Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra algebry a geometrie

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Čtyřstěn v matematických soutěžích

Vypracoval:	**Bc. Jiří John**
Studijní program:	N0114A170004 Učitelství matematiky pro střední školy
Studijní obor:	7504T089 Učitelství matematiky pro střední školy maior
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.
Termín odevzdání práce:	Červen 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Jaroslava Švrčka, CSc., a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 26. května 2021

. . . .

Bc. Jiří John

Poděkování

Rád bych tímto poděkoval mému vedoucímu diplomové práce panu RNDr. Jaroslavu Švrčkovi, CSc., za cenné rady a podněty při psaní této práce. Především pak ale za trpělivost a čas, který mi byl během konzultací ochoten poskytnout.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Bc. Jiří John
Název práce	Čtyřstěn v matematických soutěžích
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce	RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.
Rok obhajoby práce	2021
Abstrakt	Předložená diplomová práce si klade za cíl sumarizovat základní poznatky o čtyřstěnech a poukázat na jejich využití při řešeních matematických úloh. Celý text je rozdělen do tří kapitol. První z nich je rozdělena na dvě části, přičemž první zkoumá vlastnosti čtyřstěnu a druhá se věnuje sítím čtyřstěnu. Druhá kapitola porovnává vlastnosti čtyřstěnu a trojúhelníku a zabývá se vzájemnými podobnostmi. V poslední kapitole pak uvádíme sbírku vybraných řešených i neřešených úloh o čtyřstěnu.
Klíčová slova	čtyřstěn, trojúhelník, úlohy
Počet stran	68
Počet příloh	0
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Bc. Jiří John
Title	Tetrahedron in Maths Competitions
Type of thesis	Master
Department	Department of Algebra and Geometry
Supervisor	RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.
The year of presentation	2021
Abstract	This diploma thesis deals with basic properties of tetrahedron and it's usage in mathematics competitions. The whole thesis is divided into three sections. First section is divided to two subsecions, in which first studies basic properties of tetrahedron and the second one deals with tetrahedron network. In the second chapter, we deal with similarities between tetrahedrons and triangles and we use theorems that hold in triangle to find analogies in tetrahedron. The last chapter contains two parts. One of them is a set of solved excercises and the second part contains unsolved exercises.
Keywords	tetrahedron, triangle, exercise
Number of pages	68
Number of appendices	0
Language	czech

Obsah

Základní použité symboly a značení

A, B, C, D .... body v prostoru

$\overleftrightarrow{AB}$ .... přímka určená body A,B

AB .... úsečka AB

$|AB|$ .... délka úsečky AB

$\sphericalangle AVB$ .... úhel s vrcholem V a rameny VA, VB

$|\sphericalangle AVB|$ .... velikost úhlu AVB

$\overrightarrow{AB}$ .... vektor AB s počátkem v bodě A

$\overrightarrow{ABC}$ .... polorovina s hraniční přímkou AB obsahující bod C

$\overrightarrow{ABCD}$ .... poloprostor s hraniční rovinou ABC obsahující bod D

S_{AB} .... střed úsečky AB

$S_{ABC}\,(= S)$ .... obsah trojúhelníku ABC

$V_{ABCD}\,(= V)$ .... objem čtyřstěnu $ABCD$

Úvod

Předložená diplomová práce se zabývá matematickými úlohami o čtyřstěnu. S pojmem čtyřstěn se žáci poprvé seznamují již na základní škole. Více informací se poté dozvídají na střední škole v rámci výuky stereometrie. Čtyřstěnu se však ve výuce věnuje velmi málo prostoru. Z tohoto důvodu mají žáci často jen omezené množství znalostí, které často nejsou při řešení složitějších matematických úloh dostačující.

Cílem práce tedy není pouze mapování úloh o čtyřstěnu v matematických soutěžích, ale také shrnutí základních poznatků o čtyřstěnech a jejich vlastnostech. Tato práce tedy představuje ucelený soubor základních informací o čtyřstěnu, obsahující také množství řešených a neřešených úloh. Důraz je přitom kladen především na precizní zpracování jednotlivých úloh včetně obrazového doprovodu. Z tohoto důvodu je práce vhodná pro žáky středních škol, kteří se aktivně účastní různých matematických soutěží. Diplomovou práci mohou také využít učitelé při výuce v matematických seminářích či při práci s matematickými talenty.

Práce je rozdělena do tří kapitol, z nichž první je rozdělena do dvou částí. V první části je definován čtyřstěn a zavádíme základní značení prvků čtyřstěnu, které tato práce využívá. Dále se zde zabýváme vlastnostmi čtyřstěnu a uvádíme veškerá dostupná tvrzení. Druhá část první kapitoly je věnována sítím čtyřstěnu.

Druhá kapitola se poté věnuje některým vybraným tvrzením v trojúhelníku, které lze přirozeně zobecnit a nalézt tak jejich analogie ve čtyřstěnu.

V závěrečné kapitole jsou již zpracovány samotné matematické úlohy. Tato kapitola je rozdělena do dvou částí. První část představuje soubor řešených úloh. V tomto souboru jsou obsaženy nejen stereometrické úlohy, ale také úlohy z jiných odvětví matematiky, k jejiž řešení lze využít právě vlastností čtyřstěnů. U všech úloh se klade důraz na precizní řešení, které (je-li to žádoucí) obsahuje i obrazový doprovod. V druhé části poslední kapitoly pak uvádíme soubor neřešených úloh, které mohou sloužit jako cvičné úlohy pro žáky nebo učitele.

Celá práce je zpracována v programu LaTeX. Všechny obrázky v této práci byly vytvořeny autorem diplomové práce v programu GeoGebra.

Kapitola 1

Čtyřstěn a jeho vlastnosti

Čtyřstěn lze považovat za nejjednodušší stereometrický útvar. Přesto je mu ve výuce matematiky věnováno poměrně málo pozornosti. Tato kapitola, která je rozdělena do dvou částí, má tedy za cíl seznámit čtenáře se základními vlastnostmi čtyřstěnu. V první části definujeme čtyřstěn a představíme základní klasifikaci prvků čtyřstěnu, které budeme v této práci nadále používat. Další část se věnuje pojmům těžnice, těžiště, výška aj., které známe z planimetrie ve spojitosti s trojúhelníky. Tyto pojmy lze však přirozeným způsobem zavést také u čtyřstěnů. Ve druhé části pak zavádíme pojem síť čtyřstěnu. Se sítěmi těles se žáci mohou setkat již na základní škole. My se zde věnujeme konkrétnímu typu sítě čtyřstěnu.

1.1 Základní pojmy a vlastnosti

Definice 1.1

Nechť A, B, C, D jsou body v prostoru, které jsou nekolineární (neleží v jedné rovině). Uvažujme poloprostory $\overrightarrow{BCDA}$, $\overrightarrow{CDAB}$, $\overrightarrow{DABC}$, $\overrightarrow{ABCD}$. Pak *čtyřstěnem* $ABCD$ rozumíme průnik poloprostorů $\overrightarrow{BCDA}$, $\overrightarrow{CDAB}$, $\overrightarrow{DABC}$, $\overrightarrow{ABCD}$, tj.

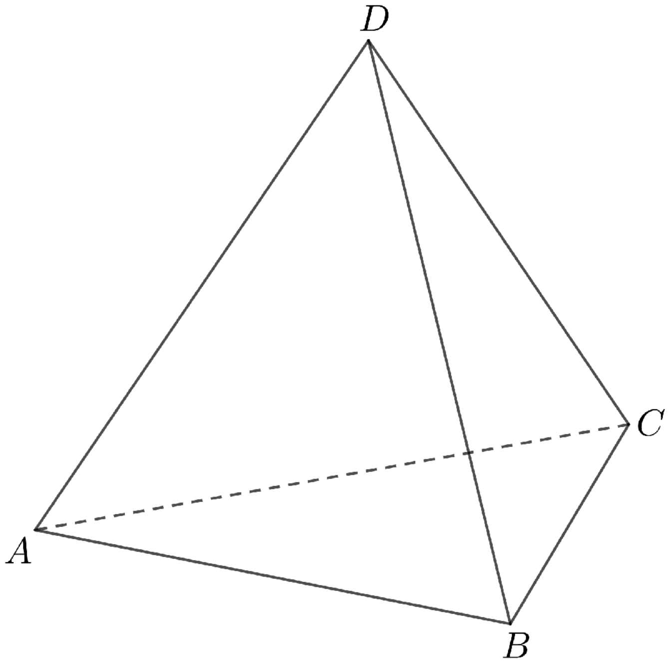
$$ABCD := \overrightarrow{BCDA} \cap \overrightarrow{CDAB} \cap \overrightarrow{DABC} \cap \overrightarrow{ABCD}.$$

V analytické geometrii je pak čtyřstěn jiné označení pro *uzavřený simplex*[1] v trojrozměrném prostoru.

Nyní uvedeme značení základních prvků čtyřstěnu a jejich značení, které budeme v této práci využívat (nebude-li uvedeno jinak).

Hranami čtyřstěnu $ABCD$ rozumíme úsečky AB, BC, CA, AD, BD, CD. Hrany

[1] Přesnou definici je možné nalézt např. v [6].



obr. 1.1

čtyřstěnu jsou po dvojicích buď různoběžné, nebo mimoběžné. *Protilehlé hrany* jsou dvojice hran AB, CD, resp. BC, AD, resp. CA, BD (obr. 1.1).

Stěnami čtyřstěnu $ABCD$ rozumíme čtveřici trojúhelníků ABC, BCD, CAD, ABD, které ve sjednocení tvoří hranici čtyřstěnu $ABCD$. *Protilehlými stěnami* po řadě *k vrcholům* A, B, C, D rozumíme po řadě stěny BCD, CAD, ABD, ABC.

Odchylku dvou stěn se společnou hranou AB nazýváme *stěnovým úhlem* AB a jeho velikost značíme φ_{AB}, analogicky definujeme i zbylých pět stěnových úhlů. Platí $0 < < \varphi_{XY} < 180°$ pro $X, Y \in \{A, B, C, D\}$, $X \neq Y$.

Mnoho analogických pojmů definovaných v trojúhelníku lze přirozeně zavést také u čtyřstěnu. Nejprve tyto pojmy definujeme a uvedeme některá tvrzení z nich plynoucí.

Je známo, že v libovolném trojúhelníku existuje právě jedna kružnice jemu opsaná a právě jedna kružnice jemu vepsaná. Střed kružnice opsané trojúhelníku nalezneme jako průsečík os jeho stran a střed kružnice vepsané pak jako průsečík os jeho vnitřních úhlů. Podobná tvrzení týkající se kulových ploch lze uvést také u čtyřstěnů.

Věta 1.1

V libovolném čtyřstěnu $ABCD$ existuje právě jedna kulová plocha procházející jeho vrcholy, tzv. *kulová plocha opsaná čtyřstěnu.*

Důkaz. Uvažujme libovolný čtyřstěn $ABCD$. Množina všech bodů stejně vzdálených od vrcholů A, B, C je přímka l kolmá na rovinu ABC. procházející průnikem os stran

AB, BC, CD. Bez újmy na obecnosti, nechť σ je rovina kolmá k hraně AD procházející středem S_{AD}. Rovina σ je zřejmě množinou bodů stejně vzdálených od vrcholů A, D. Je evidentní, že rovina σ není rovnoběžná s přímkou l, neboť vrchol D neleží v rovině ABC. To ale znamená, že σ a l jsou různoběžné a tedy, že existuje bod O takový, že $\sigma \cap l = \{O\}$. Bod O je tak středem kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$.

■

Poloměr kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$ značíme zpravidla R.

Věta 1.2

V libovolném čtyřstěnu $ABCD$ existuje právě jedna kulová plocha, dotýkající se stěn čtyřstěnu, tzv. *kulová plocha vepsaná čtyřstěnu.*

Důkaz. Nechť $ABCD$ je libovolný čtyřstěn. Uvažujme množinu bodů stejně vzdálených od stěn ABC, ABD. Je jí polorovina, označme ji ρ, půlící stěnovou odchylku φ_{AB}. Analogicky můžeme uvažovat poloroviny γ, resp. δ, které půlí odchylky φ_{BC}, resp. φ_{CA}. Je zřejmé, že tyto roviny jsou různoběžné a protínají se právě v jednom bodě, značíme S. Existuje tedy právě jeden střed kulové plochy vepsané čtyřstěnu $ABCD$.

■

Poloměr kulové plochy vepsané čtyřstěnu $ABCD$ budeme značit r.

Připomeňme následující tvrzení. V libovolném trojúhelníku ABC s délkami stran a, b, c platí pro poloměr r_1 kružnice vepsané vztah

$$r_1 = \frac{2S}{a+b+c},$$

kde S je obsah trojúhelníku ABC. Důkaz tohoto vztahu spočívá v rozdělení si trojúhelníku ABC na tři dílčí trojúhelníky pomocí os úhlů. Analogii tohoto vztahu lze najít také u čtyřstěnu pro poloměr kulové plochy vepsané.

Věta 1.3

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Označme V objem čtyřstěnu $ABCD$. Pro poloměr r kulové plochy vepsané čtyřstěnu $ABCD$ platí

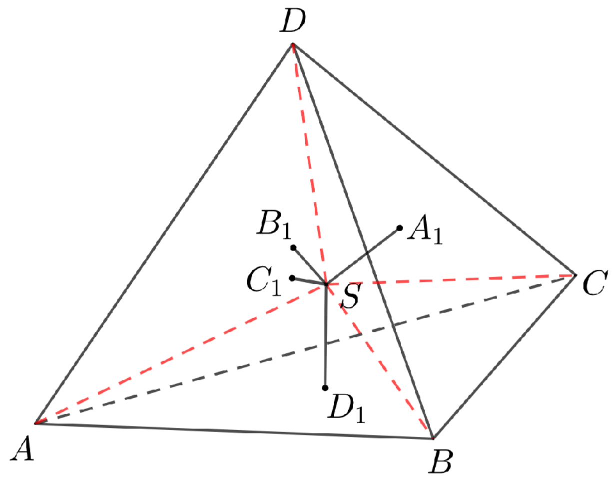
$$r = \frac{3V}{S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CAD} + S_{ABD}},$$

kde S_{ABC}, S_{BCD}, S_{CAD}, S_{ABD} jsou po řadě obsahy stěn ABC, BCD, CAD, ABD.

Důkaz. Označme S střed kulové plochy vepsané čtyřstěnu $ABCD$. Je zřejmé, že bod S je stejně vzdálen od každé ze stěn čtyřstěnu $ABCD$. Body dotyku kulové plochy vepsané se stěnami BCD, CAD, ABD, ABC označme po řadě A_1, B_1, C_1, D_1 (obr. 1.2). Označme dále S_{ABC}, S_{BCD}, S_{CAD}, S_{ABD} po řadě obsahy stěn ABC, BCD, CAD, ABD.

Rozdělme nyní čtyřstěn $ABCD$ na menší čtyřstěny $BCDS$, $CADS$, $ABDS$ a $ABCS$. Pro výšky $|SA_1|$, $|SB_1|$, $|SC_1|$, $|SD_1|$ v těchto čtyřstěnech evidentně platí

$$|SA_1| = |SB_1| = |SC_1| = |SD_1| = r.$$



obr. 1.2

Pro objem V čtyřstěnu $ABCD$ pak platí

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot r + \frac{1}{3}S_{BCD}\cdot r + \frac{1}{3}S_{CAD}\cdot r + \frac{1}{3}S_{ABD}\cdot r = \frac{1}{3}(S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CAD} + S_{ABD})\cdot r,$$

a tedy pro r dostaneme

$$r = \frac{3V}{S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CAD} + S_{ABD}}.$$

■

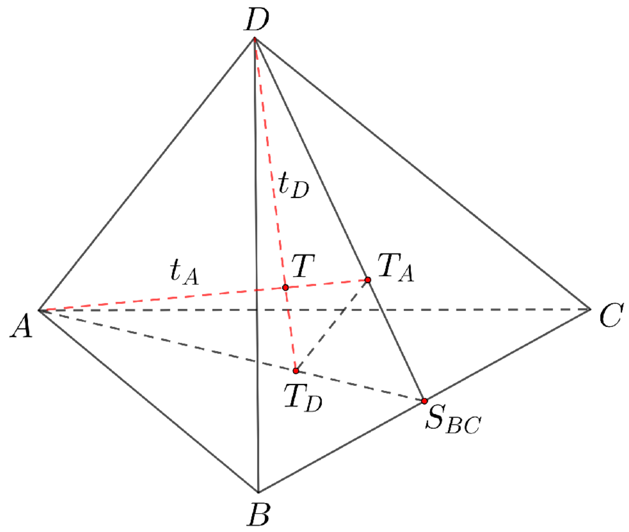
Stěny čtyřstěnu $ABCD$ jsou obecné trojúhelníky, přičemž v každém z nich existuje těžiště. Pomocí těžiště ve stěně čtyřstěnu můžeme zadefinovat těžnici čtyřstěnu. *Těžnicí* čtyřstěnu $ABCD$ rozumíme úsečku spojující vrchol čtyřstěnu s těžištěm jeho protilehlé stěny. Těžnice čtyřstěnu značíme (nebude-li uvedeno jinak) t_X, kde X je vrchol čtyřstěnu, z něhož těžnice vychází. V libovolném čtyřstěnu $ABCD$ tedy existují právě čtyři těžnice.

V trojúhelních platí, že se těžnice protínají v právě jednom bodě, těžišti trojúhelníku. Podobné tvrzení lze dokázat také pro těžnice u čtyřstěnu.

Věta 1.4

Nechť $ABCD$ je libovolný čtyřstěn. Platí, že těžnice t_A, t_B, t_C, t_D čtyřstěnu $ABCD$ se protínají v právě jednom bodě, značíme T (nazýváme *těžiště čtyřstěnu*), přičemž platí, že bod T dělí každou těžnici v poměru $3 : 1$.

Důkaz. Uvažujme libovolný čtyřstěn $ABCD$. Označme T_A, T_B, T_C, T_D po řadě těžiště stěn BCD, CAD, ABD, ABC. Uvažujme nyní trojúhelník $AS_{BC}D$. Je zřejmé, že DS_{BC}, resp. AS_{BC} jsou těžnicemi trojúhelníků BCD, resp. ABC (obr. 1.3). Těžnice t_A, t_D leží v trojúhelníku $AS_{BC}D$ a tedy existuje bod T, který je jejich průnikem (těžnice t_A, t_D nemohou být rovnoběžné).



obr. 1.3

Z vlastností těžnic trojúhelníku $AS_{BC}D$ plyne

$$|AS_{BC}| : |T_DS_{BC}| = 3 : 1, \qquad |DS_{BC}| : |T_AS_{BC}| = 3 : 1,$$

a tedy platí, že trojúhelníky $AS_{BC}D$ a $T_AT_DS_{BC}$ jsou si podobné s poměrem podobnosti $3 : 1$, tj. platí $|T_AT_D| : |AD| = 1 : 3$. Vzhledem k tomu, že platí $T_AT_D \parallel AD$ a zároveň $|\sphericalangle ATD| = |\sphericalangle T_ATT_D|$, jsou si podobné také trojúhelníky ADT, T_AT_DT s poměrem podobnosti $3 : 1$. To ale znamená, že

$$|AT| : |TT_A| = 3 : 1, \qquad |DT| : |TT_D| = 3 : 1,$$

tj. bod T dělí tělěsové těžnice t_A, t_D v poměru $3 : 1$.

