}$$

$$a^2 - a - 1 = 0$$

Kořeny této rovnice jsou

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Druhý kořen vychází záporně, je tedy nemožné ho považovat za poměr stran obdélníku. Poměr délek stran je tedy roven prvnímu kořenu a_1. Číslo $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$, z toho vidíme, že obdélník je skutečně zlatý.

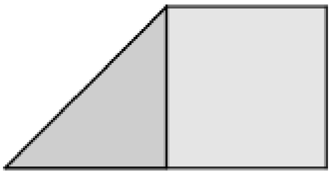
Ke zlatému obdélníku vede pomocí skládání papíru několik cest. Ukážeme si dvě nejznámější. První postup vychází z obdélníku a druhý ze čtverce.

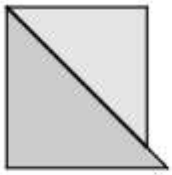
[15] Z vlastní zkušenosti: lodička ze zlatého obdélníku vydrží na hladině o trochu déle než ta ze stříbrného obdélníku (formát A).

1. možnost

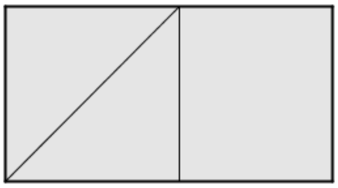
Ideální výchozí arch papíru bude mít téměř dvojnásobnou délku než šířku.

Dvěma překlady vytvoříme čtverec.

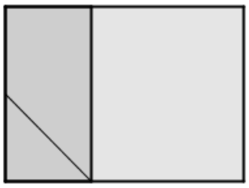




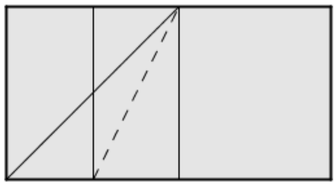
Rozložíme.



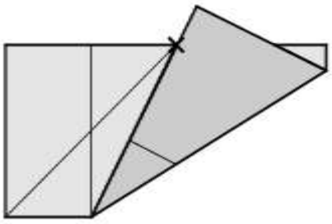
Přeložením čtverce podle osy souměrnosti nalezneme střed spodní strany čtverce.



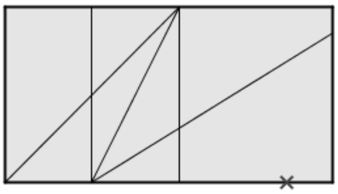
Čárkovaně je vyznačena úhlopříčka obdélníku.



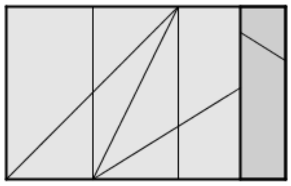
Délku úhlopříčky přeneseme přehybem na spodní stranu obdélníku.



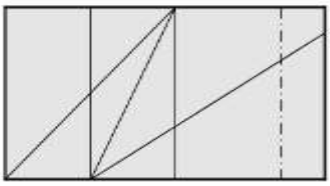
Rozložíme.



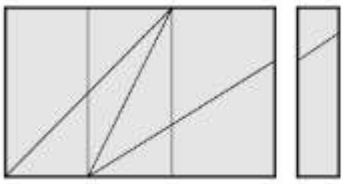
Vzniklým bodem vedeme kolmici ke spodní straně obdélníku.



Podle přehybu z posledního kroku obdélník rozdělíme.



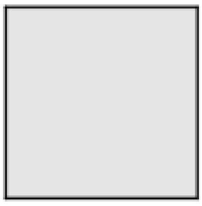
Nalevo nám vznikl zlatý obdélník, jehož strany jsou v poměru zlatého řezu.



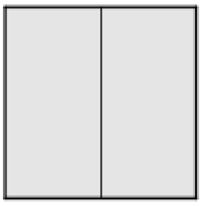
Obrázek 43: Schéma pro vytvoření zlatého obdélníku

2. možnost

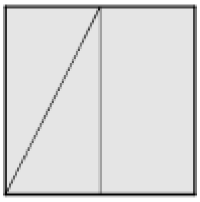
Výchozím formátem je čtverec.



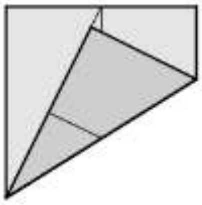
Přeložením vytvoříme svislou střední příčku čtverce.



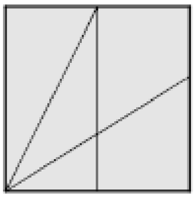
Čtverec je rozdělen na dva obdélníky. Přeložením vytvoříme úhlopříčku libovolného z nich.



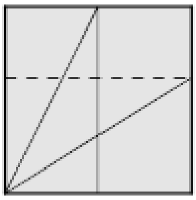
K vytvořené úhlopříčce přiložíme stranu čtverce.



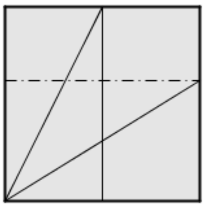
Rozložíme.



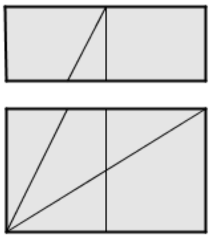
Vzniklým bodem proložíme kolmici ke straně čtverce, na které bod leží.



V kolmici čtverec rozstřihneme na dva obdélníky.



Spodní obdélník je zlatý.



Obrázek 44: Schéma pro vytvoření zlatého obdélníku (Chmelíková, 2009)

5 Metodické listy

Jednotlivé metodické listy jsou rozděleny do sedmi okruhů, následuje jejich stručný popis.

Pravidelné mnohoúhelníky

- Modelování rovnostranného trojúhelníku, čtverce, pravidelného pětiúhelníku, šestiúhelníku, sedmiúhelníku a osmiúhelníku a jejich základní vlastnosti.

Úhly

- Modelování úhlů dané velikosti.

Hledání racionálních a iracionálních čísel

- Vytvoření libovolného zlomku ve tvaru $\frac{1}{n}$ a vybraných iracionálních čísel.

Důkazy

- Ověření platnosti vybraných matematických vět – součet vnitřních úhlů trojúhelníku a vzorec pro druhou mocninu součtu dvou čísel.

Pythagorejské trojúhelníky

- Vymodelování tří podobných pythagorejských trojúhelníků pomocí jediného přeložení papíru.

Slovní úlohy

- Ukázka řešení tří slovních úloh za pomoci skládání papíru.

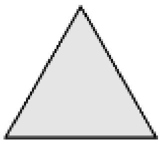
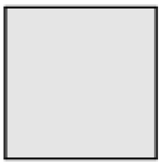
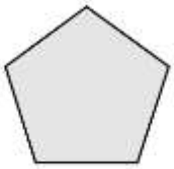
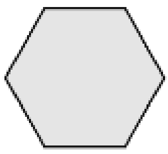
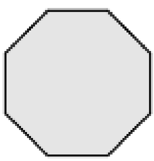
Parník

- Série úloh, které se zaměřují na zopakování nejdůležitějších pojmů v geometrii.

5.1 Pravidelné mnohoúhelníky

Tato sada pracovních listů je zaměřena na vybrané pravidelné mnohoúhelníky, jako jsou trojúhelník, čtverec, pětiúhelník, šestiúhelník, sedmiúhelník a osmiúhelník. Každý pracovní list obsahuje návod vedoucí k vytvoření daného mnohoúhelníku. Postupy, jak je ve své knize uvádí Montroll (2012), jsou v některých krocích upravené a doplněné o komentáře.

Druhá část pracovních listů se zaměřuje na vlastnosti konkrétních útvarů a obsahuje vždy několik úloh, díky kterým si žáci lépe osvojí některé z vlastností mnohoúhelníků.

Mnohoúhelník	Součet vnitřních úhlů $(n-2)\cdot 180°$	Počet úhlopříček $\frac{n(n-3)}{2}$	Počet os souměrnosti n	Euklidovská konstrukce
	180°	0	3	ano
	360°	2	4	ano
	540°	5	5	ano
	720°	9	6	ano
	900°	14	7	ne
	1 080°	20	8	ano

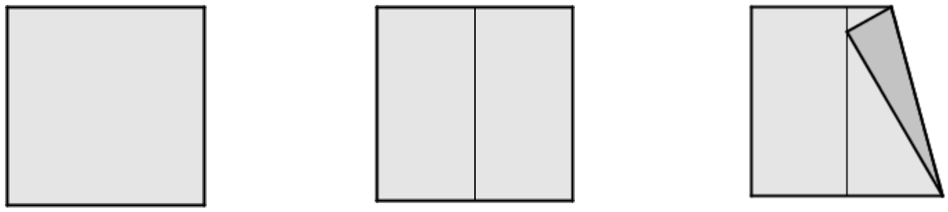
Tabulka 1: Vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků

5.1.1 Rovnostranný trojúhelník

Výchozím formátem je čtverec.

Přeložením vytvoříme střední příčku čtverce.

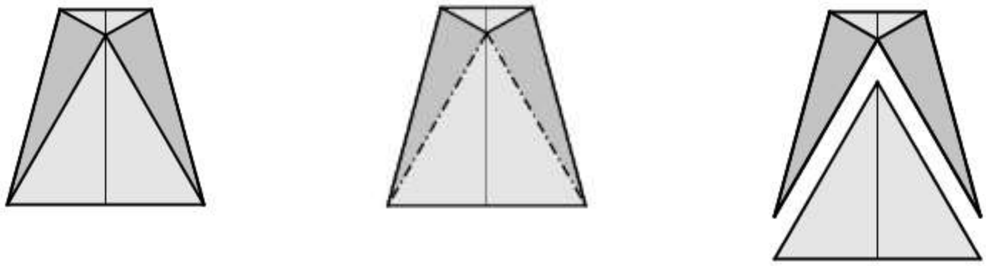
Ke střední příčce přiložíme vrchol čtverce podle obrázku.



Přiložením druhého vrcholu čtverce ke střední příčce vznikne osově souměrný lichoběžník.

Čerchovaná čára vyznačuje, kde papír rozstřihneme.

Spodní část je rovnostranný trojúhelník.



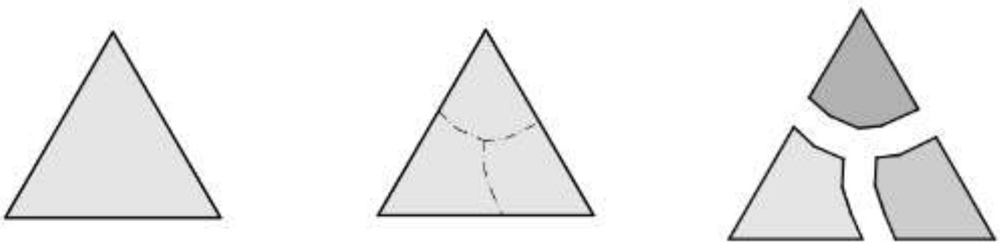
Obrázek 45: Schéma pro vymodelování rovnostranného trojúhelníku

Další úlohy:

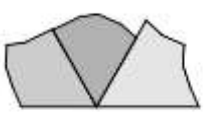
Vnitřní úhly v trojúhelníku

- Ověřte, že úhly v rovnostranném trojúhelníku mají stejnou velikost a zároveň, že jejich součet je 180°.
    - Jedno z možných řešení představuje následující obrázek 46 s popisem.

Rozstrháme trojúhelník na tři část, tak abychom získali tři vnitřní úhly.



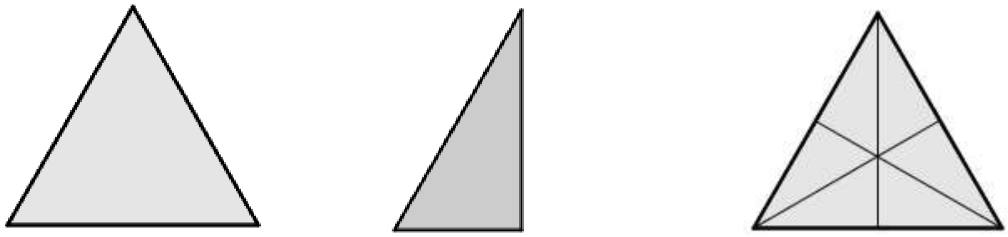
Jednotlivé části rovnostranného trojúhelníku přiložíme na sebe. Je zřejmé, že úhly mají stejnou velikost.



Pokud části přiložíme k sobě, vidíme, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven přímému úhlu.

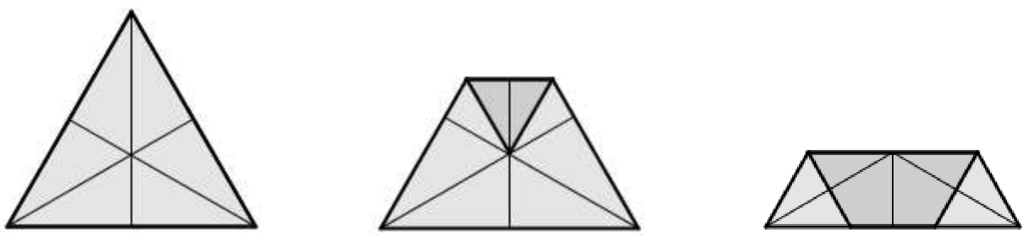
Obrázek 46: Vnitřní úhly v trojúhelníku

- Kolik os souměrnosti má trojúhelník? Vytvořte je přeložením.
    - V rovnostranném trojúhelníku existují právě tři osy souměrnosti. Následující obrázek 47 představuje jejich vytvoření.



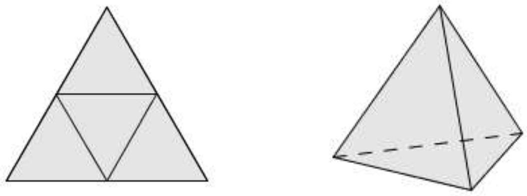
Obrázek 47: Osy souměrnosti trojúhelníku

- Jak jinak můžeme vytvořené přehyby v trojúhelníku z předchozí úlohy pojmenovat?
    - Výšky trojúhelníku – každá výška v trojúhelníku prochází jedním z vrcholů a je kolmá k protější straně. Osy souměrnosti rovnostranného trojúhelníku splňují obě tyto podmínky, proto je můžeme zároveň nazývat výškami.
    - Těžnice trojúhelníku – úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem protější strany se nazývá těžnice. Osa souměrnosti rovnostranného trojúhelníku tyto vlastnosti splňuje.
- Jak nazýváme vytvořený průsečík?
    - Pokud mluvíme o vzniklých překladech jako o těžnicích, průsečík označujeme jako těžiště.
    - Naopak, pokud považujeme překlady za výšky v trojúhelníku, jejich průsečík nazýváme ortocentrum.
    - Získaný bod je stejně vzdálený od všech vrcholů, je to tedy střed kružnice opsané trojúhelníku.
    - Získaný bod je stejně vzdálený od všech stran trojúhelníku, je to tedy i střed kružnice vepsané.
- Skládáním ověřte, že těžiště dělí každou těžnici v poměru 1: 2.
    - Obrázek 48 představuje možný postup ověření daného poměru na svislé těžnici.



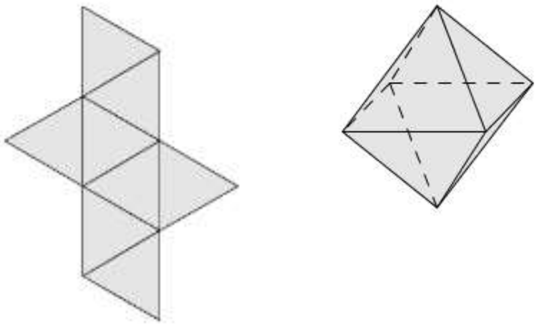
Obrázek 48: Rozdělení těžnice těžištěm v poměru 2:1

- Která platónská tělesa[16] mají stěny tvořené rovnostrannými trojúhelníky? Z rovnostranných trojúhelníků vytvořte jejich sítě a složte tyto mnohoúhelníky.
    - Ze čtyř rovnostranných trojúhelníků můžeme vytvořit pravidelný čtyřstěn neboli tetraedr.



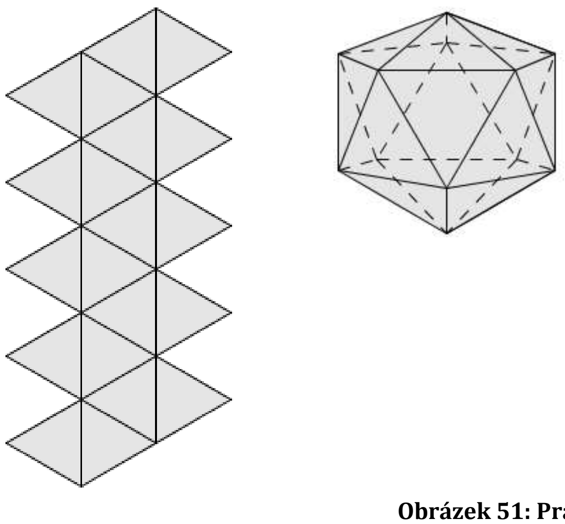
Obrázek 49: Pravidelný čtyřstěn a jeho síť

    - Osm rovnostranných trojúhelníků používáme pro sestrojení pravidelného osmistěnu, známého také jako oktaedr.



Obrázek 50: Pravidelný osmistěn a jeho síť

    - Dvacet rovnostranných trojúhelníků tvoří stěny pravidelného dvacetistěnu, jinými slovy ikosaedru.



Obrázek 51: Pravidelný dvacetistěn a jeho síť

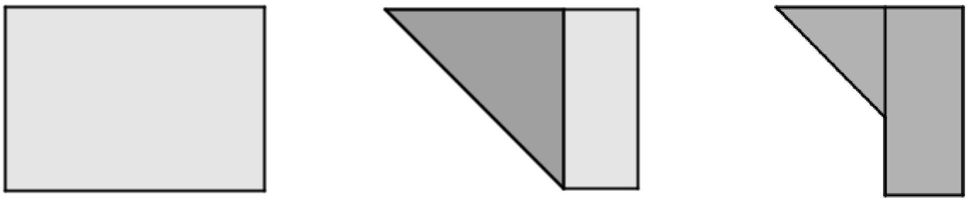
[16] Pod označením platónská tělesa se v geometrii skrývá pět pravidelných mnohostěnů. Kupčáková (2009) uvádí následující definici: „Platónské těleso je konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky a v každém vrcholu se jich stýká stejný počet.“

5.1.2 Čtverec

Výchozím formátem je libovolný obdélníkový papír.

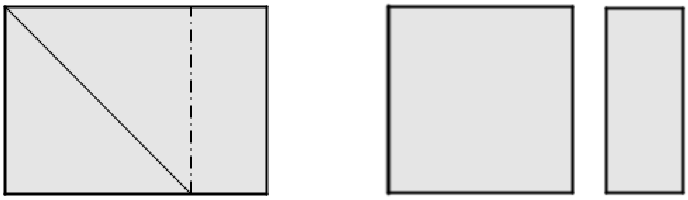
Kratší stranu obdélníku přiložíme ke straně delší.

Zbytkovou část obdélníku pro lepší oddělení přeložíme.



Rozložený papír rozdělíme na čtverec a obdélník.

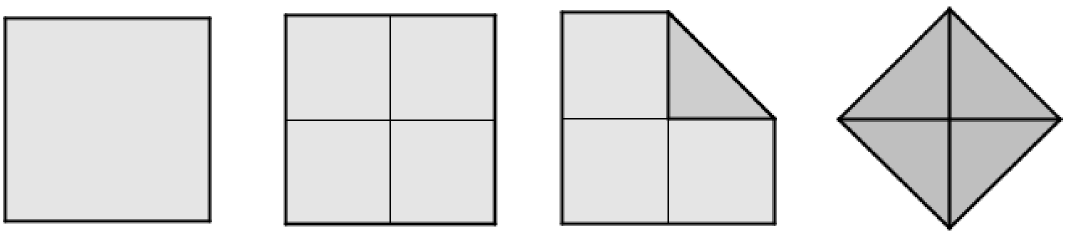
Odstřihneme obdélník podle vzniklého přehybu.



Obrázek 52: Schéma pro vymodelování čtverce

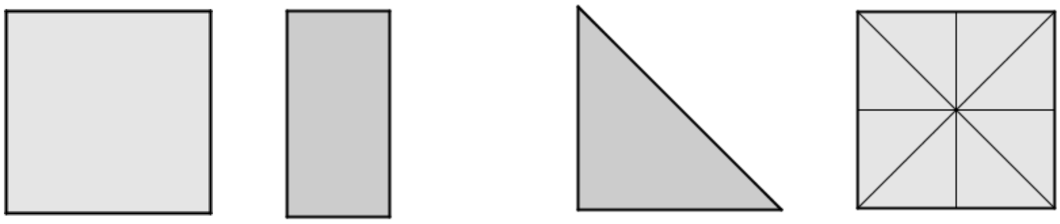
Další úlohy

- Ověřte, že součet vnitřních úhlů ve čtverci je roven 360°.
    - Stejně jako u rovnostranného trojúhelníku je možné čtverec trháním rozdělit na části, a ty přiložit k sobě.
    - Druhou možnost, jak ověřit, že součet vnitřních úhlů čtverce je 360° (neboli plný úhel), zobrazuje obrázek 53.



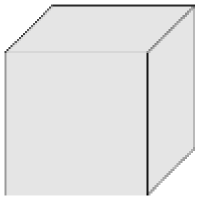
Obrázek 53: Součet vnitřních úhlů čtverce

- Kolik os souměrnosti má čtverec? Vymodelujte všechny osy souměrnosti pomocí překladů.
    - Čtverec má právě čtyři osy souměrnosti. Z obrázku 54 vidíme, že pokud čtverec přeložíme podle osy souměrnosti, tak se jeho na sebe přiložené části kryjí.



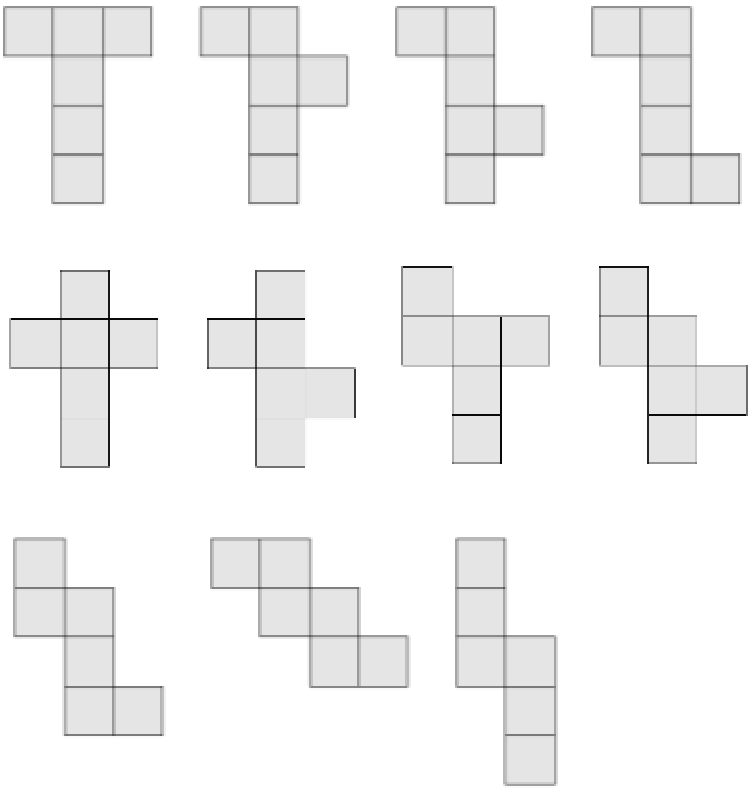
Obrázek 54: Osy souměrnosti čtverce

- Které platónské těleso má stěny tvořené čtverci?
    - Krychle nebo také pravidelný šestistěn neboli hexaedr.



Obrázek 55: Krychle

- Kolik různých sítí krychle můžeme vytvořit?
    - Existuje právě 11 různých možností.



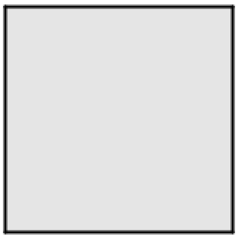
Obrázek 56: Sítě krychle

5.1.3 Pravidelný pětiúhelník

K pravidelnému pětiúhelníku čili pentagonu vedou dvě různé cesty. První z nich zde bude představena krok po kroku, druhá možnost je reprezentována pouze jedním obrázkem s komentářem.

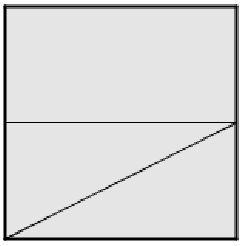
1. možnost

Výchozím formátem je čtverec.

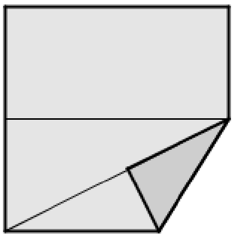


Přeložením vytvoříme vodorovnou osu souměrnosti, která rozdělí čtverec na dva shodné obdélníky.

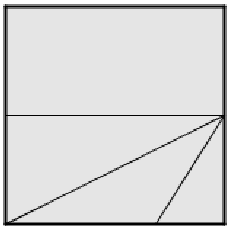
U jednoho z obdélníku vytvoříme překladem úhlopříčku.



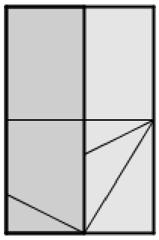
Podle obrázku přiložíme polovinu strany čtverce k úhlopříčce obdélníku.



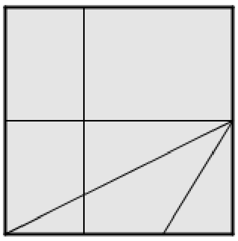
Rozložíme.



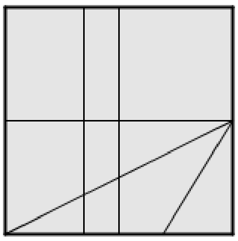
Dále pokračujeme podle obrázku.



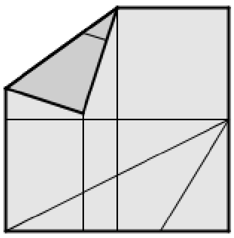
Rozložíme. Překladem vznikla rovnoběžka se dvěma stranami čtverce.



Překladem vymodelujeme svislou osu souměrnosti čtverce.

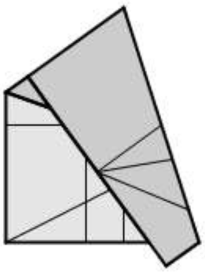


Využitím dvou předchozích přeložení vytvoříme první ze stran pětiúhelníku.

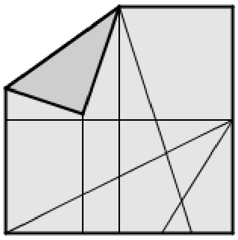


Obrázek 57: Schéma pro vymodelování pravidelného pětiúhelníku (1. část)

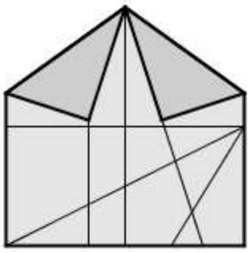
Dále pokračujeme podle obrázku.



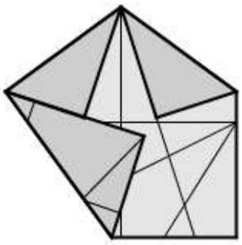
Rozložíme.



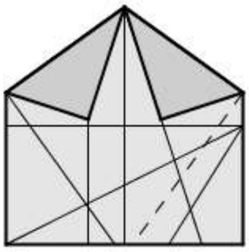
Vymodelujeme druhou ze stran pětiúhelníku.



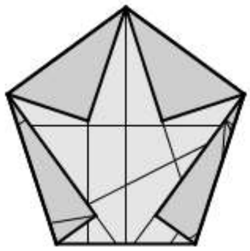
Vymodelujeme překlad podle obrázku.



