



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

NÁVRH A SESTAVENÍ EXPERIMENTU K OVĚŘENÍ INTERAKCE MAGNETICKÉHO POLE S PROUDÍCÍ KAPALINOU

DESIGN AND SETUP OF AN EXPERIMENT TO VERIFY THE INTERACTION
OF A MAGNETIC FIELD WITH A FLOWING LIQUID

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Petr Sikora

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Simona Fialová, Ph.D.

BRNO 2024

Zadání diplomové práce

Ústav: Energetický ústav
Student: **Bc. Petr Sikora**
Studijní program: Energetické a termofluidní inženýrství
Studijní obor: Fluidní inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Ing. Simona Fialová, Ph.D.**
Akademický rok: 2023/24

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Návrh a sestavení experimentu k ověření interakce magnetického pole s proudící kapalinou

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Záměrem práce je navržení, sestavení a vyrobení experimentální trati na které bude probíhat studium interakce elektromagnetického pole a proudící kapalinou. V rámci objasnění komplexních schémat vzájemných interakcí bude kapalina vystavena nejen elektromagnetickému poli ale také kavitaci. Studium bude by mohlo objasnit vzájemné interakce mezi těmito jevy. Studium bude jak teoretické, zahrnující výpočtové modelování, tak experimentální, zabývající se experimentálním ověřením některých zjištěných skutečností.

Cíle diplomové práce:

Cílem práce je navržení, sestavení a vyrobení experimentální trati na které bude probíhat studium interakce elektromagnetického pole s proudící kapalinou. Cílem práce bude primárně důkladný teoretický rozbor působení magnetického pole, zahrnující výpočtové modelování v komerčně dostupných softwarech. Následovat bude experimentální práce, zabývající se sestavením experimentální tratě se ověřením některých, v dřívějších diplomových pracích a z teorie vyplývajících, zjištěných skutečností. Závěrečná kombinace měření vlivu magnetického pole na kavitující kapalinu bude provedena pouze za předpokladu docílení požadovaných parametrů magnetického pole.

Seznam doporučené literatury:

Reis, M.: Fundamentals of Magnetism, ISBN 978-0-12-405545-2, , 2013 Elsevier Inc., <https://doi.org/10.1016/C2012-0-02644-0>

Harazin, P.: Vzájemná interakce magnetického pole a kavitujícího proudění. Brno: VUT v Brně, FSI, 2018, diplomová práce

Kantor, D. Vliv kavitace na vlastnosti elektromagnetického pole. VUT v Brně, FSI, 2007, diplomová práce.

Veverka, A. Proudění kapalin s účinky elektromagnetického pole. VUT v Brně, FSI, 2007, diplomová práce.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2023/24

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá návrhem magnetického obvodu za účelem experimentálního ověření vlivu elektromagnetického pole na kavitující kapalinu v návaznosti na předchozí výzkum. Přínosem je v tomto ohledu zejména komplexní analýza této interakce z pohledu nerovnovážné termodynamiky. Kromě této disciplíny je v teoretické části věnována pozornost také vybraným oblastem z teorie elektromagnetického pole s ohledem na řešený problém. Na základě této rešerše a s pomocí výpočtového modelování ve 2D (FEMM) a posléze ve 3D (Ansys Maxwell) byly navrženy, optimalizovány a sestaveny dvě iterace magnetického obvodu. Finální sestava byla následně použita v experimentu, kde byla na základě chemického rozboru vzorků ovlivněné kapaliny stanovována přítomnost chemických sloučenin s dezinfekčními účinky. Závěrem proběhlo také měření elektrického napětí indukovaného na elektrodách připevněných k měřicí trati.

Klíčová slova

Nerovnovážná termodynamika, elektromagnetismus, hydrodynamická kavitace, interakce.

Summary

This thesis deals with the design of a magnetic circuit in order to experimentally verify the effect of an electromagnetic field on a cavitating liquid. In comparison to previous research, this paper presents a comprehensive analysis of this interaction using non-equilibrium thermodynamics. In addition, the theoretical part also focuses on selected topics from electromagnetic field theory with respect to the problem at hand. Based on this research and using FEM software for 2D (FEMM) and subsequently 3D problems (Ansys Maxwell), two models of the magnetic circuit were designed, optimized and built. The final assembly was then used in an experiment. The presence of chemical compounds with disinfectant effects was determined from samples of the affected liquid. Finally, the electrical voltage induced on the electrodes attached to the measuring circuit was also measured.

Keywords

Non-equilibrium thermodynamics, electromagnetism, hydrodynamic cavitation, interaction.

Bibliografická citace

SIKORA, P. *Návrh a sestavení experimentu k ověření interakce magnetického pole s proudící kapalinou*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2024. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Simona Fialová, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci na téma *Návrh a sestavení experimentu k ověření interakce magnetického pole s proudící kapalinou* vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených v seznamu, který tvoří přílohu této práce.

Bc. Petr Sikora

Děkuji tímto doc. Ing. Simoně Fialové, Ph.D. za velkou ochotu, cenné rady a především přátelskou a přívětivou atmosféru při konzultacích. Za ohromnou pomoc s přípravami měřicí trati a vlastním měřením bych chtěl poděkovat Ing. Martinu Hudcovi, Ph.D. a Bronislavu Kusému. Dále bych chtěl vyjádřit svůj vděk Ing. Elišce Maršákové, Ph.D. z Botanického ústavu AV ČR, bez jejíž pomoci a vstřícné spolupráce by vůbec nemohla proběhnout chemická analýza v rámci experimentu. Velký dík patří taktéž rodině, která mě v průběhu celého studia motivovala a podporovala.

Bc. Petr Sikora

Obsah

1	Úvod	13
2	Teorie elektromagnetického pole	15
2.1	Koncepce vektorového pole a rozbor veličin	15
2.1.1	Elektrický náboj	16
2.1.2	Magnetický moment	17
2.1.3	Silové účinky vektorového pole	17
2.1.4	Konstitutivní vztahy	20
2.1.5	Materiálové konstanty	22
2.2	Maxwellovy rovnice	25
2.2.1	Integrální tvar rovnic	26
2.2.2	Diferenciální tvar rovnic	28
2.3	Klasifikace magnetických materiálů	30
2.3.1	Diamagnetické a paramagnetické látky	30
2.3.2	Feromagnetické látky	31
2.3.3	Antiferomagnetické a ferimagnetické látky	35
3	Nerovnovážná termodynamika	36
3.1	Zavedení konceptu nevratnosti dějů	36
3.1.1	Vymezení základních pojmů	37
3.1.2	Entropie v rovnovážných systémech	38
3.1.3	Entropie v nerovnovážných systémech	38
3.2	Lineární nerovnovážná termodynamika	40
3.2.1	Lineární fenomenologické zákony	41
3.2.2	Curie-Prigoginův princip	42
3.2.3	Onsagerovy relace reciprocity	42
3.2.4	Princip minimální produkce entropie	43
3.2.5	Nelineární nerovnovážná termodynamika	44
3.3	Odvození konstitutivních vztahů	45
3.3.1	Matematický aparát	45
3.3.2	Shrnutí potřebných vztahů	46
3.3.3	Stanovení produkce entropie	49
4	Návrh magnetického obvodu	54
4.1	Rozbor řešeného problému	54
4.1.1	Nástin designu	54
4.1.2	Návrhová omezení	56
4.2	První iterace sestavy	57
4.2.1	Výpočtové modelování rovinných úloh v magnetismu	57
4.2.2	Evoluce modelu sestavy	62
4.2.3	Sestavení a měření prvního prototypu	65
4.3	Druhá iterace sestavy	66
4.3.1	Identifikace nedostatků původní sestavy	67
4.3.2	Navržené změny	67

4.3.3	Výpočtové modelování prostorových úloh v magnetismu	69
4.3.4	Porovnání výsledků simulací	74
4.3.5	Sestavení a měření druhého prototypu	75
5	Příprava a metodika experimentu	77
5.1	Měřicí trať	77
5.1.1	Parametry experimentální trati	78
5.1.2	Kontrola kavitační zóny	79
5.1.3	Charakteristika kavitační dýzy	79
5.2	Chemický rozbor vody	80
5.2.1	Stanovení peroxidu vodíku	80
5.2.2	Metodika odběru vzorků	81
5.3	Měření indukovaného napětí	81
5.3.1	Princip indukčního průtokoměru	82
5.3.2	Instalace elektrod	82
6	Vyhodnocení experimentů	83
6.1	Sestavení charakteristiky dýzy	83
6.2	Výsledky z hlavních experimentů	84
6.2.1	Stanovení peroxidu	84
6.2.2	Vyhodnocení indukovaného napětí	85
6.3	Nejistoty měření	86
6.3.1	Typy nejistot	87
6.3.2	Ukázka vyhodnocení nejistot	87
7	Diskuse	89
8	Závěr	91
	Literatura	92
	Seznam použitých zkratk a symbolů	95
	Seznam obrázků	98
	Seznam příloh	100

1. Úvod

Jelikož jsou v současné době kladeny stále vyšší nároky na kvalitu a udržitelnost pitné vody, stává se vývoj pokročilých metod jejího čištění velmi aktuálním tématem vědeckého výzkumu. Odbor fluidního inženýrství Viktora Kaplana se příslušnými technologiemi zabývá již delší dobu, přičemž jeden z největších průlomů v této oblasti byl učiněn v souvislosti s pozitivním využitím hydrodynamické kavitace v kombinaci s nízkoteplotním plazmatem v rámci projektu CaviPlasma [1]. Tato diplomová práce na předchozí výzkum do jisté míry navazuje a rovněž se zabývá možnostmi dočišťování vody s využitím kavitace.

Teoretické poznatky z nerovnovážné termodynamiky naznačují, že by aplikací vnějšího magnetického pole na proudící kapalinu mohlo za správných podmínek dojít k určitým chemickým reakcím v jejím objemu. Pokud by produktem těchto reakcí byly chemické sloučeniny s dezinfekční schopností, bylo by možné synergii těchto na první pohled nesouvisejících dějů využít právě k dočišťování odpadních vod. V minulosti již na Odboru fluidního inženýrství proběhlo několik experimentů, které se tematicky více či méně dotkly vzájemné interakce magnetického pole a proudící kapaliny. Jedná se zejména o souběžný výzkum v rámci dvou diplomových prací [2] a [3] z roku 2007, kdy byl zkoumán vliv magnetického pole na rychlostní profil a dále na vodivost kapaliny, přičemž bylo měřeno napětí indukované kavitující vodou za využití principu indukčního průtokoměru. Dalším zajímavým počinem byla diplomová práce [4] z roku 2018, která komplexněji posoudila vliv magnetického pole na průběh hydrodynamické kavitace kapalné vody. Žádná z těchto prací se však dosud nezabývala těmito jevy z hlediska nerovnovážné termodynamiky.

K získání jistého vhledu do řešení problematiky s ohledem na vyřčenou hypotézu je namísto důkladný rozbor základních principů, veličin a rovnic v rámci těch odvětví fyziky, kterých se toto téma nejvíce dotýká, zejména pak vybraných oblastí elektromagnetismu a nerovnovážné termodynamiky. Výstavba robustního teoretického základu následně napomáhá kriticky posuzovat výsledky a vyvozovat závěry jak z experimentů, tak z jim předcházejících simulací. Jmenovaným disciplínám jsou proto věnovány první dvě kapitoly této práce. Oddíl o elektromagnetismu lze rozdělit na tři hlavní sekce. Po vymezení základních pojmů potřebných k porozumění podstaty těchto jevů následuje druhá část s komentářem k Maxwellovým rovnicím včetně jejich odvození. Poslední úsek je posléze věnován klasifikaci magnetických materiálů. Kapitola o nerovnovážné termodynamice se rovněž pomyslně dělí na tři celky. Záměrem prvních dvou částí je shrnutí nezbytné teorie zahrnující především koncept produkce entropie a důležité zákonitosti platné pro termodynamické systémy v lineární oblasti. V poslední sekci této kapitoly jsou podrobně odvozeny konstitutivní vztahy se zaměřením na řešený problém.

Při práci s fyzikálními veličinami tenzorového charakteru bude v teoretické části využívána tzv. sumační konvence, též známá jako Einsteinovo sumační pravidlo. Ta nachází své uplatnění zejména při práci s tenzory vyšších řádů (a příslušnými tenzorovými operátory), kde oproti běžné vektorové symbolice působí daleko přehledněji a přímočařeji. V rámci této práce bude sumační konvence aplikována dle pravidel uvedených v publikaci [5]. Pokud není uvedeno jinak, sčítací indexy nabývají v trojrozměrném prostoru hodnot $i, j, k = 1, 2, 3$, přičemž indexy v závorkách nejsou sčítacími.

S teoretickou částí úzce souvisí vývoj a následné sestavení magnetického obvodu. Návrhový proces je zde obohacen o využití výpočtového modelování řešené magnetostatické úlohy pomocí komerčně dostupných numerických řešičů. K porovnávání a optimalizaci

jednotlivých iterací navrhované sestavy je využíván program FEMM, který umožňuje numericky řešit zjednodušené rovinné úlohy, a následně i software Ansys Maxwell pro komplexnější analýzu tohoto problému ve 3D. Kapitola kromě shrnutí postupu řešení v rámci obou programů popisuje také volbu vhodných materiálů na základě poznatků z teoretického oddílu nebo měření výstupních parametrů u sestavených prototypů.

Završením této práce je experimentální ověření představené hypotézy. Vzájemná interakce bude studována aplikací magnetického pole vyvolaného navrženým magnetickým obvodem na kavitující kapalinu. Případný výskyt chemických změn v kohoutkové vodě proudící měřicím okruhem by měly odhalit chemické rozborů odebraných vzorků. V návaznosti na předchozí výzkum budou zkoumány také možné změny ve vodivosti, a to měření elektrického napětí indukovaného proudící kapalinou. Experimentální část je rozdělena do dvou kapitol, přičemž první z nich objasňuje metodiku prováděných experimentů a uspořádání měřicího okruhu, zatímco druhá kapitola je věnována vyhodnocení naměřených dat a vyvození závěrů.

2. Teorie elektromagnetického pole

Prvnímu odvětví inženýrské fyziky, kterému bude v rámci této práce věnována pozornost, je teorie elektromagnetického pole. Oba fenomény, spadající do této disciplíny, tedy elektřina a magnetismus, přitom odjakživa fascinovaly lidstvo. Zatímco 18. století se ve fyzice neslo ještě ve znamení Newtonovy mechaniky, v 19. století patřila tato ústřední pozice právě jim. Přestože byly děje spojené s elektřinou či magnetismem pozorovány a zkoumány již dříve, skutečný rozmach těchto oborů je většinou datován až sem. Na základě nespočtu vědeckých objevů a experimentů z tohoto období, které jsou spjaty s mnoha slavnými jmény (např. C. A. Coulomba, H. C. Oersteda, M. Faradaye, A. M. Ampèra, C. F. Gausse, J. C. Maxwella a dalších), již dnes víme, že spolu elektřina a magnetismus úzce souvisí. [6]

Ve skutečnosti se dokonce jedná pouze o různé projevy téhož fyzikálního pole, a sice pole elektromagnetického, které se řadí mezi čtyři základní typy vzájemného silového působení mezi elementárními částicemi společně s gravitační, silnou a slabou interakcí. Snaha fyziků nalézt patřičné souvislosti k vyjádření veškerých silových interakcí pomocí jediné univerzální síly dokonce vedla k tomu, že byly v 70. letech minulého století představeny důkazy o možnosti syntézy elektromagnetického pole se slabou interakcí ve formě sjednocující síly příhodně pojmenované jako tzv. elektroslabá síla. Vraťme se však k samotnému elektromagnetismu. Je to právě vzájemná provázanost elektrického a magnetického pole, která prakticky znemožňuje studium jednoho jevu bez znalosti toho druhého. Proto z teoretické části nelze vynechat alespoň základy elektrického pole navzdory skutečnosti, že se tato práce zabývá primárně polem magnetickým. [7][8]

Způsob nahlížení na téma elektromagnetismu se může v různých vědeckých či výukových publikacích do jisté míry různit, což obvykle závisí na přístupu konkrétního autora. Přesto jsou některé zákonitosti a vztahy považovány za natolik stěžejní, že jsou společným znakem drtivé většiny odborných pramenů k této problematice, a tvoří tak základy, které shrnují její podstatu a ze kterých je vycházeno při popisu příslušných fyzikálních jevů. V případě elektřiny a magnetismu se mezi takto důležité vztahy nepochybně řadí tzv. Maxwellovy rovnice, které byly formulovány fyzikem Jamesem Clerkem Maxwellem, podle něhož jsou také po právu pojmenovány. Ve své podstatě Maxwell sjednotil a doplnil dosavadní poznatky o elektrických a magnetických polích (dosud podložené spíše zkušenostmi a experimenty) do ucelené teorie elektromagnetického pole. Tyto čtyři rovnice tak vytvořily rámec pro pochopení všech makroskopických jevů spojených s elektřinou a magnetismem a vymezily jejich vzájemnou vazbu. Vyvrcholením tohoto teoretického oddílu proto bude právě odvození Maxwellových rovnic vycházející z předchozího představení potřebných pojmů a veličin. Kapitola je následně završena komentářem ke klasifikaci magnetických materiálů, který naopak cílí spíše na praktickou část práce. [6][9]

2.1. Koncepce vektorového pole a rozbor veličin

Tento úsek shrnuje podstatu, projevy a vlastnosti elektromagnetismu jakožto vektorového pole se zavedením příslušných fyzikálních veličin k jeho popisu. Cílem je poukázat na vzájemné spojitosti a zároveň odlišnosti elektrického a magnetického pole, a to hned z několika hledisek. Jmenovitě jsou porovnávány např. zdroje, kterými se jednotlivá pole realizují, dále jejich silové účinky nebo také vliv hmotného prostředí.

2.1.1. Elektrický náboj

Elektromagnetická silová interakce se uplatňuje mezi elementárními částicemi (nejčastěji elektrony a protony), přičemž vznik takového působení je podmíněn přítomností elektrického náboje. Ten představuje pro elektromagnetismus výchozí fyzikální veličinu, která je skalární, má značku q s jednotkou *coulomb* (C) a může nabývat kladných i záporných hodnot. Jeho vlastní podstata dosud není známa, dle současných poznatků jej však lze považovat za určitou vlastnost elementárních částic, podobně jako např. hmotnost. [7]

V technické praxi obvykle nejsou předmětem zájmu bodové či elementární náboje, nýbrž elektricky nabitá makroskopická tělesa. Jedná se tedy o celou množinu nabitých částic, která je spojitě rozložena v objemu, popř. na povrchu tohoto tělesa. Obdobným způsobem, jakým je v mechanice popisováno rozložení hmotnosti v tělese pomocí hustoty, lze i zde k popisu rozložení náboje v tělese zavést funkci objemové hustoty náboje $\rho_{(e)}$. Při integraci $\rho_{(e)}$ přes objem V zkoumaného tělesa dostaneme celkový náboj $q_{(e)}$ tohoto tělesa, tedy

$$q_{(e)} \equiv \int_V \rho_{(e)} dV. \quad (2.1)$$

Osamostatněním objemové hustoty náboje ze vztahu (2.1) obdržíme jednotky této veličiny, kterými jsou C/m^3 , což skutečně odpovídá podílu náboje a objemu. [6][7]

Dosud byl popisován statický (v čase neměnný) stav rozložení náboje ve zkoumané soustavě, který vyvolává silové účinky známé jako projevy elektrostatického pole. Pokud však dojde k situaci, kdy se částice s elektrickým nábojem dají do pohybu, hovoříme o přechodu z elektrostatiky do elektrodynamiky, kde se vedle elektrického pole budí ještě pole magnetické. I v elektrodynamice lze rozlišovat mezi stacionárním stavem, u kterého nejsou příslušné makroskopické veličiny závislé na čase, a nestacionárním, kde je tomu naopak. Při vyšetřování stacionárního stavu tedy není potřeba rozlišovat, zda jsou náboje v klidu či v pohybu, protože makroskopické stacionární pole, které vytvářejí, není časově proměnné a bude vyhovovat rovnicím platným pro statický stav. [7]

Uvažme kupříkladu elektrický vodič kruhového průřezu, ve kterém dochází k pohybu volných nositelů elektrického náboje. Toto přemísťování náboje pak můžeme popsat elektrickým proudem I . Projde-li v časovém úseku Δt daným průřezem vodiče náboj Δq , zavádíme tzv. okamžitý proud jako úbytek náboje ve vodiči za tento časový úsek

$$I = -\frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (2.2)$$

Jedná se o skalární veličinu se známou jednotkou *ampér* (A). Naproti tomu lze zavést také vektorovou veličinu označovanou jako hustota proudu j_i , která popisuje rozložení proudu na daném průřezu vodiče S . Celkový proud protékající touto plochou (definovanou jednotkovým vektorem vnější normály n_i) je poté vyjádřen plošným integrálem

$$I \equiv \int_S j_i n_i dS, \quad (2.3)$$

který lze považovat za integrální definiční rovnici hustoty proudu (analogicky k definici hustoty náboje). Ze vztahu (2.3) vyplývají také jednotky této veličiny, a sice A/m^2 . [7]

2.1.2. Magnetický moment

Již bylo řečeno, že se magnetismus realizuje pomocí částic nesoucích nenulový elektrický náboj, které jsou uvedeny do pohybu (elektrodynamika). Ve skutečnosti se tyto částice v prostoru pohybují neustále, čímž ve svém bezprostředním okolí vytvářejí různě velká magnetická pole. Existence těchto polí je proto přirozenou vlastností všech látek, ne každý materiál ale disponuje takovými magnetickými vlastnostmi, které jsou technicky využitelné. Významnou roli v tomto ohledu hrají tzv. magnetické momenty. [9][10]

Každou elektricky nabitou částici (nejčastěji elektrony, popř. protony) periodicky obíhající po uzavřené dráze lze chápat jako ekvivalent proudové smyčky, která tímto pohybem vytváří tzv. orbitální magnetický moment, jehož vektor (resp. směr) je dán pravidlem pravé ruky. Vedle něj vykazují elementární částice ještě tzv. spin, což je vlastní moment mechanické povahy, který je způsoben přirozenou rotací těchto částic kolem vlastní osy. U nabitých částic pak vzniká úměrně k jejich spinu dodatečný magnetický moment označovaný jako spinový. Celkový magnetický moment atomu je potom dán prostým vektorovým součtem dílčích orbitálních a spinových magnetických momentů všech jeho elektronů a protonů, přičemž rozhodující je podíl magnetických momentů elektronů. Ty totiž obíhají jádra atomu po drahách s podstatně většími poloměry než protony. [6][11][12]

Pokud na atom s nenulovým magnetickým momentem působí vnější magnetické pole, vektor magnetického momentu se vždy snaží orientovat do směru působení tohoto pole, aby měl atom co nejmenší potenciální energii. Tomuto orientování magnetických momentů v látce však brání neustálý chaotický pohyb ostatních atomů ovlivněný teplotou této látky. Z hlediska velikosti magnetických momentů a jejich vzájemné orientace v různých látkách lze rozlišovat několik typů materiálů, jejichž klasifikaci je věnována samostatná podkapitola 2.3. [11][12]

2.1.3. Silové účinky vektorového pole

V dané oblasti v prostoru definujeme přítomnost elektrického pole právě tehdy, když na částici o kladném elektrickém náboji q pohybující se rychlostí v_i působí síla $F_{(e)i}$ známá jako Coulombova, která je na této rychlosti nezávislá. Výslednou sílu lze definovat vztahem

$$F_{(e)i} = qE_i, \quad (2.4)$$

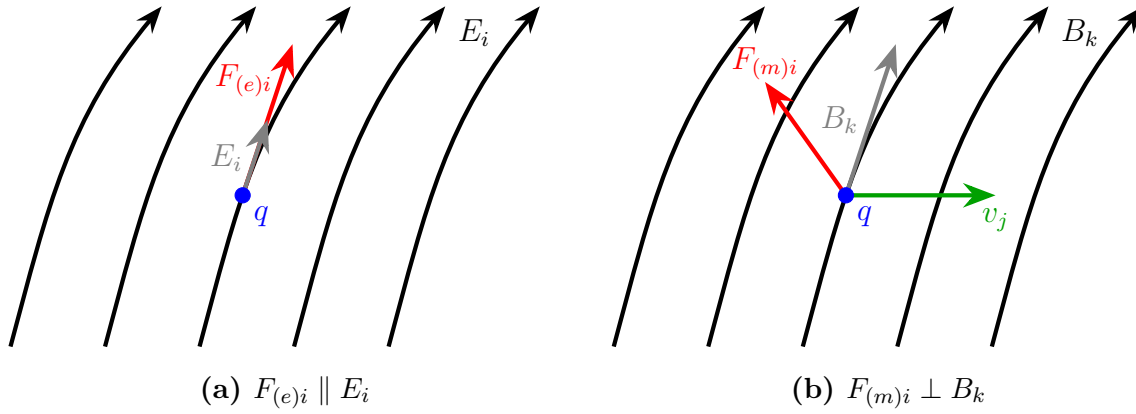
kde E_i je vektor intenzity elektrického pole znázorněný na obr. 2.1a, který prostřednictvím síly $F_{(e)i}$ ovlivňuje kinetickou energii nabitě částice. Osamostatněním E_i z rovnice (2.4) lze odvodit základní jednotky této veličiny jakožto podílu síly a náboje, tedy N/C. Alternativními a zároveň v praxi častěji používanými jednotkami jsou V/m (*volty* na metr), které vycházejí z popisu intenzity elektrického pole pomocí tzv. elektrického potenciálu. [9][13]

Experimentální zkušenost totiž ukazuje, že stacionární elektrické pole je potenciální (podobně jako pole elektrostatické). V řeči mechaniky tekutin lze takové pole označit za nevířivé, protože má v každém bodě nulový rotor intenzity elektrického pole, tedy

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} = 0_i. \quad (2.5)$$

Siločáry takového pole nesmějí vytvářet víry, jinými slovy se nemohou uzavírat samy do sebe. U vektorového pole splňujícího podmínku nevířivosti (2.5) lze posléze definovat

2.1. KONCEPCE VEKTOROVÉHO POLE A ROZBOR VELIČIN



Obrázek 2.1: Srovnání silových účinků daných vektorových polí. Upraveno z [9].

skalární funkci potenciálu φ , přičemž E_k k ní představuje vektor největšího spádu (neboli záporně vzatý gradient tohoto potenciálu):

$$E_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \quad (2.6)$$

Tato definice potenciálu automaticky vyhovuje podmínce (2.5), protože dosazením rovnice (2.6) do této podmínky dostáváme rotor gradientu skalárního pole, který je dle identity vektorové analýzy vždy roven nule:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = 0_i. \quad (2.7)$$

Potenciál stacionárního elektrického pole tak v daném bodě vyjadřuje potenciální energii jednotkového náboje vůči referenčnímu bodu, jehož polohu i potenciál volíme libovolně. Fyzikálního významu proto nabývá až rozdíl potenciálů ve dvou bodech v oblasti charakterizované elektrickým polem. Práci, kterou toto pole vykoná při přesunu kladného jednotkového náboje q z polohy počátečního bodu A do koncového bodu B, nazýváme napětím U mezi těmito body. Jedná se o zápornou hodnotu rozdílu potenciálů mezi body B a A vyjádřenou pomocí integrálu, jehož tvar lze odvodit z (2.6) jako

$$U_{(AB)} = -(\varphi_{(B)} - \varphi_{(A)}) = \int_A^B E_k dx_k. \quad (2.8)$$

Rozdíl potenciálů musí být z definice (2.8) záporně vzatý, aby bylo naměřené napětí mezi body kladné právě tehdy, když má výchozí bod větší potenciál než bod koncový. Tímto způsobem kladné napětí intuitivně vystihuje rovněž kladnou práci, kterou pole vykonává při přemístění náboje. Jelikož spolu dle (2.8) korespondují jednotky pro měření potenciálu a napětí (V), lze z tohoto vztahu snadno stanovit již zmíněnou odvozenou jednotku pro E_i , tedy V/m. [7][9]

Důkazem dříve naznačené jednotkové ekvivalence může být také následující úvaha dle [13], kde jsou pomocí rozšíření původního zlomku obdrženy požadované jednotky:

$$\left[\frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{C} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V}}{\text{m}} \right].$$

2. TEORIE ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

Pokud v dané oblasti působí na zkušební náboj q síla závislá na jeho rychlosti pohybu v_i , říkáme, že je tato oblast charakterizována magnetickým polem, přičemž síla jím vyvolaná je vyjádřena vektorovým součinem

$$F_{(m)i} = q(\varepsilon_{ijk}v_jB_k), \quad (2.9)$$

kde B_k představuje vektor magnetické indukce. Síla $F_{(m)i}$ je z definice vektorového součinu kolmá vůči ostatním vektorům (v_j i B_k) a její směr je dán pravidlem pravé ruky, což je mj. patrné z obr. 2.1b. Dalším důsledkem vzájemné kolmosti vektorů $F_{(m)i}$ a v_j je, že nedochází ke zrychlení částice ve směru jejího pohybu, nýbrž k jejímu vychýlení z tohoto směru. To znamená, že magnetické pole na rozdíl od elektrického nemění kinetickou energii částice. Síla $F_{(m)i}$ nabývá své maximální hodnoty pro případ $v_j \perp B_k$ a naopak je nulová pro $v_j \parallel B_k$, popř. pokud se částice nepohybuje ($v_j = 0_j$). [9]

Rozměrovou analýzou (2.9) obdržíme základní jednotky B_i , a sice $(\text{N} \cdot \text{s})/(\text{C} \cdot \text{m})$. Jako u E_i se i zde v praxi setkáme spíše s odvozenými jednotkami jako je *tesla* (T), popř. Wb/m^2 . Druhé zmíněné jednotky plynou z vyjádření B_i pomocí tzv. toku vektoru magnetické indukce Φ (zkráceně magnetický tok), jehož jednotkou je právě *weber* (Wb) a který je definován plošným integrálem z B_i , tedy

$$\Phi \equiv \int_S B_i n_i \, dS. \quad (2.10)$$

Magnetický tok Φ si lze zjednodušeně představit jako „počet“ myšlených magnetických indukčních čar procházejících libovolnou orientovanou plochou S , která je shodně s rovnicí (2.3) definována vnějším jednotkovým normálovým vektorem n_i . Je-li tato plocha navíc uzavřená, mělo by podle veškerých dosavadních experimentálních zkušeností platit, že rovnice (2.10) bude rovna nule. Z toho vyplývá skutečnost, že všechny magnetické indukční čáry vstupující do objemu ohraničeného touto uzavřenou plochou musí tuto oblast také opustit. Jedná se tedy vždy o uzavřené křivky, které na rozdíl od elektrických siločar nemají svůj počátek ani konec. Stacionární magnetické pole tak představuje typického zástupce tzv. solenoidálního (též nezřídlového) vektorového pole, které v prostoru nedovoluje existenci zdrojů ani propadů, což je v ostrém kontrastu se stacionárním elektrickým polem, které se řadí mezi potenciální vektorová pole. [7][13]

Souvislost mezi základními a odvozenými jednotkami pro B_i lze nastínit úvahou dle [13], kde je opět využita operace rozšíření zlomku:

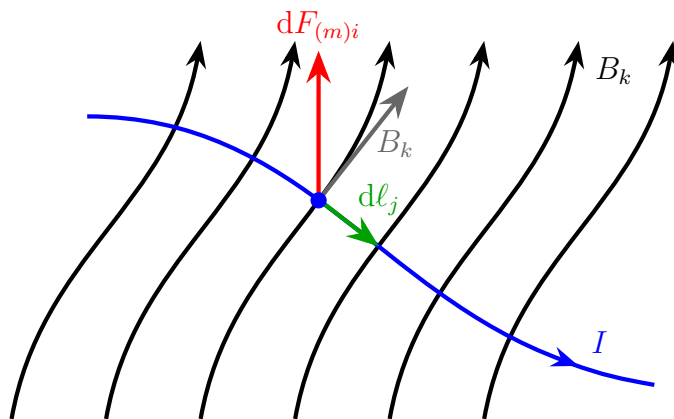
$$\left[\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}} = \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \text{T} \right].$$

Vzhledem ke skutečnosti, že v elektrickém vodiči rovněž dochází k přesunu nabitých částic, lze analogicky k předchozímu vztahu (2.9) kvantifikovat sílu vyvolanou na každý element vodiče $d\ell_j$ o elektrickém proudu I , pokud je umístěn v magnetickém poli. Dostáváme opět vektorový součin

$$dF_{(m)i} = I(\varepsilon_{ijk}d\ell_jB_k). \quad (2.11)$$

Podstata vztahu (2.11) je vizualizována odpovídajícím obrázkem 2.2. Opět jsou v platnosti vlastnosti vektorového součinu popsané dříve u vztahu (2.9). Protože ve vodiči dochází k pohybu elektrického náboje, vzniká i kolem tohoto vodiče samostatné magnetické pole. [6][9]

2.1. KONCEPCE VEKTOROVÉHO POLE A ROZBOR VELIČIN



Obrázek 2.2: Síla působící na element vodiče v magnetickém poli. Upraveno z [9].

V obecném případě pak definujeme pole elektromagnetické, ve kterém na částici o kladném elektrickém náboji q a nenulové rychlosti v_i působí úhrnná síla zvaná Lorentzova, kterou obdržíme prostým vektorovým součtem dílčích sil $F_{(e)i}$ a $F_{(m)i}$. [12] Vycházíme tedy ze vztahů (2.4) a (2.9), přičemž výsledkem je rovnice pro právě definovanou Lorentzovu sílu ve tvaru

$$F_{(L)i} = F_{(e)i} + F_{(m)i} = q(E_i + \varepsilon_{ijk}v_j B_k). \quad (2.12)$$

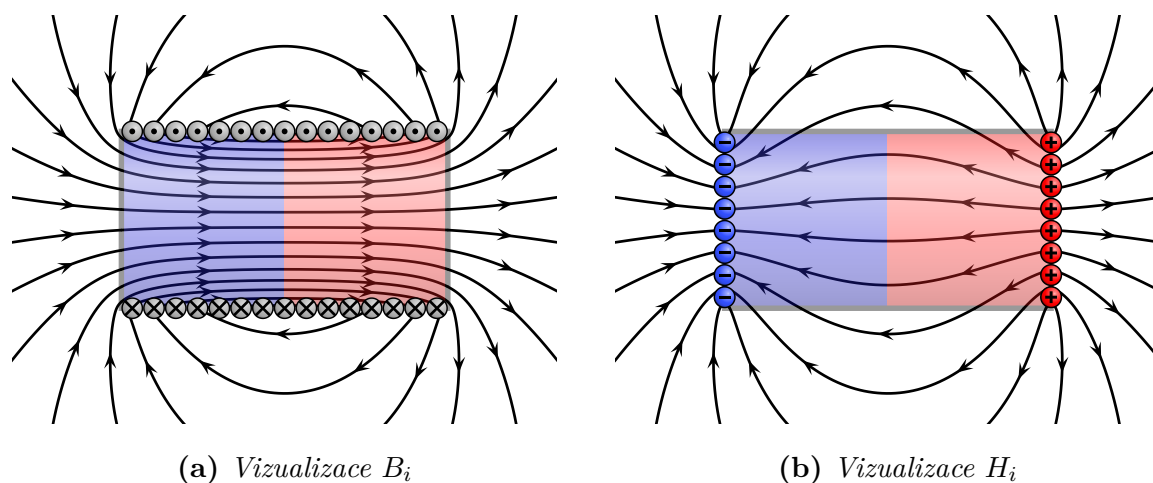
2.1.4. Konstitutivní vztahy

Hmotné prostředí modifikuje silové účinky vektorových polí E_i , resp. B_i , a proto se vedle těchto vektorů zavádí také další dvojice vektorových veličin – elektrická indukce D_i a intenzita magnetického pole H_i . Ty nacházejí své uplatnění zejména v případě, kdy chceme zachytit chování elektrického či magnetického pole v prostředí, které je nehomogenní povahy (tedy sestává z více látek s odlišnými vlastnostmi). Jednotkami D_i jsou C/m^2 , zatímco H_i je vyjádřeno v A/m . [6][13]

Skutečnost, že svým fyzikálním významem sobě odpovídají E_i s B_i na jedné straně (popisují mechanické síly) a D_i s H_i na straně druhé, však nebyla historicky zřejmá. Ještě na konci 19. století se někteří vědci nesprávně domnívali, že vektor D_i z elektřiny je analogický k B_i v magnetismu, což vedlo k několika paradoxům přetrvávajícím do současnosti. Jedním z důsledků je, že se běžně zavedené označení pro B_i (magnetická indukce) může jevit jako analogické k D_i (elektrická indukce). Tato podobnost je však zcela zavádějící. Obdobně mylná je také zdánlivá analogie intenzity pole magnetického (H_i) a elektrického (E_i). Obě zmíněná nedorozumění vyplývají právě z historicky zavedeného názvosloví, které však bylo beze změny zachováno dodnes. Proto je důležité mít při práci s těmito veličinami vždy na paměti jejich fyzikální podstatu. [6]

Ve skutečnosti oba vektory D_i a H_i charakterizují elektrické, resp. magnetické pole nikoliv z hlediska silových účinků v daném místě, ale z hlediska zdrojů, tedy již diskutovaných elektrických nábojů a magnetických momentů. Lze si je tak představit jako jakési toky, kterými se realizuje působení zdroje v okolním prostředí. Odlišnosti zavedených vektorových polí lze znázornit např. u homogenního tyčového magnetu vizualizací dvojice vektorů B_i a H_i , jejichž srovnání je ukázáno na obr. 2.3. Vidíme, že vně magnetu je pole B_i shodné s H_i a liší se od sebe pouze uvnitř magnetu. Vektor B_i je spojitý všude (včetně pólů magnetu) a příslušné siločáry jsou do magnetu „vtahovány“. Uvnitř magnetu navíc

dochází k jejich zhuštění, což znázorňuje velké změny v B_i v radiálním směru. Naproti tomu izokřivky H_i jsou na pólech magnetu nespojitě a z magnetu jsou odpuzovány ven. Póly tyčového magnetu tak zdánlivě nesou kladné a záporné „magnetické náboje“ zvýrazněné u H_i , které pro příslušné siločáry figurují jako zdroje a propady. Z předchozích kapitol však už víme, že je přítomnost těchto monopólů pouze fiktivní a jedná se o často používaný zjednodušující koncept k popisu magnetického pole využívající analogii s elektřinou. K podstatě magnetismu se někdy přistupuje také z pohledu makroskopických proudových smyček naznačených u B_i , které souhrnně vyjadřují množinu všech orientovaných magnetických momentů v materiálu magnetu. Na povrchu permanentních magnetů však žádný elektrický proud ve skutečnosti neměříme. Jak proudové smyčky, tak magnetické póly totiž reprezentují pouze matematické modely, které sice jsou postačující k posouzení veličin v makroskopickém měřítku, z fyzikálního hlediska ale korektní nejsou. [6][10]



Obrázek 2.3: Srovnání vektorových polí B_i a H_i u tyčového magnetu. Upraveno z [14].