Analogicky bychom uvažovali také dvojice těžnic t_A, t_B, resp. t_B, t_C, resp. t_B, t_D, resp. t_A, t_C, resp. t_C, t_D a dokázali, že se protínají v bodech T_1, resp. T_2, resp. T_3, resp. T_4, resp. T_5, přičemž tyto body je opět dělí v poměru 3 : 1. Pro čtyři navzájem různoběžné přímky v prostoru rozlišujeme právě dva případy. Jsou-li tyto přímky *komplanární* (všechny leží v jedné rovině), pak jsou jejich průniky obecně různé a pokud nejsou komplanární, pak nutně platí, že existuje jediný bod, který je jejich průnikem. Pro těžnice t_A, t_B, t_C, t_D může nastat pouze druhý případ, a tedy platí $T = T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_5$. Bod T je tedy společným průnikem všech těžnic a každou z nich dělí v poměru 3 : 1.

■

Podobně jako u trojúhelníku i zde můžeme definovat výšku čtyřstěnu. *Výškou* čtyřstěnu $ABCD$ z vrcholu A rozumíme úsečku spojující vrchol A s patou kolmice procházející tímto vrcholem k protilehlé stěně, značíme ji v_a. Analogicky definujeme také výšky v_b, v_c, v_d.

V libovolném trojúhelníku platí, že se výšky protínají v právě jednom bodě, které se nazývá *ortocentrum* trojúhelníku. Analogické tvrzení u čtyřstěnu však obecně neplatí. Existují však čtyřstěny, u kterých se výšky navzájem protínají v právě jednom bodě a lze u nich tak definovat ortocentrum. Takové čtyřstěny se nazývají *ortocentrické*. Následující věta, kterou uvádíme bez důkazu, je nutnou a postačující podmínkou proto, aby daný čtyřstěn byl ortocentrický.

Věta 1.5

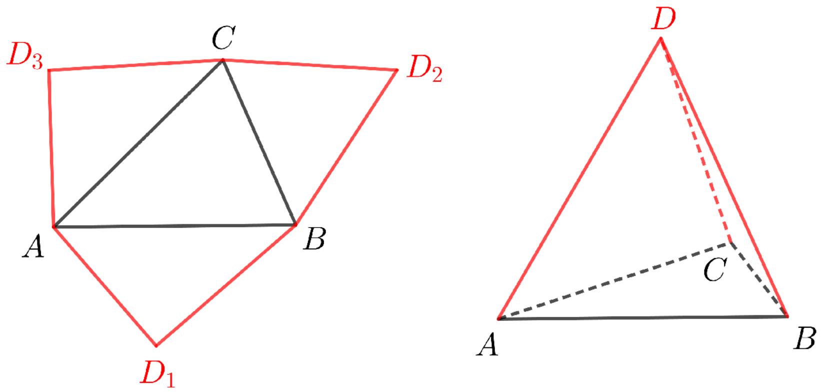
Čtyřstěn $ABCD$ je ortocentrický, právě když má alespoň dvě dvojice protilehlých hran navzájem kolmé.

Důkaz. Lze najít např. v [1].

1.2 Síť čtyřstěnu

Se sítěmi těles se žák setkává již na základní škole, kde je jeho cílem umět tyto sítě sestrojit. Obecně sítí čtyřstěnu rozumíme rovinný útvar, ze kterého můžeme vhodným složením obdržet čtyřstěn. Je zřejmé, že existuje více způsobů, jak pro daný čtyřstěn sestrojit síť. Ve všech těchto případech se ale vždy jedná o *n-úhelník*, tj. existuje obecně více n-úhelníků, které jsou sítěmi daného čtyřstěnu a nejsou *shodné*. Nyní uvedeme jeden konkrétní typ sítě čtyřstěnu, se kterým budeme v této kapitole pracovat.

Uvažujme čtyřstěn $ABCD$ (obr. 1.4). „Rozřízneme-li“ hrany AD, BD a CD, uvolníme tím stěny obsahující vrchol D a můžeme je pak rozvinout do roviny ABC. Vznikne tak *rovinný* útvar, který nazýváme *síť čtyřstěnu* (obr. 1.4).



obr. 1.4

Síť čtyřstěnu je tvořena čtyřmi trojúhelníky ABC, ABD_1, BCD_2, ACD_3, kde vrcholy D_1, D_2 a D_3 splynou při zpětném složení do vrcholu D. Trojúhelník ABC pak tvoří podstavu čtyřstěnu $ABCD$ a trojúhelníky ABD_1, BCD_2, CAD_3 představují stěny čtyřstěnu $ABCD$. Je evidentní, že pro každý čtyřstěn existuje síť. Opačné tvrzení obecně neplatí.

Nyní uvedeme nutné a postačující podmínky, aby mnohoúhelník na obr. 1.4 byl sítí čtyřstěnu.

Věta 1.6

Sjednocení trojúhelníků ABD_1, BCD_2, CAD_3 a ABC na obrázku 1.4 je sítí čtyřstěnu $ABCD$, právě když současně platí

(i) Úsečky, jejichž krajní body jsou (až na případný index) označeny stejnými písmeny, mají stejnou délku.

(ii) Každá z velikostí tří úhlů, které se stýkají při libovolném neindexovaném vrcholu, je menší než polovina součtu velikostí těchto tří úhlů.

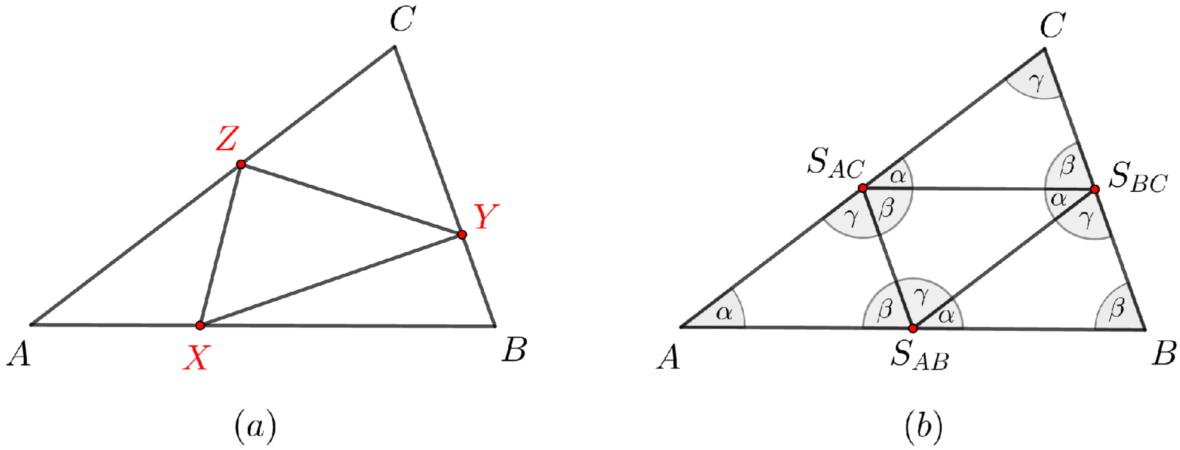
Důkaz. Lze nalézt např. v [10].

Uvažujme pravidelný čtyřstěn. Je známo, že sítí pravidelného čtyřstěnu je rovnostranný trojúhelník. Zabývejme se tedy otázkou, zdali je libovolný trojúhelník sítí čtyřstěnu.

Věta 1.7

Trojúhelník ABC je sítí čtyřstěnu $S_{AB}S_{BC}S_{AC}D$, kde S_{AB}, S_{BC}, S_{AC} jsou po řadě středy úseček AB, BC, AC, právě když je trojúhelník ABC *ostroúhlý* a platí, že ortogonální průmět vrcholu D do roviny $S_{AB}S_{BC}S_{AC}$ je ortocentrum V trojúhelníku ABC, viz obr. 1.6.

Důkaz. Nechť ABC je libovolný trojúhelník. Uvažujme body X, Y, Z po řadě na vnitřních úseček AB, BC, AC. Trojúhelníky AXZ, BYX, CZY a XYZ by mohly tvořit síť, přičemž součet velikostí každých tří úhlů stýkajících se u bodů X, Y, Z je 180°, viz obr. 1.5 (a).



obr. 1.5

Z věty 1.6 plyne, že pro body X, Y, Z musí platit

$$\big(|AX| = |XB|\big) \wedge \big(|BY| = |YC|\big) \wedge \big(|CZ| = |ZA|\big) ,$$

což platí, právě když $(X = S_{AB})$, $(Y = S_{BC})$ a $(Z = S_{AC})$.

Označme dále vnitřní úhly trojúhelníku ABC po řadě α, β, γ při vrcholech A, B, C. Stranami trojúhelníku $S_{AB}S_{BC}S_{AC}$ jsou střední příčky trojúhelníku ABC. Z vlastností středních příček trojúhelníku plyne, že u každého z bodů S_{AB}, S_{BC} a S_{CA} se stýkají úhly α, β, γ, a tedy platí, že součet velikostí tří úhlů přiléhajících ke každému z bodů S_{AB}, S_{BC} a S_{AC} je roven $\alpha + \beta + \gamma$, tj. 180°, viz obr. 1.5 (b).

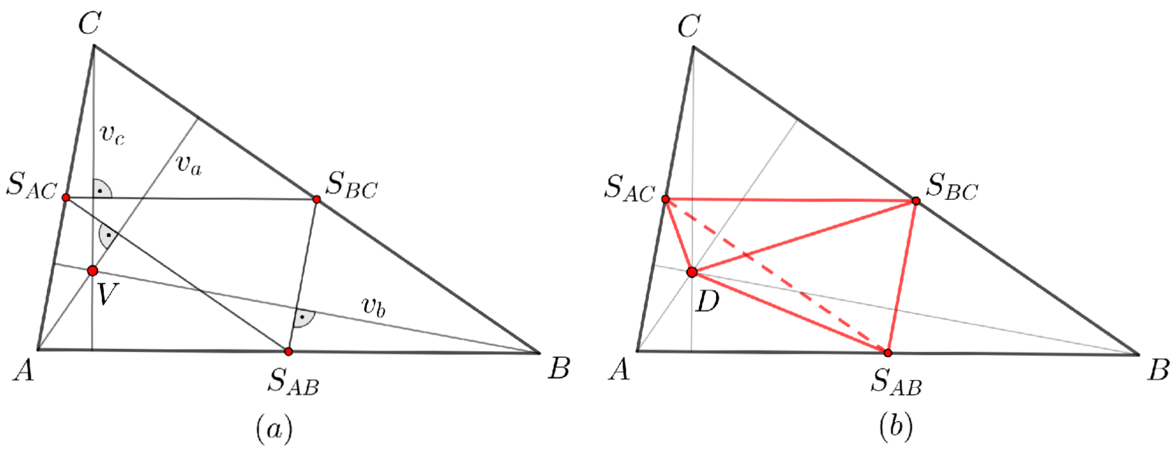
Tedy dostaneme, že trojúhelník ABC z obr. 1.5 (b) je (vzhledem k Větě 1.6) sítí čtyřstěnu, právě když

$$\left(\alpha < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right) \wedge \left(\beta < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right) \wedge \left(\gamma < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right),$$

tedy právě když jsou α, β, γ menší než $90°$, což je splněno, právě když je trojúhelník ABC ostroúhlý.

Trojúhelník ABC je tedy sítí čtyřstěnu, v němž je trojúhelník $S_{AB}S_{BC}S_{AC}$ podstavou a vrchol D vznikne splynutím vrcholů A, B, C v otočení kolem příslušných hran (jak je popsáno u obr. 1.4). Dokažme tedy, že ortocentrum V je ortogonálním průmětem vrcholu D do roviny určené body S_{AB}, S_{BC}, S_{AC}.

Vrcholy A, B, C se při otáčení pohybují po řadě po kružnicích k_A, k_B, k_C, které náleží rovinám označeným po řadě ρ, σ, δ, které jsou po řadě kolmé na střední příčky $S_{AB}S_{AC}$, $S_{AB}S_{BC}$ a $S_{AC}S_{BC}$. Z toho plyne, že ortogonální průmět rovin ρ, σ, δ do roviny podstavy splyne po řadě s výškami v_a, v_b, v_c v původním trojúhelníku ABC, viz obr. 1.6 (a). Protože se výšky v trojúhelníku ABC protínají právě v jednom bodě, ortocentru V, musí se zmíněné tři roviny protínat v jedné přímce, která prochází bodem V a je kolmá na podstavu. Vrchol D vznikne splynutím bodů A, B, C, tj. existuje společný průnik kružnic k_A, k_B, k_C.



obr. 1.6

To ale znamená, že vrchol D leží na kolmici k rovině podstavy procházející bodem V, a tedy platí, že ortogonálním průmětem bodu D do roviny $S_{AB}S_{BC}S_{AC}$ je právě bod V, viz obr. 1.6 (b).

■

Kapitola 2

Trojúhelník a čtyřstěn

Trojúhelník, resp. čtyřstěn je v analytické geometrii možné definovat jako uzavřený dvojrozměrný, resp. trojrozměrný simplex. I to je jedním z důvodů, proč existuje značná podobnost mezi vlastnostmi trojúhelníků a čtyřstěnů, přičemž některé takové vlastnosti byly uvedeny v předchozí kapitole. Díky těmto podobným (analogickým) vlastnostem jsme schopni zobecnit různá matematická tvrzení platná u trojúhelníků a nalézt tak jejich analogie také u čtyřstěnů. Matematická tvrzení platná v trojúhelnících, která zde zmíníme, vždy doplníme o jejich analogie ve čtyřstěnech. Poznamenejme, že důkazy tvrzení v trojúhelnících vynecháme, popř. pouze naznačíme, zatímco pro čtyřstěny vždy uvedeme celý důkaz.

2.1 Analogická tvrzení ve čtyřstěnu

Nejdříve se budeme zabývat analogiemi tzv. *trojúhelníkových nerovností*. Jedná se o nutné a postačující podmínky existence trojúhelníku.

Věta 2.1 (nutná a postačující podmínka existence trojúhelníku)

Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla. Trojúhelník ABC o stranách délek $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ existuje, právě když současně platí

$$a + b > c, \tag{2.1}$$

$$a + c > b, \tag{2.2}$$

$$b + c > a. \tag{2.3}$$

Tyto tři nerovnosti nazýváme trojúhelníkovými nerovnostmi.

S využitím věty 2.1 můžeme dokázat nutnou podmínku existence čtyřstěnu.

Věta 2.2 (nutná podmínka existence čtyřstěnu)

Je-li dán čtyřstěn $ABCD$ o hranách délek $a = |AB|$, $b = |AC|$, $c = |AD|$, $d = |BD|$, $e = |BC|$, $f = |CD|$, pak současně platí

$$a + b + c > \frac{1}{2}(d + e + f), \tag{2.4}$$

$$a + d + e > \frac{1}{2}(b + c + f), \tag{2.5}$$

$$b + e + f > \frac{1}{2}(a + c + d), \tag{2.6}$$

$$c + d + f > \frac{1}{2}(a + b + e). \tag{2.7}$$

Důkaz. Uvažujme čtyřstěn $ABCD$ s hranami délek $a = |AB|$, $b = |AC|$, $c = |AD|$, $d = |BD|$, $e = |BC|$, $f = |CD|$. V trojúhelnících ABC, resp. CAD, resp. ABD platí po řadě trojúhelníkové nerovnosti

$$a + b > e, \tag{2.8}$$

$$b + c > f, \tag{2.9}$$

$$a + c > d. \tag{2.10}$$

Sečtením levých a pravých stran nerovností (2.8), (2.9) a (2.10) dostaneme

$$2a + 2b + 2c > d + e + f,$$

což po úpravě dává

$$a + b + c > \frac{1}{2}(d + e + f).$$

Analogicky bychom i ve zbylých třech trojicích trojúhelníků využili trojúhelníkové nerovnosti a po stejných úpravách bychom obdrželi také vztahy (2.5), (2.6), (2.7).

■

Věta 2.3

Je dán trojúhelník ABC. Nechť X je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Pak platí, že součet vzdáleností bodu X od vrcholů A, B, C je vždy větší než polovina obvodu trojúhelníku ABC.

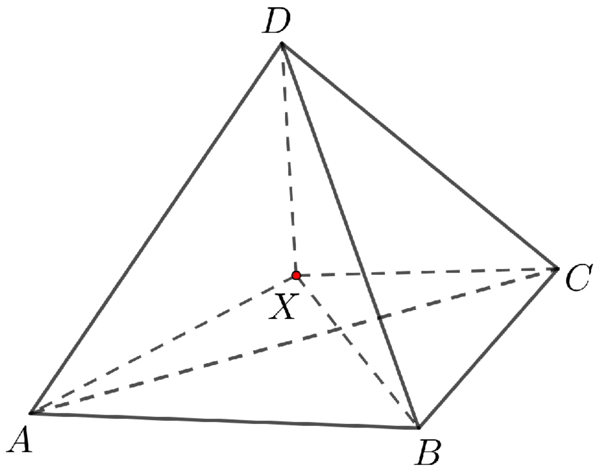
Důkaz. Využijeme zde trojúhelníkových nerovností v trojúhelnících ABX, ACX, BCX.

■

Věta 2.4

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Nechť X je libovolný vnitřní bod čtyřstěnu $ABCD$. Pak platí, že součet vzdáleností bodu X od vrcholů čtyřstěnu $ABCD$ je vždy větší než třetina součtu délek všech hran čtyřstěnu $ABCD$.

Důkaz. Nechť $ABCD$ je libovolný čtyřstěn. Zvolme libovolně bod X uvnitř čtyřstěnu $ABCD$ (obr. 2.1).



obr. 2.1

Uvažujme nyní čtyřstěny $ABCX$, $ABDX$, $ACDX$, $BCDX$. Vzhledem k Větě 2.2 pro ně po řadě platí

$$|AX| + |BX| + |CX| > \frac{1}{2}\big(|AB| + |BC| + |CA|\big),$$

$$|AX| + |BX| + |DX| > \frac{1}{2}\big(|AB| + |AD| + |BD|\big),$$

$$|AX| + |CX| + |DX| > \frac{1}{2}\big(|AD| + |CA| + |CD|\big),$$

$$|BX| + |CX| + |DX| > \frac{1}{2}\big(|BC| + |BD| + |CD|\big).$$

Sečtením levých a pravých stran předchozích čtyř nerovností, obdržíme

$$3\big(|AX|+|BX|+|CX|+|DX|\big) > \frac{1}{2}\big(2|AB|+2|BC|+2|CA|+2|AD|+2|BD|+2|CD|\big),$$

což po úpravě dává

$$|AX| + |BX| + |CX| + |DX| > \frac{1}{3}\big(|AB| + |BC| + |CA| + |AD| + |BD| + |CD|\big).$$

■

Následující dvojice tvrzení využívá libovolného bodu X ležícího nejen uvnitř trojúhelníku ABC, resp. čtyřstěnu $ABCD$, ale také na jejich hranici.