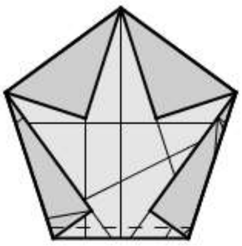
Podobně jako v předchozím kroku vymodelujeme další překlad, který je znázorněn čárkovanou čarou.

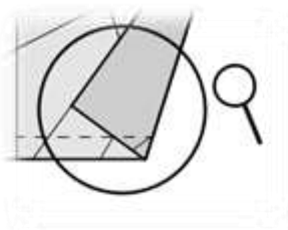


Dále pokračujeme podle obrázku.

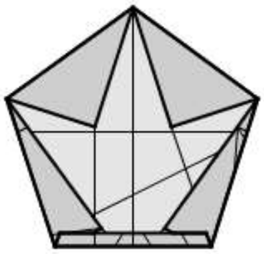


Čárkovaně je vyznačen překlad, kterým získáme poslední stranu pravidelného pětiúhelníku.





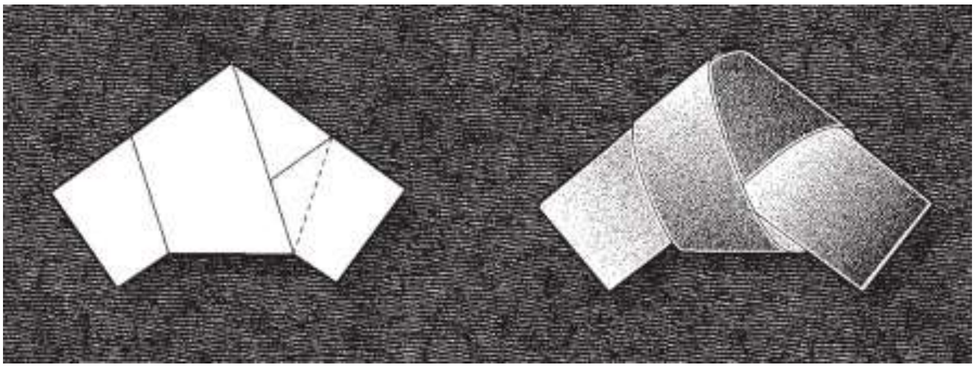
Pravidelný pětiúhelník.



Obrázek 58: Schéma pro vymodelování pravidelného pětiúhelníku (2. část)

2. možnost

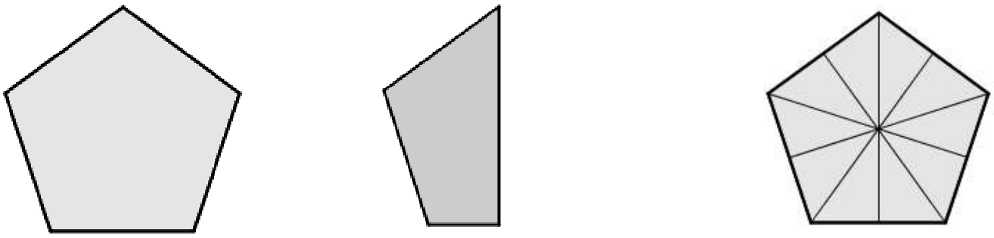
Polster (2014, s. 30) ve své knize představuje o mnoho jednodušší postup vedoucí k pravidelnému pětiúhelníku: „Uvažte uzel na pásku papíru a zatáhněte za okraje. Tahejte tak dlouho, dokud se uzel zcela nevyhladí. Odstřihněte papír přečnívající na krajích. Dostanete pravidelný pětiúhelník“



Obrázek 59: Uvázání pravidelného pětiúhelníku na proužku papíru (Polster, 2004, s. 31)

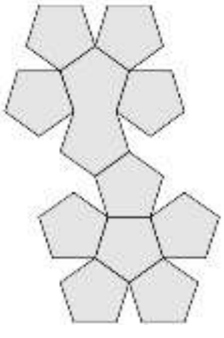
Další úlohy:

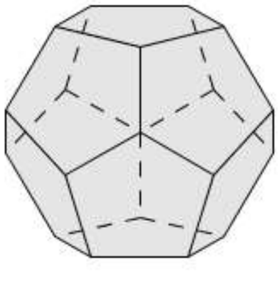
- Kolik os souměrnosti má pravidelný pětiúhelník?
    - Pravidelný pětiúhelník má právě pět os souměrnost.



Obrázek 60: Osy souměrnosti pravidelného pětiúhelníku

- Které platónské těleso má stěny tvořené pravidelnými pětiúhelníky?
    - Z pravidelných pětiúhelníků můžeme poskládat povrch pravidelného dvanáctistěnu známého také pod označením dodekaedr.





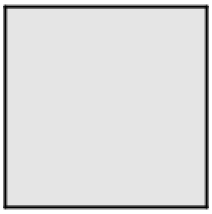
Obrázek 61: Pravidelný dvacetistěn a jeho síť

5.1.4 Pravidelný šestiúhelník

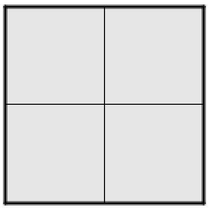
Pracovní list představí hned tři různé možnosti, jak pomocí skládání papíru vymodelovat pravidelný šestiúhelník, známý také pod označením hexagon. Pro první postup je výchozí formát čtverec, u druhé možnosti využijeme vlastnosti těžiště v rovnostranném trojúhelníku a jako poslední možný postup je vytvoření uzle ve tvaru pravidelného šestiúhelníku.

1. možnost

Výchozím formátem je čtverec.

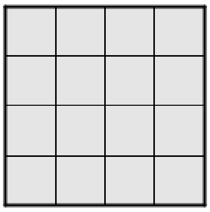


Přehyby vytvoříme střední příčky čtverce.

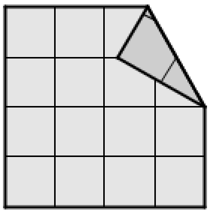


Jednotlivé strany čtverce postupně přiložíme ke středním příčkám.

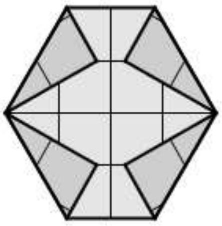
Čtverec je nyní rozdělen na osm stejných čtverců.



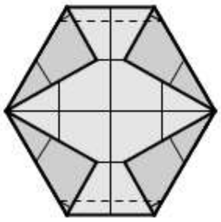
Dále pokračujeme podle obrázku.

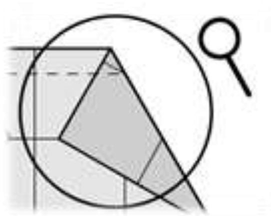


Podobně jako v předchozím kroku vytvoříme ze čtverce šestiúhelník, který je zároveň středově i osově souměrný, ale zatím není pravidelný.

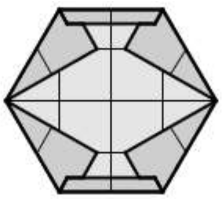


Přeložíme podle čárkovaná čáry vyznačené na obrázku.





Vzniklý útvar je pravidelným šestiúhelníkem.

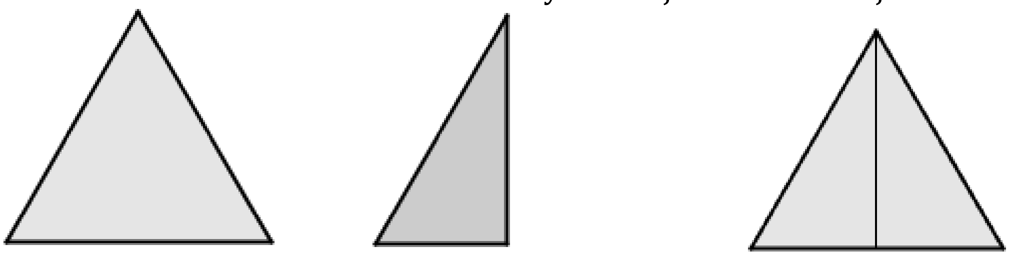


Obrázek 62: schéma pro vymodelování pravidelného šestiúhelníku

2. možnost

Výchozím formátem je rovnostranný trojúhelník.

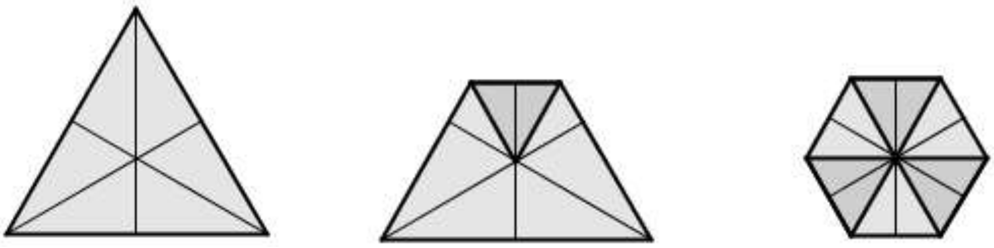
Přeložením vymodelujeme těžnici trojúhelníku.



Podobným postupem vymodelujeme i zbylé těžnice. Všechny tři těžnice se protínají v těžišti.

Vrchol trojúhelníku přiložíme k těžišti.

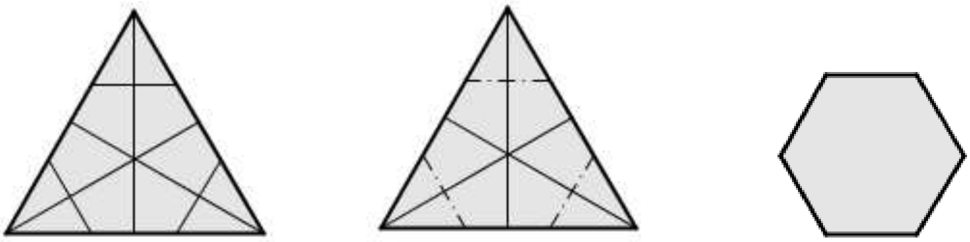
Podobně přiložíme i zbylé vrcholy trojúhelníku k jeho těžišti.



Rozložíme.

Vzniklé tři malé rovnostranné trojúhelníky oddělíme.

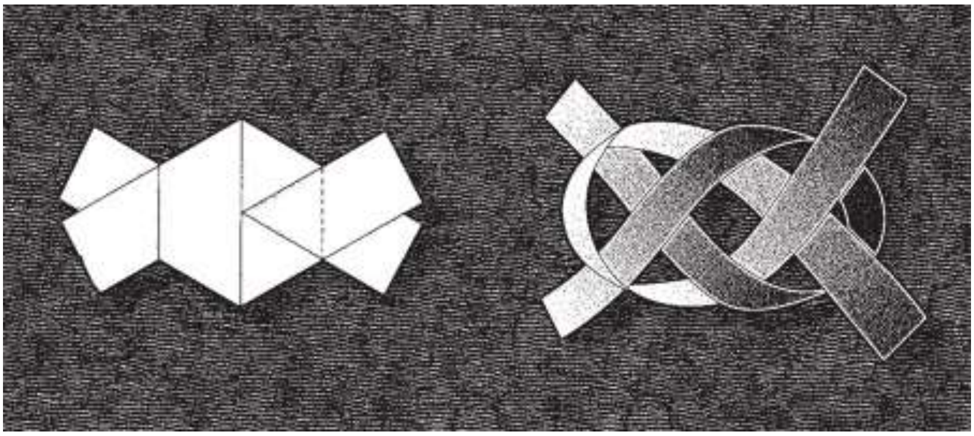
Výsledkem je pravidelný šestiúhelník



Obrázek 63: Schéma pro vymodelování pravidelného šestiúhelníku z rovnostranného trojúhelníku

3. možnost

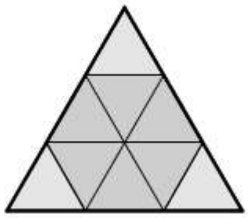
Podobně jako u pravidelného pětiúhelníku existuje možnost vytvořit pravidelný šestiúhelník pomocí uzle. Obrázek 64 napovídá, že budeme potřebovat dva proužky papíru stejné šířky, které navzájem propleteme a vytvoříme na nich společný uzel.



Obrázek 64: Uvázání pravidelného šestiúhelníku na proužcích papíru (Polster, 2004, s. 31)

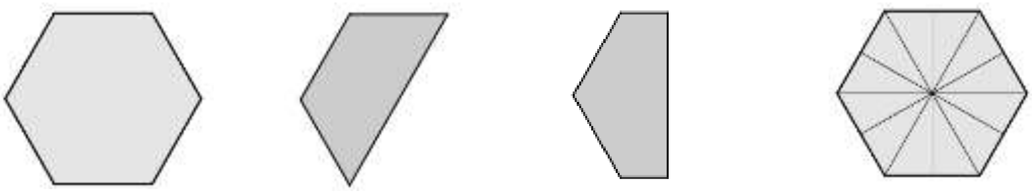
Další úlohy:

- Vyjádřete zlomkem obsah pravidelného šestiúhelníku vzhledem k výchozímu trojúhelníku.
    - Trojúhelník pomyslně rozdělíme na devět stejných trojúhelníků, jak vidíme na obrázku 65. Tmavší část představuje vzniklý pravidelný šestiúhelník. Jednoduše tak objevíme, že obsah šestiúhelníku je $\frac{6}{9}$ (nebo také $\frac{2}{3}$) celkového obsahu trojúhelníku.



Obrázek 65: Obsah pravidelného šestiúhelníku

- Porovnejte obvod rovnostranného trojúhelníku a vzniklého šestiúhelníku.
    - Každá strana šestiúhelníku má právě jednu třetinu velikosti strany původního trojúhelníku. Obvod šestiúhelníku je tedy o jednu třetinu menší než obvod trojúhelníku.
- Kolik os souměrnosti má pravidelný šestiúhelník?
    - Pravidelný šestiúhelník má právě šest os souměrnosti.

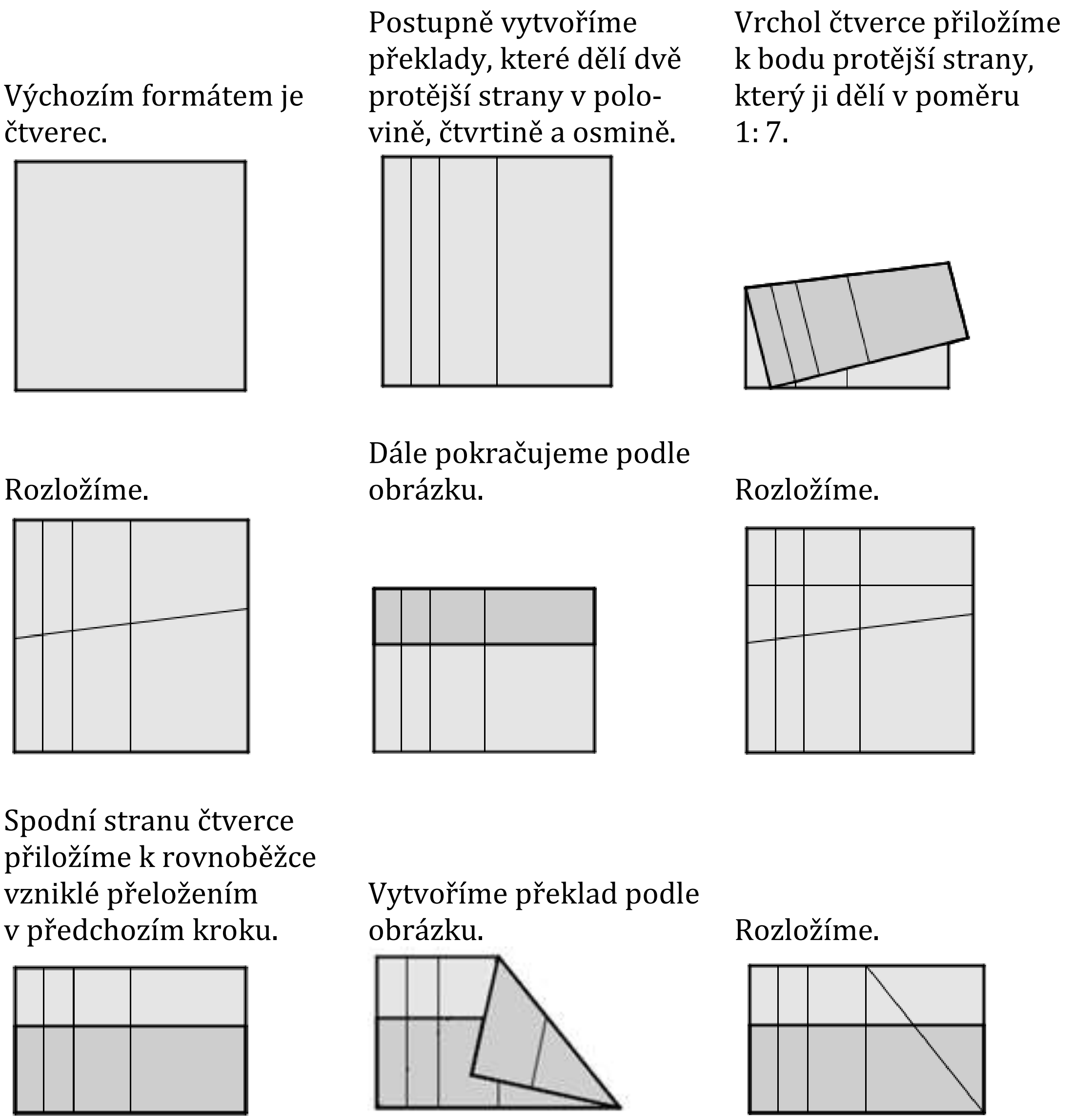


Obrázek 66: Osy souměrnosi pravidelného šestiúhelníku

5.1.5 Pravidelný sedmiúhelník

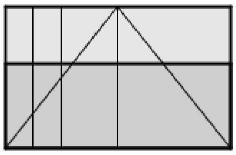
Pravidelný sedmiúhelník je jediný z mnohoúhelníků, představených v této sérii pracovních listů, který nelze sestrojit pomocí pravítka a kružítka. Pomocí překládání papíru existuje ovšem hned několik možností, jak pravidelný sedmiúhelník vytvořit.

1. možnost

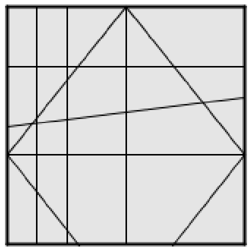


Obrázek 67: Schéma pro vymodelování pravidelného sedmiúhelníku (1. část)

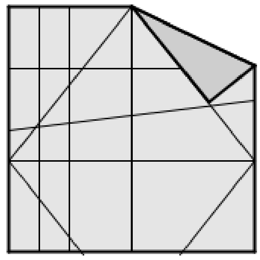
Pokračujeme podobně jako v předchozím kroku.



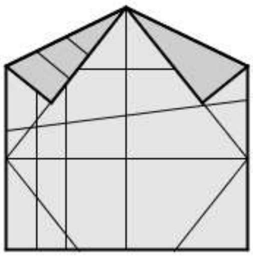
Rozložíme.



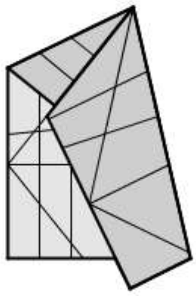
Vymodelujeme první stranu pravidelného sedmiúhelníku.



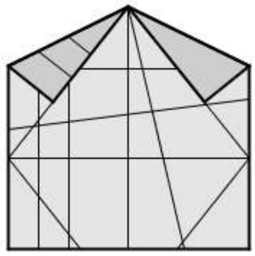
Analogicky s předchozím krokem vymodelujeme druhou stranu sedmiúhelníku.



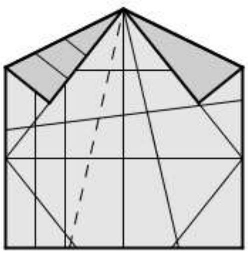
Dále pokračujeme podle obrázku.



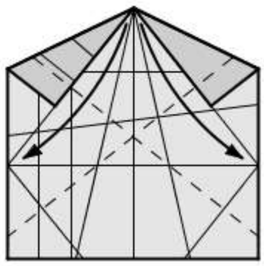
Rozložíme.



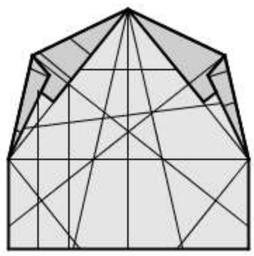
Čárkovanou čarou je vyznačen překlad, který vymodelujeme podobně jako překlad v předchozím kroku.



Šipky na obrázku znázorňují další postup.



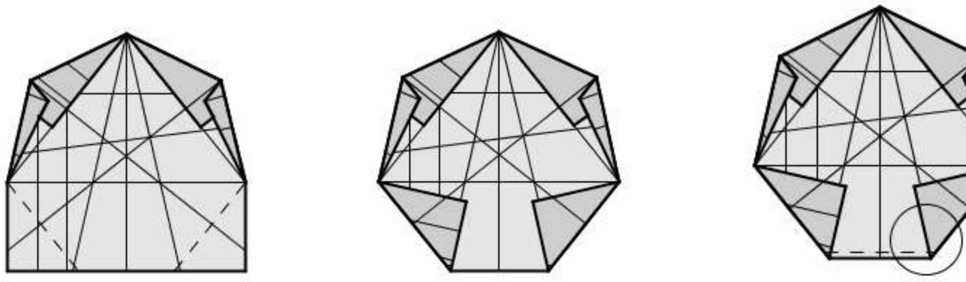
Další dvě strany sedmiúhelníku vytvoříme podle obrázku.



Obrázek 68: Schéma pro vymodelování pravidelného sedmiúhelníku (2. část)

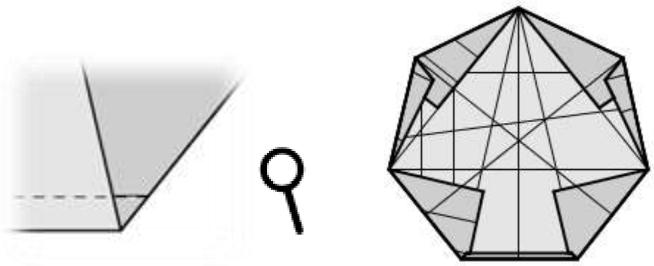
Překlady znázorněné na obrázku jsou kolmé k úsečkám vymodelovaných o dva kroky dříve.

Čárkovaně je vyznačen poslední přehyb tvořící sedmou stranu pravidelného sedmiúhelníku.



Přiblížení znázorňuje, kudy bude přehyb veden.

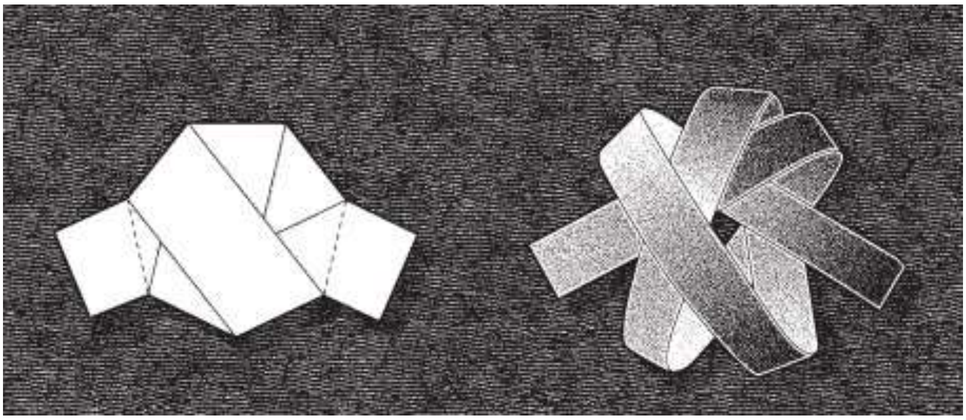
Pravidelný sedmiúhelník.



Obrázek 69: Schéma pro vymodelování pravidelného sedmiúhelníku (3. část)

2. možnost

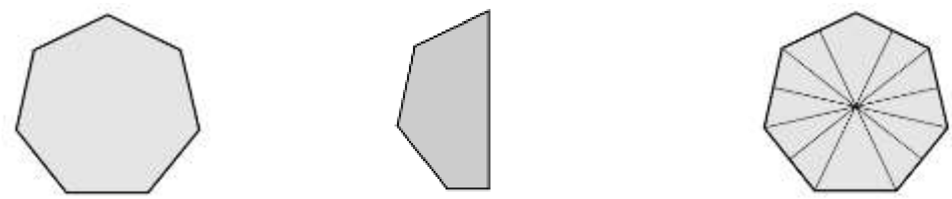
Obrázek 70 prezentuje postup, který vede k pravidelnému sedmnáctiúhelníku uvázanému z proužku papíru.



Obrázek 70: Uvázání pravidelného sedmiúhelníku na proužku papíru (Polster, 2004, s. 31)

Další úlohy:

- Kolik os souměrnosti má pravidelný sedmnáctiúhelník?
    - Pravidelný sedmnáctiúhelník má právě sedm os souměrnosti.



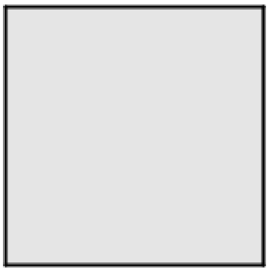
Obrázek 71: Osy souměrnosti pravidelného sedmiúhelníku

5.1.6 Pravidelný osmiúhelník

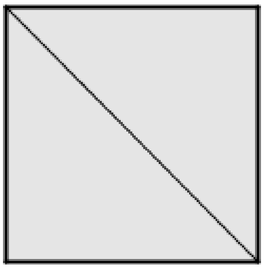
Pracovní list představí dvě různé možnosti pro vymodelování pravidelného osmiúhelníku.

1. možnost

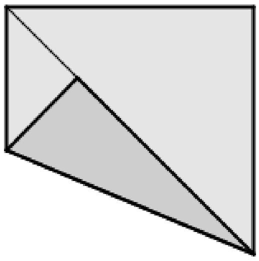
Výchozím formátem je čtverec.



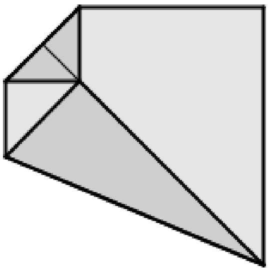
Přeložením vymodelujeme úhlopříčku čtverce.



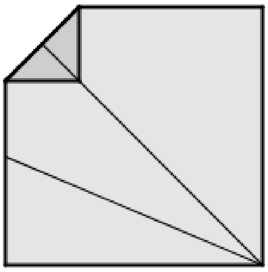
K úhlopříčce přiložíme stranu čtverce.



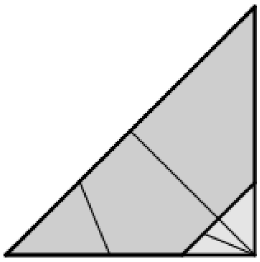
Obrázek představuje vymodelování první strany osmiúhelníku.



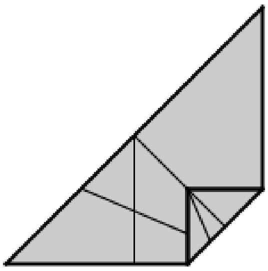
Rozložíme.



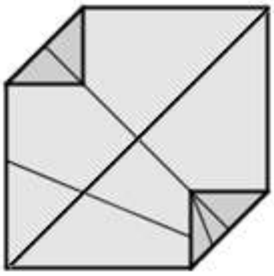
Přeložíme podle druhé úhlopříčky čtverce.



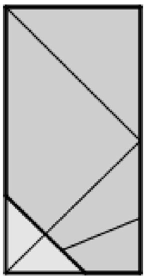
Vymodelujeme druhou ze stran osmiúhelníku.



Rozložíme.



