UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lineární algebra v příkladech

Katedra algebry a geometrie
Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Lenka Vítková, Ph.D.**
Vypracovala: **Vendula Schmidová**
Studijní program: B0541A170020 Matematika
Studijní obor: Matematika
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2024

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Vendula Schmidová

Název práce: Lineární algebra v příkladech

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra algebry a geometrie

Vedoucí práce: Mgr. Lenka Vítková, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2024

Abstrakt: Hlavním cílem této práce je poskytnout studentům lineární algebry komplexní a přehledný materiál k procvičování. Tato práce se zaměřuje i na úlohy, které nejsou vždy dostupné v českém jazyce a systematicky je sjednocuje do sbírky. Zaměřuje se na témata: Homomorfismy euklidovských vektorových prostorů, Faktorový vektorový prostor a Jordanova báze příslušná lineárnímu operátoru. Každá kapitola obsahuje teoretickou část, zadání jednotlivých příkladů a jejich řešení.

Klíčová slova: homomorfismy euklidovských vektorových prostorů, ortogonalizace, faktorový vektorový prostor, lineární operátor, Jordanova báze

Počet stran: 55

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Vendula Schmidová

Title: Linear algebra in exercises

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Algebra and Geometry

Supervisor: Mgr. Lenka Vítková, Ph.D.

The year of presentation: 2024

Abstract: The main aim of this work is to provide students of linear algebra with comprehensive and clear material for practice. This work also focuses on exercises that are not always available in the Czech language and systematically unifies them into a collection. It focuses on the topics of Homomorphisms of Euclidean vector spaces, Quotient space, and Jordan basis of linear operator. Each chapter contains a theoretical part, an assignment of individual examples, and their solutions.

Key words: homomorphisms of Euclidean vector spaces, orthogonalization, Quotient space, linear operator, Jordan basis.

Number of pages: 55

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Lenky Vítkové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala Mgr. Lence Vítkové, Ph.D., vedoucí mé práce, za její cenné rady a čas, který mi věnovala.

Úvod

Bakalářská práce „Lineární algebra v příkladech“ vznikla s cílem poskytnout studentům lineární algebry komplexní a dostupný materiál k procvičování jejich znalostí. Jedná se o práci, která zpracovává různé druhy úloh na jednotlivá témata. Tyto úlohy obvykle bývají obtížně dostupné v českém jazyce a také zřídka prezentované v podobě systematicky uspořádané sbírky. Takovouto sbírku jsem vyhledávala při přípravě na zápočtový test a zkoušku z lineární algebry.

Hlavním cílem této práce je tedy vytvořit komplexní sbírku příkladů z oblasti lineární algebry, se zaměřením na témata: Homomorfismy euklidovských vektorových prostorů (včetně podkapitol: Ortogonální projekce a Ortogonální homomorfismy), Faktorový vektorový prostor a Jordanova báze příslušná lineárnímu operátoru (včetně podkapitol: Podprostory cyklické vzhledem k lineárnímu operátoru, Jordanova báze příslušná lineárnímu operátoru, Jordanův tvar čtvercové matice). V každé kapitole nalezneme nejen zadání a okomentované řešení několika příkladů, ale také teoretickou část obsahující definice a věty relevantní k danému tématu. Tato teoretická část bude sloužit jako základní referenční materiál pro studium jednotlivých témat a bude využívána při řešení příkladů. Celkově tak vznikne bohatá sbírka několika příkladů s podrobnými řešeními, okomentovanými postupy a odkazy na teoretickou část pro hlubší pochopení daných témat.

Při tvorbě této práce jsem kladla důraz nejen na obsah, ale i na formu. Snažila jsem se o to, aby jednotlivé příklady vycházely početně hezky a aby jejich řešení bylo pro čtenáře přehledné a jasné. Věřím, že tato sbírka příkladů poslouží nejen mně při mé vlastní přípravě, ale i ostatním studentům, kteří hledají efektivní způsob, jak procvičit své teoretické znalosti v praxi prostřednictvím zajímavých příkladů.

Kapitola 1

Homomorfismy euklidovských vektorových prostorů

Začátkem bych chtěla zdůraznit, že se tato kapitola řídí skripty Lineární algebra [1], podle nichž je taktéž rozčleněna na podkapitoly: Ortogonální projekce a Homomorfismy euklidovských vektorových prostorů. V každé z těchto podkapitol se nachází sekce „Teorie“, ve které nalezneme všechny potřebné definice a věty, na které se budeme dále odkazovat v sekci „Příklady“. Věty uvádíme bez důkazů a zvídavé čtenáře odkazujeme na seznam literatury.

Je třeba také poznamenat, že pokud se zde vyskytnou příklady podobného charakteru, podrobné vysvětlení každého kroku uvádíme pouze při řešení prvního příkladu. Řešení podobných příkladů již tak detailní nejsou.

1.1. Ortogonální projekce

1.1.1. Teorie

Definice 1.1.1. *Euklidovským vektorovým prostorem* rozumíme vektorový prostor $\mathbf{V}$ nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ spolu se zobrazením $\cdot : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ mající následující vlastnosti:

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$,
2. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,
3. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \forall t \in \mathbb{R}$: $(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
4. $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}$: $\mathbf{u} \neq \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$.

V tomto případě nazýváme zobrazení $\cdot : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ *skalárním násobením na* $\mathbf{V}$ a reálné číslo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ pak *skalárním součinem vektorů* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$.

Definice 1.1.2. Nechť $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$. Pak *normou vektoru* $\mathbf{u}$ rozumíme číslo označované $\|\mathbf{u}\|$ a definované takto:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

Je-li $\|\mathbf{u}\| = 1$, řekneme, že vektor $\mathbf{u}$ je *normovaný*.

Definice 1.1.3. Nechť $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{V}$. Řekneme, že

1. $\mathcal{U}$ je *ortogonální množinou vektorů*, jestliže platí:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}\colon \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

2. $\mathcal{U}$ je *ortonormální množinou vektorů*, jestliže je ortogonální a platí:

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}\colon \|\mathbf{u}\| = 1.$$

Definice 1.1.4. Řekneme, že báze $\mathcal{B}$ euklidovského vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je

1. *ortogonální bází*, jestliže $\mathcal{B}$ je ortogonální podmnožinou ve $\mathbf{V}$,
2. *ortonormální bází*, jestliže $\mathcal{B}$ je ortonormální podmnožinou ve $\mathbf{V}$.

Věta 1.1.5. *Nechť* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{W} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$. *Pak je vektor* $\mathbf{u}$ *kolmý na podprostor* $\mathbf{W}$, *právě když je kolmý na některou (a pak tedy každou) množinu generátorů podprostoru* $\mathbf{W}$.

Definice 1.1.6. Nechť $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V}$. *Ortogonálním doplňkem množiny* $\mathbf{Q}$ *ve* $\mathbf{V}$ rozumíme množinu vektorů z $\mathbf{V}$ kolmých na $\mathbf{Q}$ a označujeme ji $\mathbf{Q}^\perp$.

Věta 1.1.7. *Nechť* $\mathbf{W}$ *je podprostor euklidovského vektorového prostoru* $\mathbf{V}$. *Pak projekce* $p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{W}^\perp}$ *přiřazuje každému vektoru* $\mathbf{x}$ *z* $\mathbf{V}$ *jeho kolmý průmět do podprostoru* $\mathbf{W}$.

Definice 1.1.8. Nechť $\mathbf{W}$ je podprostor euklidovského vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Pak projekci $p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{W}^\perp}$ nazýváme *ortogonální projekce prostoru* $\mathbf{V}$ *na podprostor* $\mathbf{W}$ a značíme ji $p_{\mathbf{W}}$.

Věta 1.1.9. *Nechť* $\mathbf{W}$ *je podprostor euklidovského vektorového prostoru* $\mathbf{V}$*,* $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ *je báze* $\mathbf{W}$*,* $\mathcal{B}$ *je báze* $\mathbf{V}$*. Označme* $\mathbf{A}$ *matici, která má v i-tém sloupci vektor* $\{\mathbf{v}_i\}_{\mathcal{B}}, i = 1, \ldots, k$*. Pak matice*

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \tag{1.1}$$

je maticí ortogonální projekce $\mathbf{V}$ *na* $\mathbf{W}$ *v bázi* $\mathcal{B}$*.*

Poznámka 1.1.10. Odvození této věty zde psát nebudeme, zájemce odkazujeme na seznam literatury. [5]

1.1.2. Příklady

Poznámka 1.1.11. Následující příklad lze řešit více způsoby, ukážeme si zde dva. Tedy příklad 1.1.12 a) budeme řešit prvním způsobem a příklad 1.1.12 b) druhým způsobem. U příkladu 1.1.12 c) si uvedeme pouze správný výsledek.

Příklad 1.1.12. Nalezněte ortogonální projekci p prostoru $\mathbf{V}$ na podprostor $\mathbf{W}$, který je generován vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$, je-li ve zvolené ortonormální bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}$ dáno

a) $\{\mathbf{v}_1\}_\mathcal{B} = (1, 2, 2, -1)$ a $\{\mathbf{v}_2\}_\mathcal{B} = (2, -1, -2, 1)$,

b) $\{\mathbf{v}_1\}_\mathcal{B} = (1, 1, 5, -1)$ a $\{\mathbf{v}_2\}_\mathcal{B} = (-1, 0, 2, -1)$,

c) $\{\mathbf{v}_1\}_\mathcal{B} = (1, 0, -2, -1)$ a $\{\mathbf{v}_2\}_\mathcal{B} = (-1, -2, 1, 0)$.

Řešení a):
V prvním kroku nalezneme ortogonální doplněk $\mathbf{W}^\perp$. S ohledem na definici 1.1.6 a větu 1.1.5 platí:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{W}^\perp \Leftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1 = 0,\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2 = 0.$$

Jestliže položíme $\{\mathbf{x}\}_\mathcal{B} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Maticově ji můžeme zapsat a upravit takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Dále nalezneme fundamentální systém řešení této soustavy. Nejprve volme například $x_2 = 1$ a $x_4 = 0$. Dostaneme vektor $\mathbf{w}_1 = \left(-\frac{1}{3}, 1, -\frac{5}{6}, 0\right)$. Poté volme například $x_2 = 0$ a $x_4 = 1$ a dostaneme vektor $\mathbf{w}_2 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, 1\right)$. Odtud $\mathbf{W}^\perp = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$. Jelikož $\mathbf{W} = \operatorname{Im} p$ a $\mathbf{W}^\perp = \operatorname{Ker} p$, pak pro $i = 1, 2$ platí

$$\begin{aligned} p(\mathbf{v}_i) &= \mathbf{v}_i, \\ p(\mathbf{w}_i) &= \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Nyní se zabývejme vyjádřením této projekce. Analytické vyjádření bychom čekali ve tvaru:

$$\begin{aligned} p\colon y_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 \\ y_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 \\ y_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 \\ y_4 &= a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do něj naše vektory, získáme soustavu lineárních rovnic pro neznámé $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{44}$:

$$
\begin{aligned}
a_{1i} + 2\,a_{2i} + 2a_{3i} - a_{4i} &= \begin{cases} 1, & i=1 \\ 2, & i=2 \\ 2, & i=3 \\ -1, & i=4 \end{cases} \\
2a_{1i} - \quad a_{2i} - 2a_{3i} + a_{4i} &= \begin{cases} 2, & i=1 \\ -1, & i=2 \\ -2, & i=3 \\ 1, & i=4 \end{cases} \\
-\frac{1}{3}a_{1i} + \quad a_{2i} - \frac{5}{6}a_{3i} \qquad &= 0, \quad 1 \le i \le 4, \\
-\frac{1}{2}a_{3i} + a_{4i} &= 0, \quad 1 \le i \le 4,
\end{aligned}
$$

již můžeme zapsat maticově takto:

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\
2 & -1 & -2 & 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\
-\frac{1}{3} & 1 & -\frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \sim \cdots \sim
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{14}{15} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{15} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{15} & \frac{2}{5} & \frac{8}{15} & -\frac{4}{15} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{15} & \frac{2}{15}
\end{array}\right).
$$

Dostáváme matici projekce

$$
(p, \beta) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & -3 \\ -2 & 6 & 8 & -4 \\ 1 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Navíc se přesvědčíme, že je daná matice idempotentní $\big((p,\beta)(p,\beta) = (p,\beta)\big)$ a symetrická, tj. jedná se o matici ortogonální projekce p.