Věta 2.5

Pro libovolný trojúhelník ABC a libovolný bod X ležící uvnitř nebo na hranici trojúhelníku ABC platí

$$a \cdot l_a + b \cdot l_b + c \cdot l_c = 2S, \tag{2.11}$$

kde a, b, c jsou délky stran trojúhelníku ABC, l_a, l_b, l_c jsou po řadě vzdálenosti stran a, b, c od bodu X a S je obsah trojúhelníku ABC.

Důkaz. Trojúhelník ABC rozdělíme na trojúhelníky ABS, BCS, ACS a využijeme vztah pro obsah trojúhelníku.

Věta 2.6

Pro libovolný čtyřstěn $ABCD$ a libovolný bod X ležící uvnitř nebo na hranici čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$S_A \cdot l_A + S_B \cdot l_B + S_C \cdot l_C + S_D \cdot l_D = 3V, \tag{2.12}$$

kde S_A, S_B, S_C, S_D jsou po řadě obsahy stěn $BCDX$, $CADX$, $ABDX$, $ABCX$ a l_A, l_B, l_C, l_D jsou po řadě vzdálenosti těchto stěn od bodu X.

Důkaz. Nechť je dán libovolný čtyřstěn $ABCD$ a jeho libovolný vnitřní bod X. Uvažujme čtyřstěny $BCDX$, $CADX$, $ABDX$, $ABCX$ (obr. 2.1) a označme jejich objemy po řadě V_A, V_B, V_C, V_D. Čtyřstěn $ABCD$ je zjevně sjednocením čtyřstěnů $BCDX$, $CADX$, $ABDX$, $ABCX$ a pro jeho objem V tedy platí

$$V = V_A + V_B + V_C + V_D,$$

což vzhledem ke známému vztahu pro výpočet objemu čtyřstěnu dává

$$V = \frac{1}{3} S_A \cdot l_A + \frac{1}{3} S_B \cdot l_B + \frac{1}{3} S_C \cdot l_C + \frac{1}{3} S_D \cdot l_D. \tag{2.13}$$

Po zjevné úpravě vztahu (2.13) obdržíme námi dokazovaný vztah (2.12).

Nechť X je hraniční bod čtyřstěnu $ABCD$. Mohou nastat právě tři případy - bod X leží buď uvnitř stěny čtyřstěnu $ABCD$, nebo uvnitř hrany čtyřstěnu $ABCD$ a nebo je vrcholem čtyřstěnu $ABCD$.

(i) Bez újmy na obecnosti, nechť X leží ve stěně ABC. Pak ale čtyřstěn $ABCX$

zdegeneruje v trojúhelník ABC a platí $l_D = 0$. Analogickým postupem, jako v případě vnitřního bodu X, bychom obdrželi vztah (2.12).

(ii) Bez újmy na obecnosti, nechť X leží uvnitř hrany AB. Pak čtyřstěny $ABCX$, resp. $ABDX$ zdegenerují v trojúhelníky ABC, resp. ABD a platí tak $l_D = 0$, resp. $l_C = 0$. Analogicky, jako v předchozím případě, i zde bychom ověřili platnost vztahu (2.12).

(iii) Bez újmy na obecnosti, nechť $X = A$. Pak platí $l_B = l_C = l_D = 0$ a tedy platí $V = V_{BCDX} = \frac{1}{3} S_A \cdot l_A$, tj. $S_A \cdot l_A = 3V$.

■

Využitím vztahů (2.11) a (2.12) můžeme dokázat zajímavá tvrzení týkající se výšek v trojúhelníku, resp. výšek v čtyřstěnu.

Věta 2.7

Je dán trojúhelník ABC. Nechť X je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Nechť $v_{\min}$, resp. $v_{\max}$ je nejkratší, resp. nejdelší výška trojúhelníku ABC. Pak platí

$$v_{\min} \leqq l_a + l_b + l_c \leqq v_{\max}, \tag{2.14}$$

kde l_a, l_b, l_c jsou po řadě vzdálenosti stran a, b, c trojúhelníku ABC od bodu X.

Důkaz. Lze najít např. v [2].

Věta 2.8

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Nechť X je libovolný vnitřní bod čtyřstěnu $ABCD$. Nechť $v_{\min}$, resp. $v_{\max}$ je nejkratší, resp. nejdelší výška čtyřstěnu $ABCD$. Pak platí

$$v_{\min} \leqq l_A + l_B + l_C + l_D \leqq v_{\max}, \tag{2.15}$$

kde l_A, l_B, l_C, l_D jsou po řadě vzdálenosti stěn BCD, CAD, ABD, ABC od bodu X.

Důkaz. Nechť je dán čtyřstěn $ABCD$ a jeho libovolný vnitřní bod X. Uvažujme vztah (2.12). Bez újmy na obecnosti, nechť platí

$$S_A = \max\{S_A, S_B, S_C, S_D\}, \qquad S_D = \min\{S_A, S_B, S_C, S_D\}.$$

Ze vztahu (2.12) pak plyne

$$S_A \cdot l_A + S_A \cdot l_B + S_A \cdot l_C + S_A \cdot l_D \geqq 3V, \tag{2.16}$$

resp.

$$S_D \cdot l_A + S_D \cdot l_B + S_D \cdot l_C + S_D \cdot l_D \leqq 3V. \tag{2.17}$$

Nerovnosti (2.16), resp. (2.17) vydělíme výrazy S_A, resp. S_D, dostaneme

$$l_A + l_B + l_C + l_D \geqq \frac{3V}{S_A}, \tag{2.18}$$

resp.

$$l_A + l_B + l_C + l_D \leqq \frac{3V}{S_D}. \tag{2.19}$$

Vzhledem k tomu, že platí $S_A = \max\{S_A, S_B, S_C, S_D\}$, $S_D = \min\{S_A, S_B, S_C, S_D\}$, dostaneme že

$$\frac{3V}{S_A} = v_{\min}, \qquad \frac{3V}{S_D} = v_{\max}.$$

Ze vztahů (2.18), (2.19) pak plyne

$$v_{\min} \leqq l_A + l_B + l_C + l_D \leqq v_{\max},$$

což jsme měli dokázat.

■

Pomocí předchozích dvou tvrzení můžeme nyní najít vztah mezi výškami trojúhelníku, resp. čtyřstěnu a poloměrem kružnice vepsané trojúehlníku, resp. kulové plochy vepsané čtyřstěnu.

Věta 2.9

V libovolném trojúhelníku ABC platí

$$v_{\min} \leqq 3r \leqq v_{\max}, \tag{2.20}$$

kde r je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC a $v_{\min}$, resp. $v_{\max}$ je nejdelší, resp. nejkratší výška v trojúhelníku ABC.

Důkaz. Využijeme vztah (2.15) a fakt, že bod X je v tomto případě střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

Věta 2.10

V libovolném čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$v_{\min} \leqq 4r \leqq v_{\max}, \tag{2.21}$$

kde r je poloměr kulové plochy vepsané čtyřstěnu $ABCD$ a $v_{\min}$, resp. $v_{\max}$ je nejkratší, resp. nejdelší výška čtyřstěnu $ABCD$.

Důkaz. Uvažujme libovolný čtyřstěn $ABCD$. Podle věty 2.8 platí

$$v_{\min} \leqq l_A + l_B + l_C + l_D \leqq v_{\max}, \tag{2.22}$$

kde l_A, l_B, l_C, l_D jsou po řadě vzdálenosti stěn BCD, CAD, ABD, ABC od libovolnéého vnitřního bodu X čtyřstěnu $ABCD$. Nechť $X = S$, kde S je střed kulové plochy vepsané čtyřstěnu $ABCD$. Potom však platí

$$l_A = l_B = l_C = l_D = r, \tag{2.23}$$

a nerovnost (2.22) přejde do tvaru

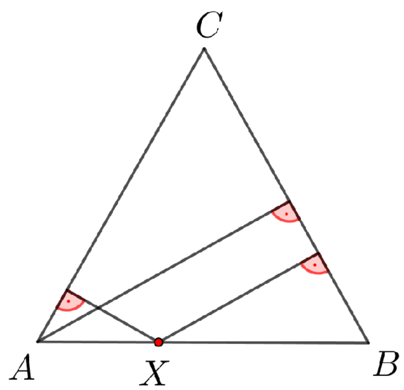
$$v_{\min} \leqq 4r \leqq v_{\max},$$

což jsme měli dokázat.

■

Věta 2.11

V každém rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB platí, že součet vzdáleností ramen trojúhelníku ABC od libovolného bodu X, ležícího na základně trojúhelníku ABC, je roven velikosti výšky k rameni trojúhelníku ABC (obr. 2.2).



obr. 2.2

Důkaz. Využijeme vztahu (2.11), přičemž platí, že $a = b$ a $l_c = 0$.

V předchozí větě jsme uvažovali libovolný bod X ležící na základně rovnoramenného trojúhelníku ABC. V rovnostranném trojúhelníku však platí ještě silnější tvrzení.

Věta 2.12

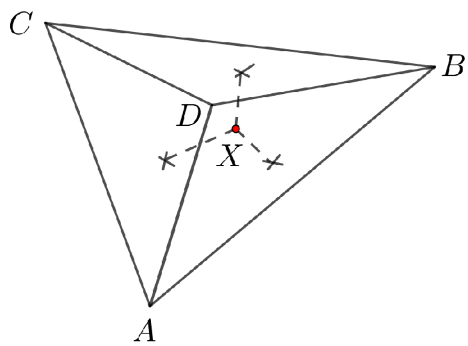
V každém rovnostranném trojúhelníku ABC je součet vzdáleností libovolného bodu X trojúhelníku ABC od stran trojúhelníku ABC roven délce výšky trojúhelníku ABC.

Důkaz. Opět využijeme vztahu (2.11), kde však platí $a = b = c$.

Pro analogické tvrzení k větě 2.11, resp. větě 2.12 využijeme označení obsahů stěn čtyřstěnu $ABCD$ z věty 2.6.

Věta 2.13

Nechť ve čtyřstěnu $ABCD$ existuje právě jedna trojice stěn se stejným obsahem. Bez újmy na obecnosti, nechť např. platí $S_A = S_B = S_C \neq S_D$. Pak pro libovolný bod X ležící ve stěně ABC platí, že součet vzdáleností bodu X od stěn BCD, CAD, ABD je roven délce výšky na stěnu BCD, resp. CAD, resp. ABD (obr. 2.3).



obr. 2.3

Důkaz. Uvažujme čtyřstěn $ABCD$, ve kterém mají právě tři stěny stejný obsah. Bez újmy na obecnosti, nechť platí $S_A = S_B = S_C \neq S_D$. Zvolme nyní libovolný bod X ležící ve stěně ABC. Pro bod X evidentně platí vztah (2.12), tj.

$$S_A \cdot l_A + S_B \cdot l_B + S_C \cdot l_C + S_D \cdot l_D = 3V,$$

kde po úpravě dostaneme

$$S_A \cdot l_A + S_A \cdot l_B + S_A \cdot l_C + S_D \cdot l_D = 3V. \tag{2.24}$$

Bod X však leží ve stěně ABC, tj. platí $l_D = 0$. Vztah (2.24) tak můžeme upravit do tvaru

$$S_A \cdot l_A + S_A \cdot l_B + S_A \cdot l_C = 3V,$$

a tedy platí

$$l_A + l_B + l_C = \frac{3V}{S_A} = v_a,$$

kde v_a je výška na stěnu BCD. Z rovnosti $S_A = S_B = S_C$ plyne také $v_a = v_b = v_c$, platí tedy

$$l_A + l_B + l_C = v_a = v_b = v_c.$$

■

Analogické tvrzení k větě 2.12 platí u čtyřstěnu, jehož stěny mají všechny stejný obsah.

Věta 2.14

Nechť je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož stěny mají stejný obsah. Pak pro jeho libovolný bod X platí, že součet vzdáleností bodu X od stěn čtyřstěnu $ABCD$ je roven délce výšky čtyřstěnu $ABCD$.

Důkaz. V čtyřstěnu $ABCD$ zjevně platí $S_A = S_B = S_C = S_D$. Ze vztahu (2.12) pak plyne

$$S_A \cdot l_A + S_A \cdot l_B + S_A \cdot l_C + S_A \cdot l_D = 3V,$$

tj.

$$l_A + l_B + l_C + l_D = \frac{3V}{S_A} = v_a = v_b = v_c = v_d,$$

kde l_A, l_B, l_C, l_D jsou vzdálenosti bodu X po řadě od stěn BCD, CAD, ABD, ABC.

Zajímejme se nyní o speciální případ ortocentrického čtyřstěnu, který má všechny tři úhly při daném vrcholu pravé. Tento čtyřstěn se nazývá *pravoúhlý čtyřstěn* a má vlastnosti analogické pravoúhlému trojúhelníku. Jedná se o zobecnění Pythagorovy věty.

Věta 2.15 (Pythagorova věta)

V každém pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C platí

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

kde c je délka přepony, a, b jsou délky odvěsen.

K důkazu tvrzení o pravoúhlém čtyřstěnu využijeme některé známé vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku.

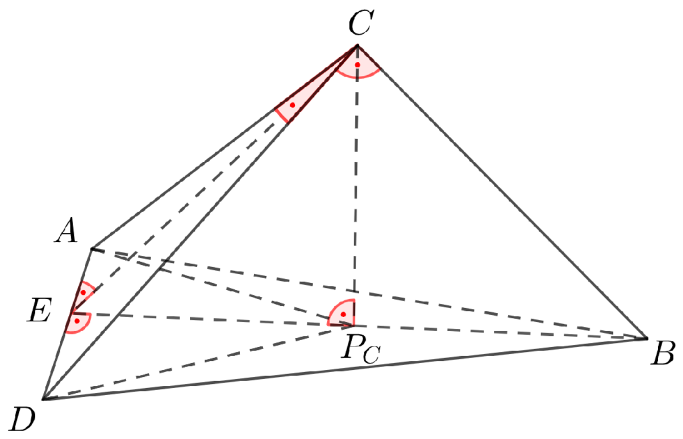
Věta 2.16

V každém pravoúhlém čtyřstěnu $ABCD$ s pravými úhly při vrcholu C platí

$$S_{ABD}^2 = S_{ABC}^2 + S_{BCD}^2 + S_{CAD}^2, \tag{2.25}$$

kde S_{ABD} je obsah nepravoúhlé stěny a S_{ABC}, S_{BCD}, S_{CAD} jsou obsahy stěn pravoúhlých.

Důkaz. Uvažujme čtyřstěn $ABCD$ s pravými úhly ve stěnách při vrcholu C. Nechť P_C je pata výšky z vrcholu C ke stěně ABD. Uvažujme rovinu BCP_C a její průsečík s hranou AD označme E (obr. 2.4). Je zřejmé, že platí $AD \perp BCP_C$. Úsečka EB je tedy výškou v trojúhelníku ABD ke straně AD.



obr. 2.4

Pro obsahy S_{CAD}, S_{AP_CD} a S_{ADB} trojúhelníků po řadě CAD, AP_CD, ADB platí

$$S_{CAD} = \frac{1}{2}|AD|\cdot|EC|, \qquad S_{AP_CD} = \frac{1}{2}|AD|\cdot|EP_C|, \qquad S_{ABD} = \frac{1}{2}|AD|\cdot|EB|.$$

Pak platí

$$S_{CAD}^2 = \frac{1}{4}|AD|^2\cdot|EC|^2, \qquad S_{AP_CD}^2 = \frac{1}{4}|AD|^2\cdot|EP_C|^2, \qquad S_{ABD}^2 = \frac{1}{4}|AD|^2\cdot|EB|^2.$$

Trojúhelník ECB je pravoúhlý, proto podle Eukleidovy věty o odvěsně platí

$$|EC|^2 = |EP_C|\cdot|EB|,$$

z čehož po dosazení za výrazy $|EC|^2$, $|EP_C|$ a $|EB|$ plyne

$$\frac{4S_{CAD}^2}{|AD|^2} = \frac{2S_{AP_CD}}{|AD|} \cdot \frac{2S_{ABD}}{|AD|},$$

tj.

$$S_{CAD}^2 = S_{AP_CD} \cdot S_{ABD}.$$

Analogickým postupem bychom obdrželi také vztahy

$$S_{DBC}^2 = S_{BP_CD} \cdot S_{ABD}, \quad S_{ABC}^2 = S_{AP_CB} \cdot S_{ABD}.$$

Sečtením tří předchozích rovností dostaneme

$$\begin{aligned} S_{CAD}^2 + S_{BCD}^2 + S_{ABC}^2 &= S_{AP_CD} \cdot S_{ABD} + S_{BP_CD} \cdot S_{ABD} + S_{AP_CB} \cdot S_{ABD} = \\ &= \left(S_{AP_CD} + S_{BP_CD} + S_{AP_CB}\right) \cdot S_{ABD} = S_{ABD}^2, \end{aligned}$$

což je námi dokazovaná rovnost.

■

Věta 2.17

Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C. Pak platí

$$\frac{1}{{v_c}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \tag{2.26}$$

kde a, b jsou délky odvěsen trojúhelníku ABC a v_c je délka výšky trojúhelníku ABC vedené z vrcholu C.

Analogii vztahu (2.26) lze nalézt také u pravoúhlého trojrohu. K tomu mimo jiné využijeme vztah (2.25).

Věta 2.18

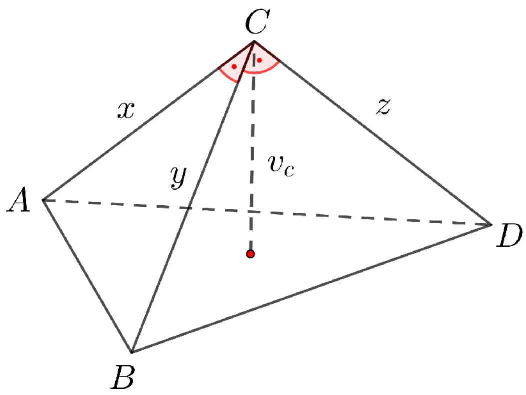
V každém pravoúhlém čtyřstěnu s pravými úhly ve stěnách při vrcholu C platí

$$\frac{1}{{v_c}^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}, \tag{2.27}$$

kde x, y, z jsou po řadě délky hran CA, BC, CD a v_c je délka výšky čtyřstěnu $ABCD$ vedená z vrcholu C.