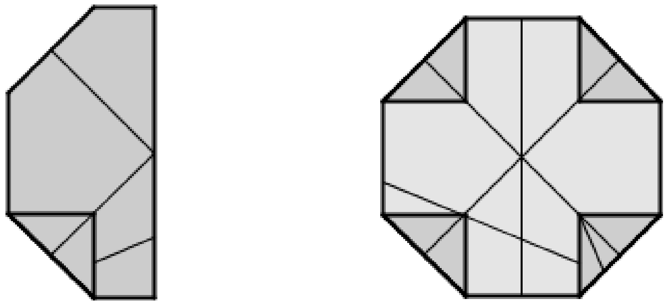
Přeložíme podle střední příčky čtverce.



Obrázek 72: Schéma pro vymodelování pravidelného osmiúhelníku (1. část)

Založením vymodelujeme další strany osmiúhelníku.

Rozložíme. Vzniklý obrazec je pravidelný osmiúhelník.

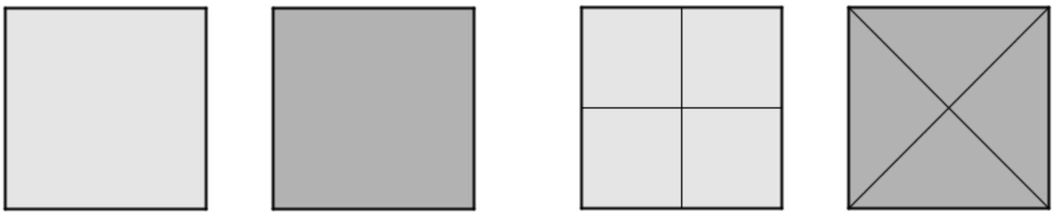


Obrázek 73: Schéma pro vymodelování pravidelného osmiúhelníku (2. část)

2. možnost

Dva shodné čtverce.

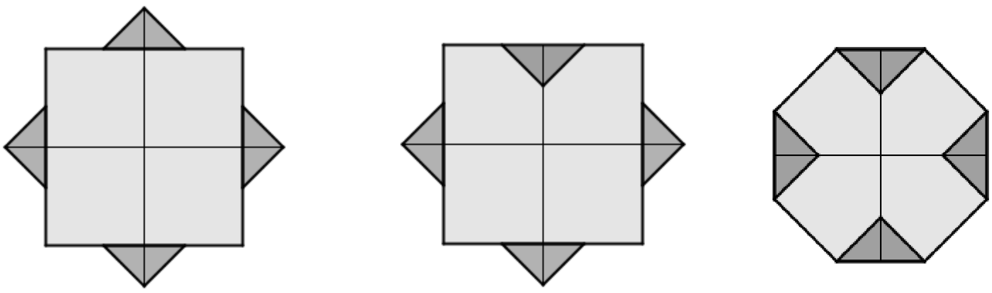
V prvním čtverci vymodelujeme obě střední příčky, v druhém čtverci úhlopříčky.



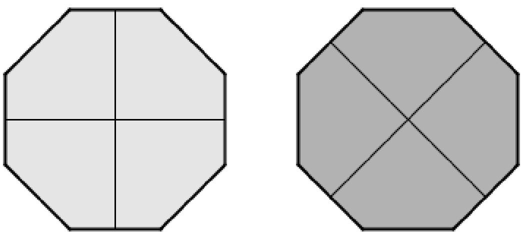
Čtverce položíme na sebe tak, že jsou jejich středy na sobě a střední příčky jednoho čtverce se překrývají s úhlopříčkami čtverce druhého.

Postupně založíme přečnívající cípy obou čtverců přes hrany druhého čtverce.

Vznikne pravidelný osmiúhelník.



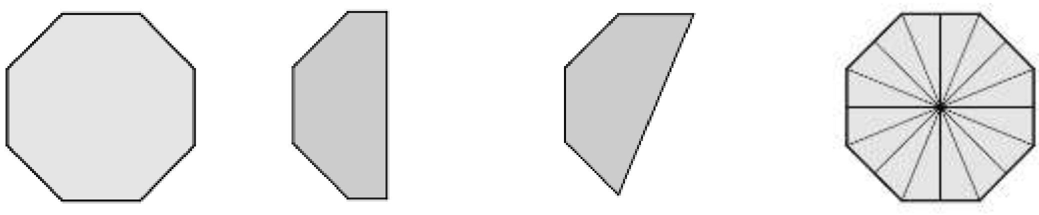
Osmiúhelníky oddělíme od sebe.



Obrázek 74: Schéma pro vymodelování pravidelného osmiúhelníku

Další úlohy:

- Kolik os souměrnosti má pravidelný osmiúhelník?
  - Pravidelný osmiúhelník má právě osm os souměrnosti.



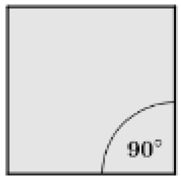
Obrázek 75: Osy souměrnosti pravidelného osmiúhelníku

5.2 Úhly

Skládání papíru nám poskytuje velmi dobré možnosti, jak bez pomoci úhloměru vytvořit úhly o dané velikosti. Montroll (2012, s. 9) prezentuje postupy, kterými jednoduše ve čtverci papíru vymodelujeme úhly s velikostí $60°, 30°, 15°, 45°$ a 22,5°.

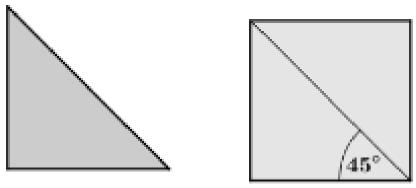
5.2.1 Úhel $45°$ a $22,5°$

Z vlastnosti čtverce víme, že všechny jeho vnitřní úhly jsou pravé, mají tedy velikost 90°. Jeden z vnitřních úhlů čtverce je vyznačen na obrázku 76.



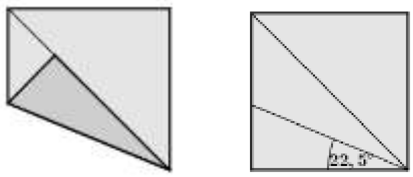
Obrázek 76: Úhel 90°

Přeložíme-li čtverec podle jeho úhlopříčky, rozdělíme tak úhel na dva úhly shodné. To znamená, že úhel s velikostí 90° jsme rozdělili na dva úhly s velikostí 45°.



Obrázek 77: Vymodelování úhlu 45°

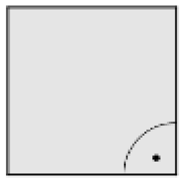
Pro vymodelování úhlu s poloviční velikostí k úhlu 45° přiložíme jednu ze stran čtverce k jeho úhlopříčce.



Obrázek 78: Vymodelování úhlu 22,5°

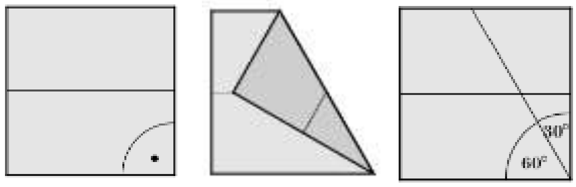
5.2.2 Úhel 60°, 30° a 15°

V teoretické části práce je uveden návod pro rozdělení úhlu na třetiny. Je tedy možné stejný princip aplikovat i na rozdělení vnitřního úhlu čtverce. Jednoduše bychom tak získali tři úhly o velikosti 30°. Ukažme si postup, který ve své knize představuje Montroll (2012).



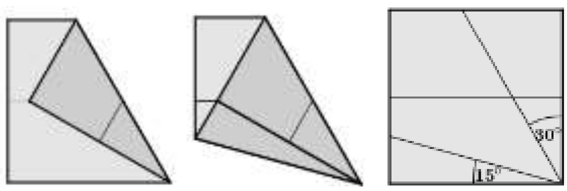
Obrázek 79: Pravý úhel

Přeložením čtverce na dvě poloviny vymodelujeme jeho střední příčku. Libovolný vrchol čtverce přiložíme ke střední příčce, jak ukazuje obrázek 80. Získali jsme tak překlad, který rozděluje vnitřní úhel čtverce na 60° a 30°.



Obrázek 80: Úhel 60° a 30°

Úhel o velikosti 15° můžeme získat přeložením úhlu 30° na poloviny. Obrázek 81 ilustruje postup, kterým lze vymodelovat úhel 15° současně při vytváření úhlu 30°.



Obrázek 81: Úhel 30° a 15°

5.4 Hledání racionálních a iracionálních čísel

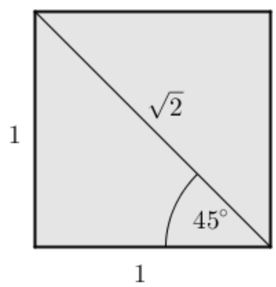
Calda (1995, s. 8) popisuje racionální a iracionální čísla takto: „Každé racionální číslo lze vyjádřit jako zlomek, tj. podíl $\frac{r}{s}$, kde r, s jsou celá čísla, $s \neq 0$; racionálními čísly jsou tedy čísla přirozená i celá. Iracionální čísla nelze vyjádřit jako podíl celých čísel – jsou to např. čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{3}, \pi, sin\frac{1}{3}\pi$ atd.“

Je známo, že Euklides ve svých Základech velmi často reprezentoval čísla geometricky, tedy jako velikosti úseček. Podobně bude na čísla pohlíženo i v tomto pracovním listu. Základem pro modelování čísel pomocí překládání papíru bude čtverec, jehož strana má rozměr $1j$.

5.4.1 Iracionální čísla

Montroll (2012, s. 9) ve své knize propojuje vymodelování úhlu dané velikosti se získáním úseček, jejichž velikost popisuje číslo iracionální hodnoty.

- Vymodelujte úsečku, jejíž délka je $\sqrt{2}$.
    - Ve čtverci se stranou 1 přeložením vymodelujeme úhlopříčku, která zároveň dělí dva protější vnitřní úhly čtverce na polovinu, tedy na 45°. Úhlopříčka čtverce má velikost $\sqrt{2}$.



Obrázek 82: Znázornění $\sqrt{2}$

Označme úhlopříčku čtverce x. Následující výpočet pomocí funkce sinus ukazuje, že úhlopříčka čtverce má skutečně hledanou velikost.

$$\sin 45° = \frac{1}{x}$$

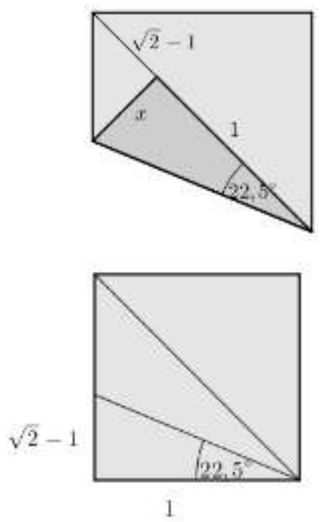
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Po usměrnění

$$x = \sqrt{2}$$

- Vymodelujte úsečku, jejíž délka je $\sqrt{2} - 1$.
    - Ve čtverci o straně 1 vymodelujeme pravoúhlý trojúhelník, jehož jeden ostrý úhel je 22,5° a jedna jeho odvěsna má délku 1. Pak druhá odvěsna má délku $\sqrt{2} - 1$.



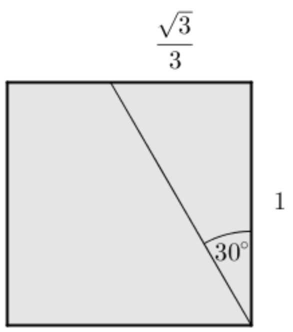
Obrázek 83: Znázornění $\sqrt{2}$-1

Obrázek 83 představuje konstrukci pravoúhlého trojúhelníku popsaného výše. V první části obrázku je vidět rozdělení úhlopříčky na dvě části s délkami 1 a $\sqrt{2}-1$. Zároveň je hledaná velikost úsečky označena x. Velikosti x a $\sqrt{2}-1$ jsou velikostmi dvou odvěsen pravoúhlého a zároveň rovnoramenného trojúhelníku. Tedy můžeme říci, že $x=\sqrt{2}-1$.

Druhá část obrázku znázorňuje čtverec po rozložení. Montroll (2012, s. 9) k tomuto obrázku připojuje následující rovnost.

$$\tan 22{,}5° = \sqrt{2}-1$$

- Vymodelujte úsečku, jejíž délka je $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
  - Ve čtverci se stranou 1 vymodelujeme pravoúhlý trojúhelník s jedním vnitřním úhlem 30° (podle obr. 79). Protilehlá odvěsna k úhlu 30°, v pravoúhlém trojúhelníku, má velikost $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Obrázek 84: Znázornění $\sqrt{3}/3$

Označíme-li protilehlou odvěsnu k úhlu 30° písmenem x, díky funkci tangens ukážeme, že úsečka x má skutečně hledanou velikost.

$$\tan 30° = \frac{x}{1}$$

$$\tan 30° = x$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- Vymodelujte úsečky s délkami $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$ a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
  - Možná řešení představuje teoretická část práce v podnadpisech duplikace krychle (str. 23 – 27), bronzový obdélník (str. 33 – 35) a zlatý obdélník (str. 36 – 38).

5.4.2 Racionální čísla

Metodu, která umožňuje vymodelovat jakýkoli zlomek $\frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$ popisuje Montroll (2012, s. 20) následovně:

K rozdělení strany čtverce o velikosti 1 na n částí pro $n \in \mathbb{N}$ nalezněme dvě čísla $a, b \in \mathbb{N}$ taková, pro která platí:

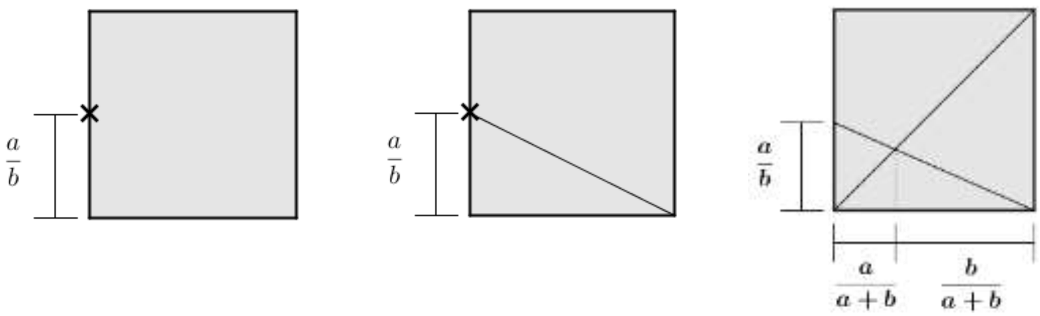
- $a + b = n$
- $a < b$

Dále postup pokračuje následovně.

Na levé straně čtverce vyznačíme bod v $\frac{a}{b}$ strany čtverce.

Vymodelujeme překlad, který spojuje daný bod s pravým spodním vrcholem.

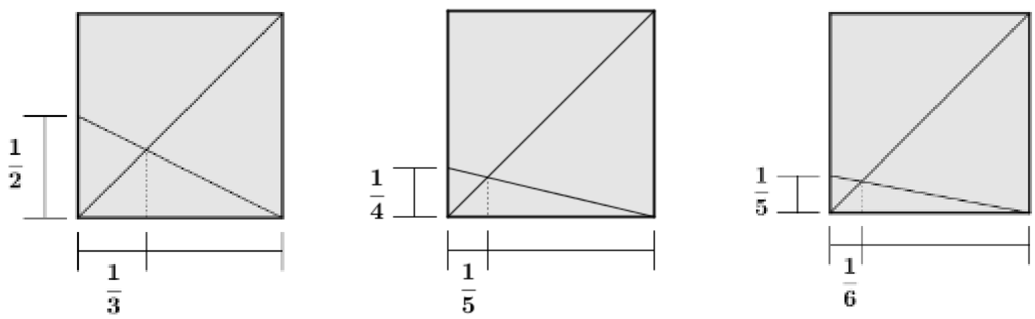
Čtverec přeložíme podle jeho úhlopříčky. Z průsečíku dvou vymodelovaných překladů spustíme kolmici ke spodní straně čtverce.



Obrázek 85: Schéma pro rozdělení strany čtverce

Na základě této metody můžeme postupně vymodelovat libovolné číslo zapsané zlomkem $\frac{1}{n}$ jako část spodní strany čtverce. Následující obrázek 86 představuje několik z nich.

Určení $\frac{1}{3}$ Určení $\frac{1}{5}$ Určení $\frac{1}{6}$



Obrázek 86: Zlomky

5.5 Důkazy

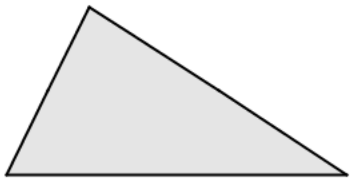
Už na základní škole se v učebnicích matematiky objevuje několik důkazů, které by si měli žáci osvojit. Zde je malá ukázka, jak lze skládáním papíru některé matematické věty elegantně ověřit.

5.5.1 Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku

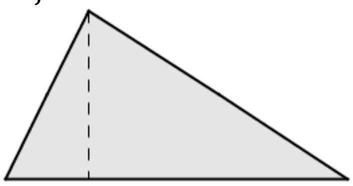
Věta: Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°.

Ověření:

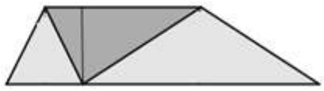
Libovolný trojúhelník.



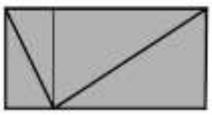
Přeložením vytvoříme výšku k nejdelší straně trojúhelníku.



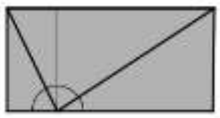
Vrchol přiložíme k patě výšky trojúhelníku.



Zbylé dva vrcholy také přiložíme k patě výšky trojúhelníku.



Vidíme, že součet k sobě přiložených úhlů u vrcholů trojúhelníku vyplňuje přímý úhel.



Obrázek 87: Schéma ověření věty o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku

Tímto jsme ukázali, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°.

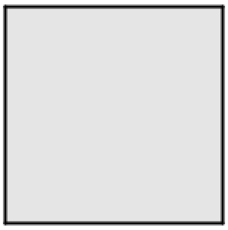
5.5.2 Vzorec pro druhou mocninu součtu dvou čísel

Skládání papíru nemusíme využívat výhradně v geometrii. V teoretické části bylo zmíněno, že dřívější matematici mnohokrát na problémy aritmetiky a algebry nahlíželi prostřednictvím geometrie. Nyní si představíme vzorec, se kterým se setkávají žáci osmých ročníků základních škol. Některé učebnice dokonce představují jeho geometrickou interpretaci, která se v podstatě podobá následujícímu postupu.

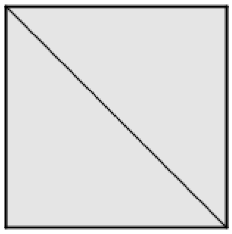
Věta: Pro $\forall a, b \in \mathbb{N}$ platí $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Ověření:

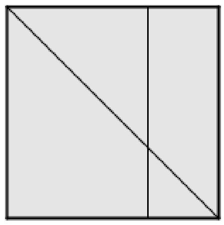
Výchozím formátem je čtverec.



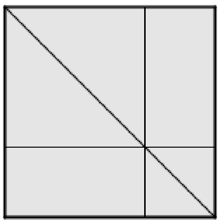
Čtverec přeložíme tak, aby přehyb reprezentoval úhlopříčku čtverce.



Vymodelujeme libovolnou rovnoběžku se stranou čtverce.

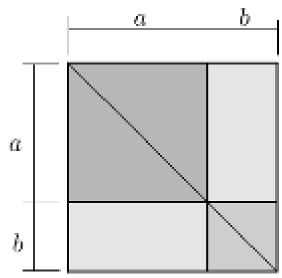


V průsečíku úhlopříčky a rovnoběžky vymodelujeme kolmici k rovnoběžce.

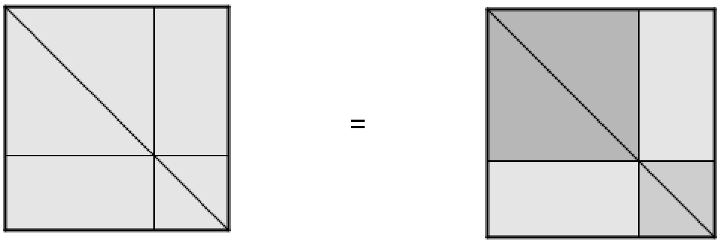


Obrázek 88: Schéma ověření vzorce

K ověření rovnosti vzorce využijeme překladů, které jsme ve čtverci vytvořili. Ty čtverec rozdělují na dva čtverce s různým obsahem a dva shodné obdélníky. K jednotlivým rozměrům čtverce vytvoříme kóty. Poté už zbývá vyjádřit na levou stranu rovnosti obsah celého čtverce a na stranu pravou součet obsahů jednotlivých částí.



Obrázek 89: Geometrická interpretace vzorce



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Obrázek 90: Porovnání početního a grafického řešení

Z obrázku 90 vidíme, že rovnost skutečně platí. Tímto jsme vzorec ověřili.

5.6 Pythagorejské trojúhelníky

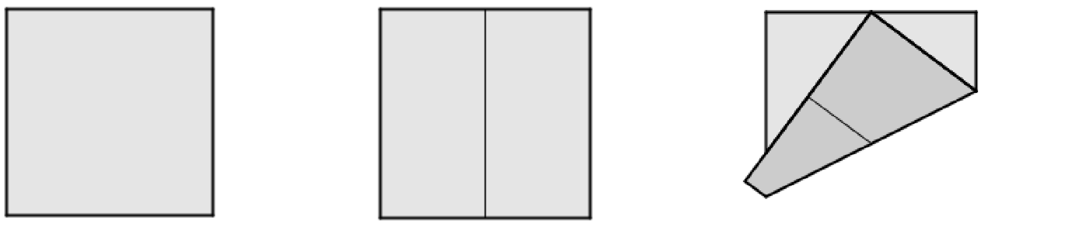
Pracovní list seznamuje s pojmem pythagorejský trojúhelník a představuje jednoduchý postup pro vymodelování tří podobných trojúhelníků jediným přeložením papíru.

Definice: Trojice čísel $x, y, z \in \mathbb{N}$ řešící rovnici $x^2 + y^2 = z^2$ se nazývá pythagorejská trojice. Přirozená čísla patřící do dané pythagorejské trojice tvoří strany pravoúhlého trojúhelníku.

Výchozím formátem je čtverec.

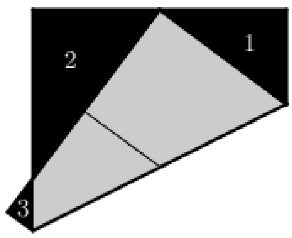
Překladem vytvoříme osu souměrnosti, která rozděluje dvě protější strany čtverce na polovinu.

Vrchol čtverce přiložíme k vyznačené polovině vrchní strany čtverce.



Obrázek 91: Schéma pro vymodelování pythagorejských trojúhelníků (Kasahara, 2001, s. 9)

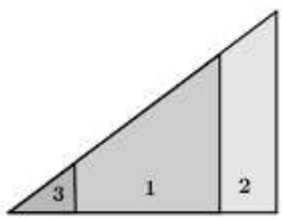
Přiložením vrcholu čtverce ke středu protější strany čtverce jsme získali tři podobné pythagorejské trojúhelníky. Na obrázku 92 jsou jednotlivé trojúhelníky vybarveny a označeny postupně čísly 1, 2 a 3.



Obrázek 92: Pythagorejské trojúhelníky

Další úlohy

- Ověřte, zda jsou trojúhelníky navzájem podobné.
  - Podobnost vyplývá z důkazu Hagaovy věty, který je uveden v teo-retické části práce.
  - K ověření podobnosti můžeme také jednotlivé trojúhelníky vystřihnout a podle věty uu ověřit jejich vzájemnou podob-

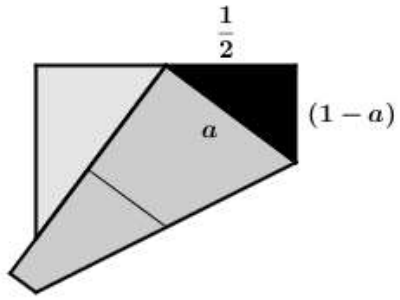


Obrázek 93: Důkaz podobnosti pomocí věty uu

nost. Všechny trojúhelníky jsou pravoúhlé, stačí tedy najít v každém trojúhelníku takový vnitřní úhel, který není pravý a shoduje se s jedním úhlem zbylých dvou trojúhelníků. Shodnost úhlů ověříme jejich přiložením na sebe.

- Ověřte, že se jedná o pythagorejské trojúhelníky.
  - Trojúhelníky jsou podobné, postačí tedy ověřit poměr stran v jednom z vyznačených trojúhelníků. Čtverec má délku strany $1j$ a na základě této znalosti označíme délky stran trojúhelníku. Pomocí Pythagorovy věty vypočítáme velikosti stran a porovnáme jejich poměr.

$$a^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1-a)^2$$
$$a^2 = \frac{1}{4} + 1 - 2a + a^2$$
$$2a = \frac{1}{4} + 1$$
$$2a = \frac{5}{4}$$
$$a = \frac{5}{8}$$



Obrázek 94: Označení velikostí stran trojúhelníku

Strany trojúhelníku jsou v poměru $\frac{5}{8} : \frac{1}{2} : \frac{3}{8}$. Odstraníme zlomky.

$$5 : 4 : 3$$

Získali jsme tak pythagorejskou trojici, neboť

$$5^2 = 4^2 + 3^2.$$

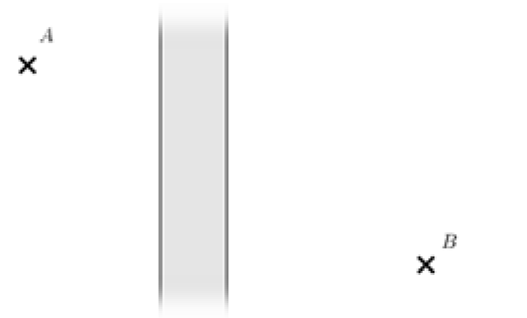
5.7 Úlohy

Za pomoci skládání papíru můžeme velmi elegantně vyřešit i některé slovní úlohy. Následující pracovní list představí několik úloh s tímto řešením.

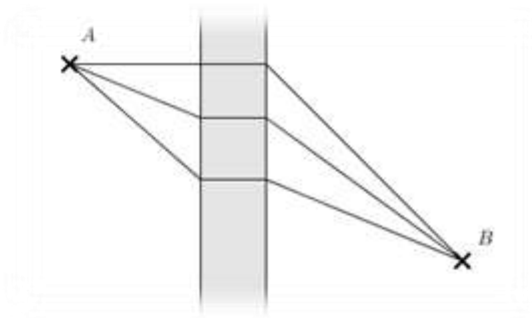
5.7.1 Úloha 1

(převzato od Krynického (2010))

Vyhledej místo na řece šířky d, ve kterém by měl stát most ve směru kolmém na tok řeky, tak aby cesta z obce A do obce B, které leží na různých stranách řeky mimo její břehy, byla nejkratší. Předpokládej, že šířka řeky se v odpovídajícím úseku řeky nemění.



Obrázek 95: Náčrtek k zadání úlohy

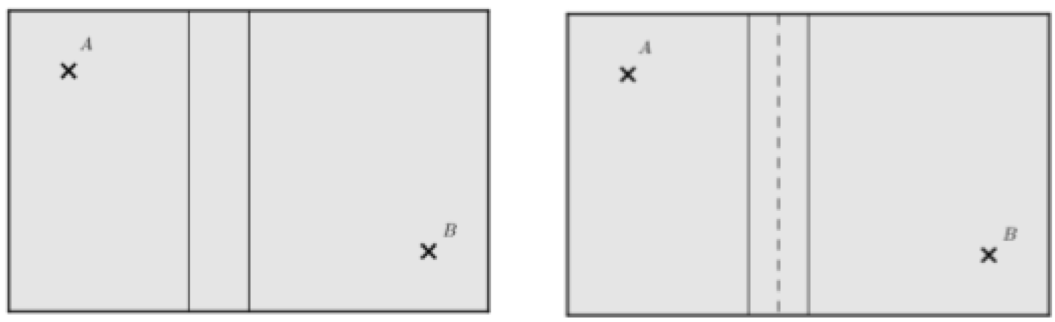


Obrázek 96: Ilustrace pokusných řešení

Řešení

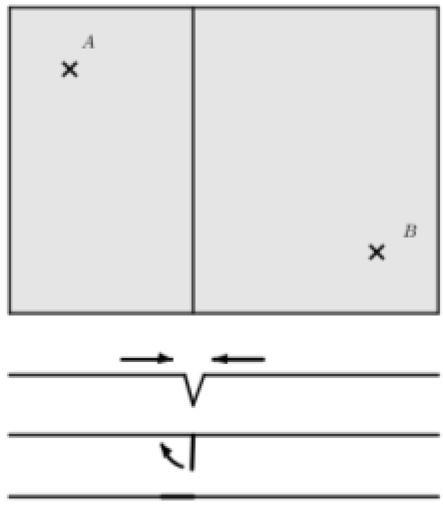
Na papíru vyznačíme body A a B jako polohu obcí. Dvě rovnoběžky představují danou řeku.

