Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Přírodovědecká fakulta

Existence netriviálního řešení pro systémy reakce-difúze typu aktivátor-inhibitor v závislosti na parametru

Diplomová práce

Bc. Pavel Kouba

Školitel: Mgr. Jan Eisner, Dr.

České Budějovice 2015

Kouba P., 2015: Existence netriviálního řešení pro systémy reakce-difúze typu aktivátor-inhibitor v závislosti na parametru. [Non-trivial solutions of reaction-diffusion system for activator-inhibitor type. Mgr. Thesis, in Czech.] – 70 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Annotation:
Diploma thesis is about stationary solutions to reaction-diffusion system of the activator-inhibitor type on a one-dimensional domain. Three homogeneous boudary value problems are studied with pure Neumann boudary conditions, with mixed Neumann-Dirichlet boudary conditions and with Neumann conditions on the boundary where simultaneously an additional homogeneous condition is prescribed in a given point in the interior of the domain. For all three boudary value problems the existence of so-called critical points (diffusion parameters, for which a non-trivial solution exists) is proved.

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích, Kouba Pavel

23.4.2015

Poděkování

Velmi děkuji svému školiteli Mgr. Janu Eisnerovi, Dr. za vedení diplomové práce, cenné rady a za trpělivost i čas strávený při konzultacích.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Diplomová práce pojednává o systému reakce-difúze typu aktivátor-inhibitor. Postupně v jednotlivých kapitolách práce budeme řešit tento systém s různými okrajovými podmínkami. V Kapitole 3 budeme studovat systém s homogenními Neumannovými okrajovými podmínkami pro obě složky řešení. V Kapitole 4 budeme studovat systém s homogenními Neumannovými podmínkami pouze pro aktivátor, zatím co pro inhibitor budou předepsány smíšené okrajové podmínky (na jedné straně intervalu homogenní Neumannova podmínka a na druhé straně intervalu pak homogenní Dirichletova podmínka). V Kapitole 5 budeme studovat systém s homogenními Neumannovými podmínkami jako v Kapitole 3, ale předepíšeme navíc pro inhibitor homogenní podmínku uvnitř intervalu. Tím se nám úloha rozpadne na dvě okrajové úlohy s přechodovou podmínkou.

Ve všech kapitolách budeme studovat existenci řešení systému vzhledem k parametrům difúze. Jelikož se ve všech případech jedná o homogenní okrajové úlohy, budou mít tyto vždy triviální řešení $(u, v) = (0, 0)$.

Cílem diplomové práce bude nalezení těch hodnot parametrů difúze (takzvaných *kritických bodů* systému), pro které budou existovat i netriviální řešení.

Pro čistě Neumannovu okrajovou úlohu, studovanou v Kapitole 3, se nám podaří nalézt množinu kritických bodů analyticky a podaří se nám explicitně ukázat, že množina kritických bodů tvoří hyperboly v rovině parametrů difúze. Jedná se o potvrzení známého výsledku (viz. [6], [7], [8]). Pro smíšenou a přechodovou okrajovou studovanou v Kapitolách 4 a 5 získáme pouze implicitní vyjádření pro příslušné množiny kritických bodů. V jednotlivých konkrétních případech se nám podaří získat množiny kritických bodů numericky, jak bude ukázáno v závěrečné Kapitole 6.

Poznámky, tvrzení a věty jsou číslovány podle pořadí a umístění v kapitole. Důkazy následují bezprostředně po tvrzení či větě a jsou ukončeny symbolem ■.

Práce je vysázena systémem LaTeX a obrázky kresleny v programu GeoGebra a Gnuplot.

Kapitola 2

Základní pojmy a pomocná tvrzení

2.1 Seznam značení

$\mathbb{R}$ .... Množina všech reálných čísel.

$\mathbb{R}_+$ .... Množina všech reálných kladných čísel.

$\mathbb{N}$ .... Množina všech přirozených čísel.

$C([a,b])$ .... Spojité funkce na $([a,b])$.

$C^k([a,b])$ .... Spojitě diferencovatelné funkce včetně k-té derivace na $([a,b])$.

b_{ij} .... Koeficienty b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}.

$(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ .... Rovina parametrů d_1, d_2.

H_n, H_n^C, H_n^ℓ .... Hyperboly v rovině parametrů difúze.

K_N, K_D, K_{x_0} .... Výsledné množiny kritickcých bodů.

D_ω .... Diskriminant charakteristické rovnice 4.stupně.

$detB$ .... Determinant matice (v tomto případě) B.

$FS = \{...\}$ .... Fundamentální systém.

S_I, S_{II}, S_{III} .... Sektory v rovině parametrů.

$(u, v) \neq (0, 0)$ .... Netriviální (nenulové) řešení.

$(u, v) = (0, 0)$ .... Triviální (nulové) řešení.

2.2 Prostory hladkých funkcí

Jelikož budeme v textu pracovat s množinami funkcí spojitých nebo spojitě diferencovatelných, zavedeme si značení: Pro celé nezáporné číslo k a konečný interval $[a, b]$ označíme symbolem

$$C^k([a, b])$$

množinu všech funkcí $f = f(x)$ definovaných na intervalu $[a, b]$, které tam jsou spojité a mají (pro $k > 0$) spojité derivace až do k-tého řádu včetně. V krajních bodech intervalu $[a, b]$ uvažujeme derivaci zprava, respektive zleva.(viz. [5])

2.3 Systém reakce-difúze

Mějme úlohu zadanou systémem rovnici pro neznámé funkce u, v, která je tvaru

$$\begin{aligned} d_1 u''(x) + b_{11} u(x) + b_{12} v(x) &= 0, \\ d_2 v''(x) + b_{21} u(x) + b_{22} v(x) &= 0, \end{aligned} \qquad x \in (0, \ell).$$

V tomto systému členy $b_{11}u$, $b_{12}u$, $b_{21}v$, $b_{22}v$ představují reakci a členy u'' a v'' představují difúzi, která je ovlivňována parametry $d_1, d_2 \in \mathbb{R}_+$. Navíc, pokud maticový zápis koeficientů b_{ij} splňuje

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix} \quad \textit{nebo} \quad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix},$$

mluvíme o takzvaném systému reakce-difúze typu aktivátor-inhibitor, kde složka u je aktivátorem a složka v inhibitorem.

2.4 Zadání a řešení úlohy

Mějme úlohu zadanou systémem rovnic pro neznámé funkce u, v, která je tvaru

$$\begin{aligned} d_1 u''(x) + b_{11} u(x) + b_{12} v(x) &= 0, \\ d_2 v''(x) + b_{21} u(x) + b_{22} v(x) &= 0, \end{aligned} \qquad x \in (0, \ell) \tag{2.1}$$

kde $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+$ a $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in \mathbb{R}$ a k ní příslušné Neumannovy okrajové podmínky

$$\begin{aligned} u'(0) &= 0, \qquad & u'(\ell) &= 0, \\ v'(0) &= 0, \qquad & v'(\ell) &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Potom řešením okrajové úlohy rozumíme takovou dvojici funkcí (u, v) splňující soustavu rovnic (2.1), okrajové podmínky (2.2) a regularitu

$$u, v \in C^2([0, \ell]). \tag{2.3}$$

2.5 Kritické body

Mějme soustavu (2.1) a okrajové podmínky (2.2). Potom řešení úlohy (2.1), (2.2) je závislé na parametrech $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$. Jelikož soustava (2.1) i okrajové podmínky (2.2) jsou homogenní, pak $(u, v) = (0, 0)$ je řešením pro libovolné parametry (d_1, d_2). Jako kritické body systému pak označme takové hodnoty parametrů (d_1, d_2), pro které platí, že řešení (u, v) okrajové úlohy (2.1), (2.2) splňuje $(u, v) \neq (0, 0)$.

Navíc se v diplomové práci zaměříme především na množiny kritických bodů, které rozdělují rovinu $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$ na souvislé oblasti. Oddělují tak od sebe jednotlivé oblasti, kde kritické body nejsou, a tedy kde existuje pouze triviální řešení $(u, v) = (0, 0)$.

2.6 Pomocná tvrzení

Zaveďme si nyní některá tvrzení a pojmy, které se zpočátku mohou jevit nepotřebné, nakonec však uvidíme, že se nám vyplatí je uvést. Ještě předním si však zavedeme některé substituce, které budou v pozdějších výpočtech také používány.

$$\begin{aligned} S_1(x) &= e^{r_1 x} - e^{-r_1 x}, \\ S_2(x) &= e^{r_2 x} - e^{-r_2 x}, \\ C_1(x) &= e^{r_1 x} + e^{-r_1 x}, \\ C_2(x) &= e^{r_2 x} + e^{-r_2 x}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

a navíc si definujeme výraz

$$\omega_{1,2} = \frac{-(d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) \pm \sqrt{D_\omega}}{2 d_1 d_2}, \tag{2.5}$$

kde

$$D_\omega = (d_2 b_{11} + d_1 b_{22})^2 - 4 d_1 d_2 detB, \tag{2.6}$$

kde

$$detB = (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}).$$

Navíc platí vztahy

$$r_1^2 = \omega_1, \quad r_2^2 = \omega_2. \tag{2.7}$$

Časem $r_{1,2}$ budou vlastně kořeny charakteristické rovnice 4. stupně odpovídající obyčejné rovnici 4. řádu, která bude důležitá pro studium našeho systému. Poslední nutností je zmínit znaménkové předpoklady koeficientů b_{ij}, jenž jsou součástí zadání každé úlohy a vypadají následovně. Vytvoříme-li si z koeficientů b_{ij} matici, bude tvaru

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Pro koeficienty b_{ij} budeme v celé diplomové práci předpokládat, že matice B je typu

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix} \quad nebo \quad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

a, že

$$detB > 0, \;\; b_{11} + b_{22} < 0. \tag{2.9}$$

Ještě ale dodejme, že všechny funkce (2.4) jsou definované na intervalu $(0, \ell)$, dále se bude v následujících definicích objevovat parametr L, který je kladný a později budeme používat

$$L \in \{x_0, \ell - x_0, \ell\}.$$

Tvrzení 2.6.1 *Nechť $L > 0$, potom*

$$S_1(L) = 0$$

tehdy a jen tehdy, když

$$\omega_1 = -(\frac{n\pi}{L})^2, \tag{2.10}$$

pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a obdobně

$$S_2(L) = 0$$

tehdy a jen tehdy, když

$$\omega_2 = -(\frac{m\pi}{L})^2, \tag{2.11}$$

pro nějaké $m \in \mathbb{N}$.

Důkaz: Rozepíšeme-li si $S_1(L)$ a $S_2(L)$ dostaneme

$$e^{r_1 L} - e^{-r_1 L} = 0,$$
$$e^{r_2 L} - e^{-r_2 L} = 0,$$

neboli

$$\begin{aligned} e^{2r_1 L} &= 1, \\ e^{2r_2 L} &= 1, \end{aligned}$$

což platí, když

$$\begin{aligned} 2r_1 L &= 2n\pi i, \\ 2r_2 L &= 2m\pi i, \end{aligned}$$

pro nějaká $n, m \in \mathbb{N}$. Vyjádříme-li si r_1 a r_2, pak máme

$$\begin{aligned} r_1 &= \tfrac{n\pi i}{L}, \\ r_2 &= \tfrac{m\pi i}{L}. \end{aligned}$$

Rovnice si můžeme stejně tak dobře vyjádřit i pomocí $\omega_{1,2}$ ze vztahu (2.7), tedy

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -(\tfrac{n\pi}{L})^2, \\ \omega_2 &= -(\tfrac{m\pi}{L})^2. \end{aligned}$$

■

Tvrzení 2.6.2 *Nechť $L > 0$, potom*

$$C_1(L) = 0$$

tehdy a jen tehdy, když

$$\omega_1 = -(\frac{(2n-1)\pi}{2L})^2. \tag{2.12}$$

pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Obdobně

$$C_2(L) = 0$$

tehdy a jen tehdy, když

$$\omega_2 = -(\frac{(2m-1)\pi}{2L})^2, \tag{2.13}$$

pro nějaké $m \in \mathbb{N}$.

Důkaz: Podobně jako v důkaze pro Tvrzení 2.6.1 rozepíšeme-li si $C_1(L)$ a $C_2(L)$ dostaneme

$$e^{r_1 L} + e^{-r_1 L} = 0,$$
$$e^{r_2 L} + e^{-r_2 L} = 0,$$

neboli

$$\begin{aligned} e^{2r_1 L} &= -1, \\ e^{2r_2 L} &= -1, \end{aligned}$$

což platí, když

$$\begin{aligned} 2r_1 L &= (2n-1)\pi i, \\ 2r_2 L &= (2m-1)\pi i, \end{aligned}$$

pro nějaká $n, m \in \mathbb{N}$. Vyjádříme-li si r_1 a r_2 pak máme

$$\begin{aligned} r_1 &= \tfrac{(2n-1)\pi i}{2L}, \\ r_2 &= \tfrac{(2m-1)\pi i}{2L}. \end{aligned}$$

Rovnice lze podle rovnosti (2.7) vyjádřit i jako

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -(\tfrac{(2n-1)\pi}{2L})^2, \\ \omega_2 &= -(\tfrac{(2m-1)\pi}{2L})^2. \end{aligned}$$

■

Poznámka 2.6.3 *Pokud si rovnost (2.10) z Tvrzení 2.6.1 označíme jako*

$$\omega_1 = -\kappa_n,$$

kde platí, že $\kappa_n > 0$ a

$$\kappa_n = (\frac{n\pi}{L})^2 \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

potom κ_n jsou vlastní čísla úlohy

$$-u'' = \kappa u \quad na\ (0, L) \tag{2.15}$$

pro Neumannovy okrajové podmínky

$$u'(0) = 0, \quad u'(L) = 0. \tag{2.16}$$

Příslušnými vlastními funkcemi úlohy potom jsou

$$u_n = \cos\sqrt{\kappa_n}x \quad na\ (0, L)$$

nebo

$$\widetilde{u}_n = \cos\sqrt{\kappa_n}(L-x) \quad na \;\; (0,L).$$

Obdobně, pokud si (2.12) z Tvrzení 2.6.2 označíme jako

$$\omega_1 = -\mu_n,$$

kde platí, že $\mu_n > 0$ *a*

$$\mu_n = (\frac{(2n-1)\pi}{2L})^2 \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

potom μ_n *jsou vlastní čísla úlohy*

$$-u'' = \mu u \quad na\,(0,L), \tag{2.18}$$

pro Neumannovy okrajové podmínky na jedné straně intervalu $(0,L)$ *a Dirichletovy na druhé straně*

$$u'(0) = 0, \quad u(L) = 0. \tag{2.19}$$

Příslušnými vlastními funkcemi úlohy potom jsou

$$u_n = \cos\sqrt{\mu_n}x \quad na\,(0,L).$$

Respektive úloha (2.18) s podmínkami

$$u(0) = 0, \quad u'(L) = 0.$$

Má stejná vlastní čísla μ_n *tvaru (2.17). Příslušné vlastní funkce jsou tvaru*

$$\widetilde{u}_n = \cos\sqrt{\mu_n}(L-x) \quad na\,(0,L).$$

Tvrzení 2.6.4 *Jestliže platí* $-\omega_1 = \kappa_n$*, kde platí (2.14) pro nějaké* $n \in \mathbb{N}$*, neboli jestliže platí*

$$S_1(L) = 0,$$

potom platí, že

$$d = (d_1, d_2) \in H_n,$$

kde

$$H_n = \{(d_1,d_2) \in {\mathbb{R}_+}^2 : d_2 = \frac{detB - \kappa_n d_1 b_{22}}{b_{11}\kappa_n - d_1\kappa_n^2}\}. \tag{2.20}$$

Důkaz: Začněme u rovnosti

$$\kappa_n = -\omega_1,$$

dosazením rovnosti (2.5) za ω_1, pak dostaneme postupně

$$\begin{aligned}
\kappa_n &= -\frac{-(d_2b_{11}+d_1b_{22})+\sqrt{(d_2b_{11}+d_1b_{22})^2-4d_1d_2(b_{22}b_{11}-b_{12}b_{21})}}{2d_1d_2}, \\
-2d_1d_2\kappa_n &= -(d_2b_{11}+d_1b_{22})+\sqrt{(d_2b_{11}+d_1b_{22})^2-4d_1d_2(b_{22}b_{11}-b_{12}b_{21})}. \\
(d_2b_{11}+d_1b_{22})-2d_1d_2\kappa_n &= \sqrt{(d_2b_{11}+d_1b_{22})^2-4d_1d_2(b_{22}b_{11}-b_{12}b_{21})},
\end{aligned}$$

rovnici umocníme na druhou, výraz $(b_{22}b_{11}-b_{12}b_{21})$ zapíšeme jako $detB$ a získáváme

$$\begin{aligned}
((d_2b_{11}+d_1b_{22})-2d_1d_2\kappa_n)^2 &= (d_2b_{11}+d_1b_{22})^2-4d_1d_2detB, \\
(d_2b_{11}+d_1b_{22})^2-4d_1d_2\kappa_n(d_2b_{11}+d_1b_{22})+4d_1^2d_2^2\kappa_n^2 &= (d_2b_{11}+d_1b_{22})^2-4d_1d_2detB \\
-4d_1d_2\kappa_n(d_2b_{11}+d_1b_{22})+4d_1^2d_2^2\kappa_n^2 &= -4d_1d_2detB,
\end{aligned}$$

Převedeme vše na jednu stranu a vytknutím $-4d_1d_2$ získáme výraz

$$-4d_1d_2(\kappa_n(d_2b_{11}+d_1b_{22})-d_1d_2\kappa_n^2-detB)=0,$$

Jelikož $-4d_1d_2 \neq 0$, potom musí nutně platit, že

$$\begin{aligned}
\kappa_n(d_2b_{11}+d_1b_{22})-d_1d_2\kappa_n^2-detB &= 0, \\
\kappa_nd_2b_{11}+\kappa_nd_1b_{22}-d_1d_2\kappa_n^2 &= detB, \\
d_2(\kappa_nb_{11}-d_1\kappa_n^2) &= detB-\kappa_nd_1b_{22},
\end{aligned}$$

vyjádříme-li si d_2 od d_1, výsledná množina kritických bodů (d_1, d_2) bude tedy dána funkcí

$$d_2 = \frac{detB-\kappa_nd_1b_{22}}{b_{11}\kappa_n-d_1\kappa_n^2}. \tag{2.21}$$

Grafy této funkce pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou hyperboly H_n.