Důkaz. Nechť je dán pravoúhlý čtyřstěn $ABCD$ s pravými úhly ve stěnách při vrcholu C. Označme délky hran CA, BC, CD po řadě x, y, z. Ve čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$S_{ABD}^2 = S_{ABC}^2 + S_{BCD}^2 + S_{ACD}^2. \tag{2.28}$$



obr. 2.5

Protože stěny ABC, CAD, BCD jsou pravoúhlé trojúhelníky, můžeme pro jejich obsahy psát

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}xy, \qquad S_{CAD} = \frac{1}{2}xz, \qquad S_{BCD} = \frac{1}{2}yz.$$

Využitím těchto tří rovností upravíme vztah (2.28) do tvaru

$$4S_{ABD}^2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2. \tag{2.29}$$

Pro objem V čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$V = \frac{xyz}{6},$$

tj. pro výraz V^2 pak dostaneme

$$V^2 = \frac{x^2y^2z^2}{36}. \tag{2.30}$$

Podělením levých a pravých stran rovností (2.29) a (2.30) a po úpravě dostaneme

$$\frac{S_{ABD}^2}{9V^2} = \frac{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}{x^2y^2z^2},$$

odkud vzhledem rovnosti $v_c = \frac{3V}{S_{ABD}}$ plyne

$$\frac{1}{{v_c}^2} = \frac{S_{ABD}^2}{9V^2} = \frac{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}{x^2y^2z^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2},$$

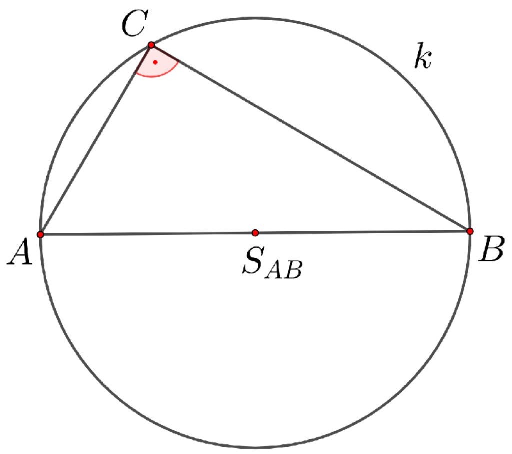
což jsme měli dokázat.

■

Velice zajímavé je tvrzení, které zobecňuje tzv. *Thaletovu větu*.

Věta 2.19 (Thaletova věta)

Je dána úsečka AB a kružnice $k(S_{AB}; |AB|/2)$. Pak pro libovolný bod C různý od bodů A, B a ležící na kružnici k platí, že trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C (obr. 2.6).



obr. 2.6

Následující věta, která je analogií Thaletovy věty, je převzata z [21]. Důkaz tohoto tvrzení je však komplikovaný a proto ho v tomto textu neuvedeme.

Věta 2.20

V rovině ρ je dána kružnice $k(S; r)$. Množina všech bodů v prostoru, které jsou vrcholy pravoúhlého čtyřstěnu $ABCD$ s pravými úhly při vrcholu D a dále s vlastností, že k je kružnicí vepsanou stěně ABC, je kulová plocha $\kappa(S; r\sqrt{2})$ s vyjmutou hlavní kružnicí v rovině ρ.

Důkaz. Lze nalézt např. v [24].

Kapitola 3

Úlohy o čtyřstěnu

Tato kapitola představuje těžiště celé práce, zabývá se konkrétními úlohami o čtyřstěnu. Jedná se nejen o ryze stereometrické úlohy, ale také o úlohy řešené algebraicky využívající základních vlastností u čtyřstěnu. Kapitola je rozdělena do dvou částí, přičemž první z nich obsahuje úlohy řešené a druhá část úlohy neřešené. Řazení úloh v části „Řešené úlohy“ odpovídá jejich obtížnosti, přičemž nejprve jsou řazeny úlohy snažší a postupně se jejich obtížnost zvyšuje. Úlohy využívající podobných metod řešení, popř. zabývající se stejným typem čtyřstěnu, atd. jsou taktéž uspořádány v blocích. V takovém případě je vždy v textu uvedeno, jakým typem problému se dané úlohy zabývají. Struktura podkapitoly „Neřešené úlohy“ je pak popsána samostatně.

3.1 Řešené úlohy

První tři úlohy se zabývají tzv. *pravoúhlým čtyřstěnem.*

Příklad 1 (Matematický duel, 2013)

Je dána soustava dvou rovnic o neznámých x, y, z

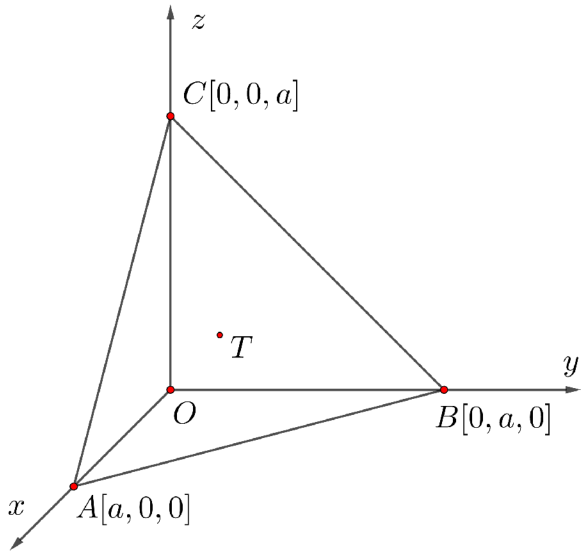
$$x + y + z = a, \tag{3.1}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \tag{3.2}$$

kde a, b jsou reálné parametry. Dokažte, že soustava rovnic má reálná řešení, právě když je splněna nerovnost

$$|a| \leqq |b|\sqrt{3}. \tag{3.3}$$

Řešení: Nechť platí $a \geqq 0$. Rovnice (3.1) s reálným parametrem a, je obecnou rovnicí roviny v třírozměrném eukleidovském prostoru s počátkem O procházející body $A[a,0,0]$, $B[0,a,0]$, $C[0,0,a]$. Body A, B, C, O tvoří pravoúhlý čtyřstěn $ABCO$ (obr. 3.1), jehož hrany při vrcholu O mají stejnou délku a.



obr. 3.1

Rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ s reálným parametrem b je obecná rovnice kulové plochy v počátku O s poloměrem $|b|$. Nechť T je ortocentrum trojúhelníku ABC. Označme vzdálenost $|OT| = d$. Je zřejmé, že d je výška čtyřstěnu $ABCO$ s podstavou ABC. Pro objem V čtyřstěnu $ABCO$ plyne

$$V = \frac{1}{6}\,a^3 = \frac{1}{3}P\cdot d,$$

kde P je obsah trojúhelníku ABC (ten je evidentně rovnostranný). Je zřejmé, že trojúhelník ABC je rovnostranný s délkou hrany $\sqrt{2}a$. Odtud plyne

$$P = \frac{1}{2}\,a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\,a^2\sqrt{3}.$$

Pro objem V čtyřstěnu $ABCO$ tedy platí

$$V = \frac{1}{6}\,a^3 = \frac{1}{6}\,a^2 d\sqrt{3},$$

z čehož plyne

$$d = \frac{\sqrt{3}}{3}\,a.$$

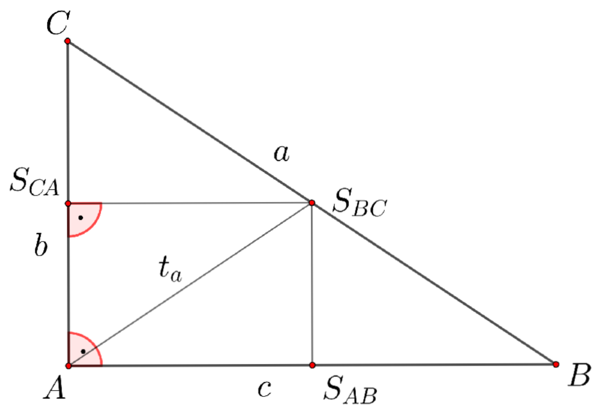
Soustava rovnic má tedy reálná řešení, právě když existují průniky kulové plochy a roviny, tj. právě když $d \leqq |b|$, tedy $\frac{\sqrt{3}}{3}\,|a| \leqq |b|$, což je ekvivalentní $|a| \leqq |b|\sqrt{3}$.

$\blacksquare$

Příklad 2 (Matematický duel, 2014)

Nechť čtyřstěn $ABCD$ má po dvou navzájem kolmé hrany při vrcholu D a označme K, L, M po řadě středy hran AB, BC, CA. Dokažte, že součet velikostí úhlů ve stěnách čtyřstěnu $KLMD$ při vrcholu D je 180°.

Řešení: Odvoďme nejdříve vztah mezi velikostí těžnice t_a v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A (obr. 3.2).



obr. 3.2

Z Pythagorovy věty plyne

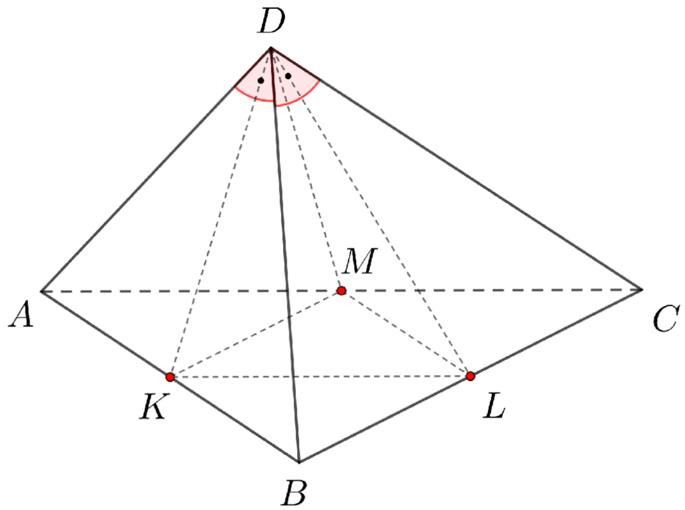
$$t_a{}^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

tedy

$$4t_a{}^2 = b^2 + c^2 = a^2,$$

z čehož plyne $t_a = \frac{a}{2}$. Tohoto poznatku nyní využijeme.

Čtyřstěn $ABCD$ tvoří pravoúhlé trojúhelníky ABD, BCD, CAD s pravými úhly při vrcholu D (obr. 3.3),



obr. 3.3

tedy platí vztahy

$$|KD| = \tfrac{1}{2}|AB|, \qquad |LD| = \tfrac{1}{2}|BC|, \qquad |MD| = \tfrac{1}{2}|CA|.$$

Z toho plyne, že $|KD| = |KB|$, $|LD| = |LB|$, a tedy trojúhelníky KLB a KLD jsou shodné podle věty sss. Obdobnou úvahou dostaneme, že také trojúhelníky MLC, MLD a KMA, KMD jsou shodné. Proto platí

$$\begin{aligned}|\sphericalangle KDL| + |\sphericalangle MDL| + |\sphericalangle KDM| &= |\sphericalangle KBL| + |\sphericalangle MCL| + |\sphericalangle KAM| = \\ &= |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle CAB| = 180^\circ.\end{aligned}$$

■

Řešení následující úlohy vyžaduje znalost Heronova vzorce pro obsah trojúhelníku a také znalost nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

Příklad 3 (40. MO, A-S-3)

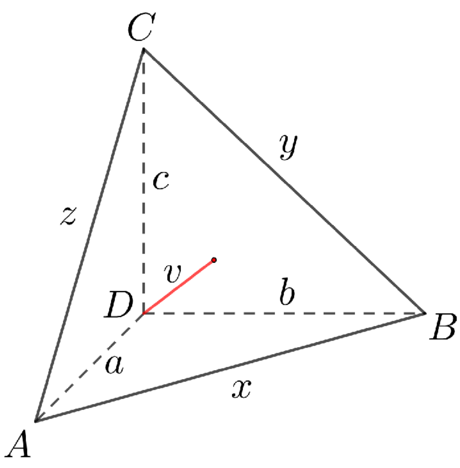
Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany AD, BD, CD po řadě s délkami a, b, c jsou navzájem kolmé. Určete velikost výšky v_d ke stěně ABC. Dokažte, že čtyřstěn $ABCD$ má při dané hodnotě výšky v_d nejmenší objem, právě když $a = b = c$.

Řešení: Pro objem V čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot v_d, \tag{3.4}$$

kde S je obsah podstavy ABC a v je výška čtyřstěnu $ABCD$ na stěnu ABC. Protože je čtyřstěn $ABCD$ trojnásob pravoúhlý (obr. 3.4), tak pro objem V platí

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot v_d = \frac{1}{6} abc. \tag{3.5}$$



obr. 3.4

Označme délky hran AB, BC, AC po řadě x, y, z. Pro obsah S trojúhelníku ABC dle Heronova vzorce platí

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{\left[(x+y)^2 - z^2\right]\cdot\left[z^2 - (x-y)^2\right]} \tag{3.6}$$

S využitím Pythagorovy věty v pravoúhlých trojúhelnících ABC, BCD, CAD upravujeme rovnost (3.6), postupně získáme

$$\begin{aligned} S_{ABC} = \frac{1}{4}\sqrt{\left[\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}\right)^2 - \left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^2\right]}\cdot \\ \cdot\sqrt{\left[\left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^2 - \left(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{b^2+c^2}\right)^2\right]} = \\ = \frac{1}{4}\sqrt{\left[2b^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}\right]\cdot\left[2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}-2b^2\right]} = \\ = \frac{1}{4}\sqrt{4(a^2+b^2)(b^2+c^2)-4b^4} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}. \end{aligned}$$

Ze vztahu (3.5) s využitím předešlého vztahu pro S_{ABC} a pro výšku v_d postupně obdržíme

$$v_d = \frac{1}{2}\frac{abc}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}\frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}} = \frac{abc}{abc\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}}} \tag{3.7}$$

Z nerovnosti mezi aritmetickým a gemetrickým průměrem pro hodnoty $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ dostaneme

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geqq \sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}, \tag{3.8}$$

tj.

$$abc \geqq \frac{3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right)^3} = 3\sqrt{3}v^3.$$

Pro objem V čtyřstěnu $ABCD$ dostaneme

$$V = \frac{1}{6}abc \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}{v_d}^3. \tag{3.9}$$

Objem V je pro danou výšku v_d nejmenší, právě když v nerovnosti (3.9) nastane rovnost, tj. právě když nastane rovnost v (3.8), tedy právě když platí $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$, což je ekvivalentní podmínce $a = b = c$.

■

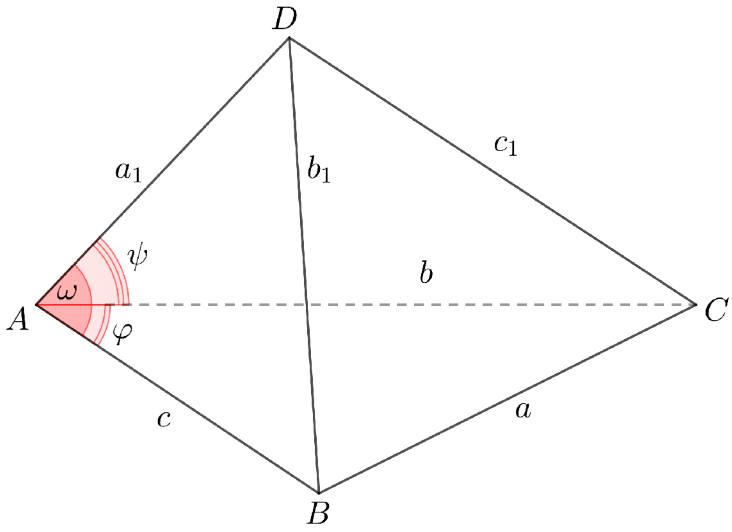
Příklad 4 (16. MO, A-III-2)

Nechť pro délky hran čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2. \tag{3.10}$$

Dokažte, že aspoň jedna z jeho stěn je ostroúhlý trojúhelník.

Řešení: Označme délky hran AB, BC, CA, CD, AD, BD po řadě c, a, b, c_1, a_1, b_1 a velikosti úhlů $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CAD$ po řadě ω, φ, ψ (obr. 3.5).



obr. 3.5

Rovnost (3.10) lze tedy zapsat ve tvaru

$$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2. \tag{3.11}$$

S využitím kosinové věty v trojúhelnících ABC, CAD, ABD dostaneme pro ω, φ, ψ vztahy

$$2bc\cos\varphi = b^2 + c^2 - a^2, \tag{3.12}$$

$$2ba_1\cos\psi = b^2 + a_1^2 - c_1^2, \tag{3.13}$$

$$2ca_1\cos\omega = c^2 + a_1^2 - b_1^2. \tag{3.14}$$

Ekvivalentními úpravami rovností (3.11) dostaneme

$$c^2 + a_1^2 - b_1^2 = b^2 + c^2 - a^2,$$

$$b^2 + a_1^2 - c_1^2 = b^2 + c^2 - a^2,$$

z čehož plyne rovnost pravých stran rovností (3.12), (3.13) a (3.14) a tedy platí

$$2bc\cos\varphi = 2ba_1\cos\psi = 2ca_1\cos\omega.$$

Z rovností výše plyne, že hodnoty $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\omega$ jsou současně nulové, resp. kladné, resp. záporné, tj. platí

$$\varphi = \psi = \omega = 90^\circ,$$

resp.

$$\big(0^\circ < \varphi < 90^\circ\big) \wedge \big(0^\circ < \psi < 90^\circ\big) \wedge \big(0^\circ < \omega < 90^\circ\big),$$

resp.

$$\big(90^\circ < \varphi < 180^\circ\big) \wedge \big(90^\circ < \psi < 180^\circ\big) \wedge \big(90^\circ < \omega < 180^\circ\big).$$

Analogickým postupem obdržíme stejné tvrzení i o úhlech při vrcholech B, C, D.

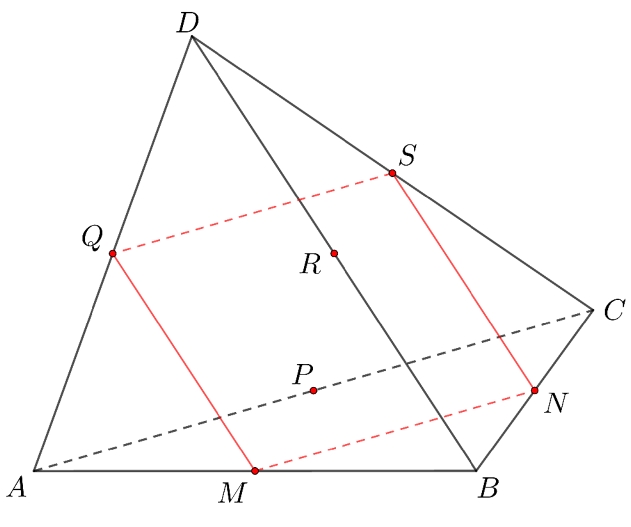
Trojúhelník ABC je obecně ostroúhlý, tupoúhlý, nebo pravoúhlý. Je-li trojúhelník ABC ostroúhlý, je důkaz hotov. Nechť je tedy trojúhelník ABC pravoúhlý nebo tupoúhlý, tj. právě jeden jeho vnitřní úhel je pravý, nebo větší než 90°. Bez újmy na obecnosti, nechť $\varphi \geqq 90^\circ$. Pak ale také platí $\omega \geqq 90^\circ$, $\psi \geqq 90^\circ$, a proto jsou zbylé vnitřní úhly trojúhelníků ABC, ABD a ACD ostré. Z toho však plyne, že všechny vnitřní úhly trojúhelníku BCD jsou ostré, tj. trojúhelník BCD je ostroúhlý.

■

Příklad 5 (15. MO, B-I-6b)

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Odvoďte vztah pro vzdálenost středů hran AB, CD čtyřstěnu $ABCD$ pomocí délek všech jeho stran.