$\bigcirc$

Řešení b):
Tento příklad budeme řešit užitím vztahu (1.1) ve větě 1.1.9, který zní:

$$
\mathbf{Q} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.
$$

Vytvořme nejprve matici $\mathbf{A}$, do jejíž sloupců vložíme postupně vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ ze zadání takto:

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Spočítejme

$$
\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 10 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}
$$

a nalezněme inverzní matici k matici $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$:

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}.$$

Dále s využitím vztahu (1.1) počítejme

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{34} & -\frac{5}{34} \\ -\frac{5}{34} & \frac{7}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{34} & \frac{4}{17} & \frac{1}{17} & \frac{11}{34} \\ \frac{4}{17} & \frac{3}{34} & \frac{5}{34} & \frac{1}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{5}{34} & \frac{31}{34} & -\frac{4}{17} \\ \frac{11}{34} & \frac{1}{17} & -\frac{4}{17} & \frac{7}{34} \end{pmatrix}.$$

Získáme matici projekce ve tvaru

$$(p, \beta) = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 27 & 8 & 2 & 11 \\ 8 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 31 & -8 \\ 11 & 2 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

○

Řešení c):
Výše uvedené postupy aplikujeme i na poslední příklad a získáme matici projekce ve tvaru

$$(p, \beta) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 8 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

○

Příklad 1.1.13. Ortogonální projekce vektoru $\mathbf{u} = (5, -1, 0, 1)$ z vektorového prostoru $\mathbf{V}$ na podprostor $\mathbf{W}$, $\mathbf{W} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, je-li ve zvolené ortonormální bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}$ dáno $\{\mathbf{v}_1\}_\mathcal{B} = (1, 0, -1, 1)$ a $\{\mathbf{v}_2\}_\mathcal{B} = (-1, -1, 1, 0)$, je ve tvaru

$$(a, b, -a, a).$$

Matice reprezentující ortogonální projekci p je ve tvaru

$$\frac{b}{d}\begin{pmatrix} a & b & -a & b \\ b & c & -b & -a \\ -a & -b & a & -b \\ b & -a & -b & c \end{pmatrix}.$$

Doplňte

$$a = \_\_\_\_\_, b = \_\_\_\_\_, c = \_\_\_\_\_, d = \_\_\_\_\_.$$

Řešení:
Nejprve nalezněme matici ortogonální projekce. Tímto jsme se zabývali již v příkladu 1.1.12, proto zde budeme uvádět řešení velmi stručně. Nalezněme tedy ortogonální doplněk $\mathbf{W}^\perp$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme dále fundamentální systém řešení soustavy lineárních rovnic, které odpovídá výše uvedená matice a dostáváme vektory $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 1, 0)$ a $\mathbf{w}_2 = (0, 1, 1, 1)$. Dále již upravujme

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right).$$

Dostáváme matici projekce

$$(p, \beta) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Navíc je daná matice idempotentní a symetrická, tj. jedná se o matici ortogonální projekce p.

Dále zjistíme ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u} = (5, -1, 0, 1)$ na podprostor $\mathbf{W}$. Stačí daný vektor vynásobit maticí ortogonální projekce, takto:

$$(5, -1, 0, 1) \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = (2, 1, -2, 2).$$

Dostáváme tedy kolmý průmět $\mathbf{u}^*$ vektoru $\mathbf{u}$ na $\mathbf{W}$, přičemž platí: $\mathbf{u}^* = (2, 1, -2, 2)$. Na závěr můžeme doplnit

$$a = 2,\ b = 1,\ c = 3,\ d = 5.$$

○

Příklad 1.1.14. Nalezněte matici ortogonální projekce p prostoru $\mathbf{V}$ na podprostor $\mathbf{W}$, $\mathbf{W} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, je-li ve zvolené ortonormální bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}$ dáno

$$\{\mathbf{v}_1\}_\mathcal{B} = (1,2,0,1), \{\mathbf{v}_2\}_\mathcal{B} = (-1,2,1,0).$$

Jaká je ortogonální projekce vektoru $\mathbf{u}$ na podprostor $\mathbf{W}$, je-li

a) $\{\mathbf{u}\}_\mathcal{B} = (1,1,3,2)$,

b) $\{\mathbf{u}\}_\mathcal{B} = (0,-3,5,1)$.

Řešení:
Opět jsme se zde již takový typem příkladu zabývali. Řešíme tedy podobně jako příklad 1.1.12 tentokrát dle řešení b). Využijeme tedy vztahu (1.1): $\mathbf{Q} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathrm{T}$ z věty 1.1.9, kde za matici $\mathbf{A}$ dosazujeme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále počítejme

$$\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dále již s využitím vzorce (1.1) počítejme

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

Získáme matici projekce ve tvaru

$$(p,\beta) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 8 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pak už jen vektor $\mathbf{u}$ vynásobíme maticí (p,β) a dostáváme

a) $$\mathbf{u}^* = (1,1,3,2)\cdot\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{3}, 2, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right),$$

b) $\mathbf{u}^* = (0,-3,5,1)\cdot\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -1\right).$

○

Příklad 1.1.15. Jaká je ortogonální projekce vektoru $\mathbf{v}$ z prostoru $\mathbf{V}$ na rovinu $2x - y + z = 0$, je-li ve zvolené ortonormální bázi $\mathcal{B}$ dáno $\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}} = (2,0,1)$.

Řešení:
Řešíme opět podobně jako v předchozích příkladech, avšak nejprve musíme vytvořit bázi $\mathcal{B}$ zadané roviny. Využijeme například vektory $\mathbf{u}_1 = (1,2,0)$ a $\mathbf{u}_2 = (0,1,1)$. Takže $\mathcal{B} = \langle(1,2,0),(0,1,1)\rangle$. Dále opět využijeme vztahu (1.1) z věty 1.1.9, kde za matici $\mathbf{A}$ dosazujeme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Počítejme tedy

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Následně dosazením do vztahu (1.1) získáme matici projekce

$$\mathbf{Q} = (p,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Nyní už nám stačí vektor $\mathbf{v}$ vynásobit maticí $(p,\mathcal{B})$ a dostáváme ortogonální projekci vektoru $\mathbf{v}$ na výše zadanou rovinu.

$$\mathbf{v}^* = (2,0,1)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, -2, \frac{1}{6}\right).$$

○

1.2. Ortogonální homomorfismy

1.2.1. Teorie

Definice 1.2.1. Nechť $(\mathbf{V}, \cdot), (\mathbf{W}, \circ)$ jsou euklidovské vektorové prostory. Homomorfismus $f \colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ se nazývá *ortogonální*, jestliže platí:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V} \colon \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \circ f(\mathbf{y}).$$

Věta 1.2.2. *Nechť f je ortogonální homomorfismus $\mathbf{V}$ do $\mathbf{W}$. Pak pro každé $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ z $\mathbf{V}$ platí:*

1. $\|f(\mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$,
2. $\measuredangle(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = \measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,
3. $\rho(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Věta 1.2.3. *Nechť f je homomorfismus $\mathbf{V}$ do $\mathbf{W}$, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ libovolné ortonormální báze po řadě prostorů $\mathbf{V}, \mathbf{W}$. Pak je f ortogonální izomorfismus $\mathbf{V}$ na $\mathbf{W}$, právě když*

$$(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}.$$

Definice 1.2.4. *Orotogonální maticí* rozumíme čtvercovou matici $\mathbf{A}$, pro kterou platí

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}.$$

Věta 1.2.5. *Nechť je dána čtvercová matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ a nechť dále $\mathbf{c}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), \ldots, \mathbf{c}_n = (a_{1n}, a_{n1}, \ldots, a_{nn})$ jsou sloupce této matice. Pak $\mathbf{A}$ je ortogonální, jestliže platí*

$$\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_i = 1, \ \forall i = 1, \ldots, n,$$
$$\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = 0, \ \text{pro } i \neq j$$

a $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ je ortonormální systém.

Poznámka 1.2.6. Poznamenejme, že ve větě 1.2.5 je „$\cdot$“ skalární součin z definice 1.1.1. Dále lze dokázat, že ve větě 1.2.5 lze místo sloupců matice uvažovat její řádky.

1.2.2. Příklady

Příklad 1.2.7. Ověřte, zda jsou následující matice ortogonální.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{B} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 & 6\sqrt{5} \\ -10 & 10 & 5 \\ -4\sqrt{5} & -5\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

Řešení:
S ohledem na větu 1.2.4 je matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonální právě tehdy, když $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$. Stačí tedy tuto vlastnost ověřit pro zadané matice.

Nejprve řešme a)

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{9} \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & 1 \end{pmatrix},$$

což znamená, že $\mathbf{A}$ není ortogonální. Přejděme tedy k další matici v b).

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 & 6\sqrt{5} \\ -10 & 10 & 5 \\ -4\sqrt{5} & -5\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & -10 & -4\sqrt{5} \\ 0 & 10 & -5\sqrt{5} \\ 6\sqrt{5} & 5 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zde již jednotkovou matici dostáváme. Matice $\mathbf{B}$ je tedy ortogonální. Ověřme ještě ortogonalitu matice $\mathbf{C}$, tj.

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opět dostáváme jednotkovou matici, a tudíž můžeme říct, že i matice $\mathbf{C}$ je ortogonální. Poznamenejme ještě, že pokud bychom dostali namísto jednotkové matice matici diagonální, sloupce matice by sice tvořily ortogonální bázi prostoru, ale nikoliv bázi ortonormální, a tudíž by se nejednalo o ortogonální matici.

○

Příklad 1.2.8. Je dána matice $\mathbf{A}$. Určete $a, b, c > 0$ tak, aby $\mathbf{A}$ byla ortogonální.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & -\frac{c}{b} & -\frac{c}{b} \\ 0 & -\frac{\sqrt{c}}{c} & \frac{\sqrt{c}}{c} \\ -\frac{2\sqrt{c}}{b} & -\frac{\sqrt{c}}{bc} & -\frac{\sqrt{c}}{bc} \end{pmatrix},$$

$$a = \_\_\_\_\_, b = \_\_\_\_\_, c = \_\_\_\_\_.$$

Řešení:
Nejprve si dle věty 1.2.5 a poznámky 1.2.6 označíme jednotlivé řádky naší matice jako:

$$\mathbf{c}_1 = \left(\frac{a}{b}, -\frac{c}{b}, -\frac{c}{b}\right), \ \mathbf{c}_2 = \left(0, -\frac{\sqrt{c}}{c}, \frac{\sqrt{c}}{c}\right), \ \mathbf{c}_3 = \left(-\frac{2\sqrt{c}}{b}, -\frac{\sqrt{c}}{bc}, -\frac{\sqrt{c}}{bc}\right).$$

Mohli jsme se rozhodnout pro sloupce, nicméně díky výběru řádků se nám řešení značně zjednoduší. Pokud chceme, aby uvedená matice $\mathbf{A}$ byla ortogonální, pak s ohledem na větu 1.2.5 musí platit:

$$\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_i = 1, \ \forall i = 1, 2, 3,$$
$$\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = 0, \ \text{pro } i \neq j.$$

Konkrétně tedy

$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}, -\frac{c}{b}, -\frac{c}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}, -\frac{c}{b}, -\frac{c}{b}\right) = 1 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2c^2 = 0,$$
$$\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 = 1 \Leftrightarrow \left(0, -\frac{\sqrt{c}}{c}, \frac{\sqrt{c}}{c}\right) \cdot \left(0, -\frac{\sqrt{c}}{c}, \frac{\sqrt{c}}{c}\right) = 1 \Leftrightarrow c = 2,$$
$$\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_3 = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{2\sqrt{c}}{b}, -\frac{\sqrt{c}}{bc}, -\frac{\sqrt{c}}{bc}\right) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{c}}{b}, -\frac{\sqrt{c}}{bc}, -\frac{\sqrt{c}}{bc}\right) = 1 \Leftrightarrow b^2c - 4c^2 = 2,$$
$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}, -\frac{c}{b}, -\frac{c}{b}\right) \cdot \left(0, -\frac{\sqrt{c}}{c}, \frac{\sqrt{c}}{c}\right) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0,$$
$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}, -\frac{c}{b}, -\frac{c}{b}\right) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{c}}{b}, -\frac{\sqrt{c}}{bc}, -\frac{\sqrt{c}}{bc}\right) = 0 \Leftrightarrow 2a\sqrt{c} = 2\sqrt{c},$$
$$\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_3 = 0 \Leftrightarrow \left(0, -\frac{\sqrt{c}}{c}, \frac{\sqrt{c}}{c}\right) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{c}}{b}, -\frac{\sqrt{c}}{bc}, -\frac{\sqrt{c}}{bc}\right) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Již z druhého řádku získáme $c = 2$ a z pátého řádku získáme $a = 1$. Nakonec dosazením těchto proměnných do prvního řádku získáme $b = 3$. Ověříme, že tyto hodnoty vyhovují i zbylým rovnicím. Snadno lze ověřit, stejně jako v předchozím příkladu, že je daná matice ortogonální.

○

Příklad 1.2.9. Je dána matice $\mathbf{A}$. Určete $a, b, c, d > 0$ tak, aby $\mathbf{A}$ byla ortogonální.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & a \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & b \\ -d & -d & c \end{pmatrix},$$

$$a = \_\_\_\_\_, b = \_\_\_\_\_, c = \_\_\_\_\_, d = \_\_\_\_\_.$$

Řešení:
Opět využíváme stejné řešení jako u předchozího příkladu. Tentokrát označíme řádky matice:

$$\mathbf{c}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, a\right), \ \mathbf{c}_2 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, b\right), \ \mathbf{c}_3 = \big(-d, -d, c\big).$$

Pokud chceme, aby uvedená matice **A** byla ortogonální, pak opět s ohledem na větu 1.2.5 musí platit:

$$\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_i = 1, \ \forall i = 1, 2, 3,$$
$$\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = 0, \ \text{pro } i \neq j.$$

Konkrétně tedy

$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, a\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, a\right) = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, b\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, b\right) = 1 \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{6}}{6},$$
$$\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_3 = 1 \Leftrightarrow \big(-d, -d, c\big) \cdot \big(-d, -d, c\big) = 1 \Leftrightarrow 2d^2 + c^2 = 1,$$
$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, a\right) \cdot \big(-d, -d, c\big) = 0 \Leftrightarrow c = d.$$

Všechny skalární součiny zde nepíšeme, jelikož nám ke zjištění jednotlivých proměnných postačí pouze výše vypsané. Tedy z prvního řádku dostáváme $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ z druhého $b = \frac{\sqrt{6}}{6}$ a na závěr z posledních dvou řádků zjistíme, že $c = d = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

○

Příklad 1.2.10. Existuje ortogonální homomorfismus $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takový, že

$$f(-1, 2, 0, -2) = (1, 0, 2, 2) \text{ a}$$
$$f(-2, 0, -2, 1) = (-1, 2, 1, 0)?$$

Řešení:
Při řešení využijeme pouze definice 1.2.1, odkud víme, že ortogonální homomorfismy zachovávají ortogonalitu. Počítejme skalární součin následujících vektorů a následně jejich obrazů:

$$(-1, 2, 0, -2) \cdot (-2, 0, -2, 1) = 0,$$
$$f(-1, 2, 0, -2) \cdot f(-2, 0, -2, 1) = (1, 0, 2, 2) \cdot (-1, 2, 1, 0) = 1.$$

Odtud můžeme rovnou říct, že daný homomorfismus neexistuje.