Ve většině případů můžeme předpokládat mezi vektory E_i a D_i , resp. B_i a H_i , lineární závislost (výraznou výjimkou jsou feromagnetické látky). Zavedme tedy vztahy

$$D_i = \epsilon E_i, \quad (2.13)$$

$$B_i = \mu H_i. \quad (2.14)$$

Rovnice (2.13) a (2.14) představují tzv. konstitutivní vztahy, někdy též označované jako materiálové relace. Konstantami úměrnosti zde jsou absolutní permitivita ϵ s jednotkami F/m (*farad* na metr) v elektřině a absolutní permeabilita μ s jednotkami H/m (*henry* na metr) pro magnetismus. Z historických důvodů zmíněných dříve si vztah (2.14) zachoval svůj původní tvar místo logičtější formulace $H_i = \mu^{-1} B_i$, která více koresponduje se vztahem (2.13). Materiálové konstanty ϵ a μ budou detailněji rozebrány v následující podkapitole 2.1.5. [6][7][13]

Mezi představenými veličinami elektromagnetismu lze zavést ještě jeden konstitutivní vztah týkající se schopnosti látek vést elektrický proud. Tato rovnice dává do souvislosti intenzitu elektrického pole E_i s proudovou hustotou j_i (viz kap. 2.1.1) a je dána předpisem

$$j_i = \gamma E_i, \quad (2.15)$$

který bývá mj. označován jako Ohmův zákon v diferenciálním tvaru, kde γ představuje konduktivitu, resp. měrnou elektrickou vodivost, vyhodnocovanou v jednotkách S/m

2.1. KONCEPCE VEKTOROVÉHO POLE A ROZBOR VELIČIN

(*siemens* na metr). V některých publikacích je preferováno značení konduktivity pomocí σ , nicméně v rámci jednoznačnosti použitých symbolů bude toto řecké písmeno vyhrazeno pro hustotu produkce entropie v nerovnovázné termodynamice. [7][9]

2.1.5. Materiálové konstanty

Konstanty ϵ , μ a γ , zavedené v příslušných konstitutivních vztazích (2.13), (2.14) a (2.15), souvisejí se specifickým chováním látek při jejich vystavení účinkům vnějšího elektromagnetického pole. Každá z materiálových konstant přitom popisuje právě jeden ze tří úkazů, které mohou v materiálu nastat, a sice kondukcí, polarizaci nebo magnetizaci. Každý materiál do jisté míry vykazuje všechny z těchto dějů, podle typu řešeného problému však jeden z nich bývá obvykle převládající. Na základě toho lze následně různé látky kategorizovat jako vodivé, dielektrické nebo magnetické. [9]

V případě kondukcí se aplikací vnějšího elektrického pole začnou v materiálu přesouvat volné nosiče elektrického náboje, což se projeví vznikem elektrického proudu. Průměrná rychlost a směr pohybu těchto částic přitom proporcionálně odpovídá velikosti a orientaci externího pole E_i . Průchod volných nositelů vodičem je zpomalován třením v důsledku neustálých srážek s atomovou mřížkou za vzniku tepla, což je charakterizováno tzv. rezistivitou materiálu (odporem vůči přemístování náboje). Konduktivitu pak obdržíme jako převrácenou hodnotu této veličiny. [7][9]

Měrná vodivost jakožto kladná skalární veličina postihuje pouze lineární, homogenní a izotropní vodiče. Rovnice (2.15) však připouští i případ, kdy je měrná vodivost popsána symetrickým tenzorem 2. řádu. Úpravou rovnice dostáváme nový tvar konstitutivního vztahu

$$j_i = \gamma_{ij} E_j, \quad (2.16)$$

vyjádřeného třemi rovnicemi, které lze rozepsat maticově jako

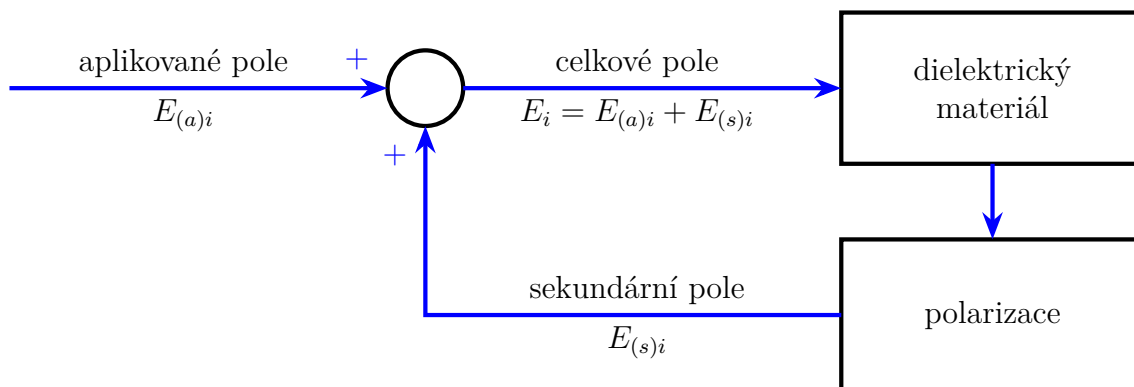
$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Tato podoba vztahu (2.15) je obecnější a dokáže popsat i anizotropní vodivé prostředí, ve kterém nejsou vektory j_i a E_j obecně kolineární. Výhodou symetričnosti tenzoru γ_{ij} je možnost vhodně zvolit takový souřadný systém, ve kterém budou jeho mimodiagonální složky ($i \neq j$) nulové. Nehomogenní vodiče se posléze popisují přičtením tzv. vtištěné (elektromotorické) intenzity do vztahu (2.15), což však není předmětem této práce. [7][9]

Zatímco jev kondukcí je charakterizován explicitně pomocí konduktivity, zbylé dva děje (polarizace a magnetizace) jsou v příslušných materiálových konstantách obsaženy implicitně. Kromě vodičů, kterých se týká právě popsaná kondukcí, existují také látky, které nemají schopnost převádět elektrický náboj a jsou charakterizovány jako dielektrika či nevodiče. Na rozdíl od vodičů tyto látky nemají volné nositele nábojů, nýbrž pouze vázané, které se v rámci objemu materiálu nemohou přesouvat. To však neznamená, že by nedocházelo k vzájemnému ovlivnění. Vystavením dielektrika vnějšímu elektrickému poli dojde k vychýlení těžišť elektronových obalů původně neutrálních atomů, čímž vznikají tzv. elektrické dipóly, které jsou již polární a mají snahu se natáčet do směru externího pole, aby snížily svou potenciální energii. Tímto způsobem se projevuje polarizace, která

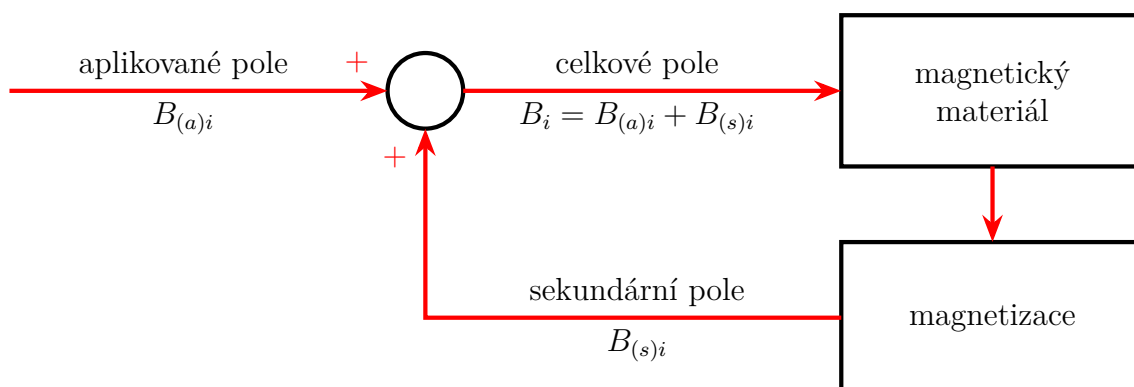
2. TEORIE ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

je doprovázena vznikem sekundárního elektrického pole v materiálu, což je schematicky naznačeno na obrázku 2.4. V souvislosti s tímto jevem se zavádí také příslušný vektor polarizace P_i , který popisuje tzv. celkový dipólový moment objemové jednotky polarizované látky. Polarizované těleso je navenek stále elektricky neutrální, pouze rozložení náboje v jeho objemu je pozměněno v reakci na vnější pole. [7][9]



Obrázek 2.4: *Efekt polarizace dielektrika. Upraveno z [9].*

U materiálů ovlivněných externím magnetickým polem pak pozorujeme děj podobný polarizaci, v tomto případě se však podle směru vnějšího pole natáčejí magnetické momenty, které byly popsány v kap. 2.1.2. Zavádí se tak pojem magnetizace s příslušným vektorem M_i , přičemž ve zmagnetizovaném materiálu opět vzniká sekundární pole dle schématu na obr. 2.5, jehož podobnost s obr. 2.4 je nasnadě. M_i tak udává souhrnný magnetický moment objemové jednotky zmagnetizované látky. [6][12]



Obrázek 2.5: *Efekt magnetizace. Upraveno z [9].*

Některými úpravami konstitutivních vztahů (2.13) a (2.14) obdržíme jejich alternativní formulace obsahující příslušné vektory polarizace a magnetizace. Absolutní permitivitu ϵ i permeabilitu μ lze vyjádřit součinem konstantní hodnoty pro vakuum (s indexem 0) a relativní složky proměnné na základě vlastností vyšetřovaného materiálu (index r). Permitivita vakua nabývá hodnoty $\epsilon_{(0)} = 8,8542 \cdot 10^{-12}$ F/m, zatímco permeabilita vakua odpovídá $\mu_{(0)} = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. Obě tyto konstanty lze zařadit mezi základní fyzikální konstanty, protože jsou úzce spjaté s rychlostí světla ve vakuu $c_{(0)}$ vztahem

$$c_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{(0)}\mu_{(0)}}} = 299\,792\,458 \text{ m/s.} \quad (2.18)$$

2.1. KONCEPCE VEKTOROVÉHO POLE A ROZBOR VELIČIN

Užitím představeného součinu v rovnicích (2.13) a (2.14) dostáváme

$$D_i = \epsilon_{(0)}\epsilon_{(r)}E_i, \quad (2.19)$$

$$B_i = \mu_{(0)}\mu_{(r)}H_i, \quad (2.20)$$

přičemž relativní permitivitu a permeabilitu lze dále rozepsat jako

$$\epsilon_{(r)} = 1 + \chi_{(e)}, \quad (2.21)$$

$$\mu_{(r)} = 1 + \chi_{(m)}. \quad (2.22)$$

Veličiny $\chi_{(e)}$ a $\chi_{(m)}$ zde představují elektrickou, resp. magnetickou susceptibilitu. Tyto materiálové konstanty jsou bezrozměrné a popisují schopnost materiálu se polarizovat či magnetizovat. Vliv hmotného prostředí se tak vždy popisuje jako součet závislosti ve vakuu (formou příslušné konstanty úměrnosti $\epsilon_{(0)}$ nebo $\mu_{(0)}$) a její poměrné části, obecně vyjádřené jako χ -násobek konstanty ve vakuu, kde χ reprezentuje konkrétní materiál odlišný od vakua (pro nějž totiž platí $\chi_{(e)} = \chi_{(m)} = 0$). Tento součet obdržíme dosazením (2.21) do (2.19), resp. (2.22) do (2.20), a to včetně následného roznásobení

$$D_i = \epsilon_{(0)}E_i + \epsilon_{(0)}\chi_{(e)}E_i, \quad (2.23)$$

$$B_i = \mu_{(0)}H_i + \mu_{(0)}\chi_{(m)}H_i. \quad (2.24)$$

Druhý člen pravé strany rovnice (2.23) vyjadřuje hledaný vektor polarizace P_i , zatímco vektor magnetizace M_i je rovněž obsažen v druhém členu pravé strany vztahu (2.24), avšak na rozdíl od P_i nezahrnuje konstantu $\mu_{(0)}$. V důsledku této odlišnosti nejsou finální vztahy úplně shodné:

$$D_i = \epsilon_{(0)}E_i + P_i, \quad (2.25)$$

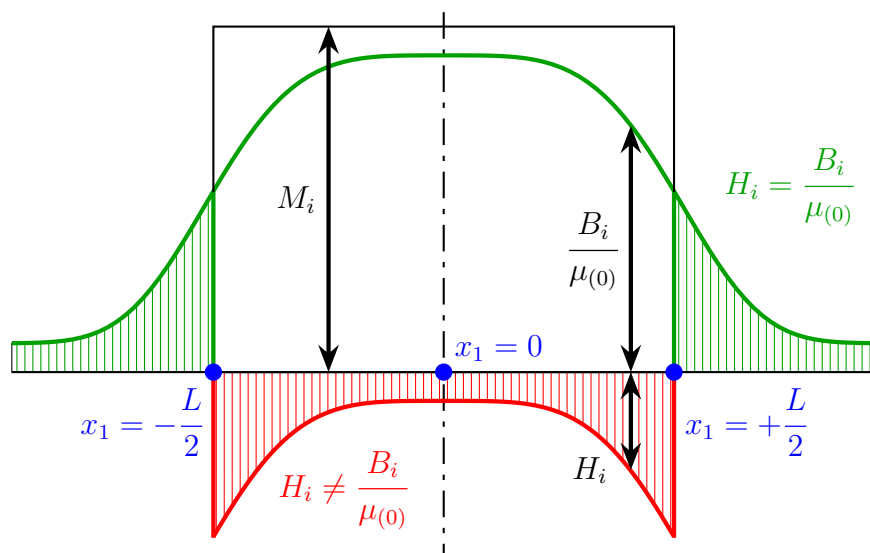
$$B_i = \mu_{(0)}H_i + \mu_{(0)}M_i. \quad (2.26)$$

Alternativně existuje pojem tzv. magnetické polarizace jakožto substituce za druhý člen pravé strany rovnice (2.26) příslušným vektorem $P_{(m)i}$, který je analogický k vektoru elektrické polarizace P_i . Po dosazení máme rovnici

$$B_i = \mu_{(0)}H_i + P_{(m)i}, \quad (2.27)$$

která více koresponduje se vztahem (2.25). Veličinu $P_{(m)i}$ je užitečné znát, protože může být snadněji stanovitelná z hlediska měření. Oba vektory popisují magnetický moment připadající na tentýž jednotkový objem látky, pouze u M_i se jedná o tzv. Ampèrův magnetický moment vyjádřený v A/m, zatímco $P_{(m)i}$ popisuje tzv. Coulombův magnetický moment jednotkami *tesla* (shodně s B_i). Tyto odlišné (avšak zaměnitelné) přístupy jsou označovány jako Sommerfeldova konvence pro M_i a Kellyho konvence pro $P_{(m)i}$. [7][9][10][11][13]

Vliv magnetizace materiálu lze vizualizovat např. u tyčového magnetu z obr. 2.3, jehož póly vytvářejí uvnitř materiálu tzv. demagnetizační pole, které se projevuje vzájemně opačnou orientací vektorů B_i a H_i . Tuto skutečnost znázorňuje obr. 2.6, který porovnává různé průběhy vektorů B_i , H_i a M_i respektující odvozený vztah (2.26). Zatímco vně uvažovaného tyčového magnetu o délce L je magnetizace prostředí nulová, uvnitř nabývá konstantní hodnoty, která jde proti magnetické indukci a kterou rozumíme příspěvek zmagnetované látky k celkovému magnetickému vybuzení H_i . [6]



Obrázek 2.6: Průběh H_i , $\frac{B_i}{\mu(0)}$ a M_i podél osy x_1 tyčového magnetu. Upraveno z [6].

Popis materiálů s anizotropním chováním vyžaduje zobecnit materiálové konstanty ϵ a μ na symetrické tenzory 2. řádu podobným způsobem, jako u měrné vodivosti. Platnost původních konstitutivních vztahů (2.13) a (2.14) přitom není porušena, pouze je potřeba formálně upravit sčítací indexy, aby byly respektovány tenzorové řády veličin

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j, \quad (2.28)$$

$$B_i = \mu_{ij} H_j. \quad (2.29)$$

Upravené vztahy (2.28) a (2.29) jsou zobecněné a pojí se s nimi shodné závěry, jaké byly formulovány dříve u obecného vyjádření měrné vodivosti. Jmenovitě lze tyto vztahy rozepsat v maticovém tvaru, analogicky k (2.17), přičemž v tomto obecném případě zaniká platnost kolinearity vektorů E_i a D_j , resp. B_i a H_j . Dále je díky symetričnosti obou tenzorů ϵ_{ij} i μ_{ij} možné vhodnou transformací souřadného systému dosáhnout nulových mimodiagonálních složek u těchto tenzorů. [7][9]

2.2. Maxwellovy rovnice

Stěžejní význam Maxwellových rovnic byl nastíněn už v samotném úvodu k oddílu o elektromagnetismu. Původně se jednalo celkem o 8 rovnic, mezi kterými bychom však našli např. již zavedené konstitutivní vztahy (v současnosti jsou obvykle uvažovány samostatně) nebo rovnici kontinuity proudu. Jelikož lze 6 rovnic z této soustavy navíc rozepsat pro každou složku kartézského souřadnicového systému zvlášť, odkazoval se Maxwell ve svých publikacích dokonce na poměrně rozsáhlý systém obsahující 20 rovnic. Při uvážení již zavedených vztahů a s využitím teorie vektorové analýzy lze tuto soustavu s výhodou zredukovat na pouhé čtyři rovnice, ke kterým se obvykle přidává ještě zmíněná rovnice kontinuity proudu. [8][15]

Nyní uplatníme dříve zavedené pojmy a veličiny při sestavování těchto vztahů, přičemž na elektromagnetické pole již nebudou kladeny žádné omezující podmínky. Bude tak považováno za obecně libovolně proměnné v čase i prostoru, jinými slovy v nestacionárním stavu ($\frac{d}{dt} \neq 0$). Rovnice budou prezentovány jak v integrálním, tak diferenciálním tvaru.

2.2. MAXWELLOVY ROVNICE

Zatímco integrální tvar Maxwellových rovnic posuzuje elektromagnetické pole v celé řešené oblasti, pro praktické aplikace se využívá spíše diferenciální tvar, který umožňuje příslušné veličiny analyzovat v konkrétním bodě této oblasti. [6][7]

2.2.1. Integrální tvar rovnic

První Maxwellova rovnice, známá též jako Gaussův zákon, popisuje elektrické pole vybuze­né celkovým nábojem $q_{(c)}$ v daném objemu V , který je ohraničen uzavřenou plochou S . Integrální tvar tohoto zákona nabývá podoby

$$\oint_S D_i n_i \, dS = q_{(c)}. \quad (2.30)$$

Uzavřená plocha S je v takovém případě označována jako Gaussova, přičemž tok elektrické indukce D_i libovolnou Gaussovou plochou je vždy roven právě celkovému náboji v takto ohraničeném objemu. [8][9]

Také pro magnetické pole lze zadefinovat Gaussův zákon, jehož upravená formulace současně udává druhou Maxwellovu rovnici. Zřejmá podobnost se vztahem (2.30) znamená, že je i zde posuzován plošný integrál druhého druhu vyjadřující skalární tok vektorové veličiny uzavřenou plochou S , avšak s odlišným výsledkem:

$$\oint_S B_i n_i \, dS = 0. \quad (2.31)$$

Tentokrát je integrandem patrně magnetická indukce B_i , přičemž úhrnný magnetický tok Φ libovolnou Gaussovou plochou musí být vždy nulový. Tento závěr koresponduje s komentářem o vlastnostech magnetického pole k definici (2.10), kde je mj. diskutován pojem solenoidálního pole. Zmíněná hypotéza o příslušnosti magnetického pole k tomuto typu vektorového pole je kromě rovnice (2.31) podpořena také faktem, že dosud nebyla experimentálně objevena žádná elementární částice, která by nesla izolovaný „magnetický náboj“, a nelze tak hovořit o existenci magnetického monopólu (na rozdíl od elektrického náboje). [7][8][16]

Zatímco první dvě Maxwellovy rovnice slouží spíše k popisu charakteru elektrického a magnetického pole samostatně, druhá dvojice rovnic se naopak zabývá jejich vzájemnou interakcí, resp. indukci. K té dochází výhradně při časové proměnlivosti alespoň jednoho z vektorových polí, což znamená, že by se ve zbývajících Maxwellových rovnicích měl vyskytnout alespoň jeden nestacionární člen. Tento předpoklad je skutečně naplněn u třetí Maxwellovy rovnice, kterou je zobecněný Ampèrův zákon (někdy též Ampèr-Maxwellův zákon)

$$\oint_k H_i \, dk_i = I + \frac{d}{dt} \int_S D_i n_i \, dS. \quad (2.32)$$

Původní Ampèrův zákon (odvozený v reakci na Oerstedův experiment s natáčením stříelky kompasu v přítomnosti vodiče) přitom kvantifikoval pouze magnetické pole indukované stacionárním elektrickým proudem I . Další zdrojový člen k tomuto vztahu přidal až Maxwell, čímž rozšířil aplikovatelnost Ampèrova zákona na nestacionární stav. Elektrický proud nebo proměnlivý tok elektrické indukce D_i procházející plochou S produkuje cirkulující magnetické pole kolem křivky k ohraničující tuto plochu. Onen nestacionární zdrojový

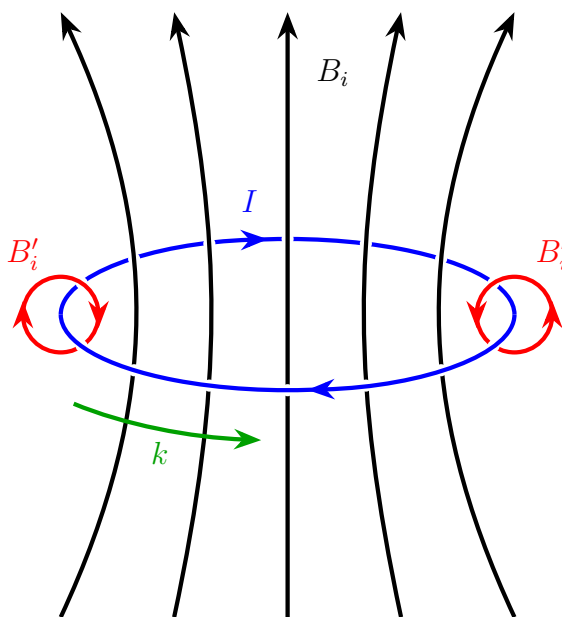
2. TEORIE ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

člen bývá označován jako tzv. posuvný proud, který se na rozdíl od běžného elektrického proudu může jakožto časová změna pole D_i vyskytovat nejen v látkovém prostředí tvořeném dielektrikem, ale také ve vakuu. [6][8][16]

Čtvrtá a zároveň poslední Maxwellova rovnice udává Faradayův zákon ve tvaru

$$\oint_k E_i dk_i = -\frac{d}{dt} \int_S B_i n_i dS. \quad (2.33)$$

Faraday na základě svých pozorování matematicky popsal jev elektromagnetické indukce, kdy časově proměnný magnetický tok plochou S indukuje tzv. elektromotorické napětí vyjádřené cirkulací E_i na příslušné ohraničující křivce k , které se projeví cirkulujícím elektrickým proudem. Proudová smyčka k přitom nemusí být pouze abstraktní entita, na jejím místě si můžeme představit např. závit cívky. Záporná pravá strana rovnice (2.32) je odůvodněna tzv. Lenzovým zákonem, což je speciální případ obecného Le Chatelierova principu. Ten nám říká, že jakákoli změna vnesená do zkoumaného systému vyvolá jeho odpovídající reakci za účelem minimalizace této změny a obnovení rovnováhy. Faradayův zákon tak poukazuje na setrvačnost magnetického pole, jehož změna je vždy bržděna indukovaným elektrickým polem. Toto je znázorněno na obrázku 2.7, kde vidíme vodič reagující na změnu magnetické indukce B_i opačně orientovaným magnetickým polem B'_i . S ním se pojí uzavřený elektrický proud orientovaný levotočivě dle pravidla pravé ruky. Obě rovnice (2.32) i (2.33) jsou platné pro případ, kdy je uzavřená křivka k vůči ploše orientována pravotočivě, v opačném případě by došlo ke změně znamének. [6][8][16]



Obrázek 2.7: Lenzův zákon. Upraveno z [8]

Za zmínku stojí také rovnice kontinuity proudu, která je matematickým vyjádřením zákona zachování náboje. Ten popisuje elektrický náboj jako nestvořitelný a nezničitelný, z čehož vyplývá, že celkové množství náboje v elektricky izolované soustavě zůstává vždy neměnné. Rovnice kontinuity proudu vychází ze vztahu (2.2), kde převedením členů na jednu stranu dostáváme pro limitní případ $\Delta t \rightarrow 0$ podmínku

$$I + \frac{dq}{dt} = 0. \quad (2.34)$$

2.2. MAXWELLOVY ROVNICE

Uvažujme libovolnou uzavřenou plochu S tvořící povrch tělesa objemu V , přičemž proud I protékající touto plochou a rozložení náboje q v ohraničeném objemu nahradíme ve vztahu (2.34) jejich příslušnými hustotami dle definic (2.3) a (2.1). Těmito úpravami odvodíme rovnici kontinuity proudu v integrálním tvaru

$$\oint_S j_i n_i \, dS + \frac{d}{dt} \int_V \rho_{(e)} \, dV = 0. \quad (2.35)$$

Nárůst, resp. úbytek elektrického náboje v čase je podmíněn přítomností elektrického proudu do, resp. z oblasti, ve které je tento náboj posuzován. Platnost rovnice kontinuity je vázána na podmínku zachování charakteru nositelů náboje v dané soustavě, tj. nemělo by docházet např. ke změnám počtu volných nositelů náboje na úkor počtu vázaných nositelů. Tato podmínka bývá v praxi obvykle splněna. [7]

2.2.2. Diferenciální tvar rovnic

Při odvozování diferenciální podoby Maxwellových rovnic z jejich integrálního tvaru budou často využívány dvě matematické věty z disciplíny diferenciální geometrie, a sice Gauss-Ostrogradského a Stokesova věta. První z nich dává do souvislosti změnu veličiny v konečném objemu s odpovídající změnou na příslušné ohraničující ploše, což lze demonstrovat na obecné funkci $\phi_i = f(x_i, t)$ níže

$$\oint_S \phi_i n_i \, dS = \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \, dV, \quad (2.36)$$

kde skalární tok veličiny ϕ_i uzavřenou plochou S dle Gauss-Ostrogradského věty představuje totéž, co divergence této funkce v objemu V . Stokesova věta analogicky k tomu říká, že změna veličiny na ploše spřažené uzavřenou křivkou vyvolá změnu veličiny také na této křivce, tedy

$$\oint_k \phi_i \, dk_i = \int_S \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} n_i \, dS. \quad (2.37)$$

Vidíme, že cirkulace obecné funkce ϕ_i po uzavřené křivce k je ekvivalentní rotoru této veličiny v rámci plochy S . [17][18]

Uvažme nyní integrální tvar první Maxwellovy rovnice (2.30), na jehož levou stranu aplikujeme Gauss-Ostrogradského větu dle (2.36) a současně celkový náboj na pravé straně rovnice rozepíšeme dle definičního vztahu (2.1). Dostaneme tak

$$\int_V \frac{\partial D_i}{\partial x_i} \, dV = \int_V \rho_{(e)} \, dV. \quad (2.38)$$

Ekvivalentní úpravou rovnice (2.38) lze vyjádřit divergenci D_i a hustotu náboje $\rho_{(e)}$ z objemových integrálů, čímž obdržíme první Maxwellovu rovnici v diferenciálním tvaru

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \rho_{(e)}. \quad (2.39)$$

Tentýž postup lze provést také u vztahu (2.31), kde s opětovným využitím Gauss-Ostrogradského věty obdržíme diferenciální tvar druhé Maxwellovy rovnice

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.40)$$

2. TEORIE ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

Na levou stranu Maxwellových rovnic (2.32) a (2.33) je již potřeba aplikovat Stokesovu větu. Rozepišme tedy třetí Maxwellovu rovnici dle (2.37), přičemž elektrický proud I nahradíme jeho hustotou j_i dle definice (2.3). Poslední úpravou je záměna totální časové derivace za parciální derivaci u nestacionárního členu, což lze uplatnit pouze tehdy, předpokládáme-li nezávislost polohy a tvaru plochy S na čase

$$\int_S \varepsilon_{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} n_i \, dS = \int_S j_i n_i \, dS + \int_S \frac{\partial D_i}{\partial t} n_i \, dS. \quad (2.41)$$

Ekvivalentní úpravou tentokrát eliminujeme plošné integrály, a odvodíme tak třetí Maxwellovu rovnici v diferenciální podobě

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} = j_i + \frac{\partial D_i}{\partial t}. \quad (2.42)$$

Pokud bychom rozepsali elektrickou indukci D_i dle upraveného konstitutivního vztahu (2.25), rozdělíme posuvný proud na dvě složky

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} = j_i + \epsilon_{(0)} \frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial P_i}{\partial t}, \quad (2.43)$$

přičemž člen s intenzitou elektrického pole E_i představuje hustotu tzv. Maxwellova proudu $j_{(M)i}$, zatímco člen obsahující vektor polarizace dielektrika P_i vyjadřuje hustotu polarizačního proudu $j_{(P)i}$. Ten si lze představit jako oscilaci elementárních elektrických dipólů (vázaných nábojů) vytvářející makroskopický střídavý proud. Naproti tomu Maxwellův proud není přímo spojen s pohybem nábojů, nýbrž s časovou změnou elektrického pole. Podobně jako kmitání pružné nepropustné membrány může zprostředkovat proměnný tok kapaliny v potrubí, umožňuje Maxwellův proud např. uzavřít obvod střídavého proudu obsahující kondenzátor s vakuovou mezerou mezi deskami. [7][8][16]

Analogickými úpravami vztahu (2.33) dospějeme také k diferenciálnímu tvaru čtvrté Maxwellovy rovnice

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} = - \frac{\partial B_i}{\partial t}. \quad (2.44)$$

Stojí za povšimnutí, že rovnice (2.44) porušuje zavedenou podmínku nevířivosti elektrického pole (2.5). Její platnost je však striktně omezena na stacionární či statická elektrická pole, kdežto v obecném případě uvažujeme nestacionární stav, ve kterém elektrické pole nemusí být potenciální. Nezřídlovost magnetického pole vyjádřená např. rovnicí (2.40) naproti tomu platí obecně, jinými slovy každé magnetické pole je solenoidální. [7][8][9]

Také rovnici kontinuity proudu (2.35) lze převést na příslušný diferenciální tvar pro posouzení platnosti v diskrétních bodech zkoumané oblasti

$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho_{(e)}}{\partial t} = 0, \quad (2.45)$$

kde v důsledku využití Gauss-Ostrogradského věty opět vystupuje divergence. I zde byla totální časová derivace zaměněna za parciální za předpokladu neměnnosti hranice oblasti v čase. V současnosti se již rovnice kontinuity proudu uvádí spíše jako doplněk k hlavní

2.3. KLASIFIKACE MAGNETICKÝCH MATERIÁLŮ

čtveřici Maxwellových rovnic, protože je z těchto vztahů odvoditelná. Důkaz tkví v aplikaci divergence na třetí Maxwellovu rovnici (2.42):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial j_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial D_i}{\partial x_i}. \quad (2.46)$$

Dosazením za divergenci elektrické indukce z první Maxwellovy rovnice (2.41) obdržíme právě rovnici kontinuity ve tvaru (2.45). Toto odvození se opírá o vektorovou identitu, kdy divergence rotoru – tedy levá strana rovnice (2.46) – je vždy rovna nule. [7]

Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru představují soustavu parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu, které mají nekonečně mnoho řešení. K vyčlenění jednoznačného fyzikálního řešení je proto nezbytné doplnit okrajové podmínky podle řešeného problému. Obecné vztahy odvozené výše tak lze posléze zjednodušit, např. pro stacionární stav odpadají nestacionární členy z rovnic (2.32) a (2.33), resp. (2.42) a (2.44). V dielektrickém prostředí zase pokládáme $\rho_{(e)} = 0$ a $j_i = 0_i$. [8][15][17]

2.3. Klasifikace magnetických materiálů

Ke správné volbě materiálů pro experiment pracující převážně s magnetismem je vhodné blíže porozumět různým druhům magnetických materiálů, aby bylo možné předvídat jejich chování při vystavení magnetickému poli. Tento úsek proto slouží k rozšíření znalostí o magnetických materiálech, a přímo tak navazuje na kapitoly 2.1.2 a 2.1.5.

Již bylo řečeno, že chování dané magnetické látky se odvíjí od orientace a případně i vzájemné interakce magnetických momentů v jejím objemu. Tyto magnetické momenty, resp. proudové smyčky elementárních částic v atomech, si můžeme představit jako malé tyčové magnety, které se natačejí buď organizovaně aplikací externího magnetického pole, nebo nahodile četnými srážkami s ostatními částicemi v materiálu (vlivem teploty). Tyto děje v konečném důsledku ovlivňují magnetizaci posuzovaného materiálu, a proto je obvykle uvažována právě jako funkce teploty a intenzity vnějšího magnetického pole H_i . [10][11][12]

Jako kritérium pro rozdělení materiálů dle typu uspořádání magnetických momentů využijeme koncept kooperativity. Magnetizace materiálu může být takzvaně nekooperativní, pokud je ovlivněna pouze chováním jednotlivých magnetických momentů a nikoliv jejich vzájemnou interakcí. Naproti tomu kooperativní uspořádání může v materiálu nastat jedině na základě skupinového působení mezi sousedními magnetickými momenty. Pokud bychom hypoteticky odebrali osamocený magnetický moment z množiny v kooperativně zmagnetované látce, nebyl by již schopen popsat magnetické chování celku. Mezi nekooperativní uspořádání se řadí dva základní koncepty magnetismu, a sice diamagnetismus a paramagnetismus. Látek s kooperativním uspořádáním pak existuje hned několik druhů: feromagnetické, antiferomagnetické, ferimagnetické a další. [12]

2.3.1. Diamagnetické a paramagnetické látky

Pokud mají atomy a molekuly daného materiálu nulové magnetické momenty, označujeme tento materiál jako diamagnetický. Vektory dílčích magnetických momentů elementárních částic jsou sice samy o sobě většinou nenulové, nicméně při jejich součtu se v rámci jednotlivých atomů navzájem vyruší a všechny atomy diamagnetické látky tak navenek působí magneticky neutrálně. Pokud tento materiál umístíme do externího magnetického

pole, v podstatě bychom na mikroskopické úrovni pozorovali jev elektromagnetické indukce. Proudové smyčky v atomech totiž v reakci na vnější změnu magnetické indukce začnou vykazovat nenulové magnetické momenty působící proti této změně (dle obr. 2.7), jinými slovy se řídí Faradayovým zákonem (2.33). U diamagnetických látek tak můžeme očekávat vznik slabého sekundárního pole orientovaného vždy opačně vůči vnějšímu poli, s čímž souvisí také záporná magnetizace materiálu, která klesá lineárně s intenzitou vnějšího pole H_i . Podobnost s polarizací dielektrika je v tomto ohledu nasnadě (viz schémata 2.4 a 2.5). Ruku v ruce s tímto chováním jde i magnetická susceptibilita, která je u diamagnetických látek záporná a poměrně nízká ($\chi_{(m)} \approx 10^{-5}$). Z vzorce (2.22) pak vyplývá, že relativní permeabilita bude velmi blízká jedné ($\mu_{(r)} < 1$). Z látek relevantních pro tuto práci se do této kategorie řadí voda, která má v kapalné podobě při normálních podmínkách hodnotu $\mu_{(r)} = 0,9999912$. Dalšími zástupci jsou kupříkladu měď nebo zinek. Popsaný jev je přitom ve skutečnosti pozorovatelný ve všech látkách, avšak u ostatních typů magnetických látek je přebit dalšími mechanismy magnetické interakce. [9][10][12]

Magnetické momenty atomů a molekul paramagnetických látek již nulové nejsou, ovšem bez působení vnějšího magnetického pole je jejich orientace nahodilá a nepravidelná, tudíž celková magnetizace materiálu v průměru nulová je. Až díky přítomnosti vnějšího pole mají tyto momenty tendenci se uspořádat, což lineárně zvyšuje hodnotu magnetizace do kladných hodnot. Vzniklé sekundární pole je tedy opět poměrně slabé, ale je orientováno souhlasně s polem externím. Paramagnetické látky proto rovněž disponují nízkou magnetickou susceptibilitou, která je však na rozdíl od diamagnetismu kladná ($\chi_{(m)} \approx 10^{-3}$ až 10^{-5}). Hodnoty relativní permeability pak nepatrně přesahují jedničku ($\mu_{(r)} > 1$). Při dostatečně velké intenzitě vnějšího pole dosahuje magnetizace maximální hodnoty, kdy jsou všechny magnetické momenty vůči sobě orientované paralelně. Tento stav nazýváme bodem nasycení neboli saturace. Kromě závislosti na H_i je magnetizace paramagnetických látek ovlivněna také teplotou, přičemž platí nepřímá úměra. Vyšší teploty znamenají větší rozkmitání atomů v materiálu, což brání magnetickým momentům v uspořádání a snižuje výslednou magnetizaci. Typickými paramagnetickými materiály jsou hliník či cín. Přestože jsou některé složky vzduchu diamagnetické (dusík, oxid uhličitý), přítomnost kyslíku jakožto paramagnetické látky způsobuje, že i vzduch jakožto směs ve výsledku spadá do této kategorie. S hodnotou $\mu_{(r)} = 1,00000036$ se velmi blíží vakuu, které je považováno za magneticky neutrální ($\chi_{(m)} = 0, \mu_{(r)} = 1$). [9][10][12]

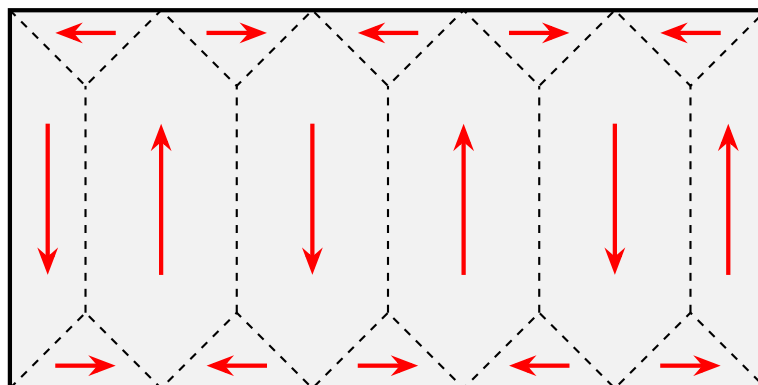
2.3.2. Feromagnetické látky

Zdaleka nejdůležitějším zástupcem kooperativního uspořádání je feromagnetismus, a to nejen z pohledu této práce, ale také např. v elektrotechnice. V těchto látkách na sebe navzájem působí jednotlivé magnetické momenty, což může i bez přítomnosti vnějšího pole vyvolat lokální magnetizaci materiálu. Vzájemné ovlivnění atomů je přitom podmíněno jejich dostatečnou blízkostí, která je dodržena pouze v pevných látkách. Důsledkem těchto interakcí se v materiálu tvoří skupiny obsahující řádově 10^{12} až 10^{15} atomů, ve kterých jsou veškeré magnetické momenty orientovány stejným směrem. Tyto skupiny jsou označovány jako Weissovy domény, přičemž v každé takové doméně je intenzita vnitřního magnetického pole natolik vysoká, že v podstatě představují malé nasycené magnety. [9][12]

Existence Weissových domén byla dokázána i experimentálně, přičemž jejich velikost není pevná, nýbrž se liší podle posuzovaného materiálu. V železe např. dosahují domény rozměrů v řádu desítek μm , nicméně ve výjimečných případech mohou nabývat až několika

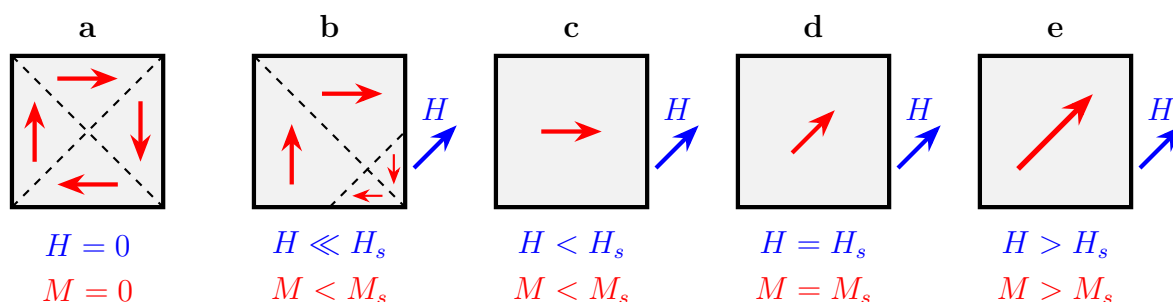
2.3. KLASIFIKACE MAGNETICKÝCH MATERIÁLŮ

mm či cm. Hranice mezi doménami, tzv. Blochovy stěny (popř. Néelovy u těles s malou tloušťkou), nejsou náhlé, nýbrž se jedná o vrstvy s tloušťkou 10^{-8} až 10^{-6} μm (zhruba 500 až 5 000 atomových vzdáleností), kde se orientace magnetických momentů mění pozvolna od jedné domény k druhé. Vzhledem k povaze Weissových domén se dříve předpokládalo, že je feromagnetismus vázán pouze na krystalické látky, později však byla potvrzena i existence amorfních feromagnetických materiálů. Přestože jsou jednotlivé domény samy o sobě zmagnetovány, navenek se feromagnetikum stále jeví jako nezmagnetované. Důvodem je specifické uspořádání domén, u kterého je cílem minimalizovat celkovou energii soustavy. Příklad takového uspořádání je znázorněn na obr. 2.8, kde každá čtveřice sousedních domén tvoří svými magnetickými momenty uzavřený magnetický obvod. [9][10][11]



Obrázek 2.8: Energeticky nejvýhodnější uspořádání Weissových domén. Upraveno z [10].

Susceptibilita je u feromagnetických materiálů kladná a díky schopnosti domén se samovolně magnetizovat svými hodnotami výrazně převyšuje paramagnetické materiály, což se projevuje i na relativní permeabilitě ($\chi_{(m)} \gg 0$, $\mu_{(r)} \gg 1$). Zahříváním se od sebe atomy feromagnetického materiálu vzdalují, čímž se vytrácí efekt vzájemného ovlivnění. Při překročení kritické teploty, tzv. Curieova bodu $T_{(C)}$, je chaotický pohyb částic v materiálu natolik významný, že dochází k úplnému zániku domén a z feromagnetického materiálu se v tu chvíli stává paramagnetický. Jako příklad lze opět uvést železo, jehož Curieho teplota činí 770 $^{\circ}\text{C}$, přičemž bod tání tohoto materiálu je pro porovnání přibližně 1530 $^{\circ}\text{C}$. [9][11]

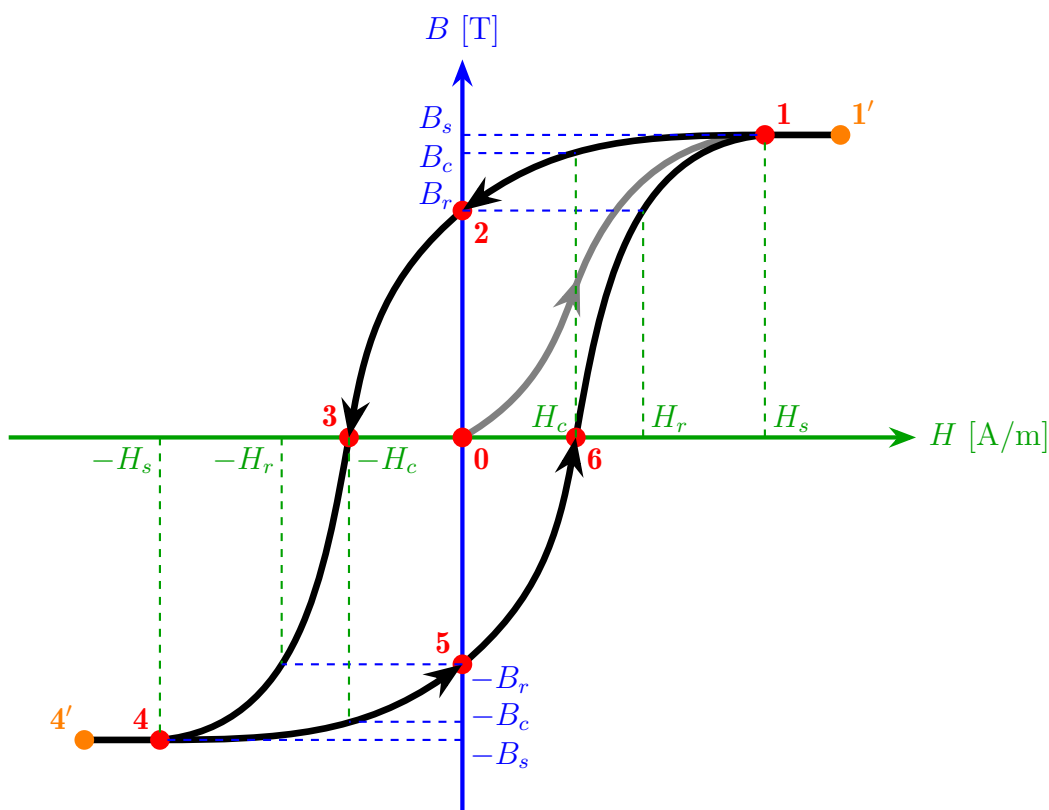


Obrázek 2.9: Průběh prvotní magnetizace feromagnetika. Upraveno z [11].