Přiložením dvou rovnoběžek na sebe vytvoříme osu pásu rovnoběžek.

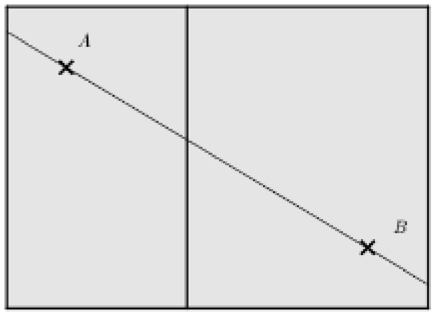


Obrázek 97: Řešení úlohy (1. část)

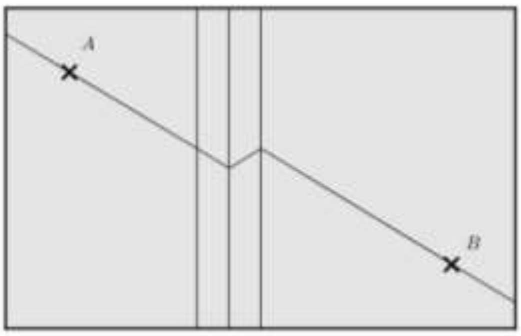
Přehyb tvořící osu pásu rovnoběžek nám pomůže přiložit rovnoběžky k sobě. Postup naznačuje půdorys papíru.



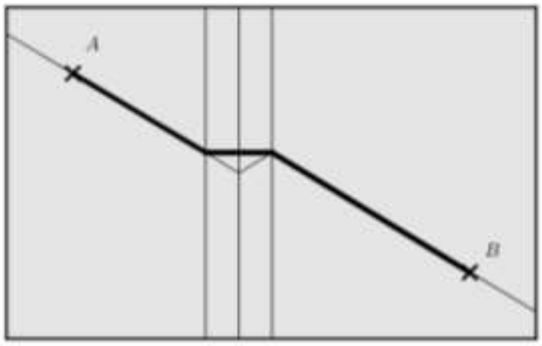
Vymodelujeme překlad procházející body A a B.



Rozložíme.



Nejkratší cestu po pevnině představuje vymodelovaný přehyb. Průsečíky rovnoběžek (břehy řeky) s vymodelovaným přehybem jsou okraje mostu.



Obrázek 98: Řešení úlohy (2. část)

Odpověď

Místo, ve kterém by měl stát most, určuje průsečík vymodelovaného překladu procházejícího body A a B s břehy řeky.

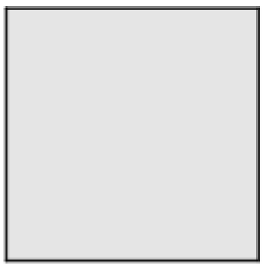
5.7.2 Úloha 2

(převzato od Kuřiny (1996, s. 20))

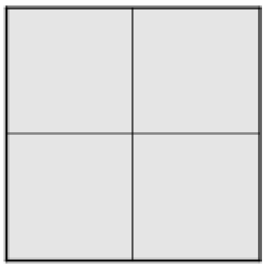
Ve čtverci ABCD jsou sestrojeny středy A´, B´,C´,D´ stran CD, DA, AB, BC. Dokažte, že průsečíky úseček AA´, BB´, CC´, DD´ jsou vrcholy čtverce. Kolikrát je obsah tohoto čtverce menší než obsah čtverce ABCD?

Řešení:

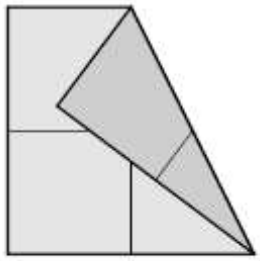
Čtverec.



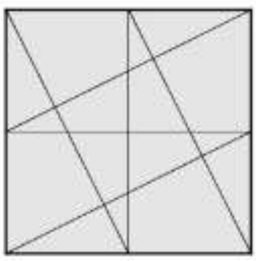
Přeložením vymodelujeme střední příčky čtverce.



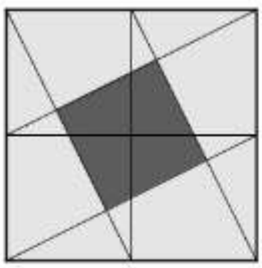
Střední příčky dělí strany čtverce na poloviny. Obrázek znázorňuje vymodelování překladu procházejícím vrcholem čtverce se středem protější strany.



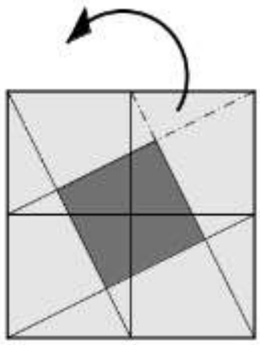
Podobně jako v předchozím kroku vytvoříme další tři překlady procházející zbylými vrcholy a středy stran.



Barevně vyznačíme hledaný čtverec.

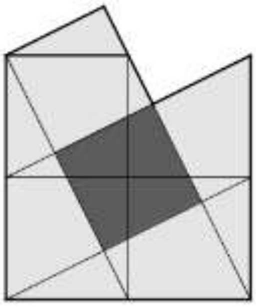


Odstřihneme pravoúhlý trojúhelník podle vyznačené čerchované čáry a přiložíme ke straně čtverce.

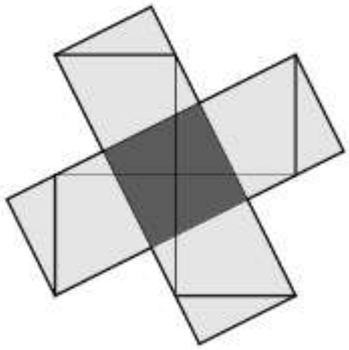


Obrázek 99: Řešení úlohy (1. část)

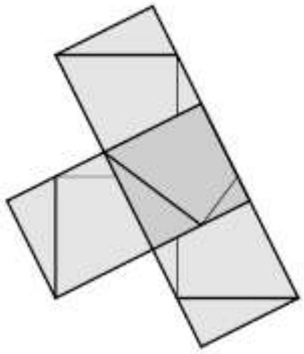
Přiložený trojúhelník zajistíme ke straně čtverce přilepením.



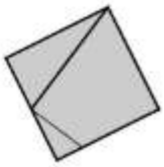
Podobně odstřihneme a přemístíme i další tři pravoúhlé trojúhelníky. Vznikne osově a středově souměrný útvar se čtyřmi rameny.



Ramena útvaru postupně překládáme přes vyznačený čtverec.



Výsledkem je pět shodných na sebe položených čtverců.



Obrázek 100: Řešení úlohy (2. část)

Odpověď

Obsah čtverce, jehož vrcholy jsou průsečíky úseček AA', BB', CC', DD' je pětkrát menší než původní čtverec.

5.7.3 Úloha 3

Kolikrát bychom museli přeložit papír na polovinu, aby jeho tloušťka překonala vzdálenost ze Země na Měsíc? (Tloušťka jednoho listu papíru je $0{,}1 mm$ *a střední vzdálenost Měsíce od Země je* $384\,000\ km$.*)*

Řešení

Nejprve se pokusíme libovolný papír (nejlépe s tloušťkou $0{,}1\ mm$) co nejvíce krát přeložit na polovinu. Brzy zjistíme, že ani papír velkých rozměrů nedokážeme přeložit více než 8krát.[17]

Poskládaný papír využijeme pro odvození vztahu mezi počtem přeložení napůl a výslednou tloušťkou papíru.

Počet přeložení	Počet vrstev	Odvození počtu vrstev	Tloušťka papíru v mm
0	1	$1 = 2^0$	$2^0 \cdot 0{,}1 = 0{,}1$
1	2	$2 = 2^1$	$2^1 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$
2	4	$2 \cdot 2 = 2^2$	$2^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}4$
3	8	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$	$2^3 \cdot 0{,}1 = 0{,}8$
4	16	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$	$2^4 \cdot 0{,}1 = 1{,}6$
5	32	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$	$2^5 \cdot 0{,}1 = 3{,}2$
6	64	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$	$2^6 \cdot 0{,}1 = 6{,}2$
n		2^n	$2^n \cdot 0{,}1$

Tabulka 2: Přehled vztahu mezi počtem přeložení papíru a jeho tloušťkou

Převedeme vzdálenost Měsíce od Země na milimetry.

$$384\,000\ km = 384\,000\,000\,000\ mm$$

Nyní stačí pouze vyřešit nerovnici

$$2^n \cdot 0{,}1 \geq 384\,000\,000\,000$$

$$2^n \geq 3\,840\,000\,000\,000$$

$$\log 2^n \geq \log 3\,840\,000\,000\,000$$

$$n \log 2 \geq \log 3\,840\,000\,000\,000$$

$$n \geq \frac{\log 3\,840\,000\,000\,000}{\log 2}$$

[17] Úloha je ve skutečnosti prakticky neřešitelná. Poskládaný papír využijeme k odvození jejího teoretického řešení.

$$n \geq 41{,}8$$

$$K = \{42, 43, 44, \dots\}$$

Odpověď

Papír by stačilo přeložit 42x pro překonání vzdálenosti mezi Zemí a Měsícem.

Pedagogická poznámka

Z postupu řešení je jasné, že je nutná znalost exponenciálních a logaritmických rovnic a nerovnic. Je však možné úlohu zařadit jako motivační k učivu mocnin již v osmé třídě ZŠ. Žáci si nejprve na základě vlastní zkušenosti s překládáním papíru napůl odvodí vztah[18], který představuje tabulka 2. Poté mohou tipovat možný výsledek. Pomocí kalkulaček ověří, zda se jejich tip přibližuje skutečnosti a snaží se ho postupně upřesňovat. Učitel žákům pomáhá při práci s kalkulačkou jednak u zadávání příkladu a jednak ve čtení výsledku, který bývá uveden s mocninou. Zároveň učitel práci žáků koriguje, aby měli možnost najít správný výsledek[19].

[18] Žáci si zároveň přirozeně osvojí zápis v mocninách, protože se pro ně zápis ve tvaru součinu stane velmi rychle zdlouhavý.

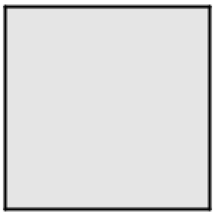
[19] Z vlastní zkušenosti z odučených hodin vím, že žáci tipují opravdu vysoký počet nutných přeložení papíru.

5.8 Parník

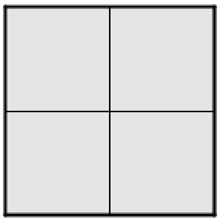
Parník je u nás jedna z nejznámějších skládanek ze čtvercového papíru. A i přes velmi pěkný konečný efekt je jeho poskládání zařazeno mezi ty jednodušší skládanky. První část pracovního listu se zaměří na skládání parníku (úhly, mnohoúhelníky, obsah mnohoúhelníku, středová a osová souměrnost) a druhá část zkoumá přehyby papíru – úsečky vzniklé při skládání, když rozložíme čtverec papíru (Pythagorova věta, vepsaný čtverec a jeho obsah).

5.8.1 Skládání parníku

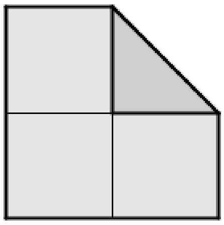
Výchozí formát pro práci je čtverec.



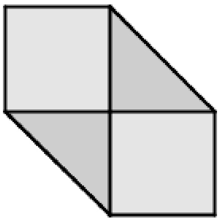
Přehybem vyznačíme ve čtverci osy souměrnosti, které nejsou úhlopříčkami čtverce.



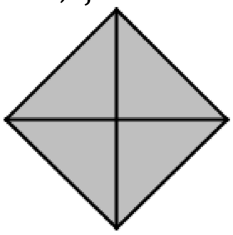
Průnik os souměrnosti je střed čtverce, ke kterému přiložíme vrchol čtverce.



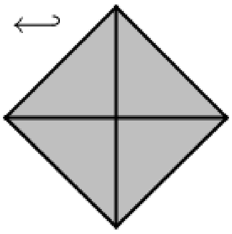
Ke středu čtverce přiložíme takový vrchol, aby vzniklý obrazec byl zároveň středově i osově souměrný.



Přiložením zbývajících dvou vrcholů čtverce ke středu vidíme, že součty úhlů u vrcholu čtverce dávají dohromady plný úhel, tj. 360°.

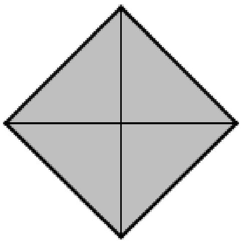


Vzniklý čtverec otočíme.

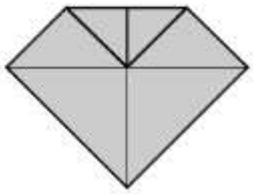


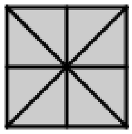
Obrázek 101: Schéma skládání parníku (1. část)

Čtverec je pomocí úhlopříček rozdělen na čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky. Úhlopříčky se protínají ve středu čtverce.

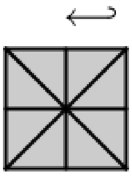


Ke středu čtverce postupně přiložíme všechny jeho vrcholy.

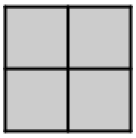




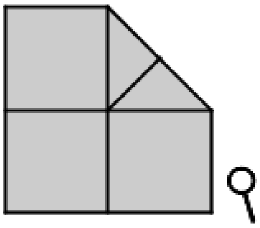
Vzniklý čtverec opět otočíme.



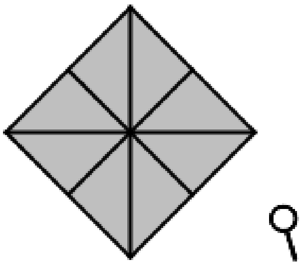
V tomto čtverci jsou hranami papíru vyznačeny osy souměrnosti.



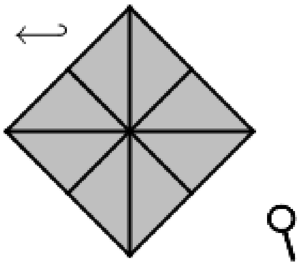
Jednotlivé vrcholy opět přikládáme ke středu čtverce.



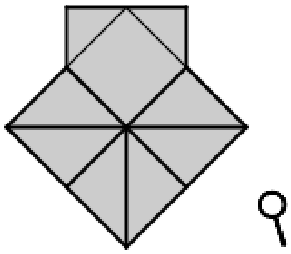
Vzniklý čtverec po přiložení všech vrcholů ke středu.



Otočíme.

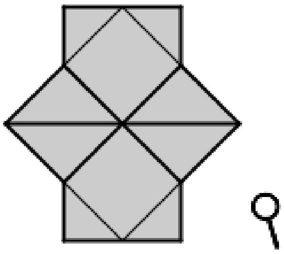


Rozložením vzniklé kapsy vytvoříme komín parníku.

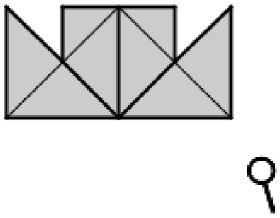


Obrázek 102: Schéma skládání parníku (2. část)

Vytvořením obou komínů nám vzniká osově i středově souměrný obrazec



Při přeložení podle osy souměrnosti je důležité vytvořit příď a záď parníku.



Obrázek 103: Schéma skládání parníku (3. část)

5.8.2 Náměty pro další práci s výrobkem

Pracujeme s profilem výrobku a přehyby na něm viditelnými.

Úhly

- Kolik vidíme pravých úhlů?
    - Na profilu parníku lze najít 16 pravých úhlů, jejichž ramena jsou buďto hrany papíru, nebo viditelné přehyby.
- Kolik stupňů má největší vnitřní úhel mnohoúhelníku?
    - Největší úhel má 315° a je svírán přídí (zádí) parníku a jeho komínem.
- Najdi úhel tupý, ostrý – změř velikost.
    - Všechny ostré úhly, které jsou na profilu parníku viditelné, mají velikost 45°.
    - Na profilu parníku není žádný tupý úhel.

Mnohoúhelníky

- Profil celého parníku je osmiúhelník. Jedná se o konvexní, nebo nekonvexní útvar?
    - Osmiúhelní je nekonvexní.
- Parník rozdělují přehyby na několik mnohoúhelníků, vyjmenuj některé z nich. Vybarvi pravidelné mnohoúhelníky.
    - Pravoúhlé trojúhelníky.
    - Čtverec – pravidelný mnohoúhelník.
    - Nepravidelné pětiúhelníky, šestiúhelníky, sedmiúhelníky a osmiúhelník.
- Kolik vidíš pravoúhlých trojúhelníků?
    - Na profilu parníku je možné najít 13 pravoúhlých trojúhelníků.

Obsah

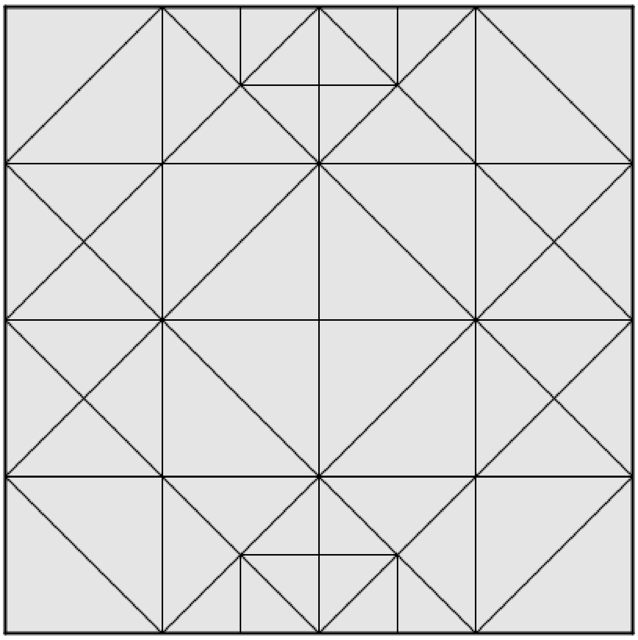
- Vidíme, že parník je rozdělen na několik pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníku (šest velkých a dva malé), jaký je obsah přední strany parníku, pokud malý trojúhelník má obsah $1j^2$.
    - Obsah přední strany parníku je $14j^2$.

Středová a osová souměrnost

- Je parník osově nebo středově souměrný?
    - Parník je osově souměrný. Osou souměrnosti je svislý překlad dělící komín parníku.

5.8.3 Úlohy s rozloženým čtvercem papíru

Pokud parník rozložíme, vznikne čtverec s překlady (úsečkami), které jsou vidět na obrázku 104. Díky těmto překladům můžeme vyřešit následující úlohy (Pythagorova věta, obsah vepsaného čtverce)[20].

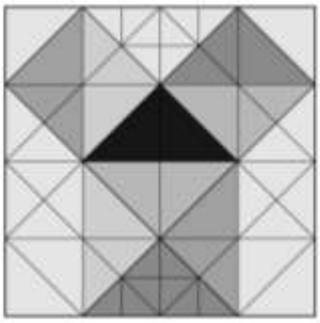


Obrázek 104: Rozložený parník

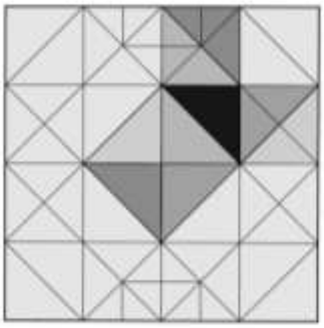
Pythagorova věta:

Čtverec papíru je rozdělen na mnoho pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků. Úkolem je najít ověření platnosti Pythagorovy věty.

[20] Úlohy vymyšlené autorkou diplomové práce.

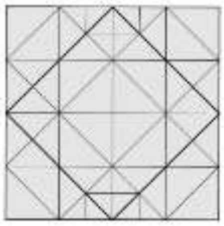


Obrázek 105: Ověření platnosti Pythagorovy věty (1. možnost)



Obrázek 106: Ověření platnosti Pythagorovy věty (2. možnost)

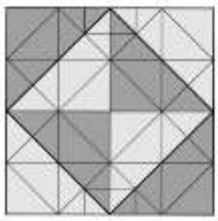
Obsah vepsaného čtverce



Obrázek 107: Vepsaný čtverec

Dokažte, že vepsaný čtverec s vrcholy ve středech stran původního čtverce má poloviční obsah.

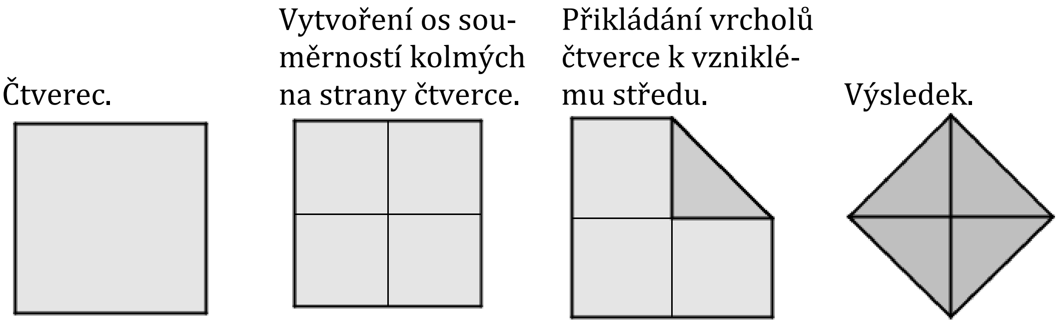
V podstatě jsou dvě možnosti, jak úlohu dokázat. První způsob je čistě vizuální a hledají se v něm stejné mnohoúhelníky, které budou vyplňovat jak celý obsah čtverce, tak čtverec vepsaný, nakonec se porovná jejich počet. Druhý je založen na několika překladech čtverce.



Obrázek 108: Obsah vepsaného čtverce

Rozdělíme čtverec podle přehybů na osm shodných pravoúhlých trojúhelníků. Díky tomu vidíme, že vepsaný čtverec je složen pouze ze čtyř trojúhelníků. Tedy počet trojúhelníků je poloviční, z toho vyplývá, že i obsah čtverce bude poloviční.

V druhém případě se vrátíme k několika prvním krokům, kterými začínalo skládání parníku.



Obrázek 109: Schéma ověření velikosti obsahu vepsaného čtverce

Z výsledku vidíme, že přeložená část papíru přesně překrývá zbytek čtverce. Máme tedy na sobě dvě vrstvy papíru o stejném obsahu. Zároveň vidíme, že výsledkem je čtverec, který má své vrcholy umístěny do středů stran původního čtverce. Z předchozích poznatků můžeme tedy vyvodit závěr, že výsledný čtverec má poloviční obsah.

Závěr

Před psaním diplomové práce jsem se nejprve snažila prostudovat co nejvíce dostupných materiálů, které propojují skládání papíru s matematikou. Z velkého množství různých knih, internetových stránek a videí jsem vybrala ty, které k tématu mají co říci, a na jejich základě jsem následně práci vystavěla. Neopomenutelnou součástí práce je množství obrázků, které jsem vytvářela v programu GeoGebra.

Teoretická část diplomové práce porovnává metody euklidovských konstrukcí s metodami využívajícími překládání papíru. Jsou zde podrobně rozebrány dvě známé úlohy (trisekce úhlu a duplikace krychle), jejichž řešení lze vymodelovat pomocí skládání papíru. Mým přínosem pro skládání papíru je komentář k Huzito-Hatoriovým axiomům. Práce odhaluje některé případy, pro které tyto tzv. axiomy neplatí.

Hlavním cílem práce bylo vytvoření souboru metodických listů pro učitele matematiky. Jejich úkolem je pomoci vyučujícím obohatit výuku matematiky o názornost a zvýšit motivaci žáků. V hodinách je možné využít metodických listů zaměřujících se na konkrétní učivo, nebo naopak těch, které obsahují sérii různých úloh.

Tvorba praktické části práce byla velkým přínosem i pro mne. Skládání papíru ráda využívám při svých hodinách matematiky. Například v úvodní hodině geometrie jsme s žáky zopakovali většinu geometrických pojmů pomocí složení parníku. Naopak při probírání trojúhelníku žáci sami díky překládání papíru odvodili velikost součtu vnitřních úhlů trojúhelníku. Z vlastní zkušenosti tak mohu říci, že občasné začlenění skládání papíru do hodin matematiky žáky nejen více motivuje a nabízí jim učení hravou formou, ale především je učí vidět věci v souvislostech a rozvíjí kompetenci k řešení problémů.

Závěrem bych chtěla uvést, že podle mého názoru si skládání papíru v hodinách matematiky své místo zaslouží. V první kapitole popisuji několik výdobytků moderní techniky, které jsou zkonstruovány právě na základě znalosti skládání papíru. Žáci by tak měli možnost se v budoucnu seberealizovat v některé z těchto oblastí moderní techniky.

Seznam použité literatury

[Bečvář, 2008] BEČVÁŘ, Jindřich. *Astronomie pro všechny* [online]. Valašské Meziříčí: Hvězdárna Valašské Meziříčí p.o. Zlínského kraje, 2008 [cit. 2017-02-13]. Dostupné z: http://www.astrovm.cz/userfiles/file/projekty/apv/sbornik_apv.pdf

[Calda, 1995] CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia: komplexní čísla*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1995, 133 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-85849-85-2.

[Grebeníček, 2002] *Geometrie a origami: Huzitovy axiomy origami* [online]. Grebeníček, 2002 [cit. 2017-02-02]. Dostupné z: http://www.origami.cz/Geometrie/axiomy.html

[Grebeníček, 2012] *Origami Wiki: Papír* [online]. Praha: František Grebeníček, 2012 [cit. 2017-03-03]. Dostupné z: http://new.origami.cz/index.php/Pap%C3%ADr

[Heath, 1921] HEATH, Thomas Little. *A history of Greek mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1921.

[Henríguez, 2008] *No vale cortar: Puntos constructibles y origami* [online]. Telca (Chile): Nicolás Gajardo Henríquez, 2008 [cit. 2017-03-11]. Dostupné z: http://novalecortar.blogspot.cz/2008/11/puntos-constructibles-y-origami.html

[Hlavatý, 1949] HLAVATÝ, Václav. *Úvod do neeuklidovské geometrie*. 2. vyd. Praha: Jednota českosl. matematiků a fysiků, 1949. Kruh (Jednota československých matematiků a fysiků).

[Hull, 2013] HULL, Thomas. *Project origami: activities for exploring mathematics*. Second edition. CRC Press, 2013. ISBN 978-146-6567-917.

[Chajda, 2O11] CHAJDA, Ivan. O trisekci úhlu. *Matematika, fyzika, informatika : časopis pro výuku na základních a středních školách*. Praha: Prometheus, 2011, 20(8), 449-454. ISSN 1210-1761.

[Chmelíková, 2009] CHMELÍKOVÁ, Vlasta. *Zlatý řez nejen v matematice*. V Praze: Matfyzpress, 2009, 180 s. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-7378-078-4.