○

Příklad 1.2.11. Nalezněte všechny ortogonální homomorfismy $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, pro něž platí $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$, je-li v ortonormálních bázích $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ po řadě podprostorů $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ dáno:

$$\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}} = (-1, 1), \{\mathbf{v}\}_{\mathcal{C}} = (1, 1).$$

Řešení:
Nejprve s ohledem na větu 1.2.2 ověřme, zda má vůbec smysl ortogonální homomorfismus hledat, tj. počítejme $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} = \|\mathbf{v}\|$. Dále podobným způsobem jako v příkladu 1.1.12 nalezneme matici homomorfismu

$$(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Tedy analytické vyjádření očekáváme ve tvaru:

$$\begin{aligned} f\colon y_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \\ y_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do něj souřadnice vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, získáme soustavu lineárních rovnic pro neznámé a_{11}, a_{12}, a_{21} a a_{22} ve tvaru:

$$\begin{aligned} 1 &= -a_{11} + a_{21} \\ 1 &= -a_{12} + a_{22}. \end{aligned}$$

Při volbě parametrů $a_{11} = s$ a $a_{12} = t$ dostáváme

$$(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} s & t \\ 1+s & 1+t \end{pmatrix}, \text{ kde } s, t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Tato matice reprezentuje všechny homomorfismy $f\colon \mathbf{u} \to \mathbf{v}$. My ovšem hledáme jen ty, které jsou ortogonální. K tomu nám postačí věta 1.2.3, podle které jsou to právě ty homomorfismy, pro něž platí:

$$(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}.$$

Počítejme tedy

$$\begin{pmatrix} s & t \\ 1+s & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 1+s \\ t & 1+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

čímž nám vznikne soustava rovnic

$$\begin{aligned} s^2 + t^2 &= 1 \\ s(1+s) + t(1+t) &= 0 \\ (1+s)^2 + (1+t)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Tato soustava rovnic má dvě řešení:

(*i*) $t = 0,\ s = -1$,

(*ii*) $t = -1,\ s = 0$.

Dosadíme-li tyto parametry zpět do matice (1.2), obdržíme matice dvou ortogonálních homomorfismů, tj.

$$(f_1, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(f_2, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

○

Kapitola 2

Faktorový vektorový prostor

V této kapitole nalezneme opět sekci „Teorie", která čerpá především ze skript Lineární algebry [1] a kterou dále využijeme k řešení příkladů v následující sekci „Příklady". Věty opět uvádíme bez důkazů.

2.1. Teorie

Definice 2.1.1. Nechť $\mathbf{K} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$, $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$. Pak se množina označovaná $\mathbf{a} + \mathbf{K}$ a definovaná vztahem

$$\mathbf{a} + \mathbf{K} = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbf{V};\ \exists \mathbf{y} \in \mathbf{K}\colon \mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{y}\Big\}$$

nazývá *lineární varieta prostoru* $\mathbf{V}$ *určená vektorem* $\mathbf{a}$ *o zaměření* $\mathbf{K}$.

Definice 2.1.2. Nechť $\mathbf{K} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$ a $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$. Řekneme, že *vektor* $\mathbf{a}$ *je kongruentní s vektorem* $\mathbf{b}$ *modulo* $\mathbf{K}$, což značíme $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} (\mathrm{mod}\, \mathbf{K})$, jestliže vektor $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ náleží $\mathbf{K}$.

Definice 2.1.3. Nechť $\mathbf{K} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$ a nechť jsou dány $\mathbf{a} + \mathbf{K}$, $\mathbf{b} + \mathbf{K} \in \mathbf{V}/\mathbf{K}$ a $t \in \mathbb{T}$. Pak

1. *součtem lineárních variet* $\mathbf{a} + \mathbf{K}$ *a* $\mathbf{b} + \mathbf{K}$ rozumíme varietu označovanou $(\mathbf{a} + \mathbf{K}) + (\mathbf{b} + \mathbf{K})$ a definovanou $(\mathbf{a} + \mathbf{K}) + (\mathbf{b} + \mathbf{K}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{K}$,

2. *skalárním t-násobkem lineární variety* $\mathbf{a} + \mathbf{K}$ rozumíme varietu označovanou $t \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{K})$ a definovanou $t \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{K}) = (t \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{K}$.

Poznámka 2.1.4. V tomto případě je $\mathbf{V}/\mathbf{K}$ označení pro množinu všech variet prostoru $\mathbf{V}$ o zaměření $\mathbf{K}$. Tedy platí

$$\mathbf{V}/\mathbf{K} = \Big\{\{\mathbf{x} \in \mathbf{V};\ \exists \mathbf{y} \in \mathbf{K}\colon \mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{y}\},\ \mathbf{a} \in \mathbf{V}\Big\} = \Big\{\{\mathbf{a} + \mathbf{K}\},\ \mathbf{a} \in \mathbf{V}\Big\}.$$

Definice 2.1.5. Nechť je dán $\mathbf{K} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$. Pak vektorový prostor $(\mathbf{V}/\mathbf{K}, +, \mathbb{T}, \cdot)$ nazýváme *faktorový vektorový prostor vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *podle podprostoru* $\mathbf{K}$ a označujeme $\mathbf{V}/\mathbf{K}$.

Definice 2.1.6. Nechť je dán vektorový prostor $\mathbf{V}$ a jeho podprostor $\mathbf{K}$. Pak se zobrazení $\nu_{\mathbf{K}}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}/\mathbf{K}$ definované

$$\nu_{\mathbf{K}}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}/\mathbf{K},$$

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}\colon \nu_{\mathbf{K}}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \mathbf{K},$$

nazývá *přirozený (kanonický) homomorfismus příslušný faktorizaci* $\mathbf{V}/\mathbf{K}$.

Věta 2.1.7. *Nechť je dán vektorový prostor* $\mathbf{V}$ *a jeho podprostor* $\mathbf{K}$. *Pak platí*

$$\dim \mathbf{V}/\mathbf{K} = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{K}.$$

Věta 2.1.8. *Nechť je dán vektorový prostor* $\mathbf{V}$ *a jeho podprostor* $\mathbf{K}$. *Nechť dále* $\left\langle \overline{\mathbf{e}_1}, \ldots, \overline{\mathbf{e}_{n-k}} \right\rangle$ *je libovolný systém vektorů s vlastností*

$$\mathbf{V} = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}] \oplus \mathbf{K}.$$

Pak $\left\langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{K}, \ldots, \mathbf{e}_{n-k} + \mathbf{K} \right\rangle$ *je bází faktorového vektorového prostoru* $\mathbf{V}/\mathbf{K}$.

2.2. Příklady

Příklad 2.2.1. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_4$ je dán podprostor $\mathbf{K} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$. Stanovte dimenzi faktorprostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$ a nalezněte alespoň jednu jeho bázi, je-li ve zvolené bázi prostoru $\mathbf{V}$ dáno: $\{\mathbf{u}\} = (1, 2, 0, 1)$ a $\{\mathbf{v}\} = (2, -1, 0, 2)$.

Řešení:
Nejprve vyšetřeme dimenzi faktorprostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$. Zabývejme se $\dim \mathbf{K}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé a proto $\dim \mathbf{K} = 2$. S ohledem na větu 2.1.7 platí:

$$\begin{aligned} \dim \mathbf{V}/\mathbf{K} &= \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{K}, \\ \dim \mathbf{V}/\mathbf{K} &= 4 - 2 = 2. \end{aligned}$$

Dále se zabývejme konstrukcí některé báze prostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$. Zde využijeme větu 2.1.8, podle níž je třeba vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ doplnit ve smyslu Steinitzovy věty na bázi prostoru $\mathbf{V}$. Hledáme tedy vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ tak, aby byly společně s vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ lineárně nezávislé. Zvolme tedy například $\{\mathbf{e}_1\} = (0, 0, 1, 0)$ a $\{\mathbf{e}_2\} = (0, 0, 0, 1)$ a ověřme.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jedná se o reprezentanty bazických tříd ve $\mathbf{V}/\mathbf{K}$ a dle věty 2.1.8 je tedy
$\mathcal{C} = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{K}, \mathbf{e}_2 + \mathbf{K} \rangle$ bází prostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$.

○

Příklad 2.2.2. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_4$ je dán podprostor $\mathbf{K} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$. Stanovte dimenzi faktorprostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$, nalezněte alespoň jednu jeho bázi a stanovte souřadnice variety $\mathbf{x} + \mathbf{K}$ v této bázi, je-li ve zvolené bázi prostoru $\mathbf{V}$ dáno:
$\{\mathbf{u}\} = (-2, 1, -1, -1)$, $\{\mathbf{v}\} = (-1, 0, -2, 2)$ a $\{\mathbf{x}\} = (1, 1, -1, -2)$.

Řešení:
Nejprve opět vyšetřeme dimenzi faktorprostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé a proto $\dim \mathbf{K} = 2$. Opět s ohledem na větu 2.1.7 platí:

$$\begin{aligned} \dim \mathbf{V}/\mathbf{K} &= \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{K}, \\ \dim \mathbf{V}/\mathbf{K} &= 4 - 2 = 2. \end{aligned}$$

Zabývejme se nyní konstrukcí některé báze prostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$. S využitím věty 2.1.8, podle níž je třeba vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ doplnit ve smyslu Steinitzovy věty na bázi prostoru

V. Hledáme tedy vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ tak, aby byly společně s vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ lineárně nezávislé. Zvolme tedy například $\{\mathbf{e}_1\} = (0,0,1,0)$ a $\{\mathbf{e}_2\} = (0,0,0,1)$ a ověřme.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jedná se o reprezentanty bazických tříd ve $\mathbf{V}/\mathbf{K}$ a dle věty 2.1.8 je tedy $\mathcal{C} = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{K}, \mathbf{e}_2 + \mathbf{K} \rangle$ bází prostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$.

Varieta $\mathbf{x} + \mathbf{K}$, která je vektorem ve faktorprostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$, bude mít v bázi $\mathcal{C}$ souřadnice (x_1, x_2) právě tehdy, když

$$\mathbf{x} + \mathbf{K} = x_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{K}) + x_2(\mathbf{e}_2 + \mathbf{K}).$$

Postupně upravujeme s využitím definice 2.1.3:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{K} &= (x_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{K}) + (x_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{K}), \\ \mathbf{x} + \mathbf{K} &= (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) + \mathbf{K}, \end{aligned}$$

což je ekvivalentní s

$$\mathbf{x} \equiv (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) (\operatorname{mod} \mathbf{K}).$$

Pak lze psát

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{x} \in \mathbf{K} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}],$$

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{x} = x_3\mathbf{u} + x_4\mathbf{v},$$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 - x_3\mathbf{u} - x_4\mathbf{v}.$$

Souřadnice variety můžeme získat vyřešením soustavy lineárních rovnic maticově zapsané takto:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Z čehož dostáváme jediné řešení, a tím je:

$$x_1 = -6,\ x_2 = 5,\ x_3 = -1,\ x_4 = 3.$$

A tedy souřadnice variety $\mathbf{x} + \mathbf{K}$ v dané bázi $\mathcal{C}$ jsou $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{C}} = (-6, 5)$.

$\bigcirc$

Příklad 2.2.3. U příkladu 2.2.2 nalezněte matici kanonického homomorfismu.

Řešení:
Hledejme tedy matici $(\nu, \mathcal{B}, \mathcal{C})$. Určíme souřadnice variet $\nu(\mathbf{u}), \nu(\mathbf{v}), \nu(\mathbf{e}_1), \nu(\mathbf{e}_2)$. Protože $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{K}$, tak $\nu(\mathbf{u}) = \nu(\mathbf{v}) = \mathbf{o} + \mathbf{K}$, což je nulová varieta, a tedy $\{\nu(\mathbf{u})\}_{\mathcal{C}} = \{\nu(\mathbf{v})\}_{\mathcal{C}} = (0,0)$. Protože $\mathcal{C} = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{K}, \mathbf{e}_2 + \mathbf{K} \rangle$, tak zřejmě $\{\nu(\mathbf{e}_1)\}_{\mathcal{C}} = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{K}\}_{\mathcal{C}} = (1,0)$. Podobně $\{\nu(\mathbf{e}_2)\}_{\mathcal{C}} = \{\mathbf{e}_2 + \mathbf{K}\}_{\mathcal{C}} = (0,1)$. Shrňme to následovně:

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}} &= (-2,1,-1,-1) \mapsto \{\mathbf{o} + \mathbf{K}\}_{\mathcal{C}} = (0,0),\\
\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}} &= (-1,0,-2,2) \mapsto \{\mathbf{o} + \mathbf{K}\}_{\mathcal{C}} = (0,0),\\
\{\mathbf{e}_1\}_{\mathcal{B}} &= (0,0,1,0) \mapsto \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{K}\}_{\mathcal{C}} = (1,0),\\
\{\mathbf{e}_2\}_{\mathcal{B}} &= (0,0,0,1) \mapsto \{\mathbf{e}_2 + \mathbf{K}\}_{\mathcal{C}} = (0,1).
\end{aligned}$$

Dostáváme matici, kterou dále upravujeme

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Odtud je matice kanonického homomorfismu ve tvaru

$$(\nu, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -2 & 2\\ -3 & 5\\ 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

○

Příklad 2.2.4. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_4$ je dán podprostor $\mathbf{K} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$. Stanovte dimenzi faktorprostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$, nalezněte alespoň jednu jeho bázi a stanovte souřadnice variety $\mathbf{x} + \mathbf{K}$ v této bázi, je-li ve zvolené bázi prostoru $\mathbf{V}$ dáno:
$\{\mathbf{u}\} = (1,-1,0,2), \{\mathbf{v}\} = (1,1,0,1), \{\mathbf{w}\} = (2,0,-1,2)$ a $\{\mathbf{x}\} = (1,2,1,-1)$.