Při aplikaci vnějšího magnetického pole na feromagnetický materiál, který ještě nebyl zmagnetován a jehož teplota je nižší než $T_{(C)}$, dochází u Weissových domén ke specifické posloupnosti dějů, kterou shrnuje sekvence stavů **a** až **e** na obr. 2.9. Z důvodu přehlednosti indexů se v případě tohoto obrázku a jeho popisu upouští od sumační konvence. Stav **a** znázorňuje materiál bez vlivu vnějšího pole, kdy je celková magnetizace M nulová

a domény jsou spontánně zmagnetovány ve směru tzv. snadné magnetizace, která je dána mikrostrukturou materiálu. Postupným zvyšováním intenzity H se začínají posouvat Blochovy stěny za účelem zvětšení objemu domén s příznivou orientací magnetických momentů (vzhledem ke směru vnějšího pole) na úkor domén s nesouhlasnou magnetizací (stav **b**). Při vyšších hodnotách H se k tomuto jevu přidává další mechanismus, kdy magnetické momenty v doménách s nepříznivou orientací skokově mění své natočení podle působení externího pole do nového směru snadné magnetizace, čímž zanikají Blochovy stěny mezi sousedními doménami. Tento proces pokračuje až do stavu **c**, kdy je celý objem materiálu tvořen jedinou doménou. K dosažení fáze **d** je potřeba dále navyšovat intenzitu až k mezní hodnotě H_s . Směr magnetizace domény se pak stáčí přesně do směru vnějšího pole neohledně na mikrostrukturu materiálu, čímž nastává magnetická saturace materiálu (odtud index s). V tuto chvíli magnetizace v podstatě dosáhla své maximální hodnoty M_s , protože po překročení intenzity H_s již vzrůstá jen velmi pozvolna (stav **e**). [10][11]

Ačkoliv to z obr. 2.9 nemusí být na první pohled zřejmé, zvláštností feromagnetických látek je zejména nelineární závislost B_i na H_i . Jejich relativní permeabilita $\mu_{(r)}$ totiž není konstantní, nýbrž se mění podle velikosti intenzity magnetického pole H_i . Toto nelineární chování se znázorňuje obvykle graficky v rovině B - H , kde H na vodorovné ose představuje intenzitu vnějšího magnetického pole, zatímco B na svislé ose udává magnetickou indukci materiálu vyvolanou jeho magnetizací. Při popisu této křivky se vektorová podstata veličin B_i a H_i obvykle neuvádí, proto ani v tomto případě nebude využita sumační konvence.



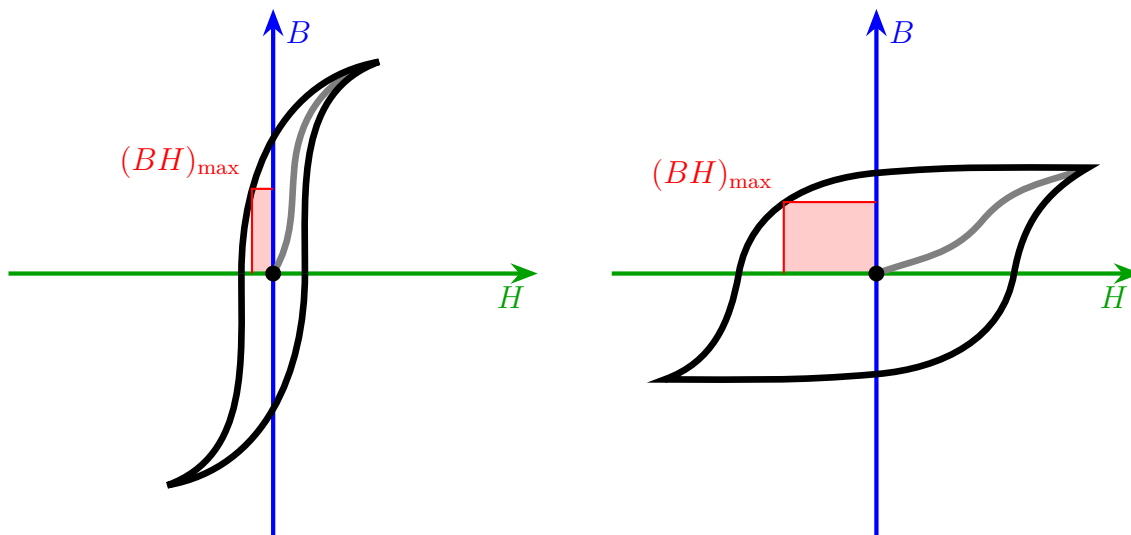
Obrázek 2.10: Statická hysterezní smyčka feromagnetického materiálu. Upraveno z [11].

V rovině B - H lze mj. postihnout také další jev společný pro všechny feromagnetické látky, a sice hysterezi magnetické indukce vlivem proměnlivé intenzity vnějšího pole. To znamená, že i po odstranění vnějšího pole ($H \rightarrow 0$) si materiál zachovává určitou

2.3. KLASIFIKACE MAGNETICKÝCH MATERIÁLŮ

nenulovou magnetizaci. Na obr. 2.10 je uveden jeden z možných tvarů hysterezní smyčky, na který má vliv více různých faktorů. Šedá křivka mezi body **0** a **1** udává křivku prvotní magnetizace, jejíž průběh již byl podrobně popsán (viz obr. 2.9). Je potřeba připomenout, že tato křivka je platná pouze pro feromagnetika, která ještě nebyla nijak ovlivněna magnetickým polem, nebo byla dokonale odmagnetována např. zvýšením teploty nad $T_{(C)}$. Pro danou hodnotu intenzity vnějšího pole lze určit relativní permeabilitu jakožto směrnici tečny ke křivce prvotní magnetizace. Na křivku prvotní magnetizace posléze navazuje uzavřený obrazec procházející body **1** až **6** reprezentující tzv. statickou hysterezní smyčku, která vyjadřuje závislost $B-H$ při opakované a protisměrné magnetizaci. [9][10][11]

Již bylo řečeno, že poslední pozorovatelná odezva magnetické indukce materiálu na intenzitu vnějšího pole nastává dosažením mezní hodnoty H_s , kdy dojde k nasycení materiálu (bod **1**). Po překročení této hodnoty (přesun k bodu **1'**) se libovolné zvyšování H nadále neprojevuje výraznějšími přírůstky magnetické indukce nad B_s . Pokud však začneme intenzitu vnějšího pole naopak postupně snižovat k nule (do bodu **2**), magnetická indukce již na nulu neklesne, nýbrž se projeví efekt hystereze. Indukce tak zůstane kladná a při nulové intenzitě H ji nazýváme remanentní (B_r). Materiál lze v tuto chvíli označit za permanentní magnet. Úplného odmagnetování materiálu lze dosáhnout až aplikací opačně orientovaného vnějšího pole, jehož intenzita se zvyšuje, ale v grafu 2.10 je formálně uvažována jako záporná dle směru působení. V bodě **3** tedy zaniká veškerá remanentní indukce, k čemuž je potřeba zvýšit intenzitu vnějšího pole na tzv. koercitivní hodnotu $-H_c$. Následuje záporná magnetizace dle nového směru vnějšího pole, jehož intenzitu zvětšujeme do stavu nasycení ($-H_s$) v bodě **4**, nebo ještě dále k bodu **4'**. Nyní lze obdobným postupem hysterezní smyčku dokončit. Plynulým poklesem intenzity H k nule dospějeme do bodu **5** o remanentní indukci $-B_r$ a dále pokračujeme opětovným obrácením směru působení vnějšího pole zpět do kladných hodnot. Po překročení koercitivní intenzity H_c (bod **6**) se znovu zahájí kladná magnetizace materiálu zakončená návratem do bodu **1**. [10][11]



(a) Magneticky měkký materiál

(b) Magneticky tvrdý materiál

Obrázek 2.11: Typy hysterezních smyček (měřítko je zachováno). Upraveno z [11].

Už dříve bylo naznačeno, že různé parametry související s hysterezní smyčkou – její tvar, permeabilita, remanence či koercitivita – jsou souhrnně citlivé hned na několik faktorů souvisejících především s chemickým složením a stavem krystalové mřížky. Jmenovitě

může mít vliv napjatost a deformace materiálu, velikost zrn krystalové mřížky, přítomnost precipitátů sekundární fáze (např. karbidy v ocelích) nebo také způsob technologického a tepelného zpracování (např. žhánání či kalení). Speciálně při posuzování permanentních magnetů je z vyjmenovaných parametrů hysterezní smyčky nejdůležitější koercitivita H_c , remanence B_r a tzv. maximální energetický součin $(BH)_{\max}$ udávaný v J/m^3 , který odpovídá interakční síle magnetu vůči jinému feromagnetiku. Definiční vztah odpovídá

$$(BH)_{\max} \equiv \max(-BH). \quad (2.47)$$

Na základě tvaru hysterezní smyčky pak lze rozlišovat dva druhy feromagnetik – magneticky měkká a tvrdá. Srovnání příslušných hysterezních smyček je uvedeno na obr. 2.11. Magneticky měkké materiály vykazují obecně vysokou relativní permeabilitu a maximální magnetickou indukci B_s , přičemž koercitivita je spolu s maximálním energetickým součinem naopak poměrně nízká. To znamená, že výsledná hysterezní smyčka je úzká a plochá (má nízký poměr remanentní indukce k maximální indukci). Magnetizace i demagnetizace takového materiálu je proto velmi snadná. Magneticky tvrdé materiály mají naproti tomu hysterezní smyčku širokou s podílem B_r/B_s blízkým jedné. Remanentní indukce tak u těchto materiálů nebývá o mnoho nižší než maximální hodnota a její potlačení je poměrně obtížné kvůli vysoké koercitivitě, která znesnadňuje odmagnetování. Tyto materiály obecně vykazují velkou magnetickou setrvačnost, protože i jejich magnetizace vyžaduje vysokou intenzitu externího pole. Magneticky tvrdé materiály díky tomu dosahují daleko vyšších hodnot parametru $(BH)_{\max}$ než magneticky měkké materiály, což je patrné ze srovnání na obr. 2.11. [10][11]

Mezi feromagnetické látky se řadí zejména kovy (např. Fe, Ni, Co) a jejich slitiny (např. nelegovaná ocel nebo litina), popř. sloučeniny feromagnetických kovů s prvky vzácných zemin jako je neodým, dysprosium a další. K výrobě permanentních magnetů se využívá nejčastěji prášková metalurgie, kdy se směs jemně rozemletých substancí promísí v určitém poměru a následně je spékána za vysokých teplot (sintrování). Pro potřeby této práce budou velmi důležité permanentní magnety na bázi FeNdB, tedy neodýmové magnety se základním chemickým vzorcem $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$. V porovnání s ostatními typy magnetů nabízejí zdaleka nejvyšší hodnoty $(BH)_{\max}$ a přitlačné síly na dané rozměry, a jsou tak v současnosti nejsilnějšími permanentními magnety v technické praxi. [11][19]

2.3.3. Antiferomagnetické a ferimagnetické látky

Také v antiferomagnetických látkách vznikají Weissovy domény, avšak na rozdíl od feromagnetik je jejich uspořádání směrů spontánní magnetizace výhradně antiparalelní. To znamená, že strukturu antiferomagnetika lze rozdělit na dvě podmnožiny domén se stejně velkými a opačně orientovanými magnetickými momenty. Antiferomagnetikum o teplotě nižší než tzv. Néelův bod $T_{(N)}$ tedy navenek působí magneticky neutrálně. Tuto vlastnost naopak nemají tzv. ferimagnetika, která představují speciální případ antiferomagnetismu. I jejich strukturu totiž tvoří dva různé typy domén s opačně orientovanými, avšak nestejně velkými magnetickými momenty. Aplikací vnějšího pole začne magnetizace těchto materiálů vzrůstat, nejprve pozvolna a posléze strměji. Důvodem je nárazové natáčení magnetických momentů u domén, které jsou orientovány nepříznivě vůči působení vnějšího pole, což nastává až po dostatečném navýšení intenzity H . Překročením kritické teploty $T_{(N)}$ se pak z obou typů látek stávají paramagnetické. Typickými zástupci antiferomagnetik jsou chrom a mangan, zatímco mezi ferimagnetika se řadí např. feritové magnety. [11][12]

3. Nerovnovážná termodynamika

Začátky 19. století byly ve fyzice spjaty nejen s rostoucím zájmem o elektromagnetismus, ale také s rozvojem nového vědního oboru známého jako termodynamika, a to zejména po rozšíření parního stroje. Z pohledu současného členění této disciplíny bychom hovořili zprvu o klasické (rovnovážné) termodynamice a posléze o její statistické interpretaci. Zajímavostí je, že se na této interpretaci podílel také J. C. Maxwell. Plynule se tak přesouváme k druhému teoretickému oddílu této práce, který se zabývá termodynamikou nevratných dějů neboli nerovnovážnou termodynamikou. Její základy byly položeny o něco později (až ve 20. století), o což se zasloužili především fyzici L. Onsager a I. Prigogine, a jedná se o rozšíření a zobecnění teorie rovnovážné termodynamiky. [20][21][22]

Předmětem zájmu rovnovážné termodynamiky je totiž převážně popis izolovaných systémů, které po určitém čase dospějí do stavu rovnováhy, v němž následně setrvají libovolně dlouhou dobu. Zavádí se veličina entropie, která právě v tomto stavu dosahuje svého maxima a její další změna (produkce) je nadále nulová. Tento popis je sice postačující pro velké množství fyzikálně-chemických procesů, vůbec však nebere v potaz výměnu energie či hmoty mezi systémem a jeho okolím. Zejména v přírodě přitom nalezneme systémy, které bez této interakce vůbec nemohou existovat. Buňky jakožto živé systémy spotřebovávají látku a energii ze svého okolí a tvoří jeho nedílnou součást. Okolní energii využívají na udržení (popř. zvýšení) své vlastní uspořádanosti a umírají, jsou-li od svého okolí trvale odděleny. Modelům rovnovážné termodynamiky navíc není vzdálená jen živá příroda, ale také mnoho otevřených či uzavřených systémů z oblasti dynamiky tekutin nebo katalytických chemických reakcí. K jejich studiu nám proto slouží poznatky z nerovnovážné termodynamiky. [20][21][23][24]

Tato kapitola se tedy věnuje jejím základním konceptům v souvislosti s řešeným problémem a systematicky zavádí potřebné pojmy a zákonitosti. Jelikož se obvyklé značení entropie shoduje s doposud využívaným označením pro geometrické plochy, tedy S , je potřeba v této kapitole z důvodu jednoznačnosti symboliky pozměnit zavedené značení. Zatímco entropii bude přenechána značka S , plochy budou nově označovány řeckým písmenem Ω . U některých veličin se také setkáme s indexy, které budou formálně sčítací, ale nebudou vyjadřovat tenzorový řád dané veličiny. Tyto indexy, vyjadřující např. komponenty v systému nebo chemické reakce, mohou obecně nabývat hodnot $1, 2, \dots, n$. Většinou proto bude v takovém případě uvedena v příslušném vztahu suma, která bude tuto horní hranici určovat. Pouze k závěru kapitoly budou z důvodu přehlednosti a přibývajícího počtu různých indexů k tomuto účelu zavedeny také horní indexy.

3.1. Zavedení konceptu nevratnosti dějů

Ještě než se dostaneme k samotné interpretaci konkrétních fyzikálních dějů z pohledu nerovnovážné termodynamiky, je potřeba se nejprve seznámit s potřebnou terminologií, na kterou se bude možné při hlubších teoretických úvahách následně odkazovat. Tato sekce proto shrnuje a objasňuje běžně užívané pojmy v termodynamice a blíže rozvádí koncept entropie. Jsou to zejména zákonitosti její produkce, které odlišují rovnovážné systémy od nerovnovážných, a proto je nezbytné těmito dvěma přístupům porozumět v návaznosti na známé zákony termodynamiky.

3.1.1. Vymezení základních pojmů

Začneme s pojmem, který zazněl několikrát již v úvodu do této kapitoly. Je jím termodynamický systém, pod kterým si lze představit např. makroskopické těleso, tekutinu, biologického jedince či celý ekologický útvar. Úlohou termodynamiky je v těchto systémech zkoumat veškeré přeměny energie a látky. Formálně definujeme tzv. makroskopický systém jako část reality obsahující konečný počet vzájemně interagujících podsystémů (tzv. fyzikálních částic), které sice zaujímají jen velmi malou část objemu systému, ale stále u nich má smysl hovořit o jakési vnitřní struktuře. Vnější prostor obklopující makroskopický systém pak nazýváme okolím systému. Podle vzájemných interakcí systému a jeho okolí rozlišujeme:

- otevřené systémy (dochází k výměně energie i částic s okolím),
- uzavřené systémy (vyměňují se svým okolím energií, ne však částice), nebo
- izolované systémy (nedochází k žádné výměně s okolím).

Vlastnosti systému a jeho vztah k okolí charakterizujeme pomocí makroskopických veličin označovaných jako parametry systému, které lze rozčlenit na několik typů. Vnější parametry jako objem systému nebo intenzita vnějšího elektromagnetického pole (se zdrojem umístěným mimo systém) kvantifikují působení okolí na systém. Vnitřní parametry systému naproti tomu popisují vlastnosti jeho podsystémů a změny způsobené probíhajícími procesy. Spadají sem např. teplota, tlak nebo koncentrace chemických komponent. Dále rozlišujeme globální (extenzivní) parametry, které jsou v rámci systému aditivní (např. hmotnost nebo entropie), a lokální (intenzivní) parametry, které jsou kromě času závislé také na prostorových souřadnicích. [20][21][23][24]

Stavem termodynamického systému rozumíme minimální soubor informací potřebný k jeho úplnému popisu. Shrnuje historii působení okolí na systém spolu s pamětí systému a umožňuje predikovat jeho další chování. Na základě typu zkoumaného systému lze definovat několik stavů, ve kterých se mohou nacházet. Dříve zmíněný rovnovážný stav reprezentuje nejpravděpodobnější uspořádání těch systémů, které jsou izolovány od svého okolí. Konečný čas, ve kterém izolované systémy dospějí do stavu rovnováhy, nazýváme relaxační dobou. Mají na ni vliv rozměry systému a počet částic, ale odvíjí se také od charakteru mechanismů odehrávajících se v systému. Jako příklad uvažme na jedné straně vyrovnání rozdílů tlaku v plynu trvající pouze zlomky sekundy, a na straně druhé vyrovnávání koncentrace chemické látky difúzí, které může trvat i několik let. V důsledku umožnění vzájemného ovlivňování systémů s vnějším prostředím již u otevřených a uzavřených systémů nelze hovořit o rovnovážném stavu, protože je těmito interakcemi neustále narušován. Pokud však lze takový systém rozdělit na soustavu myšlených disjunktivních podsystémů, jejichž stav je možné s dostatečnou přesností považovat za rovnovážný, pak definujeme tzv. stav lokální rovnováhy. V něm jsou všechny podsystémy nově považovány za samostatné termodynamické systémy s výše uvedenými požadavky. Musí tedy být tak velké, aby obsahovaly dostatečné množství částic, a zároveň tak malé, že změna jejich intenzivních parametrů bude zanedbatelná. Jestliže jsou tyto podmínky splněny, lze chování každého podsystému popsat pomocí stavových rovnic odvozených pro rovnovážné systémy i přesto, že je zkoumaný systém jako celek v nerovnovážném stavu. Jelikož uzavřené a otevřené systémy nemohou dospět do stavu rovnováhy, definujeme pro ně tzv. stacionární stav, ve kterém jsou všechny parametry systému nezávislé na čase. [20][21][23]

3.1. ZAVEDENÍ KONCEPTU NEVRATNOSTI DĚJŮ

3.1.2. Entropie v rovnovážných systémech

Zatímco první termodynamický zákon (též zákon zachování energie) je postačující pro energetickou bilanci v termodynamických systémech, selhává při popisu jejich časového vývoje. K tomuto účelu proto byla zavedena veličina entropie (S), která spolu s teplotou představuje pro termodynamiku zcela zásadní fyzikální veličinu. Na rozdíl od teploty není přímo měřitelná a makroskopicky je tedy interpretována jako měřítko nevratnosti procesů. Je definována tak, aby byla v izolovaném systému její změna vždy nezáporná, což odpovídá formulaci druhého zákona termodynamiky pro izolované systémy

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}, \quad (3.1)$$

kde T je absolutní teplota a δQ udává množství tepla dodané systému zvenčí. Znaménko rovnosti ve vztahu (3.1) platí pouze pro vratné děje. Jak si ukážeme dále, entropie je tzv. stavovou funkcí, jejíž hodnota je charakteristická pouze pro okamžitý stav systému a nezávisí na jeho historii. Jelikož teplo Q (podobně jako např. práce) stavovou funkcí není, používá se pro označení jeho infinitesimální změny odlišný symbol (δ) než u entropie, protože se nejedná o totální diferenciál. [20][21][23][24]

Uvažme nyní pouze vratné procesy. Dosadíme-li do vztahu (3.1) za δQ jednu z formulací prvního zákona termodynamiky a připočteme množství tepla, kterým je doprovázena změna vnitřního složení (prostřednictvím chemických reakcí či fázových přeměn), obdržíme pro změnu entropie rovnici

$$dS(U, V, N_\alpha) = \frac{1}{T} \left(dU + pdV - \sum_{\alpha=1}^n \mu_\alpha dN_\alpha \right), \quad (3.2)$$

ve které skaláry p a μ_α představují tlak a chemický potenciál α -té chemické komponenty (z celkového počtu n). Vidíme, že entropie je funkcí vnitřních parametrů U a N_α (vnitřní energie a počet částic α -té chemické komponenty) a vnějšího parametru V (objem systému), nikoli však času – je tedy skutečně stavovou funkcí. Každý tepelný, mechanický nebo chemický děj svou disipativností (ztrátovostí) přispívá k růstu entropie. V momentě, kdy v izolovaném systému všechny tyto procesy ustanou, systém se dostává do stavu rovnováhy a entropie nabývá své maximální hodnoty, která se již dále nemění. [20][25]

3.1.3. Entropie v nerovnovážných systémech

U otevřených systémů se k celkové změně entropie kromě příspěvků z vnitřních nevratných procesů ($_{in}S$) přidávají také toky entropie z okolí přes hranici systému ($_{ex}S$). Zápis pomocí indexů na levé straně se zde využívá dle odvození I. Prigogina, který tento rozklad zavedl ve svých publikacích (např. [24]). Dostáváme tedy součet

$$dS = d_{in}S + d_{ex}S. \quad (3.3)$$

Jelikož je přírůstek entropie nevratných procesů v libovolném podsystemu daného systému vždy kladný, lze druhý termodynamický zákon pomocí vztahu (3.3) formulovat obecněji jako

$$d_{in}S \geq 0, \quad (3.4)$$

3. NEROVNOVÁŽNÁ TERMODYNAMIKA

kde se rovnítko opět uplatňuje pouze u vratných procesů. [20][23][24][25]

Přestože byla dosud entropie definována výhradně jako globální veličina, pro popis nevratných stavů systému jsou užitečnější lokální parametry. K entropii tak zavádíme její lokální variantu v podobě měrné hustoty entropie s , kterou obdržíme vztahem veličiny na jednotku hmotnosti, tedy

$$S = \int_V s\rho \, dV. \quad (3.5)$$

Pokud se omezíme na systémy v lokálně rovnovážném stavu, entropie jejich podsystémů nebude závislá na prostorových souřadnicích a bude rovna právě vztahu (3.5). Jelikož musí být dílčí podsystémy rovnovážné, lze jejich přírůstek entropie stanovit dle rovnice (3.2). Analogicky k (3.5) musíme i ostatní globální veličiny (U , V a N_α) převést na jejich měrné hodnoty, přičemž dostaneme měrnou vnitřní energii u , měrný objem v a hmotnostní koncentraci c_α . Pro jednotkovou hmotnost tedy po ekvivalentní úpravě dostáváme závislost mezi jednotlivými přírůstky ve tvaru

$$Tds = du + pdv - \sum_{\alpha=1}^n \mu_\alpha dc_\alpha. \quad (3.6)$$

Tento vztah je známý jako Gibbsova rovnice, kterou chápat jako definici měrné hustoty entropie v systémech mimo rovnovážný stav. Vzhledem k omezení platnosti tohoto vztahu lze tvrdit, že předpoklad lokálně rovnovážného stavu systému je splněn, pokud v něm platí Gibbsova rovnice (3.6). [20][21][22][23]

Časový vývoj otevřeného systému je dán nevratnými procesy, které v něm probíhají. Nevratné jsou v tom smyslu, že se systém nemůže bez vnějšího vnosu energie či látky z okolí vrátit do výchozího stavu. Je to právě tato ireverzibilita (nevratnost), která je doprovázena změnami entropie. Proto zavádíme bilanční rovnici entropie jakožto její časovou změnu v celém systému, tedy

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{P}(S) + \mathcal{J}(S), \quad (3.7)$$

kde $\mathcal{J}(S)$ je tok entropie systémem, zatímco $\mathcal{P}(S)$ udává její produkci v důsledku ireverzibilních procesů za jednotku času. Odpovídá tak časové derivaci $_{in}S$, přičemž platí

$$\mathcal{P}(S) = \frac{d_{in}S}{dt} = \int_V \sigma(S) \, dV. \quad (3.8)$$

Veličina $\sigma(S)$ zde představuje hustotu produkce entropie. Jakožto množství entropie vzniklé za jednotku času v jednotkovém objemu pracujeme s veličinou $\sigma(S)$ ve smyslu lokální produkce. Analogicky k (3.4) proto lze rovněž formulovat druhý zákon termodynamiky v lokálním tvaru jako

$$\sigma(S) \geq 0, \quad (3.9)$$

kde rovnost platí jako obvykle jen pro vratné termodynamické procesy. K celkové produkci entropie ve zkoumaném systému mohou přispívat různé nevratné procesy, např. přenosy tepla, látky, hybnosti či nevratné chemické reakce. Ukazuje se, že pro všechny známé nevratné procesy má vyjádření hustoty produkce entropie podobnou strukturu. Jedná

3.2. LINEÁRNÍ NEROVNOVÁŽNÁ TERMODYNAMIKA

se vždy o bilineární formu, ve které je každý člen reprezentován součinem dvou veličin, a sice zobecněného termodynamického toku J_i a zobecněné termodynamické síly X_i . Toky J_i jsou uváděny do pohybu právě silami X_i , které zde figurují jako hnací mechanismy nevratných dějů. Pomocí této bilineární formy lze nyní rozepsat předchozí rovnice (3.9) a (3.8) jako

$$\sigma(S) = \sum_{i=1}^n J_i X_i \geq 0, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{P}(S) = \int_V \sum_{i=1}^n J_i X_i dV \geq 0, \quad (3.11)$$

kde sčítáme přes všechny ireverzibilní procesy přispívající k produkci entropie. Index i tedy v tomto případě formálně sčítací je, nicméně neudává tenzorový řád veličiny (ten je dán charakterem konkrétního nevratného děje). Pokud uvážíme, že je hustota produkce entropie v rovnovážném stavu vždy rovna nule, musí dle vztahu (3.10) rovněž platit

$$\sum_{i=1}^n J_i X_i = 0. \quad (3.12)$$

Z podmínky (3.12) vzhledem k naznačené provázanosti J_i a X_i vyplývá, že v rovnovážném stavu budou tyto veličiny nulové pro všechna i :

$$J_i = X_i = 0. \quad (3.13)$$

Rovnovážný (popř. lokálně rovnovážný) stav je tedy v podstatě podmíněn nulovými termodynamickými silami X_i a toky J_i dle (3.13). Jejich formulacemi pro různé ireverzibilní děje se zabývá následující sekce. [20][21][22][23][24]

3.2. Lineární nerovnovážná termodynamika

Pokud se zkoumaný systém bude od rovnovážného stavu postupně vzdalovat, začnou zobecněné termodynamické síly a toky z původně nulových hodnot spojitě narůstat. Je-li termodynamický systém ve stavu, který je ještě dostatečně blízko rovnováhy, lze u něj předpokládat mezi J_i a X_i lineární závislost. Tuto aproximaci lze učinit pouze v tzv. lineární oblasti termodynamických sil a toků, přičemž teorii vycházející z této aproximace nazýváme lineární nerovnovážnou termodynamikou. Na základě principu lokální rovnováhy je následně možné využít některé poznatky z rovnovážné termodynamiky. I nerovnovážné systémy v lineární oblasti mají snahu dospět do určitého ustáleného stavu, není jím však stav rovnováhy. Z důvodu neustálé interakce systému s jeho okolím je přípustný pouze tzv. stacionární stav, ve kterém produkce entropie odpovídá jakési minimální hodnotě slučitelné s okrajovými podmínkami systému. [20][21][24]

Studiem oblasti, kde již lineární vztahy nejsou v platnosti, se pak zabývá nelineární nebo též zobecněná termodynamika. Charakteristickou vlastností silně nerovnovážných systémů je vznik specifických makroskopických struktur, které nejsou jednoznačně odvoditelné z chování molekul tvořících systém. Příčinou jejich vzniku jsou velká zesílení náhodných, neměřitelných a nepředvídatelných poruch (tzv. fluktuací) v rámci zkoumaného systému. Termodynamické síly působící na otevřený systém jsou v nelineární oblasti příliš velké, což má za následek nestabilitu systému. Ten se pak vlivem fluktuací postupně vzdaluje od stacionárního stavu. [20][21][23][24]

3.2.1. Lineární fenomenologické zákony

V lineární oblasti je závislost zobecněných termodynamických toků na zobecněných termodynamických silách popsána pomocí lineárních fenomenologických zákonů, které nabývají obecně tvaru

$$J_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} X_k, \quad (3.14)$$

kde L_{ik} představuje tzv. fenomenologické koeficienty, které jsou nezávislé na X_k (jedná se o konstanty). Rozlišujeme koeficienty vlastní (pro $i = k$) a vzájemné neboli interferenční (pro $i \neq k$). Lineární fenomenologické zákony (3.14) vycházejí především z experimentálních zkušeností, do teorie byly zavedeny až posléze. Z experimentů vyplynulo, že jedna termodynamická síla může být příčinou několika termodynamických toků a zároveň jeden tok může být vyvolán více silami. V rámci fenomenologické teorie jsou koeficienty L_{ik} stanovovány buď experimentálně, nebo pomocí vhodně zvoleného kinetického modelu. [20][21][22]

Dosazením uvedeného vztahu (3.14) do rovnice (3.10) lze definovat vztah pro hustotu produkce entropie platný v lineární oblasti

$$\sigma(S) = \sum_{i,k=1}^n L_{ik} X_i X_k \geq 0. \quad (3.15)$$

Ze vztahu (3.15) vyplývá, že je $\sigma(S)$ v důsledku druhého zákona termodynamiky v lineární oblasti dána pozitivně semidefinitní kvadratickou formou proměnných X_i . Fenomenologické koeficienty L_{ik} tedy nemohou být úplně libovolné, protože musí podléhat Sylvestrově kritériu pozitivní definitnosti. Pokud rozepíšeme L_{ik} maticově, musí být všechny subdeterminanty této matice kladné, což lze shrnout následovně

$$L_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{i1} & \cdots & L_{ik} \end{vmatrix} > 0. \quad (3.16)$$

Důsledky tohoto omezení (3.16) pozorujeme i u experimentálně stanovených koeficientů L_{ik} , kdy vlastní koeficienty nabývají vždy kladných hodnot, zatímco ty vzájemné mohou být jak kladné, tak i záporné. Vzhledem ke shodě s experimentálními výsledky lze tento závěr považovat za další důkaz platnosti druhého termodynamického zákona. [20][22][23][24]

Jelikož dokáže nerovnovážná termodynamika v lineární oblasti postihnout velké množství známých fyzikálních dějů, ukažme si pro názornost několik příkladů konkrétních lineárních fenomenologických zákonů. S jedním z nich jsme se dokonce již setkali dříve, a sice v oddílu o elektromagnetismu. Řeč je o Ohmově zákonu elektrické vodivosti, který byl zaveden jako konstitutivní vztah (2.15). Vyjádřením intenzity elektrického pole E_i pomocí záporně vzatého gradientu elektrického potenciálu dle (2.6) obdržíme příslušný fenomenologický zákon ve tvaru

$$J_e = -L_{ee} \frac{\partial \varphi}{\partial x_e}, \quad (3.17)$$

3.2. LINEÁRNÍ NEROVNOVÁŽNÁ TERMODYNAMIKA

kde termodynamický tok J_e je ekvivalentní hustotě proudu j_i , zatímco koeficient L_{ee} zřejmě odpovídá měrné elektrické vodivosti γ . Dalším příkladem je Fourierův zákon pro přenos tepla vedením v důsledku gradientu teploty

$$J_q = -L_{qq} \frac{\partial T}{\partial x_q}, \quad (3.18)$$

kde J_q udává hustotu tepelného toku a L_{qq} představuje koeficient tepelné vodivosti. Podobnou strukturu jako předchozí dva vztahy (3.17) a (3.18) má také Fickův zákon difúze vyjadřující transport látky v důsledku gradientu koncentrace

$$J_d = -L_{dd} \frac{\partial c}{\partial x_d}, \quad (3.19)$$

kde J_d a L_{dd} definují hustotu difúzního toku a příslušný difúzní koeficient. [20][23][24]

3.2.2. Curie-Prigoginův princip

Dosud byly ukázány pouze ireverzibilní procesy popsané zobecněnými silami X_i a odpovídajícími toky J_i ve formě vektorů (tenzorů prvního řádu) – viz vztahy (3.17), (3.18) a (3.19). Mohou však nabývat různých tenzorových řádů podle typu nevratného děje. Skalárně (tenzorem nultého řádu) popisujeme typicky chemické reakce, zatímco např. viskózní jevy jsou reprezentovány tenzory druhého řádu. Z tohoto důvodu mají také fenomenologické koeficienty L_{ik} obecně tenzorový charakter. Otázkou je v tuto chvíli vzájemná ovlivnitelnost nevratných dějů odlišného tenzorového charakteru. [20][22][23]

P. Curie jako první ukázal, že vztah mezi příčinou a následkem může ve statických systémech záviset na jejich prostorové symetrii. Na tento závěr (tzv. Curieho princip) navázal I. Prigogine, který jej zobecnil na termodynamické systémy. Pokud je termodynamický systém v lineární oblasti izotropní, tedy jeho vlastnosti jsou v rovnovážném stavu stejné ve všech směrech, mohou se v něm vzájemně ovlivňovat pouze ireverzibilní děje stejného tenzorového řádu. Tento poznatek je známý jako Curie-Prigoginův princip. Obecně není platný v anizotropním prostředí a u systémů v nelineární oblasti, kde mohou právě v důsledku prostorové asymetrie či nelinearity procesů vzájemně interagovat i nevratné děje odlišného tenzorového charakteru. Za výše uvedených podmínek však Curie-Prigoginův princip umožňuje předem vyloučit některé efekty, které bychom obecně očekávali při interferenci různých ireverzibilních dějů, čímž zjednodušuje i experimentální výzkum smíšených procesů. [20][23][24]

3.2.3. Onsagerovy relace reciprocity

Je známo, že fenomenologické koeficienty vyjadřují velikost příspěvku jednotlivých nevratných procesů k zobecněnému toku, a tedy i k produkci entropie. Zatím však nebyla diskutována možnost symetrie interferenčních koeficientů L_{ik} . Přispívají tedy dva navzájem interagující nevratné děje k opačným zobecněným tokům stejnou měrou, nebo se jejich příspěvky velikostně liší? Zodpovězením této otázky se zabýval L. Onsager, který ukázal, že v lineární oblasti lze zvolit J_i a X_i takovým způsobem, aby při splnění podmínky (3.15) pro všechny interferenční fenomenologické koeficienty platilo

$$L_{ik} = L_{ki}. \quad (3.20)$$

Vztah (3.20) nazýváme Onsagerovou relací reciprocity. Pokud tedy k toku i -tého nevratného procesu J_i přispívá síla k -tého nevratného děje X_k poměrnou částí vyjádřenou vzájemným koeficientem L_{ik} , pak stejnou měrou (vyjádřenou týmž koeficientem L_{ik}) přispěje síla X_i k toku J_k . Onsagerovy relace mají v lineární nerovnovážné termodynamice velký praktický význam, protože umožňují snížit počet fenomenologických koeficientů (a nezávislých experimentálních metod potřebných k jejich stanovení) téměř na polovinu. Svou platnost však ztrácejí v nelineární oblasti, kde mají fenomenologické zákony obecně nelineární předpis a zároveň koeficienty L_{ik} mohou být závislé na zobecněných silách X_i . [20][22][23]

Onsagerovy relace (3.20) již byly v minulosti několikrát ověřeny experimentálně. Navzdory očekávání se ukazuje, že symetrie fenomenologických koeficientů není důsledkem druhého zákona termodynamiky, ani nevychází ze zákonů fenomenologické termodynamiky. Na základě Onsagerových odvození však víme, že lze její platnost dokázat ze zákona mikroskopické vratnosti. Zákony pro mikroskopické objekty (jednotlivé částice) jsou dle tohoto přístupu invariantní vůči inverzi času, jinými slovy zůstávají nezměněny při transformaci $t \rightarrow -t$. Pravděpodobnost vzniku spontánní fluktuace za určitou dobu po předešlé fluktuaci se tak shoduje s pravděpodobností vzniku stejných fluktuací v obráceném pořadí. [20][21][24]

3.2.4. Princip minimální produkce entropie

Jednou z důležitých vlastností otevřených systémů je vytváření nerovnovážných stacionárních stavů. V tomto stavu musí být časová derivace hustoty produkce entropie rovna nule. Uvažujme otevřený systém v lineární oblasti (v platnosti jsou Curie-Prigoginův princip i Onsagerovy relace reciprocity). Totální diferenciál σ jakožto funkce X_i pak lze rozepsat následovně:

$$d\sigma = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma}{\partial X_i} dX_i. \quad (3.21)$$

Sumu ve vztahu (3.21) rozdělíme na dvě části, a sice na zobecněné síly X_1 až X_m , které jsou v systému udržovány na konstantní hodnotě, a síly X_{m+1} až X_n libovolně se měnící v čase. Po zavedení časové derivace ve stacionárním stavu

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt} + \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial \sigma}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt} = 0, \quad (3.22)$$

zjistíme, že první člen v důsledku nezávislosti sil X_1 až X_m na čase vymizí. S využitím obecného vyjádření σ dle (3.15) lze stanovit parciální derivaci

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X_i} = 2J_i. \quad (3.23)$$

Následným dosazením do (3.22) obdržíme ekvivalentní podmínku stacionárnosti:

$$J_{m+1} = \dots = J_n = 0. \quad (3.24)$$

Tato podmínka nám říká, že všechny toky sdružené s proměnlivými silami ve stacionárním stavu vymizí. Tento závěr byl rovněž podpořen experimentálními výsledky. Můžeme tak zpětně upravit vztah (3.23) dosazením podmínky stacionárnosti (3.23):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X_i} = 0. \quad (3.25)$$

3.2. LINEÁRNÍ NEROVNOVÁŽNÁ TERMODYNAMIKA

Je-li derivace funkce v určitém bodě nulová, vyskytuje se v něm lokální extrém (minimum či maximum) derivované funkce. Ve stacionárním stavu je tedy dle (3.25) hustota produkce entropie extrémní. Druh extrému je posléze dán znaménkem druhé derivace σ , kterou lze opět stanovit obecně z vyjádření (3.15):

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial X_i^2} = 2L_{ii} > 0. \quad (3.26)$$

Již bylo řečeno, že vlastní koeficienty L_{ii} lze vždy považovat za kladné. Vztah (3.26) tak dokazuje, že v otevřeném systému v lineární oblasti, který se nachází ve stacionárním stavu (v souladu se zadanými okrajovými podmínkami), je produkce entropie skutečně minimální. Toto tvrzení je vyjádřením tzv. Prigoginova principu minimální produkce entropie. Evoluce systému do tohoto stavu je následně popsána tzv. vývojovým kritériem

$$\frac{d\sigma}{dt} \leq 0, \quad (3.27)$$

kde rovnost nastává právě ve stacionárním stavu. Vývoj systému do tohoto stavu probíhá postupným snižováním produkce entropie (neboli zápornou časovou derivací), dokud nedosáhne konstantní hodnoty, která je zároveň minimální. Produkce entropie je tedy v lineární oblasti reprezentována skalárním potenciálem, který popisuje časový vývoj systému. [20][23]

3.2.5. Nelineární nerovnovážná termodynamika

Přestože nelineární oblast nerovnovážné termodynamiky není předmětem této práce, je vhodné se o tomto odvětví pro porovnání alespoň stručně zmínit. Již bylo řečeno, že otevřený systém opouští stabilitu stacionárního stavu ve chvíli, kdy termodynamické síly na něj působící překročí určitou mezní hodnotu. Vlivem různých fluktuací se tento systém od stacionárního stavu ještě více vzdaluje a nazýváme jej silně nerovnovážným systémem. S tím také prudce narůstá počet možných stavů, které může takový systém zaujmout. Silně nerovnovážné systémy účinně disipují teplo a mohou vytvářet nové typy uspořádání, tzv. disipativní struktury, které jsou závislé na existenci nerovnovážného stavu. Přestávají platit Onsagerovy relace reciprocity i Curie-Prigoginův princip, přičemž samotné fenomenologické zákony již zpravidla nevykazují lineární závislost. Naopak se může projevit např. vliv paměti materiálu (historie působení). Pro systémy vzdálené od rovnováhy neexistuje žádný teorém, který by určoval jejich stav (na rozdíl od principu minimální produkce entropie v lineární oblasti). Přesto se i silně nerovnovážné systémy mohou vyvíjet do jistého stálého stavu, ten však již není popsateľný vhodně zvoleným potenciálem, jakým byla v lineární oblasti produkce entropie. Směrů, kterými se může otevřený systém následkem fluktuací ubírat, může být nespočet – od nestability až k nově organizovaným strukturám. Příkladem takových struktur může být Bénardova vírová struktura při ohřevu tekutiny, Taylorova-Couettova nestabilita při proudění vazké kapaliny mezi souosými válci či Kármánova vírová stezka při obtékání těles. [20][21]

Jestliže systém s rostoucími řídicími parametry dosáhne meze stability, dojde k tzv. bifurkaci, po jejímž překročení se systém může nacházet v několika odlišných stálých stavech, přičemž některé z nich jsou stabilní, zatímco jiné nikoliv. Termodynamická větev, kterou se systém od bifurkačního bodu nakonec vydá, závisí na jeho předchozím vývoji. U složitějších systémů dochází při vzdalování od rovnováhy k výraznému nárůstu počtu

těchto větvících bodů, až se bifurkace objevují tak hustě, že vytváří téměř spojitý sled možných stavů systému – hovoříme o tzv. bifurkační kaskádě. Vývoj silně nerovnovážného systému se tak jeví jako chaotický a zároveň je velmi citlivý na počáteční podmínky. Jelikož však tyto podmínky nejsme schopni s dostatečnou přesností změřit, není možné předem stanovit, do jakého stavu systém přejde. Tento tzv. deterministický chaos způsobuje, že výsledky měření v jednom experimentu již nelze nikdy zopakovat, protože se výchozí podmínky neustále mění. [20][23]

3.3. Odvození konstitutivních vztahů

Se základní znalostí teorie nyní přistupme k odvození konstitutivní rovnice, která se týká přímo řešeného problému (kapaliny s účinky elektromagnetických polí). Uvažujeme tedy uzavřený termodynamický systém v lineární oblasti, ve kterém zkoumáme především proudění viskózní kapaliny, dále pak působení vnějšího magnetického pole a výskyt chemických reakcí v kapalině. Výsledkem bude souhrnný vztah pro produkci entropie se zvláštním zaměřením na význam fenomenologických koeficientů L_{ik} . Po zavedení potřebného matematického aparátu budou představeny výchozí rovnice, s jejichž pomocí lze odvodit produkci entropie uvažovaných ireverzibilních dějů. Přestože tyto rovnice zatím nebyly zmíněny, rovněž vycházejí z teorie nerovnovážné termodynamiky.