■

Tvrzení 2.6.5 *Jestliže platí $-\omega_1 = \kappa_m$, kde platí (2.14) pro nějaké $m \in \mathbb{N}$, neboli jestliže platí*

$$S_2(L) = 0,$$

potom platí, že

$$d = (d_1, d_2) \in H_m,$$

kde

$$H_m = \{(d_1, d_2) \in {\mathbb{R}_+}^2 : d_2 = \frac{detB - \kappa_m d_1 b_{22}}{b_{11}\kappa_m - d_1 \kappa_m^2}\}. \tag{2.22}$$

Důkaz: Bude vedený obdobně, jen budeme vycházet z rovnice $\omega_2 = -\kappa_m$. Dosazením na ω_2 pak stejnými úpravami jako v předchozím důkazu pro tvrzení 2.6.4 získáme stejnou rovnost

$$d_2 = \frac{detB - \kappa_m d_1 b_{22}}{b_{11}\kappa_m - d_1 \kappa_m^2},$$

■

Tvrzení 2.6.6 *Jestliže platí $-\omega_1 = \mu_n$, kde μ_n je (2.17) pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, neboli jestlže platí*

$$C_1(L) = 0,$$

potom platí, že

$$d = (d_1, d_2) \in H_n^C,$$

kde

$$H_n^C = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2 : d_2 = \frac{detB - \mu_n d_1 b_{22}}{b_{11}\mu_n - d_1 \mu_n^2}\}.$$

Důkaz: Provedeme stejně jako důkaz Tvrzení 2.6.4, jen použijeme μ_n místo κ_n.

■

Tvrzení 2.6.7 *Jestliže platí $-\omega_2 = \mu_m$, kde μ_m je (2.17) pro nějaké $m \in \mathbb{N}$, neboli jestliže platí*

$$C_2(L) = 0,$$

potom platí, že

$$d = (d_1, d_2) \in H_m^C,$$

kde

$$H_m^C = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2 : d_2 = \frac{detB - \mu_m d_1 b_{22}}{b_{11}\mu_m - d_1 \mu_m^2}\}.$$

Důkaz: Je stejný jako důkaz pro Tvrzení 2.6.5.

■

Tvrzení 2.6.8 *Rovnosti* $S_1(L) = 0$ *a zároveň* $S_2(L) = 0$ *nastanou současně tehdy a jen tehdy, když*

$$(d_1, d_2) \in H_n \cap H_m.$$

Navíc pokud

$$D_\omega \neq 0, \tag{2.23}$$

pak platí

$$n \neq m$$

a

$$H_n \neq H_m.$$

Důkaz: První část tvrzení, že $(d_1, d_2) \in H_n \cap H_m$. plyne z Tvrzení 2.6.4 a Tvrzení 2.6.5. Navíc máme podle Tvrzení 2.6.1, že

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -(\tfrac{n\pi}{L})^2 = -\kappa_n, \\ \omega_2 &= -(\tfrac{m\pi}{L})^2 = -\kappa_m. \end{aligned} \tag{2.24}$$

pro nějaká $n, m \in \mathbb{N}$. Pokud předpokládáme (2.23), máme

$$\omega_1 \neq \omega_2,$$

a tedy

$$\kappa_n \neq \kappa_m.$$

Vzhledem k tvaru (2.24) a tvaru hyperbol (2.20) a (2.22) dostáváme, že

$$n \neq m$$

a

$$H_n \neq H_m.$$

■

Tvrzení 2.6.9 *Rovnosti* $C_1(L) = 0$ *a zároveň* $C_2(L) = 0$ *nastanou současně tehdy a jen tehdy, když*

$$(d_1, d_2) \in H_n^C \cap H_m^C.$$

Navíc pokud (2.23), pak platí

$$n \neq m$$

a

$$H_n^C \neq H_m^C.$$

Důkaz: Obdobně jako v Tvrzení 2.6.8.

Tvrzení 2.6.10 *Jestli že platí $C_1(L) = 0$, potom $S_1(L) \neq 0$.*

Důkaz: pokud si rozepíšeme $C_1(L) = 0$ a $S_1(L) = 0$, pak dostaneme

$$e^{r_1 L} + e^{-r_1 L} = 0,$$
$$e^{r_1 L} - e^{-r_1 L} = 0,$$

neboli

$$e^{2r_1 L} = -1,$$
$$e^{2r_1 L} = 1.$$

Tyto rovnosti však zároveň nastat nemohou.

■

V následujících tvrzeních budeme uvažovat $x_0 \in (0, \ell)$ libovolné a budeme studovat funkce z (2.4) pro $L = x_0$ a $L = (\ell - x_0)$.

Tvrzení 2.6.11 *Jestliže platí $C_1(x_0) = 0$ a zároveň $C_1(\ell - x_0) = 0$ pro nějaké x_0 , potom*

$$S_1(\ell) = 0$$

a platí, že

$$(d_1, d_2) \in H_k. \tag{2.25}$$

pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a $L = \ell$.

Důkaz: Z rovností v Tvrzení 2.6.11 podle (2.12), pak podle rovnice (2.12) dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -(\tfrac{(2n-1)\pi}{2x_0})^2, \\ \omega_1 &= -(\tfrac{(2m-1)\pi}{2(\ell - x_0)})^2. \end{aligned}$$

pro nějaká $n, m \in \mathbb{N}$. Jelikož jedna se rovná druhé, dostaneme

$$-(\frac{(2n-1)\pi}{2x_0})^2 = -(\frac{(2m-1)\pi}{2(\ell - x_0)})^2.$$

Po odmocnění a následném vynásobení $-\frac{1}{\pi}$ pak

$$\frac{2n-1}{2x_0} = \frac{2m-1}{2(\ell - x_0)}. \tag{2.26}$$

Rovnici dále upravujeme

$$\left.\begin{array}{rcl} (\ell - x_0)(2n-1) & = & (2m-1)x_0, \\ \ell(2n-1) - x_0(2n-1) & = & (2m-1)x_0, \\ \ell(2n-1) & = & (2m-1)x_0 + x_0(2n-1), \\ \ell(2n-1) & = & x_0(2m+2n-2). \end{array}\right. \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Rovnici upravíme opět do tvaru rovnice (2.26), tedy

$$\left.\begin{array}{rcl} \ell(2n-1) & = & 2x_0(m+n-1), \\ \frac{2n-1}{2x_0} & = & \frac{m+n-1}{\ell}. \end{array}\right. \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Pokud teď najdeme takové

$$\omega_1 = -(\frac{k\pi}{\ell})^2 = -\kappa_k, \tag{2.27}$$

pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Tedy dle Tvrzení 2.6.4 dostáváme, že $d = (d_1, d_2) \in H_k$ pro $k = n + m - 1$ a podle Tvrzení 2.6.1 pro $L = \ell$ dostáváme, že

$$S_1(\ell) = 0.$$

$\blacksquare$

Na rozdíl od Tvrzení 2.6.11 se budeme nyní zabývat různými C_1, C_2 v různých argumentech x_0, $\ell - x_0$.

Tvrzení 2.6.12 *Pokud $C_1(x_0) = 0$ a zároveň $C_2(\ell - x_0) = 0$, pak*

$$(d_1, d_2) \in H^F_{k,m} \cap H^G_{k,m},$$

kde

$$H^F_{k,m} = \{(d_1, d_2) \in {\mathbb{R}_+}^2 : d_2 = \frac{-d_1 b_{22}}{b_{11} - d_1(\mu_k^{x_0} + \mu_m^{\ell - x_0})}\} \tag{2.28}$$

a

$$H^G_{k,m} = \{(d_1, d_2) \in {\mathbb{R}_+}^2 : d_2 = \frac{detB}{d_1 \mu_k^{x_0} \mu_m^{\ell - x_0}}\}. \tag{2.29}$$

Důkaz: Obdobný jako důkaz pro Tvrzení 2.6.11, pouze s tím rozdílem, že vycházíme z tvarů rovnic (2.12) a (2.13).

začněme opět tím, že si rozepíšeme rovnosti $C_1(x_0) = 0$, $C_2(\ell - x_0) = 0$ do tvaru dle rovnice (2.12) a (2.13), tedy

$$\begin{aligned} -\omega_1 = (\tfrac{(2k-1)\pi}{2x_0})^2 &= \mu_k^{x_0}, \\ -\omega_2 = (\tfrac{(2m-1)\pi}{2(\ell-x_0)})^2 &= \mu_m^{\ell-x_0}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

pro nějaká $k, m \in \mathbb{N}$. Nyní, když dosadíme dosadíme za $\omega_{1,2}$ rovnost (2.5)

$$\begin{aligned} \tfrac{(d_2b_{11}+d_1b_{22})-\sqrt{D_\omega}}{2d_1d_2} &= \mu_k^{x_0}, \\ \tfrac{(d_2b_{11}+d_1b_{22})+\sqrt{D_\omega}}{2d_1d_2} &= \mu_m^{\ell-x_0}, \end{aligned}$$

budeme řešit rovnice jako soustavu pro neznámé d_1, d_2. Vynásobíme-li obě rovnice jmenovatelem $2d_1d_2$ získáváme

$$\begin{aligned} (d_2b_{11} + d_1b_{22}) - \sqrt{D_\omega} &= 2d_1d_2\mu_k^{x_0}, \\ (d_2b_{11} + d_1b_{22}) + \sqrt{D_\omega} &= 2d_1d_2\mu_m^{\ell-x_0}, \end{aligned}$$

Přičtením první rovnice k druhé a následně odečtením první od druhé získáváme rovnice

$$\begin{aligned} (d_2b_{11} + d_1b_{22}) &= d_1d_2(\mu_k^{x_0} + \mu_m^{\ell-x_0}), \\ \sqrt{D_\omega} &= d_1d_2(\mu_m^{\ell-x_0} - \mu_k^{x_0}), \end{aligned} \tag{2.31}$$

Pokud si teď z první rovnice soustavy (2.31) vyjádříme d_2 dostaneme

$$H_{k,m}^F = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R_+}^2 : d_2 = \frac{-d_1b_{22}}{b_{11} - d_1(\mu_k^{x_0} + \mu_m^{\ell-x_0})}\}.$$

Grafem této křívky v rovině $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$ je hyperbola $H_{k,m}^F$.

Pokud nyní umocníme druhou rovnici soustavy (2.31) a dosadíme za D_ω dostaneme

$$(d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2 detB = d_1^2d_2^2(\mu_m^{\ell-x_0} - \mu_k^{x_0})^2,$$

dosazením první rovnice ze soustavy (2.31) pak dostaneme tvar

$$d_1^2d_2^2(\mu_k^{x_0} + \mu_m^{\ell-x_0})^2 - 4d_1d_2 detB = d_1^2d_2^2(\mu_m^{\ell-x_0} - \mu_k^{x_0})^2,$$

postupnými úpravami se pak dostaneme až ke konečné rovnici

$$H_{k,m}^G = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R_+}^2 : d_2 = \frac{detB}{d_1\mu_k^{x_0}\mu_m^{\ell-x_0}}\}.$$

■

Tvrzení 2.6.13 *Pokud $C_2(x_0) = 0$ a zároveň $C_1(\ell - x_0) = 0$, pak*

$$(d_1, d_2) \in H^F_{k,m} \cap H^G_{k,m},$$

kde hyperboly jsou tvaru (2.28) a (2.29).

Důkaz: Stejný jako v Tvrzení 2.6.12.

■

Poznámka 2.6.14 *V rovině $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$, je křivka $H^G_{k,m}$ také hyperbolou. Řešením soustavy (2.30) jsou (d_1, d_2) taková, která leží na množině bodů $H^F_{k,m} \cap H^G_{k,m}$. Jelikož jsou hyperboly na první pohled rozdílné, jejich průniky jsou izolované body.*

2.7 Pomocné rovnosti

V jednotlivých úlohách budeme potřebovat ověřovat i některé rovnosti, jejichž pozdější dokazování by nám znepřehlednilo úlohu. Pro přehlednos prodiskutujme tedy tyto rovnosti, používané při výpočtech v následujících sekcích již v této sekci. Později se na ně budeme pouze odkazovat.

První druh nerovností i s jeho podmínkami uvedeme v následujícím tvrzení

Tvrzení 2.7.1 *Pro všechna $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ za znaménkových předpokladů b_{ij} (2.8) a (2.9), jsou nerovnosti*

$$r_2 \neq 0, \tag{2.32}$$

$$R_2 \neq 0, \tag{2.33}$$

$$R_1 \neq 0, \tag{2.34}$$

kde

$$R_1 = r_1^2 + \frac{b_{11}}{d_1} \tag{2.35}$$

a

$$R_2 = r_2^2 + \frac{b_{11}}{d_1}, \tag{2.36}$$

vždy splněny.

Důkaz: První na řadě bude nerovnost (2.32), tedy

$$r_2 \neq 0.$$

Dosazením za r_2 ze vztahu (2.7) postupně dostáváme ekvivalentní nerovnosti

$$\sqrt{\frac{-(d_2b_{11} + d_1b_{22}) - \sqrt{(d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2(b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21})}}{2d_1d_2}} \neq 0, \tag{2.37}$$

$$-(d_2b_{11} + d_1b_{22}) - \sqrt{(d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2(b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21})} \neq 0. \tag{2.38}$$

Podíváme-li se na rovnici (2.38) zjistíme, že rovnost by nastala pouze v případě, kdy platí

$$-4d_1d_2(b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21}) = 0,$$

Tento případ však nemůže nastat, jelikož platí $(d_1d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ a (2.9). Nerovnost (2.38) je splněna vždy, a tedy platí i nerovnost (2.32).

Nyní ověřovaná rovnost bude (2.33), tedy

$$r_2^2 + \frac{b_{11}}{d_1} \neq 0,$$

tady opět využijme vztahu (2.7) a sice, že $r_2^2 = \omega_2$ a převedením $\frac{b_{11}}{d_1}$ na pravou stranu získáme

$$\omega_2 \neq -\frac{b_{11}}{d_1}.$$

Postupnými úpravami pak dostáváme ekvivalentní nerovnosti

$$\begin{aligned}
\frac{-(d_2b_{11} + d_1b_{22}) - \sqrt{(d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2(b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21})}}{2d_1d_2} &\neq -\frac{b_{11}}{d_1}, \\
-\frac{b_{11}}{d_1} - \frac{b_{22}}{d_2} - \frac{\sqrt{(d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2(b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21})}}{d_1d_2} &\neq -2\frac{b_{11}}{d_1}, \\
\frac{b_{11}}{d_1} - \frac{b_{22}}{d_2} - \frac{\sqrt{(d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2(b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21})}}{d_1d_2} &\neq 0.
\end{aligned}$$

Po následujících úpravách odstraníme zlomek tím, že rovnici vynásobíme d_1d_2, dostáváme tedy ekvivalentně

$$\begin{aligned}
d_2b_{11} - d_1b_{22} - \sqrt{(d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2(b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21})} &\neq 0, \\
(d_2b_{11} - d_1b_{22}) - \sqrt{(d_2b_{11} - d_1b_{22})^2 + 4d_1d_2b_{12}b_{21})} &\neq 0.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost by neplatila tehdy a jen tehdy, pokud

$$4d_1 d_2 b_{12} b_{21} = 0,$$

což díky tomu, že $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ a podmínkám pro b_{ij} (2.8), (2.9) nikdy nenastane. Tedy nerovnost (2.33) bude splněna vždy.

Stejně jako předchozí podmínku (2.33) lze řešit i nerovnost (2.34), tedy

$$r_2^1 + \frac{b_{11}}{d_1} \neq 0,$$

s tím rozdílem, že výsledný tvar, po stejných úpravách jako pro nerovnost (2.33), by byl

$$(d_2 b_{11} - d_1 b_{22}) + \sqrt{(d_2 b_{11} - d_1 b_{22})^2 + 4d_1 d_2 b_{12} b_{21})} \neq 0.$$

Což bude podle předpokladů (2.8), (2.9) a $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ vždy nenulový výraz.

■

Druhou skupinou jsou rovnosti, které vycházejí z předpokladu, že výraz (2.6) je různý od nuly. Pokud by platilo $D_\omega = 0$, nedostali bychom generický případ. Tento případ je podrobnější popsám v Poznámce 3.2.1.

Tvrzení 2.7.2 *Jestliže*

$$D_\omega = (d_2 b_{11} + d_1 b_{22})^2 - 4d_1 d_2 detB \neq 0, \tag{2.39}$$

a také $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ *a (2.8), (2.9), potom jsou následující nerovnosti*

$$\begin{aligned} r_2^2 - r_1^2 &\neq 0, && (2.40)\\ (1 - \frac{R_1}{R_2}) &\neq 0, && (2.41) \end{aligned}$$

kde R_1, R_2 *jsou (2.35), (2.36), vždy splněny.*

Důkaz: První nerovností v pořadí je (2.40), tedy

$$r_2^2 - r_1^2 \neq 0.$$

Díky vztahu (2.7) lze ekvivalentně přepsat tuto nerovnost jako

$$\begin{aligned} \omega_1 - \omega_2 &\neq 0,\\ \omega_1 &\neq \omega_2, \end{aligned}$$

$$\frac{-(d_2b_{11}+d_1b_{22})+\sqrt{(d_2b_{11}+d_1b_{22})^2-4d_1d_2(b_{22}b_{11}-b_{12}b_{21})}}{2d_1d_2}\neq$$
$$\neq\frac{-(d_2b_{11}+d_1b_{22})-\sqrt{(d_2b_{11}+d_1b_{22})^2-4d_1d_2(b_{22}b_{11}-b_{12}b_{21})}}{2d_1d_2}.$$

Poslední nerovnost lze podle vztahu (2.6) pro přehlednost napsat jako

$$\frac{-(d_2b_{11}+d_1b_{22})+\sqrt{D_\omega}}{2d_1d_2}\neq\frac{-(d_2b_{11}+d_1b_{22})-\sqrt{D_\omega}}{2d_1d_2}.$$

Můžeme si povšimnout, že tato nerovnost bude za předpokladu (2.39) splněná.

Poslední nerovností je (2.41), tedy $R_1 \neq R_2$. Zpětně nahradíme $R_{1,2}$ podle (2.35), (2.36) a upravíme

$$\begin{aligned}(r_1^2+\frac{b_{11}}{d_1}) &\neq (r_2^2+\frac{b_{11}}{d_1}),\\ r_1^2 &\neq r_2^2.\end{aligned}$$

Což je již ověřená nerovnost (2.40).

■

Kapitola 3

Úloha typu reakce-difúze

V této kapitole už začneme prvně řešit úlohu typu reakce-difúze. Jinými slovy, budeme mít soustavu dvou rovnic 2. řádu s Neumannovými okrajovými podmínkami pro u a v na obou koncích intervalu. Soustavu budeme řešit vzhledem k parametrům d_1, d_2, které představují parametry difúze.

Ukážeme si jak lze soustavu dvou rovnic 2. řádu převést na jednu rovnici 4.řádu a následně pro ni transformovat podmínky. Dále určíme kořeny charakteristické rovnice a provedeme pro ně kvalitativní analýzu. Kořeny charakteristické rovnice určují fundamentální systém prostoru řešení, jehož lineární kombinací získáme obecné řešení systému.

Dosazením všech okrajových podmínek do obecného řešení pak obdržíme lineární soustavu čtyř rovnic pro hledané reálné koeficienty lineární kombinace prvků fundamentálního systému v obecném řešení. Tato soustava bude závislá na dvojici parametrů d_1, d_2. Dostaneme se tak k samotné podstatě naší úlohy. Budeme hledat kritické body (d_1, d_2) tak, aby pro ně existovala netriviální čtveřice koeficientů a tím i netriviální řešení úlohy.

Následující úloha je nejjednodušší ze zkoumaných úloh, většina postupů a vlastností bude uplatnitelná i na dalších úlohách, kde si posléze zavedeme jiné okrajové nebo přechodové podmínky. Proto se pokusíme úlohu vyřešit podrobně, do jednotlivých detailů.

