



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**APLIKACE METODY HRANIČNÍCH PRVKŮ NA NĚKTERÉ
PROBLÉMY PRUŽNOSTI A PEVNOSTI**

AN APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD TO SOME ELASTICITY PROBLEM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

ANEŽKA TESAŘOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. TOMÁŠ PROFANT, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Studentka:	Anežka Tesařová
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Aplikace metody hraničních prvků na některé problémy pružnosti a pevnosti

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Metoda hraničních (okrajových) prvků je jeden z mnoha numerických nástrojů nabízející řešení některých úloh mechaniky. Nejdůležitější přednost metody hraničních prvků tkví v její schopnosti interpretace výsledků bez nutnosti diskretizace celé řešené oblasti, ale pouze její hranice. Tato vlastnost je značnou výhodou zejména v blízkosti koncentrátorů napětí, kde ostatní metody (např. metoda konečných prvků) jsou schopny dosáhnout adekvátních výsledků jen za cenu vysokého stupně diskretizace dané oblasti. Algoritmus metody hraničních prvků těží z výsledků řady matematických disciplín, počínaje řešením integrálních singulárních rovnic a teorií funkcí komplexní proměnné konče. Cílem uchazeče bude seznámení se s teoretickými základy metody hraničních prvků a její aplikací na některé úlohy rovinné pružnosti, příp. rovinné lomové mechaniky.

Cíle bakalářské práce:

1. Seznámení se s teoretickými základy metody hraničních (okrajových) prvků.
2. Aplikace metody hraničních (okrajových) prvků na některé úlohy rovinné pružnosti, příp. rovinné lomové mechaniky.

Seznam doporučené literatury:

KATSIKADELIS, J.T., Boundary Elements: Theory and Applications. Oxford: Elsevier, 2002. ISBN 0-080-44107-6.

BROŽ, P. a P. PROCHÁZKA. Metoda okrajových prvků v inženýrské praxi, Teoretická knihovna inženýra, Praha: SNTL, 1987.

BREBBIA, C. A., J. C. F. TELLES a L. C. WROBEL. Boundary element techniques: Theory and applications in Engineering, Springer-Verlag, 1984.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá metodou hraničních prvků. Jedná se o jednu z numerických metod používaných k řešení některých úloh z mechaniky, které jsou popsány parciálními diferenciálními rovnicemi. Cílem práce je formulovat metodu hraničních prvků pro rovinný problém a následně získané poznatky aplikovat na konkrétní případ.

Summary

This thesis is concerned with the Boundary element method. This is one of the numerical methods used to solve some problems of the mechanics, which are described by partial differential equations. The goal of this thesis is to formulate the Boundary element method for the plane problem and then apply the gained knowledge to a particular case.

Klíčová slova

Fundamentální řešení, Greenova věta, Bettiho věta, BEM++

Keywords

Fundamental solution, Green's theorem, Betti's theorem, BEM++

TESAŘOVÁ, A. *Aplikace metody hraničních prvků na některé problémy pružnosti a pevnosti*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 37 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D..

Prohlašuji, že bakalářskou práci *Aplikace metody hraničních proků na některé problémy pružnosti a pevnosti* jsem vypracovala samostatně pod vedením doc. Ing. Tomáše Profanta, Ph.D. a všechny zdroje, použité při psaní práce, jsem uvedla v seznamu literatury.

Anežka Tesařová

Děkuji svému vedoucímu bakalářské práce doc. Ing. Tomáši Profantovi, Ph.D. za věcné rady a připomínky, které mi pomohly při psaní této práce.

Anežka Tesařová

Obsah

Úvod	2
1 Seznámení s metodou hraničních prvků	3
1.1 Historický vývoj metody hraničních prvků	3
1.2 Porovnání s metodou konečných prvků	4
2 Matematický aparát	5
2.1 Diracova delta funkce	5
2.2 Bettiho věta	7
3 Fundamentální řešení	8
4 Hraniční integrální rovnice	10
4.1 Odvození hraniční integrální rovnice	10
4.2 Řešení hraniční integrální rovnice	12
5 Numerická implementace	13
5.1 Výpočet pomocí konstantních hraničních prvků	14
5.2 Oblasti s více hranicemi	16
5.3 Metoda podoblastí	17
6 Aplikace metody hraničních prvků	19
6.1 Problém s Dirichletovou okrajovou podmínkou	19
6.2 Problém se smíšenými okrajovými podmínkami	21
Závěr	22
Literatura	23
Seznam použitých zkratk a symbolů	25
A Grafy teplot pro různá dělení	26

Úvod

Metoda hraničních prvků (*Boundary element method*) je numerická metoda řešící problémy popsané parcálními diferenciálními rovnicemi [3]. Jak napovídá její název, je charakteristická tím, že diskretizuje oblast pouze na její hranici. To má za následek skutečnost, že dokáže snížit dimenzi úlohy o jeden stupeň, což zjednodušuje výpočet. Využíváme toho především u prostorových úloh, které jsou potom počítány ve druhé dimenzi.

Metoda byla v jejích počátcích zastíněna momentálně v technické praxi nejvyužívanější metodou konečných prvků (*Finite element method*) [4, 5], jejíž největší výhodou je univerzálnost. Případně dalšími [5], jako je diferenční metoda (*Finite difference method*) nebo metoda konečných objemů (*Finite volume method*). Pořád ale existovaly problémy, se kterými si metoda konečných prvků nevěděla rady. Proto se opět objevila metoda hraničních prvků, která doplňuje její nedostatky. Případně se dá k řešení problému použít kombinace obou metod.

V práci nejdříve čtenáři přiblížíme historii vzniku metody hraničních prvků. Následně ji stručně popíšeme, k čemuž využijeme porovnání s lépe známou metodou konečných prvků. Zvýrazníme tak její největší výhody a nedostatky. Dále popíšeme Diracovu delta funkci, využívanou v mechanických výpočtech, a rozebereme Bettiho větu. V dalších kapitolách se dostaneme k odvození samotné metody hraničních prvků pro rovinné úlohy. Nejprve fundamentálního řešení pro Laplaceovu rovnici, které je pro fungování metody nepostradatelné. Dosazujeme ho do hraniční integrální rovnice odvozené v další kapitole a vycházející z druhé Greenovy identity. Zde můžeme najít řešení nejen pro Laplaceovu rovnici, ale i pro rovnici Poissonovu. Nakonec získané rovnice upravíme tak, aby byly použitelné pro numerický výpočet. Konkrétně pomocí konstantních hraničních prvků. V poslední kapitole aplikujeme metodu hraničních prvků na několik 3D objektů nejprve s Dirichletovými okrajovými podmínkami a poté se smíšenými okrajovými podmínkami.

1 Seznámení s metodou hraničních prvků

Metoda hraničních prvků dokáže analyzovat chování mechanických systémů. Především struktury namáhané vnějším zatížením. Proto je účinným nástrojem pro řešení inženýrských problémů. Již v minulém století, kdy začalo docházet k rychlému rozvoji počítačů a kvalita softwaru neustále rostla, se ukázalo, že před samotnou výrobou a následným testováním výrobku je výhodnější provádět numerickou simulaci problému, která je efektivní, spolehlivá a přesná. Navíc je numerický model využitelný pro mnoho typů zatěžování a spoustu geometrií studovaných struktur.

1.1 Historický vývoj metody hraničních prvků

Do začátku osmdesátých let byla metoda známá jako metoda hraničního integrálního počtu. Metoda, která uměla řešit problémy matematické fyziky, měla původ v práci G. Greena [6]. Ten zavedl Greenovu funkci a díky ní v roce 1828 formuloval integrální reprezentaci řešení Dirichletova a Neumanova problému pro Laplaceovu rovnici. V roce 1872 uvedl Betti [7] obecnou metodu pro integraci rovnic pružnosti a derivaci jejich řešení v integrální formě. V roce 1885 použil Somigliana [8] Bettiho reciproční teorém k derivaci řešení problému pružnosti v integrální formě.