[Kasahara, 2001] KASAHARA, Kunihiko. *Amazing origami*. New York: Sterling Pub., c2001. ISBN 08-069-5821-9.

[Krynický, 2010] KRYNICKÝ, Martin. *Matematika SŠ.realisticky.cz: Příklady na posunutí* [online]. 1. Třeboň, 2010 [cit. 2017-06-03]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20S%C5%A0/03%20Planimetrie/05%20Zobrazen%C3%AD%20v%20rovin%C4%9B/07%20P%C5%99%C3%ADklady%20na%20posunut%C3%AD.pdf

[Křížová, 2008] KŘÍŽOVÁ, Kristýna. *Neeuklidovská geometrie* [online]. Brno, 2008 [cit. 2017-03-18]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/175713/prif_b/bp.pdf. Bakalářská práce. Masarykova univerzita

[Kuřina, 1996] KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii*. Praha: Matematický ústav Akademie věd České republiky, 1996, 249 s. ISBN 80-85823-21-7.

[Kupčáková, 1999] KUPČÁKOVÁ. *Modelování těles – Návrhy pro geometrické praktikum, Učitel matematiky.* Praha: JČMF, 1999, ISSN 1210-9037

[Kupčáková, 2009] KUPČÁKOVÁ, Marie. *Geometrie ve světě dětí i dospělých*. 3. vyd. Hradec Králové: Gaudeamus, 2009. ISBN 978-80-7041-683-9.

[Lang, 2004] Robert J. Lang Origami: Huzita-Justin Axioms. [online]. Robert J. Lang, 2004 [cit. 2017-03-02]. Dostupné z: http://www.langorigami.com/article/huzita-justin-axioms

[Lang, 2008] LANG, Robert. *From Flapping Birds to Space Telescopes: The Modern Science of Origami* [online]. Boston: Usenix Conference, 2008, , 1-53 [cit. 2017-02-14]. Dostupné z: http://static.usenix.org/event/usenix08/tech/slides/lang.pdf

[Lang, 2008] The math and magic of origami / Robert Lang, 2008. In: *Youtube* [online]. 31.7.2008 [cit 2017-11-2]. Dostupné z https://www.youtube.com/watch?v=NYKcOFQCeno. Kanál uživatele TED

[Mareš, 2011] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd*. 2., rev. vyd. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2011, 334 s. ISBN 978-80-87053-64-5.

[Morales, 2009] MORALES, Marcel a Alice MORALES. *Star and convex regular polyhedra by Origami: Build polyhedra by Origami* [online]. Edition Morales, 2009 [cit. 2017-02-18]. Dostupné z: http://docplayer.net/6799694-Star-and-convex-regular-polyhedra-by-origami.html

[Montroll, 2012] MONTROLL, John. *Origami and math: simple to complex*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, c2012. ISBN 04-864-8886-1

[Nguyen, 2014] NGUYEN, Duy. *Svět origami*. Praha: Ikar, 2014, 512 s. ISBN 978-80-249-2597-4.

[ORC, 2016] Gold, Silver and Bronze Rectangles. *Origami Resource Center: Know When to Fold* [online]. 2016 [cit. 2017-02-18]. Dostupné z: http://www.origami-resource-center.com/gold-silver-bronze-paper.html

[Polster, 2014] POLSTER, Burkard. *Q.E.D.: krása matematického důkazu*. Praha: Dokořán, 2014, 58 s. Pergamen. ISBN 978-80-7363-532-9.

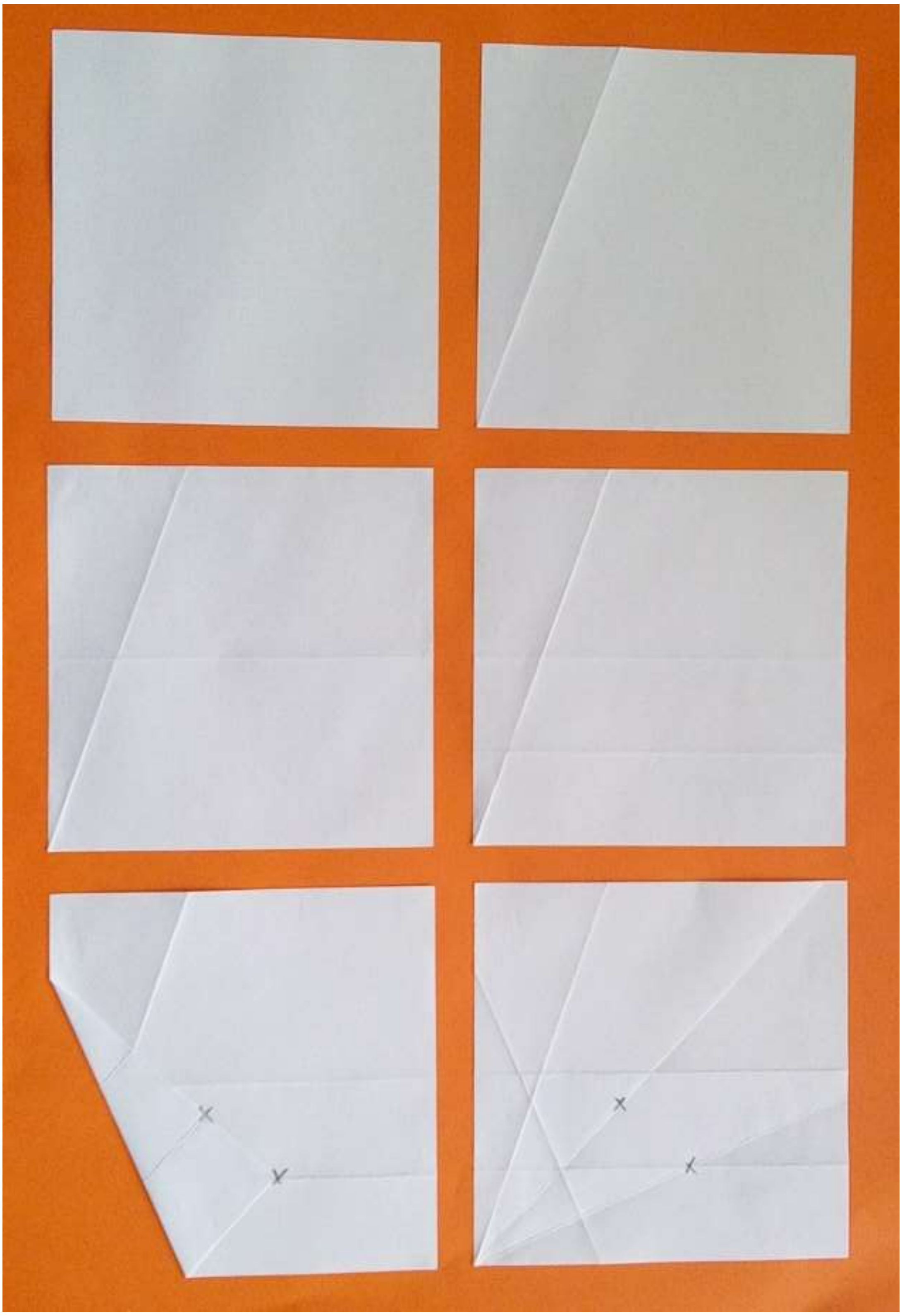
[Svobodová, 2006] *Tvary papíru* [online]. Svobodová, 2006 [cit. 2017-03-20]. Dostupné z: http://origami.webz.cz/matematika/pdf/tvarypapiru.pdf

[Svobodová, 2006] Origami: Historie origami. *Origami* [online]. Svobodová, 2006 [cit. 2017-03-02]. Dostupné z: http://origami.webz.cz/historie.htm

[Zirbel, 2014] Can origami advance space exploration? | Shannon Zirbel | TEDxPeachtree, 2014. In: *Youtube* [online]. 24.11.2014 [cit 2017-16-2]. Dostupné z https://www.youtube.com/watch?v=a0x0r7aPI2M. Kanál uživatele TEDx Talks