Řešení:
Budeme postupovat stejně jako u příkladu 2.2.2. Nejprve zjišťujeme dimenzi $\mathbf{K}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z čehož vyplývá, že vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé. Díky tomu můžeme říct, že $\dim \mathbf{K} = 3$. A dle věty 2.1.7 je $\dim \mathbf{V}/\mathbf{K} = 4 - 3 = 1$.

Při konstrukci některé báze prostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$ opět využijeme věty 2.1.8. Doplníme vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ ve smyslu Steinitzovy věty na bázi prostoru $\mathbf{V}$. Zvolme tedy například $\{\mathbf{e}_1\} = (0,0,0,1)$. Dostáváme bázi podprostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$, a tou je $\mathcal{C} = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{K} \rangle$.

Varieta $\mathbf{x} + \mathbf{K}$, která je vektorem ve faktorprostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$, bude mít v bázi $\mathcal{C}$ jedinou souřadnici x_1 právě tehdy, když

$$\mathbf{x} + \mathbf{K} = x_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{K}).$$

Úpravou dle definice 2.1.3 dostáváme

$$\mathbf{x} + \mathbf{K} = x_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{K},$$

což je ekvivalentní s

$$\mathbf{x} \equiv x_1\mathbf{e}_1 (\mathrm{mod}\, \mathbf{K}).$$

Pak lze psát

$$x_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{x} \in \mathbf{K} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}],$$

$$x_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{x} = x_2\mathbf{u} + x_3\mathbf{v} + x_4\mathbf{w},$$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 - x_2\mathbf{u} - x_3\mathbf{v} - x_4\mathbf{w}.$$

Souřadnice variety můžeme získat vyřešením soustavy lineárních rovnic maticově zapsané takto:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Z čehož dostáváme jediné řešení a tím je:

$$x_1 = -\frac{5}{2},\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = -\frac{5}{2},\ x_4 = 1.$$

A tedy souřadnice variety $\mathbf{x} + \mathbf{K}$ v dané bázi $\mathcal{C}$ je $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{C}} = \left(-\frac{5}{2}\right)$.

○

Příklad 2.2.5. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_4$ je dán podprostor $\mathbf{K} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$. Stanovte dimenzi faktorprostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$, nalezněte alespoň jednu jeho bázi a stanovte souřadnice variety $\mathbf{x} + \mathbf{K}$ v této bázi, je-li ve zvolené bázi prostoru $\mathbf{V}$ dáno:
$\{\mathbf{u}\} = (-1, 1, 1, -2), \{\mathbf{v}\} = (2, 0, -1, 1), \{\mathbf{w}\} = (-3, 1, 2, -3)$ a $\{\mathbf{x}\} = (2, 1, 3, 1)$.

Řešení:
Budeme postupovat stejně jako u předchozího příkladu 2.2.4. Nejprve zjišťujeme dimenzi $\mathbf{K}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z čehož vyplývá, že $\dim \mathbf{K} = 2$. A dle věty 2.1.7 je $\dim \mathbf{V}/\mathbf{K} = 4 - 2 = 2$. Jelikož vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ jsou lineárně závislé, budeme dále uvažovat $\mathbf{K} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.

Zabývejme se nyní konstrukcí některé báze prostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$. S využitím věty 2.1.8, podle níž je třeba vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ doplnit ve smyslu Steinitzovy věty na bázi prostoru $\mathbf{V}$, volme $\{\mathbf{e}_1\} = (0, 0, 1, 0)$ a $\{\mathbf{e}_2\} = (0, 0, 0, 1)$ tak, aby byly společně s vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ lineárně nezávislé. S ohledem na větu 2.1.8 je tedy $\mathcal{C} = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{K}, \mathbf{e}_2 + \mathbf{K} \rangle$ bází prostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$.

Varieta $\mathbf{x} + \mathbf{K}$, která je vektorem ve faktorprostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$, bude mít v bázi $\mathcal{C}$ souřadnice (x_1, x_2) právě tehdy, když

$$\mathbf{x} + \mathbf{K} = x_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{K}) + x_2(\mathbf{e}_2 + \mathbf{K}).$$

Již z předchozích příkladů jsme zjistili, že budeme pracovat se vztahem

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 - x_3\mathbf{u} - x_4\mathbf{v}.$$

Souřadnice variety můžeme získat vyřešením soustavy lineárních rovnic, maticově zapsané takto:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Z čehož dostáváme jediné řešení a tím je:

$$x_1 = \frac{7}{2},\ x_2 = \frac{3}{2},\ x_3 = -1,\ x_4 = -\frac{3}{2}.$$

A tedy souřadnice variety $\mathbf{x} + \mathbf{K}$ v dané bázi $\mathcal{C}$ jsou $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{C}} = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

○

Kapitola 3

Jordanova báze příslušná lineárnímu operátoru

Poslední kapitola se řídí skripty Lineární operátory [2], podle nichž je rozčleněna na jednotlivé podkapitoly: Podprostory cyklické vzhledem k lineárnímu operátoru, Lineární operátory s jedinou vlastní hodnotou, Lineární operátory s obecným spektrem a Jordanův tvar čtvercové matice.

V každé z těchto podkapitol se nachází opět sekce „Teorie", ve které nalezneme všechny potřebné definice a věty, na které se budeme dále odkazovat v sekci „Příklady".

3.1. Podprostory cyklické vzhledem k lineárnímu operátoru

3.1.1. Teorie

Definice 3.1.1. Zobrazení $\mathbb{A}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ se nazývá *lineární operátor na* $\mathbf{V}$, jestliže má následující vlastnosti:

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$: $\mathbb{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbb{A}(\mathbf{u}) + \mathbb{A}(\mathbf{v})$,
2. $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \forall t \in T$: $\mathbb{A}(t\mathbf{u}) = t\mathbb{A}(\mathbf{u})$.

Poznámka 3.1.2. Pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ definujeme *identický lineární operátor* jako zobrazení $\mathbb{I}\colon \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ a *nulový lineární operátor* jako zobrazení $\mathbb{O}\colon \mathbf{x} \mapsto \mathbf{o}$.

Definice 3.1.3. Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor na $\mathbf{V}$, $\mathcal{B} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ nechť je báze prostoru $\mathbf{V}$. Označíme-li

$$\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_i)\}_{\mathcal{B}} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in}), \quad 1 \leq i \leq n,$$

pak matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$ řádu n nazýváme *matice lineárního operátoru* $\mathbb{A}$ *v bázi* $\mathcal{B}$ a značíme ji $(\mathbb{A}, \mathcal{B})$.

Definice 3.1.4. Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor na $\mathbf{V}$. Polynom z $T[x]$, označovaný $m_{\mathbb{A}}(x)$ se nazývá *minimální polynom operátoru* $\mathbb{A}$, jestliže platí:

1. polynom $m_{\mathbb{A}}(x)$ je normovaný,
2. $m_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}) = \mathbb{O}$,
3. polynom $m_{\mathbb{A}}(x)$ je nejmenšího stupně ze všech polynomů splňujících předchozí dvě podmínky.

Definice 3.1.5. Nechť $\mathbf{A}$ je matice libovolného řádu nad T. Polynom z $T[x]$, označovaný $m_{\mathbf{A}}(x)$ se nazývá *minimální polynom matice* $\mathbf{A}$, jestliže platí:

1. polynom $m_{\mathbf{A}}(x)$ je normovaný,
2. $m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$,
3. polynom $m_{\mathbf{A}}(x)$ je nejmenšího stupně ze všech polynomů splňujících předchozí dvě podmínky.

Věta 3.1.6. *Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor na $\mathbf{V}$, $\mathcal{B}$ libovolná báze $\mathbf{V}$. Pak platí, že polynom $m_{\mathbb{A}}(x)$ existuje, právě když existuje polynom $m_{(\mathbb{A},\mathcal{B})}(x)$, přičemž platí*

$$m_{\mathbb{A}}(x) = m_{(\mathbb{A},\mathcal{B})}(x).$$

Definice 3.1.7. Nechť $\mathbf{A}$ je matice libovolného řádu nad T. Polynom $ch_{\mathbf{A}}(x)$ definovaný vztahem

$$ch_{\mathbf{A}}(x) = \det(\mathbf{A} - x\mathbf{E})$$

se nazývá *charakteristický polynom matice* $\mathbf{A}$.

Definice 3.1.8. Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor. *Charakteristickým polynomem $ch_{\mathbb{A}}(x)$ lineárního operátoru* $\mathbb{A}$ pak rozumíme charakteristický polynom jeho matice nad libovolnou bází.

Definice 3.1.9. Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor na $\mathbf{V}$. Platí-li pro skalár $\lambda \in T$ a nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$

$$\mathbb{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x},$$

řekneme, že λ je *vlastní hodnota lineárního operátoru* $\boldsymbol{A}$ a $\mathbf{x}$ *vlastní vektor lineárního operátoru* $\mathbb{A}$ *příslušný vlastní hodnotě* λ.
Množina vlastních hodnot lineárního operátoru $\mathbb{A}$ se nazývá *spektrum lineárního operátoru* $\mathbb{A}$ a značí se $\operatorname{Spec}\mathbb{A}$.

Definice 3.1.10. Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor, λ je některá jeho vlastní hodnota. Pak množina $\mathbf{N}_\lambda$ definovaná vztahem

$$\mathbf{N}_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \mid \mathbb{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}\}$$

se nazývá *vlastní podprostor lineárního operátoru $\mathbb{A}$ příslušný vlastní hodnotě λ.*

Věta 3.1.11. *Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor na $\mathbf{V}$ a nechť λ je některá jeho vlastní hodnota. Pak platí:*

1. $\mathbf{N}_\lambda \subseteq\subseteq \mathbf{V},\ \mathbf{N}_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$,

2. *je-li $\mathcal{B}$ některá báze $\mathbf{V}$, pak $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ je vlastním vektorem operátoru $\mathbb{A}$ příslušným λ, právě když jeho souřadnice v bázi $\mathcal{B}$ jsou netriviálním řešením soustavy lineárních homogenních rovnic o matici*

$$(\mathbb{A}, \mathcal{B})^T - \lambda\mathbf{E}.$$

Věta 3.1.12. *Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor na $\mathbf{V}$. Pak spektrum lineárního operátoru $\mathbb{A}$ je rovno množině kořenů jeho charakteristického polynomu.*

Definice 3.1.13. Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor, λ je některá jeho vlastní hodnota. Pak

1. podprostor $\mathbf{R}_\lambda$ definovaný jako množina

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \mid \exists m \in \mathbb{N}\colon (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^m(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\}$$

   se nazývá *kořenový podprostor lineárního operátoru $\mathbb{A}$ příslušný vlastní hodnotě λ*,

2. nenulové vektory z $\mathbf{R}_\lambda$ se nazývají *adjungované vektory lineárního operátoru $\mathbb{A}$ příslušné vlastní hodnotě λ*,

3. je-li $\mathbf{u}$ adjungovaný vektor příslušný λ, pak přirozené číslo m, pro něž platí

$$(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^m(\mathbf{u}) = \mathbf{o} \wedge (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^{m-1}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{o},$$

   se nazývá *řád adjungovaného vektoru* $\mathbf{u}$.

Poznámka 3.1.14. Vlastní vektory lineárního operátoru $\mathbb{A}$ příslušné λ jsou adjungovanými vektory příslušnými λ řádu 1.

Věta 3.1.15. *Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor, λ je některá jeho vlastní hodnota. Pak existuje jediné $m \in \mathbb{N}$ tak, že platí:*

1. $\mathbf{R}_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^m$,
2. $\mathbf{R}_\lambda \neq \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^{m-1}$.

Definice 3.1.16. Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor na $\mathbf{V}$ a λ některá jeho vlastní hodnota. Pak číslo $m \in \mathbb{N}$ přiřazené k $\mathbf{R}_\lambda$ ve větě 3.1.15 se nazývá *řád kořenového podprostoru* $\mathbf{R}_\lambda$ a značí se m_λ.