3.3.1. Matematický aparát

Při práci s tenzory je namístě objasnit určité zákonitosti z tenzorové analýzy, které budou dále v rámci odvozování využívány. V první řadě je potřeba vysvětlit možnosti aditivní dekompozice tenzorů. Mějme obecný tenzor druhého řádu T_{ij} v trojrozměrném prostoru. Takový tenzor má celkem 3^2 složek, protože oba indexy nabývají hodnot $i, j = 1, 2, 3$. Každý tenzor druhého řádu je možné rozdělit na součet symetrické části T_{ij}^S a antisymetrické části T_{ij}^A , přičemž platí

$$T_{ij} = T_{ij}^S + T_{ij}^A = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \quad (3.28)$$

Jelikož T_{ji} představuje transponovanou variantu původního tenzoru, dochází u něj k záměně řádků se sloupci, přičemž hlavní diagonála zůstává beze změny. Z této skutečnosti vyplývá, že hlavní diagonála antisymetrické části tenzoru bude vždy nulová. Pokud označíme tenzor za symetrický, znamená to, že jeho protilehlé mimodiagonální složky jsou shodné (platí $T_{ij} = T_{ji}$) a že jeho antisymetrická část musí být nevyhnutelně nulová. K dekompozici (3.28) lze uvést příklad z mechaniky tekutin, a sice rozklad gradientu rychlosti proudění v_i

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{ij} + \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.29)$$

kde v_{ij} udává tenzor rychlosti deformace (symetrickou část) a ω_{ij} představuje tenzor rychlosti rotace (antisymetrickou část). V podstatě se tedy jedná o jednu polovinu rotoru rychlosti v_i . [18][22][26]

Další možnou aditivní dekompozicí tenzorů druhého řádu je rozklad na deviatorovou část a kulový (sférický) tenzor. K této operaci je vhodné nejprve zavést pojem stopa tenzoru. Jedná se o skalární produkt vzniklý úžením původního tenzoru T_{ij} . Tato úprava snižuje

3.3. ODVOZENÍ KONSTITUTIVNÍCH VZTAHŮ

jeho řád o 2 a prakticky vyjadřuje součet všech složek na hlavní diagonále. V Einsteinově sumační symbolice lze k vyjádření stopy tenzoru na původní tenzor aplikovat Kroneckerovo delta (δ_{ij}) neboli jednotkový tenzor:

$$T_{ij}\delta_{ij} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}. \quad (3.30)$$

Pro tentýž obecný tenzor T_{ij} pak s využitím stopy dle (3.30) definujeme jeho sférickou část v obecném tvaru

$$\frac{1}{n}T_{kk}\delta_{ij}, \quad (3.31)$$

kde v trojrozměrném prostoru položíme $n = 3$. Aby nedocházelo ke kolizi indexů, používá se pro stopu tenzoru zpravidla index různý od těch původních, zde T_{kk} . V rámci fenomenologické teorie nerovnovážené termodynamiky se často využívají také řecká písmena, např. $T_{\alpha\alpha}$. Kroneckerovo delta pak zaručuje, že je zachován tenzorový řád sférického tenzoru. Každý kulový tenzor má tedy nenulové pouze prvky na hlavní diagonále, přičemž jejich hodnota vždy odpovídá stopě tenzoru T_{ij} . Následně zavádíme deviátor tenzoru $\overset{\circ}{T}_{ij}$, který se řídí vztahem

$$\overset{\circ}{T}_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij}. \quad (3.32)$$

Z tohoto odvození vyplývá, že stopa deviátoru musí být vždy rovna nule. Důkazem je dosazení vyjádření (3.32) do definice stopy tenzoru (3.30) s uvážením $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$:

$$\overset{\circ}{T}_{ij}\delta_{ij} = \left(T_{ij} - \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij}\right)\delta_{ij} = T_{ij}\delta_{ij} - T_{kk} = T_{kk} - T_{kk} = 0. \quad (3.33)$$

Mimodiagonální složky deviátoru se shodují s původním tenzorem, zatímco prvky na hlavní diagonále jsou poníženy přesně o třetinu z hodnoty stopy původního tenzoru. Deviátory se v praxi mohou značit různě, v tomto případě byla použita symbolika dle [22], kde jsou vyjádřeny pomocí kroužku. Výjimku tvoří z důvodu přehlednosti deviátor tenzoru nevratných napětí Π_{ij} , který označíme D_{ij} , a deviátor již zmíněného tenzoru rychlosti deformace v_{ij} , který ponese označení d_{ij} . Představenou aditivní dekompozici lze pro názornost ukázat právě na těchto dvou tenzorech:

$$\Pi_{ij} = D_{ij} + \frac{1}{3}\Pi_{\alpha\alpha}\delta_{ij}, \quad (3.34)$$

$$v_{ij} = d_{ij} + \frac{1}{3}v_{\beta\beta}\delta_{ij}. \quad (3.35)$$

Podrobnější komentář ke vztahům (3.34) a (3.35) bude předmětem dalších podkapitol, zde slouží pouze jako příklad. [21][22][26][27]

3.3.2. Shrnutí potřebných vztahů

V této sekci jsou stručně zmíněny rovnice, ze kterých se vychází při stanovení produkce entropie. Budou zde uváděny pouze finální vztahy s objasněním vystupujících veličin, přičemž detailní odvození nabízí např. publikace [22] a [23]. Zásadním vztahem je v tomto ohledu Gibbsova rovnice, která byla představena ve tvaru (3.6). Jelikož ze vztahu (3.8)

3. NEROVNOVÁŽNÁ TERMODYNAMIKA

víme, že produkce entropie představuje časovou změnu této veličiny uvnitř zkoumaného systému, lze její vyjádření získat právě časovou derivací Gibbsovy rovnice a osamostatněním příslušného členu. Vycházíme tedy z upraveného vztahu

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} + p \frac{dv}{dt} - \mu_{(k)} \frac{dc_{(k)}}{dt}, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.36)$$

Pro ostatní veličiny (resp. jejich časové derivace), které v Gibbsově rovnici vystupují ($c_{(k)}$, u a v), je však potřeba nalézt uspokojivější vyjádření reflektující konkrétní nevratné děje odehrávající se v termodynamickém systému. K tomuto účelu budou sloužit rovnice uvedené níže. [22][23][28]

Prvním důležitým vztahem je zákon zachování hmotnosti s vlivem difúze a chemických reakcí. Jedná se o tedy o rovnici kontinuity, přičemž uvažujeme systém sestávající z n komponent, mezi kterými je možný výskyt r chemických reakcí. Změna hmotnosti komponenty k v daném objemu je po ekvivalentní úpravě dána jako

$$\frac{\partial \rho_{(k)}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_{(k)} v_{(k)i} \right) + \sum_{\ell=1}^r \nu_{(k)\ell} J_{\ell}, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (3.37)$$

kde $\rho_{(k)}$ vyjadřuje hustotu k -té složky, přičemž záporně vzatá divergence na pravé straně udává tok této komponenty do jednotkového objemu. Člen $\nu_{(k)\ell} J_{\ell}$ v rovnici (3.37) je zdrojový a představuje produkci (nebo destrukci) k -té komponenty v jednotkovém objemu v rámci ℓ -té chemické reakce. Kvantita $\nu_{(k)\ell}$ souvisí se stechiometrickými koeficienty v chemických reakcích, zatímco skalární veličina J_{ℓ} je definována jako rychlost neboli tok chemické reakce. Jelikož je hmotnost během veškerých chemických reakcí vždy zachována, tento zdrojový člen při sumaci přes všechna k vymizí a obdržíme známý tvar rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu, který lze dále upravovat. Pokud zavedeme koncentraci k -té komponenty $c_{(k)}$ jakožto podíl hustoty této komponenty $\rho_{(k)}$ vůči celkové hustotě ρ , dostaneme upravenou rovnici

$$\rho \frac{dc_{(k)}}{dt} = - \frac{\partial J_{(k)i}}{\partial x_i} + \sum_{\ell=1}^r \nu_{(k)\ell} J_{\ell}, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.38)$$

Vektorová veličina $J_{(k)i}$, na níž je v rovnici (3.38) aplikována divergence, je difúzním tokem k -té komponenty, který je při sumaci přes všechny komponenty roven nule. [22][23][28]

S využitím rovnice bilance hustoty impulzu a rovnice bilance součtu potenciální a kinetické energie, které zde z důvodu rozsáhlosti odvození nebudou uváděny, lze formulovat zákon zachování energie neboli první termodynamický zákon jako totální časovou derivaci měrné vnitřní energie u , tedy

$$\rho \frac{du}{dt} = - \frac{\partial J_i^q}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + J_{(k)i} F_{(k)i}, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.39)$$

V tomto vztahu se objevuje divergence z tepelného toku J_i^q , který vychází z časové změny měrného tepla a dříve byl zmíněn v souvislosti s Fourierovým zákonem (3.18). Dolní index je sčítací, zatímco horní index informuje o druhu nevratného toku. Vektorová veličina $F_{(k)i}$ představuje vnější objemové síly působící na jednotku hmotnosti k -té komponenty. Dále obsahuje rovnice (3.39) obecný tenzor napětí σ_{ij} , který sestává z již diskutovaného tenzoru nevratných napětí Π_{ij} a symetrického tenzoru vratných napětí τ_{ij} dle vztahu

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} + \Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \Pi_{ij}. \quad (3.40)$$

3.3. ODVOZENÍ KONSTITUTIVNÍCH VZTAHŮ

Zbývající člen z rovnice (3.36) lze přepsat s využitím právě představeného tenzoru vratných napětí pomocí následujících úprav

$$p \frac{dv}{dt} = p \frac{1}{\rho} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\rho} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} p \delta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad (3.41)$$

které vycházejí z vyjádření změny objemu pomocí divergence rychlosti v_i , jejímž ekvivalentním vyjádřením je gradient téže rychlosti násobený Kroneckerovým symbolem. [22][23][28]

V tuto chvíli tedy máme připraveny vztahy (3.38), (3.39) a (3.41) k dosazení do rovnice (3.36). Výslednou rovnici násobíme hustotou ρ a dělíme teplotou T , přičemž oba členy obsahující gradient rychlosti sloučíme s využitím (3.40)

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{T} \frac{\partial J_i^q}{\partial x_i} + \frac{1}{T} \Pi_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{T} J_i^k F_i^k - \frac{\mu^k}{T} \left(-\frac{\partial J_i^k}{\partial x_i} + \nu^{k\ell} J^\ell \right). \quad (3.42)$$

Zde se pro přehlednost již plně využívá značení zavedené dříve u tepelného toku J_i^q . Spodní indexy vyjadřují tenzorový řád veličiny, přičemž stále platí $i, j = 1, 2, 3$. Horní indexy vyjadřují ostatní atributy, přes které sčítáme, tedy i bez značení pomocí sumy nadále uvažujeme $k = 1, 2, \dots, n$ pro komponenty a $\ell = 1, 2, \dots, r$ pro chemické reakce. Další úpravy zahrnují zavedení afinity k chemickým reakcím jakožto skalární zobecněnou termodynamickou sílu

$$A^\ell = \mu^k \nu^{k\ell}, \quad (3.43)$$

a rozepsání derivací u všech členů s divergencí

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{J_i^q}{T} - \frac{\mu^k}{T} J_i^k \right) = \frac{1}{T^2} \left(-\frac{\partial J_i^q}{\partial x_i} T + J_i^q \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu^k}{T} \right) J_i^k + \frac{\mu^k}{T} \frac{\partial J_i^k}{\partial x_i}. \quad (3.44)$$

Na základě vztahu (3.7) pro změnu entropie lze nyní psát

$$\rho \frac{ds}{dt} = \sigma - \frac{\partial J_i^s}{\partial x_i}, \quad (3.45)$$

kde záporně vzatá divergence vyjadřuje tok entropie J_i^s do systému z okolí, a odpovídá tak členu $\mathcal{J}(S)$. Hledaná hustota produkce entropie je naopak vyjádřením členu $\mathcal{P}(S)$ dle vztahu (3.8). Ukazuje se, že do vnosu entropie z okolí spadají dva členy z rovnice (3.44), které tedy nebudeme uvažovat v rámci produkce entropie, a sice

$$J_i^s = \frac{1}{T} (J_i^q - \mu^k J_i^k). \quad (3.46)$$

Užitím všech zmíněných úprav obdržíme konečný vztah pro hustotu produkce entropie

$$\sigma = -J_i^q \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \Pi_{ij} \frac{1}{T} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - J_i^k \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu^k}{T} \right) - \frac{1}{T} F_i^k \right] - J^\ell \frac{1}{T} A^\ell, \quad (3.47)$$

kde jsou postupně (zleva) reprezentovány nevratné děje přenosu tepla (nevratný tok J_i^q), proudění viskózní kapaliny (tok Π_{ij}), difúze (J_i^k) a chemických reakcí (J^ℓ). [22][23][28]

3.3.3. Stanovení produkce entropie

Nyní lze přejít k samotnému odvození konstitutivní rovnice kapaliny s účinky elektromagnetického pole. Předpokládáme vodivou kapalinu, kde se elektrický náboj přenáší prostřednictvím obsažených nečistot (např. minerálů či jiných příměsí). K tomuto odvození lze dospět buď intuitivním přístupem, tedy na základě předchozích zkušeností, nebo fyzikálním přístupem, a sice s využitím poznatků nerovnovážné termodynamiky. První přístup vychází ze znalosti reologických modelů (pro řešenou úlohu se nabízí model Binghamské kapaliny nebo mocninový model). Další postup zahrnuje doplnění objemové Lorentzovy síly dle (2.12) do vyjádření zákona zachování hybnosti pro laminární proudění reálné kapaliny, tedy do Navier-Stokesovy rovnice

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j - \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho_{(e)} (E_i + \varepsilon_{ijk} v_j B_k) = \rho_{(e)} j_i, \quad (3.48)$$

kteřá se následně řeší společně s Maxwellovými rovnicemi. Pokud je množství částic v kapalině (reagujících na účinky elektromagnetického pole) dostatečně velké, může magnetická indukce ovlivňovat jak rychlostní profil, tak fyzikální vlastnosti kapaliny. Druhý zmíněný přístup pak spočívá právě v metodách nerovnovážné termodynamiky, kdy se konstitutivní rovnice odvozuje na základě produkce entropie. [18][27][28]

Začneme s nejjednodušším případem, který budeme postupně rozšiřovat. Uvažujme prosté proudění nestlačitelné izotropní kapaliny bez vlivu vnějších polí, difúze a chemických reakcí. Fenomenologický zákon popisující tento nevratný děj dává do souvislosti tenzor nevratných napětí Π_{ij} s tenzorem rychlosti deformace v_{ij} . Jelikož se jedná o tenzory druhého řádu, jsou při odvození zužitkovány oba představené druhy aditivní dekompozice tenzorů. Zatímco tenzor v_{ij} již sám o sobě představuje symetrickou část gradientu rychlosti dle (3.29), tenzor Π_{ij} je potřeba rozložit dle (3.28) i (3.32) současně. Je to symetrická část původního tenzoru, kterou rozdělíme na deviátor a kulový tenzor, přičemž antisymetrická část je přičtena beze změny. Popsanou dekompozicí získáme vyjádření

$$\Pi_{ij} = D_{ij}^S + \frac{1}{3} \Pi_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + \Pi_{ij}^A. \quad (3.49)$$

Antisymetrická část Π_{ij}^A nabývá významu především u magnetoreologických a feromagnetických kapalin, kde je uvažováno natáčení feromagnetických či ferimagnetických částic v nosné kapalině vlivem externího elektromagnetického pole. Předpokládejme, že u vody k rotačnímu pohybu částic nedochází, a tenzor Π_{ij} tedy pokládejme za symetrický. Antisymetrickou část Π_{ij}^A lze díky této skutečnosti zanedbat, přičemž u deviátoru již není potřeba uvádět jeho symetričnost ($D_{ij}^S = D_{ij}$). Z téhož důvodu uvažujeme z gradientu rychlosti pouze symetrický tenzor rychlosti deformace v_{ij} při zanedbání tenzoru úhlové rychlosti ω_{ij} . Další zjednodušení plyne z předpokladu nestlačitelnosti kapaliny, který má vliv na kulové tenzory v rovnicích (3.35) a (3.49). Jelikož stopa tenzoru v_{ij} vyjadřuje divergenci rychlosti, musí být v nestlačitelné kapalině vždy rovna nule ($v_{kk} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$). Pokud tedy připustíme z ireverzibilních dějů pouze proudění nestlačitelné izotropní kapaliny, budeme očekávat jednoduchou lineární rovnici ve tvaru fenomenologického zákona

$$J_{ij}^1 = L^{11} X_{ij}^1. \quad (3.50)$$

V izotropním prostředí představuje vlastní koeficient L^{11} skalár, avšak v obecném případě (anizotropní kapalina) by obsahoval 3^4 složek jakožto tenzor 4. řádu (L_{ijkl}^{11}). Horní indexy

3.3. ODVOZENÍ KONSTITUTIVNÍCH VZTAHŮ

zde slouží k očíslování nevratných dějů, nevyjadřují mocninu. Po dosazení v podstatě dostáváme známý Newtonův zákon viskozity

$$D_{ij} = L^{11} \left(\frac{1}{T} d_{ij} \right) = 2\eta d_{ij}, \quad (3.51)$$

kde η vyjadřuje dynamickou smykovou viskozitu závislou na teplotě T . Při uvážení stlačitelnosti kapaliny ($\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \neq 0$) přibude další nevratný děj, který definujeme skalární termodynamickou silou a odpovídajícím skalárním tokem

$$J^2 = L^{22} X^2. \quad (3.52)$$

Dosazením do této rovnice obdržíme druhý lineární fenomenologický zákon ve znění

$$\frac{1}{3} \Pi_{\alpha\alpha} = L^{22} \left(\frac{1}{T} v_{\beta\beta} \right) = b v_{\beta\beta}, \quad (3.53)$$

kde b představuje součinitel objemové viskozity, který je rovněž funkcí teploty. Ukazuje se tedy, že dekompozici tenzorů 2. řádu provádíme za účelem rozlišení jednotlivých nevratných dějů. Ke dvojici vztahů (3.51) a (3.53) přidáme ještě tepelný tok vycházející z Fourierova zákona (3.18). Lineární fenomenologický zákon nabývá obecného tvaru

$$J_i^3 = L^{33} X_i^3, \quad (3.54)$$

přičemž po dosazení obdržíme vztah připomínající člen přenosu tepla z rovnice (3.47) pro hustotu produkce entropie

$$J_i^q = L^{33} \left(-\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (3.55)$$

Vzniklý koeficient λ je součinitelem tepelné vodivosti. Pokud bychom nyní chtěli vyjádřit hustotu produkce entropie σ , měla by následující tvar:

$$\sigma = J_{ij}^1 X_{ij}^1 + J^2 X^2 + J_i^3 X_i^3 = D_{ij} \frac{1}{T} d_{ij} + \frac{1}{3} \Pi_{\alpha\alpha} \frac{1}{T} v_{\beta\beta} - J_i^q \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (3.56)$$

Jelikož je každý ireverzibilní děj popsán veličinami odlišného tenzorového řádu, nebudou spolu v izotropním prostředí nijak interagovat (platí Curie-Prigoginův princip). Dalším krokem proto bude kromě představení dalších nevratných dějů s ohledem na řešený problém také uvážení anizotropie prostředí. [18][22][27][28]

Zabývejme se nyní vektorem vnějších objemových sil F_i^k , který byl představen ve vztahu (3.39). Za předpokladu, že je dané vektorové pole konzervativní (např. u tíhové či elektrostatické síly), lze jeho hustotu f_i^k vyjádřit záporně vzatým gradientem z potenciálu ψ^k nezávislého na čase, obdobně jako ve vztahu (2.6). Obdržíme

$$f_i^k = \frac{1}{\rho^k} F_i^k = -\frac{\partial \psi^k}{\partial x_i}, \quad (3.57)$$

přičemž při uvážení pouze elektrostatické potenciální energie lze pro ψ^k psát

$$\psi^k = z^k \varphi, \quad (3.58)$$

3. NEROVNOVÁŽNÁ TERMODYNAMIKA

kde z^k udává elektrický náboj vztažený na jednotkovou hmotnost k -té komponenty (odtud plynou pro z^k jednotky C/kg), zatímco φ je elektrický potenciál. Následně se namísto chemického potenciálu μ^k zavádí obecnější potenciál zvaný elektrochemický ($\hat{\mu}^k$), který je vyjádřen prostou relací

$$\hat{\mu}^k = \mu^k + \psi^k. \quad (3.59)$$

S využitím rovnic (2.6), (3.57) a (3.58) tedy lze vektor F_i^k finálně rozepsat jako

$$F_i^k = \rho^k f_i^k = -\rho^k \frac{\partial \psi^k}{\partial x_i} = -\rho^k z^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \rho_{(e)}^k E_i, \quad (3.60)$$

kde součin hustoty ρ^k s hmotnostním nábojem z^k k -té komponenty dle rozměrové analýzy odpovídá hustotě elektrického náboje téže komponenty, tedy $\rho_{(e)}^k$. Tímto jsme v podstatě dostali upravenou definici elektrické síly $F_{(e)i}$ dle vztahu (2.4), kterou lze dále rozšířit o sílu magnetickou. Dá se ukázat (např. v publikaci [7]), že známý výraz pro objemovou Lorentzovu sílu dle (2.12) nabývá převedením na hustotu síly nového tvaru

$$f_i^k = \rho_{(e)}^k (E_i + \varepsilon_{ij\kappa} j_j^k B_\kappa). \quad (3.61)$$

Místo rychlosti vystupuje ve vektorovém součinu hustota proudu v k -té komponentě j_j^k . Zanedbáme-li účinek dalších sil, lze pro produkci entropie vlivem elektromagnetických sil psát

$$\sigma = J_i^e \frac{E_i^e}{T}, \quad (3.62)$$

kde součin $J_i^e E_i^e$ představuje práci vykonanou elektromagnetickým polem, přičemž pro objasnění je potřeba zavést vyjádření vektorových veličin J_i^e a E_i^e :

$$J_i^e = j_i - \rho_{(e)} v_i = j_i + \varepsilon_{ij\kappa} v_j B_\kappa, \quad (3.63)$$

$$E_i^e = E_i - \rho_{(e)} v_i = E_i + \varepsilon_{ij\kappa} v_j B_\kappa. \quad (3.64)$$

Odvozený difúzní člen z rovnice (3.47) tedy lze buď sloučit pomocí zavedeného elektrochemického potenciálu $\hat{\mu}^k$ za předpokladu konzervativní objemové síly F_i^k dle (3.59)

$$-J_i^k \frac{1}{T} \frac{\partial \hat{\mu}^k}{\partial x_i} \Big|_T, \quad (3.65)$$

nebo jej rozdělit na vliv chemických potenciálů a elektromagnetického pole zvlášť

$$-J_i^k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu^k}{T} \right) + J_i^e \frac{E_i^e}{T}. \quad (3.66)$$

Pakliže je teplota T konstantní, lze ji vytknout z gradientu, viz vztah (3.65). S touto znalostí můžeme přistoupit k definici lineárního fenomenologického zákona pro difúzní tok vlivem chemických potenciálů v obecném tvaru

$$J_i^4 = L^{44} X_i^4. \quad (3.67)$$

3.3. ODVOZENÍ KONSTITUTIVNÍCH VZTAHŮ

Dosazením z (3.66) lze psát

$$J_i^k = L^{44} \left(-\frac{1}{T} \frac{\partial \mu^k}{\partial x_i} \right) = \mathcal{D} \frac{\partial \hat{\mu}^k}{\partial x_i}, \quad (3.68)$$

kde veličina \mathcal{D} definuje poměrnou difuzivitu. S chemickými potenciály se pojí také tzv. Gibbs-Duhemova relace, která ve stacionárním stavu ($\frac{dv_i}{dt} = 0$) uvádí do souvislosti jejich změnu v podsystémech se změnou tlaku v systému:

$$\sum_{k=1}^n \rho^k \frac{\partial \mu^k}{\partial x_i} \Big|_T = \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (3.69)$$

Integrací přes objem systému V a aplikací Gauss-Ostrogradského věty dle (2.36) na pravou stranu rovnice dostaneme názornější vyjádření:

$$\int_V \sum_{k=1}^n \rho^k \frac{\partial \mu^k}{\partial x_i} \Big|_T dV = \oint_{\Omega} p n_i d\Omega. \quad (3.70)$$

S ohledem na řešený problém to v podstatě znamená, že ve stacionárním stavu, kdy nedochází ke změnám teploty, může změna tlaku na povrchu objemu (např. na stěnách nádrže) významně ovlivnit chemické potenciály v kapalině a podpořit tak výskyt příznivých chemických reakcí. Následuje difúzní tok související s účinky elektromagnetického pole

$$J_i^5 = L^{55} X_i^5, \quad (3.71)$$

u kterého po dosazení vystupuje měrná elektrická vodivost γ

$$J_i^e = L^{55} \left(\frac{1}{T} E_i^e \right) = \gamma E_i^e. \quad (3.72)$$

Posledním uvažovaným nevratným termodynamickým tokem je tok ℓ -té chemické reakce daný skalárně. Máme obecné vyjádření lineárního fenomenologického zákona

$$J^6 = L^{66} X^6, \quad (3.73)$$

ve kterém vystupuje již zmíněná afinita k chemické reakci definovaná vztahem (3.43). Z posledního členu v rovnici (3.47) vyplývá

$$J^\ell = L^{66} \left(-\frac{1}{T} A^\ell \right). \quad (3.74)$$

Tímto byly zadefinovány všechny ireverzibilní nevratné děje vzhledem k řešenému problému. Z celkem 6 termodynamických toků jsou tři popsány vektorově, dva skalárně a jeden tenzorem 2. řádu. [22][27][28][29]

Konečný vztah pro celkovou hustotu produkce entropie v uvažovaném termodynamickém systému obsahující všechny představené nevratné děje má následující předpis

$$\sigma = D_{ij} \frac{1}{T} d_{ij} + \frac{1}{3} \Pi_{\alpha\alpha} \frac{1}{T} v_{\beta\beta} - J_i^q \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} - J_i^k \frac{1}{T} \frac{\partial \mu^k}{\partial x_i} \Big|_T + J_i^e \frac{E_i^e}{T} - J^\ell \frac{1}{T} A^\ell. \quad (3.75)$$

3. NEROVNOVÁŽNÁ TERMODYNAMIKA

Jelikož je předmětem zájmu této práce umožnit vzájemnou interakci popsaných nevratných dějů, musí být dle Curie-Prigoginova principu prostředí uvažovaného systému anizotropní. Doposud nulové interferenční fenomenologické koeficienty budou nyní určovat míru příspěvku jednotlivých termodynamických sil k určitému termodynamickému toku. Shrňme proto pro přehlednost všechny představené fenomenologické zákony v obecném tvaru, a to pomocí následujícího maticového zápisu

$$\begin{bmatrix} J_{ij}^1 \\ J^2 \\ J_i^3 \\ J_i^4 \\ J_i^5 \\ J^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ijk\ell}^{11} & L_{ij}^{12} & L_{ijk}^{13} & L_{ijk}^{14} & L_{ijk}^{15} & L_{ij}^{16} \\ L_{k\ell}^{21} & L^{22} & L_k^{23} & L_k^{24} & L_k^{25} & L^{26} \\ L_{ik\ell}^{31} & L_i^{32} & L_{ik}^{33} & L_{ik}^{34} & L_{ik}^{35} & L_i^{36} \\ L_{ik\ell}^{41} & L_i^{42} & L_{ik}^{43} & L_{ik}^{44} & L_{ik}^{45} & L_i^{46} \\ L_{ik\ell}^{51} & L_i^{52} & L_{ik}^{53} & L_{ik}^{54} & L_{ik}^{55} & L_i^{56} \\ L_{k\ell}^{61} & L^{62} & L_k^{63} & L_k^{64} & L_k^{65} & L^{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{k\ell}^1 \\ X^2 \\ X_k^3 \\ X_k^4 \\ X_k^5 \\ X^6 \end{bmatrix}, \quad (3.76)$$

přičemž modře vyznačené složky na hlavní diagonále odpovídají vlastním fenomenologickým koeficientům. Jedná se o komplexní matematický model v nejobecnějším tvaru, kde si pod jednotlivými koeficienty musíme představit tenzory různých řádů. Pokud by tedy z nějakého důvodu byla porušena podmínka izotropie, bylo by potřeba určit její příčinu a na základě této znalosti zavést potřebná zjednodušení, aby bylo možné zredukovat počet nezávislých experimentů ke stanovení relevantních fenomenologických koeficientů. Kupříkladu vlastní koeficient $L_{ijk\ell}^{11}$, obsažený v již zmíněném obecném tenzoru smykové viskozity $\eta_{ijk\ell}$, obsahuje v obecném případě celkem 81 složek, z nichž je 36 nezávislých. Dále je nezbytné zvážit možné podmínky symetrie vycházející z Onsagerových relací reciprocity (3.20). Speciálně v případě působení vnějšího magnetického pole dochází u protějších interferenčních koeficientů k antisymetrii (např. $L_i^{56} = -L_k^{65}$). S ohledem na téma této práce jsou právě koeficienty L_i^{56} a L_k^{65} – vyznačené červenou barvou v rovnici (3.76) – velmi důležité, neboť definují vzájemný vztah mezi vnějším magnetickým polem a tokem chemických reakcí v systému. Rozepišme na ukázkou tok chemických reakcí J^ℓ podle matice (3.76) s dosazením z příslušných zákonů:

$$J^\ell = \frac{L_{k\ell}^{61}}{T} d_{k\ell} + \frac{L^{62}}{T} v_{\beta\beta} - \frac{L_k^{63}}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{L_k^{64}}{T} \frac{\partial \mu^k}{\partial x_i} \Big|_T + \frac{L_k^{65}}{T} E_i^e - \frac{L^{66}}{T} A^\ell. \quad (3.77)$$

Teorie nerovnovážné termodynamiky tedy jednoznačně poukazuje na možnost popsané interakce nevratných dějů. Úkolem navazující praktické části této práce proto bude experimentální ověření přednesené hypotézy. [22][27][28]

4. Návrh magnetického obvodu

Tato kapitola zahajuje praktickou část diplomové práce, kterou je primárně návrh a sestavení magnetického obvodu splňujícího určité požadavky, přičemž jsou využívány poznatky z teoretické části. Po shrnutí požadavků a omezení kladených na magnetický obvod je naznačena evoluce jeho designu, od počátečního návrhu přes výpočtové modelování až po výběr materiálu, sestavení a měření výsledné magnetické indukce.

4.1. Rozbor řešeného problému

Nezbytnou podmínkou k umožnění ovlivnění chemických reakcí v kapalině vnějším magnetickým polem je narušení izotropie prostředí, kdy jsou příslušné interferenční fenomenologické koeficienty nenulové. Jednou z možností, jak v kapalném prostředí zajistit anizotropii, je využití hydrodynamické kavitace. Tento jev v kapalinách nastává při výrazném poklesu tlaku v důsledku navýšení rychlosti proudění. Jestliže je podkročen tlak nasycených par (specifický pro danou kapalinu), prodělává kapalina fázovou přeměnu do plynného skupenství. Při opětovném navýšení tlaku pak dochází k bouřlivému kolapsu vzniklých bublin, který např. ve vodních strojích způsobuje snížení účinnosti, vibrace a při dlouhodobém vystavení i erozi materiálu. Zejména v oblasti vodohospodářství však kavitace nachází i svá uplatnění a nejinak tomu bude v této práci. Je to totiž právě imploze kavitačních bublin, která má potenciál v médiu ovlivnit chování makroskopických veličin v různých směrech souřadných os, a tím vyvolat jeho anizotropii. Pro účely tohoto experimentu proto bude v kapalině vyvolána hydrodynamická kavitace cíleně, a to průtokem přes tzv. konvergentně-divergentní dýzu.

Úspěšné provedení představeného experimentu vyžaduje také vyvinutí relativně silných magnetických interakcí. Z teoretických poznatků, které nejsou součástí této práce, vyplývá minimální potřebná hodnota magnetické indukce vnějšího pole, při které by mělo k popsání interakci dojít. K ověření představené hypotézy, resp. matematického modelu, je proto v rámci této práce jakožto primární požadavek stanoveno dosažení magnetické indukce B alespoň 1 Tesla uvnitř kavitační dýzy, kterou bude voda protékat.

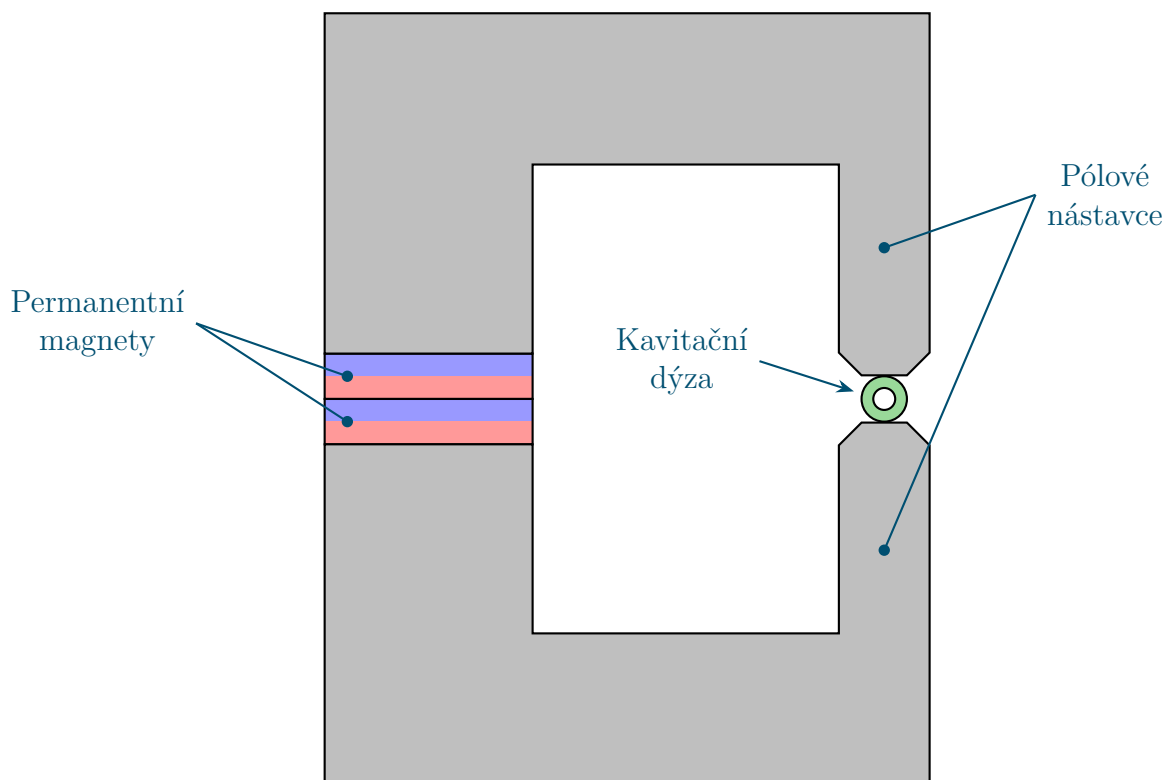
4.1.1. Nástin designu

Cílem je tedy navrhnout optimální konfiguraci permanentních magnetů splňující uvedenou podmínku $B \geq 1$ T v kavituující kapalině. Přestože by k tomuto účelu mohly být použity elektromagnety, vzhledem k relativně vysokým pořizovacím nákladům a nezbytnosti elektrické energie k jejich provozu budou v tomto experimentu pokud možno preferovány magnety permanentní. Protože se však v předcházejících diplomových pracích příliš neosvědčila varianta přiložení magnetů přímo na kavitační dýzu (viz [2], [3] a [4]), je nyní součástí návrhového procesu také přidružení kovových dílců, tzv. pólových nástavců, které budou sloužit k usměrnění magnetického toku do kavitační dýzy. Nevýhody původních konfigurací jsou zřejmé:

- vzniká nebezpečí poškození plexisklové dýzy při manipulaci se silnými magnety,
- ustavení magnetů je velmi obtížné a často zahrnuje podpůrné plastové konstrukce,
- poměrně nízké hodnoty dosažené magnetické indukce (obvykle $B < 0,5$ T).

Zmíněné nedostatky jsou (vyjma posledního bodu) novou konfigurací automaticky odstraněny, protože magnety jsou umístěny mimo kavitační dýzu, jak je ukázáno na obr. 4.1. Vznikají však také nové problémy a výzvy spjaté především s geometrií kovových dílců. Požadavky jsou následující:

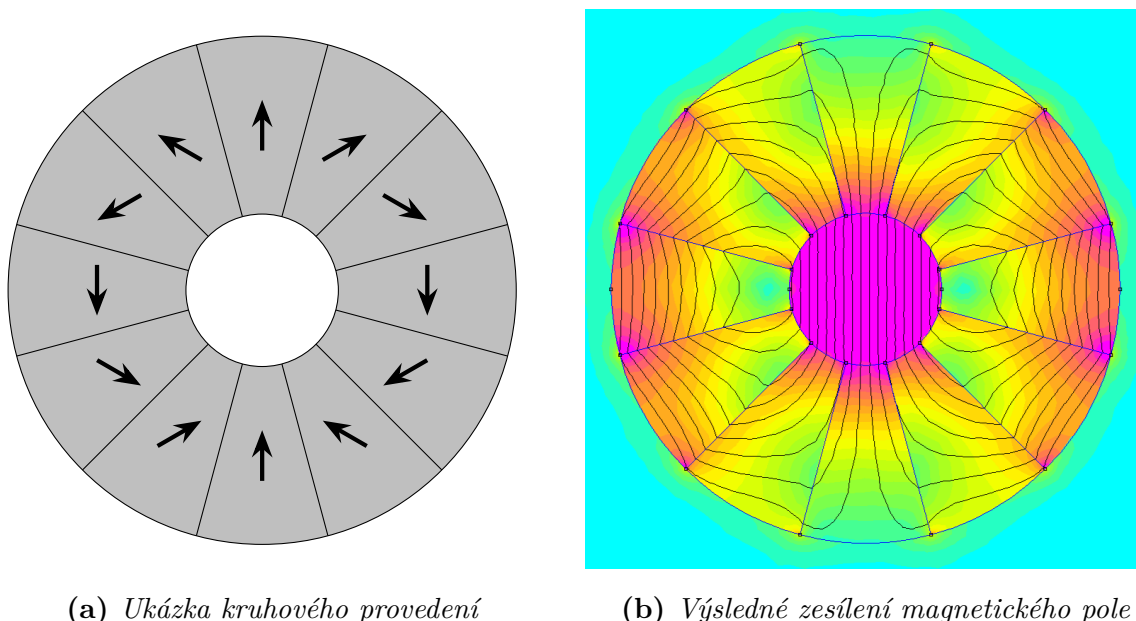
- materiál dílců musí mít vhodné magnetické vlastnosti,
- tvar dílců by měl maximalizovat výstupní magnetickou indukci,
- s ohledem na hospodárnost je potřeba optimalizovat rozměry dílců.