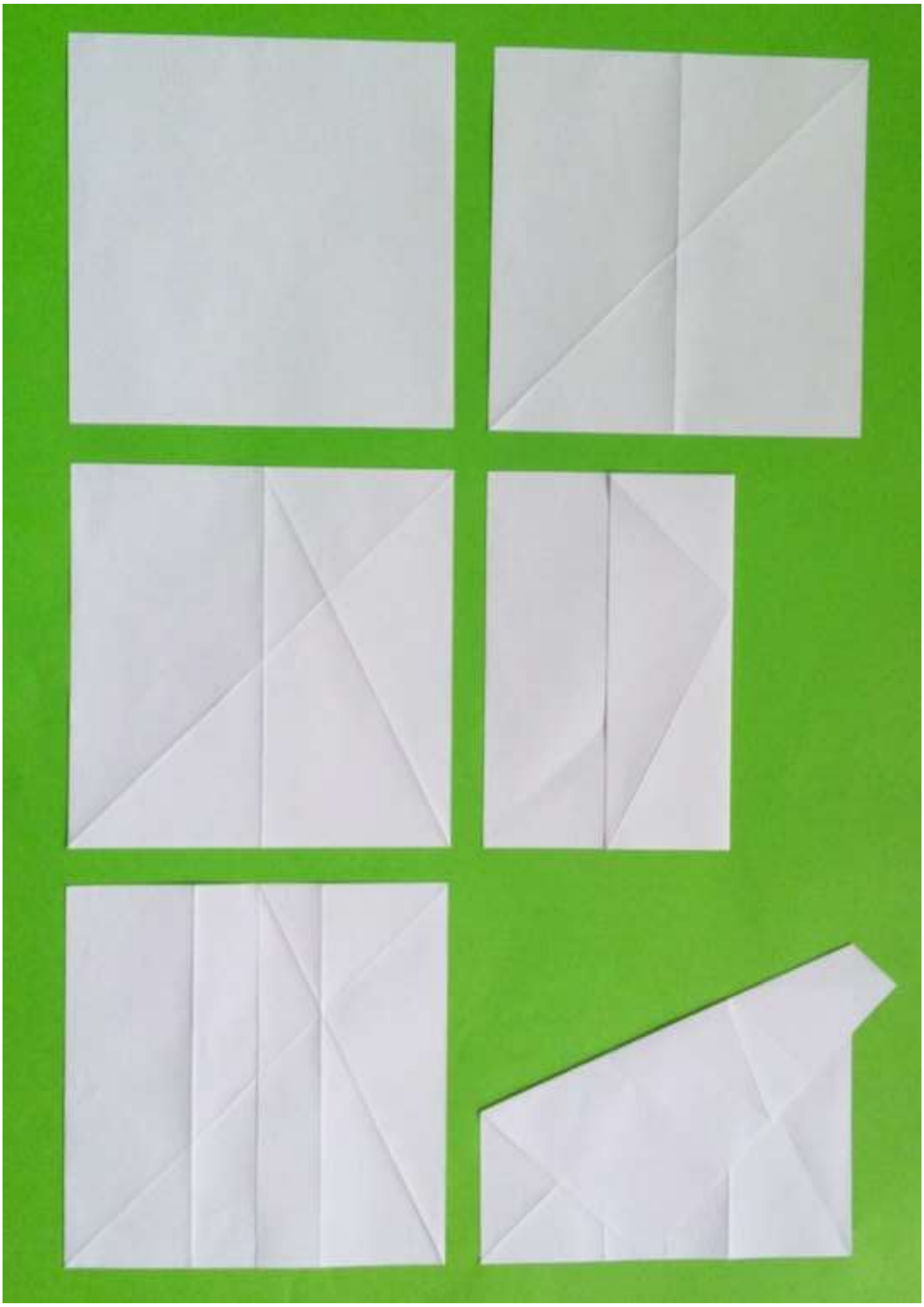
Přílohy

Příloha č. 1



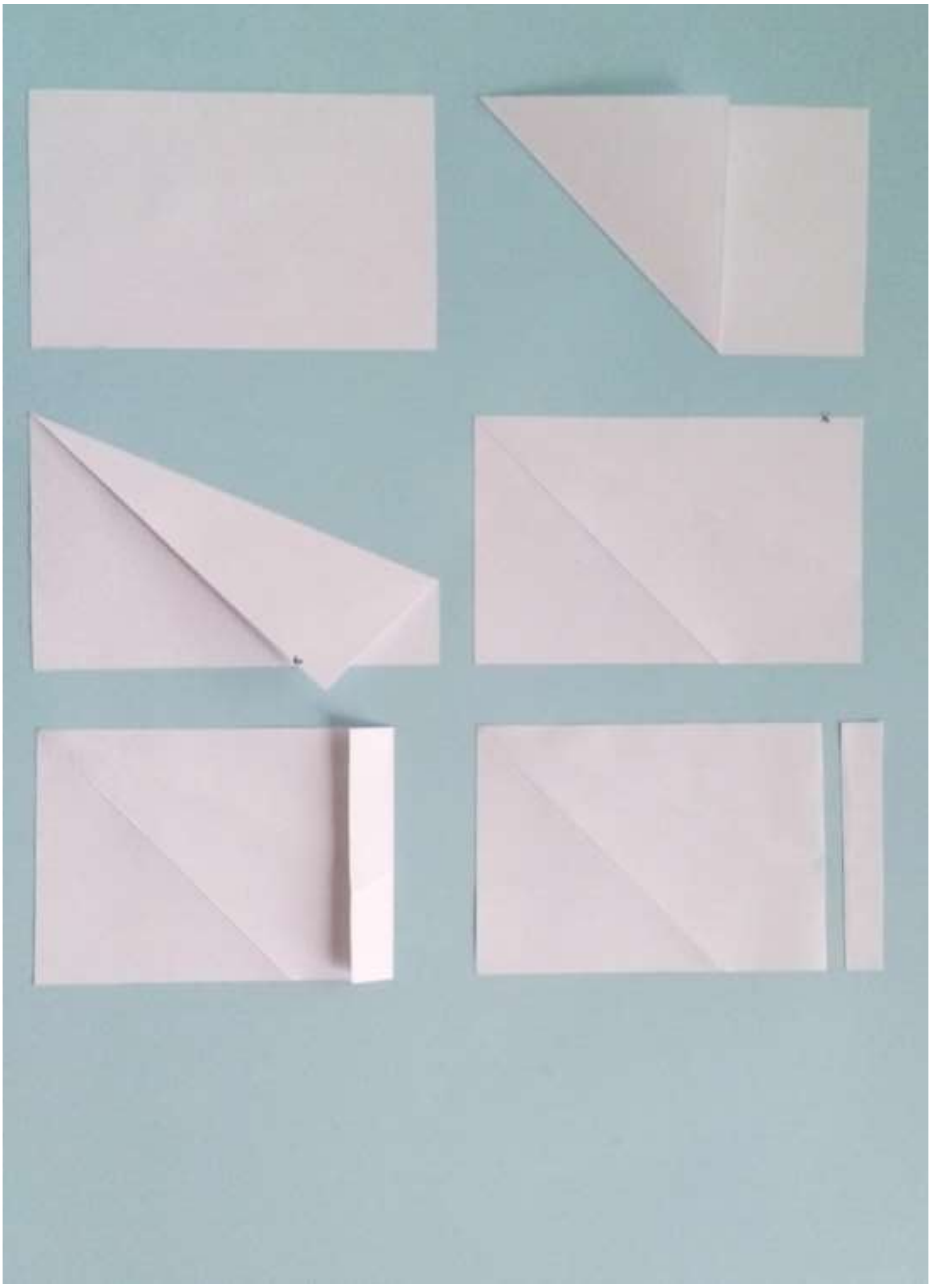
Obrázek 110: Trisekce úhlu

Příloha č. 2



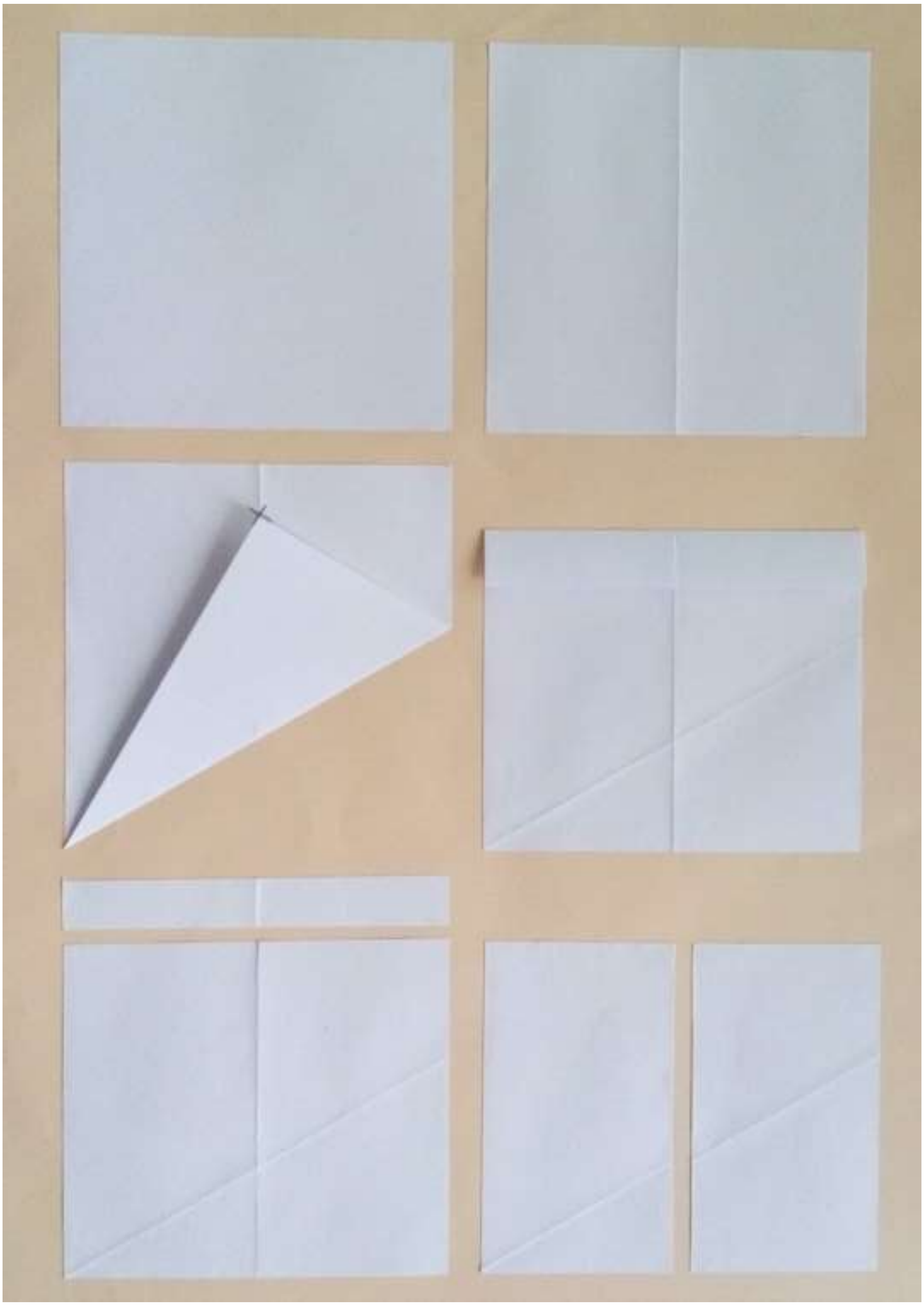
Obrázek 111: Duplikace krychle

Příloha č. 3



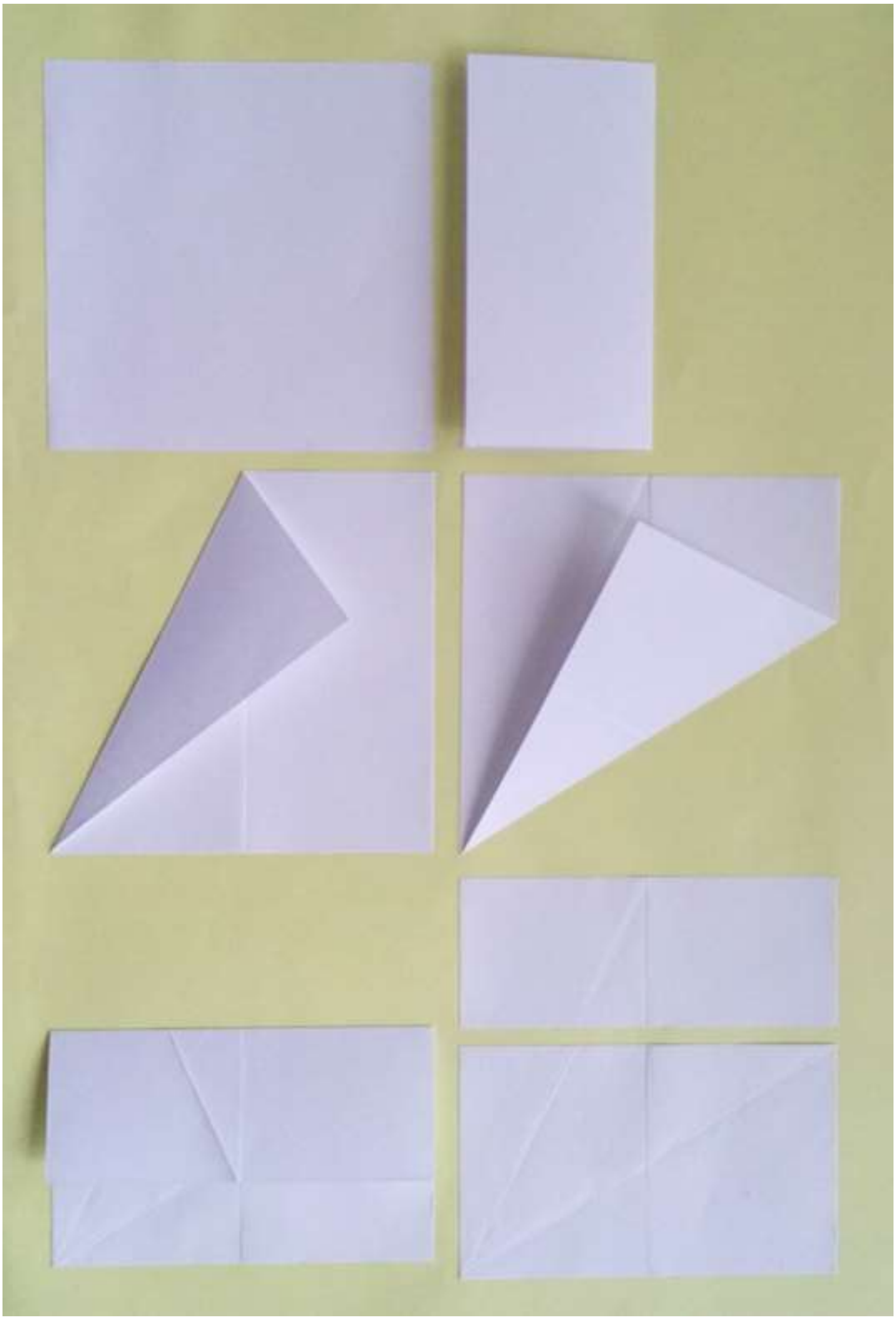
Obrázek 112: Stříbrný obdélník

Příloha č. 4



Obrázek 113: Bronzový obdélník

Příloha č. 5

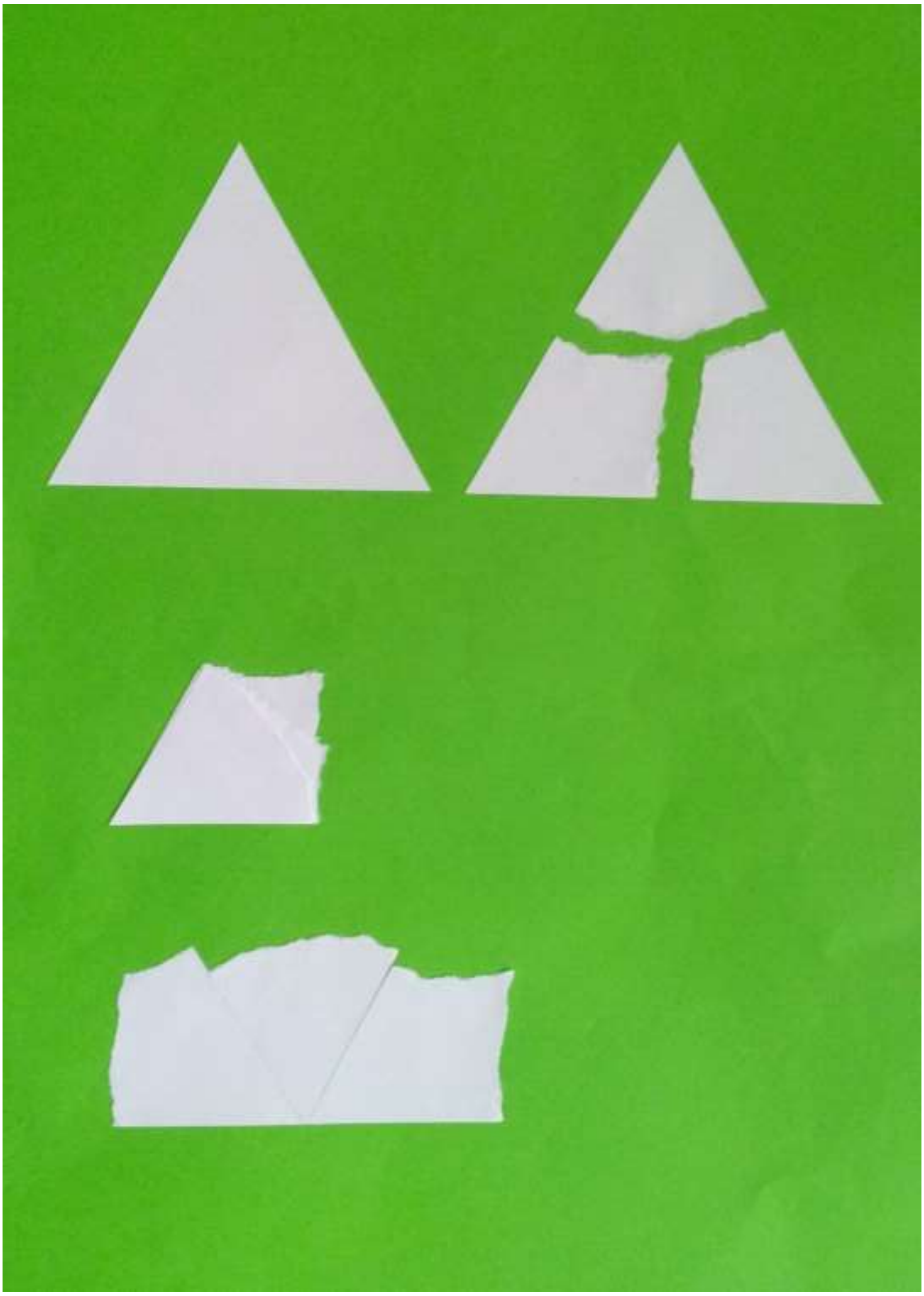


Obrázek 114: Zlatý obdélník

Příloha č. 6

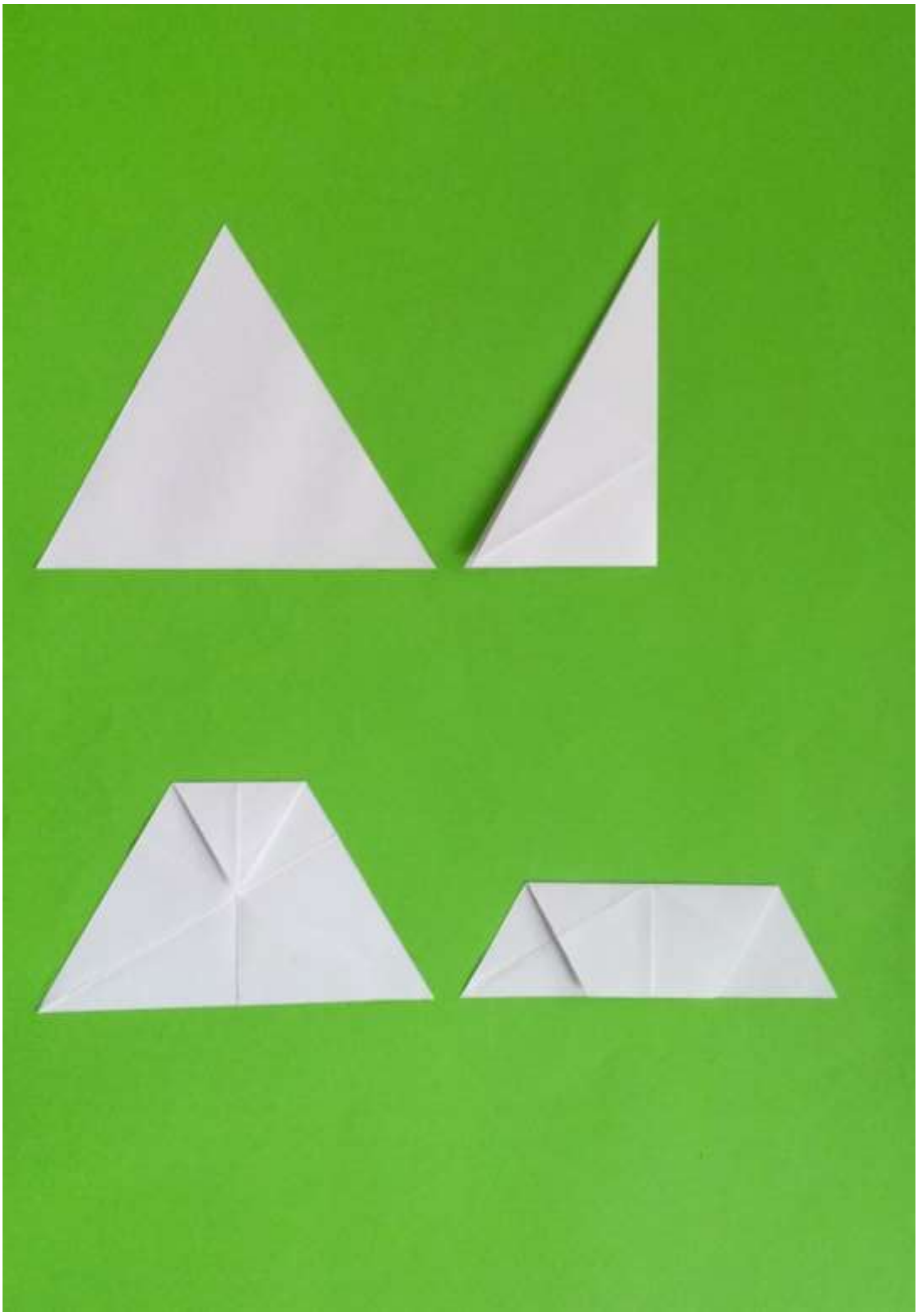
Obrázek 115: Rovnostranný trojúhelník

Příloha č. 7



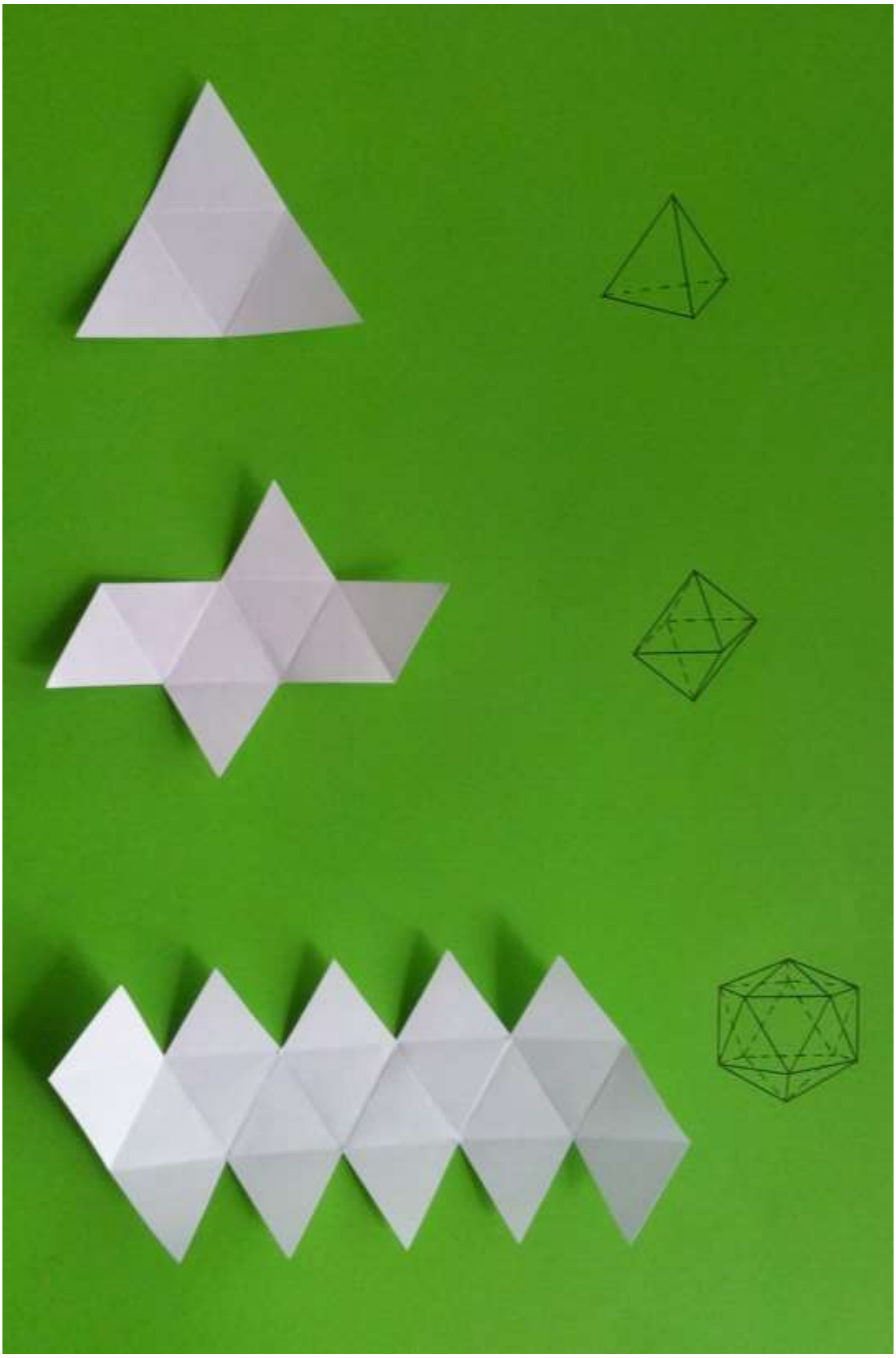
Obrázek 116: Vnitřní úhly v rovnostranném trojúhelníku

Příloha č. 8



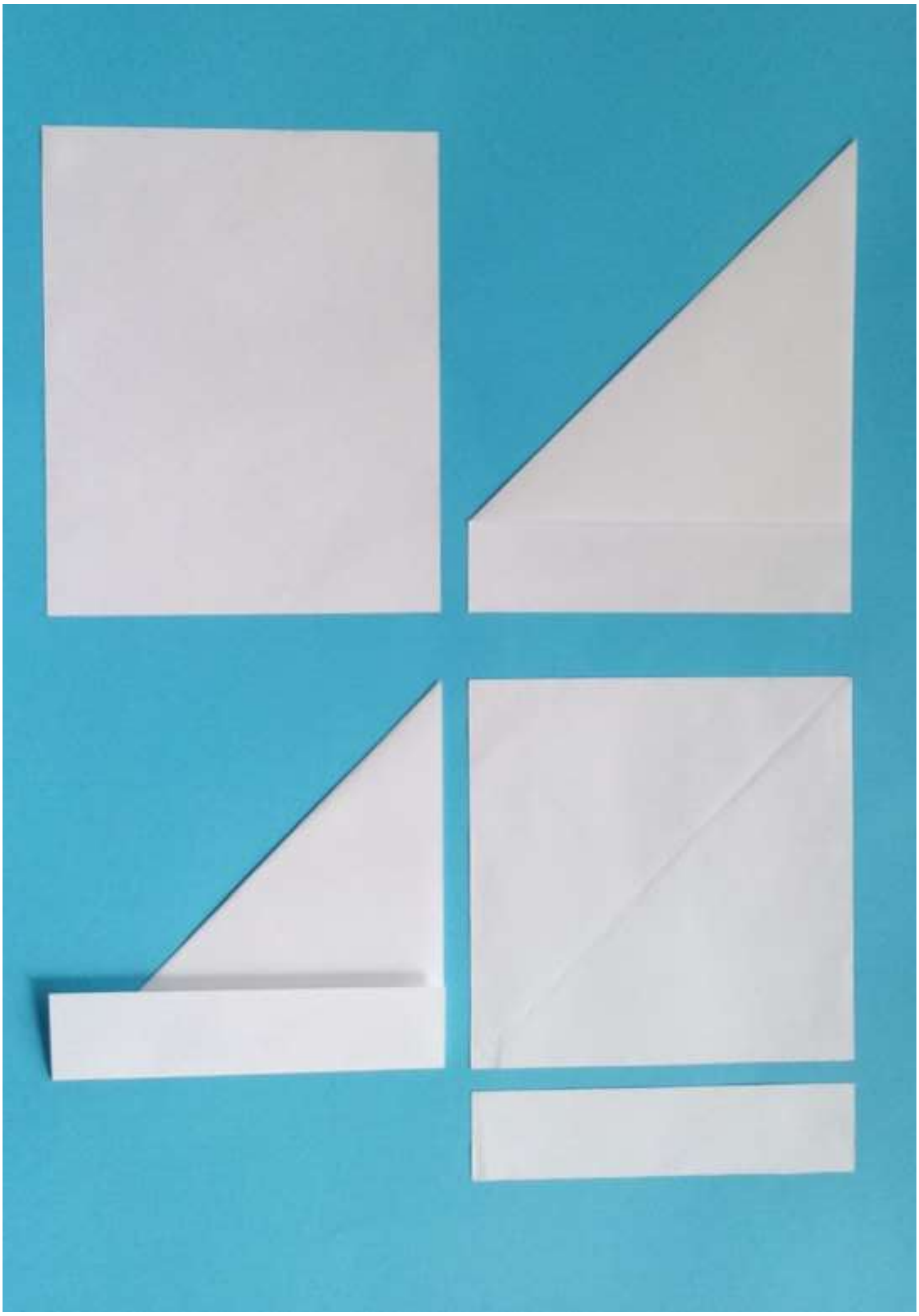
Obrázek 117: Těžnice v rovnostranném trojúhelníku

Příloha č. 9



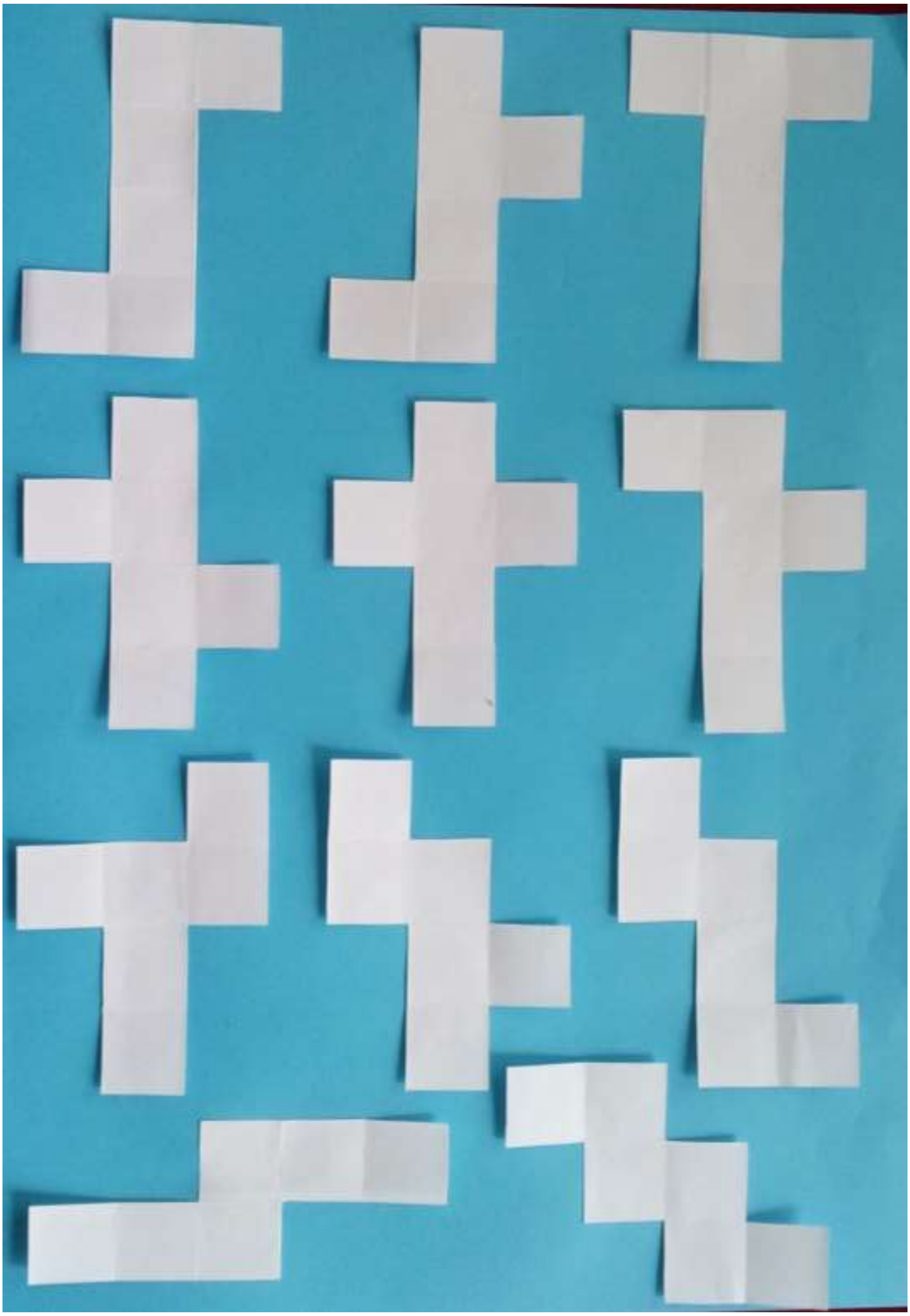
Obrázek 118: Pravidelný čtyřstěn, osmistěn a dvacetistěn

Příloha č. 10



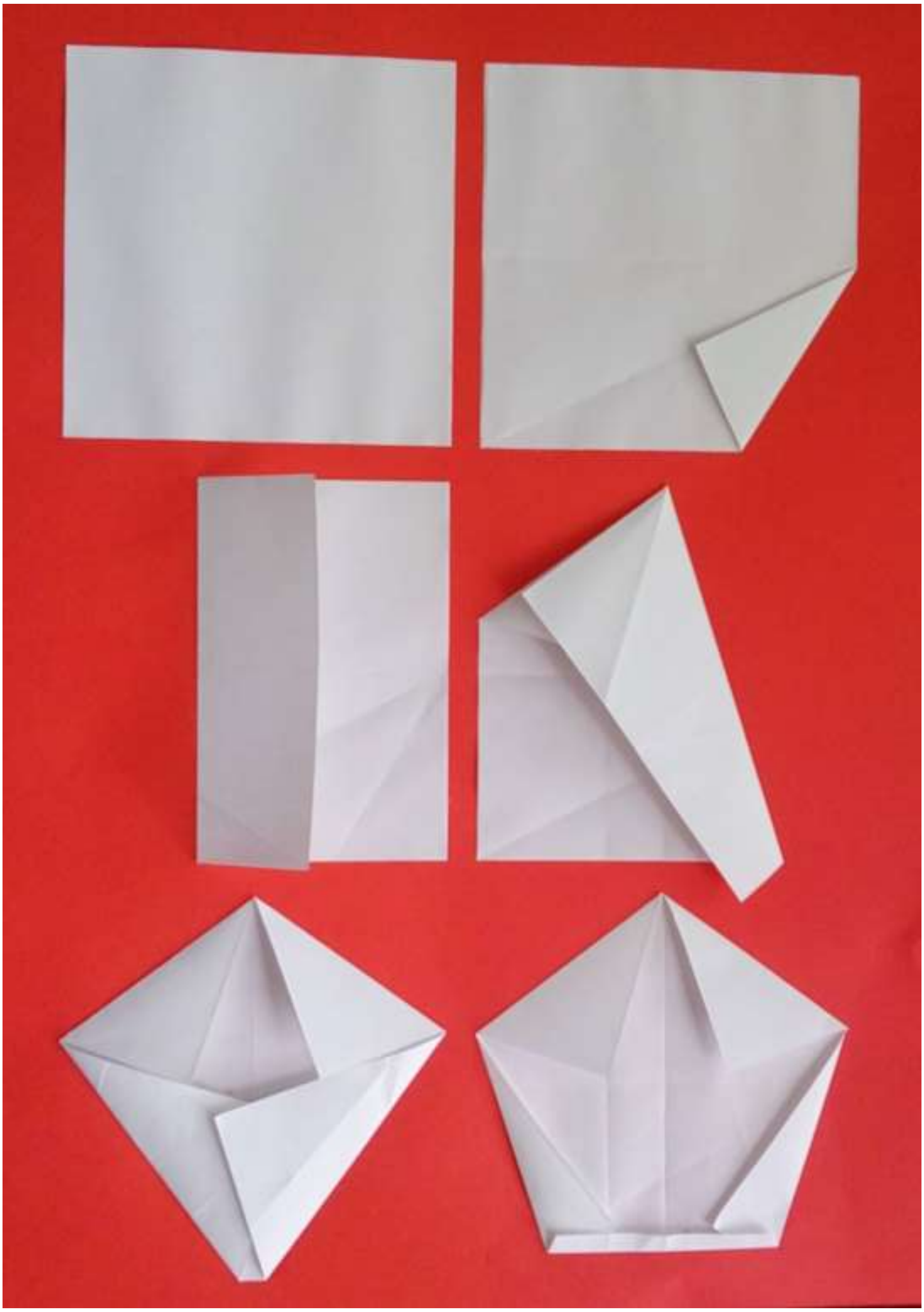
Obrázek 119: Čtverec

Příloha č. 11



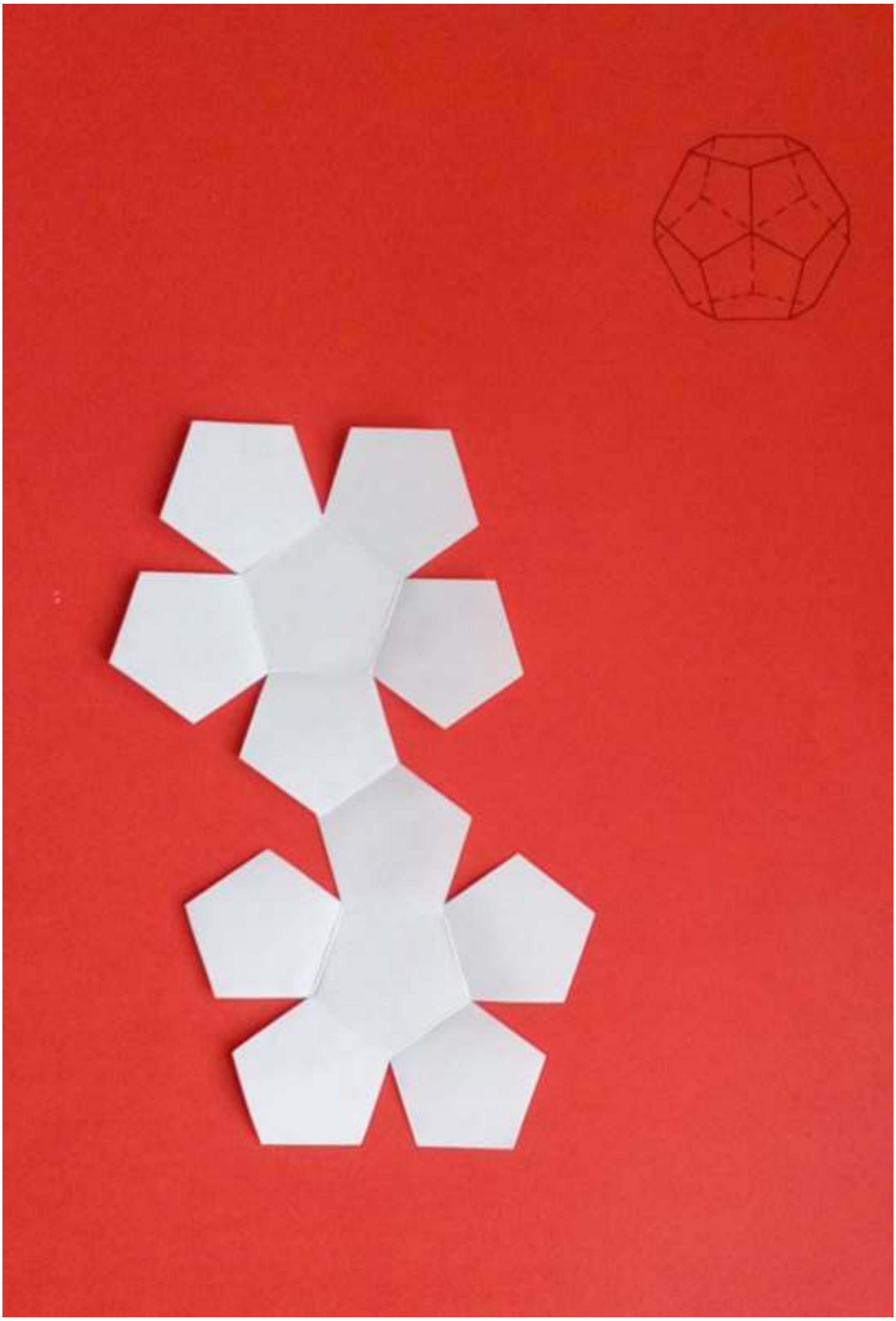
Obrázek 120: Sítě krychle

Příloha č. 12



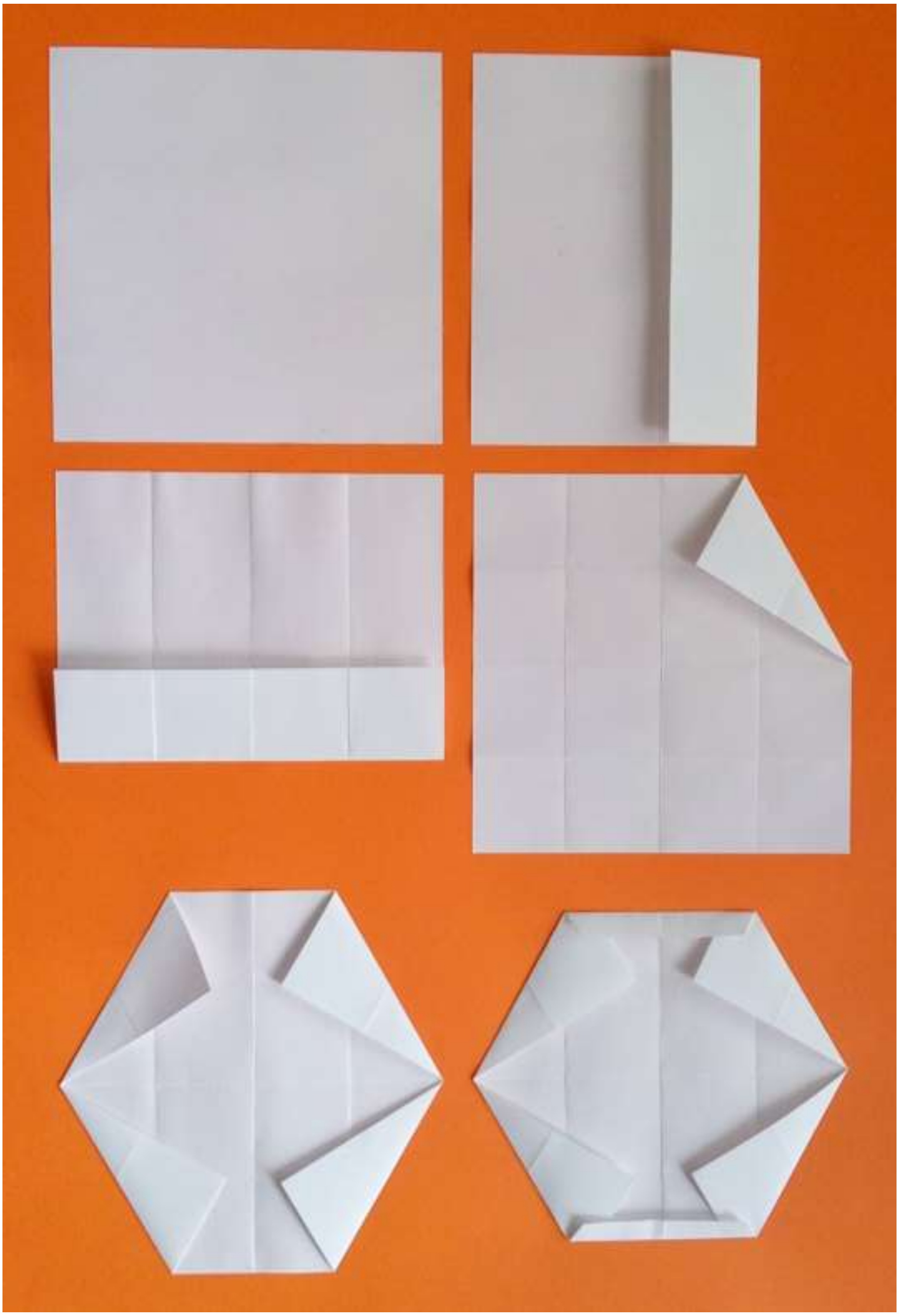
Obrázek 121: Pravidelný pětiúhelník

Příloha č. 13



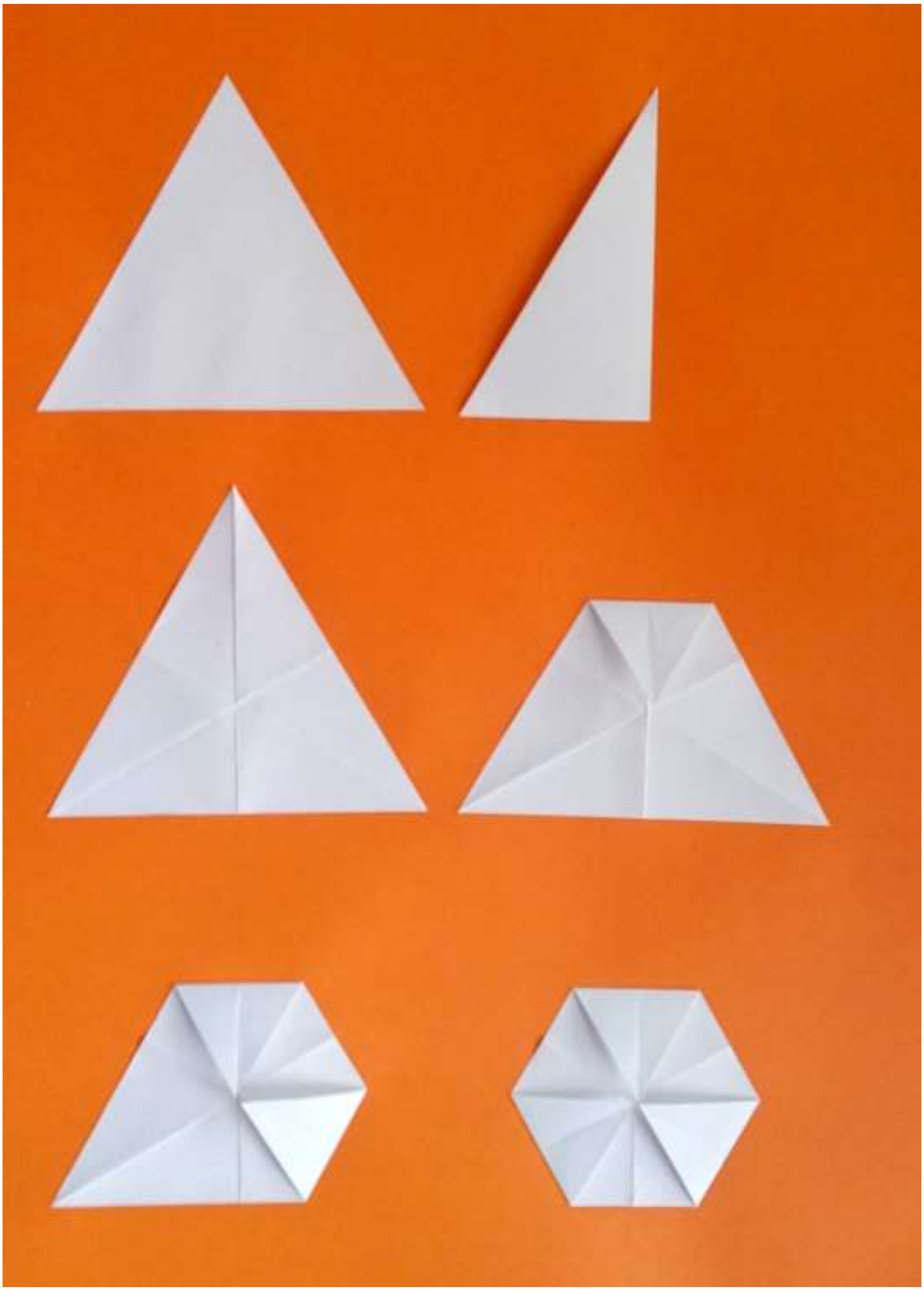
Obrázek 122: Pravidelný dvanáctistěn

Příloha č. 14



Obrázek 123: Pravidelný šestiúhelník (1. možnost)