Důsledek 3.1.17. *Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor. Jestliže je jeho charakteristický polynom zapsán ve tvaru*

$$ch_{\mathbb{A}}(x) = (-1)^n \cdot (x - t_1)^{g_1} \cdot (x - t_2)^{g_2} \dots (x - t_r)^{g_r},$$

kde $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různá, pak

1. $\{t_1, \dots, t_r\} = \operatorname{Spec} \mathbb{A}$,
2. *pro $i = 1, \dots, r$ udává g_i dimenzi kořenového podprostoru $\mathbf{R}_{t_i}$.*

Definice 3.1.18. Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor na $\mathbf{V}$. Báze $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ se nazývá *báze cyklická vzhledem k lineárnímu operátoru* $\mathbb{A}$, existuje-li $\lambda \in \mathbb{C}$ tak, že platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\mathbf{e}_i) &= \lambda\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \mathbb{A}(\mathbf{e}_n) &= \lambda\mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Poznámka 3.1.19. Podmínky definice 3.1 pro bázi $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ jsou zřejmě ekvivalentní následujícím podmínkám:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})(\mathbf{e}_{i-1}) = (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^{i-1}(\mathbf{e}_1), \quad 2 \leq i \leq n, \\ \mathbf{o} &= (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})(\mathbf{e}_n) = (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^n(\mathbf{e}_1). \end{aligned}$$

Definice 3.1.20. Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor na $\mathbf{V}$. O vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ řekneme, že je *cyklickým prostorem vzhledem k lineárnímu operátoru*, existuje-li báze $\mathbf{V}$ cyklická vzhledem k $\mathbb{A}$.

Věta 3.1.21. *Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor na $\mathbf{V}_n$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *ve $\mathbf{V}_n$ existuje báze cyklická vzhledem k $\mathbb{A}$,*
2. *existuje adjungovaný vektor řádu n operátoru $\mathbb{A}$,*
3. *$\mathbb{A}$ má jedinou vlastní hodnotu λ a $\dim \mathbf{N}_\lambda = 1$,*
4. *$m_{\mathbb{A}}(x) = (x - \lambda)^n$.*

3.1.2. Příklady

Příklad 3.1.22. Nechť je lineární operátor $\mathbb{A}$ na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbb{R}$ reprezentován maticí $\mathbf{A}$ vzhledem k některé bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}$. Je prostor $\mathbf{V}$ cyklický vzhledem k lineárnímu operátoru $\mathbb{A}$? Pokud ano, nalezněte některou jeho cyklickou bázi.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 9 & -5 \end{pmatrix}$

Řešení a):
Nejprve nalezneme vlastní hodnoty lineárního operátoru jako kořeny charakteristického polynomu (věta 3.1.12) ve tvaru (definice 3.1.7)

$$ch_{\mathbb{A}}(x) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3.$$

Kořeny tohoto charakteristického polynomu tvoří spektrum lineárního operátoru, tj. $\operatorname{Spec}\mathbb{A} = \{2\}$. V tomto případě se jedná o trojnásobný kořen.

Dále s využitím věty 3.1.11 určíme vlastní podprostor $\mathbf{N}_\lambda$ prostoru $\mathbf{V}$. Soustava rovnic, kterou budeme řešit má tvar

$$\begin{aligned} (2-\lambda)x_1 \qquad\qquad\quad - \qquad 2x_3 &= 0 \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 - \qquad x_3 &= 0 \\ (2-\lambda)x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Abychom dostali vlastní podprostor $\mathbf{N}_2$, řešíme tuto soustavu pro $\lambda = 2$. Dostáváme matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vyřešením dostáváme vlastní podprostor $\mathbf{N}_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\middle|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}} \in [(0,1,0)]\right\}$.

Jelikož má lineární operátor $\mathbb{A}$ jedinou vlastní hodnotu $\lambda = 2$ a $\dim \mathbf{N}_2 = 1$, pak s ohledem na větu 3.1.21 je vektorový prostor $\mathbf{V}$ cyklický vzhledem k lineárnímu operátoru $\mathbb{A}$.

Dále se zabývejme nalezením některé jeho cyklické báze $\mathcal{C} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Z definice 3.1.18 plyne, že $\mathbf{e}_3$ je vlastním vektorem lineárního operátoru $\mathbb{A}$ příslušící vlastní hodnotě $\lambda = 2$, tudíž volme například $\{\mathbf{e}_3\}_{\mathcal{B}} = (0, 1, 0)$.

Vektor $\mathbf{e}_2$ určíme ze vztahu $\mathbb{A}(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ (definice 3.1.18). S ohledem na poznámku 3.1.19 určíme souřadnice $\mathbf{e}_2$ jako řešení soustavy lineárních rovnic $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\{\mathbf{e}_2\}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{T}} = \{\mathbf{e}_3\}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{T}}$, a to odpovídá rozšířené matici soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Řešením je vektor $\{\mathbf{e}_2\}_{\mathcal{B}} = (1, 1, 0)$.

Stejný postup využijeme při hledání vektoru $\mathbf{e}_1$. Tedy řešíme soustavu rovnic $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\{\mathbf{e}_1\}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{T}} = \{\mathbf{e}_2\}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{T}}$, tj. soustavu o její rozšířené matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Řešením je vektor $\{\mathbf{e}_1\}_{\mathcal{B}} = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$.

Hledaná cyklická báze je tedy ve tvaru $\mathcal{C} = \left\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \right\rangle$, kde $\{\mathbf{e}_1\}_{\mathcal{B}} = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$, $\{\mathbf{e}_2\}_{\mathcal{B}} = (1, 1, 0)$ a $\{\mathbf{e}_3\}_{\mathcal{B}} = (0, 1, 0)$.

○

Řešení b):
Nejprve již známým způsobem určíme vlastní hodnoty lineárního operátoru. Dostaneme, že $\operatorname{Spec} \mathbb{A} = \{3\}$. Dále určíme vlastní podprostor $\mathbf{N}_\lambda$ prostoru $\mathbf{V}$.
Soustava rovnic, kterou budeme tentokrát řešit má tvar

$$\begin{aligned} (3-\lambda)x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= 0 \\ (3-\lambda)x_2 \qquad &= 0 \\ x_2 + (3-\lambda)x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Volme tentokrát $\lambda = 3$ a dostáváme matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešením získáme vlastní podprostor $\mathbf{N}_3 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\middle|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}} \in [(1, 0, 0)] \right\}$.

Jelikož má lineární operátor $\mathbb{A}$ jedinou vlastní hodnotu $\lambda = 3$ a $\dim \mathbf{N}_3 = 1$, pak opět s ohledem na větu 3.1.21 je vektorový prostor $\mathbf{V}$ cyklický vzhledem k lineárnímu operátoru $\mathbb{A}$.

Nalezněme některou jeho cyklickou bázi $\mathcal{C} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Volme například $\{\mathbf{e}_3\}_\mathcal{B} = (1, 0, 0)$. Vektor $\mathbf{e}_2$ dostaneme jako řešení soustavy lineárních rovnic $(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\{\mathbf{e}_2\}_\mathcal{B}^\mathrm{T} = \{\mathbf{e}_3\}_\mathcal{B}^\mathrm{T}$, tedy $\{\mathbf{e}_2\}_\mathcal{B} = (1, 0, 1)$. A v poslední řadě vektor $\mathbf{e}_1$ dostaneme jako řešení soustavy lineárních rovnic $(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\{\mathbf{e}_1\}_\mathcal{B}^\mathrm{T} = \{\mathbf{e}_2\}_\mathcal{B}^\mathrm{T}$, tedy $\{\mathbf{e}_1\}_\mathcal{B} = (1, 1, 0)$.

Hledaná cyklická báze je tedy ve tvaru $\mathcal{C} = \Big\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \Big\rangle$, kde $\{\mathbf{e}_1\}_\mathcal{B} = (1, 1, 0)$, $\{\mathbf{e}_2\}_\mathcal{B} = (1, 0, 1)$ a $\{\mathbf{e}_3\}_\mathcal{B} = (1, 0, 0)$.

○

Řešení c):
Nejprve již známým způsobem určíme vlastní hodnoty lineárního operátoru jako kořeny charakteristického polynomu

$$ch_\mathbb{A}(x) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda) \cdot \Big((1-\lambda)^2 - 1\Big) = (1-\lambda) \cdot (1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1) = -\lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2).$$

Dostaneme, že $\operatorname{Spec} \mathbb{A} = \{0, 1, 2\}$.

Jelikož spektrum lineárního operátoru $\mathbb{A}$ tvoří tři vlastní hodnoty, pak s ohledem na větu 3.1.21 není vektorový prostor $\mathbf{V}$ cyklický vzhledem k $\mathbb{A}$.

○

Řešení d):
Nejprve určíme vlastní hodnoty lineárního operátoru, jako kořeny charakteristického polynomu

$$ch_\mathbb{A}(x) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 7-\lambda & -4 \\ 0 & 9 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot (7-\lambda) \cdot (5-\lambda) + 36(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda) \cdot \Big((7-\lambda) \cdot (5-\lambda) + 36\Big) = (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (1-\lambda)^3$$

Dostaneme, že $\operatorname{Spec} \mathbb{A} = \{1\}$.

Dále určíme vlastní podprostor $\mathbf{N}_\lambda$ prostoru $\mathbf{V}$. Soustava rovnic, kterou budeme řešit, má tvar

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \\ -x_1 + (7-\lambda)x_2 + \qquad 9x_3 &= 0 \\ -2x_1 - \qquad 4x_2 + (-5-\lambda)x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Volme $\lambda = 1$ a dostáváme matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 9 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Řešení nám určuje vlastní podprostor $\mathbf{N}_1 = \Big\{ \mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\Big|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}} \in [(0,3,-2)] \Big\}$.

Jelikož má lineární operátor $\mathbb{A}$ jedinou vlastní hodnotu $\lambda = 1$ a $\dim \mathbf{N}_1 = 1$, pak opět s ohledem na větu 3.1.21 je vektorový prostor $\mathbf{V}$ cyklický vzhledem k lineárnímu operátoru $\mathbb{A}$.

Nalezněme některou jeho cyklickou bázi $\mathcal{C} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Volme například $\{\mathbf{e}_3\}_{\mathcal{B}} = (0,3,-2)$. Vektor $\mathbf{e}_2$ získáme jako řešení soustavy lineárních rovnic odpovídající rozšířené matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 9 & 3 \\ -2 & -4 & -6 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

tedy dostáváme $\{\mathbf{e}_2\}_{\mathcal{B}} = (0,5,-3)$.

A v poslední řadě vektor $\mathbf{e}_1$ dostaneme jako řešení soustavy lineárních rovnic odpovídající rozšířené matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 9 & 5 \\ -2 & -4 & -6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 9 & 5 \\ 0 & 16 & 24 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{13}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

tedy $\{\mathbf{e}_1\}_{\mathcal{B}} = \big(-\frac{1}{8}, 1, -\frac{1}{8}\big)$.

Hledaná cyklická báze je ve tvaru $\mathcal{C} = \big\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \big\rangle$, kde $\{\mathbf{e}_1\}_{\mathcal{B}} = \big(-\frac{1}{8}, 1, -\frac{1}{8}\big)$, $\{\mathbf{e}_2\}_{\mathcal{B}} = (0,5,-3)$ a $\{\mathbf{e}_3\}_{\mathcal{B}} = (0,3,-2)$.

○

3.2. Lineární operátory s jedinou vlastní hodnotou

3.2.1. Teorie

Definice 3.2.1. Nechť $t \in \mathbb{C}$ a $m \in \mathbb{N}$. Pak *Jordanovou buňkou řádu* m *příslušnou číslu* t budeme rozumět matici náležící $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ označovanou $\mathbf{J}_t^{(m)}$ a definovanou takto:

$$\mathbf{J}_t^{(m)} = (a_{ij})_m,$$

kde

1. $a_{ij} = t$ pro $j = i$, $i = 1, \ldots, m$,
2. $a_{ij} = 1$ pro $j = i + 1$, $i = 1, \ldots, m - 1$,
3. $a_{ij} = 0$ v ostatních případech.

Poznámka 3.2.2. Jordanova buňka řádu m příslušná číslu t má zřejmě následující tvar:

$$\mathbf{J}_t^{(m)} = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Definice 3.2.3. Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor na prostoru $\mathbf{V}$. Podprostor $\mathbf{W}$ prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá *invariantní vzhledem k lineárnímu operátoru* $\mathbb{A}$ (krátce $\mathbb{A}$-*invariantní*), jestliže

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V} \colon \mathbf{x} \in \mathbf{W} \Rightarrow \mathbb{A}(\mathbf{x}) \in \mathbf{W}.$$

Definice 3.2.4. Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor na prostoru $\mathbf{V}$. Nechť dále $\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \ldots, \mathbf{U}^{(r)}$ jsou netriviální $\mathbb{A}$-invariantní podprostory ve $\mathbf{V}$ a $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_r$ po řadě báze těchto podprostorů cyklické vzhledem k $\mathbb{A}$. Pak bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}$ sestavenou z bází $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_r$ nazýváme *Jordanova báze vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *příslušná lineárnímu operátoru* $\mathbb{A}$.
Báze $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_r$ nazýváme *cyklické složky báze* $\mathcal{B}$, počty jejich prvků pak *délky složek.*

Věta 3.2.5. *Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor na prostoru $\mathbf{V}$. Jordanova báze prostoru $\mathbf{V}$ příslušná lineárnímu operátoru $\mathbb{A}$ existuje právě tehdy, když $\mathbf{V}$ je direktním součtem podprostorů cyklických vzhledem k $\mathbb{A}$.*

Definice 3.2.6. Blokově diagonální matici, jejímiž diagonálními bloky jsou Jordanovy buňky, nazýváme *Jordanovou maticí* nebo *maticí v normálním Jordanově tvaru.*

Věta 3.2.7. *Nechť* $\mathbb{A}$ *je lineární operátor na* $\mathbf{V}$ *a nechť* $\mathcal{B}$ *je báze* $\mathbf{V}$*. Pak platí, že matice* $(\mathbb{A}, \mathcal{B})$ *je Jordanovou maticí, právě když* $\mathcal{B}$ *je Jordanova báze* $\mathbf{V}$ *příslušná lineárnímu operátoru* $\mathbb{A}$*.*