Jako zakladatel metody hraničních prvků je ovšem považován Fredholm. Na začátku dvacátého století byl první, kdo pro teorii potenciálů [9] použil singulární okrajové integrační rovnice k nalezení neznámých na hranici oblasti. Metoda je nazývána jako přímá metoda hraničních prvků. Neznámé na hranicích oblasti v ní mají přímý fyzikální nebo geometrický význam. Později vznikly další, kde neznámé na hranicích oblasti nemají přímý fyzikální nebo geometrický význam, proto je nazýváme nepřímé [10, 11, 12, 13]. Dále Sherman [14, 15], Michlin [16] a Muschelišvili [17] vyvinuli metodu hraničního integrálního počtu pro řešení rovinných problémů za použití komplexních funkcí. Popsané metody ovšem vznikly ještě před rozvojem počítačů, a proto se z důvodu velkého objemu výpočtů zanedbávaly až do konce padesátých let.

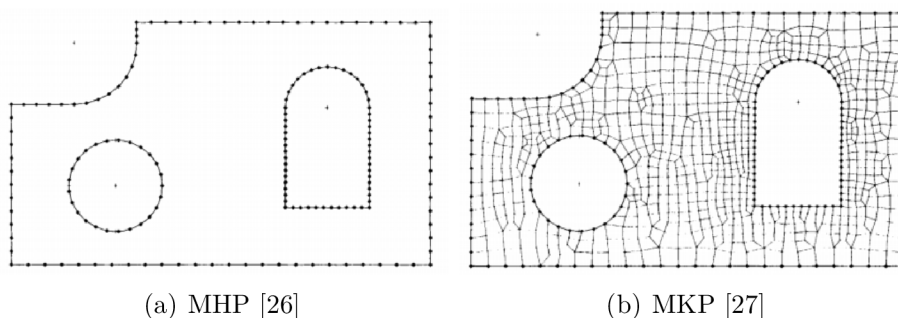
Samotná metoda hraničních prvků byla použita na začátku šedesátých let. Jawson [18] s Symm [19] použili Fredholmovy rovnice pro výpočet dvoudimenzionálních problémů teorie potenciálů. Dále Rizzo [20] a Cruse [21] aplikovali metodu na dvou a třídimenzionální problémy pružnosti. Rizzo a Shippy [22] rozšířili metodu pro anizotropní pružnost a Cruse a Rizzo [23] vyřešili elastodynamický problém. Ignaczak a Nowacki [24] rozvedli metodu pro termoelasticitu a Mendelson [25] studoval problém elastoplastického krutu.

Od té doby se objevují doplňkové a konkurenční metody, které na klasické metodě hraničních prvků odstraňují její nedostatky. Nyní je účinným nástrojem pro analýzy inženýrských problémů.

1.2 Porovnání s metodou konečných prvků

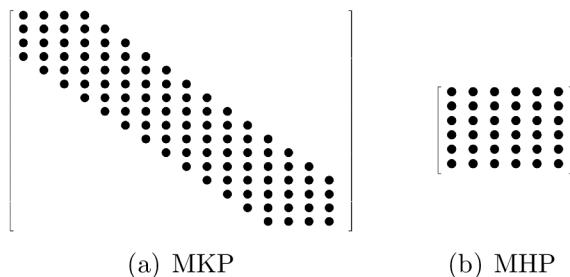
Známější a používanější metodou pro numerické analýzy je metoda konečných prvků (MKP). Přesto se ale najdou problémy, pro které je metoda hraničních prvků (MHP) výhodnější. Při jejich porovnání zjišťujeme, že:

1. V MKP diskretizujeme celou oblast (obrázek 1.1b), což v případě tělesa s děrami, vruby nebo rohy viditelně zpomaluje výpočet. Navíc je obtížné provádět změny na již diskretizovaném modelu. U MHP diskretizaci provádíme přes hranici oblasti (obrázek 1.1a) a snižujeme tím neznámé o jeden řád. Metoda je vhodná i pro oblasti s geometrickými zvláštnostmi, jako jsou například trhliny, a při změnách v modelu je jednodušší na přepočítání.



Obrázek 1.1: Diskretizace pro MHP a MKP.

2. V případě nekonečné oblasti je pro MKP potřeba vytvářet uzavřené hranice. Důsledkem může být menší přesnost řešení. V MHP stačí několik modifikací programu pro konečné oblasti.
3. Přesto, že MKP počítá přesně funkci oblasti, může být neefektivní v jejích derivacích. Především v místech velkých gradientů funkce. Naopak MHP je velice efektivní při derivacích funkce oblasti.
4. MHP umožňuje výpočet řešení a jeho derivací v každém bodě oblasti a v jakémkoli časovém období, protože řešením je spojitý integrál. V MKP toto možné není, protože řešení je definováno pouze pro uzlové body.
5. Matice, která vzniká při numerické implementaci MHP bývá plná a nesymetrická (obrázek 1.2b). Naopak MKP používá pásovou symetrickou matici, která má lepší vlastnosti pro výpočet (obrázek 1.2a).



Obrázek 1.2: Matice metody MKP a MHP

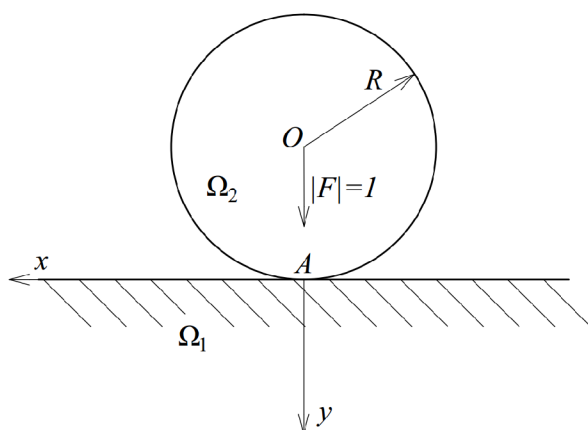
6. V MHP je pro aplikaci třeba znát fundamentální řešení.

2 Matematický aparát

S metodou hraničních prvků souvisí různé již známé vztahy jako je například druhá Greenova identita. V následujícím textu vysvětlíme pojem Diracovy delta funkce, která je matematickým vyjádřením působení bodové síly, a rozebereme Bettiho větu.

2.1 Diracova delta funkce

V mechanice těles se často setkáváme s tělesem zatíženým v bodě. Síla přitom nepůsobí pouze v bodě, ale i v jeho blízkém okolí, což vystihuje Diracova delta funkce.



Obrázek 2.1: Styk kruhového disku zatíženého silou F s polorovinou.

Víme, že síla bude koncentrovaná v okolí bodu a bude splňovat vztah

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (2.1)$$

vyjadřující, že síla působící na těleso Ω_1 je rovna jednotkové síle. Pokud se nebudeme zabývat analytickým řešením funkce f , můžeme její předpokládaný tvar předepsat ve tvaru

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}, & |x| < \frac{1}{k} \\ 0, & |x| \geq \frac{1}{k} \end{cases}, \quad (2.2)$$

nebo jako

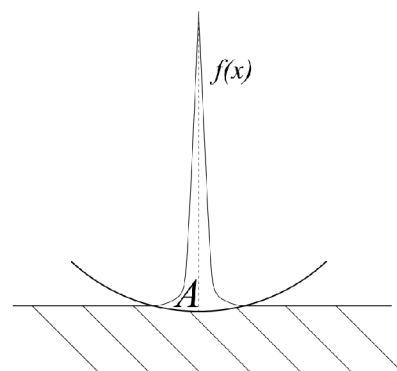
$$f_k(x) = \frac{k}{\pi(1 + k^2 x^2)}, \quad (2.3)$$

kde k je kladné číslo.