Příloha č. 15

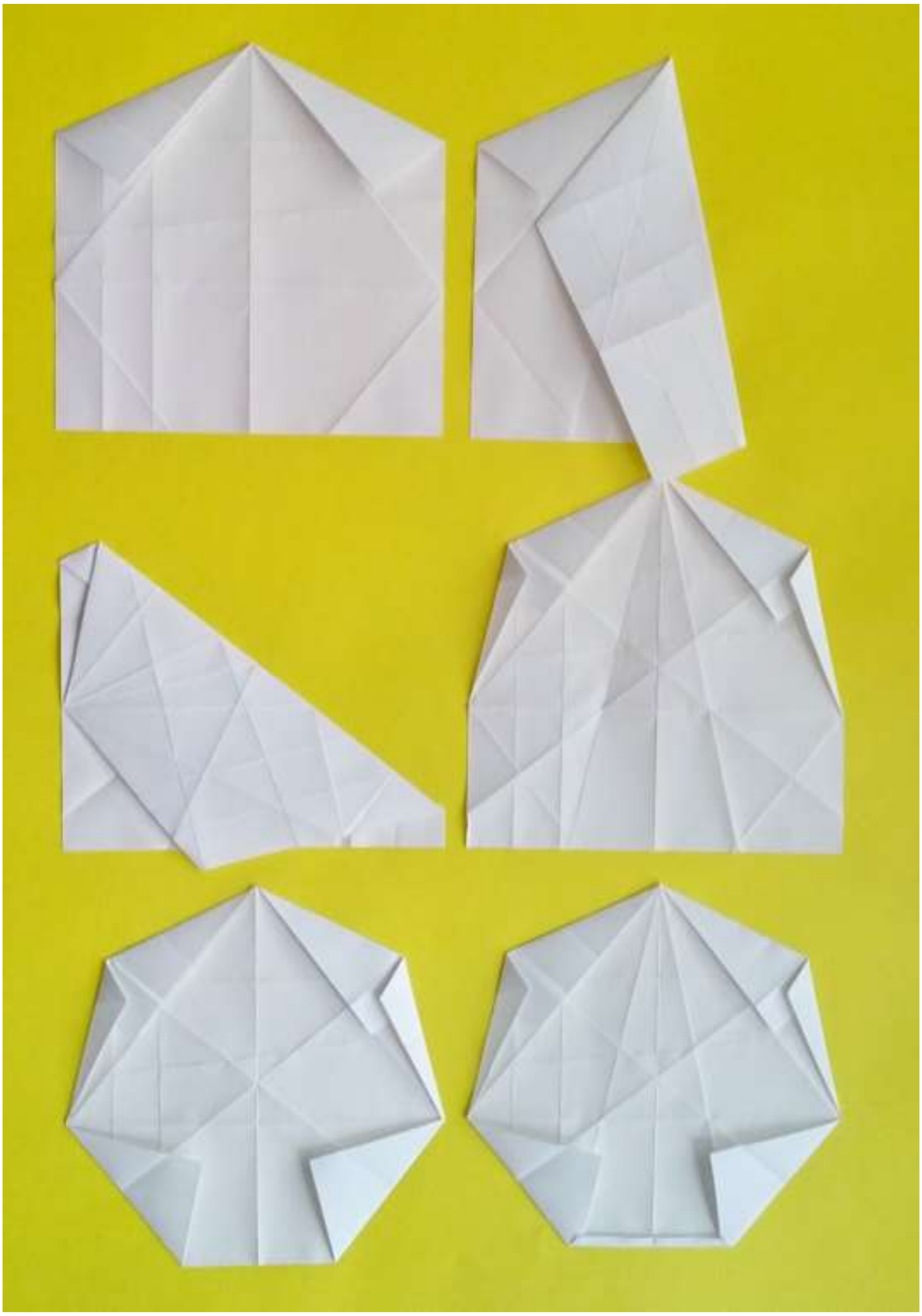


Obrázek 124: Pravidelný šestiúhelník (2. možnost)

Příloha č. 16

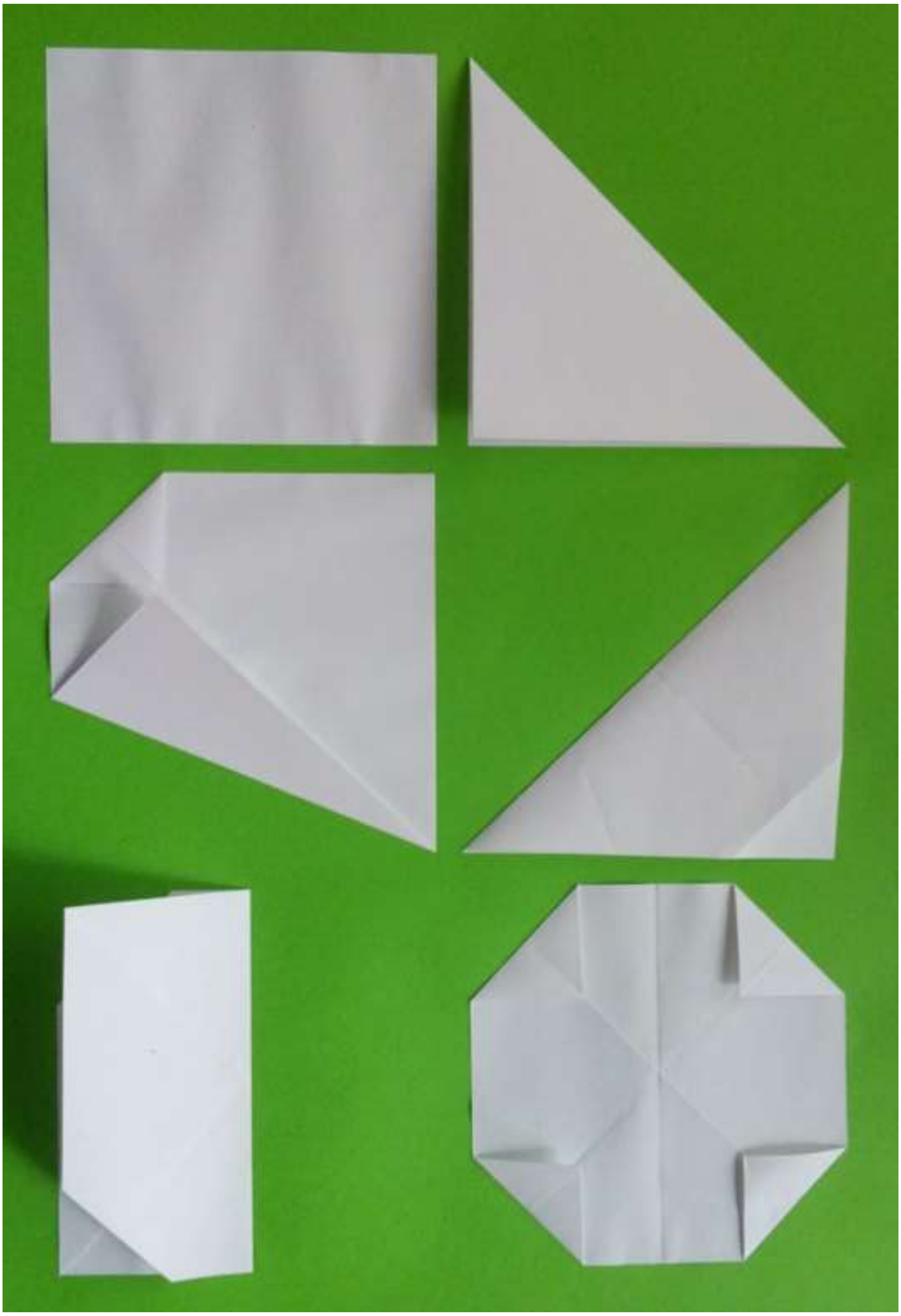
Obrázek 125: Pravidelný sedmiúhelník (1. část)

Příloha č. 17



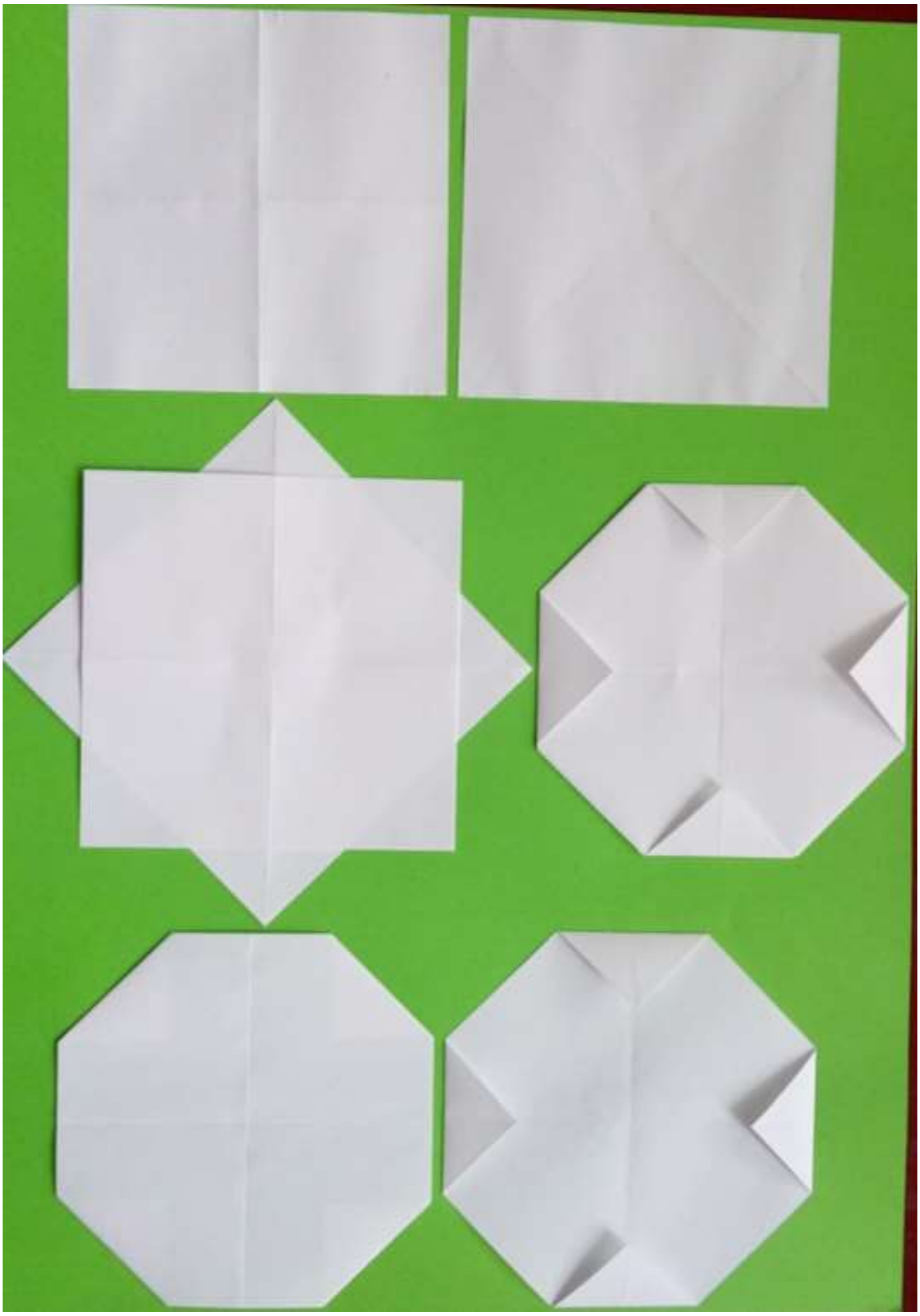
Obrázek 126: Pravidelný sedmiúhelník (2. část)

Příloha č. 18



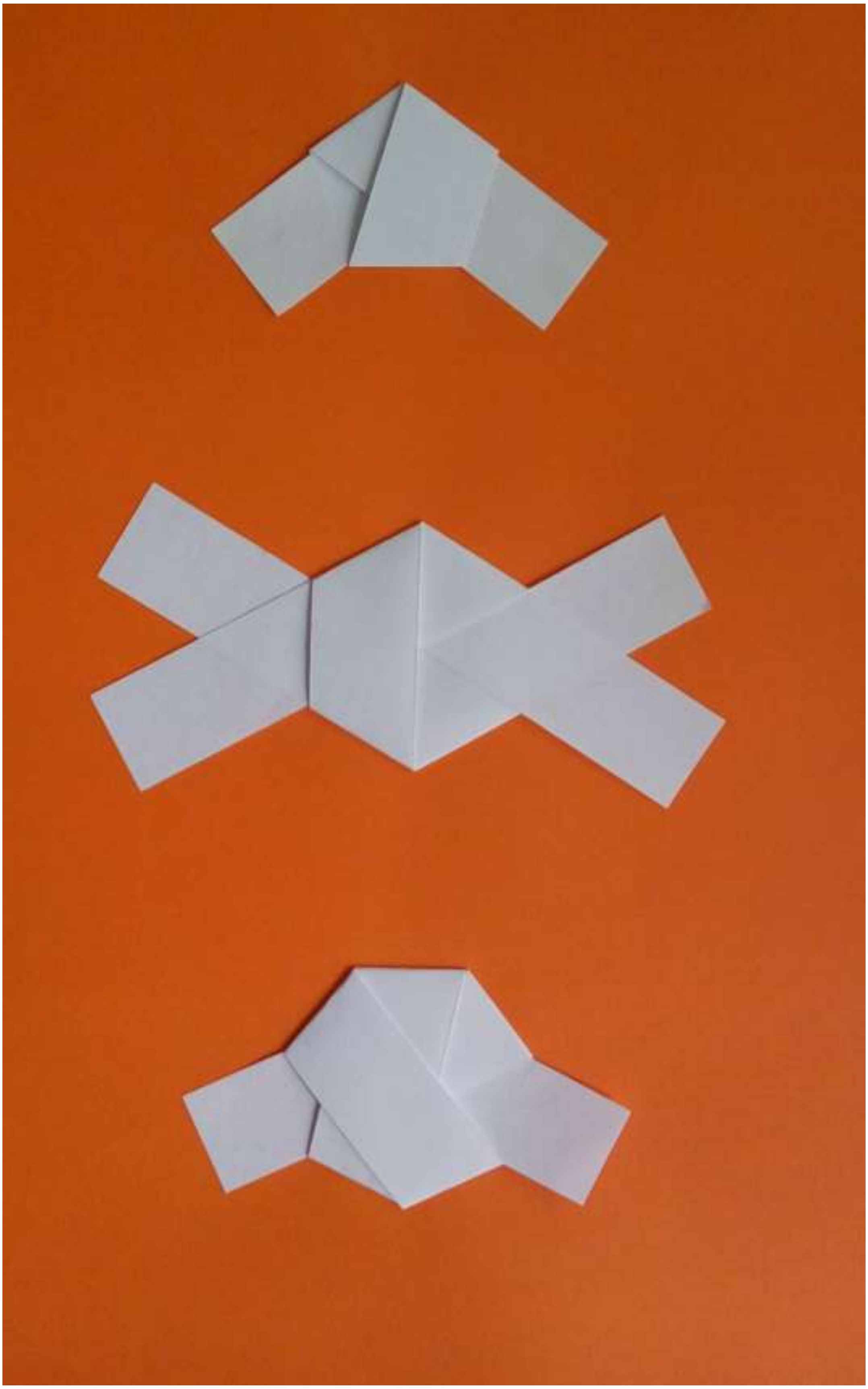
Obrázek 127: Pravidelný osmiúhelník (1. možnost)

Příloha č. 19



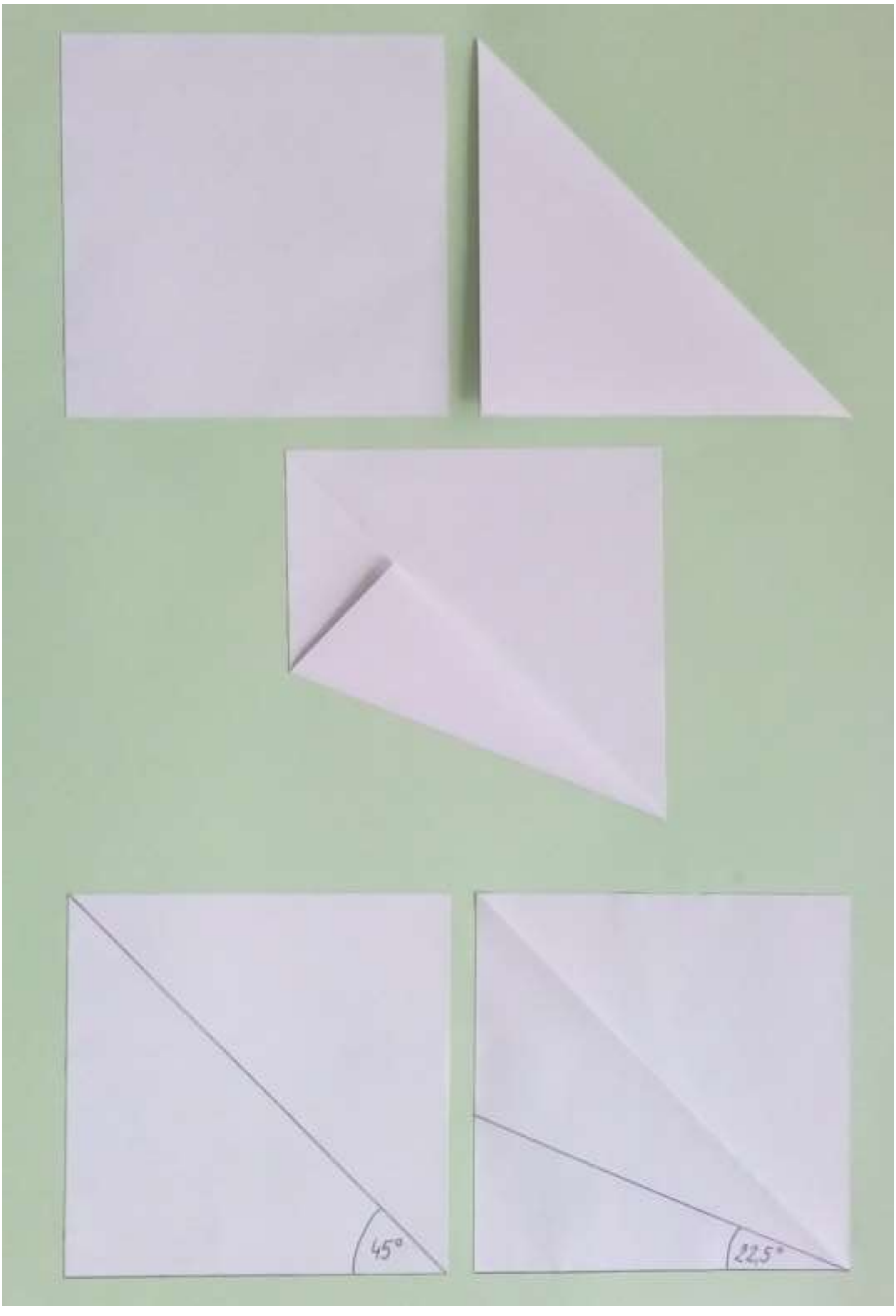
Obrázek 128: Pravidelný osmiúhelník (2. možnost)

Příloha č. 20



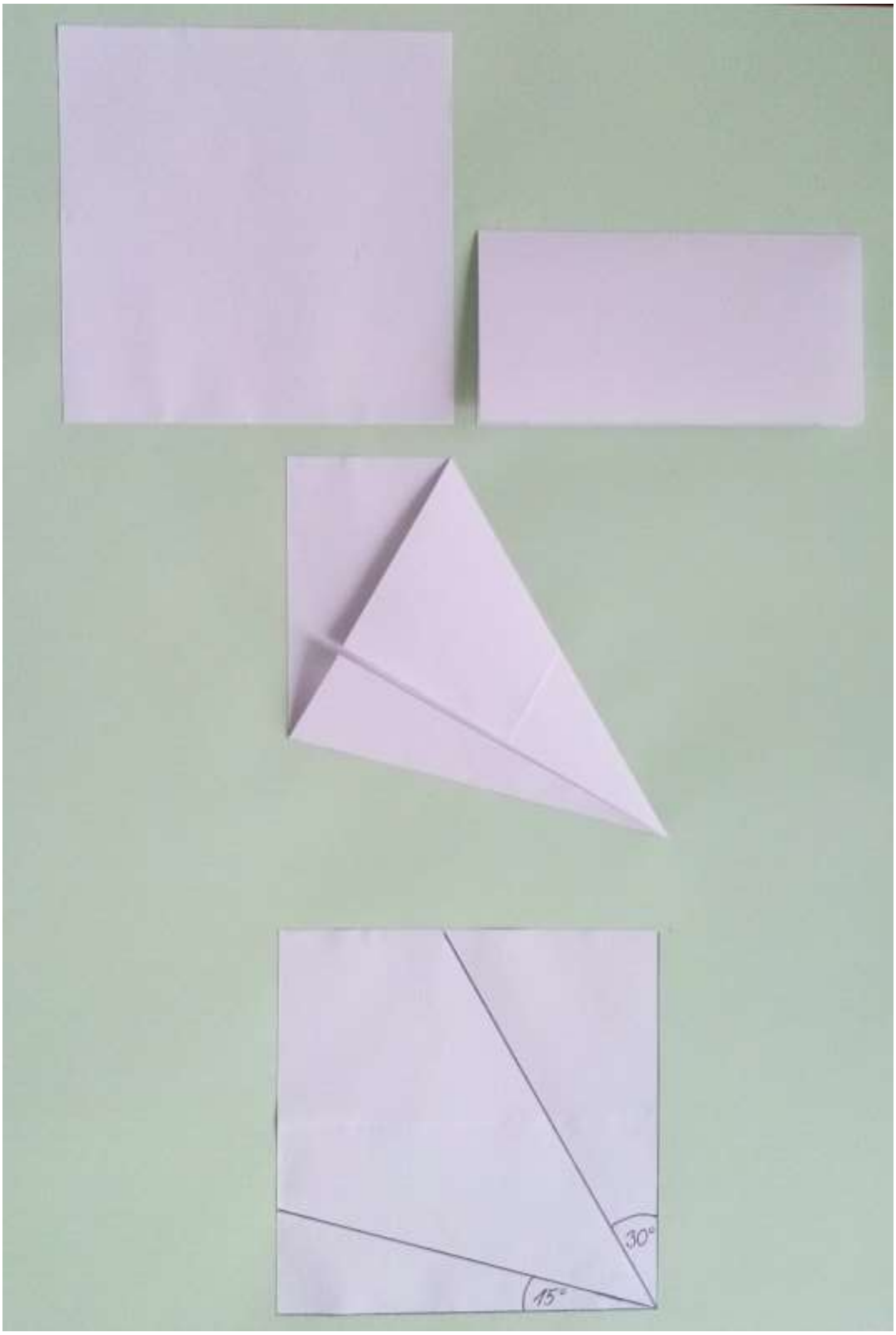
Obrázek 129: Pravidelný pětiúhelník, šestiúhelník a sedmiúhelník na proužcích papíru