Věta 3.2.8. *Nechť* $\mathbb{A}$ *je lineární operátor na* $\mathbf{V}$ *mající jedinou vlastní hodnotu* λ *a* m *je řád prostoru* $\mathbf{V}$*. Nechť dále ve* $\mathbf{V}$ *existuje Jordanova báze* $\mathcal{B}$ *příslušná* $\mathbb{A}$*. Pak počet* $n(h)$ *adjungovaných vektorů řádu* h *příslušných vlastní hodnotě* λ *náležících bázi* $\mathcal{B}$ *je pro každé* h*,* $1 \leq h \leq m$*, dán vztahem*

$$n(h) = \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})^h \mod \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})^{h-1}.$$

Věta 3.2.9. *Nechť* $\mathbb{A}$ *je lineární operátor na* $\mathbf{V}$ *mající jedinou vlastní hodnotu* λ *a* m *je řád prostoru* $\mathbf{V}$*. Nechť dále ve* $\mathbf{V}$ *existuje Jordanova báze* $\mathcal{B}$ *příslušná* $\mathbb{A}$*. Pak platí:*

1. *počet* $y(h)$ *cyklických složek báze* $\mathcal{B}$ *o délce* h *je pro každé* h*,* $1 \leq h \leq m$*, dán vztahy*

$$y(h) = n(h) - n(h+1), 1 \leq h \leq m-1,$$
$$y(m) = n(m),$$

2. *počet všech cyklických složek báze* $\mathcal{B}$ *je roven dimenzi vlastního podprostoru* $\mathbf{N}_\lambda$*.*

Věta 3.2.10. *Nechť* $\mathbb{A}$ *je lineární operátor na* $\mathbf{V}$ *mající jedinou vlastní hodnotu* λ*, pak existuje alespoň jedna Jordanova báze prostoru* $\mathbf{V}$ *příslušná lineárnímu operátoru* $\mathbb{A}$*.*

3.2.2. Příklady

Příklad 3.2.11. Nechť je v jisté bázi $\mathcal{D}$ prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbb{R}$ lineární operátor $\mathbb{A}$ reprezentován maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte některou Jordanovu bázi prostoru $\mathbf{V}$ příslušnou operátoru $\mathbb{A}$ a dále nalezněte jeho Jordanovu matici.

Řešení:
Nejprve nalezneme vlastní hodnoty lineárního operátoru jako kořeny charakteristického polynomu (věta 3.1.12) ve tvaru (definice 3.1.7)

$$ch_{\mathbb{A}}(x) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda) + (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\cdot\big((1-\lambda)\cdot(3-\lambda)+1\big) = (2-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda-2)^3.$$

Kořeny tohoto charakteristického polynomu tvoří spektrum lineárního operátoru, tj. $\operatorname{Spec}\mathbb{A} = \{2\}$. V tomto případě se jedná o trojnásobný kořen.
Operátor $\mathbb{A}$ má jedinou vlastní hodnotu $\lambda = 2$, a tedy $\mathbf{V} = \mathbf{R}_2$. Existence Jordanovy báze plyne z věty 3.2.10.

Dále zaveďme operátor $\mathbb{B}$ tak, že $\mathbb{B} = \mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}$, kde za λ dosadíme číslo 2, tj. dostaneme $\mathbb{B} = \mathbb{A} - 2\mathbb{I}$. Operátor $\mathbb{B}$ je reprezentován maticí $\mathbf{B}$, která je ve tvaru

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poté nalezneme řád m prostoru $\mathbf{V} = \mathbf{R}_2$ podle věty 3.1.15. Sestrojíme posloupnost dimenzí $n_1,\ n_2,\ \ldots$ podprostorů $\mathbf{W}_1,\ \mathbf{W}_2,\ \ldots,$ kde $\mathbf{W}_m = \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^m$. Zatímco řád m je nejmenší index takový, že $n_m = n_{m+1}$. V tom případě je kořenový podprostor $\mathbf{R}_\lambda$ roven $\mathbf{W}_m$.

Zabývejme se nalezením dimenze podprostoru $\mathbf{W}_1$, tj.

$$n_1 = \dim\mathbf{W}_1 = \dim\operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 2\mathbb{I}) = \dim\operatorname{Ker}\mathbb{B}.$$

Podprostor $\operatorname{Ker}\mathbb{B}$ nalezneme jako řešení soustavy homogenních lineárních rovnic dané maticí $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$, tj.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostáváme, že $\mathbf{W}_1 = \operatorname{Ker}\mathbb{B} = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\Big|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{D}} \in [(1,-1,0)]\Big\}$ a jeho dimenze $n_1 = 1$.

Dále se zabývejme nalezením dimenze podprostoru $\mathbf{W}_2$, tj.

$$n_2 = \dim \mathbf{W}_2 = \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 2\mathbb{I})^2 = \dim \operatorname{Ker} \mathbb{B}^2.$$

Podprostor $\operatorname{Ker} \mathbb{B}^2$ nalezneme jako řešení soustavy lineárních rovnic dané maticí $(\mathbf{B}^2)^{\mathrm{T}}$.

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{B}^2)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostáváme, že $\mathbf{W}_2 = \operatorname{Ker}(\mathbb{B})^2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\middle|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{D}} \in [(1,0,0),(0,1,0)] \right\}$ a jeho dimenze $n_2 = 2$.

V poslední řadě se zabývejme nalezením dimenze podprostoru $\mathbf{W}_3$, tj.

$$n_3 = \dim \mathbf{W}_3 = \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 2\mathbb{I})^3 = \dim \operatorname{Ker} \mathbb{B}^3.$$

Podprostor $\operatorname{Ker} \mathbb{B}^3$ nalezneme jako řešení soustavy lineárních rovnic dané maticí $(\mathbf{B}^3)^{\mathrm{T}}$.

$$\mathbf{B}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostáváme, že $\mathbf{W}_3 = \operatorname{Ker}(\mathbb{B})^3 = \mathbf{R}_2$.
Řád podprostoru $\mathbf{R}_2$ je $m = 3$, tudíž $\mathbf{V} = \operatorname{Ker} \mathbb{B}^3$.

Dále s využitím věty 3.2.8 zjistíme počet adjungovaných vektorů řádu h vztahem

$$n(h) = \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^h \mod \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^{h-1}.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} n(3) &= \dim \operatorname{Ker} \mathbb{B}^3 - \dim \operatorname{Ker} \mathbb{B}^2 = 3 - 2 = 1, \\ n(2) &= \dim \operatorname{Ker} \mathbb{B}^2 - \dim \operatorname{Ker} \mathbb{B} = 2 - 1 = 1, \\ n(1) &= \dim \operatorname{Ker} \mathbb{B} = 1. \end{aligned}$$

Následně dle věty 3.2.9 určíme počet cyklických složek o délce h vztahy

$$\begin{aligned} y(h) &= n(h) - n(h+1), \quad 1 \leq h \leq m - 1, \\ y(m) &= n(m). \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} y(1) &= n(1) - n(2) = 0, \\ y(2) &= n(2) - n(3) = 0, \\ y(3) &= n(3) = 1. \end{aligned}$$

Jelikož jsme zjistili, že Jordanova báze bude obsahovat pouze jednu cyklickou složku o délce 3, bude se jednat o cyklickou bázi. To znamená, že budeme dále postupovat stejně jako při řešení příkladu 3.1.22.

Zabývejme se tedy nalezením některé cyklické báze $\mathcal{C} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$.
Z definice 3.1.18 plyne, že $\mathbf{e}_3$ je vlastním vektorem lineárního operátoru $\mathbb{A}$ příslušící vlastní hodnotě $\lambda = 2$, tudíž volme například $\{\mathbf{e}_3\}_{\mathcal{D}} = (1, -1, 0)$.

Vektor $\mathbf{e}_2$ určíme ze vztahu $\mathbb{A}(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ (definice 3.1.18). S ohledem na poznámku 3.1.19 určíme souřadnice $\mathbf{e}_2$ jako řešení soustavy lineárních rovnic $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\{\mathbf{e}_2\}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{T}} = \{\mathbf{e}_3\}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{T}}$, a to odpovídá rozšířené matici soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Řešením je vektor $\{\mathbf{e}_2\}_{\mathcal{D}} = (1, -2, 0)$. Stejný postup využijeme při hledání vektoru $\mathbf{e}_1$. Tedy řešíme soustavu rovnic $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\{\mathbf{e}_1\}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{T}} = \{\mathbf{e}_2\}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{T}}$, tj. soustavu o její rozšířené matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Řešením je vektor $\{\mathbf{e}_1\}_{\mathcal{D}} = (0, 0, -1)$. Hledaná báze je ve tvaru $\mathcal{C} = \Big\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \Big\rangle$, kde $\{\mathbf{e}_1\}_{\mathcal{D}} = (0, 0, -1)$, $\{\mathbf{e}_2\}_{\mathcal{D}} = (1, -2, 0)$ a $\{\mathbf{e}_3\}_{\mathcal{D}} = (1, -1, 0)$.

Jako poslední krok provedeme zkoušku, tj. nalezneme matici $(\mathbb{A}, \mathcal{C})$. Zde nám postačí vektory z $\mathcal{C}$ zobrazit v $\mathcal{D}$, tj.

$$\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_1)\}_{\mathcal{D}} = (0, 0, -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (1, -2, -2) = \{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}_{\mathcal{D}},$$
$$\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_2)\}_{\mathcal{D}} = (1, -2, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (3, -5, 0) = \{2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}_{\mathcal{D}},$$
$$\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_3)\}_{\mathcal{D}} = (1, -1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (2, -2, 0) = \{2\mathbf{e}_3\}_{\mathcal{D}}.$$

Odtud

$$\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_1)\}_{\mathcal{C}} = \{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}_{\mathcal{C}} = (2, 1, 0),$$
$$\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_2)\}_{\mathcal{C}} = \{2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}_{\mathcal{C}} = (0, 2, 1),$$
$$\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_3)\}_{\mathcal{C}} = \{2\mathbf{e}_3\}_{\mathcal{C}} = (0, 0, 2).$$

A tedy Jordanova matice (věta 3.2.7) bude ve tvaru

$$(\mathbb{A}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

○

Příklad 3.2.12. Nechť je v jisté bázi $\mathcal{D}$ prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbb{R}$ lineární operátor $\mathbb{A}$ reprezentován maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte některou Jordanovu bázi prostoru $\mathbf{V}$ příslušnou operátoru $\mathbb{A}$ a dále nalezněte jeho Jordanovu matici.

Řešení:
Nejprve stejně jako u předešlého řešení příkladu 3.2.11 nalezneme vlastní hodnoty lineárního operátoru jako kořeny charakteristického polynomu (věta 3.1.12) ve tvaru (definice 3.1.7)

$$ch_{\mathbb{A}}(x) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3-\lambda & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (\lambda - 2) \cdot (\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) = (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 2)^3 = (\lambda - 2)^4.$$

Kořeny tohoto charakteristického polynomu tvoří spektrum lineárního operátoru, tj. $\operatorname{Spec} \mathbb{A} = \{2\}$. V tomto případě se jedná o čtyřnásobný kořen.
Operátor $\mathbb{A}$ má jedinou vlastní hodnotu $\lambda = 2$, a tedy $\mathbf{V} = \mathbf{R}_2$. Existence Jordanovy báze plyne opět z věty 3.2.10.

Dále zaveďme operátor $\mathbb{B}$ tak, že $\mathbb{B} = \mathbb{A} - 2\mathbb{I}$. Operátor $\mathbb{B}$ je reprezentován maticí $\mathbf{B}$ ve tvaru

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poté nalezneme řád m prostoru $\mathbf{V} = \mathbf{R}_2$ podle věty 3.1.15. Sestrojíme posloupnost dimenzí $n_1, n_2, \ldots$ podprostorů $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \ldots$, zatímco řád m je nejmenší index takový, že $n_m = n_{m+1}$. V tom případě je kořenový podprostor $\mathbf{R}_\lambda$ roven $\mathbf{W}_m$.

Zabývejme se nalezením dimenze podprostoru $\mathbf{W}_1$, tj.

$$n_1 = \dim \mathbf{W}_1 = \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 2\mathbb{I}) = \dim \operatorname{Ker} \mathbb{B}.$$

Podprostor $\operatorname{Ker}\mathbb{B}$ nalezneme jako řešení soustavy lineárních homogenních rovnic dané maticí $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$, tj.

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostáváme, že $\mathbf{W}_1 = \operatorname{Ker}\mathbb{B} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\middle|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{D}} \in [(1,0,0,1),(0,1,0,1)]\right\}$ a jeho dimenze $n_1 = 2$.

Dále se zabývejme nalezením dimenze podprostoru $\mathbf{W}_2$, tj.

$$n_2 = \dim \mathbf{W}_2 = \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 2\mathbb{I})^2 = \dim \operatorname{Ker}\mathbb{B}^2.$$

Podprostor $\operatorname{Ker}\mathbb{B}^2$ nalezneme jako řešení soustavy lineárních rovnic dané maticí $(\mathbf{B}^2)^{\mathrm{T}}$.

$$(\mathbf{B}^2)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho $\mathbf{W}_2 = \operatorname{Ker}(\mathbb{B})^2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\middle|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{D}} \in [(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,0,1)]\right\}$ a jeho dimenze $n_2 = 3$.