3.1 Zadání úlohy

Přejděme nyní k samotnému zadání úlohy. Zadání se bude skládat ze tří podstatných částí. Jako první si zadáme tvar soustavy rovnic pro u, v, který vypadá následovně

$$\begin{aligned} d_1u'' + b_{11}u + b_{12}v &= 0, \\ d_2v'' + b_{21}u + b_{22}v &= 0, \end{aligned} \qquad na\ (0, \ell) \tag{3.1}$$

kde $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+$ a $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in \mathbb{R}$. Následuje zadání Neumannových okrajových podmínek

$$u'(0) = 0, \qquad u'(\ell) = 0, \tag{3.2}$$

$$v'(0) = 0, \qquad v'(\ell) = 0. \tag{3.3}$$

Poznámka: Neumannovy okrajové podmínky pro nulovou první derivaci lze interpretovat jako například oboustranně vetknutý nosník, tepelně izolovaný vodič a podobně. Tedy modely, kde je uzavřená hranice.

Poslední částí zadání pak bude požadavek na koeficienty b_{ij}. Vytvoříme-li si z koeficientů matici

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

pak požadujeme, aby znaménkově byla matice B jednou z typů

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix} \quad nebo \quad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

a navíc, aby byly splněny podmínky

$$detB > 0, \;\; b_{11} + b_{22} < 0.^1 \tag{3.5}$$

Po zavedení všeho potřebného si nyní stanovme cíl úlohy a v podstatě i celé práce. Jak je na první pohled viditelné, úloha (3.1), (3.2), (3.3) má pro jakékoliv $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ nulové řešení $(u, v) = (0, 0)$. Naším cílem však bude ukázat, že pro některé dvojice $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ bude existovat i netriviální řešení $(u, v) \neq (0, 0)$ úlohy (3.1),(3.2) a (3.3). Navíc některé množiny kritickcých bodů (d_1, d_2) najdeme pro úlohu úlohy (3.1), (3.2) a (3.3) dokonce analyticky.

[1]Stopa matice B,

3.2 Postup řešení

Nejprve se podívejme, jaká budou řešení u, v pro úlohu (3.1), (3.2) a (3.3). Klasické řešení úlohy (3.1), (3.2) a (3.3) splňuje regularitu

$$u, v \in C^2([0, \ell]). \tag{3.6}$$

Přičemž ve všech tvrzeních o regularitě uvažujeme jednostranné derivace v krajních bodech intervalu. Jestliže z první rovnice soustavy (3.1) vyjádříme u'' dostáváme:

$$d_1 u'' = -b_{11} u - b_{12} v, \quad x \in (0, \ell),$$

proto pokud (3.6) potom i $u'' \in C^2([0, \ell])$. Opakovaným postupem pak dostáváme, že

$$u, v \in C^\infty([0, \ell]),$$

Na intervalu $(0, \ell)$ jsou tedy funkce u, v spojité ve všech derivacích.

3.2.1 Převedení soustavy rovnic na rovnici 4. řádu

V následujícím kroku upravíme ekvivalentně soustavu dvou rovnic 2. řádu (3.1) na tvar jedné rovnice 4. řádu. Z první rovnice soustavy (3.1) si vyjádříme v:

$$v = -\frac{d_1 u'' + b_{11} u}{b_{12}}, \quad na\ (0, \ell), \tag{3.7}$$

které posléze dosadíme do rovnice druhé a upravíme na tvar

$$d_1 d_2 u'''' + (d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) u'' + (b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21}) u = 0, \quad na\ (0, \ell) \tag{3.8}$$

čímž dostáváme rovnici 4. řádu pro první složku u systému (3.1).

Dále je nutno provést transformaci okrajových podmínek (3.3), takovým způsobem, abychom spolu s (3.8) získali ekvivalentní okrajovou úlohu s úlohou (3.1) (3.2) a (3.3). Nově vzniklé podmínky budou vyplývat ze vztahů (3.2), (3.3) a (3.7), díky kterým po derivaci (3.7) dostaneme

$$v'(x) = -\frac{d_1 u'''(x) + b_{11} u'(x)}{b_{12}}.$$

Použitím okrajových podmínek (3.2), (3.3) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 = v'(0) &= -\frac{d_1 u'''(0) + b_{11} u'(0)}{b_{12}}, \\ 0 = v'(\ell) &= -\frac{d_1 u'''(\ell) + b_{11} u'(\ell)}{b_{12}}. \end{aligned}$$

Jelikož ale $b_{12} \neq 0$ a $d_1 > 0$ dostáváme, že

$$u'''(0) = 0 \quad a \quad u'''(\ell) = 0. \tag{3.9}$$

Tímto postupem jsme dostali rovnici 4. řádu (3.8) se čtyřmi okrajovými podmínkami (3.2) a (3.9). Řešení soustavy jsme si tak ekvivalentně převedli na řešení pouze jedné rovnice. Po vyřešení nové úlohy 4.řádu použijeme opět vztah (3.7) k zpětnému získání druhé složky řešení původní soustavy (3.1), (3.2), (3.3).

3.2.2 Charakteristická rovnice

Jelikož rovnice (3.8) je obyčejná diferenciální rovnice 4. řádu s konstantními koeficienty, budeme hledat řešení ve tvaru

$$u(x) = e^{rx} \tag{3.10}$$

s obecně komplexním parametrem r. Dosazením tvaru (3.10) do (3.8) dostaneme

$$d_1 d_2 r^4 e^{rx} + (d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) r^2 e^{rx} + (b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21}) e^{rx} = 0 \quad r \in \mathbb{C}.$$

Následným vykrácením nenulového členu e^{rx} pak

$$d_1 d_2 r^4 + (d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) r^2 + (b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21}) = 0 \quad r \in \mathbb{C}, \tag{3.11}$$

což je tvar charakteristické rovnice příslušné rovnici (3.8). Toto je algebraická, bikvadratická rovnice pro neznámý parametr $r \in \mathbb{C}$. Kořeny rovnice (3.11) použijeme do (3.10), čímž získáme fundamentální systém.

Charakteristickou rovnici (3.11) řešíme jako obyčejnou kvadratickou rovnici

$$d_1 d_2 \omega^2 + (d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) \omega + (b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21}) = 0, \tag{3.12}$$

pro $\omega = r^2$. Opět obecně máme $\omega \in \mathbb{C}$. Vypočtením diskriminantu

$$D_\omega = (d_2 b_{11} + d_1 b_{22})^2 - 4 d_1 d_2 (b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21}) \tag{3.13}$$

a vyjádřením kořenů kvadratické rovnice (3.12) získáme

$$\omega_{1,2} = \frac{-(d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) \pm \sqrt{D_\omega}}{2 d_1 d_2}. \tag{3.14}$$

Pozorujeme, že ve výrazu (3.13) platí

$$4d_1d_2(b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21}) > 0,$$

proto vždy platí, že

$$\omega_{1,2} \neq, 0 \tag{3.15}$$

a proto i

$$r_{1,2} \neq 0. \tag{3.16}$$

Navíc v případě, že

$$D_\omega \neq 0, \tag{3.17}$$

dostáváme

$$\omega_1 \neq \omega_2, \tag{3.18}$$

a tedy získáváme čtyři různé kořeny charakteristické rovnice

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\omega_1}, \\ r_2 &= -\sqrt{\omega_1}, \\ r_3 &= \sqrt{\omega_2}, \\ r_4 &= -\sqrt{\omega_2}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Vzhledem k tomu že se vždy dva kořeny liší jen znaménkem, přeznačíme kořeny jako

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\omega_1}, \\ -r_1 &= -\sqrt{\omega_1}, \\ r_2 &= \sqrt{\omega_2}, \\ -r_2 &= -\sqrt{\omega_2}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Tyto kořeny charakteristické rovnice (3.11), nám dávají fundamentální systém pro rovnici (3.8)

$$FS = \{e^{r_1x}, e^{-r_1x}, e^{r_2x}, e^{-r_2x}\}. \tag{3.21}$$

Poznámka 3.2.1 *Pokud $D_\omega = 0$, není množina funkcí (3.21) fundamentálním systémem pro (3.8), neboť v tomto případě bychom měli dvojnásobné kořeny charakteristické rovnice (3.11) a fundamentální systém by byl tvaru*

$$\{e^{r_1x}, xe^{r_1x}, e^{-r_1x}, xe^{-r_1x}\}.$$

Ukážeme, že $D_\omega = 0$ ale není generický případ, protože nastane pouze na množině míry nula v rovině parametrů (d_1, d_2), proto tento negenerický případ vůbec nebudeme studovat.

3.2.3 Vlastnosti kořenů charakteristické rovnice

Pro pozdější kvalitativní analýzu řešení a související hledání kritických bodů $(d_1,\ d_2)$, si položíme výraz D_ω rovný nule

$$D_\omega = (d_2 b_{11} + d_1 b_{22})^2 - 4 d_1 d_2 (b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21}) = 0. \tag{3.22}$$

V následujícím textu ukážeme, že toto nastane pouze pro (d_1, d_2) ležící na dvojici přímek v celé rovině parametrů, a tím bude ověřena negeneričnost této situace. Z výrazu se budeme snažit vyjádřit d_2 pomocí d_1. Výraz upravíme, čímž nám vznikne následující kvadratická rovnice pro d_2

$$b_{22}^2 d_1^2 + 2 b_{11} b_{22} d_1 d_2 + b_{11}^2 d_2^2 - 4 det B d_1 d_2 = 0,$$

neboli

$$b_{11}^2 d_2^2 + (2 b_{11} b_{22} d_1 - 4 det B d_1) d_2 + b_{22}^2 d_1^2 = 0. \tag{3.23}$$

Odtud již lehce získáme zmiňovanou dvojici přímek následujícím postupem

$$\begin{aligned}
d_2^{1,2} &= \frac{4 det B d_1 - 2 b_{11} b_{22} d_1 \pm \sqrt{4(b_{11} b_{22} d_1 - 2 det B d_1)^2 - 4 b_{11}^2 b_{22}^2 d_1^2}}{2 b_{11}^2} = \\
&= \frac{4 det B d_1 - 2 b_{11} b_{22} d_1 \pm 2\sqrt{b_{11}^2 b_{22}^2 d_1^2 - 4 det B b_{11} b_{22} d_1^2 + 4 det^2 B d_1^2 - b_{11}^2 b_{22}^2 d_1^2}}{2 b_{11}^2} = \\
&= \frac{4 det B d_1 - 2 b_{11} b_{22} d_1 \pm 4 d_1 \sqrt{det^2 B - det B b_{11} b_{22}}}{2 b_{11}^2} = \\
&= \frac{d_1}{b_{11}^2}(b_{11} b_{22} - 2 b_{12} b_{21} \pm 2\sqrt{b_{12}^2 b_{21}^2 - b_{11} b_{22} b_{12} b_{21}}) = \\
&= \frac{d_1}{b_{11}^2}(b_{11} b_{22} - 2 b_{12} b_{21} \pm 2\sqrt{-b_{12} b_{21}(b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21})}),
\end{aligned}$$

což nám ve výsledku dává

$$d_2^{1,2} = \frac{b_{11} b_{22} - 2 b_{12} b_{21} \pm 2\sqrt{-b_{12} b_{21}(b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21})}}{b_{11}^2} d_1. \tag{3.24}$$

Podívejme se nyní, jaké mají tyto přímky směrnice. O jejich znaménku rozhodne čitatel

$$b_{11} b_{22} - 2 b_{12} b_{21} \pm 2\sqrt{-b_{12} b_{21}(b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21})} = det B - b_{12} b_{21} \pm 2\sqrt{-b_{12} b_{21} det B}. \tag{3.25}$$

Povšimněme si, že výraz pod odmocninou je díky (3.4), (3.5) kladný, je tedy celý výraz v (3.25) je reálný, a proto má smysl porovnávat ho s nulou. V případě výrazu se znaménkem plus dostáváme

$$det B - b_{12} b_{21} + 2\sqrt{-b_{12} b_{21}(b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21})} > 0,$$

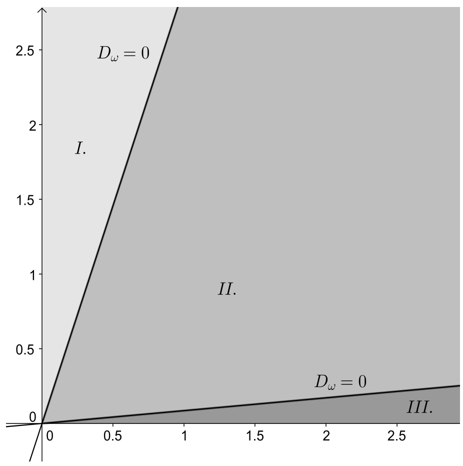
neboť se podle vlastností (3.4), (3.5) jedná o součet tří kladných výrazů. Obdobně postupnými úpravami pro výraz se znaménkem mínus dostáváme

$$b_{11}b_{22} - 2b_{12}b_{21} > 2\sqrt{-b_{12}b_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}$$

což umocněno na druhou a přesunuto na pravou stranu

$$\begin{aligned}(b_{11}b_{22} - 2b_{12}b_{21})^2 \quad - \quad & 4(-b_{12}b_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})) = \\ & = (detB - b_{12}b_{21})^2 - 4(-b_{12}b_{21}detB) = \\ & = det^2B - 2detBb_{12}b_{21} + b_{12}^2b_{21}^2 + 4b_{12}b_{21}detB = \\ & = det^2B + 2detBb_{12}b_{21} + b_{12}^2b_{21}^2 = \\ & = (detB + b_{12}b_{21})^2 = \\ & = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} + b_{12}b_{21})^2 = \\ & = (b_{11}b_{22})^2 > 0.\end{aligned}$$

Proto obě směrnice jsou kladné a obě polopřímky nám rozdělí rovinu $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_2^2$ na tři sektory, ve kterých máme jisté znaménko diskriminantu (3.13) (viz obrázek[2]).



Obrázek 3.1: $D_\omega = 0$

Jednotlivé sektory splňují vždy stejné vlastnosti pro D_ω (diskriminant (3.13)).
Sektor S_I splňuje: $D_\omega > 0$
Sektor S_{II} splňuje: $D_\omega < 0$
Sektor S_{III} splňuje: $D_\omega > 0$

[2]Obrázek je schematicky vykreslen pro hodnoty koeficientů b_{ij} stejné, jako jsme si zvolili v Kapitole 6

Teď se podívejme na vlastnosti kořenů $\omega_{1,2}$, tedy

$$\omega_{1,2} = \frac{-(d_2b_{11} + d_1b_{22}) \pm \sqrt{(d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2(b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21})}}{2d_1d_2}.$$

Pro lepší vhled do situaci si označme

$$s = (d_2b_{11} + d_1b_{22}).$$

Tím dostaneme rovnost

$$\omega_{1,2} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4d_1d_2detB}}{2d_1d_2}.$$

Pro sektory S_I a S_{III}, tedy pro oblasti parametrů d_1, d_2, kde $D_\omega > 0$, se podívejme na znaménko kořenů $\omega_{1,2}$. Jmenovatel rovnice bude vždy kladný, znaménko tedy bude ovlivňovat čitatel. Když si navíc povšimneme, že vždy platí $4d_1d_2detB > 0$, znamená to, že od výrazu s^2 odečteme pod odmocninou vždy kladnou hodnotu. Vyplývá z toho, že

$$|s| > \sqrt{s^2 - 4d_1d_2detB},$$

tedy

$$|d_2b_{11} + d_1b_{22}| > \sqrt{(d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2detB}.$$

Závěrem můžeme říct, že znaménko kořenů $\omega_{1,2}$ bude stejné jako znaménko

$$-s = -(d_2b_{11} + d_1b_{22}).$$

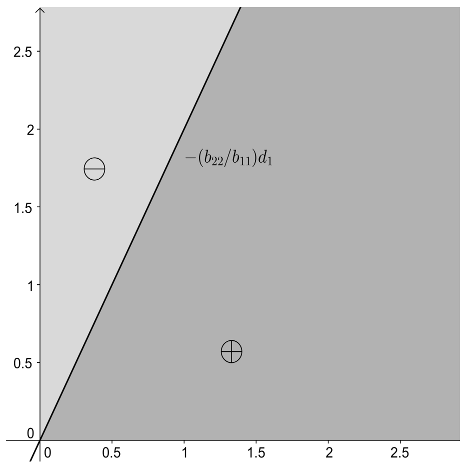
Tento výraz je díky (3.5), (3.4) nulový na přímce

$$d_2b_{11} + d_1b_{22} = 0,$$

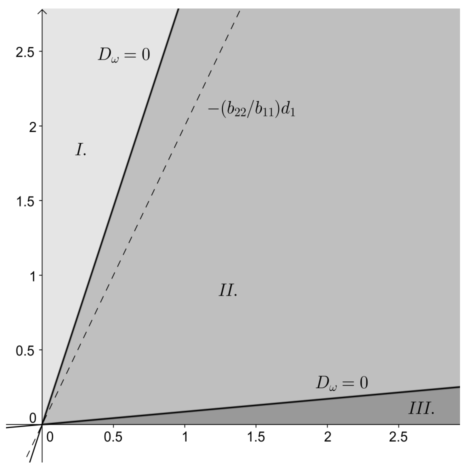
záporný nad touto přímkou a kladný pod touto přímkou (viz Obr. 3.2).

Pokud dáme dohromady vlastnosti diskriminantu (3.13) a poté vlastnosti kořenů $\omega_{1,2}$. Dostáváme celkový obrázek o tom, jak vypadají kořeny charakteristické rovnice. Ty splňují následující vlastnosti vždy na celém sektoru S_I, S_{II} a S_{III}.