Obrázek 4.1: *Nástin zvoleného řešení magnetického obvodu.*

Jako alternativa se nabízí tzv. Halbachovo uspořádání magnetů, které sice nemusí nutně vyžadovat přítomnost dalších kovových částí, zato je ale mimořádně problematické z hlediska montáže. Specifickým rozvržením sady vhodně tvarovaných permanentních magnetů s odlišnými směry magnetizace dle daného schématu totiž lze dosáhnout výrazného zesílení magnetické indukce na jedné straně sestavy při současném zeslabení na straně opačné. Na obr. 4.2a je ukázáno provedení Halbachova uspořádání magnetů do kruhu, možných konfigurací je však více. Montáž takového uspořádání je obtížná především z důvodu intenzivní interakce mezi jednotlivými magnety vlivem nesouhlasných vektorů magnetizace, která působí proti tomuto uspořádání. V praxi se proto k uchycení používají různé plastové přípravky či rychle tvrdnoucí lepidla. Zejména v kruhových konfiguracích jsou také vyžadovány magnety „nestandardních“ tvarů s velmi specifickými směry magnetizace, což může představovat problém po stránce dostupnosti a pořizovacích nákladů. K tomuto konkrétnímu provedení je na obr. 4.2b přidružena také odpovídající simulace magnetického pole. V kruhové oblasti mezi magnety je pole významně zesílené a poměrně homogenní, zatímco vně jsou hodnoty magnetické indukce velmi malé. [30]

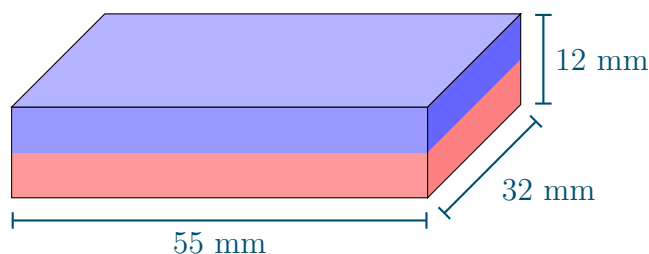
4.1. ROZBOR ŘEŠENÉHO PROBLÉMU



Obrázek 4.2: Halbachovo uspořádání permanentních magnetů.

4.1.2. Návrhová omezení

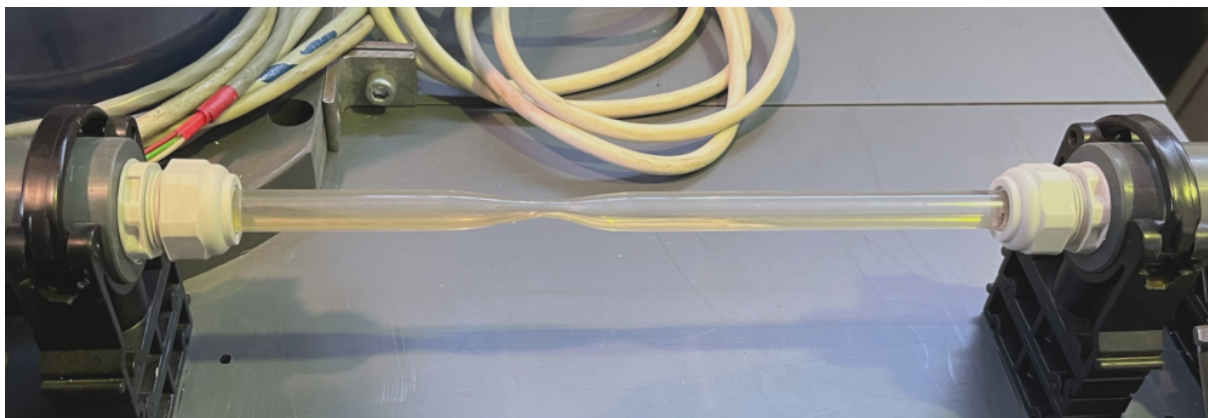
Při návrhu kovových dílců je potřeba vycházet především z rozměrů vybraných permanentních magnetů a kavitační dýzy. Mezi dostupnými druhy permanentních magnetů byly pro tento experiment logickou volbou neodymové magnety, jejichž přednosti byly podrobněji okomentovány v rámci teoretické části (viz podkap. 2.3.2). S ohledem na výše diskutované požadavky a dostupnost byl vybrán produkt z e-shopu společnosti MAGSY, s.r.o., a sice neodymový magnet tvaru kvádrů s kódovým označením 21001. Jakost tohoto magnetu, vyjádřenou třídou N50, lze považovat za jednu z nejvyšších mezi neodymovými magnety (v současnosti ji překonávají pouze třídy N52 a N55). Rozměry magnetu činí $55 \times 32 \times 12$ mm a směr magnetizace je kolmý na největší plochu (stěnu) magnetu, jak je naznačeno na obr. 4.3. Materiálový list k tomuto produktu je součástí přílohy k této práci. Z dalších vlastností lze zmínit remanentní indukci v rozsahu $B_r = 1,37$ až $1,43$ T a výrobcem zaručenou teplotní odolnost do $T = 80$ °C, což by pro řešený problém měly být postačující hodnoty. Prvním omezujícím parametrem pro návrh pólových nástavců je tedy dosedací plocha magnetů o rozměrech 55×32 mm. [19]



Obrázek 4.3: Rozměry magnetu N50 s naznačeným směrem magnetizace.

K vyvolání hydrodynamické kavitace pak byla vzhledem k rozměrům magnetů zvolena plexisklová konvergentně-divergentní dýza dostupná v těžké hydraulické laboratoři Odboru fluidního inženýrství Viktora Kaplana. Fotografie této dýzy o délce 285 mm je uvedena na obr. 4.4. Příslušná výkresová dokumentace, která byla pro účely této práce zpracována,

je rovněž obsažena v příloze. Dalším omezujícím faktorem pro magnetický obvod je tedy vnější průměr kavitační dýzy, který v nejširší části dosahuje 12 mm. Pro minimalizaci ztrát magnetické indukce ve vzduchu by symetrické pólové nástavce měly k dýze co nejvíce přiléhat. S uvážením jistě vůle pro manipulaci s dýzou bude podmínkou při návrhu dodržení vzdálenosti mezi kovovými dílci v oblasti umístění dýzy alespoň 12,5 mm, nejvýše však 13 mm.



Obrázek 4.4: Snímek použité kavitační dýzy.

4.2. První iterace sestavy

Tato kapitola popisuje vývoj designu magnetického obvodu, který vedl až k sestavení a měření prvního prototypu. Výchozím bodem pro návrhový proces včetně optimalizace sestavy bylo především výpočtové modelování magnetického pole na základě požadovaných a omezujících parametrů. Jelikož byl zvolen princip usměrnění magnetického pole, bylo potřeba věnovat zvláštní pozornost zejména přidruženým dílcům. Výběr materiálu proběhl primárně s ohledem na dostupnost, důraz byl nicméně kladen také na příznivé chování v přítomnosti magnetického pole. Tyto součásti musí být nejen feromagnetické, ale také magneticky měkké (viz obr. 2.11), aby přenášely co největší hodnotu magnetické indukce, aniž by docházelo k výraznějším tepelným ztrátám. Směrodatným ukazatelem je v tomto ohledu hodnota nasycení (saturace) vyjádřená příslušnou $B-H$ křivkou materiálu. Tento parametr bude při výběru materiálu klíčový, protože ovlivňuje maximální hodnotu přenesené magnetické indukce.

4.2.1. Výpočtové modelování rovinných úloh v magnetismu

Výpočtové modelování může při návrhu a přípravě experimentu sehrát důležitou roli, protože dává možnost posoudit či ověřit jisté aspekty měřicí trati ještě před jejím sestavením. Tím dává prostor pro kontrolu splnění stanovených požadavků a případnou optimalizaci (např. snížení nákladů či maximalizaci výstupních parametrů). Jelikož nejsou očekávány změny veličin (např. průřezu geometrie) ve třetím rozměru, tedy $\frac{\partial}{\partial x_3} = 0$, lze k rozměrové optimalizaci pólových nástavců využít zjednodušenou variantu modelování ve 2D. Pro tento účel byl zvolen open source program FEMM (zkratka pro *Finite Element Method Magnetics*) specializující se především na numerické výpočty rovinných nebo osově symetrických

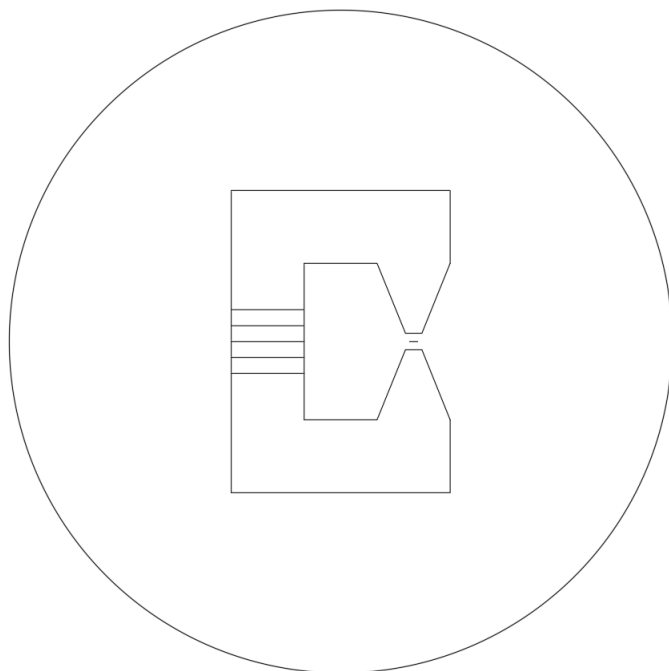
4.2. PRVNÍ ITERACE SESTAVY

magnetostatických úloh, ale dokáže řešit také úlohy z elektrostatiky či přenosu tepla. Jak již vyplývá z názvu programu, řadí se mezi řešiče využívající k numerickým výpočtům metodu konečných prvků. Velkou výhodou oproti komplexnějším konkurenčním programům je jeho rychlost, dostupnost a jednoduchost. [31]

Tato kapitola shrnuje postup při modelování řešeného problému v představeném programu FEMM na jedné z testovaných variant magnetického obvodu. Každá taková úloha vyžaduje několik úkonů, jmenovitě tvorbu geometrie, formulaci okrajových podmínek, samotný výpočet a posléze i vyhodnocení výsledků (tzv. postprocessing).

PŘÍPRAVA GEOMETRIE

Na základě známých rozměrů magnetu je potřeba sestavit jednoduchý náčrt (CAD model) řešené úlohy ve formátu DXF, např. pomocí modeláře AutoCAD, který bude následně importován do uživatelského prostředí FEMM. Kromě modelování vlastní sestavy je pro obdržení smysluplných výsledků simulace potřeba uvažovat také dostatečně velké okolí řešeného tělesa – svým způsobem lze hovořit o kontrolní oblasti. Při tvorbě geometrie je proto nezbytné ohraničení zvolené oblasti uzavřenou křivkou, nejčastěji kružnicí. Bez této hranice by nedošlo k tvorbě sítě konečných prvků vně daného tělesa, což by znemožnilo vyhodnocení magnetické indukce vyvolané v oblasti výskytu kavitační dýzy mimo sestavu. Jelikož má velikost kontrolní oblasti vliv na obdržené výsledky, je potřeba tento parametr pečlivě zvolit na základě porovnání různých variant. Aby simulace s dostatečnou přesností zachytila chování magnetického pole v okolí řešené sestavy, byl v tomto případě zvolen průměr hraniční kružnice jako dvojnásobek největšího rozměru sestavy. [31]



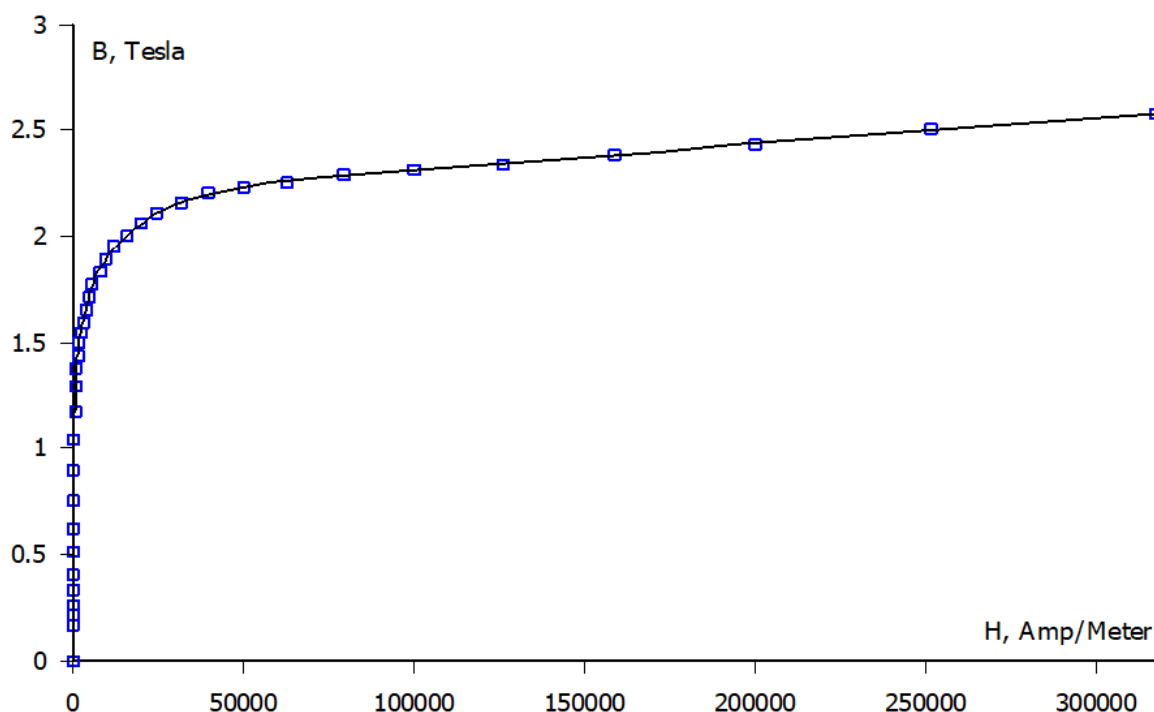
Obrázek 4.5: Příklad náčrtu geometrie v prostředí AutoCAD.

Dále je vhodné dopředu zvážit, v jakém místě by měly být stanoveny výstupní parametry, a do této oblasti umístit pomocné body či úsečky, na kterých bude daná fyzikální veličina vyhodnocena v rámci postprocessingu. V případě řešeného problému se může jednat např. o vodorovnou úsečku mezi kovovými dílci představující vnitřní průměr kavitační dýzy,

kde bude zkoumána výsledná hodnota B . Při návrhu kovových dílců a jejich následné iterativní tvarové optimalizaci na základě výsledků z předchozích simulací je důležité mít vždy na paměti vyrobiteľnost navrhované geometrie s ohledem na dostupné výrobní technologie. Pro bezproblémovou práci s vytvořenou geometrií je vhodné před uložením a načtením do programu FEMM odebrat veškeré kóty či jiné bloky v rámci AutoCADu, které by mohly porušit celistvost náčrtu. Snímek jedné z testovaných geometrií je uveden na obr. 4.5. Zřetelné je jak ohrazení kontrolní oblasti, tak pomocná úsečka k vyhodnocení magnetické indukce.

OKRAJOVÉ PODMÍNKY

Po importu náčrtu z externího DXF souboru následuje nastavení výpočtu v prostředí programu FEMM, což zahrnuje předepsání materiálů jednotlivým uzavřeným oblastem a zadání okrajové podmínky pro hraniční kružnici. Pro zvolené magnety i přidružené dílce je uvažována jednotná tloušťka 32 mm, kterou lze specifikovat v záložce *Problem*.

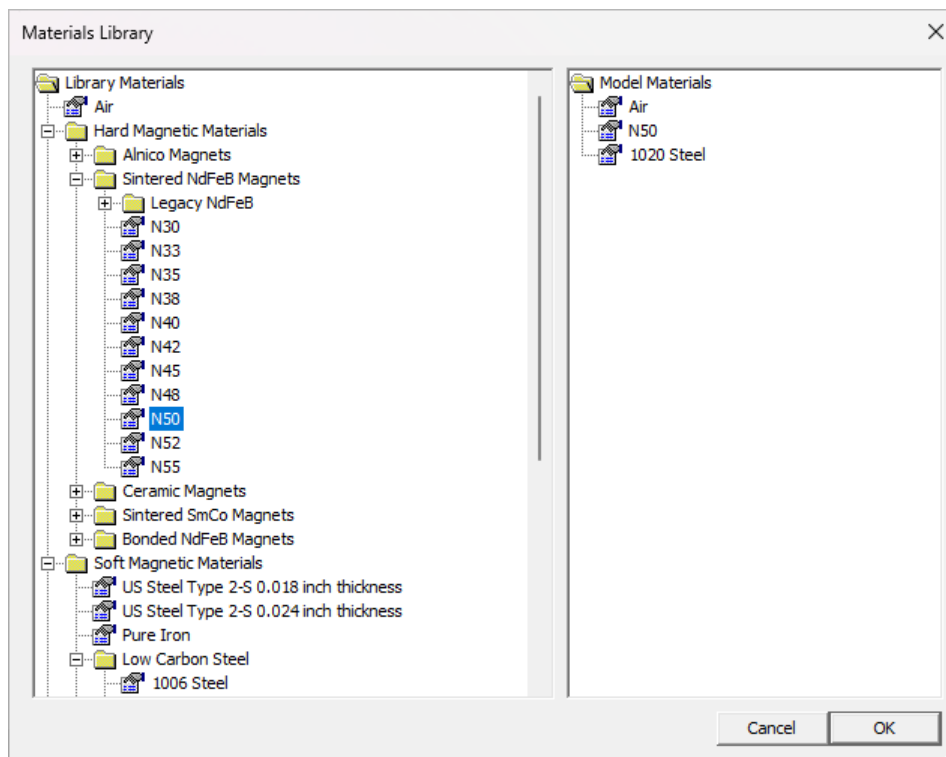


Obrázek 4.6: Vykreslení B - H křivky pro ocel AISI 1020 z databáze FEMM.

V řešené úloze se vyskytují celkem 3 různé látky: vzduch, feromagnetický kov a permanentní neodýmový magnet třídy N50. Aby bylo možné požadované materiály přiřadit k modelu, je potřeba je nejprve vybrat z vnořené databáze materiálů nebo jejich vlastnosti zadat manuálně. Podle dostupných B - H křivek materiálů v této databázi se jako vhodný materiál pro pólové nástavce jeví nízkouhlíkové oceli. Jelikož jsou v této databázi zastoupeny pouze oceli dle americké normy AISI, které často nemají svůj ekvivalent v evropských normách, budou zde vystupovat pouze jako měřítko pro porovnatelnost výsledků různých konfigurací sestavy. Pro tuto úlohu se v rámci prvotních simulací osvědčila např. nízkouhlíková ocel AISI 1020, jejíž B - H křivka je vynesena na obr. 4.6. K magnetické saturaci této oceli začne docházet po překročení hodnoty magnetické indukce $B = 2$ T. Na obr. 4.7 je pak zobrazen výběr potřebných materiálů, přičemž sintrované neodýmové magnety lze

4.2. PRVNÍ ITERACE SESTAVY

nalézt podle jejich jakosti v kategorii *Hard Magnetic Materials*, zatímco nízkouhlíkové oceli spadají do sekce *Soft Magnetic Materials*.



Obrázek 4.7: Ukázka výběru materiálů z databáze FEMM.

Nyní přistupme k formulaci okrajových podmínek. V rámci řešeného problému se k uzavření kontrolní oblasti používá tzv. Dirichletova okrajová podmínka, která předepisuje konkrétní hodnotu vektorového potenciálu magnetického pole A_k . Tato veličina představuje obdobu skalárního potenciálu elektrického pole φ s tím, že pro solenoidální vektorové pole B_i je příslušný vektorový potenciál vyjádřen pomocí rotoru

$$B_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}. \quad (4.1)$$

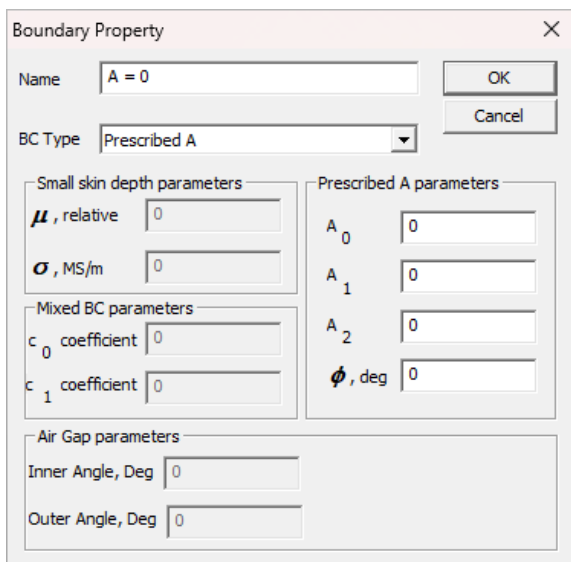
Dirichletova okrajová podmínka se nejčastěji využívá právě u magnetostatických úloh, kde na hraniční křivce kontrolní oblasti uvažujeme $A_k = 0_k$. To znamená, že touto hranicí neprochází žádný magnetický tok, což vyplývá z dosazení (4.1) do definičního vztahu (2.10) s využitím Stokesovy věty dle (2.37)

$$\Phi = \int_S \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} n_i \, dS = \oint_k A_i \, dk_i = 0, \quad (4.2)$$

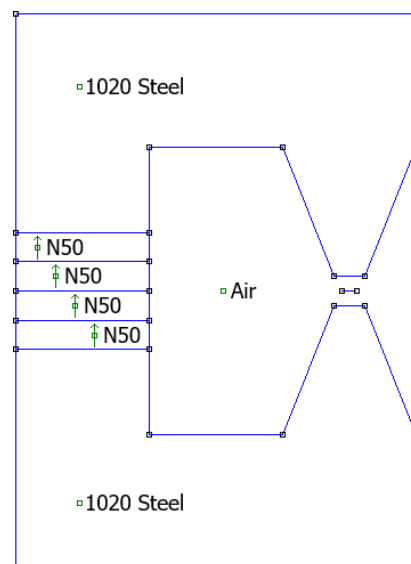
kde uzavřená křivka k odpovídá hranici kontrolní oblasti. Zadání této okrajové podmínky je naznačeno na obr. 4.8a. [7][31][32]

Dále je potřeba přiřadit zvolené materiály příslušným entitám modelu. Pomocí tzv. vztahných bodů vložených do každé uzavřené plochy lze postupně definovat pro každou část modelu odpovídající materiál. U magnetických materiálů je kromě tohoto úkonu nutné zadat také směr magnetizace pomocí úhlu, který bude pro všechny magnety shodný a bude odpovídat obr. 4.3. Umístění vztahných bodů a přiřazení vlastností je rovněž patrné z obrázku 4.8b.

4. NÁVRH MAGNETICKÉHO OBVODU



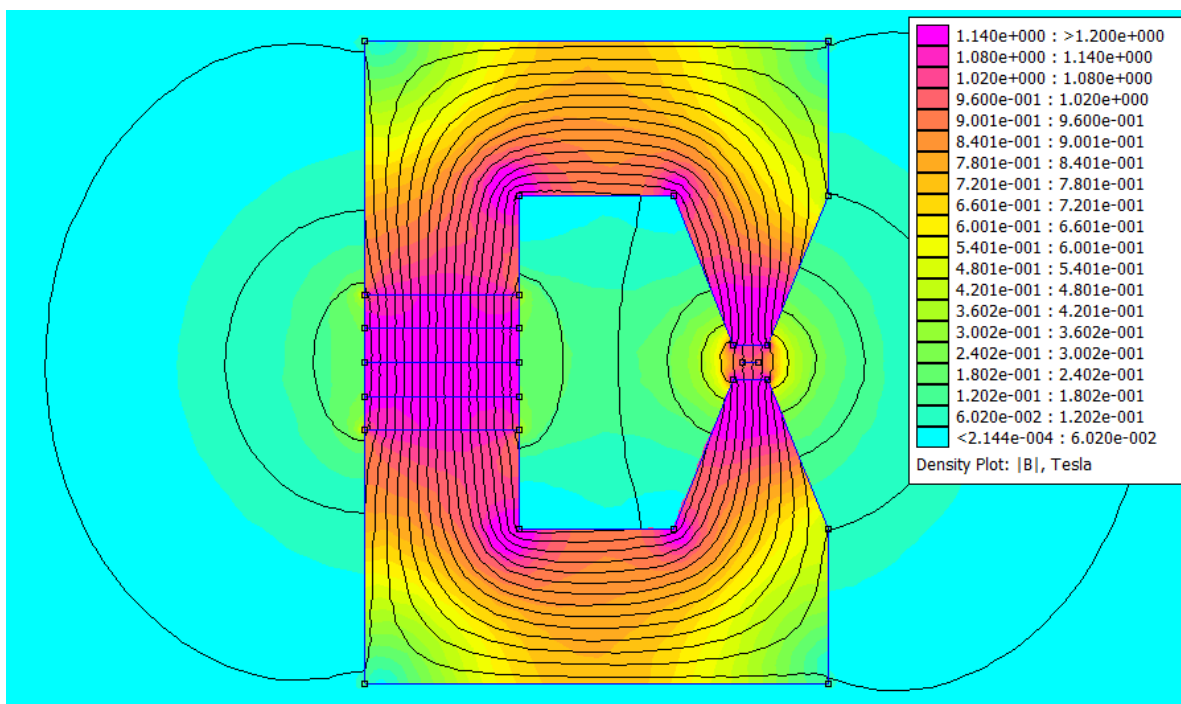
(a) Okrajová podmínka $A_i = 0_i$



(b) Přirazení materiálů

Obrázek 4.8: Ukázka nastavení okrajových podmínek.

V tuto chvíli je vše připraveno pro spuštění výpočtu a vyhodnocení výsledků. Nástroj pro tvorbu výpočtové sítě není nutné spouštět, pokud nejsou předmětem zájmu přímo parametry vytvořené sítě (počet konečných prvků a uzlů) nebo její vizualizace, protože síť je vygenerována automaticky při každém zahájení výpočtu. Tato data jsou navíc zpětně přístupná i při vyhodnocení výsledků.



Obrázek 4.9: Ukázka vykreslení magnetických siločar a kontur magnetické indukce.

4.2. PRVNÍ ITERACE SESTAVY

VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ

Pro tzv. postprocessing má program FEMM připraveno specializované uživatelské prostředí obohacené o funkce určené pro zpracování vizualizací či kvantitativní posouzení výstupních parametrů. K vyhodnocení řešené úlohy je využita vizualizace kontur magnetické indukce v řešené oblasti (obrázek 4.9) spolu s vykreslením závislosti dosažené magnetické indukce v rámci vnitřního průměru kavitační dýzy, který je zastoupen předem připravenou pomocnou úsečkou na příslušném místě.

4.2.2. Evoluce modelu sestavy

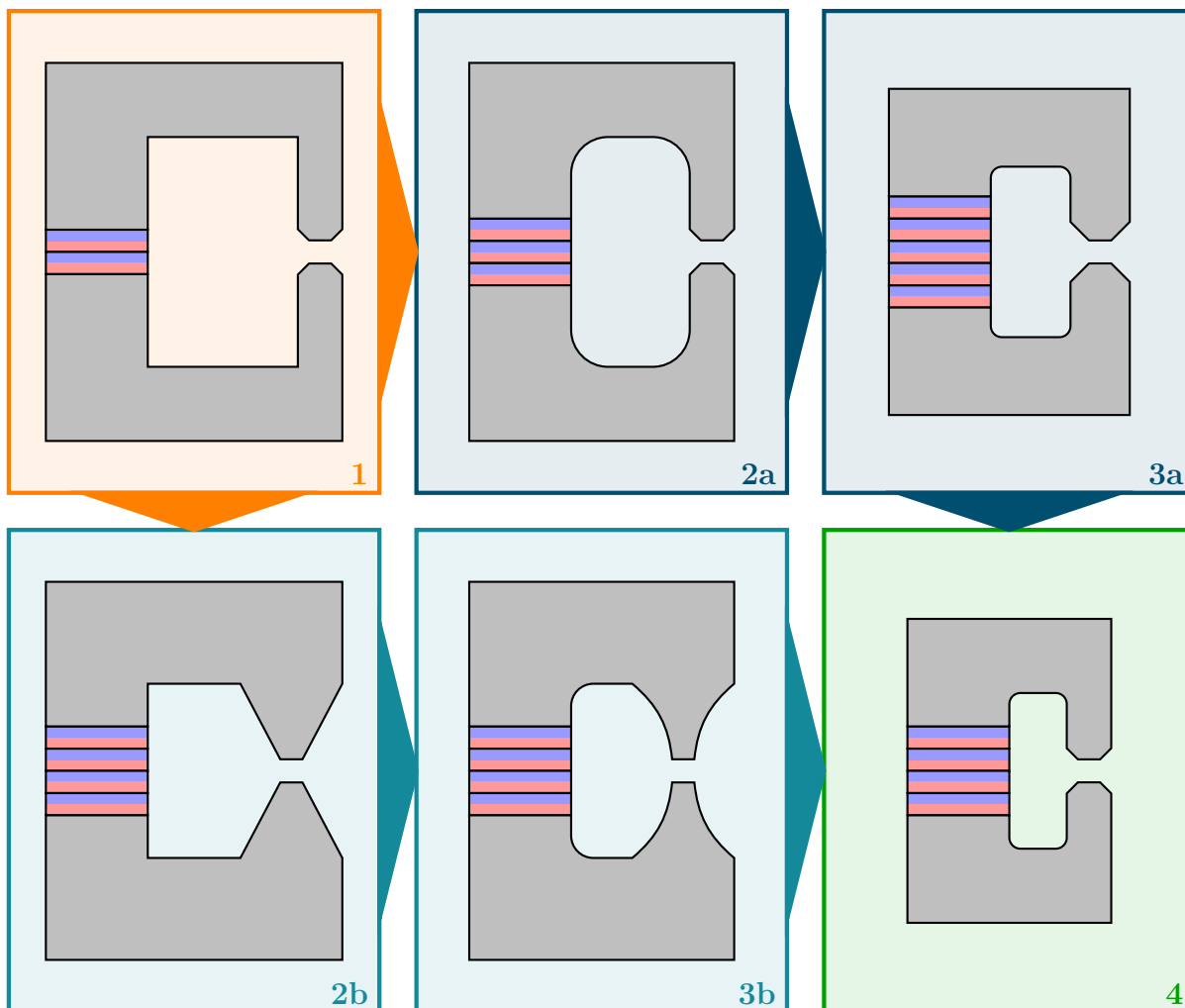
Nyní lze zahájit testování různých návrhových variant s využitím postupu popsaného v předchozí podkapitole. Výchozím bodem je původní nástin geometrie znázorněný na obr. 4.1, který je dále upravován a optimalizován na základě výsledků z předešlých simulací. Už z prvních výpočtů vyvstalo několik otázek ohledně vlivu určitých aspektů sestavy na výstupní parametry magnetického obvodu. Tyto myšlenky jsou bodově shrnuty níže.

- Jak ovlivní počet neodymových magnetů výstupní parametry?
- Může vhodné použití zkosení či zaoblení rohů snížit ztráty magnetické indukce?
- Jaký je optimální tvar zakončení pólových nástavců směrem ke kavitační dýze?
- Je potřeba šířku pólových nástavců redukovat od magnetů k dýze pozvolna, nebo by měla být ponechána na konstantní hodnotě se skokovým zúžením směrem k dýze?
- Existuje pomyslná hranice minimalizace rozměrů sestavy, po jejímž překročení již výstupní parametry nebudou mít rostoucí trend?

Z velkého množství provedených simulací následně vzešlo několik důležitých poznatků a závěrů, které do jisté míry reflektují a zodpovídají přednesené otázky a mohou posloužit jako obecná doporučení pro další návrhové iterace. Optimální počet permanentních magnetů byl ustanoven z rozsahu 2 až 6 kusů na základě porovnání příslušně upravených variant sestavy. Spojení dvou a více neodymových magnetů má sice všeobecně příznivý vliv na výstupní parametry, avšak zvětšování počtu magnetů nad 4 kusy již nezpůsobí výraznější navýšení výsledné magnetické indukce (z důvodu nasycení sestavy). Jelikož s vyšším počtem magnetů rostou také pořizovací náklady, nemá smysl překračovat hranici 4 kusů v sestavě.

Při optimalizaci magnetického obvodu je také potřeba určit kritická místa z hlediska ztrát magnetické indukce a navrhnout potřebné úpravy. Protože lze okolní vzduch v podstatě považovat za magneticky neutrální, dochází mimo objem pólových nástavců k strmému poklesu magnetické indukce (nepřímo úměrně s vzdáleností) [7]. Z tohoto důvodu vzniká snaha „udržet“ magnetický tok co nejdéle v pólových nástavcích. Nežádoucí úniky magnetického toku jsou patrné např. v okolí umístění dýzy na obrázku 4.9. Z výsledků výpočtového modelování pak z hlediska ztrát vyplývají dvě protichůdné zákonitosti. Většina ztrát magnetické indukce je v řešené sestavě způsobena především skokovými změnami šířky pólových nástavců, avšak velký vliv má také množství materiálu, kterým musí vnější magnetické pole proniknout. Jelikož je však redukce šířky dílců nezbytná (konkrétně z 55 mm na straně magnetů až k 12 mm na straně dýzy), je potřeba nalézt kompromis mezi minimalizací objemu a optimalizací změny šířky pólových nástavců. Dále se ukázalo, že pro optimální usměrnění magnetického toku může být přínosné zavedení

vhodného zaoblení hran, které bude kopírovat tvar magnetických siločar lépe než ostré hrany. Pokud jsou zejména vnitřní hrany pólových nástavců ostré, způsobují nežádoucí ztráty magnetické indukce (viz obr. 4.9). Tento závěr souvisí také se způsobem zakončení dílců v oblasti výskytu kavitační dýzy. Kontaktní plocha by neměla příliš velká, aby koncentrovala tok magnetického pole výhradně do kavitační dýzy.

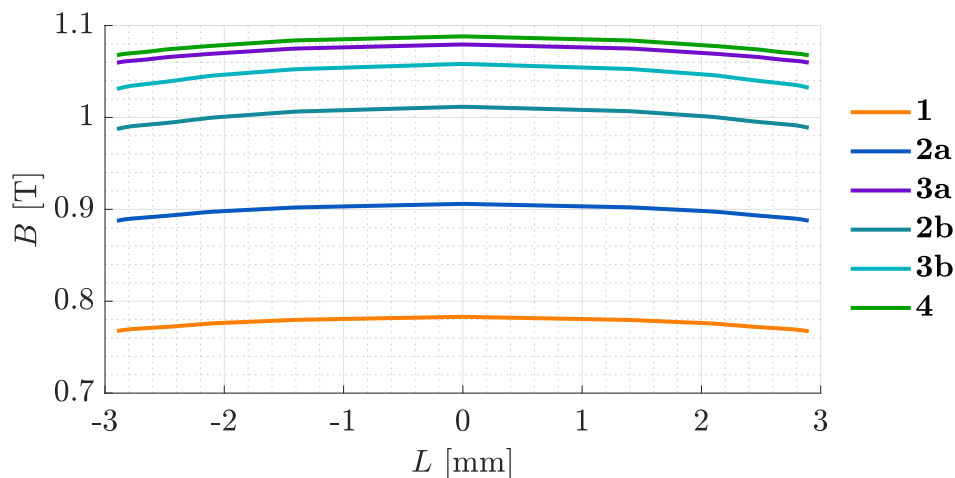


Obrázek 4.10: Shrnutí evoluce návrhu prostřednictvím dvou vývojových větví.

Vyřčené závěry podpořené obdržnými výsledky ze simulací způsobily, že při vývoji magnetického obvodu došlo k rozštěpení návrhové cesty na dvě souběžné větve, které jsou schematicky naznačeny na obr. 4.10. V rámci horní vývojové větve byly zkoumány varianty magnetického obvodu upřednostňující minimalizaci rozměrů při současném navyšování počtu magnetů. Úlohou druhé vývojové větve bylo zaměření na provedení s konstantní šířkou pólových nástavců a různým tvarováním zakončení směrem k dýze. Přestože u variant **2b** a **3b** vznikalo obecně méně koncentrátorů magnetické indukce než u provedení **2a** či **3a**, v konečném důsledku měl větší objem ocelových dílců znatelnější negativní vliv na výstupní parametry. Poznatky z obou přístupů následně vyústily ve vytvoření nového modelu, který dle simulací disponoval doposud nejvyššími výstupními parametry. K sestavení prvního modelu proto bylo vybráno právě finální provedení **4**, přičemž porovnání s ostatními variantami z obr. 4.10 nabízí graf 4.11. Uvedeny jsou výsledné hodnoty magnetické indukce

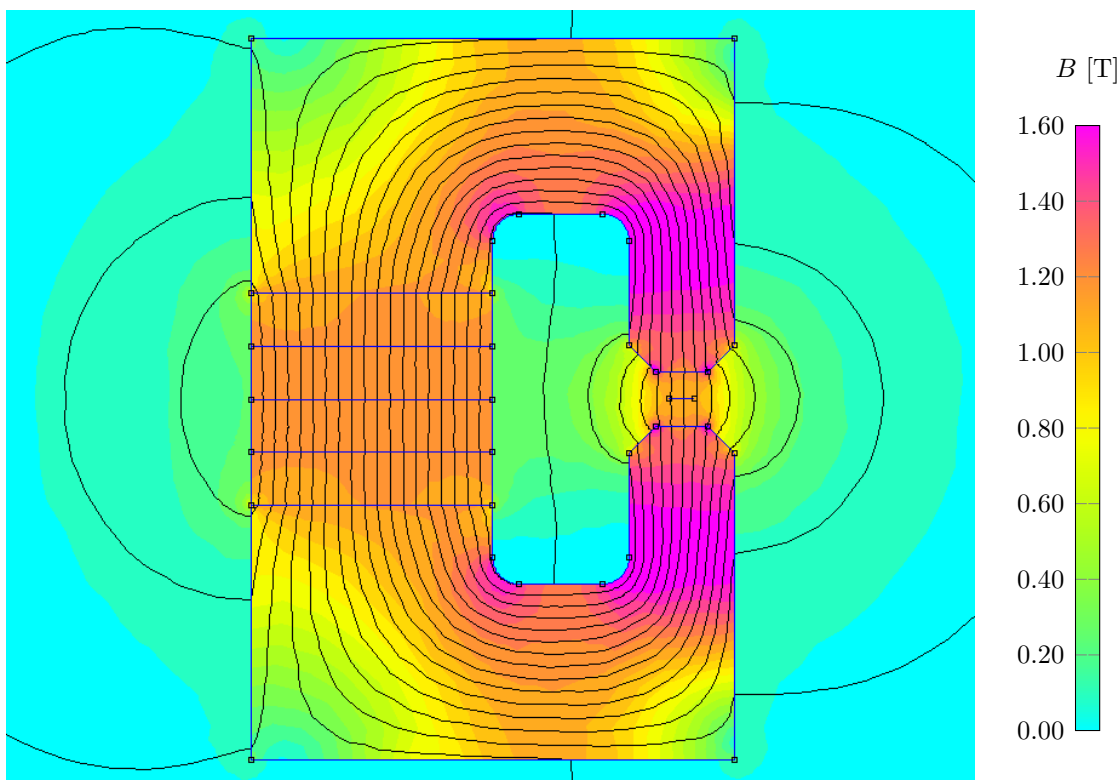
4.2. PRVNÍ ITERACE SESTAVY

na definované vodorovné úsečce představující vnitřní průměr kavitační dýzy. Tento graf byl zpracován z dat získaných v programu FEMM.



Obrázek 4.11: Porovnání hodnot B v kavitační dýze pro různá provedení sestavy.

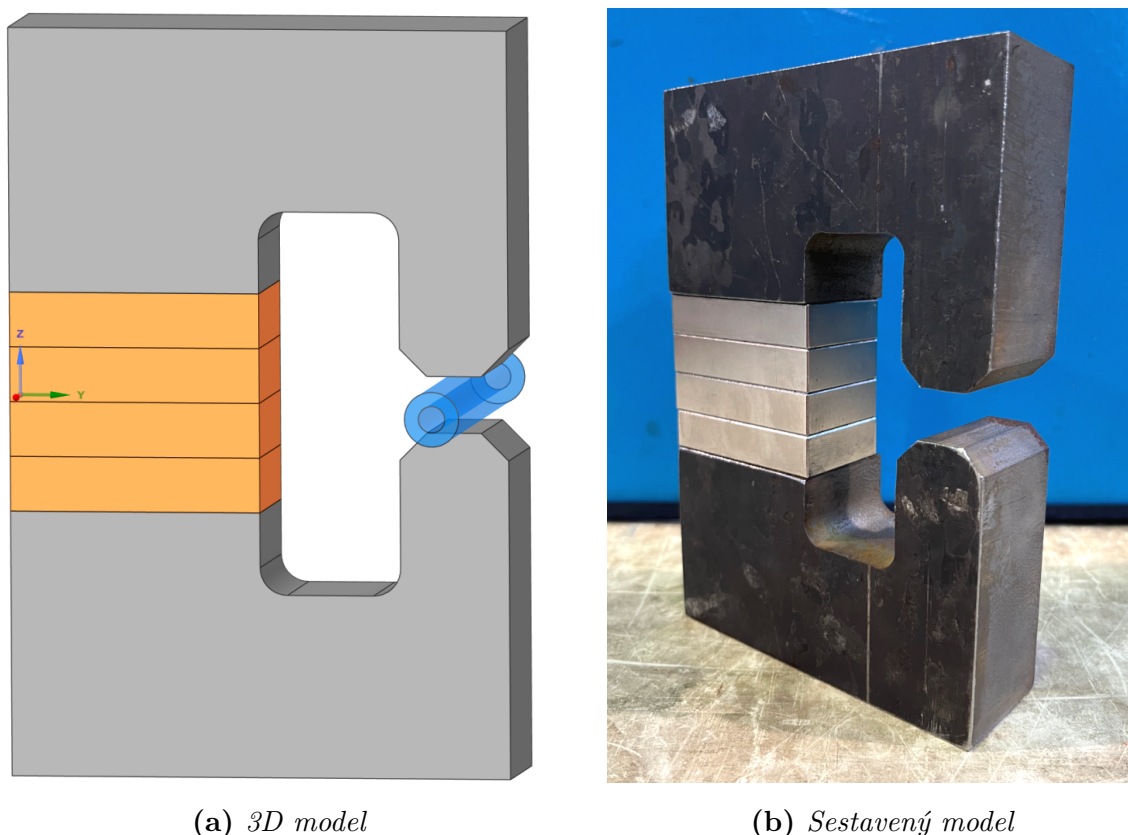
Požadavek na $B \geq 1$ T by tedy dle 2D simulací měl být splněn u variant **3a**, **3b** i **4**. Poslední zmíněné provedení vykazuje nejen nejlepší výstupní parametry vzhledem k množství spotřebovaného materiálu, ale také nejvyšší hodnoty magnetické indukce obecně (viz obr. 4.11). Za účelem znázornění usměrnění magnetického toku byla rovněž vytvořena vizualizace kontur B pro toto provedení na obr. 4.12.