Na grafickém znázornění obou tvarů funkce f_k (obrázek 2.3) můžeme vidět, že pro velká k je opravdu dostatečně koncentrovaná a zároveň splňuje rovnici (2.2). Z čehož vyplývá, že funkce f_k je ekvivalentní funkci f .

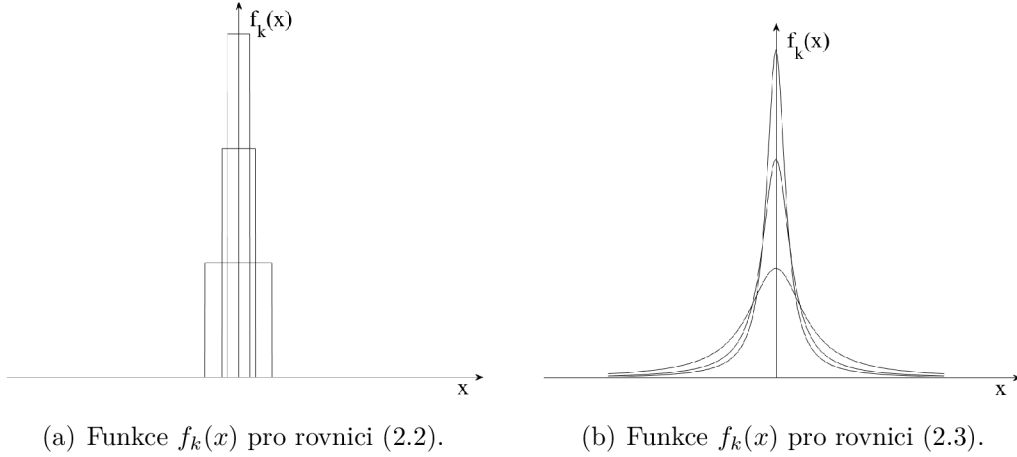
Uvažujme rovinné pružné těleso Ω_1 s konstantní tloušťkou T zaujímající polorovinu $-\infty < x < \infty, y \geq 0$. Dále kruhový disk Ω_2 se stejnou konstantní tloušťkou T a poloměrem R , který se dotýká tělesa Ω_1 v bodě $(x, y) = (0, 0)$ na jeho hranici. Kruhový disk Ω_2 je zatížen vertikální jednotkovou silou F (obrázek 2.1).

Při deformaci pružných těles nenastává kontakt v bodě, ale síla je rozprostřena do malého okolí bodu. Proto sestrojíme funkci $f(x)$, která reprezentuje rozložení síly působící na hranici tělesa Ω_1 na jednotku délky. Její tvar zatím neznáme, ale předpokládáme, že bude odpovídat obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Předpokládané rozložení síly na hranici prvku.

2.1 DIRACOVA DELTA FUNKCE



Obrázek 2.3: Funkce f_k vykreslené pro velké hodnoty čísla k .

Číslo k vyjadřuje tuhost tělesa a pro absolutně tuhá tělesa platí $k \rightarrow \infty$. Proto zavádíme fiktivní rozložení jednotkové síly, kterou vyjadřuje funkce $\delta(x)$ a je definována jako

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x), \quad (2.4)$$

kde $\delta(x)$ je Diracova delta funkce a $f_k(x)$ je funkce definovaná v rovnicích (2.2) a (2.3).

Matematický zápis Diracovy delta funkce v jedné dimenzi pro bodový zdroj působící v $x = x_0$ je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) h(x) dx = h(x_0). \quad (2.5)$$

Funkce $h(x)$ je spojitá na konečném intervalu obsahující zdrojový bod $x = x_0$ a má nulovou hodnotu mimo tento interval. Jednodimenzionální Diracovu delta funkci se zdrojem působícím v bodě $x = x_0 = 0$ tedy můžeme popsat vztahy

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}, \quad (2.6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1, \quad (2.7)$$

kde ε je kladné číslo. Podle této definice funkce $\delta(x)$ nabývá nulové hodnoty všude kromě bodu $x = 0$, kde je rovna nekonečnu, a splňuje rovnici (2.7).

Ve dvoudimenzionálním případě Diracovy delta funkce $\delta(Q - Q_0)$ platí

$$\int_{\Omega} \delta(Q - Q_0) h(Q) d\Omega_Q = h(Q_0), \quad Q(x, y), Q_0(x_0, y_0) \in \Omega, \quad (2.8)$$

pro libovolnou funkci $h(Q)$ spojitou na oblasti Ω , která obsahuje bod $Q_0(x_0, y_0)$. K jinému vyjádření můžeme použít vztahy

$$\delta(Q - Q_0) = \begin{cases} 0, & Q \neq Q_0 \\ \infty, & Q = Q_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\int_{\Omega} \delta(Q - Q_0) d\Omega_Q = \int_{\Omega^*} \delta(Q - Q_0) d\Omega_Q = 1, \quad Q_0(x_0, y_0) \in \Omega^* \subseteq \Omega. \quad (2.10)$$

Případně se dá dvoudimenzionální případ přepsat do jedné dimenze jako

$$\delta(Q - Q_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \quad (2.11)$$

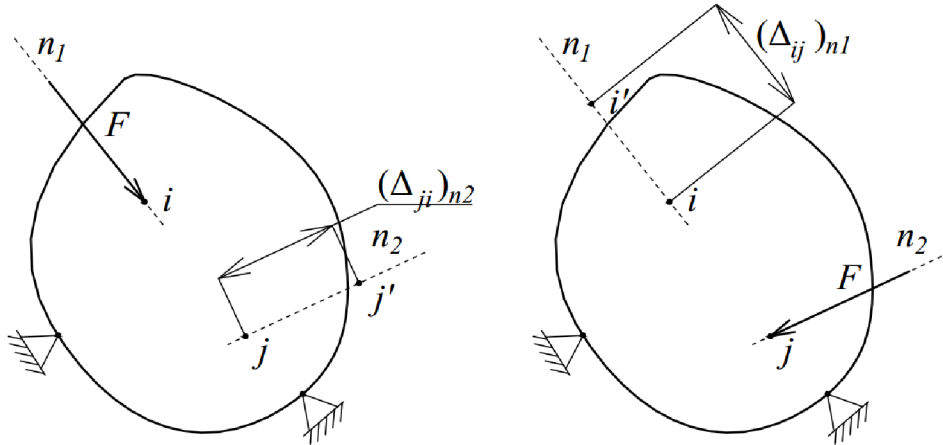
2.2 Bettiho věta

Pro vyjádření hraničních integrálních rovnic pro úlohy rovinné pružnosti je dobře využitelná Bettiho věta o vzájemnosti prací.