Řešení: Označme body M, N, P, Q, R, S po řade středy hran AB, BC, CA, AD, BD, CD (obr. 3.6).



obr. 3.6

Z vlastností středních příček trojúhelníku plyne, že

$$|MN| = |SQ| = \tfrac{1}{2}|AC|, \qquad |MQ| = |NS| = \tfrac{1}{2}|BD|, \tag{3.15}$$

a dále, že $MN \parallel SQ$ a $MQ \parallel NS$. Čtyřúhelník $MNSQ$ je tedy rovnoběžník. Analogicky platí, že i čtyřúhelníky $NPQR$, $MRSP$ jsou rovnoběžníky.

Zaveďme dále následující označení, $|MN| = |SQ| = a$, $|NS| = |MQ| = b$, $|MS| = e$, $|NQ| = f$. Nechť v je vzdálenost vrcholu S od paty kolmice na stranu MN procházející vrcholem S a x nechť je vzdálenost vrcholu N od paty kolmice na stranu MN procházející vrcholem S (obr. 3.7).

Hledejme vztah mezi délkami úhlopříček$e$, f a délkami stran a, b ve čtyřúhelníku $MNSQ$. Z obr. 3.7 je zřejmé, že platí

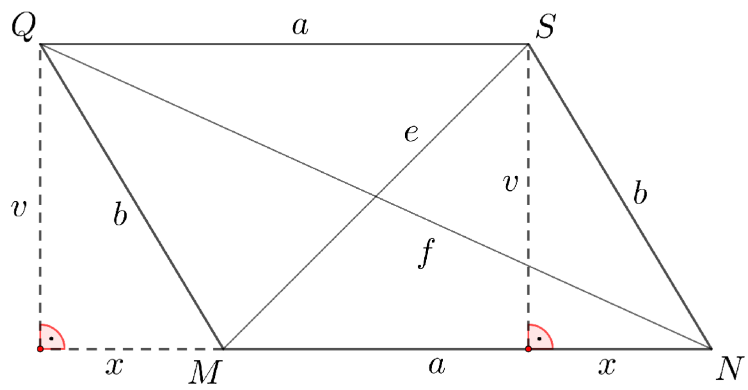
$$f^2 = v^2 + (a+x)^2, \qquad b^2 = v^2 + x^2.$$

Odečtením levých a pravých stran posledních dvou rovností obdržíme

$$f^2 - b^2 = a^2 + 2ax. \tag{3.16}$$

Analogicky dostaneme

$$e^2 - b^2 = a^2 - 2ax. \tag{3.17}$$



obr. 3.7

Sečtěním rovností (3.16) a (3.17) získáme vztah

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2),$$

tj. s využitím (3.15) dostaneme

$$|MS|^2 + |NQ|^2 = 2\big(|MN|^2 + |MQ|^2\big) = \tfrac{1}{2}|AC|^2 + \tfrac{1}{2}|BD|^2. \tag{3.18}$$

Analogickým postupem pro rovnoběžníky $NPQR$, $MRSP$ obdržíme po řadě vztahy

$$|NQ|^2 + |PR|^2 = 2\big(|NP|^2 + |NR|^2\big) = \tfrac{1}{2}|CD|^2 + \tfrac{1}{2}|AB|^2, \tag{3.19}$$

$$|MS|^2 + |PR|^2 = 2\big(|MR|^2 + |MP|^2\big) = \tfrac{1}{2}|AD|^2 + \tfrac{1}{2}|BC|^2. \tag{3.20}$$

Sečtením (3.18) a (3.20) a odečtením (3.19) obdržíme

$$2|MS|^2 = \tfrac{1}{2}|AC|^2 + \tfrac{1}{2}|BD|^2 + \tfrac{1}{2}|AD|^2 + \tfrac{1}{2}|BC|^2 - \tfrac{1}{2}|CD|^2 - \tfrac{1}{2}|AB|^2,$$

tedy

$$|MS| = \tfrac{1}{2}\sqrt{|AC|^2 + |BD|^2 + |AD|^2 + |BC|^2 - |CD|^2 - |AB|^2}.$$

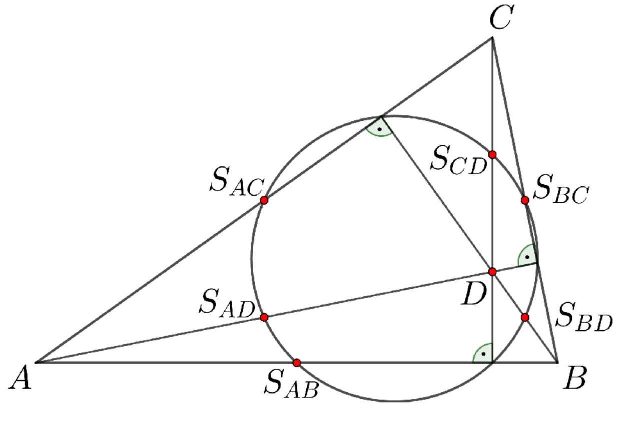
■

Příklad 6 (17. MO, A-III-4)

Dokažte, že pro čtyři různé body A, B, C, D dané v prostoru, pro něž platí $AC \perp \perp BD$, $AD \perp BC$, existuje kulová plocha, procházející středy všech úseček AB, BC, CD, CA, AD, BD.

Řešení: Pokud by dané body ležely v jedné přímce, platilo by $CA \parallel BD \parallel AD \parallel BC$, což je spor se zadáním a tento případ tedy nenastane.

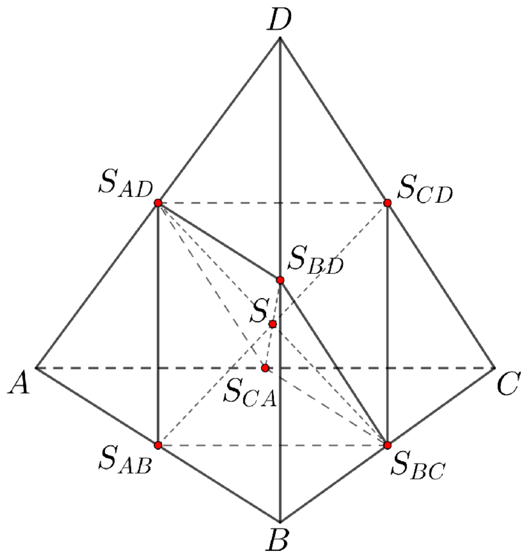
Nechť jsou body A, B, C, D komplanární (leží všechny v jedné rovině) a platí $CA \perp \perp BD$, $AD \perp BC$. Z toho vyplývá, že body A, B, C, D tvoří trojúhelník ABC s ortocentrem D (obr. 3.8), resp. trojúhelník ABD s ortocentrem C, resp. trojúhelník BCD s ortocentrem A, resp. trojúhelník CAD s ortocentrem B.



obr. 3.8

Zaveďme označení podle obrázku (3.8), tj. středy úseček AB, BC, CD, CA, AD, BD označme po řadě S_{AB}, S_{BC}, S_{CD}, S_{CA}, S_{AD}, S_{BD}. Jak je vidět na obrázku (3.8), zmíněné středy úseček leží na společné kružnici, která se nazývá *Feuerbachova kružnice*[1]. Existuje tedy nekonečně mnoho kulových ploch, pro něž je Feuerbachova kružnice řezem, tj. existuje nekonečně mnoho kulových ploch, na kterých leží body S_{AB}, S_{BC}, S_{CD}, S_{CA}, S_{AD}, S_{BD}. Analogický výsledek obdržíme i pro zbylé tři případy.

Nechť body A, B, C, D neleží v jedné rovině a platí $CA \perp BD$, $AD \perp BC$. Body A, B, C, D podle věty 1.5 tvoří vrcholy ortocentrického čtyřstěnu $ABCD$ (obr. 3.9).



obr. 3.9

Z vlastnosti středních příček trojúhelníku plyne

$$\left(S_{AB}S_{AD} \parallel S_{BC}S_{CD}\right) \wedge \left(S_{AB}S_{BC} \parallel S_{AD}S_{CD}\right),$$

tj. čtyřúhelník $S_{AB}S_{BC}S_{CD}S_{AD}$ je rovnoběžník. Označme průsečík jeho úhlopříček S. Dále platí

$$AC \perp BD \Rightarrow S_{AB}S_{BC} \perp BD \Rightarrow S_{AB}S_{BC} \perp S_{BC}S_{CD},$$

tedy rovnoběžník $S_{AB}S_{BC}S_{CD}S_{AD}$ je obdélník a platí $SS_{AB} = SS_{BC} = SS_{CD} = SS_{AD}$. Analogicky dokážeme, že čtyřúhelník $S_{CA}S_{BC}S_{BD}S_{AD}$ je obdélník, jehož průsečíkem úhlopříček je bod S a analogicky platí $SS_{CA} = SS_{BC} = SS_{BD} = SS_{AD}$.

Body S_{AB}, S_{BC}, S_{CD}, S_{CA}, S_{AD}, S_{BD} leží všechny ve stejné vzdálenosti od bodu S, tj. existuje jim společná kulová plocha se středem S

■

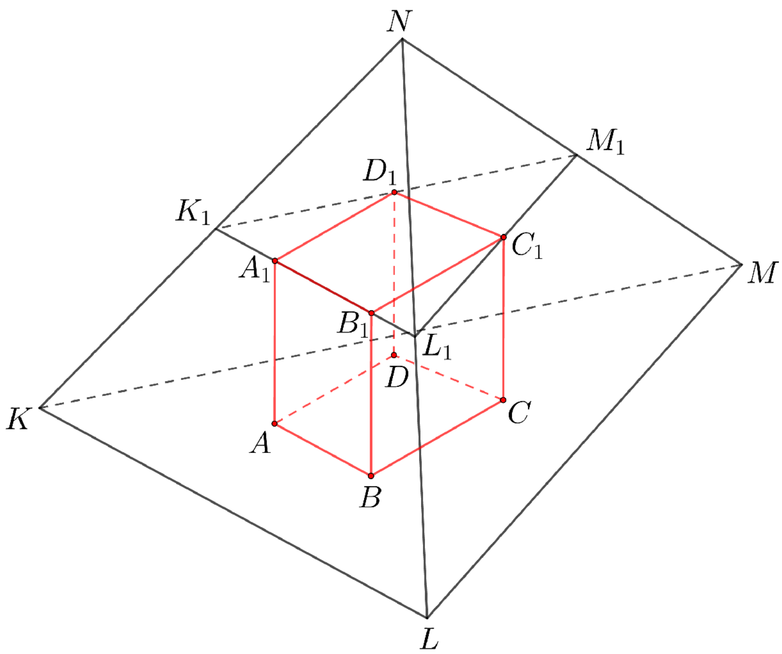
[1] Feuerbachova kružnice trojúhelníku ABC prochází těmito deviti body: a) středy stran S_{AB}, S_{BC}, S_{CA}, b) středy úseček určené vrcholy a ortocentrem a c) patami výšek trojúhelníku ABC.

Nyní uvedeme úlohu zabývající se existencí krychle určitých vlastností vepsané do čtyřstěnu.

Příklad 7 (24. MO A-II-1a)

Je dán pravidelný čtyřstěn $KLMN$ o hraně délky 1. Dokažte, že každá krychle, jejíž čtyři vrcholy leží ve stěně KLM a zbylé čtyři v dalších třech stěnách čtyřstěnu, má hranu délky méně než $\frac{1}{3}$.

Řešení: Uvažujme krychli $ABCDA_1B_1C_1D_1$, která splňuje podmínky zadání. Bez újmy na obecnosti, nechť stěna $ABCD$ leží v podstavě KLM čtyřstěnu $KLMN$. Stěna $A_1B_1C_1D_1$ určuje rovinu, která je rovnoběžná s rovinou KLM (obr. 3.10).



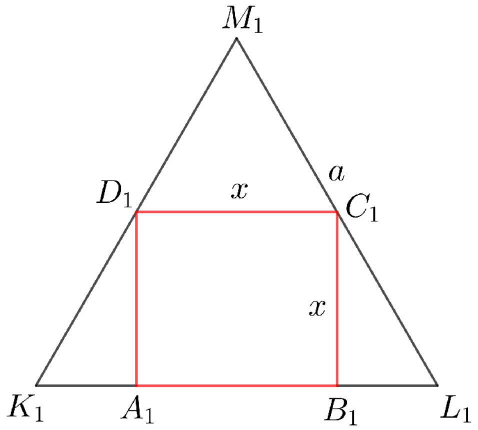
obr. 3.10

Body A_1, B_1, C_1, D_1 leží ve stránách rovnostranného trojúhelníku $K_1L_1M_1$, který je průnikem roviny $A_1B_1C_1$ a čtyřstěnu $KLMN$. Stěna $A_1B_1C_1D_1$ je vepsána trojúhelníku $K_1L_1M_1$ tak, že právě jedna strana čtverce $A_1B_1C_1D_1$ leží celá na jeho hranici.

Bez újmy na obecnosti, nechť strana A_1B_1 leží ve straně K_1L_1. Je zřejmé, že existuje jediný způsob jak lze čtverec $A_1B_1C_1D_1$ vepsat do trojúhelníku $K_1L_1M_1$, aby platilo $A_1B_1 \subset K_1L_1$ (obr. 3.11).

Označme a délku strany trojúhelníku $K_1L_1M_1$ a x délku strany čtverce $A_1B_1C_1D_1$. Je zřejmé, že $2x = a$. Z trojúhelníku $B_1L_1C_1$ plyne

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{\frac{1}{2}(a-x)},$$



obr. 3.11

což po dosazení a úprávě dává rovnost

$$x = (2\sqrt{3} - 3)a. \tag{3.21}$$

Označme v, resp. v_1 výšku pravidelného čtyřstěnu $KLMN$, resp. $K_1L_1M_1N$. Lze ukázat, že platí

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}}, \tag{3.22}$$

resp.

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a. \tag{3.23}$$

S využitím vztahu $(v - v_1) = x$ a rovností (3.22), (3.23) dostaneme

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}(1 - a). \tag{3.24}$$

Vyřešením soustavy rovnic (3.21), (3.24) obdržíme pro x vztah

$$x = \frac{(2 - \sqrt{3})\sqrt{6}}{6 + \sqrt{2} - 3\sqrt{3}}.$$

Postupnými úpravami zlomku výše bychom dokázali, že $x < (1/3)$, čímž je úloha vyřešena.

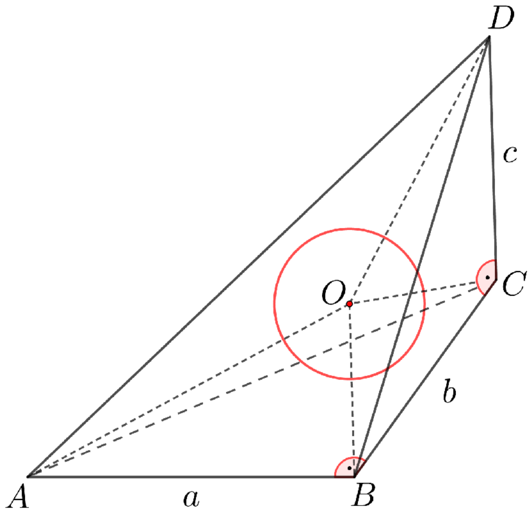
■

V další úloze je cílem najít vztah pro poloměr kulové plochy vepsané specifickému čtyřstěnu pomocí délek všech jeho hran.

Příklad 8 (23. MO, A-II-2b)

Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany AB, BC, CD jsou po dvou navzájem kolmé. Odvoďte vztah pro poloměr r kulové plochy vepsané čtyřstěnu $ABCD$ pomocí délek a, b, c hran AB, BC, CD.

Řešení: Označme O střed kulové plochy vepsané čtyřstěnu $ABCD$. O je zjevně vnitřním bodem čtyřstěnu $ABCD$. Objem V čtyřstěnu $ABCD$ je tak roven součtu objemů čtyřstěnů $OABC$, $OABD$, $OBCD$ a $OCAD$. Podstavy těchto čtyřstěnů tvoří po řadě trojúhelníky ABC, ABD, BCD a CAD (obr. 3.12).



obr. 3.12

Ze zadání je zřejmé, že trojúhelníky ABC, BCD jsou pravoúhlé. Platí $AB \perp BC$, $AB \perp CD$, z čehož plyne $AB \perp BD$. Analogicky také platí $CD \perp AB$, $CD \perp BC$, z čehož vyplývá $CD \perp CA$. Trojúhelníky CAD, ABD jsou tedy pravoúhlé.

Označme obsahy trojúhelníků ABC, ABD, BCD, CAD po řadě S_{ABC}, S_{ABD}, S_{BCD}, S_{CAD}. Pro objem V čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot v,$$

kde v značí výšku čtyřstěnu $ABCD$ ke stěně ABC. Vzhledem k vlastnostem čtyřstěnu $ABCD$ zmíněným výše tedy pro objem V dostaneme

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} abc = \frac{1}{6} abc. \tag{3.25}$$

Označme dále objemy čtyřstěnů $OABC$, $OABD$, $OBCD$ a $OCAD$ po řadě V_{OABC}, V_{OABD}, V_{OBCD}, V_{OCAD}. Platí

$$V = V_{OABC} + V_{OABD} + V_{OBCD} + V_{OCAD}. \tag{3.26}$$

Pro objem V_{OABC} platí

$$V_{OABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot r = \frac{1}{6} abr,$$

neboť poloměr r kulové plochy vepsané je roven výšce čtyřstěnu $OABC$. Analogicky pro objemy V_{OABD}, V_{OBCD}, V_{OCAD} po řadě dostaneme

$$V_{OABD} = \frac{1}{6} a\sqrt{b^2 + c^2} r, \qquad V_{OBCD} = \frac{1}{6} bcr, \qquad V_{OCAD} = \frac{1}{6} c\sqrt{a^2 + b^2} r.$$

S využitím rovnosti (3.26) dostaneme

$$\frac{1}{6} abc = \frac{1}{6} abr + \frac{1}{6} a\sqrt{b^2 + c^2} r + \frac{1}{6} bcr + \frac{1}{6} c\sqrt{a^2 + b^2},$$

tj. pro poloměr r plyne

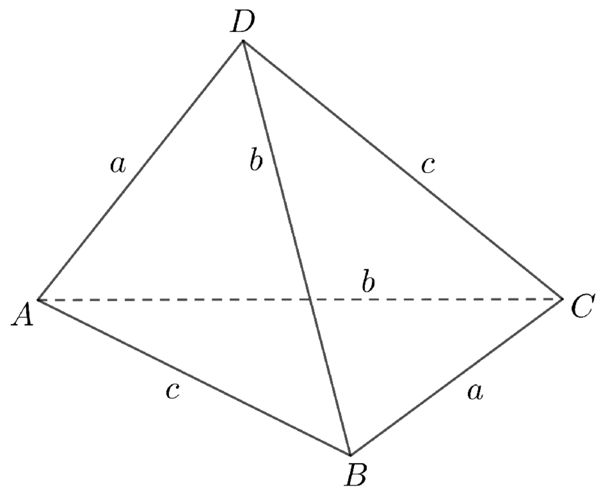
$$r = \frac{abc}{ab + a\sqrt{b^2 + c^2} + bc + c\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{abc}{a\left(b + \sqrt{b^2 + c^2}\ \right) + c\left(b + \sqrt{a^2 + b^2}\ \right)}.$$

■

Příklad 9

Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož protilehlé hrany jsou shodné. Odvoďte vzorec pro jeho objem V pouze pomocí délek jeho hran.