Obrázek 4.12: Vizualizace magnetické indukce pro vybranou sestavu.

4.2.3. Sestavení a měření prvního prototypu

Přestože má nízkouhlíková ocel AISI 1020 použitá ve výpočtech svůj ekvivalent i v evropské normě EN ISO (jednalo by se o ocel C22E), z hlediska dostupnosti se nepodařilo nalézt žádného vhodného dodavatele této konkrétní oceli. K sestavení představeného modelu proto bylo potřeba nalézt náhradní materiál, který bude mít v ideálním případě velmi podobné magnetické vlastnosti, resp. $B-H$ křivku. Na základě oslovení několika výrobců a porovnání dostupných nabídek byla poptána výroba pólových nástavců u dodavatele JKZ Bučovice, a.s. Vystavená cenová nabídka je obsažena v příloze této práce, přičemž byla navržena ocel C45E, která má velmi podobné magnetické vlastnosti jako ocel AISI 1020 (viz $B-H$ křivku na obr. 4.6). Z dodaných polotovarů byly plamenem vyřezány požadované pólové nástavce. Celá sestava obsahující dva symetrické výpalky a čtyři neodymové magnety je společně s odpovídajícím 3D modelem uvedena na obr. 4.13.



Obrázek 4.13: Vizualizace a sestavení magnetického obvodu.

K následnému stanovení magnetické indukce v oblasti umístění kavitační dýzy byla využita Hallova sonda STB1X-0201 v kombinaci s teslametrem F.W. Bell 5180. Jelikož však tato sonda snímá pouze magnetické siločáry kolmé na její plochu, byla vždy uvažována maximální hodnota B . Shrnutí specifikací použitého modelu teslametru z dokumentu [33] je uvedeno v tabulce 4.1, zatímco obr. 4.14 přibližuje způsob měření sestavy.

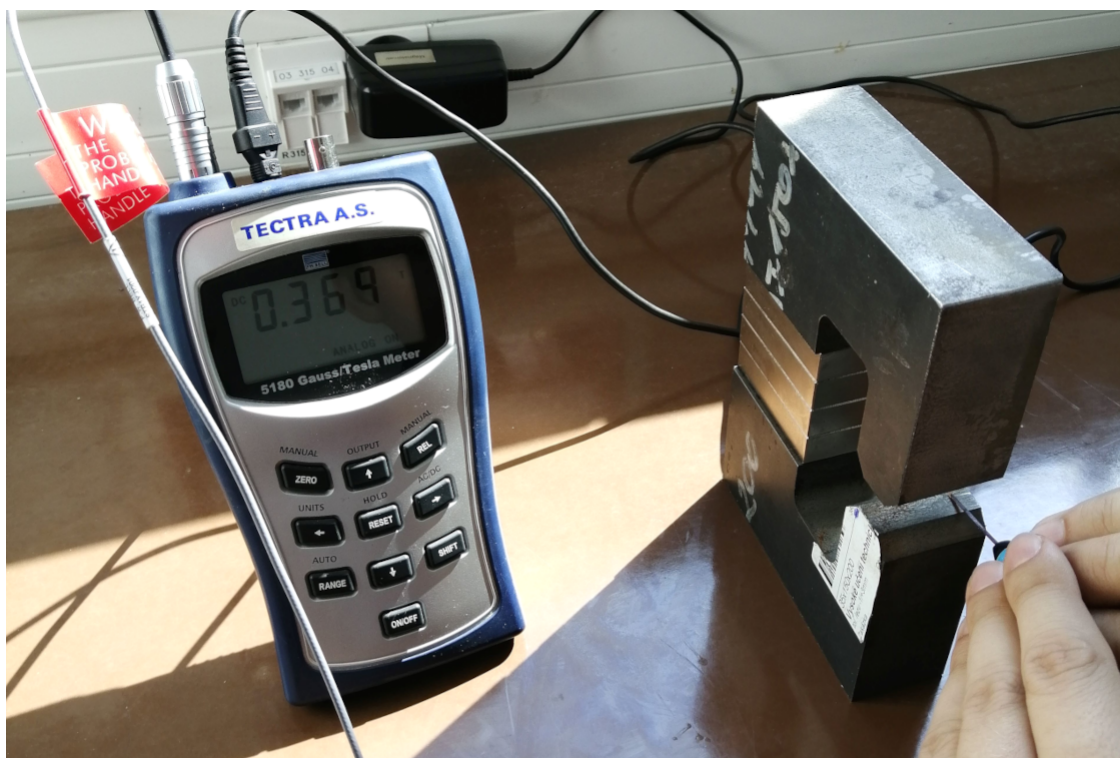
Naměřené hodnoty magnetické indukce se v laboratorních podmínkách pohybovaly kolem hodnoty $B \approx 0,37$ T, což je téměř třetinová hodnota oproti hodnotám stanoveným v programu FEMM. Z tohoto důvodu nelze požadavek na 1 Tesla u této sestavy považovat za splněný. Provedená měření tak do značné míry poukazují na nedostatky výpočtového modelování ve 2D, protože při řešení takto komplexního problému patrně nelze zanedbávat

4.3. DRUHÁ ITERACE SESTAVY

ztrátové magnetické toky ve třetím rozměru (ve 2D je uvažována nekonečná tloušťka modelu).

Tabulka 4.1: *Specifikace použitého teslametru F.W. Bell dle [33].*

Parametr	Model 5180
Přesnost snímače	$\pm 1 \%$
Frekvenční rozsah	až 40 kHz (DC režim)
Vzorkovací frekvence	5 Hz (DC režim)
Měřitelné jednotky	Gauss, Tesla nebo A/m
Rozměry snímače	175×100×36 mm
Zvláštní příslušenství	příčná sonda STB1X-0201



Obrázek 4.14: *Ukázka laboratorního měření magnetické indukce.*

4.3. Druhá iterace sestavy

Záměrem této sekce je především identifikace příčin nesouladu výpočtového modelování a měření, která bude spolu s dalšími optimalizačními kroky využita při návrhu nové iterace magnetického obvodu. Vzhledem k neuspokojivým výsledkům 2D simulací proběhl v rámci této iterace přechod na výpočtové modelování 3D úloh v magnetismu, a to pomocí softwaru Ansys Maxwell s bližším zaměřením na eliminaci ztrátových magnetických toků.

4.3.1. Identifikace nedostatků původní sestavy

V prvé řadě je potřeba ověřit kvalitu dodaných neodymových magnetů, protože jejich skutečná jakost nemusí odpovídat specifikacím, které uvádí výrobce. Za tímto účelem byla oslovena společnost PZK Brno, a. s., která provedla kontrolní měření magnetických vlastností dvou náhodně vybraných magnetů z použité čtveřice. Protokol z tohoto měření je součástí přílohy k této práci. Z výsledků je patrná shoda magnetických vlastností obou testovaných magnetů, přičemž byla stanovena průměrná hodnota remanentní indukce $B_r = 1,38$ T a maximálního energetického součinu $(BH)_{\max} = 366$ kJ/m³. Obě tyto hodnoty jsou nižší, než deklaruje výrobce. Konkrétně u magnetů N50 je dána spodní hranice rozsahu hodnotami $B_r = 1,4$ T a $(BH)_{\max} = 374$ kJ/m³. S ohledem na nejistotu měření však není tento rozdíl prokazatelný a nelze tak uvažovat o reklamaci magnetů.

Dalším faktorem, který mohl negativně ovlivnit výstupní parametry magnetického obvodu, je změna magnetických vlastností pólových nástavců v důsledku tepelného a mechanického zpracování při jejich výrobě. Při řezání plamenem se teploty oceli pohybují kolem 1 000 °C. Pokud uvážíme Curieho teplotu pro čisté železo ($T_{(C)} = 770$ °C), lze předpokládat, že u oceli C45E mohlo při výrobě výpalků dojít k určitým změnám magnetických vlastností. Při výběru nového materiálu je proto potřeba pečlivě posoudit nejen magnetické vlastnosti, ale také výrobní proces, který bude mít minimální vliv na feromagnetickou podstatu tohoto materiálu. [11]

Pravděpodobně nejzásadnější nečistotami původní sestavy je nedostatečné pokrytí ztrátových magnetických toků, které jsou nejvíce patrné v oblasti výskytu dýzy na obr. 4.12. Použití 45stupňového zkosení při zakončení pólových nástavců sice vykazovalo jedny z nejlepších výsledků s uvážením vyrobitelnosti, avšak vzniklé postranní toky magnetického pole (vizualizované indukčními siločarami) vůbec neprocházejí kavitační dýzou. Při návrhu nového magnetického obvodu tedy bude snahou tyto ztrátové toky buď eliminovat, nebo alespoň usměrnit zpět do pólových nástavců, resp. do kavitační dýzy.

4.3.2. Navržené změny

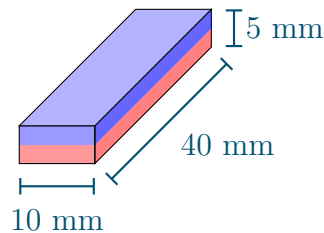
Na základě zmíněných nedostatků lze navrhnout několik úprav původní sestavy, které budou posléze aplikovány při simulacích a sestavování druhé iterace magnetického obvodu. Jmenovitě tyto změny zahrnují další minimalizaci rozměrů pólových nástavců, použití nového materiálu na jejich výrobu a umístění přídatných neodymových magnetů na zkosené plochy za účelem redukce ztrát magnetické indukce.

Z důvodů popsaných výše byl pro druhou iteraci magnetického obvodu navržen odlišný materiál, a sice orientovaně válcovaný transformátorový plech. Tento materiál je rovněž magneticky měkký a jedná se o ocel s příměsí křemíku, která má přesně definované (normalizované) magnetické vlastnosti. Z dostupných typů těchto plechů byl zvolen materiál s označením M530-50A, jehož materiálový list [34] včetně příslušné $B-H$ charakteristiky je uveden v příloze této práce. Číslo před pomlčkou vyjadřuje 100násobek tzv. ztrátového čísla $p_{10}(50)$ s jednotkou W/kg, zatímco dvouciferné číslo za pomlčkou udává tloušťku plechu v setinách mm. Číslo 530 v názvu materiálu tedy znamená, že ztrátová měrná energie při magnetické indukci $B = 1$ T a frekvenci $f = 50$ Hz činí u daného plechu $p_{10}(50) = 5,3$ W/kg. Z porovnání různých typů transformátorových plechů vyplývá, že vyšší ztrátové číslo jde ruku v ruce s příznivějším průběhem $B-H$ křivky vhodným pro danou aplikaci. Jelikož má vybraný plech jmenovitou tloušťku 0,5 mm, na sestavení obou

4.3. DRUHÁ ITERACE SESTAVY

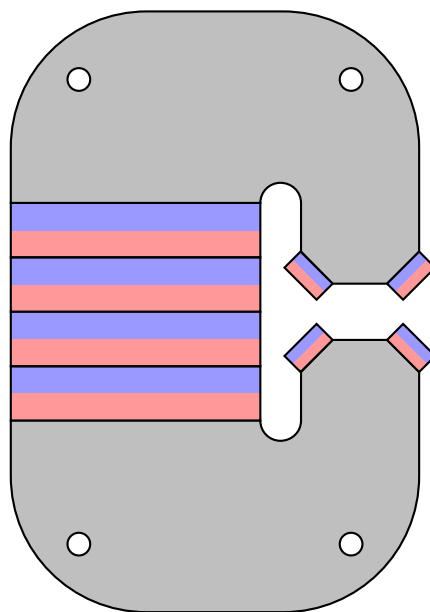
pólových nástavců o známé tloušťce 32 mm bude spotřebováno celkem 128 vrstev tohoto materiálu. [34]

Jednou z možností, jak zabránit vzniklým ztrátám magnetické indukce, je připevnění menších magnetů s opačně orientovanými směry magnetizace oproti velkým magnetům. Na příslušných místech, zejména na zkosených plochách v blízkosti kavitační dýzy, pak obrácená polarita těchto magnetů způsobí, že je ztrátový magnetický tok „vtlačen“ zpět do pólového nástavce, což může mít pozitivní vliv na výslednou magnetickou indukci uvnitř kavitační dýzy. Při výběru magnetů je potřeba věnovat pozornost jejich rozměrům, aby pokud možno nepřesahovaly přes dosedací plochy. Alternativně lze rozměry těchto ploch přizpůsobit velikosti zvolených magnetů.



Obrázek 4.15: Rozměry magnetu N48 s naznačeným směrem magnetizace.

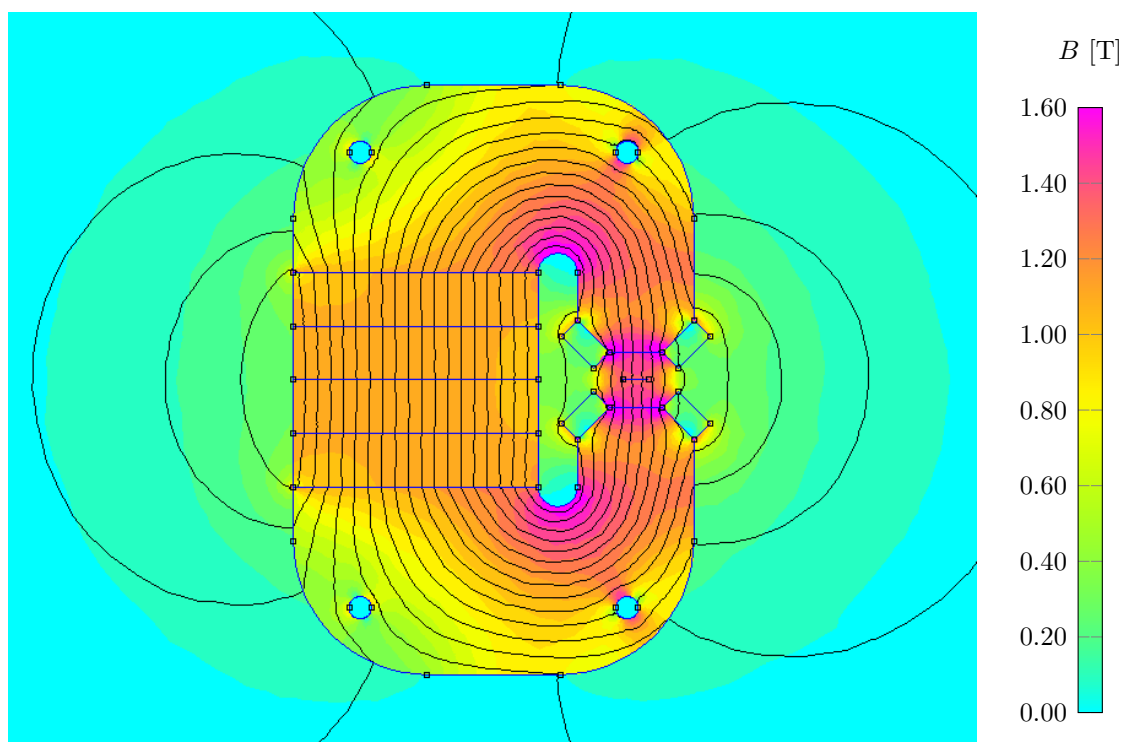
Jelikož se nepodařilo nalézt neodymové magnety, jejichž délka by odpovídala tloušťce zbytku sestavy (32 mm), byl jedinou dostupnou volbou opět produkt z e-shopu společnosti MAGSY, s.r.o. Tentokrát se jedná o magnet jakosti N48 s kódovým označením 20913, jehož materiálový list [35] je taktéž součástí přílohy k této práci. Jeho rozměry (40×10×5 mm) jsou spolu se směrem magnetizace shrnuty na obr. 4.15. Z těchto rozměrů vyplývá, že magnety budou přesahovat tloušťku sestavy o 4 mm na obou stranách, přičemž šířka dosedacích ploch bude muset být upravena na hodnotu 10 mm.



Obrázek 4.16: Nový model magnetického obvodu.

Přestože 2D simulace neposkytují spolehlivé číselné výsledky z hlediska výstupních parametrů, stále jsou využitelné pro porovnávání nových variant magnetického obvodu s předchozími pokusy. Tímto způsobem bylo otestováno několik variant s redukovánými

rozměry respektujícími velikost velkých i malých magnetů. Dle možností laboratoře bylo zvoleno smontování pólových nástavců z jednotlivých vrstev transformátorového plechu pomocí šroubových spojů M5. Model pólového nástavce proto obsahuje také dva 5mm otvory pro vložení šroubů, jejichž přítomnost však v simulacích nebude uvažována. V rámci obdobného návrhového procesu jako u první iterace byl vytvořen nový model sestavy, jehož náčrt je uveden na obr. 4.16. Na každou zkosenou plochu připadl jeden neodymový magnet, celkem jsou tedy uvažovány čtyři kusy. Naznačená orientace magnetizace jednotlivých magnetů musí být striktně dodržena, aby měly pomocné magnety požadovaný efekt.



Obrázek 4.17: Vizualizace magnetické indukce pro vybranou sestavu.

K této geometrii je na obr. 4.17 přiložena také odpovídající simulace v programu FEMM. Jako bylo řečeno dříve, slouží zde spíše jako měřítko pro porovnání s prvním prototypem než jako zdroj relevantních dat. Dle tohoto výpočtu se hodnota magnetické indukce napříč kavitační dýzou pohybuje v rozmezí 1,32 až 1,36 T, přičemž vizualizace ukazuje také žádoucí efekt vybočení ztrátového magnetického toku do oblasti výskytu kavitační dýzy. Jelikož další minimalizace rozměrů pólových nástavců respektující omezující parametry již nevedla ke zvýšení magnetické indukce uvnitř kavitační dýzy, bude tato geometrie považována za finální. Podrobná výkresová dokumentace k vyřezání z transformátorového plechu je uvedena v příloze této práce.

4.3.3. Výpočtové modelování prostorových úloh v magnetismu

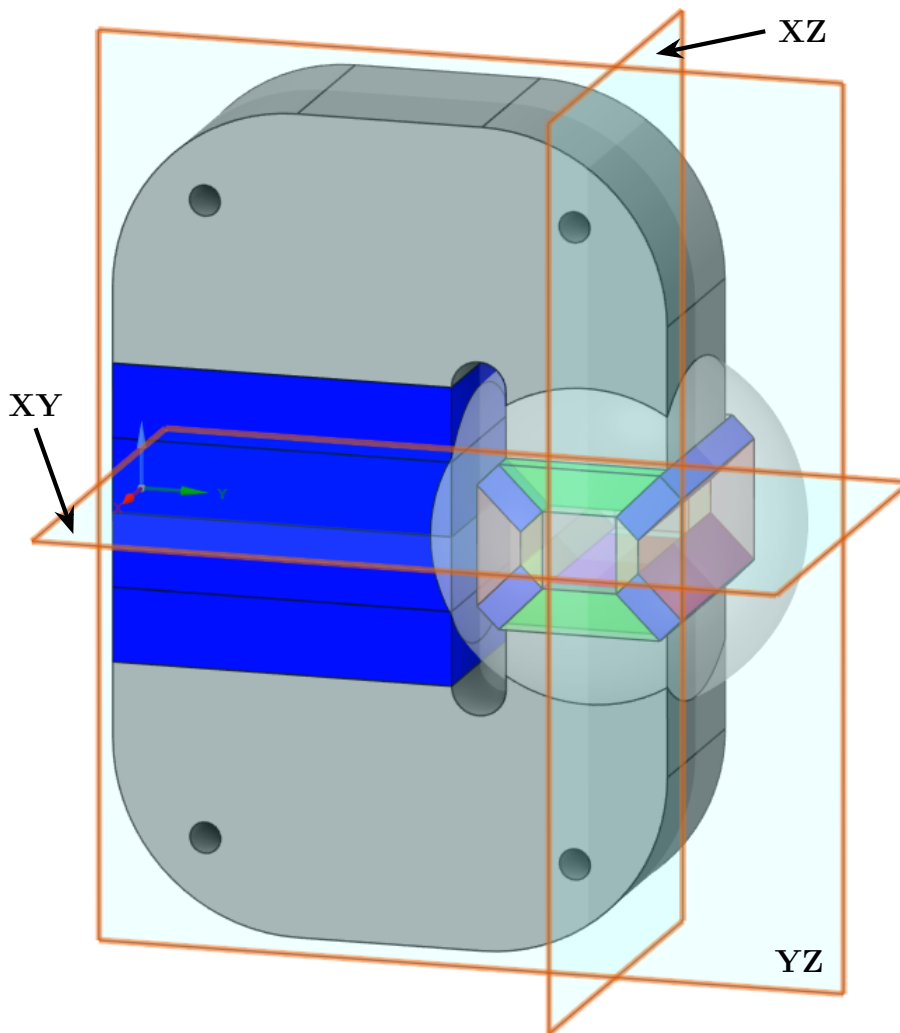
Za účelem přiblížení výsledků ze simulací realitě je potřeba přejít na komplexnější modelování magnetostatických úloh ve 3D, které dokáže postihnout také doposud neznámé ztrátové magnetické toky ve třetím rozměru. K tomuto účelu byl zvolen software Ansys Maxwell, což je numerický řešič využívající MKP k řešení rovinných a prostorových úloh v elektromagnetismu. V rámci této kapitoly bude tento program blíže představen spolu

4.3. DRUHÁ ITERACE SESTAVY

s ukázkou postupu nastavení řešeného problému od tvorby geometrie až po vyhodnocení výsledků.

PŘÍPRAVA GEOMETRIE

Jelikož tento software spadá do rodiny Ansys, lze k tvorbě 3D modelu využít jeden z jeho dostupných modelářů (např. SpaceClaim) a vytvořenou geometrii následně propojit s modulem Maxwell 3D. Na rozdíl od 2D úloh zde není potřeba vytvářet kontrolní objem kolem modelu sestavy, lze jej totiž přidat až v rámci Maxwellu. Je však potřeba zvážit dekompozici výpočtové domény, aby bylo možné zjemnit výpočtovou síť pouze v oblastech zájmu, tedy především v místě výskytu kavitační dýzy. Tímto krokem je možné významně snížit počet konečných prvků a tím i výpočtovou náročnost.



Obrázek 4.18: Ukázka 3D modelu sestavy s dekompozicí v blízkosti kavitační dýzy.

Vytvořený 3D model je znázorněn na obr. 4.18. Pro přehlednost je všech 8 magnetů zbarveno modře. Zmíněná dekompozice je provedena pomocí jednoduchých hranolů v oblasti nejbližší ke kavitační dýze, kterou navíc obepíná větší sférická oblast o průměru 60 mm. V rámci dalšího snížení výpočtové náročnosti lze zavést až dvě roviny symetrie, v tomto případě se nabízí naznačené roviny YZ a XY procházející počátkem souřadného systému.

Dále je potřeba vhodně zvolit pomocné roviny k vykreslení kontur magnetické indukce. K tomuto účelu lze rovněž využít již zmíněnou rovinu YZ. Aby však bylo možné analyzovat ztrátové magnetické toky i ve třetím rozměru, zavádí se další rovina XZ, která je od počátku souřadného systému posunuta o 76,93 mm ve směru +Y, aby procházela osou kavitační dýzy.

OKRAJOVÉ PODMÍNKY

Po vložení geometrie do prostředí Ansys Maxwell je potřeba definovat kontrolní objem kolem vytvořeného modelu, na jehož hranice budou posléze aplikovány okrajové podmínky. Rozměry tohoto regionu se obvykle zadávají parametricky jako procentuální rozšíření původní geometrie v jednotlivých směrech souřadných os. Pro řešenou úlohu je postačující rozšíření o 50 % do všech směrů. Výjimkou je souřadnice -X, kde je potřeba předeepsat nulovou hodnotu (uvažujeme rovinu symetrie). Tato nastavení jsou shrnuta na obr. 4.19.

Command		Attribute		
	Name	Value	Unit	Evaluated Value
	Command	CreateRegion		
	Coordinate System	Global		
	+X Padding Type	Percentage Offset		
	+X Padding Data	50		50
	-X Padding Type	Percentage Offset		
	-X Padding Data	0		0
	+Y Padding Type	Percentage Offset		
	+Y Padding Data	50		50
	-Y Padding Type	Percentage Offset		
	-Y Padding Data	50		50
	+Z Padding Type	Percentage Offset		
	+Z Padding Data	30		30
	-Z Padding Type	Percentage Offset		
	-Z Padding Data	30		30

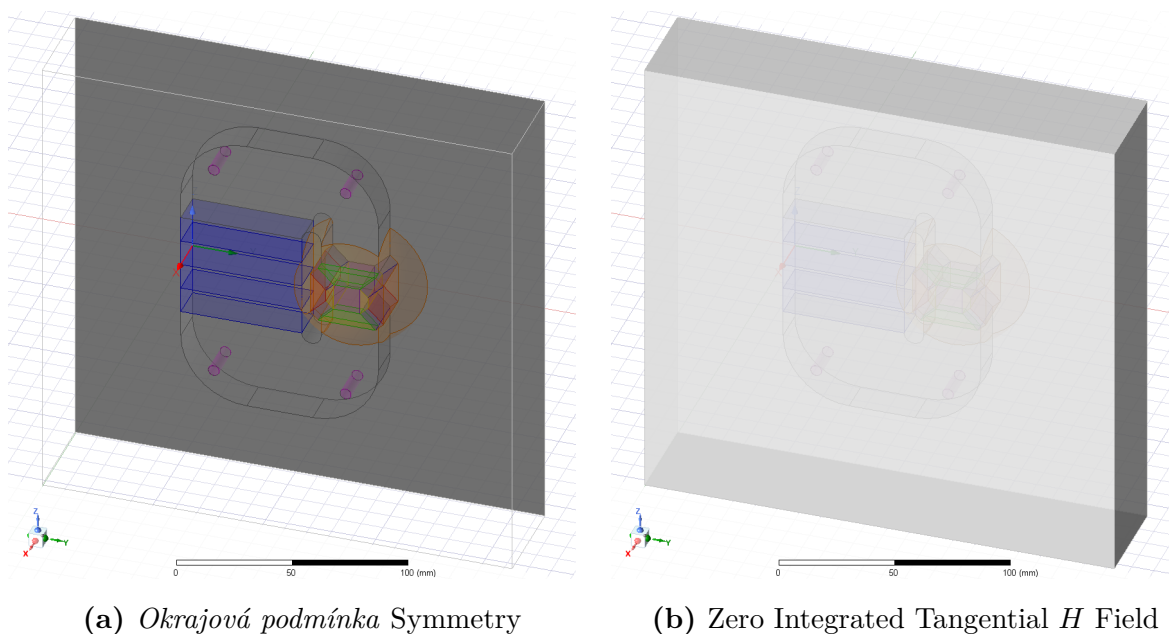
Obrázek 4.19: Specifikace velikosti okolního regionu.

Zvolené materiály, popsané v předešlé podkapitole, je potřeba předeepsat odpovídajícím entitám modelu. Okolní vzduch (popř. vakuum), transformátorový plech M530-50A i magnety N50 a N48 lze s plnou licencí vybrat z vestavěné databáze materiálů. Materiál M530-50A je přiřazen oběma pólovým nástavcům, zatímco vzduch musí být předeepsán nejen okolnímu regionu, ale také celé dekompoziční struktuře. U magnetických materiálů N50 i N48 je nezbytné vzhledem k orientaci souřadného systému specifikovat směr magnetizace, v tomto případě +Z. U menších magnetů však tento směr nerespektuje jejich natočení o 45 stupňů. V takovém případě se pro dané objekty definují relativní souřadné systémy dodržující tuto orientaci. U spodních magnetů by tedy kladná poloosa Z vytvořeného relativního souřadného systému měla směřovat ven ze sestavy, zatímco u horních magnetů bude natočena směrem dovnitř (k přilehlé dosedací ploše).

4.3. DRUHÁ ITERACE SESTAVY

Okrajová podmínka symetrie má v rámci Maxwellu dvě podoby, tzv. lichou (*Odd*) a sudou variantu (*Even*). Pokud je rovině předepsána podmínka *Odd*, směr magnetického toku Φ musí být k této rovině rovnoběžný. Této podmínce vyhovuje definovaná rovina YZ (viz obr. 4.18). Podmínka *Even* se naopak vztahuje na plochy, ke kterým je magnetický tok orientován normálově, což odpovídá rovině XY. Jelikož předepsání okrajové podmínky *Even* u popisované konfigurace vždy způsobí pád výpočtu, bude u řešené úlohy uvažována zbývající rovina symetrie, tedy YZ s okrajovou podmínkou *Odd*. [32]

Poslední okrajová podmínka se týká všech hraničních ploch kontrolní oblasti mimo již diskutovanou plochu reprezentující rovinu symetrie. Obdobou nulového vektorového potenciálu na hraniční křivce ve 2D je v případě Maxwellu podmínka s názvem *Zero Integrated Tangential H field*, která na hraniční ploše zabraňuje magnetickému toku uvnitř výpočtové domény tuto oblast opustit. Hraniční plochy, ke kterým jsou jednotlivé okrajové podmínky vztaženy, jsou znázorněny na obr. 4.20.



Obrázek 4.20: Znázornění okrajových podmínek.

NASTAVENÍ VÝPOČTOVÉ SÍTĚ

Jelikož má řešený model relativně jednoduchou geometrii, není nezbytné vytvářet komplexní strukturovanou síť konečných prvků pomocí specializovaného softwaru. Pro účely této práce proto k diskretizaci výpočtové domény postačí výchozí nástroj pro tvorbu sítě obsažený přímo v Ansys Maxwellu, který využívá tetrahedrální prvky a výpočtovou síť generuje automaticky. Přesto lze předepsat alespoň maximální délku konečného prvku pro daný objekt. Tyto rozměry jsou definovány následovně (viz obr. 4.21):

- $L_1 = 1$ mm pro malé magnety a dekompoziční strukturu (hranoly, sférická oblast),
- $L_2 = 2$ mm pro pólové nástavce,
- $L_3 = 4$ mm pro velké magnety,
- $L_4 = 10$ mm pro okolní region (kontrolní objem).

4. NÁVRH MAGNETICKÉHO OBVODU

Vzhledem k rozměrům modelu se počet tetrahedrálních prvků potřebných k vysíťování výpočtové domény obvykle pohybuje v rozsahu 1,5 až 2 miliony konečných prvků.

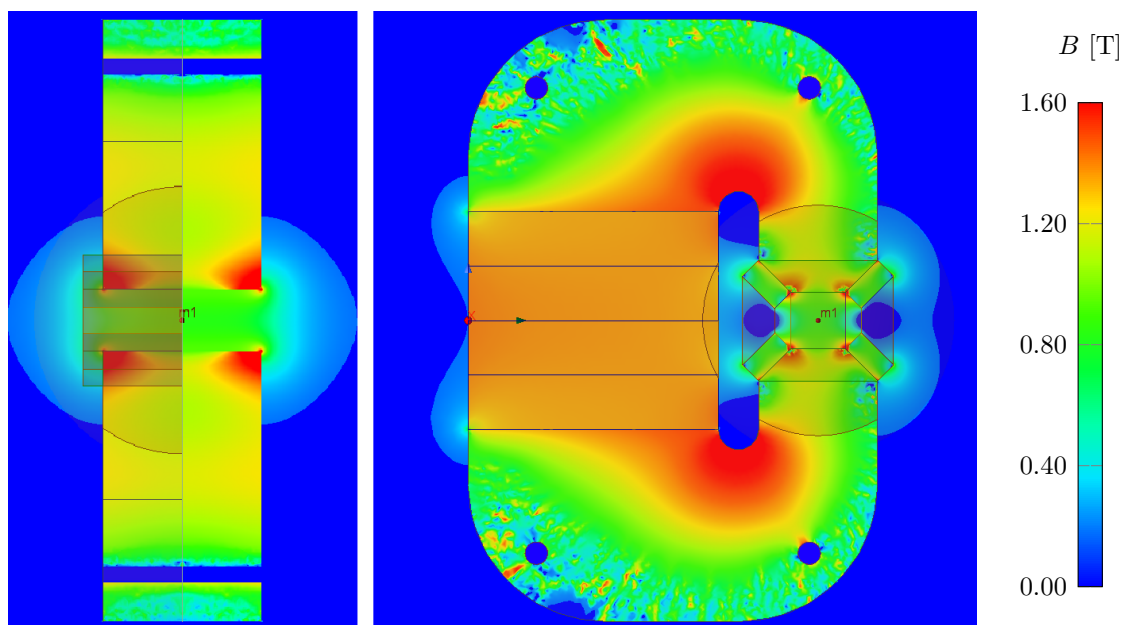
Model Boundaries Excitations Parameters Mesh Operations Analysis Setup			
Name	Type	Description	
L_decomp	Length Based	Type = Length Based, Region = Inside Selection, Restrict Length = true, Max Length = 1mm, Restrict Max Elems = false	
L_parts	Length Based	Type = Length Based, Region = Inside Selection, Restrict Length = true, Max Length = 2mm, Restrict Max Elems = false	
L_magnet	Length Based	Type = Length Based, Region = Inside Selection, Restrict Length = true, Max Length = 4mm, Restrict Max Elems = false	
L_region	Length Based	Type = Length Based, Region = Inside Selection, Restrict Length = true, Max Length = 10mm, Restrict Max Elems = false	

Obrázek 4.21: Specifikace velikosti konečných prvků.

VÝPOČET A VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ

Úloha je tímto připravena k řešení. Při nastavování výpočtu jsou veškerá nastavení přesnosti a konvergence ponechána na výchozích hodnotách. Pakliže dosud nebyly do modelu přidány pomocné plochy k vykreslení kontur magnetické indukce, je nezbytné tento úkon provést ještě před spuštěním výpočtu.

V rámci vyhodnocení výsledků umožňuje Maxwell kromě vizualizace B v definovaných rovinách také umístění diskretních bodů ke stanovení vypočtené hodnoty magnetické indukce v konkrétním místě, např. v oblasti výskytu kavitační dýzy. V řešené úloze definujeme průsečík tří pomocných rovin, tedy XY, XZ i YZ (dle obr. 4.18). Tento bod má jedinou nenulovou souřadnici, a to $Y = 76,93$ mm. Snímek výsledků obdržných z této konkrétní simulace jsou přiloženy na obr. 4.22. V definovaném bodě (uvnitř dýzy) byla vyčíslena hodnota magnetické indukce $B = 0,745$ T.

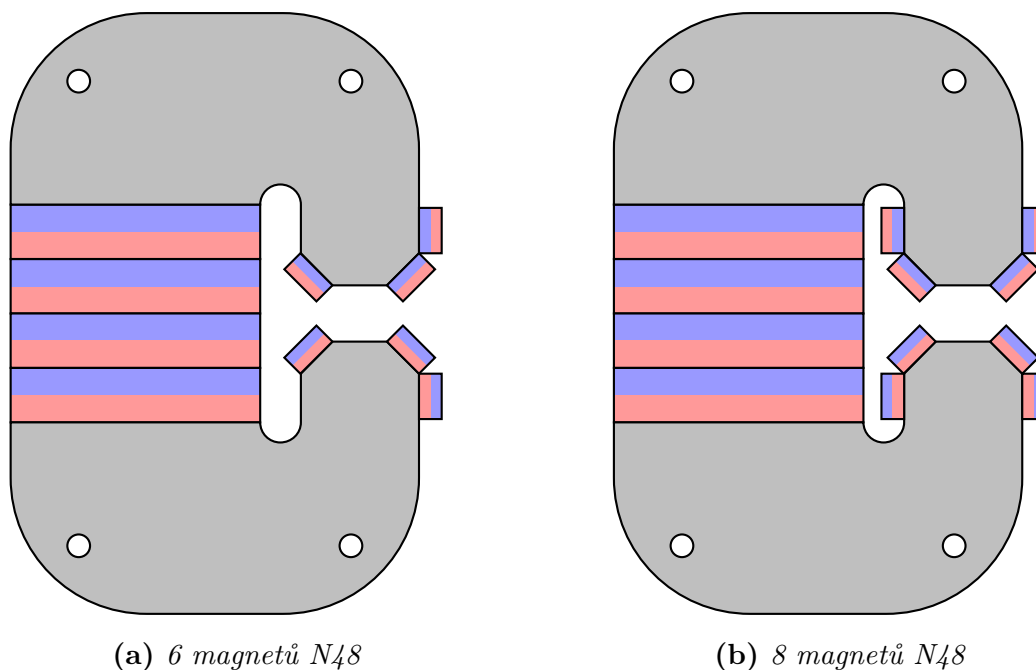


Obrázek 4.22: Kontury B v rovinách XZ a YZ u provedení se 4 malými magnety.

4.3. DRUHÁ ITERACE SESTAVY

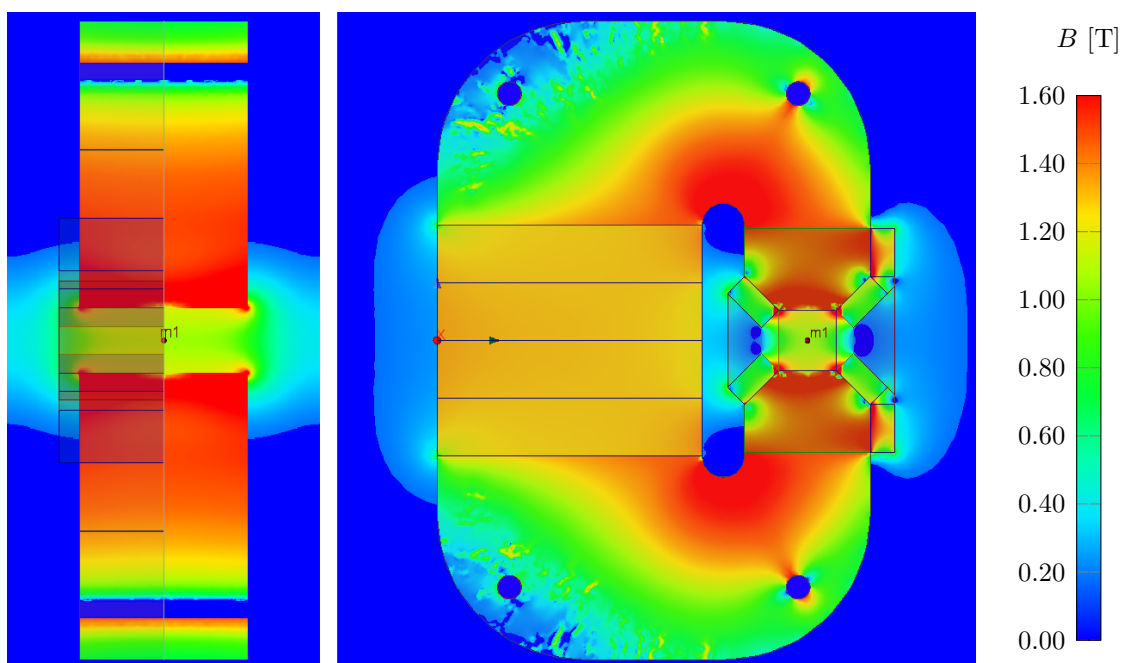
4.3.4. Porovnání výsledků simulací

Vzhledem k nízké pořizovací ceně malých magnetů (N48) se naskytla možnost otestovat několik provedení magnetického obvodu s vyšším počtem těchto magnetů, jejichž uspořádání je znázorněno na obr. 4.23.



Obrázek 4.23: Testované varianty s větším počtem permanentních magnetů.

Cílem je opět usměrnění ztrátových magnetických toků zpět do objemu sestavy. Tyto varianty lze mezi sebou srovnat a na základě výsledků z výpočtového modelování vybrat optimální konfiguraci k sestavení.