Jak je popsáno v [28], podle Rayleigh-Bettiho věty budeme uvažovat oblast Ω jako elastické izotropní těleso ve statické rovnováze se dvěma soustavami vnějších objemových (F_x, F_y, F_z) , $(\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z)$ a plošných (f_x, f_y, f_z) , $(\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z)$ sil. Soustava (F_x, F_y, F_z) , (f_x, f_y, f_z) vyvolává deformační posuvy (u, v, w) a soustava $(\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z)$, $(\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z)$ vyvolává deformační posuvy $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$. Potom platí

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (F_x \bar{u} + F_y \bar{v} + F_z \bar{w}) dV + \int_{\delta\Omega} (f_x \bar{u} + f_y \bar{v} + f_z \bar{w}) dS \\ = \int_{\Omega} (\bar{F}_x u + \bar{F}_y v + \bar{F}_z w) dV + \int_{\delta\Omega} (\bar{f}_x u + \bar{f}_y v + \bar{f}_z w) dS. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pro případ, že objemové a plošné síly jsou bodové $(F_x, F_y, F_z) \equiv (f_x, f_y, f_z) \equiv F$ platí Maxwellova věta. Ta říká, že pokud je Ω elastické izotropní těleso ve statické rovnováze s vnějšími osamělými objemovými nebo plošnými silami F_i a F_j a zároveň platí $|F_i| = |F_j| = |F| = F$. Pak síla F_i vyvolává deformační posuv $(\Delta_{ji})_{n_2}$ ve směru nositelky n_2 v místě působení síly F_j a síla F_j vyvolává deformační posuv $(\Delta_{ij})_{n_1}$ ve směru nositelky n_1 v místě působení síly F_i (obrázek 2.4).



Obrázek 2.4: Maxwellova věta.

Potom můžeme psát, že

$$W_{ij} = F_i (\Delta_{ij})_{n_1} = F_j (\Delta_{ji})_{n_2} = W_{ji}, \quad (2.13)$$

kde W je mechanická práce. A protože síly F_i a F_j se rovnají, platí

$$(\Delta_{ij})_{n_1} = (\Delta_{ji})_{n_2}. \quad (2.14)$$

Abychom mohli Bettiho větu aplikovat, musíme znát Greenovu funkci konkrétního problému, jejíž vyjádření bývá často složité, nebo dokonce neexistuje. Z toho důvodu většinou hledáme Greenovu funkci $G(x, \xi)$ pro jednoduché oblasti Ω , jako je například kruh, koule, nebo nekonečná oblast. Na nekonečné oblasti je nutné určit okrajové podmínky. Potom už nehovoříme o hledání Greenovy funkce, ale o fundamentálním řešení, a aplikaci Bettiho věty nazveme metodou integrálních rovnic nebo metodou hraničních prvků.

3 Fundamentální řešení

Metoda bude odvozována pro řešení problémů popisovaných rovnicí

$$\Delta u = f(x, y) \quad x, y \in \Omega, \tag{3.1}$$

kde pro $f = 0$ hovoříme o Laplaceově rovnici a pro $f \neq 0$ o Poissonově rovnici. Řešením je $u = u(x, y)$, které hledáme na uzavřené oblasti Ω s hranicí Γ a definovanými okrajovými podmínkami.

Uvažujme bodový zdroj v bodě $P(x, y)$, který leží v rovině xy . Jeho účinek v bodě $Q(\xi, \eta)$ vyjádříme pomocí Diracovy delta funkce jako

$$f(Q) = \delta(Q - P). \tag{3.2}$$

Dále hledáme funkci $v = v(Q, P)$, která v bodě Q splňuje rovnici

$$\Delta v = \delta(Q - P) \tag{3.3}$$

pro body P a Q ležící v oblasti Ω . Funkci v potom nazýváme fundamentálním řešením Laplaceovy, nebo Poissonovy rovnice. Pro získání řešení rovnice (3.3) ji nejdříve převedeme do polárních souřadnic s počátkem v bodě P . Vzhledem k počátku je řešení symetrické, proto bude nezávislé na polárním úhlu θ a rovnice (3.3) dostane tvar

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \delta(Q - P), \tag{3.4}$$

kde r vyjadřuje vzdálenost bodů P a Q jako

$$r = |Q - P| = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}. \tag{3.5}$$

V počátku P , kde $r = 0$, platí, že Diracova delta funkce v rovnici (3.4) je nekonečně velká a ve všech ostatních bodech roviny je rovna nule. Když potom rovnici (3.4) pro $r = 0$ dvakrát zintegrujeme, dostáváme

$$v = A \ln r + B,$$

kde A a B jsou libovolné konstanty. Položíme tedy $B = 0$ a A zvolíme následovně.

Předpokládejme, že oblast Ω je kruh se středem v počátku souřadného systému $P(x, y)$ s poloměrem $\rho = r$ a hranicí Γ (obrázek 3.1).

Potom můžeme psát, že

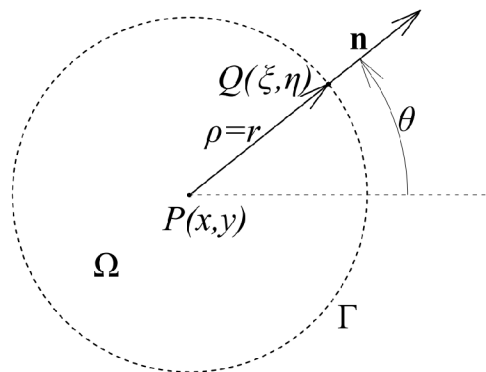
$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r} = A \frac{1}{r} \quad \text{a} \quad ds = r d\theta. \tag{3.6}$$

Dále použijeme druhou Greenovu identitu

$$\int_{\Omega} (\Delta u v - u \Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS,$$

kde položíme $u = 1$ a $v = A \ln r$. Získáme rovnici

$$- \int_{\Omega} \Delta v d\Omega = - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} ds.$$



Obrázek 3.1: Oblast Ω se středem v bodě P a poloměrem ρ .

Z rovnic (3.3) a (3.6) a z důvodu, že pro body na hranici Γ platí $r = \rho$, vyplývá

$$-\int_{\Omega} \delta(Q - P) d\Omega = -\int_0^{2\pi} A \frac{1}{\rho} \rho d\theta.$$

Podle (2.10) víme, že integrál přes levou stranu rovnice je roven 1, a proto můžeme vyjádřit konstantu A jako

$$A = \frac{1}{2\pi}. \quad (3.7)$$

Fundamentální řešení má tedy tvar

$$v = \frac{1}{2\pi} \ln r. \quad (3.8)$$

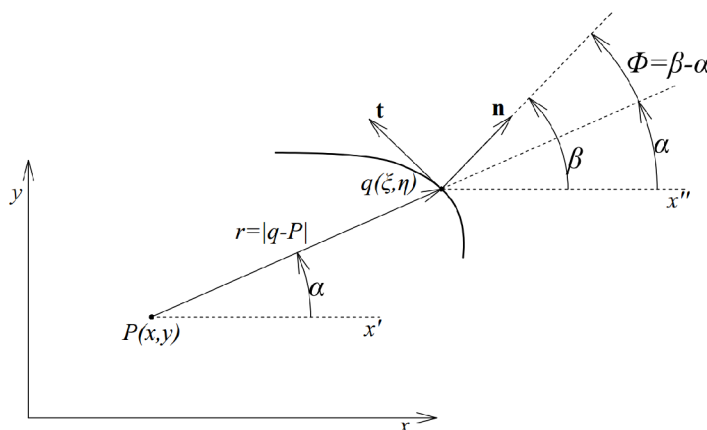
K odvození hraniční integrální rovnice, které je popsáno v následující kapitole, bude potřeba znát i derivaci fundamentálního řešení v podle normály n

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial(\ln r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n}.$$

Abychom dostali kompletní vyjádření, potřebujeme určit derivaci r podle normály. Z obrázku 3.2 vidíme, že platí

$$\begin{aligned} \phi &= \beta - \alpha \\ \cos \alpha &= \frac{\xi - x}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{\eta - y}{r}, \end{aligned}$$

kde $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} = |q - P|$.



Obrázek 3.2: Geometrie a vlastnosti bodů P a q .