V poslední řadě se zabývejme nalezením dimenze podprostoru $\mathbf{W}_3$, tj.

$$n_3 = \dim \mathbf{W}_3 = \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 2\mathbb{I})^3 = \dim \operatorname{Ker}\mathbb{B}^3.$$

Z toho $\mathbf{W}_3 = \operatorname{Ker}(\mathbb{B})^3 = \mathbf{V} = \mathbf{R}_2$. Řád podprostoru $\mathbf{R}_2$ je $m = 3$.

Dále s využitím věty 3.2.8 zjistíme počet adjungovaných vektorů řádu h vztahem

$$n(h) = \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^h \mod \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^{h-1}.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} n(3) &= \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{B})^3 - \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{B})^2 = 4 - 3 = 1, \\ n(2) &= \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{B})^2 - \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{B}) = 3 - 2 = 1, \\ n(1) &= \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{B}) = 2. \end{aligned}$$

Následně dle věty 3.2.9 určíme počet cyklických složek o délce h vztahy

$$\begin{aligned} y(h) &= n(h) - n(h+1), \quad 1 \le h \le m-1, \\ y(m) &= n(m). \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} y(1) &= n(1) - n(2) = 1, \\ y(2) &= n(2) - n(3) = 0, \\ y(3) &= n(3) = 1. \end{aligned}$$

Z toho Jordanova báze bude obsahovat jednu cyklickou složku délky 1 (tj. bude obsahovat jeden vektor) a jednu cyklickou složku délky 3 (tj. obsahující dva vektory).

Naším úkolem bude nyní sestrojit bázi $\mathcal{C}_1$ (tj. bázi $\operatorname{Ker}\mathbb{B}^3 \mod \operatorname{Ker}\mathbb{B}^2$) a díky ní poté bázi $\mathcal{C}_2$ (tj. bázi $\operatorname{Ker}\mathbb{B}^2 \mod \operatorname{Ker}\mathbb{B}$).

Nejprve se zabývejme bází $\mathcal{C}_1$. Zde nám stačí doplnit $\operatorname{Ker}\mathbb{B}^2$ na bázi $\operatorname{Ker}\mathbb{B}^3$. Zvolme například vektor $\{\mathbf{e}_{13}\}_{\mathcal{D}} = (0,0,1,0)$. Dále budeme využívat vztahu

$$\mathbf{e}_{h-1,j} = \mathbb{B}(\mathbf{e}_{h,j}), \quad 1 \le j \le n(h).$$

Počítejme

$$\{\mathbf{e}_{12}\}_{\mathcal{D}} = \{\mathbf{e}_{13}\}_{\mathcal{D}} \cdot \mathbb{B} = (0,0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2,5,0,-1),$$

$$\{\mathbf{e}_{11}\}_{\mathcal{D}} = \{\mathbf{e}_{12}\}_{\mathcal{D}} \cdot \mathbb{B} = (-2,5,0,-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-8,4,0,4).$$

Celkem máme $\mathcal{C}_1 = \left\langle \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{11} \right\rangle$, kde $\{\mathbf{e}_{13}\}_{\mathcal{D}} = (0,0,1,0), \{\mathbf{e}_{12}\}_{\mathcal{D}} = (-2,5,0,-1)$ a $\{\mathbf{e}_{11}\}_{\mathcal{D}} = (-8,4,0,4)$.

Dále se zabývejme bází $\mathcal{C}_2$, která bude obsahovat pouze jeden vektor, který volíme například jako $\{\mathbf{e}_{21}\}_{\mathcal{D}} = (1,0,0,1)$.
Jordanova báze je ve tvaru $\mathcal{B} = \left\langle \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{11}, \mathbf{e}_{21} \right\rangle$, kde $\{\mathbf{e}_{13}\}_{\mathcal{D}} = (0,0,1,0), \{\mathbf{e}_{12}\}_{\mathcal{D}} = (-2,5,0,-1)$, $\{\mathbf{e}_{11}\}_{\mathcal{D}} = (-8,4,0,4)$ a $\{\mathbf{e}_{21}\}_{\mathcal{D}} = (1,0,0,1)$. Opět ověříme a zjistíme tak Jordanovu matici $(\mathbb{A}, \mathcal{B})$.

$$\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_{13})\}_{\mathcal{D}} = (0,0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (-2,5,2,-1) = \{\mathbf{e}_{12} + 2\mathbf{e}_{13}\}_{\mathcal{D}},$$

$$\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_{12})\}_{\mathcal{D}} = (-2,5,0,-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (-12,14,0,-6) = \{2\mathbf{e}_{11} + 2\mathbf{e}_{12}\}_{\mathcal{D}},$$

$$\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_{11})\}_{\mathcal{D}} = (-8,4,0,-4) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (-16,8,0,-8) = \{2\mathbf{e}_{11}\}_{\mathcal{D}},$$

$$\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_{21})\}_{\mathcal{D}} = (1,0,0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (2,0,0,2) = \{2\mathbf{e}_{21}\}_{\mathcal{D}}.$$

Odtud

$$
\begin{aligned}
\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_{13})\}_{\mathcal{B}} &= \{\mathbf{e}_{12} + 2\mathbf{e}_{13}\}_{\mathcal{C}} = (2,1,0,0),\\
\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_{12})\}_{\mathcal{B}} &= \{2\mathbf{e}_{11} + 2\mathbf{e}_{12}\}_{\mathcal{C}} = (0,2,1,0),\\
\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_{11})\}_{\mathcal{B}} &= \{2\mathbf{e}_{11}\}_{\mathcal{C}} = (0,0,2,0),\\
\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_{21})\}_{\mathcal{B}} &= \{2\mathbf{e}_{21}\}_{\mathcal{C}} = (0,0,0,2).
\end{aligned}
$$

A tedy Jordanova matice bude ve tvaru

$$
(\mathbb{A}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
$$

○

3.3. Lineární operátory s obecným spektrem

V této podkapitole nalezneme dva příklady, jejichž řešení je velice podobné tomu, které jsme viděli v předchozí podkapitole (příklady 3.2.11 a 3.2.12). Z toho důvodu zde tyto příklady jen stručně okomentujeme.

3.3.1. Teorie

Věta 3.3.1. *Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor na $\mathbf{V}$. Pak existuje alespoň jedna Jordanova báze prostoru $\mathbf{V}$ příslušná lineárnímu operátoru $\mathbb{A}$.*

Poznámka 3.3.2. Z této věty a věty 3.2.5 plyne následující důsledek (3.3.3).

Důsledek 3.3.3. Nechť $\mathbb{A}$ je lineární operátor na $\mathbf{V}$. Pak $\mathbf{V}$ je direktním součtem podprostorů cyklických vzhledem k lineárnímu operátoru $\mathbb{A}$.

3.3.2. Příklady

Příklad 3.3.4. Nechť je v jisté bázi $\mathcal{D}$ prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbb{R}$ lineární operátor $\mathbb{A}$ reprezentován maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte některou Jordanovu bázi prostoru $\mathbf{V}$ příslušnou operátoru $\mathbb{A}$ a dále nalezněte jeho Jordanovu matici.

Řešení:
Nejprve nalezneme vlastní hodnoty lineárního operátoru jako kořeny charakteristického polynomu

$$ch_{\mathbb{A}}(x) = \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 3 \\ -1 & -\lambda & -3 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+6\lambda^2-32 = -\lambda^3-2\lambda^2+8\lambda^2-32$$

$$= -\lambda^2 \cdot (\lambda+2) + 8 \cdot (\lambda^2-4) = (\lambda+2)\cdot(-\lambda^2+8\lambda-16) = -(\lambda+2)\cdot(\lambda-4)^2.$$

Tedy $\operatorname{Spec}\mathbb{A} = \{-2, 4\}$. Operátor $\mathbb{A}$ má nyní dvě vlastní hodnoty, přičemž $\lambda = -2$ je jednoduchý kořen a $\lambda = 4$ je dvojnásobný kořen. Z toho dle důsledku 3.1.17 můžeme říct, že $\dim \mathbf{R}_{-2} = 1$ a $\dim \mathbf{R}_4 = 2$. Dále známým způsobem nalezneme řády jednotlivých podprostorů $\mathbf{R}_{-2}$ a $\mathbf{R}_4$.

Zaměřme se nejprve na $\mathbf{R}_{-2}$.
$\mathbf{W}_1 = \operatorname{Ker}(\mathbb{A}+2\mathbb{I})$ nalezneme jako řešení soustavy homogenních lineárních rovnic dané maticí

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme, že $\mathbf{W}_1 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\middle|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{D}} \in [(0,1,1)]\right\}$.
$\mathbf{W}_2 = \operatorname{Ker}(\mathbb{A} + 2\mathbb{I})^2$ nalezneme opět jako řešení soustavy lineárních rovnic dané maticí

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 48 & -12 & 12 \\ 30 & 6 & -6 \\ 18 & -18 & 18 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostáváme, že $\mathbf{W}_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\middle|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{D}} \in [(0,1,1)]\right\}$ a $\dim \mathbf{W}_2 = 1 = \dim \mathbf{W}_1$ a z toho $\mathbf{R}_{-2} = \mathbf{W}_1$ je řádu $m_{-2} = 1$.

Dále se zabývejme $\mathbf{R}_4$.
$\mathbf{W}'_1 = \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 4\mathbb{I})$ nalezneme jako řešení soustavy lineárních homogenních rovnic dané maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostáváme, že $\mathbf{W}'_1 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\middle|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{D}} \in [(1,1,0)]\right\}$.
$\mathbf{W}'_2 = \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 4\mathbb{I})^2$ nalezneme opět jako řešení soustavy lineárních rovnic dané maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -18 & 18 & 18 \\ -18 & 18 & 18 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostáváme, že $\mathbf{W}'_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\middle|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{D}} \in [(1,1,0),(1,0,1)]\right\}$ a $\dim \mathbf{W}'_2 = 2$.
Protože $\mathbf{V} = \mathbf{R}_{-2} \bigoplus \mathbf{R}_4$, pak $\mathbf{R}_4 = \mathbf{W}'_2$ je řádu $m_4 = 2$.

Dále hledáme bázi $\mathcal{B}^{(-2)}$, resp. $\mathcal{B}^{(4)}$ prostoru $\mathbf{R}_{-2}$, resp. $\mathbf{R}_4$, uvažovaných spolu s operátory $\mathbb{A}|\mathbf{R}_{-2}$, resp. $\mathbb{A}|\mathbf{R}_4$.

Zabývejme se nyní nalezením $\mathbf{R}_{-2}$, kde $\dim \mathbf{R}_{-2} = 1$ a $\mathbf{N}_{-2} = \mathbf{R}_{-2}$.
Báze $\mathbf{R}_{-2} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\middle|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{D}} \in [(0,1,1)]\right\}$. Označme $\{\mathbf{e}_{11}^{(-2)}\}_{\mathcal{D}} = (0,1,1)$. Z toho $\mathcal{B}^{(-2)} = \left\langle \mathbf{e}_{11}^{(-2)} \right\rangle$.

Následně se zabývejme $\mathbf{R}_4$. S využitím věty 3.2.8 zjistíme počet adjungovaných vektorů řádu h:

$$n(1) = 1,$$
$$n(2) = 2 - 1 = 1.$$

A následně dle věty 3.2.9 určíme počet cyklických složek o délce h:

$$y(1) = 0,$$
$$y(2) = 1.$$

Jelikož již známe báze $\operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 4\mathbb{I})$ a $\operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 4\mathbb{I})^2$ doplníme bázi $\operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 4\mathbb{I})^2$ na bázi $\operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 4\mathbb{I})$. Z toho dostáváme vektor $\left\{\mathbf{e}_{21}^{(4)}\right\}_{\mathcal{D}} = (1,0,1)$ a již známým způsobem určíme vektor $\left\{\mathbf{e}_{22}^{(4)}\right\}_{\mathcal{D}}$:

$$\left\{\mathbf{e}_{22}^{(4)}\right\}_{\mathcal{D}} = (1,0,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = (2,2,0).$$

Konečně dostáváme bázi $\mathcal{B} = \left\langle \mathbf{e}_{11}^{(-2)}, \mathbf{e}_{21}^{(4)}, \mathbf{e}_{22}^{(4)} \right\rangle = \left\langle (0,1,1), (1,0,1), (2,2,0) \right\rangle$.

Nakonec provedeme zkoušku a získáme tak Jordanův tvar matice, tj. nalezneme matici $(\mathbb{A}, \mathcal{B})$.

$$\begin{aligned}
\left\{ \mathbb{A}\left(\mathbf{e}_{11}^{(-2)}\right) \right\}_{\mathcal{D}} &= (0,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (0,-2,-2) = \left\{ -2\mathbf{e}_{11}^{(-2)} \right\}_{\mathcal{D}}, \\
\left\{ \mathbb{A}\left(\mathbf{e}_{21}^{(4)}\right) \right\}_{\mathcal{D}} &= (1,0,1) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (6,2,4) = \left\{ 4\mathbf{e}_{21}^{(4)} + \mathbf{e}_{22}^{(4)} \right\}_{\mathcal{D}}, \\
\left\{ \mathbb{A}\left(\mathbf{e}_{22}^{(4)}\right) \right\}_{\mathcal{D}} &= (2,2,0) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (8,8,0) = \left\{ 4\mathbf{e}_{22}^{(4)} \right\}_{\mathcal{D}}.
\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
\left\{ \mathbb{A}\left(\mathbf{e}_{11}^{(-2)}\right) \right\}_{\mathcal{B}} &= \left\{ -2\mathbf{e}_{11}^{(-2)} \right\}_{\mathcal{B}} = (-2,0,0), \\
\left\{ \mathbb{A}\left(\mathbf{e}_{21}^{(4)}\right) \right\}_{\mathcal{B}} &= \left\{ 4\mathbf{e}_{21}^{(4)} + \mathbf{e}_{22}^{(4)} \right\}_{\mathcal{B}} = (0,4,1), \\
\left\{ \mathbb{A}\left(\mathbf{e}_{22}^{(4)}\right) \right\}_{\mathcal{B}} &= \left\{ 4\mathbf{e}_{22}^{(4)} \right\}_{\mathcal{B}} = (0,0,4).
\end{aligned}$$

A tedy Jordanův tvar matice (věta 3.2.7) je ve tvaru

$$(\mathbb{A}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

○

Příklad 3.3.5. Nechť je v jisté bázi $\mathcal{D}$ prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbb{R}$ lineární operátor $\mathbb{A}$ reprezentován maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte některou Jordanovu bázi prostoru $\mathbf{V}$ příslušnou operátoru $\mathbb{A}$ a dále nalezněte Jordanovu matici.