Řešení: Čtyřstěn $ABCD$ je tvořen shodnými trojúhelníky, pro jehož hrany platí $|BC| = |AD| = a$, $|AB| = |CD| = b$, $|CA| = |BD| = c$ (obr. 3.13).

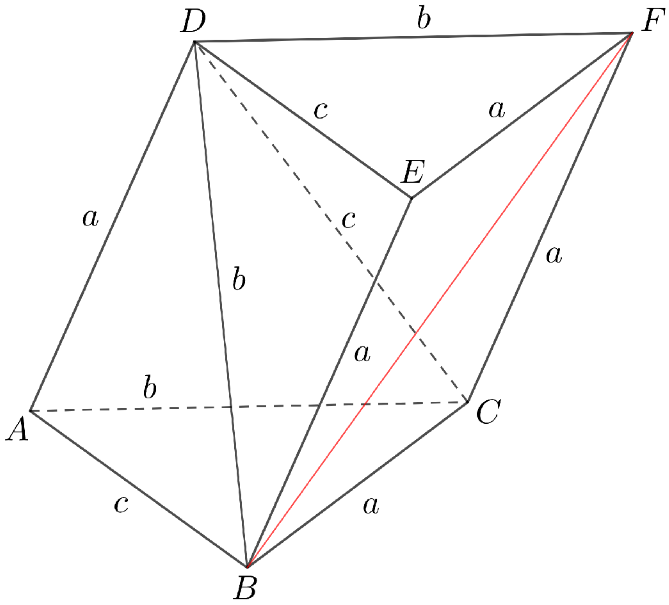


obr. 3.13

Čtyřstěn $ABCD$ doplníme na trojboký šikmý hranol $ABCDEF$. Platí tedy,

$$AD \parallel BE \parallel CF, \qquad AB \parallel DE, \qquad CA \parallel DF, \qquad BC \parallel EF.$$

Čtyřboký jehlan $BCFED$ rozdělíme pomocí úsečky BF na dva čtyřstěny $DEFB$, $CDFB$ (obr. 3.14). Protože úsečka BF rozděluje rovnoběžník $BCFE$ na dvě shodné části, jsou podstavy čtyřstěnů $DEFB$, $CDFB$ shodné.



obr. 3.14

Oba čtyřstěny mají společný vrchol D a shodné boční stěny, tj. výšky obou čtyřstěnů jdoucí vrcholem D se sobě rovnají, z čehož ze vztahu pro objem čtyřstěnu plyne

$$V_{DEFB} = V_{CDFB}.$$

Označíme-li V_j objem čtyřbokého jehlanu $BCFED$ dostaneme

$$V_j = V_{DEFB} + V_{CDFB} = 2 \cdot V_{DEFB} \tag{3.27}$$

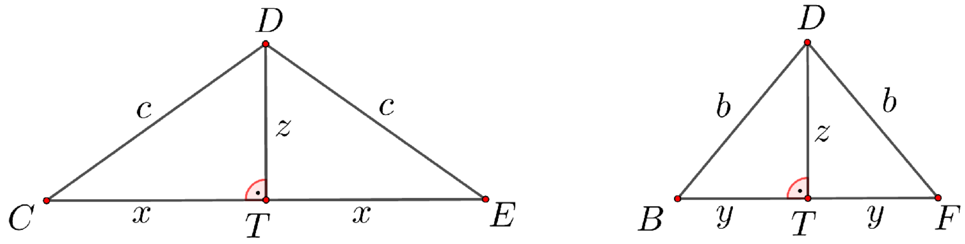
Čtyřstěny $ABCD$ a $DEFB$ mají shodné podstavy ABC a DEF, a protože roviny ABC, DEF jsou rovnoběžné, mají výšky procházející vrcholem D na stěnu ABC, resp. procházející vrcholem B na stěnu DEF stejné velikosti. Platí tedy $V = V_{DEFB}$, což s přihlédnutím k (3.27) znamená

$$V_j = 2 \cdot V_{DEFB} = 2 \cdot V, \tag{3.28}$$

tj. $V = \frac{1}{2} V_j$. Zabývejme nyní se objemem V_j.

Jehlan $BCFED$ má podstavu kosočtverce o hraně a. Protože platí $|DE| = |DC| = c$

a $|DB| = |DF| = b$, leží pata výšky (procházející vrcholem D) v průsečíků úhlopříček kosočtverce $BCFE$, tj. v těžišti T kosočtverce $BCFE$. Označme $|TE| = |TC| = x$, $|TB| = |TF| = y$ a $|TD| = z$. Z Pythagorovy věty v trojúhenících CTD, BTD plyne (obr. 3.15)



obr. 3.15

$$c^2 = x^2 + z^2, \qquad b^2 = y^2 + z^2. \tag{3.29}$$

Úhlopříčky kosočtverce $BCFE$ jsou na sebe kolmé, tj. platí

$$a^2 = x^2 + y^2. \tag{3.30}$$

Úpravou rovností (3.29) a (3.30) dostaneme

$$0 \leqq 2x^2 = a^2 + c^2 - b^2, \quad 0 \leqq 2y^2 = a^2 + b^2 - c^2, \quad 0 \leqq 2z^2 = b^2 + c^2 - a^2. \tag{3.31}$$

S využitím rovností (3.31) pro objem V čtyřstěnu $ABCD$ postupně dostaneme

$$V = \frac{1}{2}V_j = \frac{1}{2}\frac{1}{3}xyz = \frac{1}{6}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(a^2+c^2-b^2\right)}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(b^2+c^2-a^2\right)} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{24}\sqrt{\left(a^2+c^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)}.$$

Tím je úloha vyřešena.

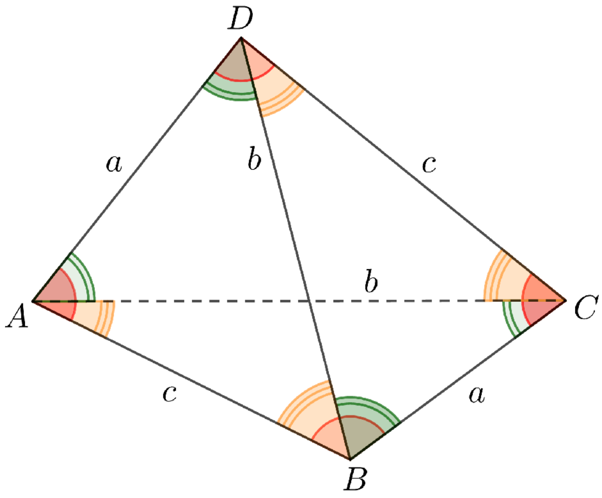
■

Následující příklad kombinuje znalosti o ortocentrickém čtyřstěnu a čtystěnu z předchozího příkladu. V řešení využijeme právě vlastností sítě čtyřstěnu a ortocentru, o které byla řeč v první kapitole.

Příklad 10

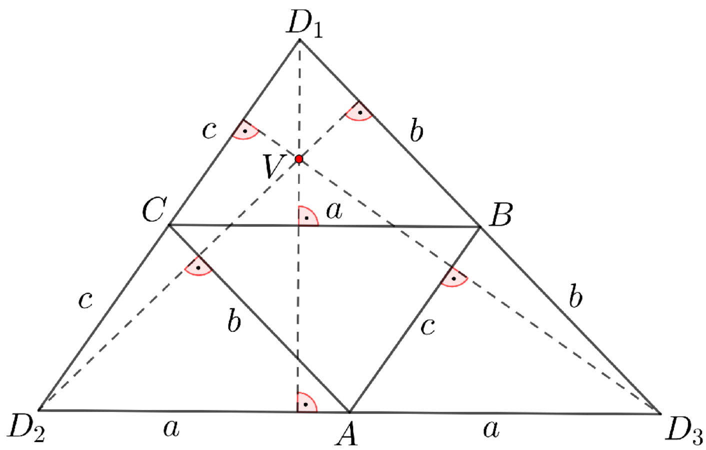
Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož protilehlé hrany jsou shodné. Dokažte, že je-li čtyřstěn $ABCD$ ortocentrický, pak je pravidelný.

Řešení: Je zřejmé, že čtyřstěn $ABCD$ je tvořen čtyřmi shodnými trojúhelníky s hranami označenými a, b, c (obr. 3.16).



obr. 3.16

Součet velikostí úhlů u každého z vrcholů A, B, C je roven součtu velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, tj. je roven 180°. Proto, sklopíme-li stěny ABD, BCD, CAD po řadě okolo hran c, a, b do roviny ABC, dostaneme síť čtyřstěnu tvaru trojúhelníku $D_1D_2D_3$ se stranami $2a$, $2b$, $2c$ (obr. 3.17).



obr. 3.17

Sestrojme průsečík V výšek trojúhelníku $D_1D_2D_3$. Je-li čtyřstěn $ABCD$ ortocentrický, pak je bod V ortocentrem trojúhelníku ABC, tj. přímka VD_1 je osou úsečky D_2D_3. To znamená, že $|D_1D_2| = |D_1D_3|$, tedy platí $2c = 2b$, tj. $b = c$. Analogicky bychom postupovali pro přímky VD_2, VD_3 a obdrželi rovnosti $c = a$, $b = a$. Platí tedy

$$a = b = c,$$

tedy ortocentrický čtyřstěn $ABCD$, dané vlastnosti, je pravidelný.

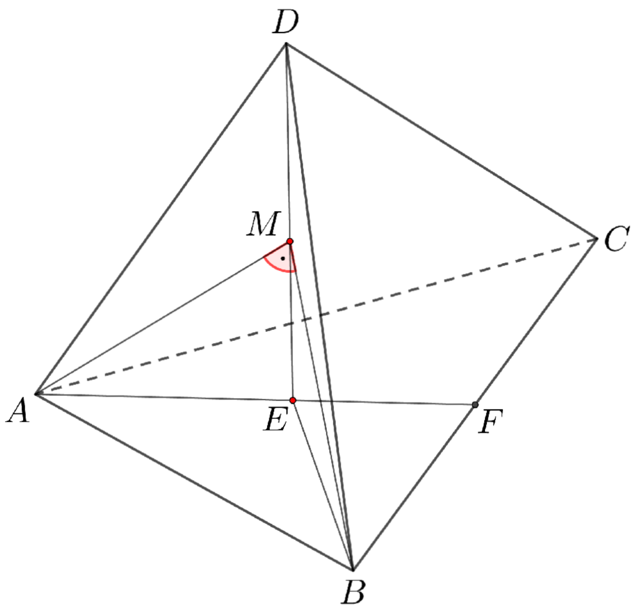
■

Pravidelným čtyřstěnem se zabývá i následující důkazová úloha.

Příklad 11 (2.15, [14])

Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Nechť E je pata výšky z vrcholu D ke stěně ABC. Nechť M je vnitřním bodem výšky DE takový, že $|\sphericalangle AMB| = 90°$. Určete poměr $|EM| : |DM|$.

Řešení: Protože čtyřstěn $ABCD$ je pravidelný, předpokládejme bez újmy na obecnosti, že hrana čtyřstěnu $ABCD$ má délku 1. Bod E je těžištěm rovnostranného trojúhelníku ABC (obr. 3.18).



obr. 3.18

Pro velikost úsečky BE dostaneme

$$|AE| = |BE| = \frac{2}{3}|AF| = \frac{2}{3}\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \tag{3.32}$$

kde F je střed úsečky BC. Pro velikost výšky DE poté platí

$$|DE| = \sqrt{1^2 - |BE|^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{3.33}$$

Trojúhelníky AEM a BEM jsou shodné, tj. $|AM| = |BM|$ a platí $|\sphericalangle AMB| = 90°$. Trojúhelník AMB je tedy pravoúhlý rovnoramenný, z toho dostaneme

$$|AM| = \frac{\sqrt{2}}{2}|AB| = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{3.34}$$

Pro úsečku AM však také platí

$$|AM| = \sqrt{|AE|^2 + |EM|^2},$$

což s využitím (3.32) a (3.34) dává

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{3} + |EM|^2}.$$

Úpravou předchozí rovnosti a s využitím (3.33) postupně dostaneme

$$|EM| = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}|DE|,$$

tj. $|EM| : |DM| = 1 : 1$, tj. M je střed úsečky ED.

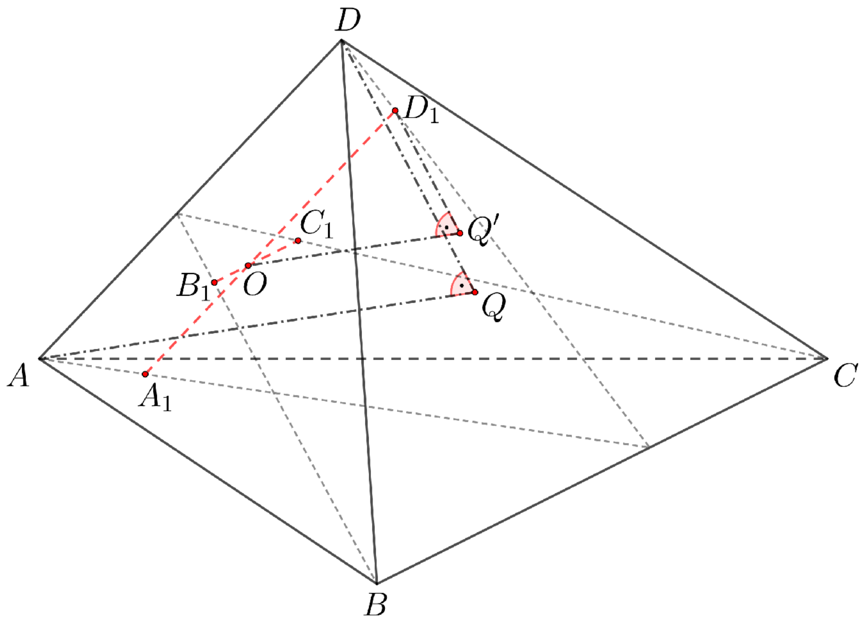
■

V následující úloze využijeme podobnost trojúhelníků.

Příklad 12 (20. MO, A-II-3b)

Je dán čtyřstěn $ABCD$ a libovolný jeho vnitřní bod O. Bodem O jsou vedeny příčky rovnoběžné s jeho hranami, přičemž jejich krajní body leží ve stěnách čtyřstěnu $ABCD$. Dokažte, že součet poměrů délek těchto příček a délek jim příslušných rovnoběžných hran čtyřstěnu $ABCD$ je roven 3.

Řešení: Označme příčku A_1D_1 rovnoběžnou s hranou AD vedenou bodem O, přičemž body A_1, resp. D_1 leží ve stěnách ABD, resp. CAD. Analogicky označme příčku B_1C_1 rovnoběžnou s hranou BC protilehou k hraně AD (obr. 3.19).



obr. 3.19

Čyřstěny $OBCD$ a $ABCD$ mají stejnou podstavu BCD, tj. poměr jejich objemů bude roven poměru jim příslušných výšek na stěnu BCD. Označme v, resp. v' výšku čtyřstěnu $ABCD$, resp. $OBCD$ na stěnu BCD. Bod Q, resp. Q' nechť jsou paty výšek v, resp. v'. Trojúhelníky ADQ a OD_1Q' jsou si podobné podle věty uuu, platí tedy

$$\frac{OD_1}{AD} = \frac{v'}{v}$$

Pro poměr objemů V_{OBCD} a V_{ABCD} dostaneme

$$\frac{V_{OBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{v'}{v} = \frac{OD_1}{AD}. \tag{3.35}$$

Analogicky pro poměr objemů čtyřstěnů $OABC$ a $ABCD$, které mají stejnou podstavu ABC, obdržíme vztah

$$\frac{V_{OABC}}{V_{ABCD}} = \frac{OA_1}{AD}. \tag{3.36}$$

Sečtěním (3.35), (3.36) dostaneme

$$\frac{V_{OBCD} + V_{OABC}}{V_{ABCD}} = \frac{OD_1 + OA_1}{AD} = \frac{A_1D_1}{AD}. \tag{3.37}$$

Analogicky pro příčku B_1C_1 a pro čtyřstěny $OABD$, $OACD$ dostaneme

$$\frac{V_{OABD} + V_{OCAD}}{V_{ABCD}} = \frac{OB_1 + OC_1}{AD} = \frac{B_1C_1}{BC}. \tag{3.38}$$

Čtyřstěny $OABC$, $OBCD$, $OABD$, $OCAD$ tvoří ve sjednocení čtyřstěn $ABCD$, tedy s využitím (3.37), (3.38) dostaneme

$$\frac{A_1D_1}{AD} + \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{V_{OBCD} + V_{OABC} + V_{OABD} + V_{OCAD}}{V_{ABCD}} = 1. \tag{3.39}$$

Analogicky pro protilehlé hrany AB, CD a jejich příslušné příčky A_2B_2, C_2D_2, resp. protilehlé hrany BD, AC a jejich příslušné příčky B_3D_3, A_3C_3 odvodíme vztahy

$$\frac{A_2B_2}{AB} + \frac{C_2D_2}{CD} = 1, \tag{3.40}$$

resp.

$$\frac{B_3D_3}{BD} + \frac{A_3C_3}{AC} = 1. \tag{3.41}$$

Sečtením (3.39), (3.40) a (3.41) dostaneme

$$\frac{A_1D_1}{AD} + \frac{B_1C_1}{BC} + \frac{A_2B_2}{AB} + \frac{C_2D_2}{CD} + \frac{B_3D_3}{BD} + \frac{A_3C_3}{AC} = 3,$$

což jsme měli dokázat.

■

Čtyři úlohy, které nyní uvedeme se zabývají nerovnostmi souvisejícími s povrchem čtyřstěnu, obsahem jeho jednotlivých stěn, popř. objemem čtyřstěnu. Poslední dvě z těchto čtyř úloh si pak kladou za cíl najít podmínky, kdy má čtyřstěn určitých vlastností maximální povrch a objem.

Příklad 13 (19. MO, A-II-2b)

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Nechť P je pata výšky v z bodu D ke stěně ABC. Nechť platí, že $v \geqq \max\{a,b,c\}$, kde a, b, c jsou po řadě délky hran BC, CA, AB. Dokažte, že

$$S_{ABC} < \frac{1}{3}(S_{BCD} + S_{CAD} + S_{ABD}), \tag{3.42}$$

kde S_{ABC}, S_{ABD}, S_{BCD}, S_{CAD} jsou po řadě obsahy trojúhelníků ABC, ABD, BCD, CAD.