Pokud nyní r zderivujeme, dostaneme

$$r_x = -\frac{\xi - x}{r} = -\cos \alpha = -r_\xi, \quad r_y = -\frac{\eta - y}{r} = -\sin \alpha = -r_\eta.$$

Podobně odvodíme také výrazy

$$\cos \beta = n_x, \quad \sin \beta = n_y.$$

A za využití předchozích vztahů získáme derivaci r podle normály n v bodě q

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial \xi} n_x + \frac{\partial r}{\partial \eta} n_y = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos \beta - \alpha = \cos \phi. \quad (3.9)$$

Nyní můžeme psát, že derivace fundamentálního řešení je

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \phi}{r}. \quad (3.10)$$

4 Hraniční integrální rovnice

Při vyjadřování hraničních integrálních rovnic použijeme přímou metodu, která využívá druhou Greenovu identitu a fundamentální řešení odvozené v předešlé kapitole.

4.1 Odvození hraniční integrální rovnice

V kapitole budeme hledat řešení Laplaceovy rovnice

$$\Delta u = 0. \quad (4.1)$$

Začneme s aplikací druhé Greenovy identity na funkce u a v , které splňují rovnice (4.1) a (3.3). Za předpokladu, že bod P je pevně zvolen, dostaneme

$$-\int_{\Omega} (-u(Q)\delta(Q-P))d\Omega_Q = \int_{\Gamma} \left[v(q,P)\frac{\partial u(q)}{\partial n_q} - u(q)\frac{\partial v(q,P)}{\partial n_q} \right] ds_q \quad (4.2)$$

pro $P, Q \in \Omega$ a $q \in \Gamma$. Přičemž zavedeme značení takové, že uvnitř oblasti Ω jsou body značeny velkými písmeny P, Q a na hranici oblasti Γ malými písmeny p, q .

Se znalostí chování Diracovy delta funkce můžeme rovnici (4.2) přepsat do tvaru

$$u(P) = -\int_{\Gamma} \left[v(q,P)\frac{\partial u(q)}{\partial n_q} - u(q)\frac{\partial v(q,P)}{\partial n_q} \right] ds_q, \quad (4.3)$$

která je integrálním řešením Laplaceovy rovnice. Funkce v je zde fundamentální řešení rovnice

$$v = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad (4.4)$$

a $\frac{\partial v}{\partial n}$ je jeho derivace podle normály v bodě q

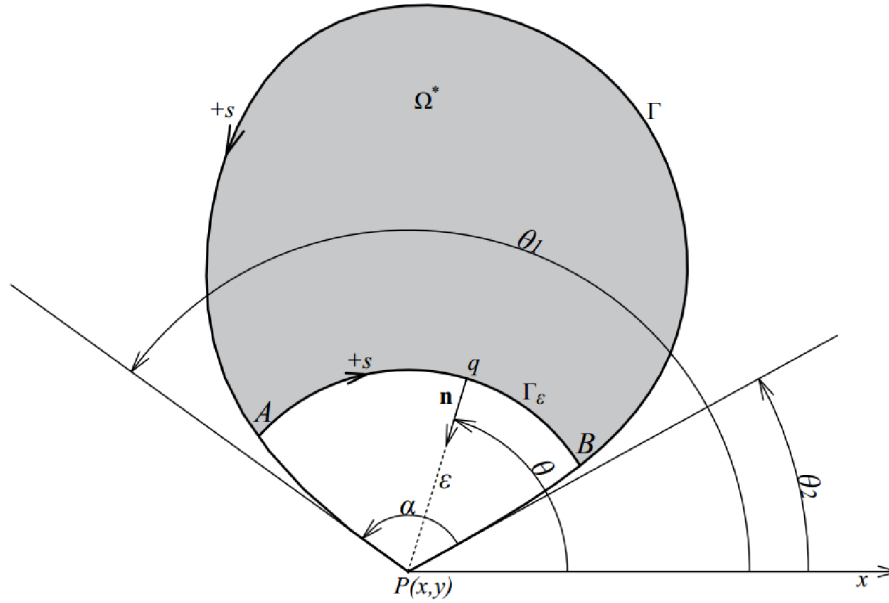
$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \phi}{r}. \quad (4.5)$$

Díky integrálnímu řešení (4.3) dokážeme vyjádřit hodnotu Laplaceovy rovnice (4.1) v každém bodě P uvnitř oblasti Ω . Pro hodnoty u a u_n známé z okrajových podmínek platí, že v bodě $q(\xi, \eta)$ může být předepsána jen jedna z těchto hodnot. Abychom byli schopni spočítat hodnoty integrální rovnice i pro body na hranici Γ , upravíme rovnici (4.3) pro bod $P \equiv p \in \Gamma$

V obecném případě (obrázek 4.1), kde hranice Γ není hladká a bod P je rohový, předpokládáme oblast Ω^* . Sestrojíme ji tak, že z původní oblasti Ω odebereme kruhovou výseč se středem v bodě P , poloměrem ε , omezenou oblouky PA a PB . Kruhový oblouk AB označíme jako Γ_ε a součet křivek AP a PB jako l . K bodu P sestrojíme tangenty křivek PA, PB a úhel mezi nimi označíme α .

Pro případ, kdy $\varepsilon \rightarrow 0$, platí

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\theta_1 - \theta_2) &= \alpha, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_\varepsilon &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Gamma - l) &= \Gamma. \end{aligned}$$



Obrázek 4.1: Obecný případ oblasti Ω s nehladkou hranicí Γ a rohovým bodem P .

Aplikujeme druhou Greenovu identitu na oblast Ω^* pro funkce u (4.1) a v (4.4). Bod P nyní leží mimo oblast Ω^* , kde $\delta(Q - P) = 0$, což znamená

$$\int_{\Omega^*} u \delta(Q - P) d\Omega = 0.$$

Z toho důvodu má druhá Greenova identita tvar

$$0 = \int_{\Gamma-l} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \quad (4.6)$$

Pokud budeme ε limitně přibližovat k nule, tak pro první integrál dostaneme

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-l} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \quad (4.7)$$

Druhý integrál nejprve rozložíme

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \ln r ds - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} u \frac{\cos \phi}{r} ds = I_1 + I_2. \quad (4.8)$$

Protože Γ_ε je kruhový oblouk, platí $r = \varepsilon$ a $\phi = \pi$. Navíc úhel θ je rostoucí v opačném směru než přibývá s , takže $ds = \varepsilon(-d\theta)$. Nejdříve upravíme integrál I_1 z rovnice (4.8).

$$I_1 = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \ln r ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \varepsilon \ln \varepsilon d(-\theta) \quad (4.9)$$

Poněvadž

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln \varepsilon) = 0,$$

4.2 ŘEŠENÍ HRANIČNÍ INTEGRÁLNÍ ROVNICE

platí, že

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 = 0. \quad (4.10)$$

Podobným způsobem budeme postupovat i pro integrál I_2 z rovnice (4.8).

$$I_2 = - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} u \frac{\cos \phi}{r} ds = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2\pi} u \frac{-1}{\varepsilon} \varepsilon d(-\theta)$$

Po použití věty $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$, kde $a < c < b$, dostaneme

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi} u(O)(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} u(O)$$

a pro $\varepsilon \rightarrow 0$ potom platí

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = \frac{\alpha}{2\pi} u(P). \quad (4.11)$$

Po dosazení vztahů (4.10) a (4.11) má rovnice (4.8) tvar

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = \frac{\alpha}{2\pi} u(P). \quad (4.12)$$

Shrneme poznatky ze vztahů (4.7) a (4.12) do rovnice (4.6) pro $\varepsilon \rightarrow 0$ a dostaneme integrální řešení Laplaceovy rovnice (4.1) v bodech $p \in \Gamma$ s nehladkou hranicí.

$$\frac{\alpha}{2\pi} u(p) = - \int_{\Gamma} \left(v(p, q) \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} - u(q) \frac{\partial v(p, q)}{\partial n_q} \right) ds_q, \quad (4.13)$$

kde v případě hladké hranice je $\alpha = \pi$.