Příloha č. 21



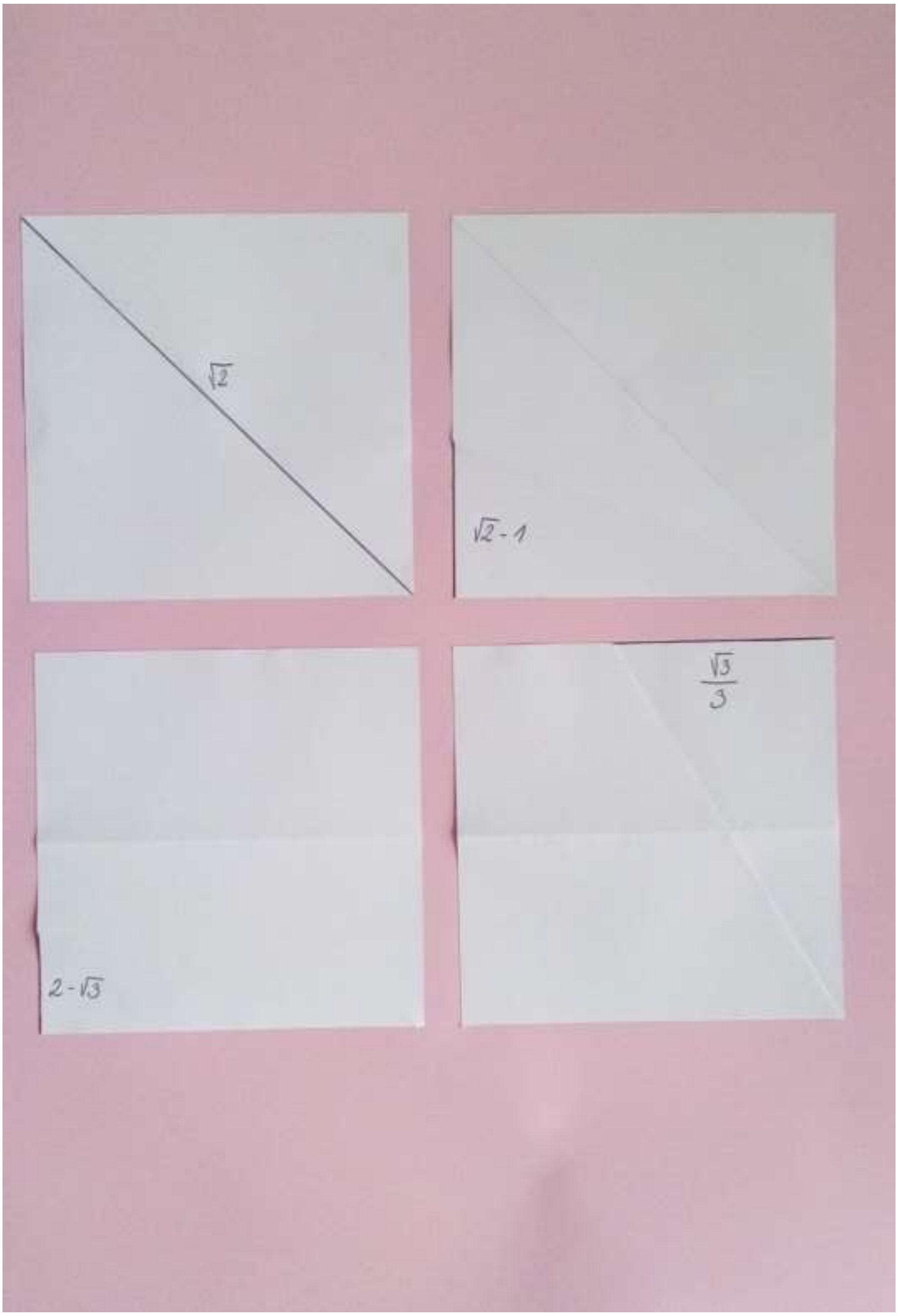
Obrázek 130: Úhel 45° a 22,5°

Příloha č. 22



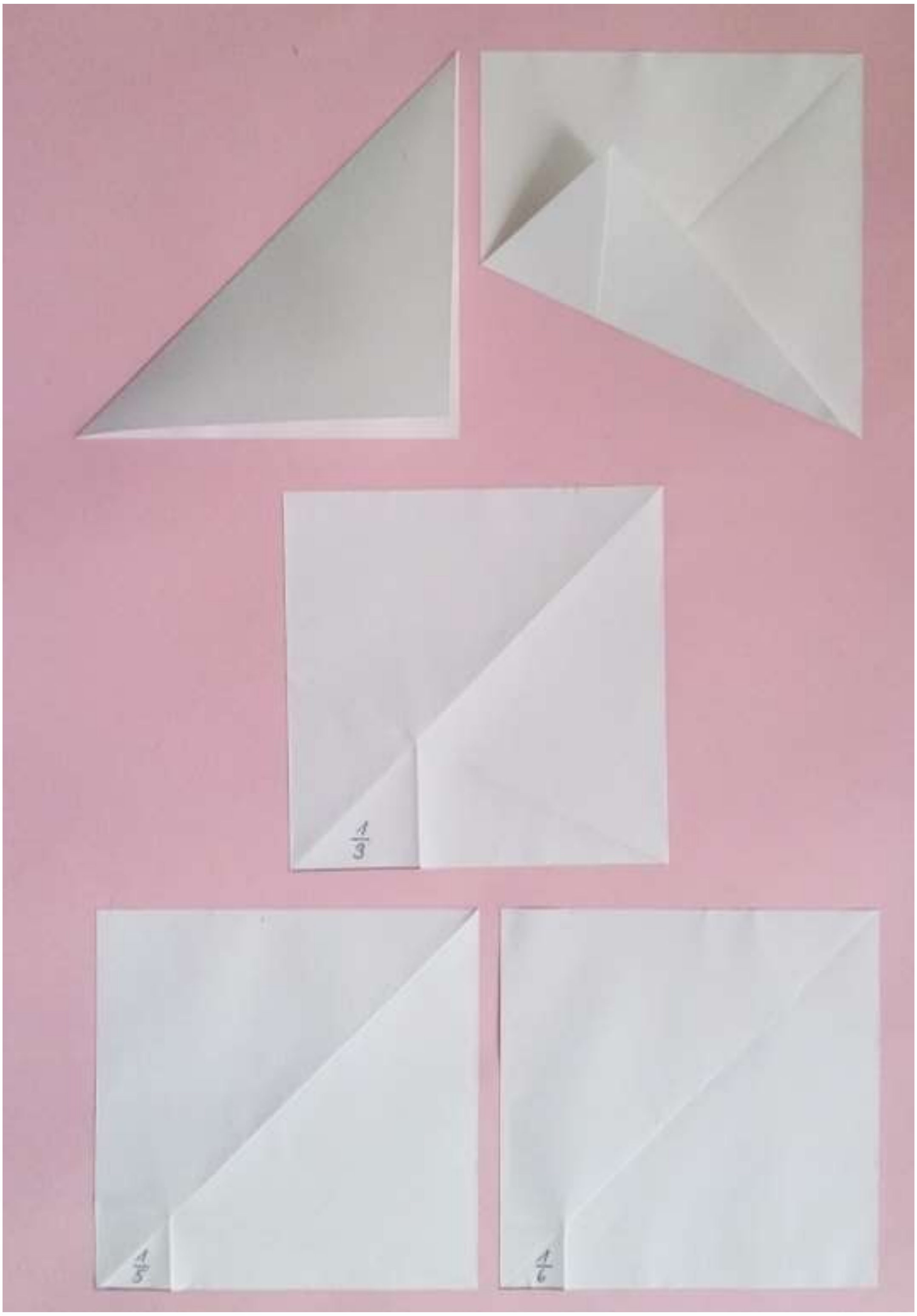
Obrázek 131: Úhel 30° a 15°

Příloha č. 23



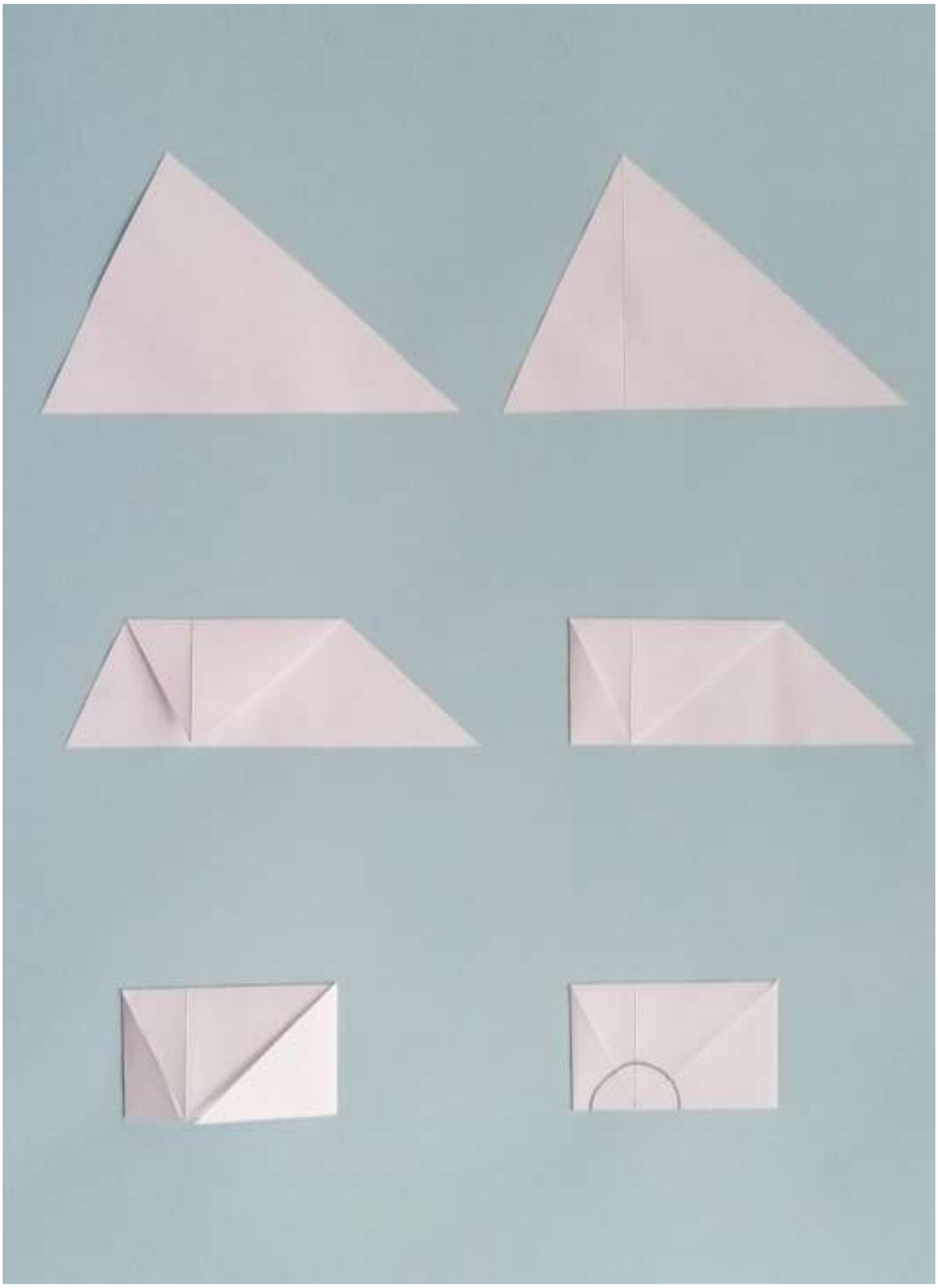
Obrázek 132: Iracionální čísla

Příloha č. 24



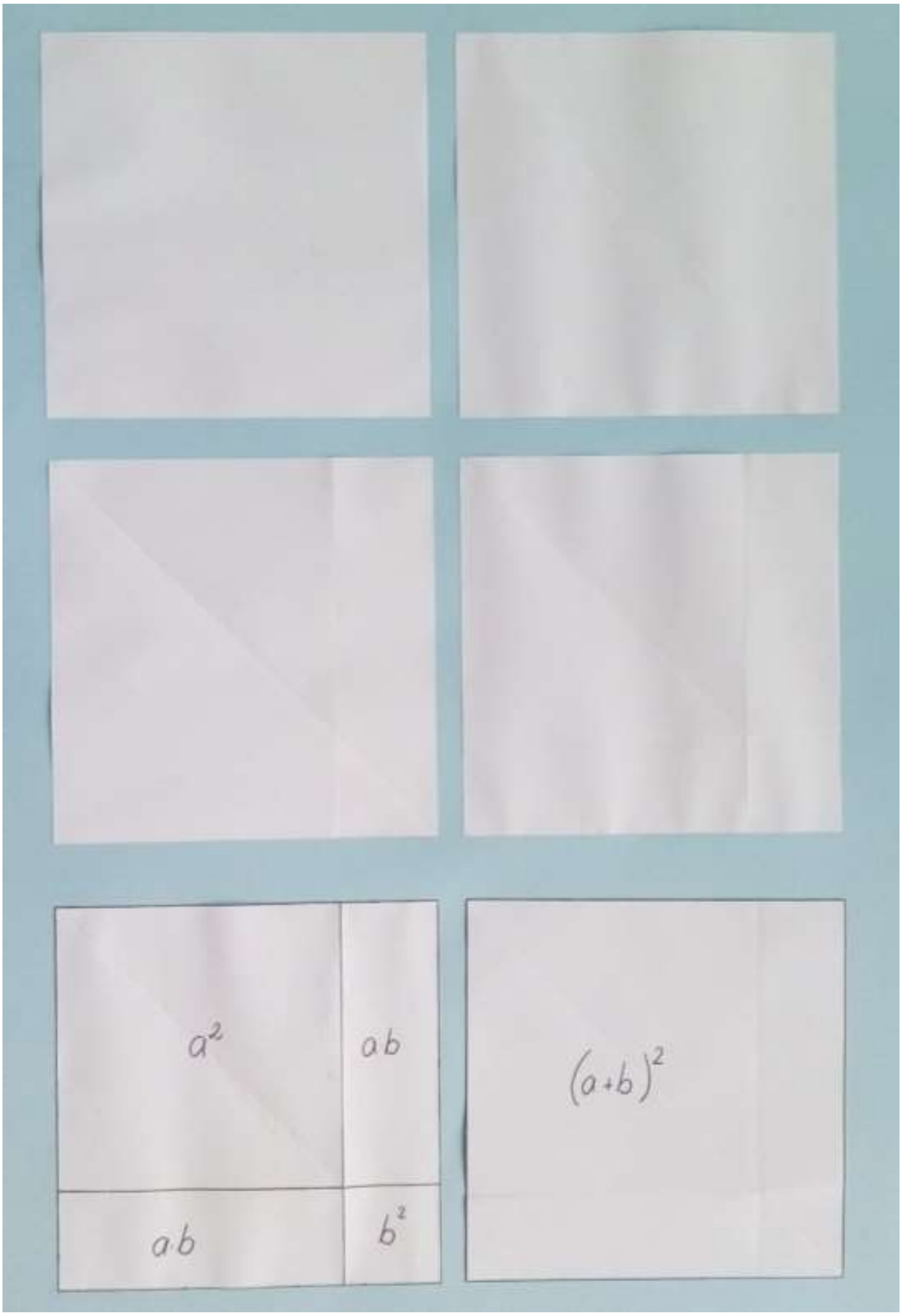
Obrázek 133: Racionální čísla

Příloha č. 25



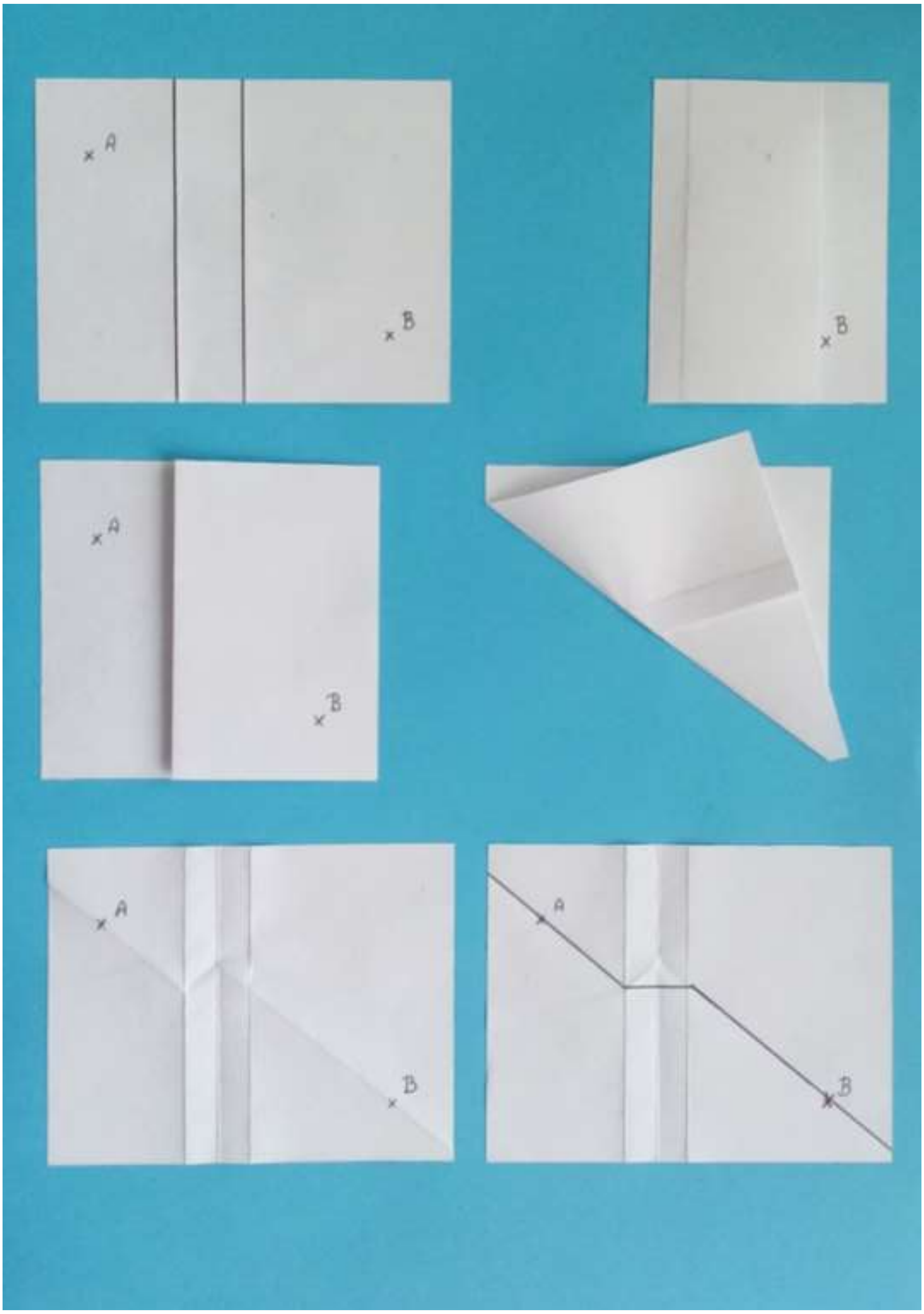
Obrázek 134: Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku

Příloha č. 26



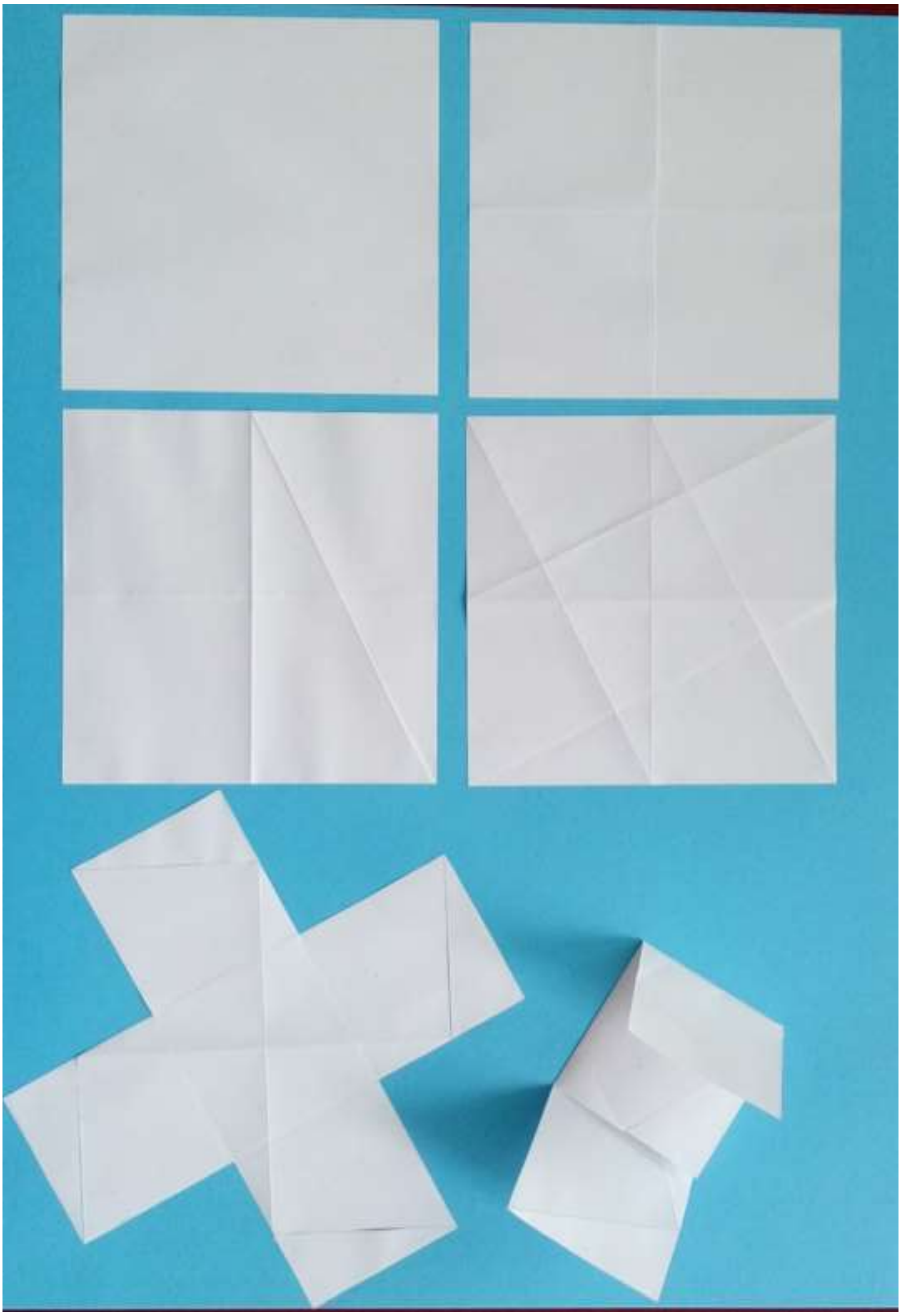
Obrázek 135: Vzorec pro druhou mocninu součtu dvou čísel

Příloha č. 27



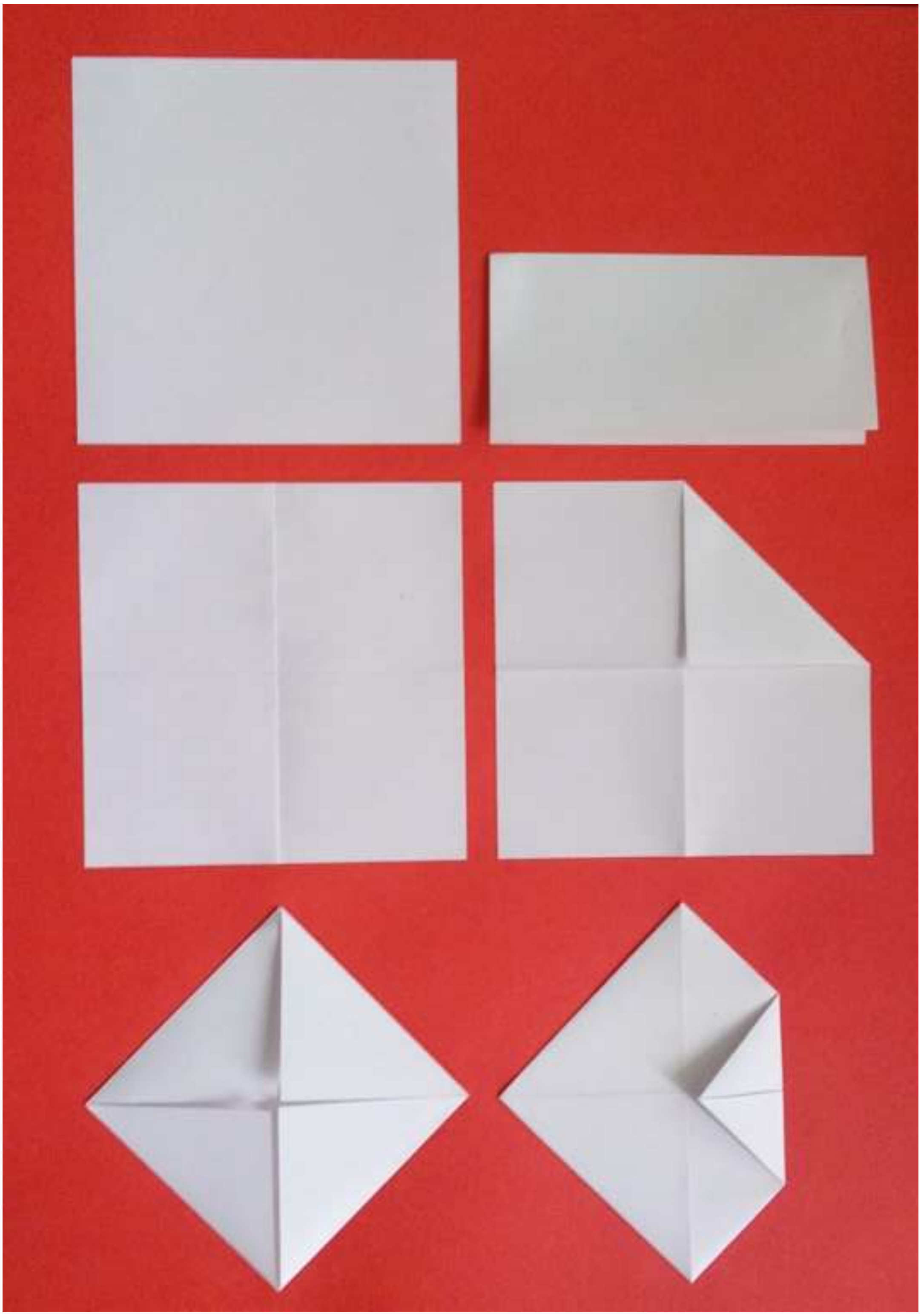
Obrázek 136: Úloha 1 - most

Příloha č. 28



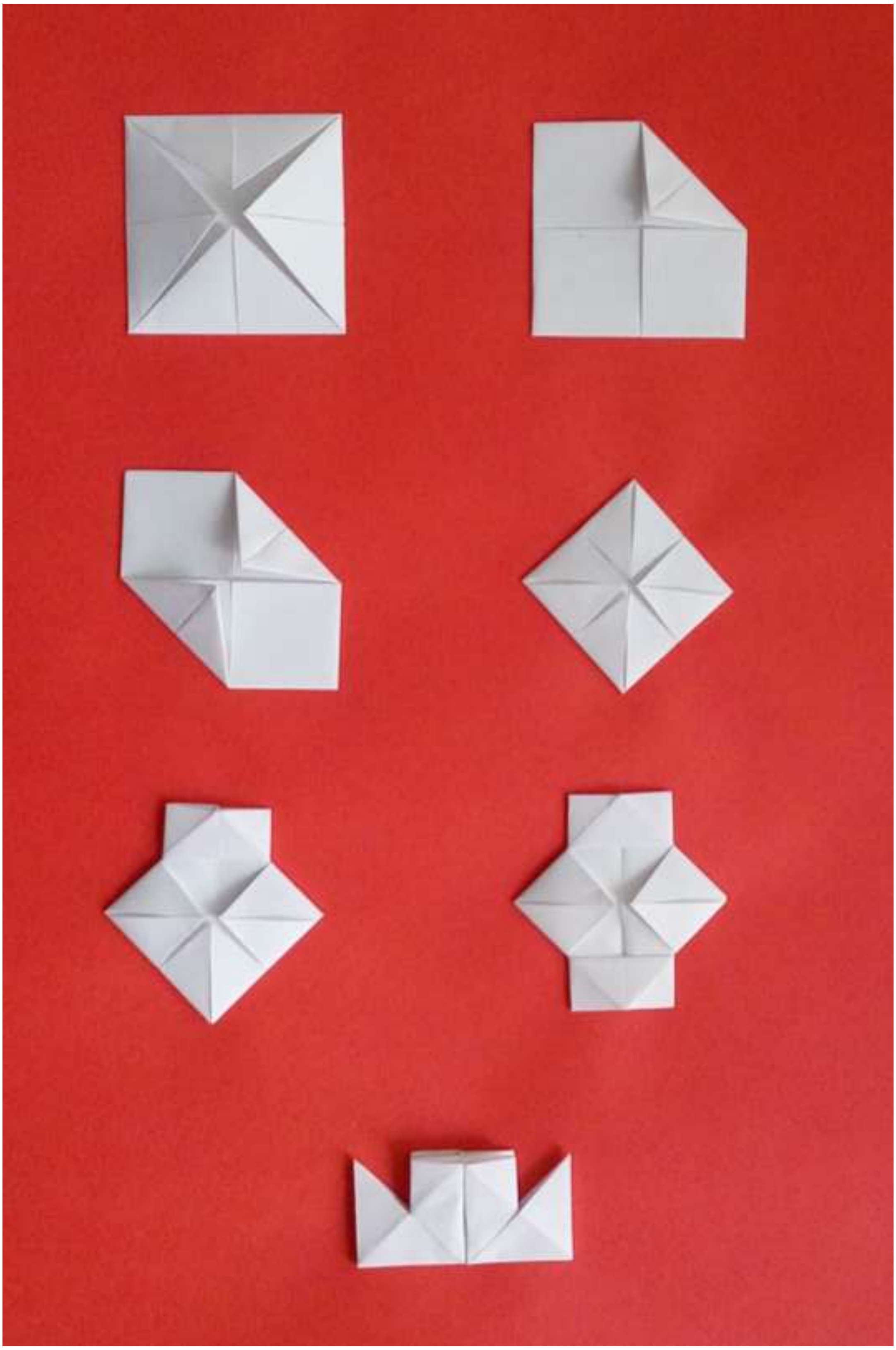
Obrázek 137: Úloha 2 - obsah čtverce

Příloha č. 29



Obrázek 138: Parník (1. část)

Příloha č. 30



Obrázek 139: Parník (2. část)