Řešení: Je zřejmé, že pro obsah S_{ABC} trojúhelníku ABC platí nerovnosti

$$S_{ABC} \leqq \tfrac{1}{2}ab, \qquad S_{ABC} \leqq \tfrac{1}{2}bc, \qquad S_{ABC} \leqq \tfrac{1}{2}ac,$$

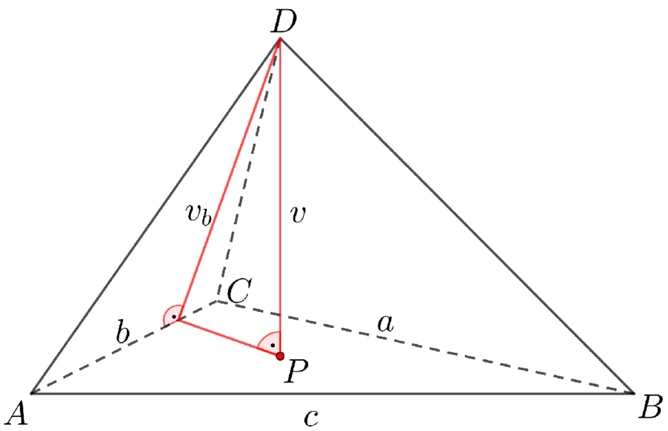
přičemž rovnost může nastat nejvýše u jedné z nich (trojúhelník ABC má nejvýše jeden pravý úhel). Sečtením těchto tří nerovností dostaneme vztah

$$3 \cdot S_{ABC} < \tfrac{1}{2}\big(ab + bc + ac\big). \tag{3.43}$$

S využitím vztahu $v \geqq \max\{a,b,c\}$ a dosazením v postupně za b, c, a do nerovnosti (3.43) obdržíme

$$3 \cdot S_{ABC} < \tfrac{1}{2}\big(ab + bc + ac\big) \leqq \tfrac{1}{2}\big(av + bv + cv\big) = \tfrac{1}{2}v\big(a + b + c\big). \tag{3.44}$$

Označme v_b výšku v trojúhelníku ACD vedenou z vrcholu D na stranu b (obr. 3.20).



obr. 3.20

Zřejmě platí $v_b \geqq v$. Pro obsah S_{CAD} postupně dostaneme

$$S_{CAD} = \tfrac{1}{2} b v_b \geqq \tfrac{1}{2} b v. \tag{3.45}$$

Analogicky pro obsahy S_{ABD}, resp. S_{BCD} obdržíme

$$S_{ABD} \geqq \tfrac{1}{2} c v, \tag{3.46}$$

resp.

$$S_{BCD} \geqq \tfrac{1}{2} a v, \tag{3.47}$$

přičemž rovnost může současně nastat nejvýše u dvou z nerovností (3.45), (3.46) a (3.47). Sečtením tří výše zmíněných nerovností dostaneme

$$S_{CAD} + S_{ABD} + S_{BCD} > \tfrac{1}{2} b v + \tfrac{1}{2} c v + \tfrac{1}{2} a v = \tfrac{1}{2} v\big(a + b + c\big). \tag{3.48}$$

S využitím (3.44) a (3.48) dostaneme

$$3 \cdot S_{ABC} < \tfrac{1}{2} v\big(a + b + c\big) < S_{CAD} + S_{ABD} + S_{BCD},$$

tedy

$$3 \cdot S_{ABC} < S_{CAD} + S_{ABD} + S_{BCD}.$$

Po snadné úpravě již obdržíme dokazovaný vztah.

■

Příklad 14 (41. MO, A-III-2)

Je dán čtyřstěn $ABCD$ s velikostmi hran AB, BC, CA, AD, BD, CD označenými po řadě a, b, c, d, e, f (obr. 3.21). Označme S povrch čtyřstěnu $ABCD$. Dokažte, že platí nerovnost

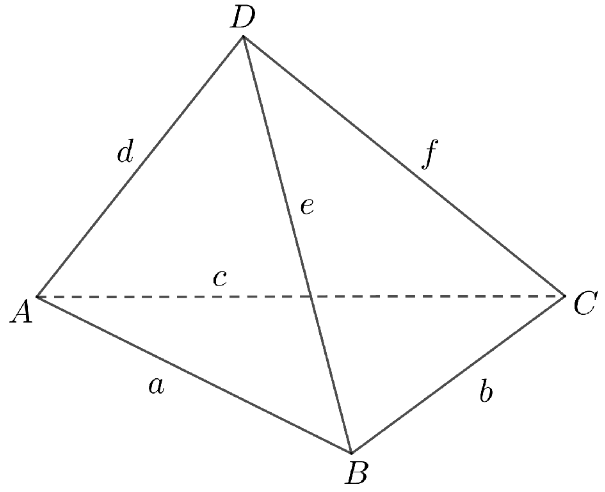
$$S \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2).$$

Řešení: Uvažujme nejdříve obsah P_1 trojúhelníku ABC. Z Heronova vzorce pro výpočet obsahu P_1 plyne

$$P_1 = \frac{1}{4}\sqrt{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}. \tag{3.49}$$

Umocněním obou stran rovnosti (3.49) na druhou a následným roznásobením dostaneme

$$P_1{}^2 = \frac{1}{16}(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4),$$



obr. 3.21

přičemž při další úpravě obdržíme

$$P_1{}^2 = \frac{1}{16}\left[(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)\right]. \tag{3.50}$$

Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti pro hodnoty a^2, b^2, c^2 a hodnoty 1, 1, 1 plyne

$$(1\cdot a^2 + 1\cdot b^2 + 1\cdot c^2)^2 \leqq (a^4+b^4+c^4)(1+1+1),$$

což po úpravě dává

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \leqq 3(a^4+b^4+c^4). \tag{3.51}$$

Dosazením výrazu $(a^4+b^4+c^4)$ z (3.51) do (3.50) obdržíme nerovnost

$$P_1{}^2 \leqq \frac{1}{16}\left[(a^2+b^2+c^2)^2 - \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)^2\right] = \frac{1}{48}(a^2+b^2+c^2)^2,$$

a po odmocnění

$$P_1 \leqq \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2). \tag{3.52}$$

Analogickou nerovnost obdržíme i pro obsah P_2, resp. P_3, resp. P_4 trojúhelníku ABD, resp. BCD, resp. CAD, tj.

$$P_2 \leqq \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+d^2+e^2), \qquad P_3 \leqq \frac{\sqrt{3}}{12}(b^2+e^2+f^2), \qquad P_3 \leqq \frac{\sqrt{3}}{12}(c^2+d^2+f^2).$$

Pro povrch S čtyřstěnu $ABCD$ tedy platí

$$S = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \leqq \frac{\sqrt{3}}{12}(2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+2e^2+2f^2),$$

tj.

$$S \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2).$$

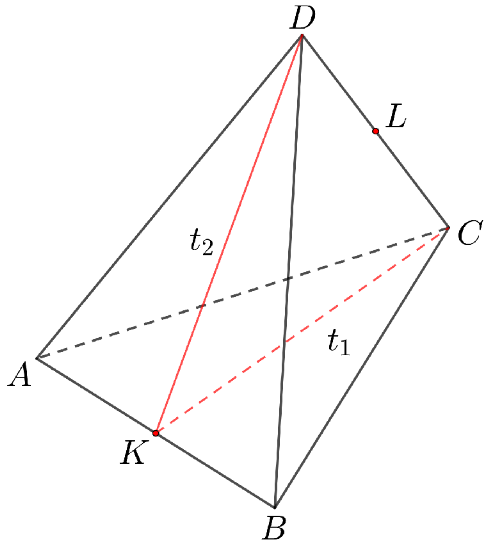
Tím je důkaz hotov.

■

Příklad 15 (39. MO, A-II-2)

Je dán čtyřstěn $ABCD$ s hranami $a = |AB|$, $c = |CD|$ a vzdáleností d středů hran AB, CD. Určete, za jakých podmínek má čtyřstěn $ABCD$ maximální povrch S a určete jej.

Řešení: Nechť K, resp. L je střed hrany AB, resp. CD. Dále nechť t_1, resp. t_2 je délka těžnice KC trojúhelníku ABC, resp. těžnice KD trojúhelníku ABD (obr. 3.22).



obr. 3.22

Pro obsah S_{ABC}, resp. S_{ABD} trojúhelníku ABC, resp. ABD platí

$$S_{ABC} \leqq \frac{1}{2} t_1 a, \tag{3.53}$$

resp.

$$S_{ABD} \leqq \frac{1}{2} t_2 a. \tag{3.54}$$

Součtem těchto dvou nerovností dostaneme

$$S_{ABC} + S_{ABD} \leqq \frac{1}{2}(t_1 + t_2)a. \tag{3.55}$$

Rovnost v (3.55) nastane, právě když jsou těžnice t_1, t_2 kolmé k hraně AB, což platí, právě když je hrana AB kolmá k rovině CDK, tj. i kolmá k hraně CD.

Užitím kosinové věty v trojúhelníku CKL, resp. DKL pro t_1, resp. t_2 obdržíme

$$t_1{}^2 = \frac{c^2}{4} + d^2 - cd\cos|\sphericalangle CLK|, \qquad t_2{}^2 = \frac{c^2}{4} + d^2 + cd\cos|\sphericalangle CLK|,$$

kde jsme využili faktu, že $\cos|\sphericalangle DLK| = \cos(180^\circ - |\sphericalangle CLK|) = -\cos|\sphericalangle CLK|$.

Uvažujme nyní libovolná reálná čísla x, y. Zřejmě platí

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leqq 2(x^2 + y^2),$$

přičemž rovnost nastane, právě když $x = y$. Využitím této nerovnosti obdržíme

$$(t_1 + t_2)^2 \leqq 2(t_1{}^2 + t_2{}^2) = c^2 + 4d^2,$$

přičemž rovnost nastane, právě když $t_1 = t_2$, tj. právě když je úsečka KL kolmá k hraně CD.

Nerovnost (3.55) postupně upravíme, dostaneme

$$S_{ABC} + S_{ABD} \leqq \frac{1}{2}(t_1 + t_2)a \leqq \frac{1}{2}\sqrt{2\left(t_1{}^2 + t_2{}^2\right)}\,a = \frac{a}{2}\sqrt{c^2 + 4d^2},$$

tj.

$$S_{ABC} + S_{ABD} \leqq \frac{a}{2}\sqrt{c^2 + 4d^2}. \tag{3.56}$$

Rovnost v (3.56) nastane, právě když platí $t_1 = t_2$ zároveň jsou t_1 i t_2 kolmé k AB, tj. právě když je úsečka KL kolmá k hraně CD a zároveň platí, že hrana AB je kolmá k rovině CDK.

Analogicky v případě trojúhelníků BCD a ACD obdržíme

$$S_{BCD} + S_{ACD} \leqq \frac{c}{2}\sqrt{a^2 + 4d^2}, \tag{3.57}$$

přičemž rovnost nastane, právě když je hrana CD kolmá k rovině ABL a zároveň je úsečka KL kolmá k hraně AB.

Sečtením (3.56) a (3.57) pak dostaneme

$$S = S_{ABC} + S_{ABD} + S_{BCD} + S_{ACD} \leqq \frac{a}{2}\sqrt{c^2 + 4d^2} + \frac{c}{2}\sqrt{a^2 + 4d^2},$$

což je námi hledaný vztah.

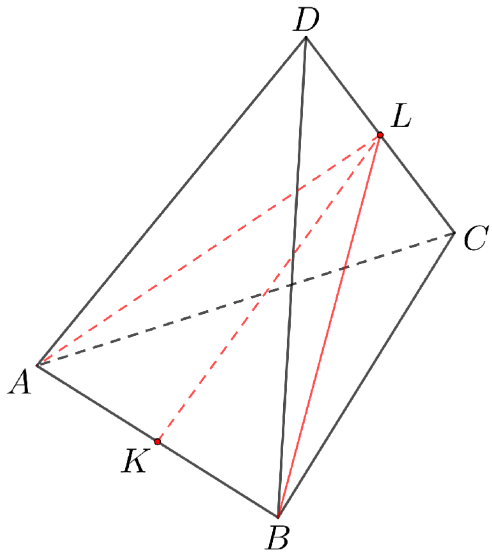
Čtyřstěn $ABCD$ má tedy maximální povrch, právě když úsečka KL je příčkou hran AB a CD a zároveň platí $AB \perp CD$

■

Příklad 16 (39. MO, A-S-3)

Je dán čtyřstěn $ABCD$ s hranami $a = |AB|$, $c = |CD|$ a vzdáleností d středů hran AB, CD. Určete, za jakých podmínek má čtyřstěn $ABCD$ maximální objem V a určete jej.

Řešení: Označme středy hran AB, resp. CD po řadě K, resp. L, pak platí $d = |KL|$. Objem V čtyřstěnu $ABCD$ můžeme spočítat jako součet objemů V_{ABCL} a V_{ABDL} čtyřúhelníku $ABCL$ a čtyřúhelníku $ABDL$ (obr. 3.23).



obr. 3.23

Pro objem V_{ABCL} zřejmě platí

$$V_{ABCL} \leqq \frac{1}{3} S_{ABL} \cdot |LC|, \tag{3.58}$$

přičemž rovnost nastane, právě když úsečka LC je kolmá k rovině ABL. Pro obsah S_{ABL} platí

$$S_{ABL} \leqq \frac{1}{2} ad,$$

přičemž rovnost nastane, právě když je úsečka KL kolmá ke hraně AB. Analogicky pro objem V_{ABDL} platí nerovnost

$$V_{ADCL} \leqq \frac{1}{3} S_{ABL} \cdot |LD|, \tag{3.59}$$

přičemž rovnost nastane, právě když je úsečka LD kolmá k rovině ABL a zároveň je úsečka KL kolmá ke hraně AB.

Sečtením (3.58), (3.59) postupně obdržíme

$$V = V_{ABCL} + V_{ABDL} \leqq \frac{1}{3} S_{ABL} \cdot \big(|LC| + |LD| \big) \leqq \frac{1}{6} ad \big(|LC| + |LD| \big) = \frac{1}{6} acd,$$

přičemž rovnost nastane, právě když $AB \perp KL$ a zároveň $DC \perp ABL$, což platí, právě když KL je příčkou navzájem kolmých protilehlých hran AB, CD.

■

Příklad 17 (32. MO, B-I-6)

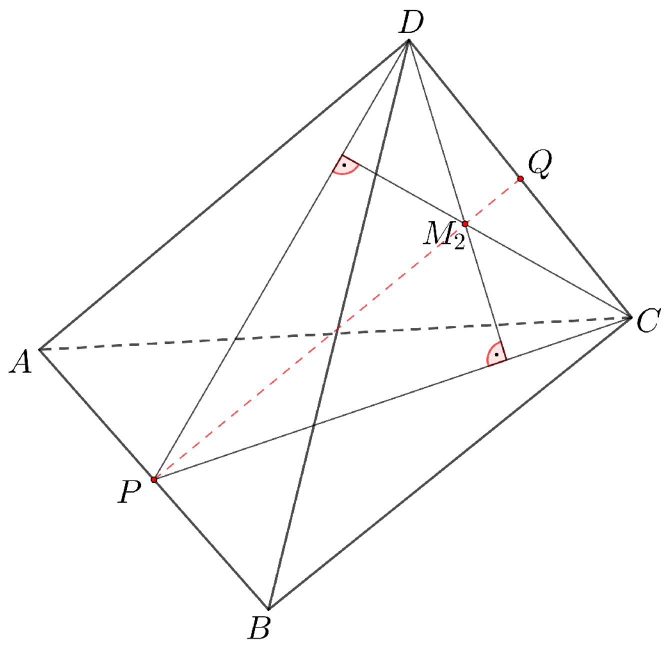
Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany AB, CD o délkách $h_1 = |AB|$, $h_2 = |CD|$ jsou navzájem kolmé. Vzdálenost těchto hran označíme v. Nechť dále platí

$$|BC| = |AD| = |BD| = |CA| = d.$$

(i) Dokažte, že výšky čtyřstěnu $ABCD$ vedené krajními body úsečky AB jsou různoběžné. Jejich průsečík označíme M_1. Analogicky dokažte, že i výšky vedené krajními body úsečky CD jsou různoběžné. Jejich průsečík označíme M_2.

(ii) Dokažte, že vzdálenost bodů M_1, M_2 závisí pouze na hodnotách v, d a nezávisí na velikostech h_1, h_2.

Řešení: Čtyřstěn $ABCD$ se skládá ze čtyř rovnoramenných trojúhelníků. Označme P střed hrany AB a Q střed hrany CD (obr. 3.24).



obr. 3.24

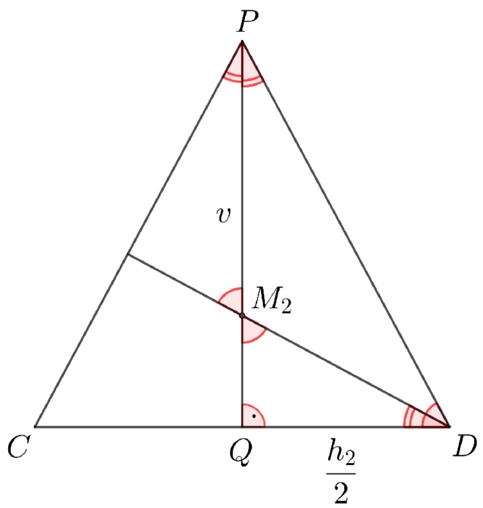
Úsečky PC, PD jsou zjevně kolmé k hraně AB (jedná se o výšky v rovnoramenných trojúhelnících ABD, ABC), z čehož plyne, že hrana AB je kolmá k rovině CDP. Výška procházející vrcholem D, resp. C je kolmá k rovině ABD, resp. ABC, tj. jsou kolmé ke hraně AB, a proto nutně leží též v rovině CDP. Průsečík těchto výšek tedy existuje, označíme ho M_2. Trojúhelník CDP je rovnoramenný a úsečka PQ je tedy výškou tohoto trojúhelníku - výšky trojúhelníku se protínají v právě jednom bodě, tj. bod M_2 leží též na úsečce PQ.

Z podobnosti trojúhelníků PQD a DQM_2 plyne (obr. 3.25)

$$\frac{|QM_2|}{\frac{h_2}{2}} = \frac{\frac{h_2}{2}}{v},$$

tj.

$$|QM_2| = \frac{{h_2}^2}{4v}. \tag{3.60}$$



obr. 3.25

Analogicky bychom v případě výšek z vrcholů A, B obdrželi, že se protínají ve společném bodě M_1 a pro vzdálenost bodů P a M_1 odvodili vztah

$$|PM_1| = \frac{{h_1}^2}{4v}. \tag{3.61}$$

Podobně jako v případě, kdy výšky procházející vrcholy C, D ležely v rovině CDP, leží výšky procházející vrcholy A, B v rovině ABP. Protože trojúhelníky ABP, CDP mají společnou výšku PQ, leží body M_1 a M_2 na výšce PQ, tj. platí vztah

$$|M_1M_2| = |v - |PM_1| - |QM_2|| \tag{3.62}$$

S využitím Pythagorovy věty v pravoúhlých trojúhelnících PBC a PCQ dostaneme

$$|PC|^2 = v^2 + \frac{{h_2}^2}{4} = d^2 - \frac{{h_1}^2}{4},$$

tedy

$$d^2 - v^2 = \frac{{h_1}^2 + {h_2}^2}{4}. \tag{3.63}$$

Úpravou vztahu (3.62) s využitím (3.60), (3.61) a (3.63) postupně obdržíme

$$|M_1M_2| = \Big|v - |PM_1| - |QM_2|\Big| = \left|v - \frac{{h_1}^2}{4v} - \frac{{h_2}^2}{4v}\right| = \left|v + \frac{v^2 - d^2}{v}\right| = \frac{|2v^2 - d^2|}{v}.$$

Dokázali jsme, že vzdálenost bodů M_1 a M_2 nezávisí na h_1, h_2, ale že závisí pouze na hodnotách v a d.