Pokud nahradíme bod P ležící v oblasti Ω bodem $p \in \Gamma$, funkce u se stane nespojitou. V rohových bodech potom vznikne skok o velikosti $(1 - \alpha/2\pi)$ a pro body na hladké hranici Γ bude skok $1/2$. Pokud hledáme řešení pro body, které leží mimo oblast Ω , dostaneme

$$u(p) = - \int_{\Gamma} \left(v(p, q) \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} - u(q) \frac{\partial v(p, q)}{\partial n_q} \right) ds_q. \quad (4.14)$$

4.2 Řešení hraniční integrální rovnice

Z rovnic (4.13) a (4.14) můžeme vytvořit obecný předpis pro integrální řešení Laplaceovy rovnice $\Delta u = 0$

$$\varepsilon(P)u(P) = - \int_{\Gamma} \left(v(p, q) \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} - u(q) \frac{\partial v(p, q)}{\partial n_q} \right) ds_q \quad (4.15)$$

a po modifikaci uvedené v [1] lze získat předpis i pro integrální řešení Poissonovy rovnice $\Delta u = f$

$$\varepsilon(P)u(P) = \int_{\Omega} v f d\Omega - \int_{\Gamma} \left(v(p, q) \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} - u(q) \frac{\partial v(p, q)}{\partial n_q} \right) ds_q, \quad (4.16)$$

kde $\varepsilon(P)$ je koeficient závislý na pozici bodu P a platí

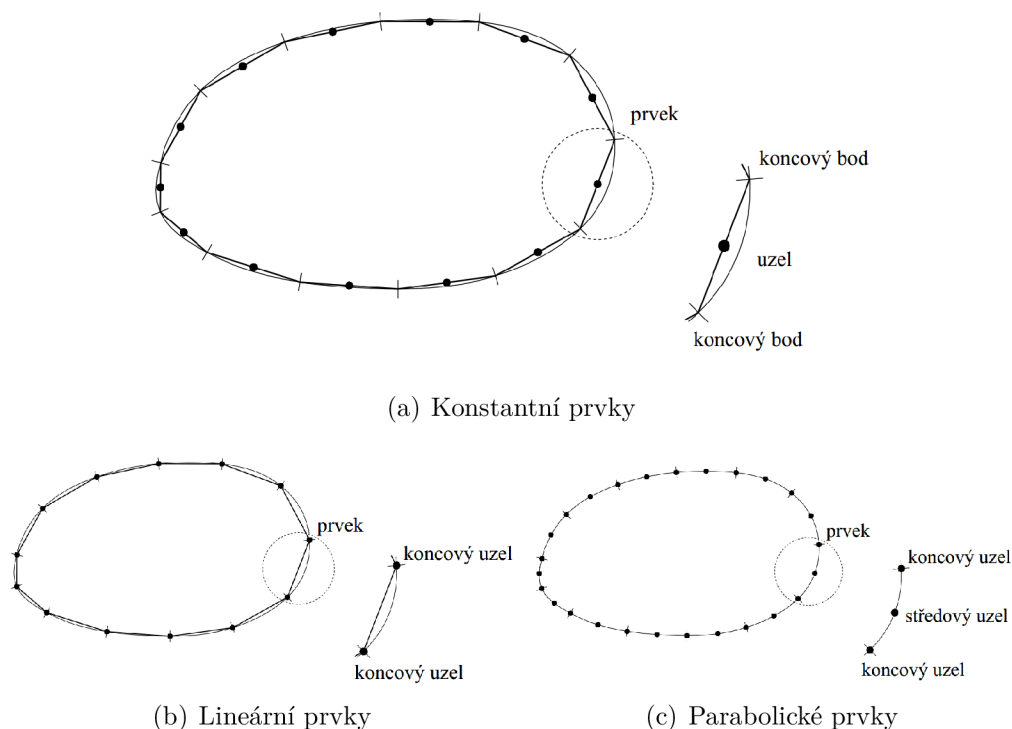
$$\varepsilon(P) = \begin{cases} 1 & P \in \Omega \\ \frac{1}{2} & P \equiv p \in \Gamma \\ 0 & P \notin \Omega \end{cases}. \quad (4.17)$$

5 Numerická implementace

Určení analytického řešení (4.15) z předchozí kapitoly by bylo výpočtově náročné, proto se používá numerické řešení.

Předpokládejme libovolnou oblast Ω s hranicí Γ . Podstatou metody hraničních prvků je rozdělit hranici této oblasti na konečný počet částí (hraničních prvků), které nemusí být stejné. Nejjednodušší rozdělení hranice je pomocí konstantních prvků, dále se používají lineární prvky a parabolické prvky. Na každém hraničním prvku se nacházejí koncové (extrémní) body a uzlové body (uzly), ve kterých je předepsaná hodnota.

V případě využití konstantních prvků (obrázek 5.1a) úsek hranice aproximujeme přímkou nabývající hodnotu uzlového bodu po celé své délce a spojující koncové body. Uzlový bod leží uprostřed mezi koncovými body.



Obrázek 5.1: Typy hraničních prvků

Pro lineární prvky (obrázek 5.1b) je opět úsek hranice aproximován přímkou spojující koncové body. Vyskytují se zde dva uzly, které nejčastěji leží v koncových bodech a funkční hodnota přímky je lineární, závislá na uzlech.

Parabolické prvky (obrázek 5.1c) aproximují úsek hranice parabolickým obloukem. Leží v něm tři uzly, kde dva z nich jsou umístěny na koncích a jeden mezi nimi, nejčastěji uprostřed.

Konstantní prvky nejsou na rozdíl od lineárních a parabolických spojitě. V uzlech se tedy jejich funkční hodnota skokově mění. Spojitý přechod mezi prvky sice zaručuje lepší aproximaci, ale zvyšuje komplikace v rohových bodech nebo v bodech, kde se mění typ okrajových podmínek. Tento problém je řešitelný s použitím nespojitých lineárních a parabolických prvků, které nemají uzlové body na koncích prvků.

5.1 Výpočet pomocí konstantních hraničních prvků

Aplikaci metody ilustrujeme pro Laplaceovu rovnici na oblasti Ω s hladkou hranicí. Rozdělíme hranici Γ na N prvků číslovaných proti směru hodinových ručiček. Prvky nabývají hodnot u a u_n , předepsaných v uzlu, které jsou konstantní na celém prvku.

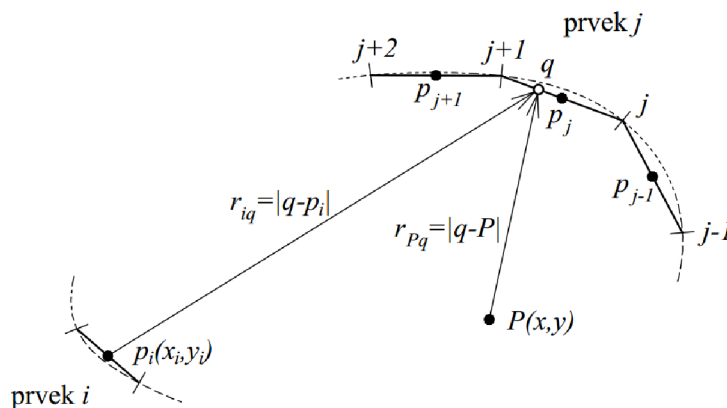
Diskretizujeme rovnici (4.15) pro $\varepsilon(P) = \frac{1}{2}$ a vyjádříme ji pro určitý bod p na hranici Γ jako

$$\frac{1}{2}u^i = - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} ds_q + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u(q) \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n_q} ds_q, \quad (5.1)$$

kde Γ_j je j -tý prvek hranice Γ a p je uzlový bod i -tého prvku. Protože jsou hodnoty u a u_n na k -tém prvku konstantní a můžeme je vyjmout z integrálu s tím, že je označíme jako u^j a u_n^j . Rovnice (5.1) se pak změní na

$$-\frac{1}{2}u^i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \frac{\partial v}{\partial n} ds \right) u^j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} v ds \right) u_n^j. \quad (5.2)$$

Integrály v rovnici (5.2) spojují bod p_i , ve kterém se nachází fundamentální řešení, a bod p_j pro hodnoty $j = 1, 2, \dots, N$ (obrázek 5.2).