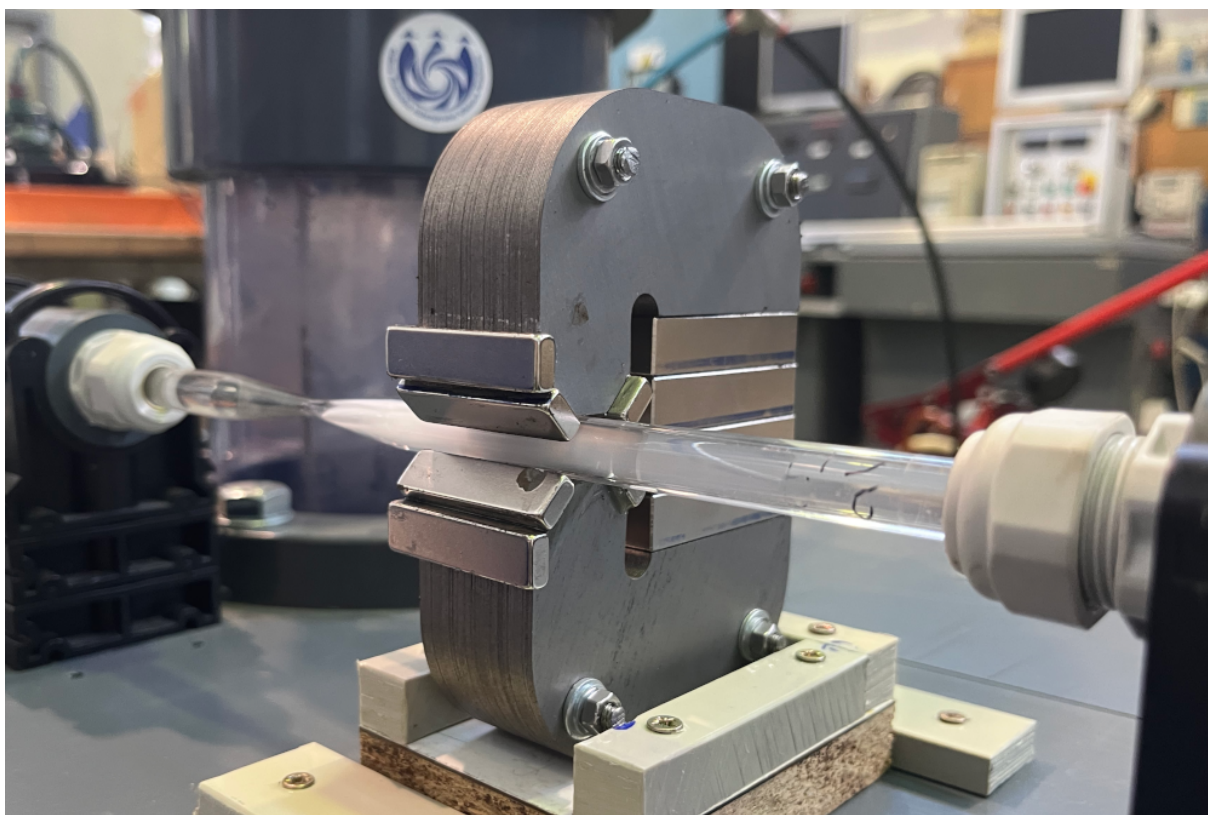
Obrázek 4.24: Kontury B v rovinách XZ a YZ u provedení s 6 malými magnety.

4. NÁVRH MAGNETICKÉHO OBVODU

První testované provedení s 6 magnety vyprodukovalo dle simulací magnetickou indukci $B = 0,942$ T uvnitř dýzy, zatímco varianta s 8 magnety dosáhla až $B = 0,955$ T. Jelikož je rozdíl těchto hodnot v podstatě zanedbatelný, nemá z hlediska montáže smysl připevňovat další dva magnety do úzkého prostoru mezi velkými magnety a pólovými nástavci. Z tohoto důvodu bylo k sestavení zvoleno provedení s 6 magnety, ke kterému je na obr. 4.24 uvedena také vizualizace magnetické indukce. Z bočního pohledu je mj. patrné, že se ztrátové magnetické toky skutečně vyskytují také ve třetím rozměru. Přestože se nabízí řešení tohoto nedostatku pomocí připevnění dalších magnetů na stěny pólových nástavců v místě výskytu těchto ztrát, provedené simulace nenaznačily významné navýšení magnetické indukce. Příčinou jsou zejména nevhodné rozměry zakoupených magnetů, kvůli kterým kromě obtížné montáže nelze oblasti se ztrátovými magnetickými toky úplně zakrýt. Z těchto důvodů k této úpravě nebylo přistoupeno.

4.3.5. Sestavení a měření druhého prototypu

Transformátorové plechy byly nařezány do požadovaného tvaru a dodány po 144 kusech výrobcem EMP, s. r. o. Po sešroubování jednotlivých vrstev do finální podoby byly přidány velké magnety a po zkontrolování správné polaroty také menší magnety. K jejich připevnění bylo kvůli silným magnetickým interakcím použito adhezivní lepidlo. Jelikož je povrch transformátorových plechů pokryt izolační vrstvou, potýká se tato iterace s ojedinělými případy náhlého uvolnění malých magnetů, kdy se izolace vlivem odpuzování magnetů oddělí od plechu. Většinou k tomuto úkazu dochází důsledku manipulace se sestavou. Na obr. 4.25 je znázorněna kompletní sestava i s umístěním kavitační dýzy.



Obrázek 4.25: Sestavení druhého prototypu magnetického obvodu.

4.3. DRUHÁ ITERACE SESTAVY

Princip měření magnetické indukce se od předchozí iterace nezměnil, přičemž výsledné hodnoty spadaly do rozsahu 0,5 až 0,7 T v závislosti na poloze Hallovy sondy. V tomto okamžiku byly pravděpodobně dosaženy hraniční možnosti použitých neodymových magnetů a pólových nástavců v dané sestavě. K dalšímu navýšení magnetické indukce by zřejmě bylo nezbytné poohlédnutí po nových materiálech a efektivnějších metodách eliminace magnetických ztrát, čímž by neúměrně vzrostly náklady. Sestavený magnetický obvod proto bude dále využit v experimentální části i přesto, že není splněno stanovené kritérium $B = 1$ T. Upuštění od tohoto požadavku lze odůvodnit příliš vysokými nároky kladenými na navrhované řešení magnetického obvodu s permanentními magnety.

Závěrem této kapitoly se ještě krátce vraťme k vyslovené hypotéze o nevhodnosti modelování řešeného problému ve 2D. K jejímu ověření lze využít specializovaný modul Maxwell 2D k porovnání s výsledky obdrženy v programu FEMM, změřenými hodnotami a také se simulací zpracovanou v Maxwellu 3D. Výsledky pro obě iterace magnetického obvodu jsou shrnuty v následující tabulce 4.2.

Tabulka 4.2: *Srovnání výsledků simulací a měření obou iterací sestavy.*

Zdroj dat	1. iterace	2. iterace
FEMM	$B = 1,088$ T	$B = 1,358$ T
Maxwell 2D	$B = 1,189$ T	$B = 1,431$ T
Maxwell 3D	$B = 0,493$ T	$B = 0,947$ T
Měření	$B = 0,369$ T	$B = 0,680$ T

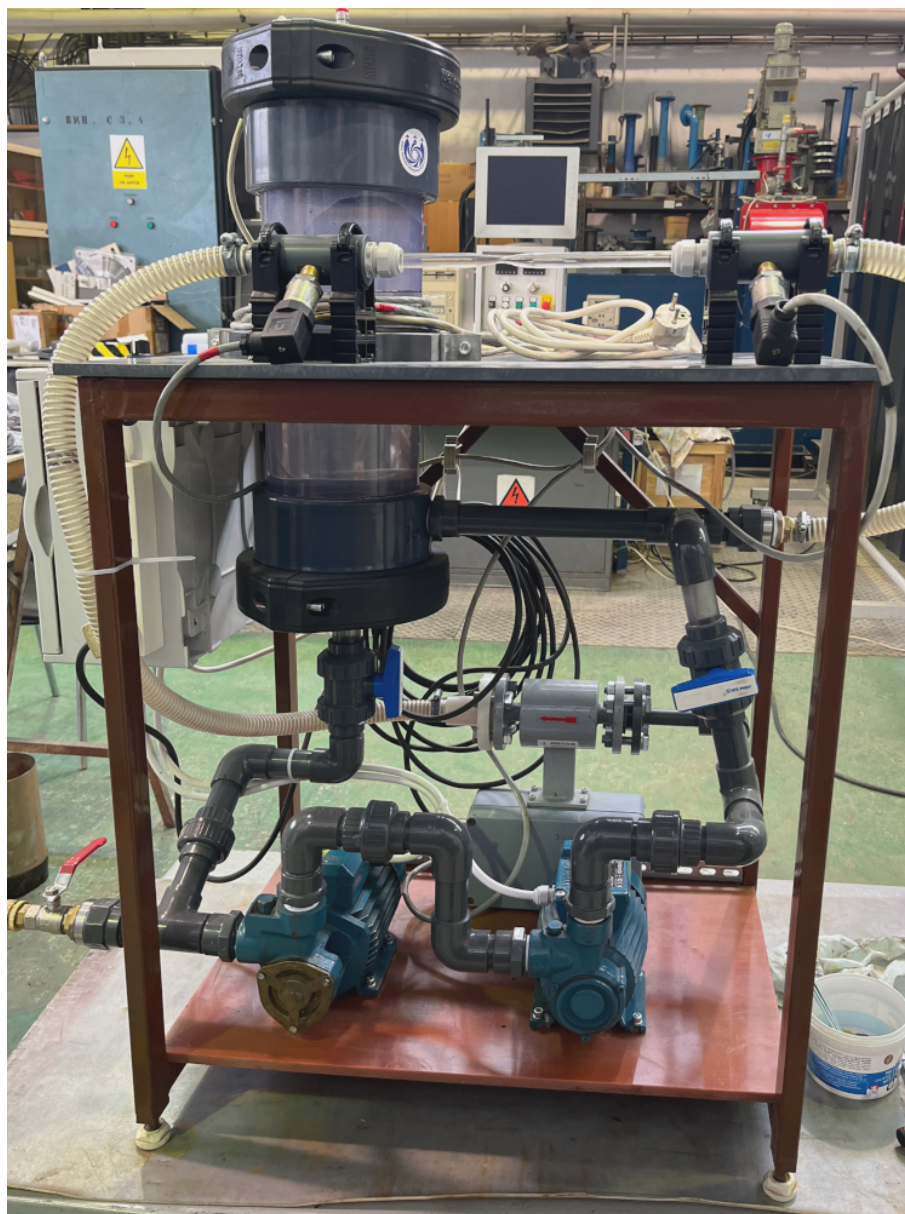
Ukazuje se, že nové výsledky obdržené simulacemi v Maxwellu 2D jsou oproti naměřeným výstupním parametrům výrazně nadhodnoceny, a to ještě dramatičtěji než u softwaru FEMM. Zatímco 3D simulace se od měření liší přibližně o 30 až 40 %, 2D simulace jsou nadhodnoceny dokonce o 100 až 200 %. I v případě chyby v provedených výpočtech (způsobené např. nevhodnou diskretizací domény) lze prohlásit, že zjednodušení řešené úlohy do 2D není při takto komplexních problémech vhodné. Výsledky z 3D simulací by rovněž měly být brány s rezervou, je však možné hovořit alespoň o jisté míře spolehlivosti.

5. Příprava a metodika experimentu

S ukončením návrhového procesu lze zahájit experimentální část této práce, která zahrnuje studium vlivu kavitace a magnetického pole na chemické složení vody a měření elektrického napětí indukovaného na elektrodách umístěných na kavitační dýze. Tato kapitola popisuje jak přípravu a konfiguraci měřicího okruhu, tak metodiku prováděných pokusů.

5.1. Měřicí trať

S ohledem na rozměry kavitační dýzy a magnetického obvodu byl vybrán měřicí okruh dostupný v hydraulické laboratoři, jehož snímek je uveden na obr. 5.1. Cílem této sekce je přiblížit uspořádání okruhu a shrnout jeho parametry včetně použitých čerpadel a snímačů.

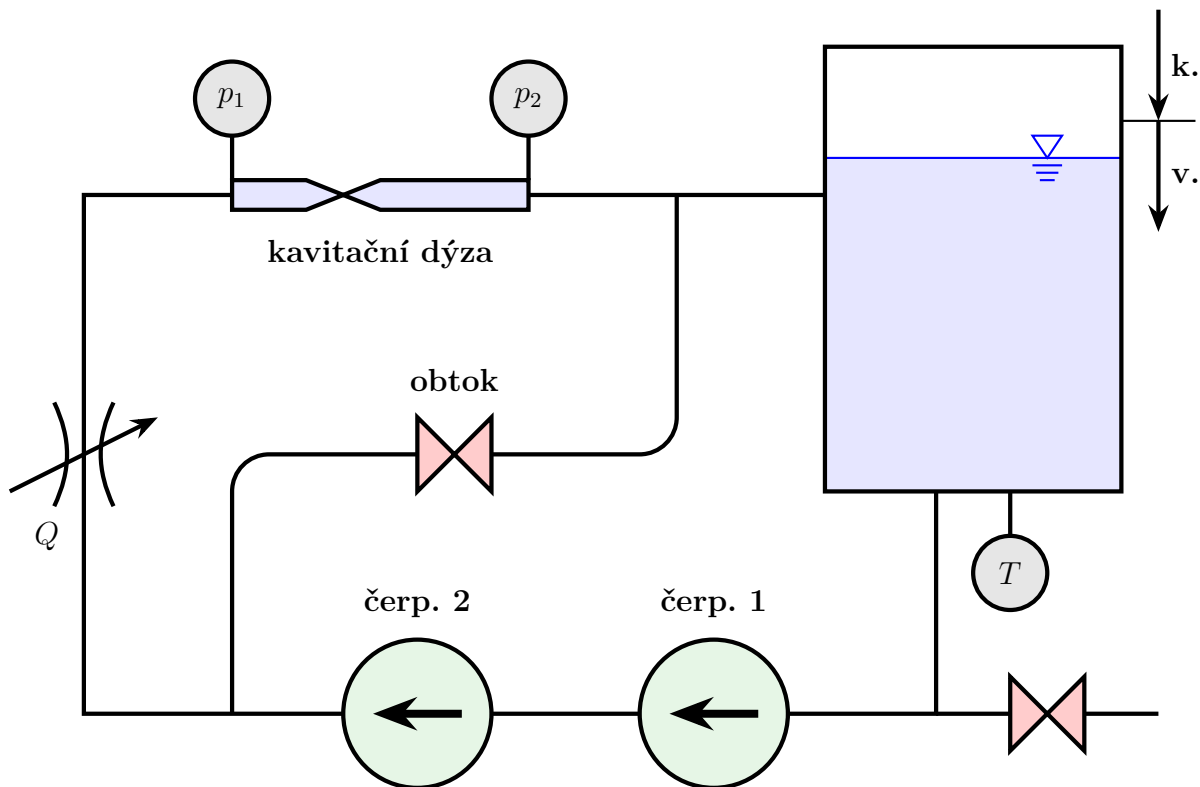


Obrázek 5.1: Fotografie použité měřicí trati z laboratoře OFIVK.

5.1. MĚŘICÍ TRATĚ

5.1.1. Parametry experimentální trati

Jedná se o měřicí okruh uzpůsobený k umístění magnetického obvodu a studiu hydrodynamické kavitace. Obsahuje nádrž o kapacitě přibližně 10 l, dvě horizontální čerpadla v sériovém zapojení, obtokovou větev s kulovým ventilem a výstupní kulový ventil k odběru vzorků. Pro přehlednost lze tuto trať z obr. 5.1 znázornit také schematicky, viz obr. 5.2.



Obrázek 5.2: Zjednodušené schéma použitého měřicího okruhu.

Na tomto schématu je mj. znázorněna možnost připojení nádrže ke kompresoru (zkratka **k.**), resp. vývěvě (zkratka **v.**), a to za účelem vyvolání přetlaku, popř. podtlaku v okruhu podle potřeby. K měření potřebných veličin je okruh vybaven dvěma tlakovými snímači umístěnými před (p_1) a za kavitační dýzou (p_2), indukčním průtokoměrem a odporovým teploměrem uvnitř nádrže. Veškerá měřicí technika je podrobněji popsána níže.

- Snímače tlaku DMP 331 od výrobce BD SENSORS s. r. o., měřicí rozsah 0 až 400 kPa abs., přesnost $\pm 0,25$ %, proudový výstup 0 až 20 mA.
- Indukční průtokoměr KOMPAKT, snímač TCM 142/93 – 1733, DN15/PN16, měřicí rozsah 0,612 až 6,12 m³/h, přesnost $\pm 0,5$ % z měřené hodnoty pro $v \geq 1$ m/s, proudový výstup 0 až 20 mA.
- Vysokoteplotní měřicí sonda Pt100 třídy A (dle normy DIN/EN/IEC 60751), teplotní rozsah -70 až $+300$ °C, tolerance $\pm(0,15 \text{ K} + 0,002 \cdot T)$.

K popsanému termorezistoru je v příloze této práce uvedena také tabulka k přepočtu naměřeného odporu v Ω na teplotu ve °C.

Výrobce obou použitých čerpadel je firma Calpeda. Jedná se o velmi podobné modely o nominálním výkonu 0,33 kW, jmenovitě NTM 61E (čerpadlo **1**) a CTM 61 (čerpadlo **2**). Podle kontrolního měření dodává první zmíněné čerpadlo nižší průtok než druhé, tento rozdíl však není velký (nezávisle na tlaku v okruhu se vždy liší přibližně o 0,03 l/s). Zvolená měřicí trať umožňuje jak provoz každého čerpadla zvlášť, tak kombinovaný rozběh obou čerpadel v sérii. Kvůli absenci frekvenčního měniče však nelze regulovat otáčky.

5.1.2. Kontrola kavitační zóny

Aby byl vznik potenciální interakce nevratných dějů z hlediska experimentálních podmínek maximálně podpořen, je nezbytné, aby byl magnetický obvod obklopující kavitační dýzu umístěn ve vhodné poloze vzhledem ke kavitační zóně. Tím se rozumí oblast, kde v dýze dochází ke kolapsu bublin, tedy k nejbouřlivější fázi kavitace vyvolávající silnou anizotropii prostředí. Z důvodu větší flexibility proto bude kromě posuvného mechanismu (zřetelného např. na obr. 4.25), který umožňuje pohyb magnetického obvodu podél osy dýzy, možné kontrolovat také režim kavitace, a to pomocí změny tlaku v nádrži. V tomto ohledu se nabízí dvě různé možnosti. Jelikož při současném provozu obou čerpadel dosahuje kavitační zóna až do potrubí za kavitační dýzou, lze vhodným natlakováním měřicího okruhu pomocí kompresoru tuto oblast zmenšit do požadované polohy. Druhou variantou je provoz jediného čerpadla, kdy je naopak potřeba vznik kavitace podpořit vyvoláním podtlaku v systému s využitím vývěvy.

5.1.3. Charakteristika kavitační dýzy

Použitá konvergentně-divergentní dýza, resp. její zúžení, bylo dosaženo tažením původní homogenní plexisklové trubice za tepla. Přestože jsou známy její vnější i vnitřní rozměry včetně zúžení, nebyla sestavena žádná charakteristika dýzy, která by popisovala ztráty vznikající průtokem touto dýzou. Z tohoto důvodu bude cílem experimentální části mj. sestavení orientační charakteristiky použité kavitační dýzy, k čemuž bude využita závislost průtokového součinitele K_v na kavitačním čísle σ .

Průtokový součinitel K_v v m³/h vyjadřuje ztráty ve zkoumaném prvku jakožto průtok vody tímto prvkem při tlakové ztrátě 1 bar. Definujme vztah

$$K_v = Q \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\rho_w} \cdot \frac{\Delta p_{1\text{bar}}}{\Delta p}}, \quad (5.1)$$

kde za Q dosazujeme průtok v m³/h, aby odpovídal jednotkám průtokového součinitele K_v . Podíl skutečné hustoty ρ vůči referenční hodnotě pro vodu ($\rho_w = 998,2 \text{ kg/m}^3$) bude uvažován jako zanedbatelný, ve výpočtech tedy bude roven 1. Hodnota $\Delta p_{1\text{bar}}$ odpovídá právě tlakové ztrátě 1 bar, tedy $\Delta p_{1\text{bar}} = 100\,000 \text{ Pa}$. Celkový tlakový spád Δp bude vyhodnocen následujícím způsobem

$$\Delta p = p_1 - p_2 - \Delta p_s, \quad (5.2)$$

kde tlak Δp_s reprezentuje korekci na tlakovou diferenci naměřenou mezi snímači p_1 a p_2 ve statickém stavu měřicího okruhu, tedy při nulovém průtoku.

5.2. CHEMICKÝ ROZBOR VODY

Kavitační číslo pak představuje měřítko výskytu kavitace a lze jej kvantifikovat např. na základě měřených tlaků p_1 a p_2 , definičních vztahů je však více. Bude uvažován vztah dle [36] ve tvaru

$$\sigma = \frac{p_1 - p_v}{p_1 - p_2}, \quad (5.3)$$

kde p_v představuje tlak syté páry dané kapaliny při určité teplotě. V tomto případě bude uvažována hodnota pro vodu při 20 °C, a sice $p_v = 2\,340$ Pa. Čím nižší je kavitační číslo σ , tím roste pravděpodobnost výskytu kavitace. [36]

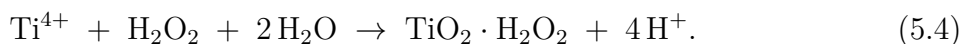
Vzhledem ke značně omezené regulaci měřicího okruhu lze uvažovat pouze o třech stupních volnosti, přičemž bude proměřeno celkem 27 různých konfigurací. Prvním stupněm volnosti je proměnlivý průtok dosažený různým provozem čerpadel. Bez možnosti regulace lze v tomto ohledu rozlišit pouze 3 polohy: provoz 1. čerpadla, provoz 2. čerpadla a nebo provoz obou čerpadel současně. Další proměnnou bude přetlak v měřicí trati ovlivňující kavitaci, kdy budou uvažovány opět tři hodnoty dle možností měřicí trati. Aby nedošlo k nadměrnému namáhání těsnění nebo přetížení použitých snímačů tlaku, bude maximální hodnota absolutního tlaku v okruhu omezena na 320 kPa. Další hodnotou bude poloviční tlak z tohoto maxima, tedy 160 kPa. Poslední varianta bude bez přetlaku, kdy bude nádrž otevřena do atmosférického tlaku. Třetím (a zároveň posledním možným) stupněm volnosti je míra otevření obtokové větve. Jelikož však nejsou kulové ventily použité v měřicím okruhu určeny k regulaci, lze uvažovat pouze plně otevřený stav, plně zavřený stav a hrubý odhad „polootvřený“ polohy. Z naměřených dat bude dle vztahů (5.1) a (5.3) stanovena požadovaná charakteristika.

5.2. Chemický rozbor vody

Pro posouzení vlivu externího magnetického pole na výskyt specifických chemických reakcí bylo vybráno stanovení přítomnosti peroxidu vodíku (H_2O_2) ze vzorku vody, která projde měřicím okruhem. Vlastní chemický rozbor proběhne ve spolupráci s Botanickým ústavem Akademie věd ČR, přičemž bude porovnávána varianta s přítomností magnetického obvodu a bez něj. Případné potvrzení vlivu magnetického pole by znamenalo rozdíl v koncentraci peroxidů v příslušných vzorcích.

5.2.1. Stanovení peroxidu vodíku

K detekci peroxidu vodíku byla zvolena kolorimetrická metoda s využitím titanového činidla. Konkrétně se jedná o síran titanylu, což je roztok síranu titaničitého ve zředěné kyselině sírové. Titanylové ionty (Ti^{4+}) obsažené v tomto roztoku selektivně reagují s peroxidem vodíku za vzniku žlutého zbarvení způsobeného tvorbou komplexu kyseliny peroxotitaničité ($\text{TiO}_2 \cdot \text{H}_2\text{O}_2$) dle chemické rovnice



Ke stanovení koncentrace peroxidu je potřeba do kyvety obsahující 1 ml činidla odebrat pipetou 2ml vzorek vody z měřicí trati. Následně je spektrofotometricky měřena absorbance komplexu při fixní vlnové délce $\lambda = 407$ nm. Absorbanci lze po odebrání vzorku měřit okamžitě, zbarvení je nicméně stabilní ještě 12 hodin po odběru. Jelikož je tato veličina

přímo úměrná koncentraci peroxidu vodíku v komplexu, lze tuto koncentraci (c [mol/l]) stanovit vztahem

$$c(\text{H}_2\text{O}_2) = \frac{A \cdot V_{\text{celk}}}{\varepsilon \cdot V_{\text{vzor}} \cdot \ell}, \quad (5.5)$$

kde A odpovídá naměřené absorbanci komplexu, V_{celk} a V_{vzor} představují celkový objem (včetně činidla) a objem vzorku vody v ml a ℓ udává délku kyvety. Tzv. absorpční koeficient ε je stanoven z kalibrační křivky sestavené pro použitý spektrofotometr. [37]

5.2.2. Metodika odběru vzorků

K tomuto měření bude využita kohoutková voda, která musí být alespoň 24 hodin před vlastním experimentem odebrána do otevřené nádoby, aby mohla odstát. Cílem je snížit koncentraci obsaženého chloru, který z vody v otevřené nádobě postupně vyprchává. V opačném případě by jeho přítomnost mohla negativně ovlivnit chemický rozbor. Jelikož bude tento experiment proveden minimálně dvakrát (s magnetickým obvodem a bez něj), je potřeba dopředu odebrat dostatečné množství kohoutkové vody. V momentě, kdy jsou spuštěna čerpadla, okamžitě dochází k chemickému ovlivnění vody v trati. Takto „kontaminovanou“ vodu již nelze použít v dalším měření a musí být vyměněna.

Na základě přibližného objemu vody v měřicí trati a průměrného průtoku je potřeba odhadnout dobu jednoho cyklu, čímž se rozumí přibližný časový úsek, ve kterém by kapalina měla projít celým okruhem alespoň jednou. Celkový objem měřicího okruhu byl odhadnut na 10 l, přičemž měřicí okruh byl vždy naplňován pouze částečně do 8 litrů. Za účelem následného sestavení závislosti počtu cyklů na koncentraci peroxidů budou odběry vzorků probíhat vždy po určitém celočíselném počtu cyklů, přičemž byla zvolena posloupnost 1, 2, 4, 8 a 16 cyklů. Na základě dat z indukčního průtokoměru byl průměrný průtok při souběžném provozu obou čerpadel ustanoven na hodnotě $Q = 0,2$ l/s. Dle těchto údajů by jeden cyklus měl trvat přibližně 40 sekund. Aby byla dodržena navržená posloupnost cyklů, byl sestaven časový rozvrh k odebírání vzorků, který je uveden v tabulce 5.1. Vlastní stanovení přítomnosti peroxidu v odebraných vzorcích proběhne v laboratoři Botanického ústavu AV ČR.

Tabulka 5.1: Časový rozvrh odběru vzorků vody.

Vzorek	Cyklus	Čas od zahájení
1	1	0:40 (40 s)
2	2	1:20 (80 s)
3	4	2:40 (160 s)
4	8	5:20 (320 s)
5	16	10:40 (640 s)

5.3. Měření indukovaného napětí

Druhý navrhovaný experiment si klade za cíl studovat vliv hydrodynamické kavitace a vnějšího magnetického pole na vodivost kapaliny. Případná změna vodivosti v přítomnosti magnetického obvodu bude pozorována porovnáním elektrického napětí, které bude

5.3. MĚŘENÍ INDUKOVANÉHO NAPĚTÍ

indukováno na elektrodách připevněných k měřicí trati, přičemž bude využívána analogie s indukčním průtokoměrem, který pracuje na principu elektromagnetické indukce. Takto získanou energii by následně bylo možné využít např. k soběstačnému provozu menších snímačů s nízkým příkonem.

5.3.1. Princip indukčního průtokoměru

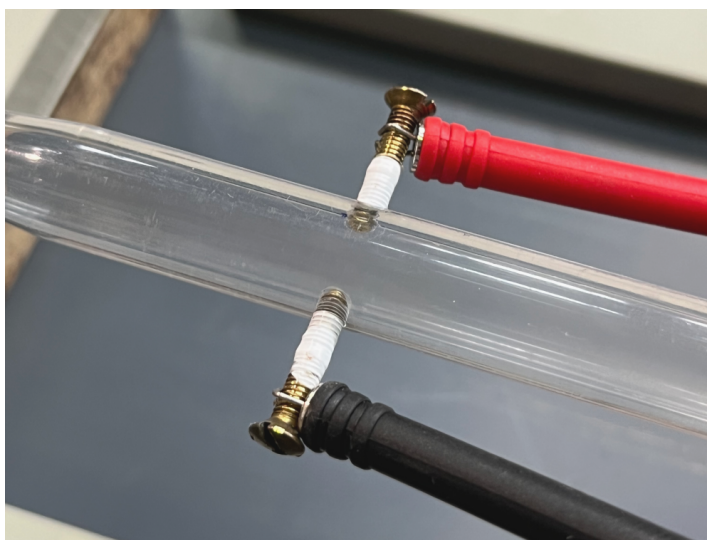
Indukční průtokoměry fungují na principu Faradayova zákona o elektromagnetické indukci (popsaného dříve v teoretické části, viz kap. 2.2.1). Vodivou kapalinu v potrubí si lze představit jako pohybující se vodič, který v homogenním magnetickém poli indukuje elektrické napětí. Toto napětí U lze vyčíslit vztahem

$$U = B \cdot L \cdot v_s = B \cdot D \cdot \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2}, \quad (5.6)$$

kde v_s udává střední rychlost proudění a L je vzdálenost elektrod. Specificky pro případ kapaliny v potrubí lze indukované napětí vyjádřit v závislosti na průměru potrubí D a objemovém průtoku Q . Obdobným způsobem bude vyhodnocováno také napětí indukované na elektrodách kavitující kapalinou v přítomnosti magnetického pole zprostředkovaného pólovými nástavci. Spolehlivost této metody se odvíjí od měrné vodivosti kapaliny, která musí dosahovat alespoň $\gamma = 2 \mu\text{S}/\text{cm}$. Tento požadavek by u používané kohoutkové vody měl být splněn. [38]

5.3.2. Instalace elektrod

Protože tento experiment vyžaduje provrtání kavitační dýzy k umístění měřicích elektrod, bylo nejprve upřednostněno měření charakteristiky kavitační dýzy a provedení prvního experimentu. Případná destrukce kavitační dýzy při jejím provrtávání by totiž znemožnila jakákoli další měření. Vzhledem k omezeným možnostem provedení elektrod byly zvoleny mosazné šrouby M3, na které bylo nanášeno těsnění. Do předem připravených protilehlých závitů v kavitační dýze byly tyto šrouby následně uchyceny a připojeny k měřicímu přístroji. Jejich poloha je patrná z obr. 5.3.



Obrázek 5.3: Umístění elektrod.

6. Vyhodnocení experimentů

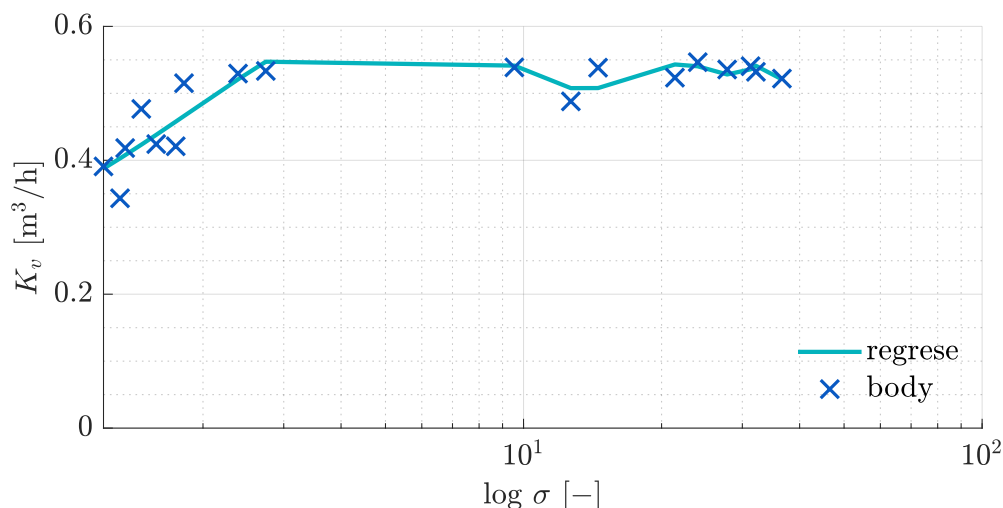
Tato kapitola představuje druhou část z experimentálního oddílu této práce. Navazuje na komentář k prováděným experimentům z předchozí kapitoly a doplňuje jej o zhodnocení průběhu měření a naměřených dat. Po shrnutí závěrů je kapitola zakončena vyhodnocením nejistot měření.

6.1. Sestavení charakteristiky dýzy

Na základě posloupnosti naměřených dat byla pomocí vztahů uvedených v sekci 5.1.3 sestrojena požadovaná charakteristika použité kavitační dýzy. Stacionární tlaková diference byla stanovena jako $\Delta p_s = 3\,173$ Pa a dosazena do příslušného vztahu (5.2). Konfigurace měřicí trati byla postupně upravována dříve popsány úkony v následujícím pořadí:

1. Nastavení přetlaku pomocí kompresoru.
2. Manuální úprava otevření obtoku.
3. Spuštění jednoho či obou čerpadel.
4. Uložení záznamu, iterativně návrat do bodu 3, 2 a nakonec 1.

Každý bod charakteristiky byl získán jako průměrná hodnota z 30sekundového záznamu měřeného při vzorkovací frekvenci 20 Hz vždy po ustálení měřicí trati. Výsledná závislost průtokového součinitele K_v na kavitačním čísle σ je uvedena na obr. 6.1. Při prvotních měřeních se ukázalo, že vlivem relativně malého objemu měřicí trati dochází k poměrně rychlému ohřevu vody při maření energie v potrubním systému a především v kavitační dýze. Odhadem vzroste teplota vody během 10 až 15 minut kontinuálního běhu obou čerpadel o necelých 10 °C.



Obrázek 6.1: Charakteristika kavitační dýzy.

Výsledná charakteristika je zřetelně poznamenána nedostatkem měřených bodů v střední oblasti mezi hodnotami kavitačního čísla $\sigma = 2$ až 9, což lze přiřknout nedostatku

6.2. VÝSLEDKY Z HLAVNÍCH EXPERIMENTŮ

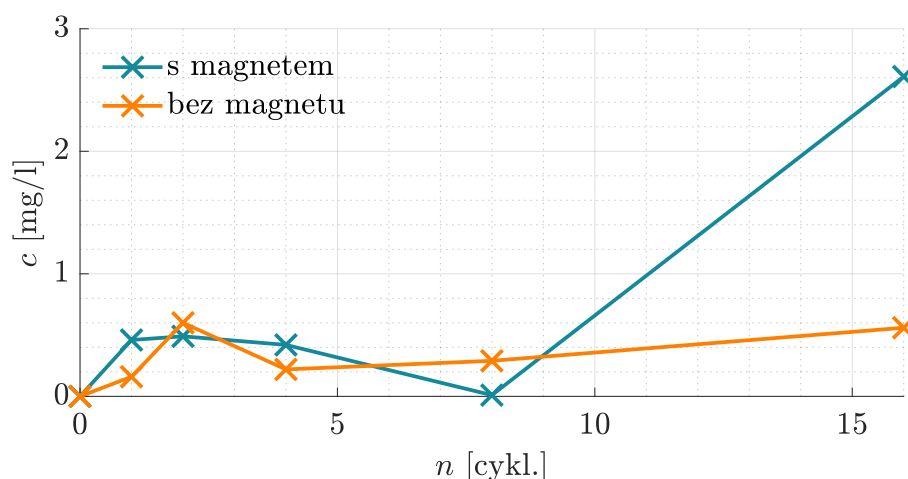
stupňů volnosti použité měřicí trati. Rovněž bylo potřeba z důvodu větší přehlednosti vynést kavitační číslo v logaritmických souřadnicích, protože by jinak nebyly jednotlivé body rozeznatelné. Lze si povšimnout dvou různých trendů, první je přibližně lineárně rostoucí až do hodnoty $\sigma = 2$, zatímco zbytek charakteristiky pokračuje až na menší výchyly konstantně. Ke znázornění těchto trendů bylo využito proložení naměřených bodů polynomem 6. stupně. Vzhledem k vlastnostem kavitačního čísla lze usuzovat, že na prvotní nižší hodnoty průtokového součinitele měla vliv přítomnost kavitace.

6.2. Výsledky z hlavních experimentů

Měření charakteristiky sloužilo spíše k informativnímu popisu použité kavitační dýzy. Nyní se však dostáváme ke stěžejnímu měření koncentrace peroxidu vodíku, které by mohlo ověřit hypotézu o interakci nevratných dějů popsanou v sekci věnované nerovnovážné termodynamice (viz kap. 3.3.3). Otázkou je, jestli bude dosažená hodnota magnetické indukce mezi pólovými nástavci dostatečná k vyvolání chemických změn v kapalině. Samostatná podkapitola je posléze věnována také vyhodnocení měření indukovaného napětí na elektrodách.

6.2.1. Stanovení peroxidu

Před zahájením samotného experimentu bylo otestováno natlakování měřicího okruhu s ohledem na délku kavitační zóny, na základě které byla přizpůsobena poloha magnetického obvodu. Při odběru vzorků byla kontrolována také teplota vody, její nárůst během experimentu by však na výsledky chemického rozboru neměl mít žádný vliv. Následné měření absorbance proběhlo na přístroji *Spark Multimode Microplate Reader* od výrobce Tecan. Byla stanovena také referenční hodnota koncentrace pro kohoutkovou vodu bez ovlivnění magnetickým polem a kavitací. Vyhodnocení je uvedeno nejprve graficky k vizuálnímu porovnání naměřených dat (obr. 6.2) a posléze i formou tabulky 6.1.



Obrázek 6.2: Závislost koncentrace peroxidu vodíku na počtu cyklů.

Přestože se na první pohled může zdát, že bylo určité množství peroxidu ve vodě detekováno, ve většině případů jde o neprokazatelnou odchylku spadající do tolerance této metody stanovení. Obdobně nelze potvrdit ani vyvrátit vliv magnetického pole na tvorbu

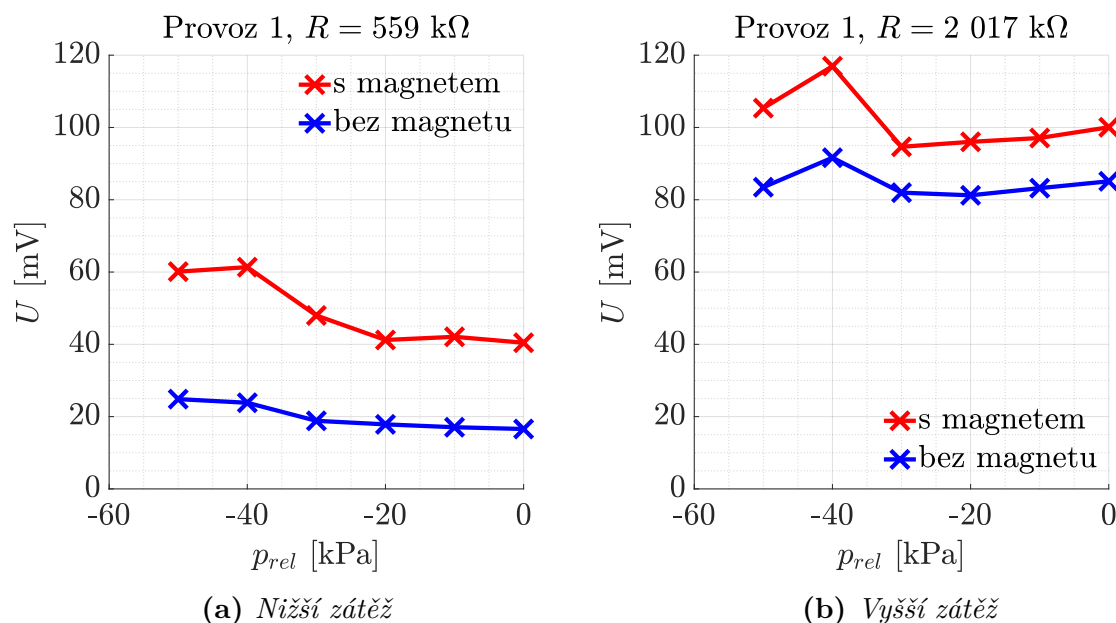
peroxidů, protože není patrný větší rozdíl mezi posuzovanými variantami. Pouze u vzorku odebraného po 16 cyklech s vlivem magnetického pole je pozorovatelná vyšší koncentrace vzhledem ke zbytku hodnot. Jestli se však jedná o relevantní údaj, nebo došlo k chybě měření, je přinejmenším diskutabilní. Tento závěr bude blíže komentován v diskusi.

Tabulka 6.1: Vyhodnocená koncentrace peroxidu vodíku v mg/l.

Typ měření	0 cykl.	1 cykl.	2 cykl.	4 cykl.	8 cykl.	16 cykl.
s magnetem	0	0,46	0,49	0,42	0,01	2,61
bez magnetu	0	0,16	0,60	0,22	0,29	0,56

6.2.2. Vyhodnocení indukovaného napětí

Po změření předchozích dvou experimentů byla dýza bez poškození úspěšně provrtána a opatřena elektrodami (mosaznými šrouby M3). Kromě tlaků p_1 , p_2 a průtoku Q se v tomto experimentu přidává měření napětí na těchto elektrodách v mV, k čemuž byla použita měřicí karta USB-6216 od výrobce National Instruments o rozsahu 20 V. K posouzení chování indukovaného napětí v různých pracovních režimech byla zvolena kombinace provozu jednoho nebo obou čerpadel a postupného zvyšování podtlaku v měřicí trati pomocí vývěvy. Zvolená posloupnost podtlaků 500, 400, 300, 200 a 100 mbar byla nastavována manuálně během měření. K měřicí kartě byly elektrody připojeny spolu se zátěží (elektrickým odporem reprezentujícím spotřebič). Dvě součástky vybrané k tomuto účelu disponují hodnotami odporu přibližně $R = 559$ a $2\,017$ k Ω .