Sektor S_I splňuje: $D_\omega > 0 \wedge \omega_{1,2} \in \mathbb{R}^-$.
Sektor S_{II} splňuje: $D_\omega < 0 \wedge \omega_{1,2} \in \mathbb{C}$.
Sektor S_{III} splňuje: $D_\omega > 0 \wedge \omega_{1,2} \in \mathbb{R}^+$.
(Pro ilustraci viz Obr. 3.3)



Obrázek 3.2: $d_2b_{11} + d_1b_{22} = 0$



Obrázek 3.3: S_I, S_{II} a S_{III}

3.2.4 Obecné řešení pro generický případ $D_\omega \neq 0$

Když jsme získali čtyři kořeny charakteristické rovnice, nic nám nebrání sestavit obecné řešení. Kořeny nám dávají fundamentální systém řešení pro homogenní rovnici tvaru (3.21).

$$FS = \{e^{r_1 x}, e^{-r_1 x}, e^{r_2 x}, e^{-r_2 x}\} \tag{3.26}$$

je tedy fundamentární systém, jehož lineární kombinací pak získáme obecné řešení tvaru

$$u(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{-r_1 x} + Ce^{r_2 x} + De^{-r_2 x}, \qquad x \in (0, \ell). \tag{3.27}$$

První, druhá a třetí derivace obecného řešení na $(0, \ell)$ jsou postupně

$$\begin{aligned} u'(x) &= r_1 e^{r_1 x}A - r_1 e^{-r_1 x}B + r_2 e^{r_2 x}C - r_2 e^{-r_2 x}D, \\ u''(x) &= r_1^2 e^{r_1 x}A + r_1^2 e^{-r_1 x}B + r_2^2 e^{r_2 x}C + r_2^2 e^{-r_2 x}D, \\ u'''(x) &= r_1^3 e^{r_1 x}A - r_1^3 e^{-r_1 x}B + r_2^3 e^{r_2 x}C - r_2^3 e^{-r_2 x}D. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Dosazením těchto derivací do transformovaných okrajových podmínek (3.2) a (3.9) dostáváme soustavu čtyř lineárních algebraických rovnic s neznámými A, B, C, $D \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u'(0) &= & r_1A - r_1B + r_2C - r_2D &= 0, \\ u'''(0) &= & r_1^3A - r_1^3B + r_2^3C - r_2^3D &= 0, \\ u'(\ell) &= & r_1e^{r_1\ell}A - r_1e^{-r_1\ell}B + r_2e^{r_2\ell}C - r_2e^{-r_2\ell}D &= 0, \\ u'''(\ell) &= & r_1^3e^{r_1\ell}A - r_1^3e^{-r_1\ell}B + r_2^3e^{r_2\ell}C - r_2^3e^{-r_2\ell}D &= 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Matice soustavy (3.29) je tvaru

$$M = \begin{pmatrix} r_1 & -r_1 & r_2 & -r_2 \\ r_1^3 & -r_1^3 & r_2^3 & -r_2^3 \\ r_1e^{r_1\ell} & -r_1e^{-r_1\ell} & r_2e^{r_2\ell} & -r_2e^{-r_2\ell} \\ r_1^3e^{r_1\ell} & -r_1^3e^{-r_1\ell} & r_2^3e^{r_2\ell} & -r_2^3e^{-r_2\ell} \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Z teorie řešení soustav lineárních rovnic víme, že pokud $detM \neq 0$, pak dostáváme jen nulové koeficienty A, B, C, D a tedy řešení úlohy (3.8), (3.2), (3.9) je $u \equiv 0$ na $(0, \ell)$, a tedy i řešení úlohy (3.1), (3.2), (3.3) je pouze nulové. Proto pokud hledáme kritické body $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ musíme požadovat, aby $detM = 0$. Pouze v takovém případě bude možné najít netriviální řešení.

3.2.5 Kritické body - hyperboly

Nyní se pokusme analyticky spočítat, jak budou vypadat dvojice bodů $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$, pro které bude $det(M) = 0$, a tedy pro která najdeme netriviální řešení $(u, v) \neq (0, 0)$. V první řadě si z prvních dvou rovnic soustavy (3.29) vyjádříme soustavu o dvou rovnicích

$$\begin{aligned} r_1(A - B) + r_2(C - D) &= 0, \\ r_1^3(A - B) + r_2^3(C - D) &= 0, \end{aligned} \tag{3.31}$$

pro $A - B$ a $C - D$. Rozepíšeme-li si soustavu maticově, pak je tvaru

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^3 & r_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - B \\ C - D \end{pmatrix} = 0.$$

Determinant této soustavy je

$$r_1r_2^3 - r_1^2r_2 = r_1r_2(r_1^2 - r_2^2).$$

Podle rovností (3.19) můžeme determinant upravit na tvar

$$r_1 r_2(\omega_1 - \omega_2),$$

ve kterém podle předchozí sekce 3.2.3 platí, že $r_1 r_2 \neq 0$ a (3.18), což jsme si ukázali v předchozí sekci (3.2.3). Zároveň jsme zmínili, že chceme aby platilo $D_\omega \neq 0$ a tedy $\omega_1 \neq \omega_2$ proto platí, $(\omega_1 - \omega_2) \neq 0$. Můžeme tedy tvrdit, že

$$r_1 r_2(\omega_1 - \omega_2) \neq 0. \tag{3.32}$$

Jak je poté vidět, determinant matice bude vždy nenulový. Proto musí platit, že $A - B = 0$ a $C - D = 0$, tedy

$$A = B,$$

$$C = D.$$

Dosazením do zbývajících dvou rovnic soustavy (3.29) získáváme soustavu

$$\begin{aligned} r_1(e^{r_1\ell} - e^{-r_1\ell})A + r_2(e^{r_2\ell} - e^{-r_2\ell})C &= 0, \\ r_1^3(e^{r_1\ell} - e^{-r_1\ell})A + r_2^3(e^{r_2\ell} - e^{-r_2\ell})C &= 0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Nyní upravíme první rovnici soustavy (3.33) na tvar

$$r_1(e^{r_1\ell} - e^{-r_1\ell})A = -r_2(e^{r_2\ell} - e^{-r_2\ell})C. \tag{3.34}$$

V tuto chvíli nám pro rovnici (3.34) nastávají čtyři různé případy, které si hned objasníme. Zde uplatníme některá z pomocných tvrzení ze Sekce 2.6. Probereme si nyní postupně jeden po druhém.

První případ

Uvažujme, že nastane případ, kdy platí

$$\begin{aligned} (e^{r_1\ell} - e^{-r_1\ell}) &= 0, \\ (e^{r_2\ell} - e^{-r_2\ell}) &\neq 0. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Pak podle Tvrzení 2.6.4 s $L = \ell$ dostáváme, že $d \in H_n^\ell$ pro nějaké n a $d \notin H_m^\ell$ pro všechna $m \neq n$, kde

$$H_n^\ell = \{(d_1, d_2) \in {\mathbb{R}_+}^2 : d_2 = \frac{detB - \kappa_n d_1 b_{22}}{b_{11}\kappa_n - d_1\kappa_n^2}\},$$

$$\kappa_n = (\frac{n\pi}{\ell})^2.$$

Dosazením rovnosti (3.35) do rovnice (3.34) získáme

$$0 = -r_2(e^{r_2\ell} - e^{-r_2\ell})C,$$

a z předpokladu $(e^{r_2\ell} - e^{-r_2\ell}) \neq 0$, pak díky (3.16) vyplývá, že

$$C = 0.$$

Pokud bychom získané rovnosti dosadili pro ověření do druhé rovnice soustavy (3.33), dostaneme totéž. Získáváme tak pro libovolné $A \neq 0$ následující rovnosti koeficientů

$$\begin{aligned} A &= B, \\ C &= 0, \\ D &= 0. \end{aligned}$$

Dosazením do obecného řešení (3.27) dostáváme tvar řešení

$$u(x) = A(e^{r_1 x} + e^{-r_1 x}), \quad x \in (0, \ell), \tag{3.36}$$

kde A je libovolné nenulové. Tímto jsme zároveň obdrželi první složku řešení systému (3.1), (3.2), (3.3). Následným dosazením do v podle vzorečku (3.7) pak získáme i druhou složku řešení systému

$$v(x) = -A\frac{d_1 r_1^2 + b_{11}}{b_{12}}(e^{r_1 x} + e^{-r_1 x}), \quad x \in (0, \ell). \tag{3.37}$$

Řešení systému (3.36) a (3.37) tak existují pouze pro $(d_1, d_2) \in H_n^\ell$, to znamená pouze na hyperbolách. Navíc podle tvrzení 2.6.2 víme, že $\omega_2 < 0$. Potom tedy i H_n^ℓ leží v sektoru S_I, respektive hodnoty (d_1, d_2) leží v sektoru S_I

Druhý případ

Uvažujme, že nastane případ, kdy

$$\begin{aligned} (e^{r_1\ell} - e^{-r_1\ell}) &\neq 0, \\ (e^{r_2\ell} - e^{-r_2\ell}) &= 0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Pak podle Tvrzení 2.6.5 s $L = \ell$ opět platí, že $d \in H_n^\ell$ pro nějaké n a $d \notin H_m^\ell$ pro všechna $m \neq n$. Použijeme-li (3.38) v rovnici (3.34), dostaneme

$$r_1(e^{r_1\ell} - e^{-r_1\ell})A = 0.$$

Symetricky oproti předchozímu případu pak za předpokladu (3.38) a (3.16) dostáváme, že $A = 0$. Získáme tedy rovnosti

$$\begin{aligned} C &= D, \\ A &= 0, \\ B &= 0. \end{aligned}$$

Dosazením do obecného řešení (3.27) dostáváme tvar řešení

$$u(x) = C(e^{r_2 x} + e^{-r_2 x}) \quad , x \in (0, \ell), \tag{3.39}$$

kde C je libovolné nenulové. Tímto jsme zároveň znovu obdrželi první složku řešení systému (3.1), (3.2), (3.3). Dosazením do v podle vzorečku (3.7) pak získáme i druhou složku řešení systému

$$v(x) = C(e^{r_2 x} + e^{-r_2 x}) - C\frac{d_1 r_2^2 + b_{11}}{b_{12}}(e^{r_2 x} + e^{-r_2 x}) \quad , x \in (0, \ell). \tag{3.40}$$

Řešení systému (3.39) a (3.40) tak existují pouze pro $(d_1, d_2) \in H_n^\ell$, to znamená pouze na hyperbolách. Navíc znovu podle Tvrzení 2.6.2 víme, že $\omega_2 < 0$ a tedy i hyperboly H_n^ℓ, a tím i všechny kritické body leží v sektoru S_I.

Třetí případ

Případ kdy, by platily podmínky (3.35) a (3.38), tedy

$$\begin{aligned} (e^{r_1 \ell} - e^{-r_1 \ell}) &= 0, \\ (e^{r_2 \ell} - e^{-r_2 \ell}) &= 0. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Pokud platí (3.41), můžeme dle Tvrzení 2.6.8 říci, že $d \in H_n^\ell \cap H_m^\ell$ pro $n \neq m$. Tedy že obecné řešení úlohy (3.1), (3.2), (3.3) nastane pouze pro izolované kritické body.

V takovém případě dostáváme obecné řešení pro A, C nezávislé a tedy ve tvaru lineární kombinace Případu prvního a Případu druhého.

$$u(x) = A(e^{r_1 x} + e^{-r_1 x}) + C(e^{r_2 x} + e^{-r_2 x}) \quad x \in (0, \ell). \tag{3.42}$$

Dosazením (3.42) do tvaru (3.7) máme

$$v(x) = \alpha(d)(A(e^{r_1 x} + e^{-r_1 x}) + C(e^{r_2 x} + e^{-r_2 x})) \quad x \in (0, \ell). \tag{3.43}$$

kde

$$\alpha(d) = \frac{d_1 r_1^2 + b_{11}}{b_{12}}.$$

Pro kritické body

$$d \in H_n^\ell \cap H_m^\ell.$$

Čtvrtý případ

Případ, kdyby neplatily podmínky (3.35) a (3.38), tedy

$$\begin{aligned} (e^{r_1\ell} - e^{-r_1\ell}) &\neq 0, \\ (e^{r_2\ell} - e^{-r_2\ell}) &\neq 0. \end{aligned} \tag{3.44}$$

V tomto případě by bylo opět vhodné, vyjádřit si maticový zápis soustavy (3.33), získali bychom její determinant tvaru

$$r_1 r_2^3 (e^{r_1\ell} - e^{-r_1\ell})(e^{r_2\ell} - e^{-r_2\ell}) - r_2 r_1^3 (e^{r_1\ell} - e^{-r_1\ell})(e^{r_2\ell} - e^{-r_2\ell}) =$$

$$= (e^{r_1\ell} - e^{-r_1\ell})(e^{r_2\ell} - e^{-r_2\ell})(r_1 r_2^3 - r_1 r_2^3).$$

Pokud chceme, aby $(A, C) \neq 0$, potom musí platit

$$(e^{r_1\ell} - e^{-r_1\ell})(e^{r_2\ell} - e^{-r_2\ell})(r_1 r_2^3 - r_1 r_2^3) = 0,$$

a jelikož platí (3.32), pak

$$(e^{r_1\ell} - e^{-r_1\ell})(e^{r_2\ell} - e^{-r_2\ell}) = 0.$$

Ptotože nyní ale uvažujeme kombinaci podmínek (3.44), je jasné, že determinant by byl nenulový. Jediná možnost, jak dosáhnout splnění soustavy (3.33) je že koeficienty

$$A = C = 0,$$

a tedy i

$$u(x) = 0 \quad x \in (0, \ell),$$

a tedy

$$v(x) = 0 \quad x \in (0, \ell).$$

Nezískáváme tedy žádné kritické body.

3.3 Výsledek

Tvrzení 3.3.1 *Množina všech kritických bodů $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$ úlohy (3.1), (3.2) a (3.3) je*

$$K_N = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^{\ell}. \tag{3.45}$$

Pokud $d \in H_n^\ell$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, a zároveň $d \notin H_m^\ell$ pro $n \neq m$ je řešení (u,v) úlohy (3.1), (3.2) a (3.3) na $(0,\ell)$ typu

$$\begin{aligned} u(x) &= AC_1(x), \\ v(x) &= \alpha_n(d)AC_1(x), \end{aligned}$$

kde

$$\alpha_n(d) = \frac{b_{11} - d_1\kappa_n}{b_{12}} > 0,$$
$$\kappa_n = (\frac{n\pi}{\ell})^2,$$
$$A \in \mathbb{R}.$$

Pokud $d \in H_n^\ell \cap H_m^\ell$ pro nějaká $n \neq m$, je řešení (u,v) na $(0,\ell)$ dáno

$$\begin{aligned} u(x) &= AC_1(x) + CC_2(x), \\ v(x) &= \alpha_n(d)(AC_1(x) + CC_2(x)), \end{aligned}$$

kde

$$\alpha_n = \frac{b_{11} - d_1\kappa_n}{b_{12}} > 0,$$
$$\kappa_n = (\frac{n\pi}{\ell})^2,$$
$$A, C \in \mathbb{R}.$$

Tvrzení 3.3.2 *Pokud $d \in (d_1, d_2)$ je kritický bod okrajové úlohy (3.1), (3.2) a (3.3), potom pro příslušné řešení (u,v) této úlohy platí*

$$v = \alpha(d)u.$$

Neboli, že druhá složka je kladným násobkem složky první.

3.3.1 Shrnutí

Podařilo se nám najít množinu kritických bodů

$$K_N = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^\ell,$$

které rozdělují rovninu $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$ na jednotlivé oblasti. Uvnitř těchto oblastní existují pouze nulová řešení (u,v). Na hranicích těchto oblastí tedy pokud platí, že $(d_1, d_2) \in K_N$ pak dostaneme netriviální řešení. Dokonce se nám podařilo zjistit, že kritické body leží na hyperbolách H_n a H_m. Připomeňme, že úloha probíraná v této kapitole je v celé diplomové práci nejjednodušší a jako u jediné z nich se podařilo získat všechny kritické body analyticky.

Kapitola 4

Úloha s překážkou na kraji intervalu

Tato kapitola bude pojednávat o stejném systému reakce-difúze tak jako předchozí kapitola. Rozdíl však bude v jiných okrajových podmínkách. Konkrétně půjde o nahrazení jedné Neumannovy okrajové podmínky pro složku v podmínkou Dirichletovou. Jak již bylo zmíněno v předchozí kapitole, úlohy mají mnohé společného. Zkusme se tedy zaměřit na to, jaký bude mezi úlohami rozdíl a zda-li se nám i pro tuto mírně zkomplikovanou úlohu podaří najít vhodná d_1, d_2, tak abychom získali netriviální řešení.

4.1 Zadání

Zadání úlohy bude obdobné jako v úloze předchozí. Opět se bude skládat ze tří důležitých částí, navíc definujeme jednostrannou podmínku. V první řadě mějme soustavu rovnic 2. řádu

$$\begin{aligned} d_1 u'' + b_{11} u + b_{12} v &= 0, \\ d_2 v'' + b_{21} u + b_{22} v &= 0, \end{aligned} \qquad x \in (0, \ell) \tag{4.1}$$

kde $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+$ a koeficienty $b_{ij} \in \mathbb{R}$.. Za druhé zmiňme, že i zde koeficienty musí splňovat podmínky (3.4), (3.5). Dále si pak definujme okrajové podmínky. V tomto okamžiku se nám úloha oproti předchozí změní. Jednu z Neumannových okrajových podmínek nahradíme Dirichletovou podmínkou.

$$u'(0) = 0, \qquad u'(\ell) = 0, \tag{4.2}$$

$$v'(0) = 0, \qquad v(\ell) = 0. \tag{4.3}$$

Naším cílem bude i v tomto případě zjistit, pro jaké hodnoty parametrů $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$

existuje netriviální řešení $(u, v) \neq (0, 0)$ systému (4.1) s okrajovými podmínkami (4.2) a (4.3). Protože úloha je obdnobná s úlohou (3.1), (3.2), (3.3), zpočátku budeme postupovat podobně, poté zdůrazníme, kde se začne úloha odlišovat od předchozí.

4.2 Postup řešení

Opět nejprve prověřme, jakého typu budou řešení u, v pro úlohu (4.1). Klasické řešení úlohy (4.1) s okrajovými podmínkami (4.2) a (4.3) opět splňují regularitu

$$u, v \in C^2([0, \ell]).$$

Jestliže z první rovnice soustavy (4.1) vyjádříme u'' dostáváme znovu tvar

$$d_1 u'' = -b_{11} u - b_{12} v,$$

proto pokud $u, v \in C^2([0, \ell])$, potom i $u'' \in C^2([0, \ell])$ a obdobně pro v. Opakovaným postupem pak dostáváme, že

$$u, v \in C^\infty([0, \ell]).$$

Na intervalu $(0, \ell)$ jsou tedy funkce u, v znovu spojité ve všech derivacích, v krajních bodech jednostranných.

4.2.1 Převedení soustavy rovnic na rovnici 4. řádu

Stejně jako v první úloze, i zde si jako první krok vyjádříme z první rovnice soustavy (4.1) v

$$v = -\frac{d_1 u'' + b_{11} u}{b_{12}}, \quad na \ (0, \ell). \tag{4.4}$$

Dosazením vyjádřeného v do rovnice druhé ze soustavy (4.1) tak převedeme soustavu rovnic na jednu rovnici 4. řádu

$$d_1 d_2 u'''' + (d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) u'' + (b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21}) u = 0, \quad na \ (0, \ell). \tag{4.5}$$

Další postup bude transformace okrajových podmínek. Okrajové podmínky pro u (4.3) jsou stále stejné. Proto přejděme rovnou k podmínkám pro v. První podmínka $v'(0) = 0$ je odvozena stejným způsobem jako podmínka (3.9) (viz. předchozí kapitola). Rozdíl bude v

Dirichletově podmínce $v(\ell) = 0$. Zde, v této okrajové podmínce, se nám také začíná úloha od předchozí odlišovat. Dosadíme-li tedy $v(\ell) = 0$ do vyjádření (4.4) a získáme

$$v(\ell) = -\frac{d_1 u''(\ell) + b_{11} u(\ell)}{b_{12}} = 0,$$

výraz lze upravit pouze tak, že ho vynásobíme koeficientem $-b_{12}$ tedy

$$v(\ell) = d_1 u''(\ell) + b_{11} u(\ell) = 0.$$

Vznikne nám tak čtvrtá podmínka pro rovnici (4.5). Vzhledem k tomu, že se v ní vyskytují druhé a nulté derivace funkce u, podmíky (4.2) nám nijak nepomohou a nezjednoduší se výsledný tvar podmínky jako v předchozí kapitole. Podmínku proto musíme zachovat ve tvaru

$$d_1 u''(\ell) + b_{11} u(\ell) = 0. \tag{4.6}$$

4.2.2 Charakteristická rovnice

Jelikož rovnice (4.5) je stejná jako (3.8) je i příslušná charakteristická rovnice stejná, a tedy jsou i kořeny stejné. Zmiňme, že i zde platí stejné vlastnopsti pro kořeny $r_{1,2}$ jako v sekci 3.2.3.