Obrázek 5.2: Umístění uzlových bodů a vzdálenosti k bodu q .

Zmíněné integrály vyjadřují příspěvek hodnot v uzlových bodech u^j a u_n^j k velikosti $\frac{1}{2}u^i$. Označujeme je \hat{H}_{ij} , G_{ij} a mají tvar

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n_q} ds \quad \text{a} \quad G_{ij} = \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) ds, \quad (5.3)$$

kde p_i je referenční bod a bod q (integrační bod) se mění s každým j -tým prvkem. Nyní vyjádříme rovnici (5.2) pomocí koeficientů (5.3)

$$-\frac{1}{2}u^i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G_{ij} u_n^j. \quad (5.4)$$

Následně položíme

$$H_{ij} u^j = \hat{H}_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij}, \quad (5.5)$$

kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta (2.9). Proto můžeme rovnici (5.4) zapsat jako

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G_{ij} u_n^j. \quad (5.6)$$

Rovnici (5.6) použijeme na všechny uzly p_i pro $i = 1, 2, \dots, N$ a tím vytvoříme systém N lineárních rovnic, které přepíšeme do maticové formy

$$[H]\{u\} = [G]\{u_n\}, \quad (5.7)$$

kde $[H]$, $[G]$ jsou čtvercové matice řádu N a $\{u\}$, $\{u_n\}$ jsou vektory dimenze N .

Nyní budeme předpokládat smíšené hraniční podmínky, což znamená, že hranici Γ rozdělíme na Γ_1 a Γ_2 . Přičemž hranici Γ_1 , na které je předepsané u , diskretizujeme na N_1 konstantních prvků a hranici Γ_2 s předepsaným u_n diskretizujeme na N_2 konstantních prvků. Musí platit, že $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ a $N_1 + N_2 = N$. Rovnice (5.7) má N neznámých. Z toho bude v tomto případě $N - N_1$ neznámých u na Γ_2 a $N - N_2$ neznámých u_n na Γ_1 . Všechny neznámé hodnoty u , u_n oddělíme v rovnici (5.7) od známých \bar{u} , \bar{u}_n a dostaneme

$$[[H_{11}][H_{12}]] \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\}_1 \\ \{u\}_2 \end{Bmatrix} = [[G_{11}][G_{12}]] \begin{Bmatrix} \{u_n\}_1 \\ \{\bar{u}_n\}_2 \end{Bmatrix}. \quad (5.8)$$

Po přesunutí neznámých na levou stranu rovnice a známých na pravou můžeme psát

$$[A]\{X\} = \{B\}, \quad (5.9)$$

kde

$$\begin{aligned} [A] &= [[H_{12}] - [G_{11}]], \\ \{X\} &= \begin{Bmatrix} \{u\}_2 \\ \{u_n\}_1 \end{Bmatrix}, \\ \{B\} &= -[H_{11}]\{\bar{u}\}_1 + [G_{12}]\{\bar{u}_n\}_2. \end{aligned}$$

$[A]$ je zde čtvercová matice řádu N a $\{X\}$, $\{B\}$ jsou vektory dimenze N .

Řešením (5.9) získáme všechny neznámé hraniční hodnoty u a u_n . Proto můžeme hledat řešení u pro jakýkoliv bod $P(x, y)$ uvnitř oblasti Ω za využití (4.15) a $\varepsilon(P) = 1$. Rovnici diskretizujeme stejným způsobem jako v (5.1) a dostaneme

$$u(P) = \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u^j - \sum_{j=1}^N G_{ij} u_n^j. \quad (5.10)$$

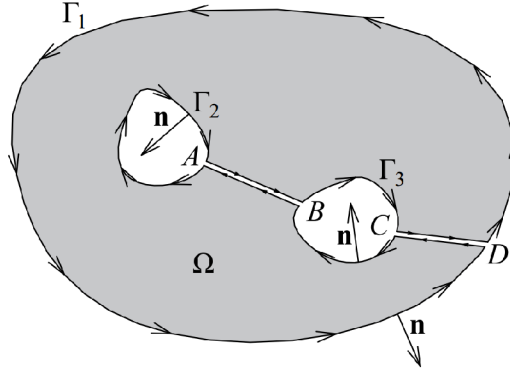
Koeficienty G_{ij} a \hat{H}_{ij} dopočítáme podle (5.3) pro $P \in \Omega$.

5.2 Oblasti s více hranicemi

V mnoha případech se setkáme s tzv. vícenásobnou souvislou oblastí. Je to oblast Ω s vnější hranicí, která obepíná konečný počet neprotínajících se vnitřních tvarů. Jinak řečeno, oblast Ω obsahuje díry.

V aplikacích jsou pomocí nich řešeny problémy jako je krut prutů s dutým průřezem, nebo obtékání těles tekutinou.

Dokážeme, že i pro tento případ platí druhá Greenova identita. Nejdříve provedeme řezy AB a CD , jak je ukázáno na obrázku 5.3, a tak převedeme oblast na jednoduše spojitou. Hranice Γ pak bude součtem všech hranic, které oblast má.



Obrázek 5.3: Řezy v oblasti Ω a kladný směr.

Druhá Greenova identita má potom tvar

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) d\Omega &= \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_k} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \int_{BA} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \\ &+ \int_{AB} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \int_{DC} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \\ &+ \int_{CD} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds, \end{aligned} \quad (5.11)$$

kde platí, že

$$\begin{aligned} \int_{BA} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds &= - \int_{AB} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \\ \int_{DC} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds &= - \int_{CD} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \end{aligned}$$

Proto pro druhou Greenovu identitu dostáváme

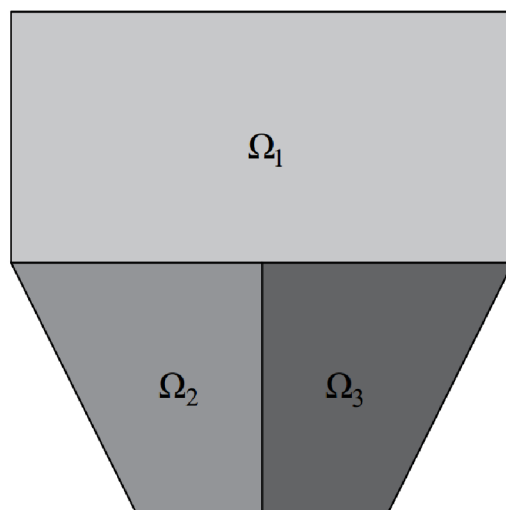
$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds, \quad (5.12)$$