Řešení:
Nejprve nalezneme vlastní hodnoty lineárního operátoru jako kořeny charakteristického polynomu

$$ch_{\mathbb{A}}(x) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2 \cdot (\lambda - 2)^2.$$

Tedy $\operatorname{Spec} \mathbb{A} = \{0, 2\}$. Operátor $\mathbb{A}$ má dvě vlastní hodnoty, přičemž $\lambda = 0$ je dvojnásobný kořen i $\lambda = 2$ je dvojnásobný kořen. Z toho dle důsledku 3.1.17 můžeme říct, že $\dim \mathbf{R}_0 = 2$ a $\dim \mathbf{R}_2 = 2$. Dále známým způsobem nalezneme řády jednotlivých podprostorů $\mathbf{R}_0$ a $\mathbf{R}_2$.

Zaměřme se nejprve na $\mathbf{R}_0$.
$\mathbf{W}_1 = \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 0\mathbb{I}) = \operatorname{Ker} \mathbb{A}$, tj. řešíme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostáváme, že $\mathbf{W}_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\middle|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{D}} \in [(1, 1, -1, -1)] \right\}$.
$\mathbf{W}_2 = \operatorname{Ker} \mathbb{A}^2$, tj. řešíme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 & -6 \\ 8 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostáváme, že $\mathbf{W}_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\middle|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{D}} \in [(-1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0)] \right\}$.
$\mathbf{W}_3 = \operatorname{Ker} \mathbb{A}^3$, tj. řešíme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 6 & -9 \\ 19 & 0 & 6 & 13 \\ 7 & 0 & -2 & 9 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A z toho $\dim \mathbf{W}_3 = \dim \mathbf{W}_2 = 2$ a tedy $\mathbf{R}_0$ je řádu $m = 2$. Dále s využitím věty 3.2.8 zjistíme počet adjungovaných vektorů řádu h:

$$n(1) = 1,$$
$$n(2) = 2 - 1 = 1.$$

A následně dle věty 3.2.9 určíme počet cyklických složek o délce h:

$$y(1) = 0,$$
$$y(2) = 1.$$

Volme vektor $\left\{\mathbf{e}_{12}^{(0)}\right\}_{\mathcal{D}}$ tak, že $\mathbf{e}_{12}^{(0)} \in \operatorname{Ker} \mathbb{A}^2 \mod \operatorname{Ker} \mathbb{A}$, tj. $\left\{\mathbf{e}_{12}^{(0)}\right\}_{\mathcal{D}} = (0,1,0,0)$. A již známým způsobem určíme vektor $\left\{\mathbf{e}_{11}^{(0)}\right\}_{\mathcal{D}}$:

$$\{\mathbf{e}_{11}^{(0)}\}_{\mathcal{D}} = (0,1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,1,-1,-1).$$

Našli jsme bázi $\mathcal{B}^{(0)} = \left\langle \mathbf{e}_{12}^{(0)}, \mathbf{e}_{11}^{(0)} \right\rangle$.

Dále se zabývejme $\mathbf{R}_2$.
$\mathbf{W}_1' = \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 2\mathbb{I})$, tj. řešíme

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostáváme, že $\mathbf{W}_1' = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\middle|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{D}} \in [(-1,-3,-3,1)]\right\}$.
$\mathbf{W}_2' = \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 2\mathbb{I})^2$, tj. řešíme

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 & -5 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 20 & -9 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostáváme, že $\mathbf{W}_2' = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \;\middle|\; \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{D}} \in [(4,9,20,0),(0,-3,8,4)]\right\}$
a $\dim \mathbf{W}_2' = 2$.
Protože $\mathbf{V} = \mathbf{R}_0 \bigoplus \mathbf{R}_2$, pak $\mathbf{R}_2 = \mathbf{W}_2'$ je řádu $m_2 = 2$.
S využitím věty 3.2.8 zjistíme počet adjungovaných vektorů řádu h:

$$n(1) = 1,$$
$$n(2) = 1.$$

A následně dle věty 3.2.9 určíme počet cyklických složek o délce h:

$$y(1) = 0,$$
$$y(2) = 1.$$

Jelikož již známe báze $\operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 2\mathbb{I})$ a $\operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 2\mathbb{I})^2$, doplníme bázi $\operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 2\mathbb{I})^2$ na bázi $\operatorname{Ker}(\mathbb{A} - 2\mathbb{I})$. Odtud dostaneme vektor $\left\{\mathbf{e}_{22}^{(2)}\right\}_{\mathcal{D}} = (0,-3,8,4)$ a již známým způsobem určíme vektor $\left\{\mathbf{e}_{21}^{(2)}\right\}_{\mathcal{D}}$:

$$\left\{\mathbf{e}_{21}^{(2)}\right\}_{\mathcal{D}} = (0,-3,8,4) \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (1,3,3,-1).$$

Našli jsme bázi $\mathcal{B}^{(2)} = \left\langle \mathbf{e}_{22}^{(2)}, \mathbf{e}_{21}^{(2)} \right\rangle$.
Konečně dostáváme bázi

$$\mathcal{B} = \left\langle \mathbf{e}_{12}^{(0)}, \mathbf{e}_{11}^{(0)}, \mathbf{e}_{22}^{(2)}, \mathbf{e}_{21}^{(2)} \right\rangle = \left\langle (0,1,0,0), (1,1,-1,-1), (0,-3,8,4), (1,3,3,-1) \right\rangle.$$

Nakonec provedeme zkoušku a získáme tak Jordanův tvar matice, tj. nalezneme matici $(\mathbb{A}, \mathcal{B})$.

$$\left\{\mathbb{A}\left(\mathbf{e}_{12}^{(0)}\right)\right\}_{\mathcal{D}} = (0,1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,1,-1,-1) = \left\{\mathbf{e}_{11}^{(0)}\right\}_{\mathcal{D}},$$

$$\left\{\mathbb{A}\left(\mathbf{e}_{11}^{(0)}\right)\right\}_{\mathcal{D}} = (1,1,-1,-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0,0,0),$$

$$\left\{\mathbb{A}\left(\mathbf{e}_{22}^{(2)}\right)\right\}_{\mathcal{D}} = (0,-3,8,4) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,-3,19,7) = \left\{2\mathbf{e}_{22}^{(2)} + \mathbf{e}_{21}^{(2)}\right\}_{\mathcal{D}},$$

$$\left\{\mathbb{A}\left(\mathbf{e}_{21}^{(2)}\right)\right\}_{\mathcal{D}} = (1,3,3,-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2,6,6,-2) = \left\{2\mathbf{e}_{21}^{(2)}\right\}_{\mathcal{D}}.$$

Odtud

$$\begin{aligned}
\left\{\mathbb{A}\left(\mathbf{e}_{12}^{(0)}\right)\right\}_{\mathcal{B}} &= \left\{\mathbf{e}_{11}^{(0)}\right\}_{\mathcal{B}} = (0,1,0,0), \\
\left\{\mathbb{A}\left(\mathbf{e}_{11}^{(0)}\right)\right\}_{\mathcal{B}} &= (0,0,0,0), \\
\left\{\mathbb{A}\left(\mathbf{e}_{22}^{(2)}\right)\right\}_{\mathcal{B}} &= \left\{2\mathbf{e}_{22}^{(2)} + \mathbf{e}_{21}^{(2)}\right\}_{\mathcal{B}} = (0,0,2,1), \\
\left\{\mathbb{A}\left(\mathbf{e}_{21}^{(2)}\right)\right\}_{\mathcal{B}} &= \left\{2\mathbf{e}_{21}^{(2)}\right\}_{\mathcal{B}} = (0,0,0,2).
\end{aligned}$$

A tedy Jordanův tvar matice (věta 3.2.7) bude

$$(\mathbb{A}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

○

3.4. Jordanův tvar čtvercové matice

V této kapitole bychom příklady na podobnost čtvercových matic mohli řešit i jinými způsoby, jež známe z kurzů Lineární algebry. Nicméně zaměřme se pouze na řešení s využitím Jordanova tvaru daných matic.

3.4.1. Teorie

Věta 3.4.1. *Každá čtvercová matice nad $\mathbb{C}$ je podobná (až na pořadí diagonálních polí) právě jedné matici v Jordanově tvaru.*

Definice 3.4.2. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice nad $\mathbb{C}$. Pak se Jordanova matice, o níž hovoří věta 3.4.1, nazývá *Jordanův tvar matice* $\mathbf{A}$.

Věta 3.4.3. *Dvě čtvercové matice téhož řádu nad $\mathbb{C}$ jsou podobné, právě když oběma přísluší (až na pořadí diagonálních polí) stejný Jordanův tvar.*

3.4.2. Příklady

Příklad 3.4.4. Nechť jsou dány matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ téhož řádu nad $\mathbb{C}$. Rozhodněte, zda jsou podobné.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:
Při řešení nejprve nalezneme Jordanův tvar matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ a díky větě 3.4.3 můžeme určit, zda jsou matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ shodné. Nyní nemusíme hledat Jordanovu bázi, bude nám stačit nalézt spektrum a počty cyklických složek jednotlivých délek (viz 3.2.9).

Začněme maticí $\mathbb{A}$: V příkladu 3.3.4 jsme zjistili, jak vypadá Jordanův tvar této matice, tj.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proto se dále můžeme přesunout k matici $\mathbf{B}$: Známým postupem určíme spektrum, tj. $\mathrm{Spec} = \{-2, 4\}$ a řády jednotlivých kořenových podprostorů.

$\mathbf{R}_{-2}$:

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{B} + 2\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kořenový podprostor $\mathbf{R}_{-2}$ je řádu $m_{-2} = 1$. Navíc dle vět 3.2.8 a 3.2.9 je $n(1) = 1$ a $y(1) = 1$.

$\mathbf{R}_4$:

$$\operatorname{Ker}(\mathbf{B}-4\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{Ker}(\mathbf{B}-4\mathbf{E})^2 = \begin{pmatrix} 18 & 0 & -18 \\ -36 & 0 & 36 \\ -18 & 0 & 18 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kořenový podprostor $\mathbf{R}_4$ je řádu $m_4 = 2$. Navíc opět dle vět 3.2.8 a 3.2.9 dostáváme

$$\begin{aligned} n(2) &= 2-1 = 1, \\ n(1) &= 1, \\ y(1) &= 1-1 = 0, \\ y(2) &= 1. \end{aligned}$$

Celkem dostáváme, že Jordanův tvar matice je tvořen jednou buňkou řádu 1 příslušící hodnotě -2 a jednou buňkou řádu 2 příslušící hodnotě 4, tj.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

A tedy podle věty 3.4.3 jsou matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ podobné.

$\bigcirc$

Závěr

Cílem této práce bylo sestavit sbírku příkladů na témata: Homomorfismy euklidovských vektorových prostorů, Faktorový vektorový prostor a Jordanova báze příslušná lineárnímu operátoru, kterou by studenti lineární algebry využili při svém studiu k procvičení nabytých znalostí. Každá kapitola obsahuje jak teoretickou část s definicemi a větami relevantními k danému tématu, tak i několik příkladů s jejich řešeními a komentáři. Důraz byl kladen na systematičnost zpracování a na kompletní vysvětlení každého kroku.

Cíl byl z mého pohledu splněn a věřím, že tato sbírka příkladů bude užitečným nástrojem nejen pro mé vlastní studium, ale i pro ostatní studenty, kteří se chtějí efektivně připravit na zápočtové testy a zkoušky z lineární algebry.

Literatura

[1] JUKL, M.: *Lineární algebra: euklidovské vektorové prostory, homomorfizmy vektorových prostorů (2. upravené vydání).* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. ISBN 978-80-244-2522-1.

[2] JUKL, M.: *Lineární operátory.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2001. ISBN 80-244-0342-0.

[3] ERDMAN, John M.: *Exercises and Problems in Linear Algebra.* New Jersey, World Scientific, 2021. ISBN 978-9811220401.

[4] BLYTH, T.S a ROBERTSON, E.F.: *Further Linear Algebra. 2nd ed.* Great Britain, Springer Science & Business Media, 2006. ISBN 9781447106814.

[5] KLAIN, D.: *Orthogonal Projections and Reflections (with Exercises).* [online]. 2018, [cit. 2024-04-25].
Dostupné z: https://faculty.uml.edu//dklain/projections.pdf.

[6] Lesson Explainer: Orthogonal Matrices. [online]. [cit. 2024-04-25]. Dostupné z: https://www.nagwa.com/en/explainers/476190725258/.