4.2.3 Obecné řešení

Stejně tak jako charakteristická rovnice a její kořeny je stejný i fundamentální systém tvaru (3.26) tedy

$$FS = \{e^{r_1 x}, e^{-r_1 x}, e^{r_2 x}, e^{-r_2 x}\}. \tag{4.7}$$

Lineární kombinací (4.7) pak bude stejné i obecné řešení tvaru (3.27) tedy

$$u(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{-r_1 x} + Ce^{r_2 x} + De^{-r_2 x} \quad x \in (0, \ell). \tag{4.8}$$

Stačí už jen dopočítat koeficienty A, B, C, D. Pomocí počátečních podmínek (4.2) a nově vzniklých $u'''(0) = 0$ a (4.6), které dosadíme do příslušně zderivovaného obecného řešení (viz. (3.28)) dostaneme lineární soustavu čtyř algebraických rovnic pro neznámé koeficienty A, B, C, D.

Podmínka č.1: $u'(0) = 0$

$$r_1 e^{r_1 0} A - r_1 e^{-r_1 0} B + r_2 e^{r_2 0} C - r_2 e^{-r_2 0} D = 0.$$

Podmínka č.2: $u'(\ell) = 0$

$$r_1 e^{r_1 \ell} - r_1 e^{-r_1 \ell} B + r_2 e^{r_2 \ell} C - r_2 e^{-r_2 \ell} D = 0.$$

Podmínka č.3: $u'''(0) = 0$

$$r_1^3 e^{r_1 0} A - r_1^3 e^{-r_1 0} B + r_2^3 e^{r_2 0} C - r_2^3 e^{-r_2 0} D = 0.$$

Podmínka č.4: $d_1 u''(\ell) + b_{11} u(\ell) = 0$

$$\begin{aligned} d_1(r_1^2 e^{r_1 \ell} A + r_1^2 e^{-r_1 \ell} B + r_2^2 e^{r_2 \ell} C + r_2^2 e^{-r_2 \ell} D) + b_{11}(e^{r_1 x} A + e^{-r_1 x} B + e^{r_2 x} C + e^{-r_2 x}) D &= 0, \\ (d_1 r_1^2 + b_{11}) e^{r_1 \ell} A + (d_1 r_1^2 + b_{11}) e^{-r_1 \ell} B + (d_1 r_2^2 + b_{11}) e^{r_2 \ell} C + (d_1 r_2^2 + b_{11}) e^{-r_2 \ell} D &= 0. \end{aligned}$$

Ze soustavy rovnic tak můžeme udělat matici K, která bude tvaru

$$K = \begin{pmatrix} r_1 & -r_1 & r_2 & -r_2 \\ r_1^3 & -r_1^3 & r_2^3 & -r_2^3 \\ r_1 e^{r_1 \ell} & -r_1 e^{-r_1 \ell} & r_2 e^{r_2 \ell} & -r_2 e^{-r_2 \ell} \\ (d_1 r_1^2 + b_{11}) e^{r_1 \ell} & (d_1 r_1^2 + b_{11}) e^{-r_1 \ell} & (d_1 r_2^2 + b_{11}) e^{r_2 \ell} & (d_1 r_2^2 + b_{11}) e^{-r_2 \ell} \end{pmatrix}.$$

Srovnáme-li matici K s maticí M z předchozího příkladu všimneme si, že se liší právě v posledním řádku, který zde zastupuje Dirichletovu podmínku. Nicméně následný postup řešení bude i zde obdobný. Budeme hledat kritické body $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$ tak, aby platilo $detK = 0$. Pouze v takovém případě totiž může vzniknout netriviální řešení úlohy (4.5) a zpětně pak i netriviální řešení původní soustavy (4.1).

4.3 Kritické body

Začněme postup jako v přechozí Kapitole 3. Jak jsme již zmínili, první dva řádky matic K a M jsou stejné, proto můžeme říct, že stejně jako v Kapitole 3, v Sekci 3.2.5 dostaneme, že

$$A = B,$$

$$C = D.$$

Dosazením těchto dvou rovností do Podmínky č.3 a Podmínky č.4 dostáváme lineární soustavu dvou rovnic o dvou neznámých A, C tvaru

$$\begin{aligned} r_1(e^{r_1 \ell} - e^{-r_1 \ell}) A + r_2(e^{r_2 \ell} - e^{-r_2 \ell}) C &= 0, \\ (d_1 r_1^2 + b_{11})(e^{r_1 \ell} + e^{-r_1 \ell}) A + (d_1 r_2^2 + b_{11})(e^{r_2 \ell} + e^{-r_2 \ell}) C &= 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Soustavu (4.9) jde za použití substitucí (2.4), jako v Kapitole 2, zpřehlednit na tvar

$$\begin{aligned} r_1 S_1(\ell)A + r_2 S_2(\ell)C &= 0, \\ (d_1 r_1^2 + b_{11})C_1(\ell)A + (d_1 r_2^2 + b_{11})C_2(\ell)C &= 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Pokud si první rovnici ze soustavy (4.10) vyjádříme na tvar

$$r_1 S_1(\ell)A = -r_2 S_2(\ell)C, \tag{4.11}$$

pak lze opět uvažovat čtyři různé případy, které mohou nastat.

Případ první

Uvažujme, že nastane

$$\begin{aligned} S_1(\ell) &= 0, \\ S_2(\ell) &\neq 0, \end{aligned} \tag{4.12}$$

pak z rovnice (4.11) vyplývá, že

$$A \neq 0,$$

$$C = 0.$$

Dosazením těchto rovností a podmínek (4.12) do druhé rovnice soustavy (4.10) dostáváme

$$(d_1 r_1^2 + b_{11})C_1(\ell)A = 0.$$

Díky Tvrzení 2.6.10 a pomocné rovnosti (2.34) však zjišťujeme, že nutně musí platit

$$A = 0.$$

Všechny koeficienty A, B, C, D jsou nulové, tedy i řešení (u, v) úlohy (4.1), (4.2), (4.3) by bylo $(u, v) = (0, 0)$ za podmínek (4.12).

Případ druhý

Uvažujme, že nastane případ, kdy platí

$$\begin{aligned} S_1(\ell) &\neq 0, \\ S_2(\ell) &= 0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

symetricky s předchozím případem platí, že nyní dosazením (4.13) do rovnice (4.11) dostáváme

$$A = 0,$$

$$C \neq 0.$$

Pomocí těchto rovností a podmínek (4.13) pak z druhé rovnice soustavy (4.10) vyplývá,

$$(d_1 r_2^2 + b_{11}) C_2(\ell) C = 0.$$

Stejně tak ale díky Tvrzení 2.6.10 a nyní pomocné rovnosti (2.33) zjišťujeme, že nutně i

$$A = 0.$$

Všechny koeficienty A, B, C, D jsou tak znovu nulové, tedy i řešení (u, v) úlohy (4.1), (4.2), (4.3) by bylo $(u, v) = (0, 0)$ za podmínek (4.13).

Případ třetí

pokud budeme uvažovat, že platí

$$\begin{aligned} S_1(\ell) &= 0, \\ S_2(\ell) &= 0, \end{aligned} \tag{4.14}$$

pak podle Tvrzení 2.6.8 leží kritické body $(d_1, d_2) \in H_n^\ell \cap H_m^\ell$, což jsou pouze izolované body v rovině $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$.

Za podmínek (4.14) tedy dostáváme, že

$$A \neq 0,$$

$$C \neq 0.$$

Dosazením rovností do druhé rovnice soustavy (4.10) pak dostáváme vztah mezi A a C, který je

$$C = -\frac{(d_1 r_1^2 + b_{11}) C_1(\ell)}{(d_1 r_2^2 + b_{11}) C_2(\ell)} A.$$

Všechny hodnoty budou pro $A \neq 0$ také nenulové díky Tvrzení 2.6.10 a pomocným rovnostem (2.33), (2.34). Řešení by pak bylo tvaru

$$u(x) = A(C_1(x) - C_2(x)\alpha(d)) \quad x \in (0, \ell). \tag{4.15}$$

$$v(x) = -A \frac{d_1(r_1^2 C_1(x) - r_2^2 C_2(x)\alpha(d)) + b_{11}(C_1(x) - C_2(x)\alpha(d))}{b_{12}} \quad x \in (0, \ell). \tag{4.16}$$

kde

$$\alpha(d) = \frac{C_1(\ell)}{C_2(\ell)} \frac{(d_1 r_1^2 + b_{11})}{(d_1 r_2^2 + b_{11})}.$$

pro

$$(d_1, d_2) \in H_n^\ell \cap H_m^\ell$$

Případ čtvrtý

Poslední možnost, kterou zbývá prostudovat nastane za podmínek

$$\begin{aligned} S_1(\ell) &\neq 0, \\ S_2(\ell) &\neq 0, \end{aligned} \tag{4.17}$$

V této chvíli nám nepomůže žádné tvrzení, které by nám řeklo jak vypadají kritické body. Pokud ale chceme, aby měla soustava (4.10) nenulové řešení, tedy existovaly koeficienty A, C různé od nuly, tedy i řešení (u, v) úlohy (4.1), (4.2), (4.3) bylo nenulové, musí nutně platit, že determinant matice soustavy (4.10) je nulový. Tedy že výraz

$$r_1 S_1(\ell) C_2(\ell)(d_1 r_2^2 + b_{11}) - r_2 S_2(\ell) C_1(\ell)(d_1 r_1^2 + b_{11}) = 0. \tag{4.18}$$

Poněvač rovnost (4.18) je již velice komplexní, není možné řešit ji analyticky. Pokud si ale definujeme funkci $f(d_1, d_2)$ jako

$$f(d_1, d_2) = r_1 S_1(\ell) C_2(\ell)(d_1 r_2^2 + b_{11}) - r_2 S_2(\ell) C_1(\ell)(d_1 r_1^2 + b_{11}), \tag{4.19}$$

pak bude možné, pomocí numerických metod, vykreslit množinu kritických bodů

$$K_D = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2 : f(d_1, d_2) = 0\}. \tag{4.20}$$

Pokud platí, že $d \in K_D$ pak získáme nenulové koeficienty A, C, které jsou ve vztahu podle první rovnice soustavy (4.10), tedy

$$C = -\frac{r_1 S_1(\ell)}{r_2 S_2(\ell)} A.$$

Řešení soustavy pak je tvaru

$$u(x) = A(C_1(x) - C_2(x)\alpha(d)) \quad x \in (0, \ell). \tag{4.21}$$

$$v(x) = -A \frac{d_1(r_1^2 C_1(x) - r_2^2 C_2(x)\alpha(d)) + b_{11}(C_1(x) - C_2(x)\alpha(d))}{b_{12}} \quad x \in (0, \ell), \tag{4.22}$$

kde

$$\alpha(d) = \frac{r_1 S_1(\ell)}{r_2 S_2(\ell)},$$

pro všechna $d \in K_D$.

4.4 Výsledek

Tvrzení 4.4.1 *Množina všech kritických bodů* $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ *úlohy (4.1), (4.2), (4.3) je*

$$K_D = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+ : f(d_1, d_2) = 0\}.$$

kde $f(d_1, d_2)$ *je tvaru (4.19)*

Pokud $d \in K_D$, potom existuje netriviální řešení (u, v) úlohy (4.1), (4.2), (4.3) na $(0, \ell)$ typu

$$u(x) = A(C_1(x) - C_2(x)\alpha(d)) \quad x \in (0, \ell). \tag{4.23}$$

$$v(x) = -A\frac{d_1(r_1^2 C_1(x) - r_2^2 C_2(x)\alpha(d)) + b_{11}(C_1(x) - C_2(x)\alpha(d))}{b_{12}} \quad x \in (0, \ell). \tag{4.24}$$

kde

$$\alpha(d) = \frac{r_1 S_1(\ell)}{r_2 S_2(\ell)}$$

a

$$A \in \mathbb{R},$$

Popřípadě pokud $(d_1, d_2) \in H_n^\ell \cap H_m^\ell$, potom má úloha (4.1), (4.2), (4.3) řešení (u, v) na $(0, \ell)$ typu

$$u(x) = A(C_1(x) - C_2(x)\alpha(d)) \quad x \in (0, \ell). \tag{4.25}$$

$$v(x) = -A\frac{d_1(r_1^2 C_1(x) - r_2^2 C_2(x)\alpha(d)) + b_{11}(C_1(x) - C_2(x)\alpha(d))}{b_{12}} \quad x \in (0, \ell). \tag{4.26}$$

kde

$$\alpha(d) = \frac{C_1(\ell)}{C_2(\ell)} \frac{d_1 r_1^2 + b_{11}}{d_1 r_2^2 + b_{11}}.$$

4.4.1 Shrnutí

Opět se nám podařilo najít hodnoty kritických bodů, pro které existuje netriviální řešení (u, v) úlohy (4.1), (4.2), (4.3). Množina kritických bodů, které rozdělují rovinu $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ na souvislé oblasti je K_D, tedy

$$K_D = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+ : f(d_1, d_2) = 0\}.$$

Uvnitř oblastí pak existuje pouze nulové řešení $(u, v) = (0, 0)$.

Kapitola 5

Úloha s přechodovou podmínkou

V předchozích dvou Kapitolách 3 a 4 se nám vždy podařilo nalézt vhodné parametry (d_1, d_2), pro které existovalo netriviální řešení. Další případ, který chceme vyřešit, je takový, že do vybraného bodu $x_0 \in (0, \ell)$ umístíme přechodovou podmínku. Zjistíme, jak se nyní úloha zkomplikuje, jakým způsobem se liší od předešlé a pokusíme se opět najít netriviální řešení této úlohy.

5.1 Zadání s přechodovou podmínkou

Nyní budeme studovat obdobnou úlohu jako v Kapitole 3, přidáme ale navíc přechodovou podmínku do bodu $x_0 \in (0, \ell)$. Půjde nám tedy o okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} d_1 u'' + b_{11} u + b_{12} v &= 0, \\ d_2 v'' + b_{21} u + b_{22} v &= 0, \end{aligned} \qquad x \in (0, \ell) \tag{5.1}$$

kde $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+$ a koeficienty $b_{ij} \in \mathbb{R}$.

Jako další část zadání musíme zmínit, že i zde koeficienty nutně splňují podmínky (3.5).

Poté předepíšeme Neumannovy okrajové podmínky

$$u'(0) = 0, \qquad u'(\ell) = 0, \tag{5.2}$$

$$v'(0) = 0, \qquad v'(\ell) = 0. \tag{5.3}$$

Nakonec zafixujeme bod $x_0 \in (0, \ell)$ a budeme požadovat, aby

$$v(x_0) = 0. \tag{5.4}$$

Tato podmínka modeluje jistou překážku pro v uvnitř oblasti.

Zároveň umožníme řešení systému (u, v), aby

$$v \notin C^2([0, \ell]),$$

ale budeme požadovat pouze

$$u \in C^2([0, \ell]) \tag{5.5}$$

a

$$v \in C([0, \ell]) \cap C^2([0, x_0]) \cap C^2([x_0, \ell]). \tag{5.6}$$

Budeme tedy studovat okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} d_1 u_L'' + b_{11} u_L + b_{12} v_L &= 0, \\ d_2 v_L'' + b_{21} u_L + b_{22} v_L &= 0, \end{aligned} \quad x \in (0, x_0^-) \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} d_1 u_P'' + b_{11} u_P + b_{12} v_P &= 0, \\ d_2 v_P'' + b_{21} u_P + b_{22} v_P &= 0, \end{aligned} \quad x \in (x_0^+, \ell). \tag{5.8}$$

s Neumannovými okrajovými podmínkami (5.2), (5.3) a přechodovými podmínkami

$$u_L(x_0^-) = u_P(x_0^+), \tag{5.9}$$

$$u_L'(x_0^-) = u_P'(x_0^+), \tag{5.10}$$

a pro řešení v v bodě x_0 požadujeme

$$v_L(x_0^-) = 0, \tag{5.11}$$

$$v_P(x_0^+) = 0. \tag{5.12}$$

I v této úloze budeme uvažovat pouze případy kdy platí

$$D_\omega \neq 0.$$

5.2 Postup řešení

Postup řešení bude podobný jako v předchozí kapitole, nicméně rozdělení intervalu přechodovou podmínkou postup zesložití.

Poznámka 5.2.1 *V některých speciálních případech, kdy řešení (u, v) splňuje*

$$v \in C^2([0, \ell]),$$

dostaneme vlastně stejné řešení jako v Kapitole 3.

5.2.1 Převedení soustav rovnic na rovnice 4.řádu

Stejně jako v předchozích úlohách si vyjádříme v z prvních rovnic soustav (5.7) a (5.8), která jsou nyní tvaru

$$v_L = -\frac{d_1 u_L'' + b_{11} u_L}{b_{12}}, \quad x \in (0, x_0^-), \tag{5.13}$$

a

$$v_P = -\frac{d_1 u_P'' + b_{11} u_P}{b_{12}}, \quad x \in (x_0^+, \ell). \tag{5.14}$$

Stejně tak dostane rozdělené i rovnice 4. řádu, které vzniknou dosazením (5.13) a (5.14) do druhých rovnic soustav (5.7) a (5.8), tedy

$$d_1 d_2 u_L'''' + (d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) u_L'' + (b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21}) u_L = 0, \quad x \in (0, x_0^-) \tag{5.15}$$

a

$$d_1 d_2 u_P'''' + (d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) u_P'' + (b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21}) u_P = 0, \quad x \in (x_0^+, \ell). \tag{5.16}$$

Stejně jako v úloze bez překážky i v tomto případě bude potřeba transformovat podmínky (5.11) a (5.12). Transformaci získáme následujícím způsobem. Vrátíme-li se k vyjádřením (5.13) a (5.14), které dosadíme do $v_L(x_0^-) = 0$ a $v_P(x_0^+) = 0$, dostáváme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} v_L(x_0^-) &= -\frac{d_1 u''(x_0^-) + b_{11} u(x_0^-)}{b_{12}} = 0, \\ v_P(x_0^+) &= -\frac{d_1 u''(x_0^+) + b_{11} u(x_0^+)}{b_{12}} = 0. \end{aligned}$$

Máme $b_{12} \neq 0$, proto musí platit $d_1 u''(x_0) + b_{11} u(x_0) = 0$, z čehož vyplývá, že

$$\begin{aligned} d_1 u_L''(x_0^-) + b_{11} u_L(x_0^-) &= 0, \\ d_1 u_P''(x_0^+) + b_{11} u_P(x_0^+) &= 0, \end{aligned}$$

a následně i

$$\begin{aligned} u_L''(x_0^-) &= -\frac{b_{11}}{d_1} u_L(x_0^-), \\ u_P''(x_0^+) &= -\frac{b_{11}}{d_1} u_P(x_0^+). \end{aligned}$$

Tím jsme získali z podmínek $v_L(x_0^-) = v_P(x_0^+) = 0$ transformované podmínky

$$u_L''(x_0^-) = -\frac{b_{11}}{d_1} u_L(x_0^-), \tag{5.17}$$

$$u_P''(x_0^+) = -\frac{b_{11}}{d_1} u_P(x_0^+), \tag{5.18}$$

pro rovnice (5.15) a (5.16).