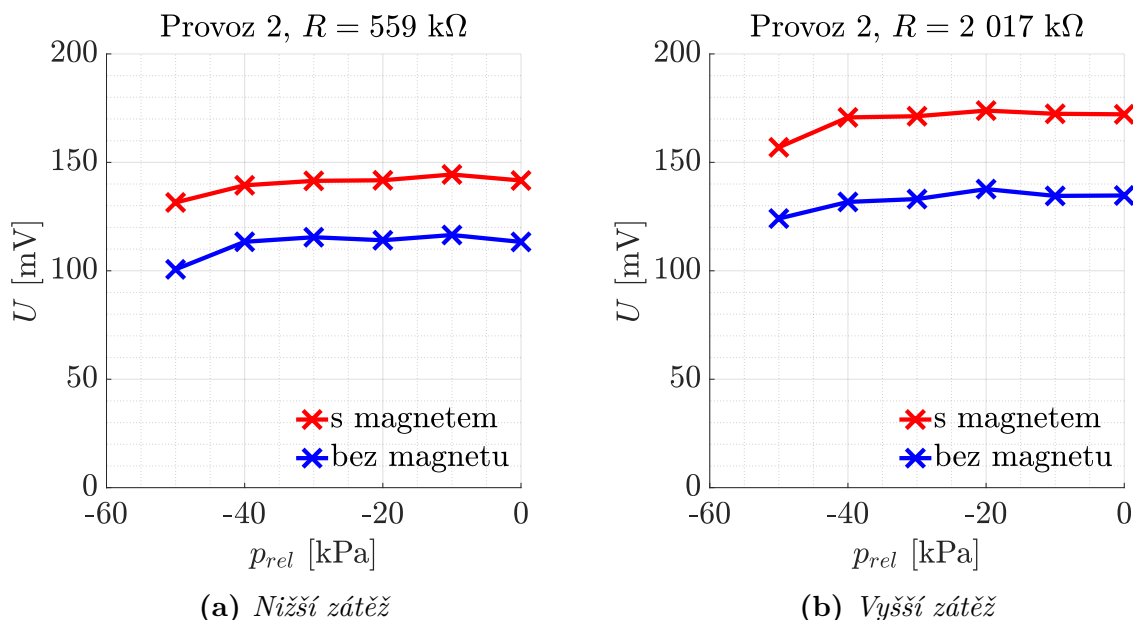


Obrázek 6.3: Závislost indukovaného napětí na podtlaku při běhu jednoho čerpadla.

Výsledky z prvních měření jsou ve formě závislosti indukovaného napětí U na relativním tlaku p_{rel} v měřicím okruhu uvedeny na obr. 6.3. Jakožto referenční bylo naměřeno také napětí při otevřené nádrži do atmosférického tlaku ($p_{rel} = 0$). Do této závislosti byly vynášeny průměrné hodnoty z 2sekundových záznamů měřených při vzorkovací frekvenci 100 kHz v ustáleném stavu. Výrazný nárůst naměřených napětí ve variantě

6.3. NEJISTOTY MĚŘENÍ

s vyšší zátěží byl pravděpodobně způsoben výměnou vody a očištěním elektrod mezi měřeními. Při odstaveném měřicím okruhu totiž dochází k zanášení elektrod nečistotami, což může snížit výsledné hodnoty U . Indukované napětí je dle očekávání vyšší u varianty s magnetickým obvodem, avšak bez jeho přítomnosti by k indukci napětí vůbec nemělo docházet. Možnou příčinou je promítnutí statického napětí plexisklové dýzy do naměřených dat. Pozorovatelný je mj. také nárůst napětí při vyšším podtlaku.



Obrázek 6.4: Závislost indukovaného napětí na podtlaku při běhu obou čerpadel.

Další dvojice měření proběhla za souběžného provozu obou čerpadel. Z výsledných závislostí na obr. 6.4 je v tomto případě naopak zřetelný plynulý pokles napětí při zvětšování podtlaku. Zde je rozdíl mezi zatíženími méně patrný, protože již byly elektrody předem očištěny. Závěrem je potřeba zdůraznit, že se při opakovaných měřeních zřídka podařilo u dané konfigurace reprodukovat předchozí výsledky. Na měření má zřejmě vliv velké množství okrajových i počátečních podmínek, které znemožňují jeho opakovatelnost se spolehlivými výsledky. Příkladem ovlivňujících faktorů je např. již zmíněná míra čistoty povrchu elektrod nebo proměnlivá hodnota statického napětí na kavitační dýze. K podrobnému stanovení nejistot by bylo potřeba provést velké množství dalších experimentů se zaměřením na vliv jednotlivých faktorů.

6.3. Nejistoty měření

Z praktického hlediska není žádné měření absolutně přesné. V důsledku různých negativních vlivů se mezi skutečnými a naměřenými hodnotami vždy vyskytují jisté odchylky. K provedeným experimentům je proto vhodné kvantifikovat nejistoty měření, které udávají konkrétní interval hodnot, ve kterém se skutečná hodnota sledované veličiny vzhledem k naměřené může vyskytovat. [39]

6.3.1. Typy nejistot

Nejistoty jsou obecně značeny jako u_y , kde y vyjadřuje sledovanou veličinu, přičemž jednotky nejistoty rovněž odpovídají této veličině. Celková nejistota měření se skládá z několika dílčích složek, k jejichž souhrnnému stanovení jsou k dispozici dvě různé metody:

- statistická analýza opakované série měření (nejistoty typu A),
- jiné než statistické zpracování dat (nejistoty typu B).

Nejistoty typu A jsou způsobeny kolísáním naměřených údajů a stanovují se jako směrodatná odchylka odhadu výsledné hodnoty y . Tento odhad je reprezentován aritmetickým průměrem \bar{y} , přičemž platí vztah

$$u_{Ay} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad (6.1)$$

kde n představuje počet pozorování, resp. hodnot záznamu. Závisí tedy na délce záznamu a vzorkovací frekvenci. Nejistoty typu B se u přímého měření určují na základě údajů výrobce měřicí techniky, jmenovitě se jedná o součin rozsahu a tolerance daného měřicího přístroje. U nepřímých měření se vypočítaná veličina posuzuje vůči veličinám měřeným, a to pomocí součinu parciální derivace funkčního předpisu vypočítané veličiny podle dané měřené veličiny a nejistoty příslušného měřicího přístroje. Následně pod odmocninou sčítáme přes druhé mocniny těchto součinů

$$u_{By} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_j} \cdot u_{B\xi_j} \right)^2}. \quad (6.2)$$

Veličina ξ_j zde představuje j -tou veličinu z celkového počtu m přímo měřených veličin vyskytujících se ve funkčním předpisu nepřímo měřené veličiny y , přičemž $u_{B\xi_j}$ je udává nejistotu typu B pro odpovídající přímo měřenou veličinu. [39]

Výsledný efekt kombinace těchto nejistot u_{Cy} je následně definován jako odmocnina ze součtu čtverců nejistot typu A (u_{Ay}) a nejistot typu B (u_{By}) [39]. Lze tedy psát

$$u_{Cy} = \sqrt{u_{Ay}^2 + u_{By}^2}. \quad (6.3)$$

6.3.2. Ukázka vyhodnocení nejistot

Na základě štitkových údajů tlakoměrů a indukčního průtokoměru lze nyní stanovit nejistoty měření dle předešlých vztahů. Vzhledem k zanedbatelné velikosti nejistot typu A oproti typu B bude za kombinovanou nejistotu považována pouze hodnota u_{By} . Jelikož jsou k měření tlaku využívány stejné dva tlakoměry, stanovíme jejich jednotnou nejistotu jako

$$u_{Bp} = 400 \cdot 0,0025 = 1 \text{ kPa}. \quad (6.4)$$

Pro průtokoměr pak dostáváme

$$u_{BQ} = (6,12 - 0,612) \cdot 0,005 \doteq 0,0275 \text{ m}^3/\text{h}. \quad (6.5)$$

6.3. NEJISTOTY MĚŘENÍ

Nejistoty z nepřímého měření se posléze týkají zejména veličin v charakteristice kavitační dýzy. Upravme obecný vztah pro nejistotu typu B dle (6.2) pro kavitační číslo σ ve tvaru

$$u_{B\sigma} = \sqrt{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial p_1} \cdot u_{Bp}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial p_2} \cdot u_{Bp}\right)^2}, \quad (6.6)$$

přičemž po příslušném zderivování vztahu (5.3) obdržíme

$$u_{B\sigma} = \sqrt{\left[\frac{p_v - p_2}{(p_1 - p_2)^2} \cdot u_{Bp}\right]^2 + \left[\frac{p_1 - p_v}{(p_1 - p_2)^2} \cdot u_{Bp}\right]^2}. \quad (6.7)$$

Do výsledného vztahu bychom následně dosadili hodnoty z jednotlivých naměřených bodů a stanovili tak chybové úsečky. Tentýž postup je potřeba aplikovat na průtokový součinitel K_v , kde se kromě tlaků p_1 a p_2 vyskytuje v definičním vztahu (5.1) také průtok Q

$$u_{BK_v} = \sqrt{\left(\frac{\partial K_v}{\partial p_1} \cdot u_{Bp}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_v}{\partial p_2} \cdot u_{Bp}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_v}{\partial Q} \cdot u_{BQ}\right)^2}. \quad (6.8)$$

Derivací příslušného funkčního předpisu dostaneme po úpravách

$$u_{BK_v} = \sqrt{2 \cdot \left[\frac{\Delta p_{1\text{bar}} \cdot Q^2 \cdot u_{Bp}^2}{4(p_1 - p_2 - \Delta p_s)^3}\right] + \frac{\Delta p_{1\text{bar}} \cdot u_{BQ}^2}{(p_1 - p_2 - \Delta p_s)^2}}. \quad (6.9)$$

Další postup by opět zahrnoval dosazení hodnot p_1 , p_2 a Q a stanovení nejistoty pro každý změřený bod. Výsledné chybové úsečky vyjadřující interval, ve kterém se skutečná hodnota veličiny oproti naměřené může vyskytnout, lze následně vynášet ke každému bodu do příslušných grafů.

7. Diskuse

Předložená práce si klade za cíl navrhnout magnetický obvod s využitím permanentních magnetů a požadavkem na výstupní magnetickou indukci alespoň 1 tesla. Jelikož nebyla stanovená podmínka splněna ani u jednoho ze dvou sestavených prototypů, nabízí se nyní prostor reflektovat některá rozhodnutí učiněná v rámci návrhového procesu.

V první řadě je namístě zhodnotit využití výpočtového modelování, které ve vývoji pólových nástavců sehrálo významnou roli. Zásadním nedostatkem v tomto ohledu je zejména chybějící studie nezávislosti výpočtové sítě na výsledcích simulací. Vzhledem ke zdatnému nesouladu měření s výpočty mohlo být právě nesprávné nastavení výpočtové sítě jednou z příčin. Zároveň je však potřeba mít na paměti, že se v tomto případě nejedná např. o CFD simulaci komplexního problému z mechaniky tekutin, kde jsou kvůli implementaci metody konečných objemů kladeny velmi vysoké nároky na kvalitu výpočtové sítě. U metody konečných prvků, která se pro výpočty elektromagnetických úloh obvykle využívá, jsou naopak parametry výpočtové sítě všeobecně méně důležité. Stěžejním krokem je především zjemnění sítě v oblasti zájmu, což bylo ve všech provedených simulacích dodrženo.

Dalším bodem je posouzení vhodnosti zvoleného řešení využívajícího permanentní magnety. Pro použití v experimentu, který má exaktně ověřit teorii podpořenou hypotetickou interakcí magnetického pole s kavitující kapalinou, mohly být zcela jednoznačně použity elektromagnety. Vhodně zvolená cívka, jejíž minimální výstupní parametry garantované výrobcem by korespondovaly se stanovenou podmínkou, může poskytnout stabilnější výsledky nezbytné pro účely prováděného experimentu. Na stranu druhou by bylo nutné zavést dodatečné ochranné prvky, aby nedošlo ke kontaktu vody s elektronikou např. při odběru vzorků nebo úniku vody v důsledku přetlaku v měřicím okruhu. Toto nebezpečí u permanentních magnetů vůbec nehrozí. Další úhel pohledu nabízí také druhý prováděný experiment s indukovaným napětím, který by s použitím elektromagnetu v podstatě ztratil svůj význam. Jakákoli vyrobená energie by totiž byla významně převýšena energií spotřebovanou k napájení cívky. Namísto implementace elektromagnetu by tedy zajímavým obohacením v této oblasti mohlo být navržení a sestavení vhodného Halbachova uspořádání magnetů, které nepochybně má potenciál svými parametry překonat řešení zvolené zde.

To však neznamená, že by u navržené sestavy byly vyčerpány veškeré možnosti a že by již neexistoval žádný prostor pro její optimalizaci. Velkou výhodou je v tomto ohledu skutečnost, že mnoho zákonitostí a faktorů ovlivňujících chování magnetického obvodu bylo v této práci již odhaleno a popsáno. Díky provedeným simulacím a sestaveným prototypům bylo objasněno, jaké úpravy mohou mít příznivý účinek na výstupní parametry a jaké naopak nikoliv. S pomocí nabytých poznatků by tak bylo možné navázat selektivními úpravami magnetického obvodu, které by jej efektivněji přibližovaly k překonání cílového požadavku. Jmenovitě se může jednat o použití nových feromagnetických materiálů specializovaných pro tyto aplikace nebo např. výběr větších neodymových magnetů s vyšší přitlačnou silou. Pólové nástavce jsou navíc alternativně použitelné i s připevněnou cívkou nahrazující permanentní magnety.

Nyní se přesuňme ke kritickému zhodnocení experimentální části této práce. Na základě výsledků chemického rozboru lze prohlásit, že vyřčená teoretická hypotéza zatím potvrzena nebyla. Hlavní příčinou je pravděpodobně nesplnění požadavků kladených na magnetický obvod, které vycházejí z teoretických poznatků. Neprokatelná změna v koncentraci peroxidu vodíku nicméně mohla být způsobena také nepřesnými odběry nebo kontaminací

vzorků při jejich manipulaci. K obdržení relevantnějších výsledků by tedy bylo potřeba v první řadě zvýšit magnetickou indukci v kavitační dýze. Následně se nabízí prozkoumat vliv většího množství cyklů na výskyt chemických reakcí a případně kromě peroxidů studovat také přítomnost hydroxilových radikálů.

Z výsledků experimentu s indukovaným napětím naopak mnoho závěrů vyvodit nelze, a to zejména z důvodu nekonzistentnosti naměřených hodnot a celkově špatné opakovatelnosti měření. Zvláštností je mj. nulové naměřené napětí u varianty bez magnetického obvodu, kde by v absenci externího magnetického pole k elektromagnetické indukci vůbec nemělo dojít. Jedním z možných vysvětlení může být přítomnost statického elektrického napětí na povrchu plexisklové dýzy, která během měření nebyla nijak uzemněna. Případné využití odebrané elektrické energie k napájení snímačů je taktéž velmi diskutabilní, a to z důvodu rychlého zanášení povrchu elektrod vrstvou oxidů v důsledku probíhající elektrolyzy v kavitující kapalině. U takto zanesených elektrod rapidně klesají naměřené hodnoty napětí, což znemožňuje stálý odběr energie. V rámci navazujícího výzkumu by proto bylo vhodné navrhnout možná řešení k tomuto nedostatku. Výskytu statického napětí lze zamezit buďto uzemněním kavitační dýzy nebo alternativně výměnou plexisklové dýzy za skleněnou. Dále by bylo potřeba sjednotit postup měření, což by mohlo vést k ustálení počátečních podmínek, a tím i naměřených hodnot indukovaného napětí. Zvětšení plochy elektrod v kapalině by rovněž mohlo mít příznivý vliv na výstupní parametry.

Poslední výtka směřuje k sestrojené charakteristice kavitační dýzy. K jednoznačnému popsání tohoto ztrátového prvku by mělo v ideálním případě být naměřeno více bodů v celém rozsahu kavitačního čísla. Již bylo řečeno, že chybějící body v prostřední oblasti charakteristiky byly způsobeny nedostatečnými možnostmi regulace měřicí trati. K její optimalizaci by použitá kavitační dýza musela být zapojena do jiného měřicího okruhu s více stupni volnosti, např. s regulovatelnými otáčkami čerpadel atd.

Celkově tedy lze nalézt hned několik směrů, kterými by se tento výzkum mohl dále ubírat. V souvislosti s projektem CaviPlasma se do budoucna nabízí např. posouzení uvažované interakce s přidaným vlivem nízkoteplotního plazmatu, a to jak teoreticky z pohledu nerovnovážné termodynamiky, tak experimentálně v kombinaci s navrženým nebo dále upraveným magnetickým obvodem. Také se dá uvažovat o možnosti řešit tento komplexní problém propojením výpočtového modelování dvoufázového proudění kavitující kapaliny (Ansys Fluent) s vlivem externího magnetického pole (Ansys Maxwell).

8. Závěr

Tato diplomová práce se zabývala problematikou vzájemné interakce magnetického pole a proudící kapaliny se zaměřením na návrh a sestavení magnetického obvodu pro použití v souvisejícím experimentu. Záměrem tohoto experimentu bylo především pozorování chemických změn v kavitující kapalině ovlivněné působením magnetického pole generovaného navrženou magnetickou sestavou.

V prvních dvou kapitolách proto byly systematicky představovány potřebné teoretické znalosti, a to jak z vybraných oblastí elektromagnetismu, tak z lineární nerovnovázné termodynamiky, ze které hypotéza o možné interakci různorodých nevratných dějů přímo vychází. Na základě poznatků z této části následovala kapitola věnovaná samotnému návrhu, optimalizaci a sestavení magnetického obvodu pracujícího na principu usměrnění magnetického pole z permanentních magnetů přes pólové nástavce. S využitím výpočtového modelování pomocí komerčně dostupných softwarů byla postupně vyvíjena dvě různá provedení této sestavy.

Kromě užitečného souhrnu doporučení a poznatků vyplývajících z iterativního návrhového procesu je důležitým výstupem z těchto simulací také prokázaná nespolehlivost výpočtového modelování ve 2D. Tento závěr byl podpořen srovnáním výsledků z programu FEMM s komplexnější simulací v rámci softwaru Ansys Maxwell 3D i se skutečným měřením a ověřen pomocí konkurenčního numerického řešiče Ansys Maxwell 2D. U řešení úlohy tedy lze 2D simulace využívat nanejvýš k porovnávání výstupních parametrů mezi dvěma podobnými modely. Nejsou však vhodné jako zdroj exaktních a spolehlivých dat, protože oproti skutečnosti bývají tyto výsledky nadhodnocené o více než 100 %.

Druhý sestavený prototyp magnetického obvodu o výstupní magnetické indukci v rozmezí 0,5 až 0,7 T byl následně využit v experimentální části této práce. V prvé řadě proběhlo ve spolupráci s Botanickým ústavem Akademie věd ČR experimentální stanovení koncentrace peroxidu vodíku jakožto indikátoru přítomnosti chemických reakcí v kavitující kapalině vyvolaných aplikovaným magnetickým polem. Dále bylo provedeno měření elektrického napětí, které bylo dle principu indukčního průtokoměru indukováno na elektrodách připevněných ke kavitační dýze. Na použité měřicí trati byla rovněž proměřena charakteristika této dýzy.

Pravděpodobně z důvodu nedostatečné magnetické indukce v kavitační dýze zatím nebyla popsána interakce experimentálně ověřena, protože rozdíl v koncentraci peroxidů vodíku ve variantě s magnetickým obvodem a bez něj nebyl danou metodou stanovení prokazatelný. Po stránce indukovaného napětí sice byly naměřeny hodnoty v řádu desítek až stovek mV, u provedených měření však v podstatě nebyl pozorován žádný jednotný trend shodný pro všechny vyhodnocené závislosti. Jak je blíže rozvedeno v diskusi, tento experiment je pravděpodobně velmi citlivý na vstupní parametry a jakákoli změna počátečních podmínek má znatelný vliv na měřené hodnoty.

Literatura

- [1] MARŠÁLEK, Blahoslav; MARŠÁLKOVÁ, Eliška; ODEHNALOVÁ, Klára; POCHYLÝ, František; RUDOLF, Pavel et al. *Removal of Microcystis aeruginosa through the Combined Effect of Plasma Discharge and Hydrodynamic Cavitation*. Online. Water. 2019, roč. 12, č. 1, s. 1-14. ISSN 2073-4441. Dostupné z: <https://doi.org/10.3390/w12010008>. [cit. 2024-03-29].
- [2] KANTOR, Dalibor. *Vliv kavitace na vlastnosti elektromagnetického pole*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2007. Vedoucí diplomové práce prof. Ing. František Pochylý, CSc.
- [3] VEVERKA, Aleš. *Proudění kapalin s účinky elektromagnetického pole*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2007. Vedoucí diplomové práce prof. Ing. František Pochylý, CSc.
- [4] HARAZIN, P. *Vzájemná interakce magnetického pole a kavitujiícího proudění*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.
- [5] BRDIČKA, Miroslav; SAMEK, Ladislav a SOPKO, Bruno. *Mechanika kontinua*. Vyd. 3., rev. Praha: Academia, 2005. ISBN 80-200-1344-X.
- [6] KRUPIČKA, Svatopluk. *Magnetismus: Historie a současnost*. Online. Fyzikální Ústav AV ČR, 2007. Dostupné z: https://www.learned.cz/userfiles/pdf/prednasky-cleny-odborne/svatopluk.krupicka_0207.pdf. [cit. 2023-11-01].
- [7] SEDLÁK, Bedřich a ŠTOLL, Ivan. *Elektrina a magnetismus*. Vyd. 3., V nakl. Karolinum 2. Praha: Karolinum, 2012. ISBN 978-80-246-2198-2.
- [8] FITZPATRICK, Richard. *Maxwell's Equations and the Principles of Electromagnetism*. Hingham, MA: Infinity Science Press, 2008. ISBN 978-1-934015-20-9.
- [9] BANSAL, Rajeev (ed.). *Handbook of Engineering Electromagnetics*. New York: Dekker, 2004. ISBN 0-8247-5628-2.
- [10] JILES, David. *Introduction to Magnetism and Magnetic Materials*. 3rd edition. Milton: CRC Press, 2016. ISBN 978-1-4822-3888-4. Dostupné z: <https://doi.org/10.1201/b18948>.
- [11] DRÁPALA, Jaromír a KURSA, Miroslav. *Elektrotechnické materiály: učební text*. Online. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2012. ISBN 978-80-248-2570-0. Dostupné z: <http://www.person.vsb.cz/archivcd/FMMI/ETMAT/Elektrotechnicke%20materialy.pdf>. [cit. 2024-01-12].
- [12] REIS, Mario. *Fundamentals of Magnetism*. Online. Elsevier, 2013. ISBN 978-0-12-405545-2. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/C2012-0-02644-0>. [cit. 2023-11-07].
- [13] ELLINGSON, Steven W. *Electromagnetics, Vol. 1*. Online. 2018. Blacksburg, Virginia: VT Publishing, 2018. ISBN 978-0-9979201-9-2. Dostupné z: <https://doi.org/10.21061/electromagnetics-vol-1>. [cit. 2023-10-22].

- [14] GEEK3. *VFPT magnets BH symbols*. Online. In: Wikimedia Commons. 2017. Dostupné z: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=58588360>. [cit. 2024-01-16].
- [15] TOMBE, Frederick David. *Maxwell's Original Equations*. Online. 2011. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/302966559_Maxwell's_Original_Equations. [cit. 2024-02-15].
- [16] FLEISCH, Daniel. *A Student's Guide to Maxwell's Equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. ISBN 978-0-521-70147-1.
- [17] FIALOVÁ, Simona a POCHYLÝ, František. *A New Formulation of Maxwell's Equations*. Online. Symmetry. 2021, roč. 13, č. 5, s. 868-868. ISSN 2073-8994. Dostupné z: <https://doi.org/10.3390/sym13050868>. [cit. 2023-12-08].
- [18] KUNDU, Pijush K.; COHEN, Ira M. a DOWLING, David R. *Fluid Mechanics*. 6th ed. Burlington: Academic Press, 2016. ISBN 978-0-12-405935-1.
- [19] ABC MAGNET. *Neodymové magnety (FeNdB)*. Online. ABC MAGNET. Neodymové magnety (FeNdB). c2023. Dostupné z: <https://www.abcmagnet.cz/cs/o-magnetech/druhy-magnetu/neodymove-magnety-fendb>. [cit. 2023-11-20].
- [20] ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI. *Nerovnovážná termodynamika a její aplikace*. Online. 2007. Dostupné z: <https://nelterm.kof.zcu.cz/index.htm>. [cit. 2023-10-15].
- [21] MARŠÍK, František. *Termodynamika kontinua*. Praha: Academia, 1999. ISBN 80-200-0758-X.
- [22] de GROOT, Sybren Ruurds a MAZUR, Peter. *Non-equilibrium Thermodynamics*. Unabridged, corrected Dover edition.; First published. New York: Dover Publications, 1984. ISBN 0-486-64741-2.
- [23] DEMIREL, Yaşar. *Nonequilibrium Thermodynamics: Transport and Rate Processes in Physical, Chemical and Biological Systems*. 2nd Edition. Amsterdam: Elsevier, 2007. ISBN 978-0-444-53079-0.
- [24] PRIGOGINE, Ilya. *Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes*. 3rd Edition. New York: Interscience Publishers and Division of John Wiley, 1967.
- [25] POKROVSKII, Vladimir N. A Derivation of the Main Relations of Nonequilibrium Thermodynamics. Online. *ISRN Thermodynamics*. 2013, roč. 2013, s. 1-9. ISSN 2090-5211. Dostupné z: <https://doi.org/10.1155/2013/906136>. [cit. 2024-01-16].
- [26] ITSKOV, Mikhail. *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers: With Application to Continuum Mechanics*. Fourth edition. Mathematical Engineering (Springer). Cham: Springer, 2015. ISBN 978-3-319-16341-3.
- [27] FIALOVÁ, Simona a POCHYLÝ, František. *Constitutive Equations for Magnetic Active Liquids*. Online. Symmetry. 2021, roč. 13, č. 10, s. 1910-1910. ISSN 2073-8994. Dostupné z: <https://doi.org/10.3390/sym13101910>. [cit. 2023-12-08].

- [28] POCHYLÝ, František. *Konstitutivní vztahy kapaliny s účinky elektromagnetických polí: interní dokument Odboru fluidního inženýrství Viktora Kaplana*. Brno, 2012. VUT-EU-13303-QR-37-12.
- [29] ZAHN, Markus. Derivation of the Korteweg-Helmholtz Electric and Magnetic Force Densities Including Electrostriction and Magnetostriction from the Quasistatic Poynting's Theorems. Online. *2006 IEEE Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena*. 2006, s. 186-189. ISBN 1-4244-0546-7. ISSN 0084-9162. Dostupné z: <https://doi.org/10.1109/CEIDP.2006.312092>. [cit. 2024-04-04].
- [30] SONAWANE, Sunil T. a MERIBOUT, Mahmoud. Halbach Array Design Targeting Nuclear Magnetic Resonance. Online. *2016 5th International Conference on Electronic Devices, Systems and Applications (ICEDSA)*. 2016, s. 1-4. ISBN 978-1-5090-5306-3. Dostupné z: <https://doi.org/10.1109/ICEDSA.2016.7818513>. [cit. 2023-11-22].
- [31] MEEKER, David. *Finite Element Method Magnetics: Version 4.2 User's Manual*. Online. 2020. Dostupné z: <https://www.femm.info/wiki/Files/files.xml?action=download&file=manual.pdf>. [cit. 2023-10-12].
- [32] BIANCHI, Nicola. *Electrical Machine Analysis Using Finite Elements*. Power electronics and applications series (CRC Press), 7. Boca Raton: CRC Press, 2005. ISBN 978-0849333996.
- [33] ADVANCED TECHNOLOGY GROUP, s. r. o. [ATG]. *Gauss / Teslametr F.W.Bell 5170, 5180*. Online. 2005. Dostupné z: https://www.atg.cz/new/cz/pdf/katalogy/MT/bell_5170__5180.pdf. [cit. 2024-04-17].
- [34] TATA STEEL EUROPE Ltd. *Typical data for SURA® M530-50A*. Online. 2008. Dostupné z: <https://www.tatasteeleurope.com/sites/default/files/m530-50a.pdf>. [cit. 2024-02-07].
- [35] MAGSY, s. r. o. *Neodymový magnet kvádr 40×10×5 N 80 °C, VMM9-N48*. Online. 2023. Dostupné z: <https://e-shop.magsy.cz/neodymovy-magnet-hranol-40x10x5-n/>. [cit. 2023-12-28].
- [36] VAL-MATIC VALVE & MFG. *Cavitation in Valves*. Online. 2018. Dostupné z: https://www.valmatic.com/Portals/0/pdfs/CavitationinValves_6-18.pdf. [cit. 2024-04-30].
- [37] LUKEŠ, Petr. *Water Treatment by Pulsed Streamer Corona Discharge*. Disertační práce. Praha: Ústav fyziky plazmatu AV ČR, 2001. ISBN 80-902724-6-0.
- [38] MILLER, Richard W. *Flow Measurement Engineering Handbook*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, c1996. ISBN 00-704-2366-0.
- [39] PALENČÁR, Rudolf; VDOLEČEK, František a HALAJ, Martin. Nejistoty v měření I: vyjadřování nejistot. *Automa*. 2001, roč. 7, č. 7-8, s. 50-54.

Seznam použitých zkratek a symbolů

Označení	Rozměr	Význam
A	$[-]$	absorbance vzorku
A^ℓ	$[J]$	afinita k ℓ -té chemické reakci
A_i	$[Wb \cdot m^{-3}]$	vektorový potenciál magnetického pole
b	$[Pa \cdot s]$	součinitel objemové viskozity
B	$[T]$	velikost magnetické indukce
B_i	$[T]$	vektor magnetické indukce
B_r	$[T]$	remanentní indukce
$(BH)_{\max}$	$[J \cdot m^{-3}]$	maximální energetický součin
c	$[mol \cdot l^{-1}]$	koncentrace chemické látky
$c_{(k)}, c^k, c_\alpha$	$[-]$	hmotnostní koncentrace k -té (α -té) složky
d_{ij}	$[s^{-1}]$	deviátor tenzoru rychlosti deformace
D	$[m]$	průměr potrubí
D_i	$[C \cdot m^{-2}]$	vektor elektrické indukce
D_{ij}	$[Pa]$	deviátor tenzoru nevratných napětí
E_i	$[V \cdot m^{-1}]$	vektor intenzity elektrického pole
f	$[Hz]$	frekvence
$F_{(e)i}$	$[N]$	elektrická síla
$F_{(k)i}, F_i^k$	$[N]$	vnější objemová síla působící na k -tou složku
$F_{(L)i}$	$[N]$	Lorentzova síla
$F_{(m)i}$	$[N]$	magnetická síla
H_i	$[A \cdot m^{-1}]$	vektor intenzity magnetického pole
H_c	$[A \cdot m^{-1}]$	koercitivní intenzita vnějšího pole
I	$[A]$	elektrický proud
j_i	$[A \cdot m^{-2}]$	plošná hustota elektrického proudu
$j_{(M)i}$	$[A \cdot m^{-2}]$	plošná hustota Maxwellova proudu
$j_{(P)i}$	$[A \cdot m^{-2}]$	plošná hustota polarizačního proudu
J_i	$[-]$	i -tý zobecněný termodynamický tok
J_ℓ, J^ℓ	$[-]$	tok ℓ -té chemické reakce
J_i^e	$[A \cdot m^{-2}]$	difúzní tok vyvolaný působením elektromagnetického pole
$J_{(k)i}, J_i^k$	$[m^{-2} \cdot s^{-1}]$	difúzní tok k -té komponenty
J_i^q	$[W \cdot m^{-2}]$	tepelný tok
$\mathcal{J}(S)$	$[-]$	celkový tok entropie systémem
k	$[-]$	křivka

Označení	Rozměr	Význam
k_i	[m]	směrový vektor křivky
K_v	[m ³ · h ⁻¹]	průtokový součinitel
ℓ	[cm]	délka kyvety
ℓ_i	[m]	směrový vektor křivky (vodiče)
L	[m]	délka, vzdálenost
L_{ik}	[–]	obecný fenomenologický koeficient
M_i	[A · m ⁻¹]	vektor magnetizace
M_s	[A · m ⁻¹]	saturační magnetizace
n_i	[–]	jednotkový vektor vnější normály
N_α	[–]	počet částic α -té chemické složky
p	[Pa]	tlak
p_v	[Pa]	tlak nasycených par
$p_{10}(50)$	[W · kg ⁻¹]	ztrátové číslo při magnetické indukci 1 T a frekvenci 50 Hz
Δp	[Pa]	celkový tlakový spád
Δp_s	[Pa]	statická tlaková diference
P_i	[C · m ⁻²]	vektor elektrické polarizace
$P_{(m)i}$	[T]	magnetická polarizace
$\mathcal{P}(S)$	[–]	celková produkce entropie v systému
$q, q_{(c)}$	[C]	(celkový) elektrický náboj
Q	[m ³ · s ⁻¹]	objemový průtok
Q	[J]	teplo
R	[Ω]	elektrický odpor
s	[J · kg ⁻¹ · K ⁻¹]	měrná entropie
S	[J · K ⁻¹]	entropie
S	[m ²]	plocha
${}_{in}S$	[J · K ⁻¹]	příspěvek entropie z vnitřních nevratných procesů
${}_{ex}S$	[J · K ⁻¹]	příspěvek entropie z okolí systému
t	[s]	čas
T	[K]	absolutní teplota
$T_{(C)}$	[°C]	Curieův bod
$T_{(N)}$	[°C]	Néelův bod
T_{ij}	[–]	obecný tenzor 2. řádu
T_{ij}^A	[–]	antisymetrická část obecného tenzoru 2. řádu
T_{ij}^S	[–]	symetrická obecného tenzoru 2. řádu
\dot{T}_{ij}	[–]	deviátor obecného tenzoru 2. řádu
T_{kk}	[–]	stopa obecného tenzoru 2. řádu

Označení	Rozměr	Význam
u	$[\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}]$	měrná vnitřní energie
u_{Ay}	$[-]$	nejistota typu A pro měřenou veličinu y
u_{By}	$[-]$	nejistota typu B pro měřenou veličinu y
u_{Cy}	$[-]$	kombinovaná nejistota pro měřenou veličinu y
U	$[\text{J}]$	vnitřní energie
U	$[\text{V}]$	(indukované) elektrické napětí
v	$[\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}]$	měrný objem
v_i	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$	vektor rychlosti
v_s	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$	střední rychlost proudění
v_{ij}	$[\text{s}^{-1}]$	tenzor rychlosti deformace
$v_{\beta\beta}$	$[\text{s}^{-1}]$	stopa tenzoru rychlosti deformace
V	$[\text{m}^3]$	objem
x_i	$[\text{m}]$	kartézské souřadnice, polohový vektor
X_i	$[-]$	i -tá zobecněná termodynamická síla
z^k	$[\text{C} \cdot \text{kg}^{-1}]$	elektrický náboj jednotkové hmotnosti k -té složky
γ, γ_{ij}	$[\text{S} \cdot \text{m}^{-1}]$	měrná elektrická vodivost (konduktivita)
δ_{ij}	$[-]$	Kroneckerovo delta
ϵ, ϵ_{ij}	$[\text{F} \cdot \text{m}^{-1}]$	absolutní permitivita
$\epsilon_{(r)}$	$[\text{F} \cdot \text{m}^{-1}]$	relativní permitivita
$\epsilon_{(0)}$	$[\text{F} \cdot \text{m}^{-1}]$	permitivita vakua
ϵ	$[\text{l} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}]$	absorpční koeficient
ϵ_{ijk}	$[-]$	Levi-Civitaův tenzor
η, η_{ijkl}	$[\text{Pa} \cdot \text{s}]$	smyková viskozita (dynamická)
μ, μ_{ij}	$[\text{H} \cdot \text{m}^{-1}]$	absolutní permeabilita
$\mu_{(k)}, \mu^k, \mu_\alpha$	$[\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}]$	chemický potenciál k -té (α -té) složky
$\hat{\mu}^k$	$[\text{V}]$	elektrochemický potenciál k -té komponenty
$\mu_{(r)}$	$[\text{H} \cdot \text{m}^{-1}]$	relativní permeabilita
$\mu_{(0)}$	$[\text{H} \cdot \text{m}^{-1}]$	permeabilita vakua
$\nu_{(k)\ell}, \nu^{k\ell}$	$[\text{mol}]$	kvantita související se stechiometrickým koeficientem k -té chemické složky v ℓ -té chemické reakci
Π_{ij}	$[\text{Pa}]$	tenzor nevratných napětí
$\Pi_{\alpha\alpha}$	$[\text{Pa}]$	stopa tenzoru nevratných napětí
ρ	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$	celková hustota látky
ρ_w	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$	hustota kapalné vody
$\rho_{(e)}$	$[\text{C} \cdot \text{m}^{-3}]$	objemová hustota elektrického náboje
$\rho_{(k)}$	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$	hustota k -té chemické komponenty

Označení	Rozměr	Význam
σ	$[-]$	kavitační číslo
$\sigma(S)$	$[-]$	hustota produkce entropie
σ_{ij}	[Pa]	tenzor napětí
τ_{ij}	[Pa]	tenzor vratných napětí
φ	[V]	skalární potenciál elektrického pole
ϕ_i	$[-]$	obecná vektorová funkce závislá na čase a poloze
Φ	[Wb]	magnetický indukční tok
$\chi_{(e)}$	$[-]$	elektrická susceptibilita
$\chi_{(m)}$	$[-]$	magnetická susceptibilita
ψ^k	$[\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}]$	potenciál elektrostatické síly
ω_{ij}	$[\text{s}^{-1}]$	tenzor úhlové rychlosti
Ω	$[\text{m}^2]$	plocha

Seznam obrázků

2.1	Srovnání silových účinků daných vektorových polí. Upraveno z [9].	18
2.2	Síla působící na element vodiče v magnetickém poli. Upraveno z [9].	20
2.3	Srovnání vektorových polí B_i a H_i u tyčového magnetu. Upraveno z [14].	21
2.4	Efekt polarizace dielektrika. Upraveno z [9].	23
2.5	Efekt magnetizace. Upraveno z [9].	23
2.6	Průběh H_i , $\frac{B_i}{\mu_{(0)}}$ a M_i podél osy x_1 tyčového magnetu. Upraveno z [6].	25
2.7	Lenzův zákon. Upraveno z [8].	27
2.8	Energeticky nejvýhodnější uspořádání Weissových domén. Upraveno z [10].	32
2.9	Průběh prvotní magnetizace feromagnetika. Upraveno z [11].	32
2.10	Statická hysterezní smyčka feromagnetického materiálu. Upraveno z [11].	33
2.11	Typy hysterezních smyček (měřítko je zachováno). Upraveno z [11].	34
4.1	Nástin zvoleného řešení magnetického obvodu.	55
4.2	Halbachovo uspořádání permanentních magnetů.	56
4.3	Rozměry magnetu N50 s naznačeným směrem magnetizace.	56
4.4	Snímek použité kavitační dýzy.	57
4.5	Příklad náčrtu geometrie v prostředí AutoCAD.	58
4.6	Vykreslení B - H křivky pro ocel AISI 1020 z databáze FEMM.	59
4.7	Ukázka výběru materiálů z databáze FEMM.	60
4.8	Ukázka nastavení okrajových podmínek.	61
4.9	Ukázka vykreslení magnetických siločar a kontur magnetické indukce.	61
4.10	Shrnutí evoluce návrhu prostřednictvím dvou vývojových větví.	63
4.11	Porovnání hodnot B v kavitační dýze pro různá provedení sestavy.	64
4.12	Vizualizace magnetické indukce pro vybranou sestavu.	64
4.13	Vizualizace a sestavení magnetického obvodu.	65
4.14	Ukázka laboratorního měření magnetické indukce.	66
4.15	Rozměry magnetu N48 s naznačeným směrem magnetizace.	68
4.16	Nový model magnetického obvodu.	68
4.17	Vizualizace magnetické indukce pro vybranou sestavu.	69
4.18	Ukázka 3D modelu sestavy s dekompozicí v blízkosti kavitační dýzy.	70
4.19	Specifikace velikosti okolního regionu.	71
4.20	Znázornění okrajových podmínek.	72
4.21	Specifikace velikosti konečných prvků.	73
4.22	Kontury B v rovinách XZ a YZ u provedení se 4 malými magnety.	73
4.23	Testované varianty s větším počtem permanentních magnetů.	74
4.24	Kontury B v rovinách XZ a YZ u provedení s 6 malými magnety.	74
4.25	Sestavení druhého prototypu magnetického obvodu.	75
5.1	Fotografie použité měřicí trati z laboratoře OFIVK.	77
5.2	Zjednodušené schéma použitého měřicího okruhu.	78
5.3	Umístění elektrod.	82
6.1	Charakteristika kavitační dýzy.	83
6.2	Závislost koncentrace peroxidu vodíku na počtu cyklů.	84
6.3	Závislost indukovaného napětí na podtlaku při běhu jednoho čerpadla.	85
6.4	Závislost indukovaného napětí na podtlaku při běhu obou čerpadel.	86

Seznam příloh

Níže uvedené dokumenty jsou součástí archivu formátu ZIP přiloženého k této práci.

1. Materiálový list k neodymovým magnetům VMM10-N50 (MAGSY, s. r. o.).
2. Výkresová dokumentace k použité kavitační dýze.
3. Výkresová dokumentace k 1. iteraci pólových nástavců.
4. Nabídka na dodání polotovaru k výrobě pólových nástavců (JKZ Bučovice, a. s.).
5. Protokol o kontrolním měření neodymových magnetů N50 (PZK Brno, a. s.).
6. Materiálový list k neodymovým magnetům VMM9-N48 (MAGSY, s. r. o.).
7. Materiálový list k transformátorovým plechům M530-50A.
8. Výkresová dokumentace k 2. iteraci pólových nástavců.
9. Přepočební tabulka pro odporový teploměr Pt100.