■

Poslední řešená úloha, kterou nyní uvedeme, obsahuje více dílčích podúloh, které na sebe přirozeně navazují. K vyřešení celé úlohy je tedy zapotřebí vyřešit správně všechny dílčí části.

Příklad 18 (20. MO, A-II-3b)

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Nechť M je libovolně zvolený bod na vnitřku stěny ABC. Bodem M jsou vedeny přímky

$$MA_1 \parallel AD, \qquad MB_1 \parallel BD, \qquad MC_1 \parallel CD,$$

kde body A_1, B_1, C_1 jsou po řadě průsečíky rovin BCD, ACD, ABD.

(i) Dokažte, že pro bod M platí

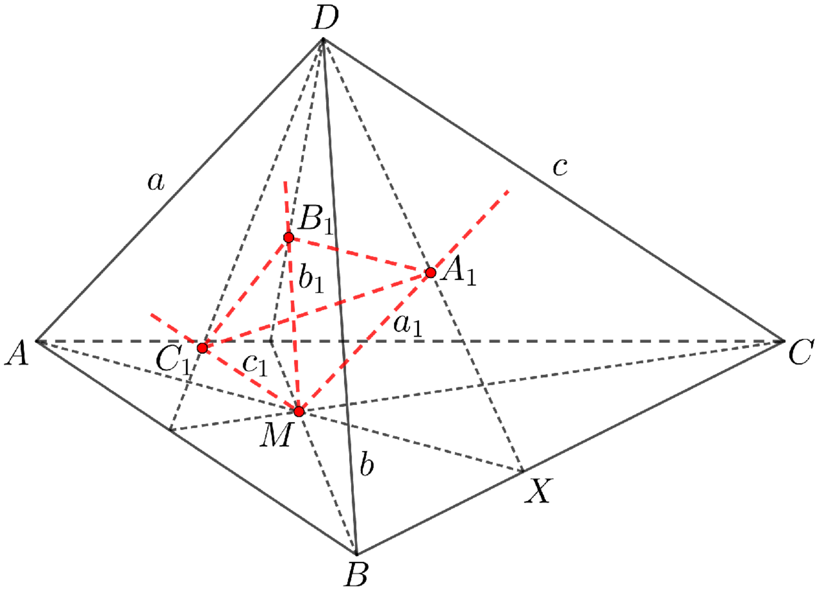
$$\frac{MA_1}{AD} + \frac{MB_1}{BD} + \frac{MC_1}{CD} = 1 \tag{3.64}$$

(ii) Určete poměr objemů čtyřstěnů $A_1B_1C_1M$ a $ABCD$ pouze využitím velikostí úseček AD, BD, CD, MA_1, MB_1, MC_1.

(iii) Určete polohu bodu M uvnitř stěny ABC, má-li mít čtyřstěn $A_1B_1C_1M$ maximální objem.

Řešení: Ze zadání je patrné, že body A_1, resp. B_1, resp. C_1 leží na průsečíku roviny AMD s rovinou BCD, resp. roviny BMD s rovinou ACD, resp. roviny CMD s rovinou ABD.

Označme velikosti úseček $|AD| = a$, $|BD| = b$, $|CD| = c$, $|MA_1| = a_1$, $|MB_1| = b_1$, $|MC_1| = c_1$ (obr. 3.26).



obr. 3.26

(i) Pro objem V čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$V = V_{ABDM} + V_{BCDM} + V_{ACDM}, \tag{3.65}$$

kde V_{ABDM}, resp. V_{BCDM}, resp. V_{ACDM} je objem čtyřstěnu $ABDM$, resp. $BCDM$, resp. $ACDM$. Čtyřstěny $ABCD$ a $BCDM$ mají společnou podstavu BCD, tedy poměr jejich objemů je dán poměrem jim příslušných výšek na stěnu BCD. Protože úsečky AD, MA_1 jsou rovnoběžné, mají obě stejnou odchylku od roviny BCD, kterou označíme ε. Pro výšku v čtyřstěnu $ABCD$ na stěnu BCD, resp. výšku v_1 čtyřstěnu $BCDM$ na stěnu BCD tedy platí

$$v = a \sin \varepsilon,$$

resp.

$$v_1 = a_1 \sin \varepsilon.$$

Využitím předchozích dvou rovností dostaneme

$$\frac{V_{BCDM}}{V_{ABCD}} = \frac{v_1}{v} = \frac{a_1 \sin \varepsilon}{a \sin \varepsilon} = \frac{a_1}{a}. \tag{3.66}$$

Analogickým postupem obdržíme rovnosti

$$\frac{V_{ABDM}}{V_{ABCD}} = \frac{c_1}{c}, \qquad \frac{V_{ACDM}}{V_{ABCD}} = \frac{b_1}{b}. \tag{3.67}$$

Sečtením (3.66), (3.67) a s využitím (3.65) dostaneme

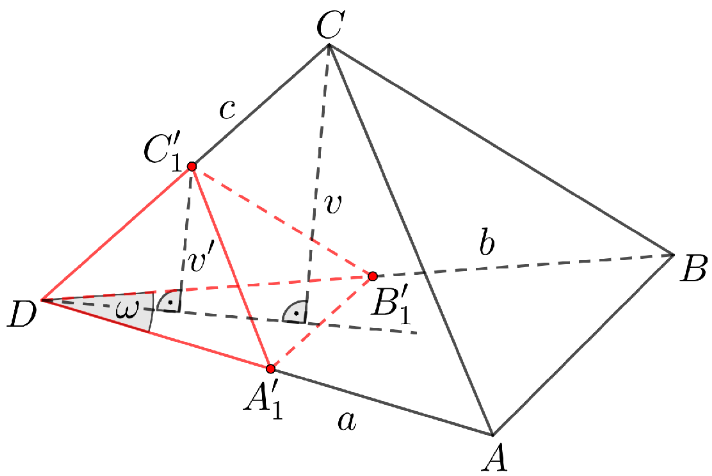
$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 1, \tag{3.68}$$

což je po přeoznačení dokazovaná rovnost (3.64).

(ii) Evidentně platí

$$|\sphericalangle A_1MB_1| = |\sphericalangle ADB|, \qquad |\sphericalangle A_1MC_1| = |\sphericalangle ADC|, \qquad |\sphericalangle B_1MC_1| = |\sphericalangle BCD|.$$

To znamená, že existuje čtyřstěn $DA_1'B_1'C_1'$ shodný se čtyřstěnem $MA_1B_1C_1$, kde body A_1', B_1', C_1' leží po řadě na polopřímkách DA, DB, DC. Označme v, resp. v' výšku čtyřstěnu $ABCD$, resp. $DA_1'B_1'C_1'$ z vrcholu C, resp. C_1' na podstavu ABD, resp. $DA_1'B_1'$ a nechť $|\sphericalangle ADB| = \omega$ (obr. 3.27).



obr. 3.27

Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{v'}{v} = \frac{c_1}{c}.$$

Pro objem V čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}ab\sin\omega\right)v.$$

Pro objem V_1 čtyřstěnu $MA_1B_1C_1$, tedy i čtyřstěnu $DA_1'B_1'C_1'$ platí

$$V_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a_1b_1\sin\omega\right)v' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a_1b_1\sin\omega\right)\frac{c_1}{c}v,$$

tedy pro jejich poměr dostaneme

$$\frac{V_1}{V} = \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{a \cdot b \cdot c}.$$

(iii) Objem V_1 je maximální, právě když je maximální poměr V_1/V, tj. právě když je maximální výraz $(a_1 b_1 c_1)/(abc)$. Tento výraz je součinem tří kladných čísel a_1/a, b_1/b, c_1/c, pro která platí (viz (i))

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 1.$$

Z A-G nerovnosti pro kladná čísla a_1/a, b_1/b, c_1/c plyne

$$0 < \sqrt[3]{\frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{a \cdot b \cdot c}} \leqq \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c}\right) = \frac{1}{3}.$$

Platí tedy

$$V_1 \leqq \frac{1}{27} V, \tag{3.69}$$

přičemž rovnost nastane, právě když

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}.$$

Protože platí (3.68), rovnost v (3.69) nastane, právě když

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{1}{3}.$$

Ze shodnosti trojúhelníků AXD a MXA_1 (obr. 3.21) plyne

$$\frac{|MX|}{|AX|} = \frac{a_1}{a} = \frac{1}{3},$$

tj. bod M je těžištěm trojúhelníku ABC.

■

3.2 Neřešené úlohy

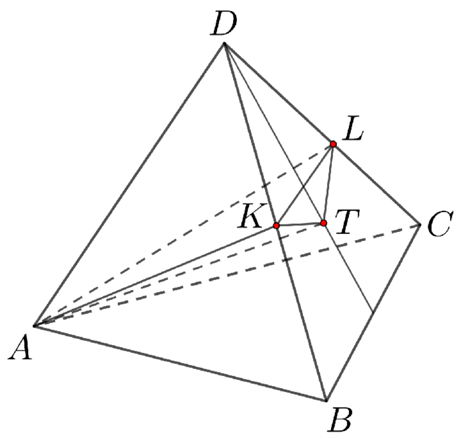
V této části uvedeme některé vybrané neřešené úlohy související se čtyřstěny.Tyto úlohy slouží především k procvičení si dovedností získaných studiem této práce. Mohou je využít samotní studenti při přípravě na matematické soutěže, popř. vyučující. Právě učitelům mohou posloužit jako sbírka úloh k procvičování základních vlastností čtyřstěnů při práci s matematickými talenty. První tři příklady jsou převzaty z české matematické olympiády (MO), zbylých sedm je převzato z polské matematické olympiády[2], případně ruské. Na jednotlivé příklady je vždy odkázáno, aby si čtenář mohl dohledat konkrétní řešení. U posledních třech úloh nebylo zjevné, ve které olympiádě se vyskytly a proto uvádíme odkaz na konkrétní literaturu.

Příklad 1 (6. MMO, 1968, příklad 4)

Dokažte, že v každém čtyřstěnu existuje takový vrchol, že z úseček rovných hranám, které z něho vychází, lze sestrojit trojúhelník.

Příklad 2 (33. MO, B-II-3b)

Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$ s hranou délky a. Vrchol A je spojen po povrchu čtyřstěnu nejkratší lomenou čarou s těžištěm T stěny BCD přes hranu BD a také přes hranu CD. První čára protne hranu BD v bodě K, druhá protne hranu CD v bodě L (obr. 3.28). Vypočtěte objem čtyřstěnu $AKLT$.



obr. 3.28

Příklad 3 (34. OM, 1981/1982)

Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$ o hraně délky 1 a bod X ležící uvnitř čtyřstěnu $ABCD$. Nechť $d(X, AB)$ značí vzdálenost bodu X od hrany AB. Dokažte, že platí

$$d(X, AB) + d(X, CA) + d(X, AD) + d(X, BC) + d(X, BD) + d(X, CD) \geqq \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

[2]OM = Olimpiada Matematyczna (Polsko)

Příklad 4 (41. OM, 1989/1990)

Nechť M je libovolný bod ležící uvnitř nebo na hranici čtyřstěnu $ABCD$. Označme obsahy stěn BCD, CAD, ABD, ABC po řadě S_A, S_B, S_C, S_D a V objem čtyřstěnu $ABCD$. Dokažte, že platí

$$S_A \cdot |MA| + S_B \cdot |MB| + S_C \cdot |MC| + S_D \cdot |MD| \geqq 3V,$$

kde $|MA|$, $|MB|$, $|MC|$, $|MD|$ jsou vzdálenosti bodu M po řadě od vrcholů A, B, C, D.

Příklad 5 (43. OM, 1991/1992)

Nechť v libovolném čtyřstěnu $ABCD$ platí, že součet délek po dvou navzájem protilehlých hran je roven 1. Označme poloměry kružnic vepsaných do trojúhelníků BCD, CAD, ABD, ABC po řadě r_A, r_B, r_C, r_D. Dokažte, že platí

$$r_A + r_B + r_C + r_D \leqq \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

přičemž rovnost nastane, právě když čtyřstěn $ABCD$ je pravidelný.

Příklad 6 (47. OM, 1995/1996)

Nechť v libovolném čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$\big(|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAD|\,\big) \wedge \big(|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDC|\,\big)\,.$$

Dokažte, že hrany AB i CD mají shodnou délku.

Příklad 7 (19. OM, 1967/1968)

Je dán čtyřstěn $ABCD$, ve kterém platí $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 1$. Dokažte, že pro objem V čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$V \leqq \frac{2}{27}\sqrt{3}.$$

Příklad 8 (2.5, [14])

Nechť O je vnitřní bod libovolného čtyřstěnu $ABCD$, pro který platí, že objemy čtyřstěnů $OABC$, $OBCD$, $OCAD$ i $OABD$ jsou stejné. Dokažte platnost rovnosti

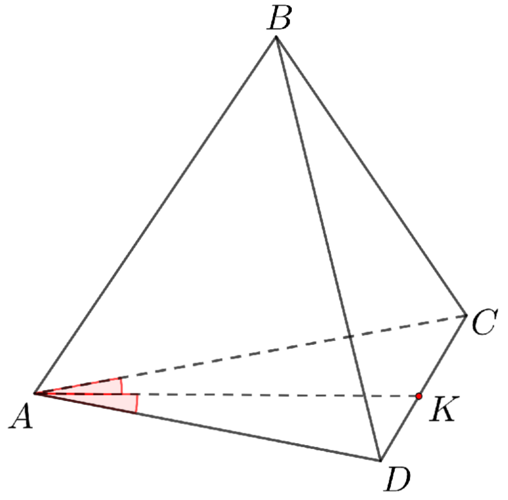
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}.$$

Příklad 9 (2.18, [14])

Je dán čtyřstěn $ABCD$, ve kterém platí

$$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BAD| = 180^\circ.$$

Nechť K je průsečík osy úhlu CAD a hrany CD (obr. 3.29). Vypočtěte velikost úhlu BAK.



obr. 3.29

Příklad 10 (2.54, [14])

Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož výšky se protínají všechny v právě jednom bodě. Dokažte, že je-li tento bod středem kulové plochy vepsané čtyřstěnu $ABCD$, pak je čtyřstěn $ABCD$ pravidelný.

Závěr

Diplomová práce měla za cíl mapovat úlohy o čtyřstěnu v matematických soutěžích a také seznámit čtenáře s pojmem čtyřstěn a jeho vlastnostmi. Výsledkem je ucelený text, který obsahuje definici čtyřstěnu, značení jeho prvků a jeho základní vlastnosti. Dále se v práci zabýváme vybranými matematickými tvrzeními platnými v trojúhelníku a především pak jejich analogiemi, které nalezneme u čtyřstěnu. Stěžejní část práce představuje kapitola 3, „Úlohy o čtyřstěnu“. V této kapitole uvádíme vybrané řešené a neřešené matematické úlohy, které se vyskytly v nejrůznějších matematických soutěžích. Důraz se v této kapitole klade především na precizní zpracování řešení u jednotlivých úloh.

Hlavním přínosem autora bylo především detailní zpracování důkazů jednotlivých analogií u čtyřstěnu v kapitole „Trojúhelník a čtyřstěn“, které byly z velké míry převzaty z ruské literatury. Dalším přínosem je pak také detailní zpracování řešení jednotlivých úloh v části „Řešené úlohy“ a jejich seřazení do bloků na základě obtížnosti, či obsahu. V neposlední řadě je pak pozitivem grafický doprovod u důkazů a řešení jednotlivých vět a úloh, který mnohdy bývá klíčový k pochopení dané problematiky. Veškeré obrázky v tomto textu byly vytvořeny autorem v programu GeoGebra. Celá práce je pak vytvořena na základě uvedených zdrojů a to z české či zahraniční literatury zabývající se problematikou čtyřstěnu. Matematický text, stejně jako celá práce, byl sázen v programu LaTeX.

Obsah práce je pak určen především žákům a studentům, kteří se účastní matematických soutěží. Tuto práci mohou využít k prohloubení si svých znalostí o čtyřstěnu a také jako zdroj řešených a neřešených úloh. Diplomová práce může být užitečná také učitelům, kteří se zabývají prací s talentovanými žáky a může jim tedy posloužit jako ucelený zdroj informací o čtyřstěnech.

Literatura

[1] EHRENFEUCHT, A.: Ciekawy czworościan. Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa, 1966.

[2] ERDNIJEV, P., M.: Sravněnije i obobščenije pri obučeniji matematike (rusky). GUPI, Moskva 1960.

[3] GERETSCHLÄGER, R., KALINOWSKI, J., ŠVRČEK, J.: A Central European Olympiad: the Mathematical Duel. New Jersey: World Scientific, 2018.

[4] GALPERIN, G., A., TOPLYGO, A., K.: Moskovskije matematičeskije olimpiad (rusky). Prosvěščenije, Moskva 1986.

[5] HORÁK, S.: Mnohostěny. Mladá fronta, Praha, 1970.

[6] JUKL, M.: Analytická geometrie. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2014. ISBN 978-80-244-3963-1.

[7] KALININ, A., J., TERESHIN, D., A. Stereometria (rusky). MFTI, 2001

[8] KALINOWSKI, J.: Zbiór zadań z czeskich i słowackich olimpiad matematycznych (1951-2001). MCBMO, Moskva 1997.

[9] KUCZMA, M., WINDISCHBACHER, E.: Polish and Austrian Mathematical olympiads 1981-1995. Australian Mathematics Trust, Canberra 1998.

[10] LEISCHNER, P.: Rozvíjení prostorové představivosti žáků. MFF UK, Praha, 2003.

[11] LIU, A.: Chinese Mathematics Competions and Olympiads 1981-1993. Australian Mathematics Trust, Canberra 1998.

[12] PAWŁOWSKI, H.: Olimpiady i konkurzy matematyczne. Oficyna Wydawnnicza „Tutor“, Toruń 2002.

[13] PAWŁOWSKI, H.:Na olimpijskim szlaku, Oficyna Wydawnicza „Tutor“, Toruń 1999.

[14] PAWŁOWSKI, H.: Zadania z olipiad matematycznych z całego świata Planimetrie i stereometria, TUTOR, 2011.

[15] PAWŁOWSKI, H.: Zadania z olipiad matematycznych z całego świata Trigonometria i geometria, TUTOR, 2015.

[16] PONARIN, J., P.: Elementarnaja geometrija - Tom 1; planimetrija, preobazovanija ploskosti (rusky), MCNMO, Moskva 2004.

[17] PONARIN, J., P.: Elementarnaja geometrija - Tom 2; stereometrija (rusky), MCNMO, Moskva 2006.

[18] PONARIN, J., P.: Elementarnaja geometrija - Tom 3; treugol′niki i tetraedry (rusky), MCNMO, Moskva 2009.

[19] POMYKALOVÁ, E. Matematika pro gymnázia. Stereometrie. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus).

[20] POMYKALOVÁ, E. Matematika pro gymnázia. Planimetrie. Praha: Prometheus, 1997. Učebnice pro střední školy (Prometheus)

[21] ŠVRČEK, J.: Prostorové analogie dvou planimetrických vět. Časopis Matematika-fyzika-informatika, roč. 23 (2014), č. 2

[22] Ročenky matematické olympiády. SPM, Praha.

[23] Zbiór zadań z polskich olimpiad matematycznych dla uczniów liceum i technikum, Kalety, 2000.

[24] Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 51 (1972/73), č. 5, s. 230-232.