5.2.2 Obecné řešení

Řešení rovnice (5.15) budeme hledat ve tvaru

$$u_L = e^{rx}$$

a řešení rovnice (5.16) budeme hledat ve tvaru

$$u_P = e^{r(\ell - x)}. \tag{5.19}$$

Poznámka 5.2.2 *Záměrně jsme pozměnili tvar řešení pro u_P, v následujících sekcích se nám tak budou lépe dopočítávat koeficienty obecného řešení. Celkové řešení úlohy však nebude touto volbou nijak ovlivněno.*

Charakteristická rovnice pro u_L bude stejná jako v předchozích kapitolách volíme si totiž stejný tvar řešení $u_L = e^{rx}$. Ukažme si ale, co se stane dosadíme-li do rovnice (5.16) řešení (5.19). Pokud si ještě předtím připravíme první až čtvrtou derivaci funkce (5.19), získáme

$$u_P' = -re^{r(\ell - x)},$$

$$u_P'' = r^2 e^{r(\ell - x)},$$

$$u_P''' = -r^3 e^{r(\ell - x)},$$

$$u_P'''' = r^4 e^{r(\ell - x)},$$

dosazením druhé a čtvrté derivace do (5.16) máme

$$d_1 d_2 r^4 e^{r(\ell - x)} + (d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) r^2 e^{r(\ell - x)} + (b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21}) e^{r(\ell - x)} = 0, \quad x \in (x_0^+, \ell).$$

což pokud vydělíme nenulovým výrazem $e^{r(\ell - x)}$, dostáváme charakteristickou rovnici

$$d_1 d_2 r^4 + (d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) r^2 + (b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21}) = 0, \quad x \in (x_0^+, \ell),$$

která je úplně stejná jako charakteristická rovnice pro (5.15).

Jelikož jsme si ukázali, že charakteristické rovnice jsou stejné jak pro (5.15), tak pro (5.16), i její kořeny budou stejné. Až samotné fundamentální systémy pro rovnice (5.15) a (5.16) budou různé, a to tvaru

$$\begin{aligned} FS_L &= \{e^{r_1 x}, e^{-r_1 x}, e^{r_2 x}, e^{-r_2 x}\}, \\ FS_P &= \{e^{r_1(\ell - x)}, e^{-r_1(\ell - x)}, e^{r_2(\ell - x)}, e^{-r_2(\ell - x)}\}. \end{aligned}$$

Obecné řešení (u, v) úlohy (5.5)–(5.12) se bude skládat ze dvou částí (u_L, v_L) a (u_P, v_P) na intervalech $(0, x_0)$ a (x_0, ℓ), které až zpětně dají řešení (u, v) na celém intervalu $(0, \ell)$. Tyto části jsou v prvních složkách

$$u(x) = \begin{cases} u_L(x) & x \in (0, x_0), \\ u_P(x) & x \in (x_0, \ell). \end{cases} \tag{5.20}$$

kde

$$\begin{aligned} u_L(x) &= A_L e^{r_1 x} + B_L e^{-r_1 x} + C_L e^{r_2 x} + D_L e^{-r_2 x}, \quad x \in (0, x_0), \\ u_P(x) &= A_P e^{r_1(\ell - x)} + B_P e^{-r_1(\ell - x)} + C_P e^{r_2(\ell - x)} + D_P e^{-r_2(\ell - x)}, \quad x \in (x_0, \ell), \end{aligned} \tag{5.21}$$

a A_L, B_L, C_L, D_L, A_P, B_P, C_P, $D_P \in \mathbb{R}$, a ve druhých složkách

$$v(x) = \begin{cases} v_L(x) & x \in (0, x_0), \\ v_P(x) & x \in (x_0, \ell). \end{cases} \tag{5.22}$$

přičemž bude platit

$$\begin{aligned} v_L(x) &= -\frac{d_1 u_L''(x) + b_{11} u_L(x)}{b_{12}}, \quad x \in (0, x_0), \\ v_P(x) &= -\frac{d_1 u_P''(x) + b_{11} u_P(x)}{b_{12}}, \quad x \in (x_0, \ell). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Což je v podstatě vyjádření (5.13), (5.14).

5.2.3 Dosazení obecného řešení do podmínek

Ještě než začneme dosazovat do do okrajových podmínek, připravíme si první, druhé a třetí derivace u_P a u_L. Pro u_L to jsou

$$\begin{aligned} u_L'(x) &= r_1 e^{r_1 x} A_L - r_1 e^{-r_1 x} B_L + r_2 e^{r_2 x} C_L - r_2 e^{-r_2 x} D_L, \\ u_L''(x) &= r_1^2 e^{r_1 x} A_L + r_1^2 e^{-r_1 x} B_L + r_2^2 e^{r_2 x} C_L + r_2^2 e^{-r_2 x} D_L, \\ u_L'''(x) &= r_1^3 e^{r_1 x} A_L - r_1^3 e^{-r_1 x} B_L + r_2^3 e^{r_2 x} C_L - r_2^3 e^{-r_2 x} D_L. \end{aligned}$$

a pro u_P pak dostáváme

$$\begin{aligned}
u_P'(x) &= -r_1 e^{r_1(\ell-x)} A_P + r_1 e^{-r_1(\ell-x)} B_P - r_2 e^{r_2(\ell-x)} C_P + r_2 e^{-r_2(\ell-x)} D_P,\\
u_P''(x) &= r_1^2 e^{r_1(\ell-x)} A_P + r_1^2 e^{-r_1(\ell-x)} B_P + r_2^2 e^{r_2(\ell-x)} C_P + r_2^2 e^{-r_2(\ell-x)} D_P,\\
u_P'''(x) &= -r_1^3 e^{r_1(\ell-x)} A_P + r_1^3 e^{-r_1(\ell-x)} B_P - r_2^3 e^{r_2(\ell-x)} C_P + r_2^3 e^{-r_2(\ell-x)} D_P.
\end{aligned}$$

Do jednotlivých podmínek dosadíme tato vyjádření příslušných derivací. Tímto způsobem dostaneme následujících osm rovnic s neznámými koeficienty A_L až D_P.

Podmínka č.1: $u_L'(0) = 0$

$$r_1 e^{r_1 0} A_L - r_1 e^{-r_1 0} B_L + r_2 e^{r_2 0} C_L - r_2 e^{-r_2 0} D_L = 0.$$

Podmínka č.2: $u_P'(\ell) = 0$

$$-r_1 e^{r_1 0} A_P + r_1 e^{-r_1 0} B_P - r_2 e^{r_2 0} C_P + r_2 e^{-r_2 0} D_P = 0.$$

Podmínka č.3: $u_L(x_0^-) = u_P(x_0^+)$

$$e^{r_1 x_0} A_L + e^{-r_1 x_0} B_L + e^{r_2 x_0} C_L + e^{-r_2 x_0} D_L =$$

$$= e^{r_1(\ell-x_0)} A_P + e^{-r_1(\ell-x_0)} B_P + e^{r_2(\ell-x_0)} C_P + e^{-r_2(\ell-x_0)} D_P.$$

Podmínka č.4: $u_L'(x_0^-) = u_P'(x_0^+)$

$$r_1 e^{r_1 x_0} A_L - r_1 e^{-r_1 x_0} B_L + r_2 e^{r_2 x_0} C_L - r_2 e^{-r_2 x_0} D_L =$$

$$= -r_1 e^{r_1(\ell-x_0)} A_P + r_1 e^{-r_1(\ell-x_0)} B_P - r_2 e^{r_2(\ell-x_0)} C_P + r_2 e^{-r_2(\ell-x_0)} D_P.$$

Podmínka č.5: $u_L'''(0) = 0$

$$r_1^3 e^{r_1 0} A_L - r_1^3 e^{-r_1 0} B_L + r_2^3 e^{r_2 0} C_L - r_2^3 e^{-r_2 0} D_L = 0.$$

Podmínka č.6: $u_P'''(\ell) = 0$

$$-r_1^3 e^{r_1 0} A_P + r_1^3 e^{-r_1 0} B_P - r_2^3 e^{r_2 0} C_P + r_2^3 e^{-r_2 0} D_P = 0.$$

Podmínka č.7: $u_L''(x_0^-) = -\frac{b_{11}}{d_1} u_L(x_0^-)$

$$(r_1^2 + \frac{b_{11}}{d_1}) e^{r_1 x_0} A_L + (r_1^2 + \frac{b_{11}}{d_1}) e^{-r_1 x_0} B_L + (r_2^2 + \frac{b_{11}}{d_1}) e^{r_2 x_0} C_L + (r_2^2 + \frac{b_{11}}{d_1}) e^{-r_2 x_0} D_L = 0.$$

Podmínka č.8: $u''_P(x_0^+) = -\frac{b_{11}}{d_1} u_P(x_0^+)$

$$(r_1^2+\frac{b_{11}}{d_1})e^{r_1(\ell-x_0)}A_P+(r_1^2+\frac{b_{11}}{d_1})e^{-r_1(\ell-x_0)}B_P+(r_2^2+\frac{b_{11}}{d_1})e^{r_2(\ell-x_0)}C_P+(r_2^2+\frac{b_{11}}{d_1})e^{-r_2(\ell-x_0)}D_P = 0.$$

Pomocí těchto osmi lineárních rovnic budeme určovat osm neznámých koeficientů A_L až D_P, které jsou nezbytné pro výsledný tvar řešení. Uvažujeme-li rovnice jako soustavu, lze příslušnou matici soustavy rozepsat jako blokovou matici N, která je tvaru

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix},$$

kde jednotlivé podmatice N_1 až N_4 jsou tvaru

$$N_1 = \begin{pmatrix} r_1 & -r_1 & r_2 & -r_2 \\ r_1^3 & -r_1^3 & r_2^3 & -r_2^3 \\ (r_1^2+\frac{b_{11}}{d_1})e^{r_1x_0} & (r_1^2+\frac{b_{11}}{d_1})e^{-r_1x_0} & (r_2^2+\frac{b_{11}}{d_1})e^{r_2x_0} & (r_2^2+\frac{b_{11}}{d_1})e^{-r_2x_0} \end{pmatrix},$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} -r_1 & r_1 & -r_2 & r_2 \\ -r_1^3 & r_1^3 & -r_2^3 & r_2^3 \\ (r_1^2+\frac{b_{11}}{d_1})e^{r_1(\ell-x_0)} & (r_1^2+\frac{b_{11}}{d_1})e^{-r_1(\ell-x_0)} & (r_2^2+\frac{b_{11}}{d_1})e^{r_2(\ell-x_0)} & (r_2^2+\frac{b_{11}}{d_1})e^{-r_2(\ell-x_0)} \end{pmatrix},$$

$$N_3 = \begin{pmatrix} e^{r_1x_0} & e^{-r_1x_0} & e^{r_2x_0} & e^{-r_2x_0} \\ r_1e^{r_1x_0} & -r_1e^{-r_1x_0} & r_2e^{r_2x_0} & -r_2e^{-r_2x_0} \end{pmatrix},$$

$$N_4 = \begin{pmatrix} -e^{r_1(\ell-x_0)} & -e^{-r_1(\ell-x_0)} & -e^{r_2(\ell-x_0)} & -e^{-r_2(\ell-x_0)} \\ r_1e^{r_1(\ell-x_0)} & -r_1e^{-r_1(\ell-x_0)} & r_2e^{r_2(\ell-x_0)} & -r_2e^{-r_2(\ell-x_0)} \end{pmatrix},$$

Zdůrazněme rovnou, že determinant této soustavy závisí na parametrech (d_1, d_2). Pokud $det(N) \neq 0$, pak má úloha (5.5)–(5.12) pouze nulové řešení. Proto je teď naším dalším úkolem najít parametry $d_1, d_2 > 0$ tak, aby $det(N) = 0$, a tedy aby existovalo netriviální řešení (u, v). Shrňme jen, že postup je zde obdobný jako v úloze bez překážky (3.1), pouze výsledná matice N je komplikovanější. Vzhledem ke složitosti matice N^{8x8} a k potřebě vyjádřit pomocí sedmi rovnic sedm koeficientů pomocí zbylého osmého a poslední osmou rovnici využít na určení parametrů (d_1, d_2).

V dalším textu si ukážeme, jak lze koeficienty A_L až D_P získat i jiným způsobem než přes determinant matice N. Jelikož vyjádření determinantu matice 8×8 není jednoduché, ukážeme si v následující sekci, jak získat koeficienty obecného řešení jinak a jednodušeji.

5.3 Koeficienty A_L až D_P

Jak jsme již naznačili, matice N a její soustava rovnic je komplikovaná a její determinant velmi obtížně vyjádřitelný. Proto se pokusíme dosáhnout kořenů A_L až D_P jinou, schůdnější cestou. Koeficienty dopočítáme z osmi podmínek pro soustavu (5.21), které jsou uvedeny výše. Postup bude spočívat v tom, že si budeme postupně vyjadřovat některé koeficienty pomocí ostatních, až nakonec budeme mít vyjádřeny všechny pomocí jediného koeficientu A_L. Navíc nám zbyde jedna rovnice propojující oba intervaly, pomocí které určíme kritické body (d_1, d_2) (více viz. Sekce 5.5).

Nejprve začneme s podmínkami pro levou stranu, tedy koeficienty s indexem L. Podíváme-li se na jim příslušnou submatici N_1, zjistíme, že se první dva řádky matice N_1 shodují s maticí M tvaru (3.30) v Kapitole 3. Stejným postupem jako v Kapitole 3 proto okamžitě dostáváme

$$A_L = B_L,$$

$$C_L = D_L.$$

Nyní dosadíme obě tyto rovnosti do rovnice pro podmínku $u_L''(x_0^-) = -\frac{b_{11}}{d_1} u_L(x_0^-)$, tedy pro podmínku

$$(r_1^2 + \frac{b_{11}}{d_1})e^{r_1 x_0} A_L + (r_1^2 + \frac{b_{11}}{d_1})e^{-r_1 x_0} B_L + (r_2^2 + \frac{b_{11}}{d_1})e^{r_2 x_0} C_L + (r_2^2 + \frac{b_{11}}{d_1})e^{-r_2 x_0} D_L = 0,$$

a postupně získáme

$$\begin{aligned} (r_1^2 + \frac{b_{11}}{d_1})e^{r_1 x_0} A_L + (r_1^2 + \frac{b_{11}}{d_1})e^{-r_1 x_0} A_L + (r_2^2 + \frac{b_{11}}{d_1})e^{r_2 x_0} C_L + (r_2^2 + \frac{b_{11}}{d_1})e^{-r_2 x_0} C_L &= 0, \\ (r_1^2 + \frac{b_{11}}{d_1})(e^{r_1 x_0} + e^{-r_1 x_0}) A_L + (r_2^2 + \frac{b_{11}}{d_1})(e^{r_2 x_0} + e^{-r_2 x_0}) C_L = 0. & \qquad (5.24) \end{aligned}$$

Teď se pokusíme získat totéž i pro koeficienty a indexem P. Porovnáním matice N_2, která odpovídá koeficientům s indexem P, znovu s maticí M tvaru (3.30) získáváme

$$\begin{aligned} A_P &= B_P, \\ C_P &= D_P, \end{aligned}$$

a dosazením za podmínku $u_P''(x_0^+) = -\frac{b_{11}}{d_1} u_P(x_0^+)$ pak dává

$$(r_1^2 + \frac{b_{11}}{d_1})(e^{r_1(\ell - x_0)} + e^{-r_1(\ell - x_0)}) A_P + (r_2^2 + \frac{b_{11}}{d_1})(e^{r_2(\ell - x_0)} + e^{-r_2(\ell - x_0)}) C_P = 0. \qquad (5.25)$$

V dalším kroce si vyjádříme z rovnic (5.24) a (5.25) tvary

$$
\begin{aligned}
(e^{r_2 x_0} + e^{-r_2 x_0})C_L &= -\frac{(r_1^2 + \frac{b_{11}}{d_1})}{(r_2^2 + \frac{b_{11}}{d_1})}(e^{r_1 x_0} + e^{-r_1 x_0})A_L, \\
(e^{r_2(\ell - x_0)} + e^{-r_2(\ell - x_0)})C_P &= -\frac{(r_1^2 + \frac{b_{11}}{d_1})}{(r_2^2 + \frac{b_{11}}{d_1})}(e^{r_1(\ell - x_0)} + e^{-r_1(\ell - x_0)})A_P,
\end{aligned}
$$

které platí za podmínky $(r_2^2 + \frac{b_{11}}{d_1}) \neq 0$, a o které víme díky pomocné rovnosti (2.33) v Kapitole 2, že bude splněna vždy. Potom tyto tvary dosadíme do rovnice dané podmínkou (5.9) tvaru

$$
\begin{aligned}
& e^{r_1 x_0}A_L + e^{-r_1 x_0}B_L + e^{r_2 x_0}C_L + e^{-r_2 x_0}D_L = \\
&= e^{r_1(\ell - x_0)}A_P + e^{-r_1(\ell - x_0)}B_P + e^{r_2(\ell - x_0)}C_P + e^{-r_2(\ell - x_0)}D_P.
\end{aligned}
$$

Ještě předtím než dosadíme, tak pro přehlednost použijeme substituce tvaru (2.4), tedy

$$
\begin{aligned}
(e^{r_1 x_0} + e^{-r_1 x_0})A_L &= C_1(x_0)A_L, \\
(e^{r_2 x_0} + e^{-r_2 x_0})C_L &= C_2(x_0)C_L, \\
(e^{r_1(\ell - x_0)} + e^{-r_1(\ell - x_0)})A_P &= C_1(\ell - x_0)A_P, \\
(e^{r_2(\ell - x_0)} + e^{-r_2(\ell - x_0)})C_P &= C_2(\ell - x_0)C_P, \\
(r_2^2 + \tfrac{b_{11}}{d_1}) &= R_2, \\
(r_1^2 + \tfrac{b_{11}}{d_1}) &= R_1.
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

Po dosazení všech substitucí, postupně dostáváme

$$
\begin{aligned}
e^{r_1 x_0}A_L + e^{-r_1 x_0}A_L &+ e^{r_2 x_0}C_L + e^{-r_2 x_0}C_L = \\
= e^{r_1(\ell - x_0)}A_P + e^{-r_1(\ell - x_0)}A_P &+ e^{r_2(\ell - x_0)}C_P + e^{-r_2(\ell - x_0)}C_P. \\
C_1(x_0)A_L + C_2(x_0)C_L &= C_1(\ell - x_0)A_P + C_2(\ell - x_0)C_P.
\end{aligned}
$$

Nyní po dosazení rovností (5.24) a (5.25) za $C_2(x_0)C_L$ a $C_2(\ell - x_0)C_P$ postupně dostáváme

$$
\begin{aligned}
C_1(x_0)A_L - \frac{R_1}{R_2}C_1(x_0)A_L &= C_1(\ell - x_0)A_P - \frac{R_1}{R_2}C_1(\ell - x_0)A_P, \\
(1 - \frac{R_1}{R_2})C_1(x_0)A_L &= (1 - \frac{R_1}{R_2})C_1(\ell - x_0)A_P,
\end{aligned}
$$

až nakonec dostáváme rovnici

$$
(1 - \frac{R_1}{R_2})C_1(x_0)A_L = (1 - \frac{R_1}{R_2})C_1(\ell - x_0)A_P.
$$

Když je splněna podmínka $(1-\frac{R_1}{R_2}) \neq 0$, která je podle pomocné rovnosti (2.41) v Kapitole 2 splněna pokud $D_\omega \neq 0$, pak dostáváme

$$C_1(x_0)A_L = C_1(\ell - x_0)A_P. \tag{5.27}$$

Tímto způsobem jsme si vyjádřili všechny koeficienty vzhledem k jedinému vztahu mezi A_L a A_P a zároveň ukázali, že předpoklady zaručující nedělení nulou jsou splněny, popřípadě že platí alespoň v generickém případě kdy $D_\omega \neq 0$.

5.4 Hledání kritických bodů úlohy pro speciální případy

Na začátku této sekce zmiňme, že vycházíme z upravených rovností ze Sekce 5.3, jenž si pro lepší orientaci v textu vypíšeme ještě jednou

$$\begin{aligned}
(e^{r_1(\ell-x_0)}+e^{-r_1(\ell-x_0)})A_P &= A_L(e^{r_1x_0}+e^{-r_1x_0}),\\
B_L &= A_L,\\
C_L &= D_L,\\
(e^{r_2x_0}+e^{-r_2x_0})C_L &= -A_L\tfrac{R_1}{R_2}(e^{r_1x_0}+e^{-r_1x_0}),\\
B_P &= A_P,\\
C_P &= D_P,\\
(e^{r_2(\ell-x_0)}+e^{-r_2(\ell-x_0)})C_P &= -A_P\tfrac{R_1}{R_2}(e^{r_1(\ell-x_0)}+e^{-r_1(\ell-x_0)}).
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Navíc pokud pro přehlednost použijeme substituci (2.4), soustava (5.28) nabude tvaru

$$C_1(x_0)A_L = C_1(\ell-x_0)A_P, \tag{5.29}$$

$$B_L = A_L, \tag{5.30}$$

$$C_L = D_L, \tag{5.31}$$

$$C_2(x_0)C_L = -\frac{R_1}{R_2}C_1(x_0)A_L, \tag{5.32}$$

$$B_P = A_P, \tag{5.33}$$

$$C_P = D_P, \tag{5.34}$$

$$C_2(\ell-x_0)C_P = -\frac{R_1}{R_2}C_1(\ell-x_0)A_P. \tag{5.35}$$

Jako poslední ještě zmiňme, že v Kapitole 2 jsme ukázali, že platí nerovnosti (2.33) a (2.34), proto platí

$$\frac{R_1}{R_2} \neq 0.$$

Nyní přejděmě k jednotlivým speciálním situacím, které mohou nastat pro rovnosti (5.29)–(5.35). Struktura této sekce bude následující. Vždy budeme uvažovat nějaký předpoklad, ukážeme si, pro které dvojice bodů $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ je splněný a následně ukážeme jaké bude řešení pro kritické body. Opět zde budeme hojně využívat pomocných tvrzení ze Sekce 2.6. Poznamenejme jen, že v některém ze speciálních případů se v následující sekci objeví i řešení, která budou mít druhou složku v hladkou. To jest řešení, která se objevují již v Kapitole 3.

5.4.1 Předpoklad první

V případě, že by v rovnici (5.27), respektive (5.29) platily podmínky

$$\begin{aligned} C_1(x_0) &= 0, \\ C_1(\ell - x_0) &\neq 0, \end{aligned} \tag{5.36}$$

pak pro libovolné $A_L \neq 0$ dostaneme

$$A_P = 0.$$

Takto získáné A_P dosadíme do (5.35) a máme

$$C_2(\ell - x_0)C_P = 0. \tag{5.37}$$

Zde ale vzniká další podmínka, kterou je nutno vyřešit, a sice zda $C_2(\ell - x_0)$ je, nebo není nulové. Proto teď musíme tento případ rozdělit ještě na dva podpřípady

Podpřípad první

předpokládejme tedy, aby nejprve platilo

$$C_2(\ell - x_0) \neq 0. \tag{5.38}$$

Pak nám z rovnice (5.37) plyne

$$C_P = 0.$$

Dále dosazením první podmínky (5.36) do rovnice (5.32) dostáváme pro $A_L \neq 0$ rovnici

$$C_2(x_0)C_L = 0,$$

Potom pomocné Tvrzení 2.6.9 říká, že pokud by platilo zároveň $C_1(x_0) = C_2(x_0) = 0$, pak budou výsledné kritické body (d_1, d_2) pouze izolované body. Tyto množiny nás ale nezajímají, tuto možnost nebudeme uvažovat a budeme předpokládat pouze

$$C_2(x_0) \neq 0. \tag{5.39}$$

Potom díky rovnici (5.4.1) dostáváme, že

$$C_L = 0.$$

V tuto chvíli máme všechny koeficienty až na A_L, B_L nulové. To by znamenalo, že řešení $u_L \in (0, x_0)$ je nenulové a řešení $u_P \in (x_0, \ell)$ je nulové. V takovém případě ale nesmíme zapomenout na poslední podmínku $u'_L(x_0^-) = u'_P(x_0^+)$, která požaduje spojitou první derivaci mezi řešeními u_P a u_L. Ověříme, zda platí i tato podmínka, která nám tedy dává rovnici

$$r_1 e^{r_1 x_0} A_L - r_1 e^{-r_1 x_0} B_L + r_2 e^{r_2 x_0} C_L - r_2 e^{-r_2 x_0} D_L =$$

$$= -r_1 e^{r_1(\ell - x_0)} A_P + r_1 e^{-r_1(\ell - x_0)} B_P - r_2 e^{r_2(\ell - x_0)} C_P + r_2 e^{-r_2(\ell - x_0)} D_P,$$

díky které dostáváme osmou rovnici, která vyjádřená v substitucích stejně jako rovnice (5.29)-(5.35) je tvaru

$$r_1 A_L S_1(x_0) + r_2 C_L S_2(x_0) = -r_1 A_P S_1(\ell - x_0) - r_2 C_P S_2(\ell - x_0). \tag{5.40}$$

Dosazením prozatím získaných rovností

$$A_L = B_L,$$

která jsou tedy libovolná a dále rovnosti

$$\begin{aligned} C_L = D_L &= 0, \\ A_P = B_P &= 0, \\ C_P = D_P &= 0, \end{aligned}$$

získáme rovnici tvaru

$$r_1 A_L S_1(x_0) = 0,$$

Díky Tvrzení 2.6.10 ale víme, že pokud $C_1(x_0) = 0$, potom

$$S_1(x_0) \neq 0.$$

Nutně tedy musí platit, že i

$$A_L = B_L = 0.$$

Tímto nám vyšly všechny koeficienty A_L až D_P nulové, to znamená že za podmínek (5.36), (5.38) a (5.39), by měla úloha (5.1), (5.2) a (5.3) pouze triviální řešení $(u, v) = (0, 0)$. Takovému řešení ale nebudeme věnovat pozornost.

Podpřípad druhý

V druhém podpřípadě stejně jako v prvním může platit

$$A_L \neq 0,$$

$$A_P = 0.$$

Nyní ale pro rovnici (5.37) požadujme, aby platil opak, tedy

$$C_2(\ell - x_0) = 0, \tag{5.41}$$

potom z rovnice

$$C_2(\ell - x_0)C_P = 0.$$

dostáváme, že i C_P může být libovolné, tedy

$$C_P \neq 0.$$

Naopak z rovnice (5.32), po dosazení podmínky (5.36) dostáváme

$$C_2(x_0)C_L = 0. \tag{5.42}$$

Díky Tvrzení 2.6.9, okamžitě víme, že pokud by platilo $C_2(x_0) = 0$ a zároveň $C_1(x_0) = 0$, dostali bychom v rovině $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ pouze jednotlivé izolované kritické body, pro které by existovalo netriviální řešení. Tento případ proto nebudeme uvažovat a zaměříme se na případ

$$C_2(x_0) \neq 0. \tag{5.43}$$

ve kterém z rovnosti (5.42) dostaneme, že

$$C_L = 0.$$

Shrnutí všech podmínek je tedy následující

$$\begin{aligned} A_L = B_L &\neq 0, \\ C_P = D_P &\neq 0, \\ C_L = D_L &= 0, \\ A_P = B_P &= 0. \end{aligned}$$

Obě části řešení u, tedy u_L na intervalu $(0, x_0)$ a u_P na intervalu (x_0, ℓ) jsou nenulové. Proto nyní použijeme ještě poslední podmínku $u_L'(x_0^-) = u_P'(x_0^+)$ reprezentovanou rovnicí (5.40). Dosazením rovností pak máme

$$r_1 A_L S_1(x_0) = -r_2 C_P S_2(\ell - x_0).$$

Tímto dostáváme díky Tvrzení 2.6.10 a rovnosti (3.16) netriviální vztah mezi A_L a C_P. Jelikož jsme tedy získali koeficienty, lze získat obecné řešení. Dosadíme je tedy do obecného řešení (5.21) pro u a (5.23) pro v, a dostáváme řešení

$$\begin{aligned} u_L &= A_L C_1(x), \\ v_L &= -A_L \tfrac{d_1 r_1^2 + b_{11}}{b_{12}} C_1(x), \end{aligned} \qquad x \in (0, x_0) \tag{5.44}$$

pro levou stranu a

$$\begin{aligned} u_P &= -A_L \tfrac{r_1}{r_2} \tfrac{S_1(x_0)}{S_2(\ell - x_0)} C_2(\ell - x), \\ v_P &= A_L r_1 \tfrac{S_1(x_0)}{S_2(\ell - x_0)} \tfrac{r_2 d_1 + r_2^{-1} b_{11}}{b_{12}} C_2(\ell - x), \end{aligned} \qquad x \in (x_0, \ell) \tag{5.45}$$

na pravé straně. Tato řešení ale vznikají pouze za podmínek (5.36), (5.41) a (5.43). Ukažme si proto nyní, co to vlastně znamená vzhledem k parametrům d_1, d_2 a jaké dostaneme kritické body systému. Zaměřme se především na podmínky

$$\begin{aligned} C_1(x_0) &= 0, \\ C_2(\ell - x_0) &= 0, \end{aligned}$$

Podle Tvrzení 2.6.12 budou za těchto podmínek v rovině $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$ pouze jednotlivé izolované kritické body. To znamená, že řešení sice vzniknou, ale pouze v jednotlivých bodech roviny $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$. Nedostaneme tak souvislou množinu kritických bodů.

5.4.2 Předpoklad druhý

V druhém předpokladu budeme rovnici (5.27), respektive (5.29), diskutovat za podmínek

$$\begin{aligned} C_1(x_0) &= 0, \\ C_1(\ell - x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Podle Tvrzení 2.6.11 jsou podmínky (5.46) splněny pro $(d_1, d_2) \in H_n^\ell$, což je množina kritických bodů, která rozděluje rovinu $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$ na souvislé oblasti. Za podmínek (5.46) dostáváme díky rovnici (5.29) tvar

$$0 * A_L = 0 * A_P,$$

tudíž oba parametry mohou být libovolné, a můžeme zvolit

$$\begin{aligned} A_L &\neq 0, \\ A_P &\neq 0. \end{aligned}$$

Dosazením předpokladu (5.46) do rovnice (5.32) dostáváme

$$C_2(x_0)C_L = 0.$$

Vzhledem k tomu, že nás nezajímají izolované kritické body, budeme předpokládat podle Tvrzení 2.6.13 že

$$C_2(x_0) \neq 0,$$

potom získáme

$$C_L = 0.$$

Dále dosazením do rovnice (5.35) dostáváme

$$C_2(\ell - x_0)C_P = 0.$$

Použijeme-li stejnou úvahu jako v předchozí rovnosti, ke které nám tentokrát pomůže Tvrzení 2.6.12, budeme předpokládat aby i

$$C_2(\ell - x_0) \neq 0,$$

proto i

$$C_P = 0.$$

V tuto chvíli máme opět všechny koeficienty A_L až D_P. Jejich netriviálními vztahy jsou

$$
\begin{aligned}
A_L = B_L &\neq 0, \\
C_L = D_L &= 0, \\
A_P = B_P &\neq 0, \\
C_P = D_P &= 0.
\end{aligned}
$$

Obdobně dosadíme obě strany řešení u, tedy u_L a u_P do rovnice pro podmínku $u'_L(x_0^-) = u'_P(x_0^+)$ reprezentovanou rovnicí (5.40) a dostaneme

$$r_1 A_L S_1(x_0) = -r_1 A_P S_1(\ell - x_0).$$

kterou ještě vydělíme $r_1 \neq 0$ a získáme vztah pro A_L a A_P, jelikož podle Tvrzení 2.6.10 $S_1(x_0) \neq 0$ a také $S_1(\ell - x_0) \neq 0$, dostaneme tedy

$$A_L S_1(x_0) = -A_P S_1(\ell - x_0).$$

Jejich dosazením do rozděleného obecného řešení pro u tvaru (5.21) a stejně tak tvaru (5.23) pro v, dostáváme řešení

$$
\begin{aligned}
u_L &= A_L C_1(x), \\
v_L &= -A_L \tfrac{d_1 r_1^2 + b_{11}}{b_{12}} C_1(x),
\end{aligned}
\qquad x \in (0, x_0) \tag{5.47}
$$

pro pravou stranu intervalu a poté i

$$
\begin{aligned}
u_P &= -A_L \tfrac{S_1(x_0)}{S_1(\ell - x_0)} C_1(\ell - x), \\
v_P &= A_L \tfrac{S_1(x_0)}{S_1(\ell - x_0)} \tfrac{d_1 r_1^2 + b_{11}}{b_{12}} C_1(\ell - x),
\end{aligned}
\qquad x \in (x_0, \ell). \tag{5.48}
$$

Řešení platí pouze za podmínek

$$
\begin{aligned}
C_1(x_0) &= 0, \\
C_1(\ell - x_0) &= 0, \\
C_2(x_0) &\neq 0, \\
C_2(\ell - x_0) &\neq 0,
\end{aligned}
$$

Což podle Tvrzení 2.6.11 znamená, že dostáváme takové kritické body soustavy (5.1), (5.2), (5.3), které splňují

$$(d_1, d_2) \in H_n^\ell, \tag{5.49}$$

pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Jelikož platí (5.49), znamená to, že

$$u_L \in C^2([0, x_0]),$$

$$u_P \in C^2([x_0, \ell]),$$

a podle (5.20), (5.5) a (5.11), (5.12) máme

$$u \in C^2([0, \ell]). \tag{5.50}$$

Jelikož platí, že

$$v_L = \gamma(d) u_L,$$

$$v_P = \gamma(d) u_P$$

(se stejným $\gamma(d)$), potom platí, že také

$$v_L \in C^2([0, x_0]),$$

$$v_P \in C^2([x_0, \ell]),$$

a díky (5.22) a (5.50) získáváme, že i

$$v \in C^2([0, \ell]).$$

To znamená, že řešení (u, v) navíc v tomto případě splňuje regularitu a kritické body tohoto speciálního případu leží na hyperbole H_n^ℓ v rovině $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$. Tento speciální případ je tedy stejný jako v Kapitole 3.

5.5 Nalezení kritických bodů

Po vyřešení speciálních případů si ukážeme řešení, pro které neplatí ani jedna nulová rovnost z předchozí Sekce 5.4. Dalším krokem, který bude třeba udělat, je opětovné použití poslední zbývající podmínky (5.10), tedy $u_L'(x_0^-) = u_P'(x_0^+)$. Pomocí této poslední podmínky, která propojuje obě strany řešení, budeme hledat kritické body $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$. Do rovnice

$$r_1 e^{r_1 x_0} A_L - r_1 e^{-r_1 x_0} B_L + r_2 e^{r_2 x_0} C_L - r_2 e^{-r_2 x_0} D_L =$$

$$= -r_1 e^{r_1(\ell - x_0)} A_P + r_1 e^{-r_1(\ell - x_0)} B_P - r_2 e^{r_2(\ell - x_0)} C_P + r_2 e^{-r_2(\ell - x_0)} D_P$$

dosadíme postupně všechny získané vyjádření koeficientů, které najdeme v Sekci 5.3 kromě koeficientu A_L, od kterého se ostatní koeficienty odvíjí. Máme tedy rovnici

$$r_1(e^{r_1x_0}-e^{-r_1x_0})A_L+r_1\frac{(e^{r_1(\ell-x_0)}-e^{-r_1(\ell-x_0)})(e^{r_1x_0}+e^{-r_1x_0})}{e^{r_1(\ell-x_0)}+e^{-r_1(\ell-x_0)}}A_L-$$

$$-r_2(e^{r_2x_0}-e^{-r_2x_0})\frac{R_1}{R_2}\frac{e^{r_1x_0}+e^{-r_1x_0}}{e^{r_2x_0}+e^{-r_2x_0}}A_L-r_2(e^{r_2(\ell-x_0)}-e^{-r_2(\ell-x_0)})\frac{R_1}{R_2}\frac{e^{r_1x_0}+e^{-r_1x_0}}{e^{r_2(\ell-x_0)}+e^{-r_2(\ell-x_0)}}A_L=0,$$

Vytknutím A_L a částečně i vytknutím r_1 a r_2 dostáváme rovnici

$$(r_1((e^{r_1x_0}-e^{-r_1x_0})+(e^{r_1(\ell-x_0)}-e^{-r_1(\ell-x_0)})\frac{(e^{r_1x_0}+e^{-r_1x_0})}{e^{r_1(\ell-x_0)}+e^{-r_1(\ell-x_0)}})-$$

$$-r_2\frac{R_1}{R_2}((e^{r_2(\ell-x_0)}-e^{-r_2(\ell-x_0)})\frac{e^{r_1x_0}+e^{-r_1x_0}}{e^{r_2(\ell-x_0)}+e^{-r_2(\ell-x_0)}}+(e^{r_2x_0}-e^{-r_2x_0})\frac{e^{r_1x_0}+e^{-r_1x_0}}{e^{r_2x_0}+e^{-r_2x_0}}))A_L=0.$$

Poznámka: Případy, kdy by mohlo nastat, že dělíme nulovým číslem, jsme již vyřešili v Sekci 5.4.

Pro částečné zjednodušení výrazu užijme opět substitucí (2.4). Pak tedy výsledná rovnice bude o něco přehlednějšího tvaru

$$(r_1(S_1(x_0)+S_1(\ell-x_0)\frac{C_1(x_0)}{C_1(\ell-x_0)})-r_2\frac{R_1}{R_2}C_1(x_0)(\frac{S_2(\ell-x_0)}{C_2(\ell-x_0)}+\frac{S_2(x_0)}{C_2(x_0)}))A_L=0.$$

Jak jsme již zmínili, pomocí této rovnice si najdeme kritické body $(d_1,d_2)\in\mathbb{R}^2_+$. Jelikož chceme $A_L\neq 0$, pak musí pro kritické body nutně platit

$$r_1(S_1(x_0)+S_1(\ell-x_0)\frac{C_1(x_0)}{C_1(\ell-x_0)})-r_2\frac{R_1}{R_2}C_1(x_0)(\frac{S_2(\ell-x_0)}{C_2(\ell-x_0)}+\frac{S_2(x_0)}{C_2(x_0)})=0. \tag{5.51}$$

Pokud si definujeme funkci $g(d_1,d_2)$ jako

$$g(d_1,d_2)=r_1(S_1(x_0)+S_1(\ell-x_0)\frac{C_1(x_0)}{C_1(\ell-x_0)})-r_2\frac{R_1}{R_2}C_1(x_0)(\frac{S_2(\ell-x_0)}{C_2(\ell-x_0)}+\frac{S_2(x_0)}{C_2(x_0)}), \tag{5.52}$$

pak množina kritických bodů je

$$K_{x_0}=\{(d_1,d_2)\in\mathbb{R}^2_+ : g(d_1,d_2)=0\}. \tag{5.53}$$

Jestliže $d=(d_1,d_2)\in K_{x_0}$ jsou kritické body systému, pak řešení úlohy (5.1), (5.2), (5.3) s přechodovou podmínkou (5.4) je tvaru

$$u(x)=\begin{cases} u_L(x) & x\in(0,x_0),\\ u_P(x) & x\in(x_0,\ell).\end{cases}$$

kde

$$\begin{aligned} u_L(x) &= A_L(C_1(x) - \beta_1(d)C_2(x)), \quad x \in (0, x_0), \\ u_P(x) &= A_L\beta_3(d)(C_1(\ell - x) - \beta_2(d)C_2(\ell - x)), \quad x \in (x_0, \ell). \end{aligned} \tag{5.54}$$

Druhou složkou v řešení pak je

$$v(x) = \begin{cases} v_L(x) & x \in (0, x_0), \\ v_P(x) & x \in (x_0, \ell), \end{cases}$$

kde

$$\begin{aligned} v_L(x) &= -A_L\tfrac{d_1(r_1^2C_1(x)-\beta_1(d)r_2^2C_2(x))+b_{11}(C_1(x)-\beta_1(d)C_2(x))}{b_{12}}, \quad x \in (0, x_0), \\ v_P(x) &= -A_L\beta_3(d)\tfrac{d_1(r_1^2C_1(\ell-x)-\beta_2(d)r_2^2C_2(x))+b_{11}(C_1(\ell-x)-\beta_2(d)C_2(\ell-x))}{b_{12}}, \quad x \in (x_0, \ell), \end{aligned} \tag{5.55}$$

kde

$$\beta_1(d) = \frac{R_1C_1(x_0)}{R_2C_2(x_0)},$$

$$\beta_2(d) = \frac{R_1C_1(\ell - x_0)}{R_2C_2(\ell - x_0)},$$

$$\beta_3(d) = \frac{C_1(x_0)}{C_1(\ell - x_0)},$$

$$A_L \in \mathbb{R}.$$

Zde již nepůjde získat množinu kritických bodů analyticky, jako se nám to povedlo v Kapitole 3. Množinu K_{x_0} musíme zjistit numericky.

5.6 Výsledek

Nakonec i v této poměrně komplikované úloze se nám podařilo najít množinu kritickcýh bodů rozdělující rovinu $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$ na souvislé oblasti.

Tvrzení 5.6.1 *Množina všech kritických bodů* $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$ *úlohy (5.1), (5.2), (5.3) s přechodovou podmínkou (5.4) je*

$$K_{x_0} = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2 : g(d_1, d_2) = 0\},$$

kde $g(d_1, d_2)$ *je tvaru (5.52).*

Pokud $d \in K_{x_0}$, pak řešení (u, v) úlohy (5.1), (5.2), (5.3) s přechodovou podmínkou (5.4) je tvaru (5.54) pro první složku u a (5.55) pro druhou složku v.

5.6.1 Shrnutí

Opět se nám podařilo ukázat, že kritické body úlohy (5.1), (5.2), (5.3) s přechodovou podmínkou (5.4) existují. Množina kritickcýh bodů, která rozděluje rovinu $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$ na souvislé oblasti je

$$K_{x_0} = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2 : g(d_1, d_2) = 0\},$$

kde $g(d_1, d_2)$ je tvaru (5.52). Uvnitř jednotlivých oblastí existuje opět pouze nulové řešení. Navíc v jednom speciálním případě se nám podařilo najít řešení stejného typu jako v Kapitole 3.

Kapitola 6

Příklady

V následující kapitole si ukážeme, jak vypadají množiny kritických bodů pro jednotlivé úlohy. Také si vykreslíme konkrétní ukázkové řešení pro úlohu z Kapitoly 3, Kapitoly 4 a také pro úlohu z Kapitoly 5. Společně pro všechny úlohy si zvolíme stejný interval $(0, \ell)$ a hodnoty koeficientů b_{ij}. Zvolme si tedy konkrétně matici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

která splňuje podmínky pro koeficienty b_{ij} (3.4) a (3.5). Konkrétní soustava rovnic odpovídající matici B pak bude

$$\begin{aligned} d_1 u'' + u - 2v &= 0, \\ d_2 v'' + 2u - 2v &= 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Rovnice mějme na intervalu $(0, 1)$. Doteď byla zadání stejná nyní bude třeba si kapitolu rozdělit pro každou úlohu zvlášť

6.1 Úloha z Kapitoly 3

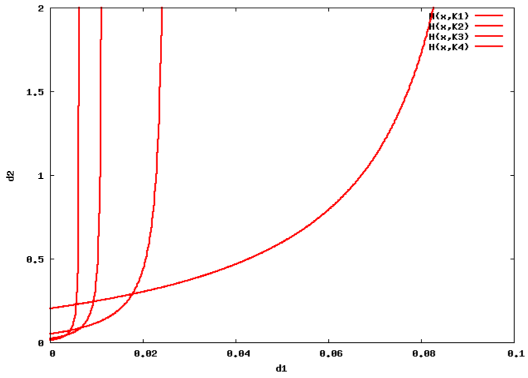
Tato úloha má pro soustavu rovnic (6.1) předepsané Neumannovy okrajové podmínky

$$\begin{aligned} u'(0) &= 0, \qquad & u'(1) &= 0, \\ v'(0) &= 0, \qquad & v'(1) &= 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Množina kritických bodů je podle Tvrzení 3.3.1 tvaru

$$K_N = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^1.$$

Vykreslením množiny kritických bodů vypadá následovně:



Obrázek 6.1: Hyperboly H_n^1, kde n=1,2,3,4.

Řešení soustavy pro kritickcé body $d \in K_N$ na intervalu $(0;1)$ a $n = 1$ je tvaru

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & AC_1(x), \\ v(x) & = & \alpha_1(d)AC_1(x), \end{array} \quad x \in (0;1)$$

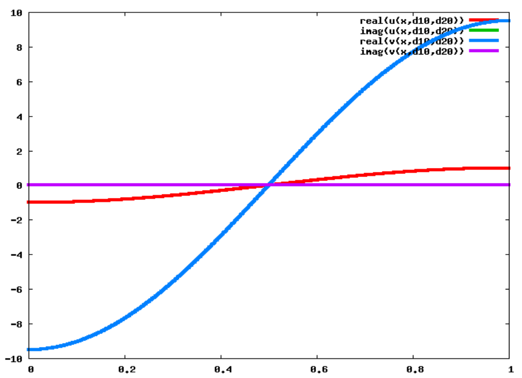
kde

$$\alpha_1(d) = \frac{1 - d_1\kappa_1}{-2} > 0$$

$$\kappa_1 = (\pi)^2$$

$$A \in \mathbb{R}.$$

Dosazením konkrétních kritických bodů $d_1 = 0.08$, $d_2 = 1.7235$ a zvolením $A = -1$, můžeme vykreslit hledané řešení (u, v) úlohy (6.1), (6.2), které je následující, Kde složka s



Obrázek 6.2: Řešení úlohy (6.1), (6.2) pro $A = -1$.

menší amplitudou je u a zbývající složka s větší je v.

6.2 Úloha z Kapitoly 4

Tato úloha má pro soustavu rovnic (6.1) předepsané smíšené okrajové podmínky tvaru

$$\begin{aligned} u'(0) &= 0, & u'(1) &= 0, \\ v'(0) &= 0, & v(1) &= 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

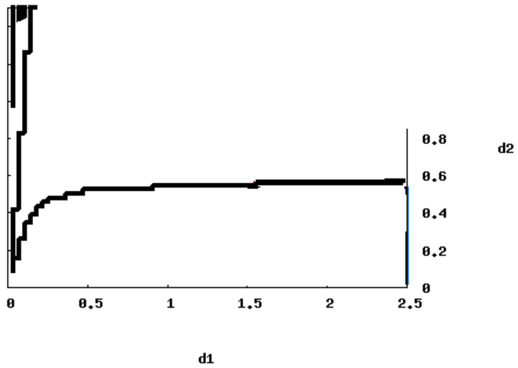
Množinou kritických bodů je potom

$$K_D = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+ : f(d_1, d_2) = 0\}.$$

kde

$$f(d_1, d_2) = r_1 S_1(1) C_2(1)(d_1 r_2^2 + 1) - r_2 S_2(1) C_1(1)(d_1 r_1^2 + 1),$$

Vykreslením množiny kritických bodů získáme následující obrázek: Řešení úlohy pro kritické



Obrázek 6.3: Množina kritických bodů K_D.

body $d \in K_D$ je potom tvaru

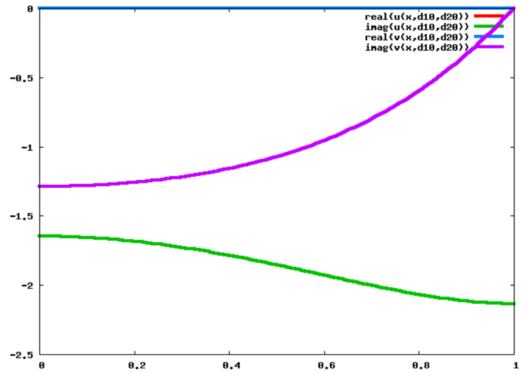
$$u(x) = A(C_1(x) - C_2(x)\alpha(d)) \quad x \in (0; 1).$$

$$v(x) = -A \frac{d_1(r_1^2 C_1(x) - r_2^2 C_2(x)\alpha(d)) + 1(C_1(x) - C_2(x)\alpha(d))}{-2} \quad x \in (0; 1).$$

kde

$$\alpha(d) = \frac{r_1 S_1(1)}{r_2 S_2(1)}.$$

Opět dosazením konkrétních kritických bodů $d_1 = 0.5$, $d_2 = 0.5$ a zvolením $A = -1$, můžeme vykreslit hledané řešení (u, v) úlohy (6.1), (6.3), které je následující



Obrázek 6.4: Řešení úlohy (6.1), (6.3) pro $A = -1$, kde v je horní křivka a u dolní.

6.3 Úloha z Kapitoly 5

Tato úloha má tedy soustavu (6.1) a Neumannovy okrajové podmínky

$$\begin{aligned} u'(0) &= 0, \qquad & u'(1) &= 0, \\ v'(0) &= 0, \qquad & v'(1) &= 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

a spolu s nimi navíc definovanou přechodovou podmínku $v(x_0) = 0$ zvolením $x_0 = 3/4$, tak dostáváme kompletní zadání úlohy s překážkou

$$v(3/4) = 0. \tag{6.5}$$

Množina kritických bodů této úlohy je

$$K_{3/4} = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+ : g(d_1, d_2) = 0\},$$

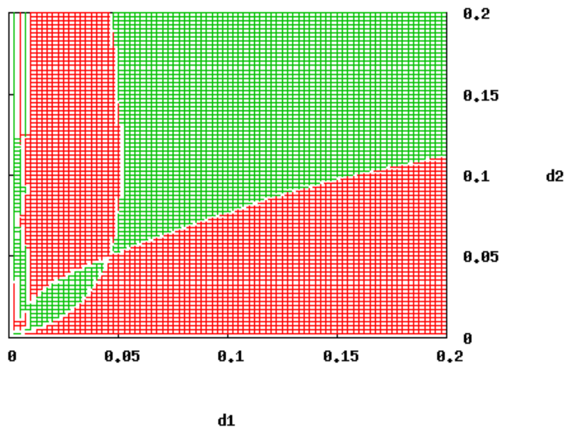
kde

$$g(d_1, d_2) = r_1(S_1(3/4) + S_1(1/4)\frac{C_1(3/4)}{C_1(1/4)}) - r_2\frac{R_1}{R_2}C_1(3/4)(\frac{S_2(1/4)}{C_2(1/4)} + \frac{S_2(3/4)}{C_2(3/4)}).$$

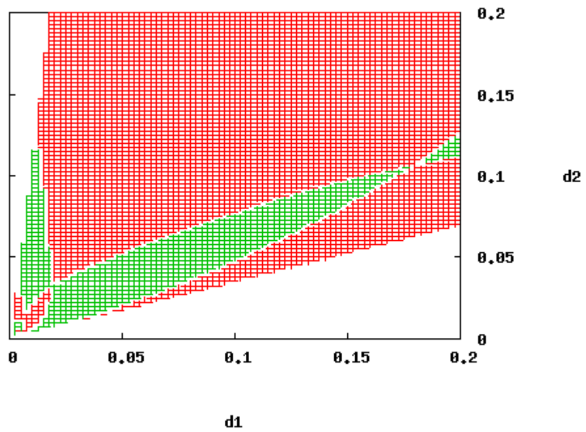
Vykreslením funkce $g(d_1, d_2)$ získáváme Obrázky 6.5 a 6.6

Jelikož chceme, aby se vynulovala jak složka reálná tak imaginární, nacházíme (d_1, d_2) na stejné hranici oblastí, kde funkce $g(d_1, d_2)$ střídá kladnost nebo zápornost reálné a imaginární části. Neboli najdeme kritické body $d \in K_{3/4}$. Následně víme z Kapitoly 5, že řešení úlohy (6.1), (6.4), (6.5) je tvaru

$$u(x) = \begin{cases} u_L(x) & x \in (0; 3/4), \\ u_P(x) & x \in (3/4; 1). \end{cases}$$



Obrázek 6.5: Pro obalsti v rovině parametrů, kde je reálná složka funkce $g(d_1, d_2)$ kladná/záporná.



Obrázek 6.6: Pro obalsti v rovině parametrů, kde je imaginární složka funkce $g(d_1, d_2)$ kladná/záporná.

kde

$$\begin{aligned} u_L(x) &= A_L(C_1(x) - \beta_1(d)C_2(x)), \quad x \in (0; 3/4), \\ u_P(x) &= A_L\beta_3(d)(C_1(1-x) - \beta_2(d)C_2(1-x)), \quad x \in (3/4; 1), \end{aligned}$$

Druhou složkou řešení pak je v, tedy

$$v(x) = \begin{cases} v_L(x) & x \in (0; 3/4), \\ v_P(x) & x \in (3/4; 1), \end{cases}$$

kde

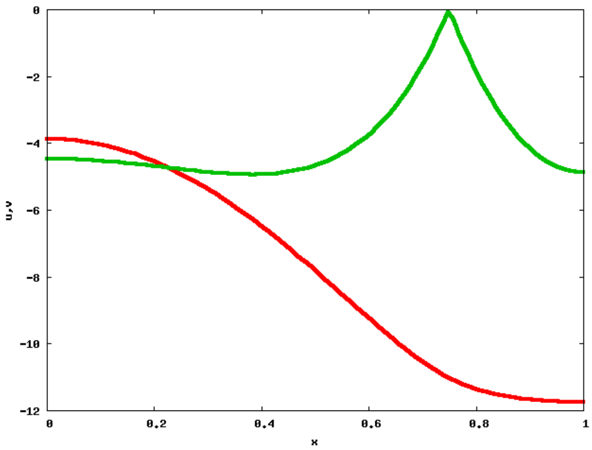
$$\begin{aligned} v_L(x) &= -A_L \tfrac{d_1(r_1^2 C_1(x) - \beta_1(d) r_2^2 C_2(x)) + 1(C_1(x) - \beta_1(d) C_2(x))}{-2}, \quad x \in (0; 3/4), \\ v_P(x) &= -A_L\beta_3(d) \tfrac{d_1(r_1^2 C_1(1-x) - \beta_2(d) r_2^2 C_2(x)) + 1(C_1(1-x) - \beta_2(d) C_2(1-x))}{-2}, \quad x \in (3/4; 1), \end{aligned}$$

kde

$$\beta_1(d) = \frac{R_1 C_1(3/4)}{R_2 C_2(3/4)},$$
$$\beta_2(d) = \frac{R_1 C_1(1/4)}{R_2 C_2(1/4)},$$
$$\beta_3(d) = \frac{C_1(3/4)}{C_1(1/4)}.$$

Dosazením konkrétních kritických bodů $d_1 = 0.15$, $d_2 = 0.0966$ a zvolením $A = -1$, můžeme vykreslit hledané řešení (u, v) úlohy (6.1), (6.4) s přechodovou podmínkou (6.5), které je následující

Kde v je funkce zlomená v bodě $x_0 = 3/4$.



Obrázek 6.7: Řešení úlohy (6.1), (6.4), (6.5)

Závěr

V diplomové práci jsme studovali systém reakce-difúze typu aktivátor-inhibitor, to jest soustavu dvou homogenních obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu s konstantními koeficienty, pro tři typy homogenních okrajových podmínek. Studovali jsme existenci řešení vzhledem k parametrům difúze. Ve všech třech případech se nám podařilo ukázat existenci množiny parametrů, pro které existuje netriviální dané okrajové úlohy.

Literatura

[1] Edwards, C a David E Penney. *Elementary differential equations.* 6th ed. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Prentice Hall, c2008. ISBN 01-323-9730-7

[2] Krajc a Beremlijski,*Obyčejné diferenciální rovnice.* Ostrava, 2012. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/ modul/obycejne-diferencialni-rovnice. Řešení projektu u „Matematika pro inženýry 21. století – inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti“. Vysoká škola báňská - Technická univerzita v Ostravě a Západočeská univerzita v Plzni.

[3] M. Kučera, Diferenciální rovnice v Biologii II, studijní text ZČU v Plzni, 44 s.

[4] Kurzweil, J. Obyčejné diferenciální rovnice: Úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic v reálném oboru. 1. vyd. Praha: SNTL, 1978, 418 s.

[5] S. Míka, A. Kufner, Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice, 1. vyd. Praha: SNTL, 1981, 88 s.

[6] M. Mimura, Y. Nishiura and M. Yamaguti, Some diffusive prey and predator systems and their bifurcation problems. *Ann. N.Y. Acad. Sci.*,1979, s. 490-521

[7] Y. Nishiura, Global structure of bifurcating solutions of some reaction-diffusion systems, *SIAM J. Math. Analysis,* 1982, 555-593 s.

[8] A. M. Turing, The chemical basis of morphogenesis, Phil. Trans. Roy. Soc. 1952, s. 37-72