kde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

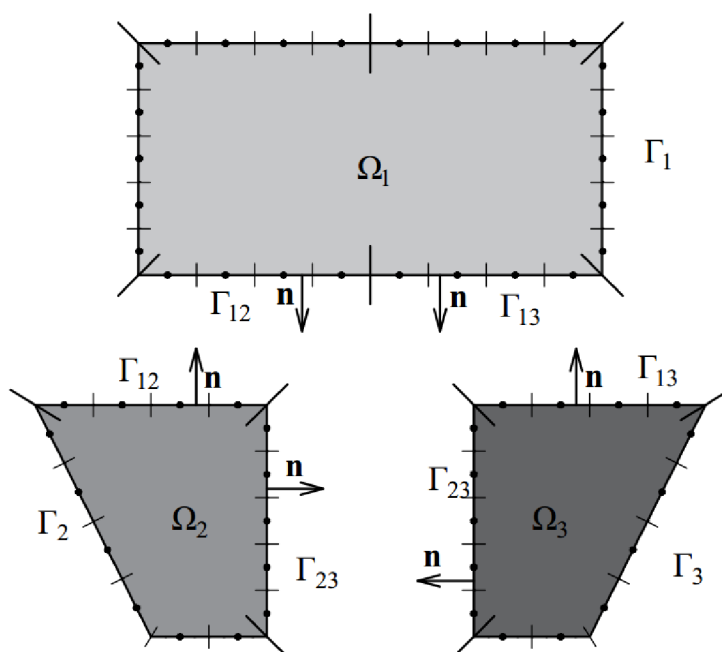
Odtud vidíme, že se druhá Greenova věta pro vícenásobnou souvislou oblast od případu se spojitou oblastí neliší. Proto jsou vztahy vycházející z druhé Greenovy identity platné i pro oblast, která obsahuje díry.

5.3 Metoda podoblastí

Existují problémy, kdy potřebujeme oblast Ω rozdělit na několik podoblastí Ω_i s odlišnými vlastnostmi. Získáme tak složenou oblast. A protože fundamentální řešení se dá použít pouze pro homogenní oblasti, aplikujeme metodu na každou její část Ω_i zvlášť. Mějme tedy oblast Ω složenou z podoblastí Ω_1 , Ω_2 a Ω_3 (obrázek 5.4), kterou diskretizujeme. Přičemž sousední hrany musí být rozděleny stejně (obrázek 5.5).



Obrázek 5.4: Složená oblast $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$.



Obrázek 5.5: Diskretizace hranice složené oblasti ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$).

5.3 METODA PODOBLASTÍ

V každé z podoblastí jsou definovány vektory $\{u\}$ a $\{u_n\}$:

Podoblast	Hodnoty v uzlových bodech	Hranice	Počet uzlů
Ω_1	$\{u\}_1^1, \{u_n\}_1^1$	Γ_1	N_1
Ω_1	$\{u\}_{12}^1, \{u_n\}_{12}^1$	Γ_{12}	N_{12}
Ω_1	$\{u\}_{13}^1, \{u_n\}_{13}^1$	Γ_{13}	N_{13}
Ω_2	$\{u\}_2^2, \{u_n\}_2^2$	Γ_2	N_2
Ω_2	$\{u\}_{12}^2, \{u_n\}_{12}^2$	Γ_{12}	N_{12}
Ω_2	$\{u\}_{23}^2, \{u_n\}_{23}^2$	Γ_{23}	N_{23}
Ω_3	$\{u\}_3^3, \{u_n\}_3^3$	Γ_3	N_3
Ω_3	$\{u\}_{13}^3, \{u_n\}_{13}^3$	Γ_{13}	N_{13}
Ω_3	$\{u\}_{23}^3, \{u_n\}_{23}^3$	Γ_{23}	N_{23}

Hraniční podmínky jsou definované pouze na hranici $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Na ostatních hranách jejich hodnoty u a u_n neznáme.

Pro neznámé hraniční podmínky platí:

Podoblast	Neznámé hraniční podmínky	Hrany	Dostupné výpočty
Ω_1	$N_1 + 2N_{12} + 2N_{13}$	$\Gamma_1, \Gamma_{12}, \Gamma_{13}$	$N_1 + N_{12} + N_{13}$
Ω_2	$N_2 + 2N_{12} + 2N_{23}$	$\Gamma_2, \Gamma_{12}, \Gamma_{23}$	$N_2 + N_{12} + N_{23}$
Ω_3	$N_3 + 2N_{13} + 2N_{23}$	$\Gamma_3, \Gamma_{13}, \Gamma_{23}$	$N_3 + N_{13} + N_{23}$

Počet neznámých je tedy větší než počet dostupných výpočtů o $2(N_{12} + N_{13} + N_{23})$. Ostatní neznámé zjistíme pomocí znalosti fyzikálního základu problému, zahrnutím takzvaných podmínek spojitosti, které jsou dvojího typu.

1. Spojitost potenciálu

Velikost potenciálu je na obou stranách rozhraní stejná. Proto platí

$$\begin{aligned} \{u\}_{12}^1 &= \{u\}_{12}^2 \\ \{u\}_{13}^1 &= \{u\}_{13}^3 \\ \{u\}_{23}^2 &= \{u\}_{23}^3 \end{aligned} \quad (5.13)$$

2. Spojitost toku

Tok q_n vycházející z jedné podoblasti je stejně velký jako tok vcházející do druhé podoblasti, která s první sousedí. Aby byla zachována kontinuita toku skrz rozhraní, musí platit

$$\begin{aligned} \{q_n\}_{12}^2 &= -\{q_n\}_{12}^1 \\ \{q_n\}_{13}^3 &= -\{q_n\}_{13}^1 \\ \{q_n\}_{23}^3 &= -\{q_n\}_{23}^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Protože za kladný směr je považován směr normály n , v rovnicích jsou pro vyjádření záporného směru toku použita znaménka minus (obrázek 5.5).

Další využití metody je při řešení problémů dlouhých úzkých homogenních oblastí. Ty rozdělujeme na více podoblastí a obchází tím problémy s numerickým výpočtem integrace fundamentálního řešení přes dlouhou vzdálenost.

6 Aplikace metody hraničních prvků

Metodu hraničních prvků demonstrujeme v prostředí Jupyter Notebook se softwarem BEM++ [29]. A to pro Laplaceovy problémy $\Delta u = 0$ ve 3D, kde se Dirichletova okrajová podmínka dá interpretovat jako teplota a Neumannova okrajová podmínka jako tepelný tok. V předchozích kapitolách jsme metodu odvozovali pro objekty ve 2D, proto nyní musíme počítat s jiným fundamentálním řešením

$$v(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|}. \quad (6.1)$$

V následující kapitole popisujeme jeden z použitých algoritmů, který je i s ostatními k nalezení na přiloženém datovém nosiči.

6.1 Problém s Dirichletovou okrajovou podmínkou

Jako první příklad volíme Laplaceův problém s Dirichletovou okrajovou podmínkou

$$\bar{u}(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad (6.2)$$

kterou předepíšeme na hranicích krychle.

V algoritmu nejdříve načteme knihovny `bempp` a `numpy` potřebné k výpočtu.

```
import bempp.api
import numpy as np
```

Nadefinujeme požadovanou síť. V našem případě použijeme krychli s délkou 2, počátkem v bodě $(-1, -1, -1)$ a jemností sítě $h = 0,1$ z knihovny `bempp`. Dá se ale načíst jakákoliv síť z externího souboru s příponou `.msh`.

```
grid = bempp.api.shapes.cube(length=2, origin=(-1, -1, -1), h=0.1)
```

Vytvoříme oblasti pro okrajové podmínky. Pro Dirichletova data oblast `dp0_space` spojitých, po částech lineárních funkcí a pro Neumannova data oblast `p1_space` po částech konstantních funkcí.

```
dp0_space = bempp.api.function_space(grid, "DP", 0)
p1_space = bempp.api.function_space(grid, "P", 1)
```

Nyní nadefinujeme potřebné operátory. V tomto případě je to identita a operátory `slp` a `d1p`, které by ve 2D odpovídaly koeficientům G_{ij} a \hat{H}_{ij} (rovnice (5.3)).

```
identity = bempp.api.operators.boundary.sparse.identity(p1_space, p1_space, dp0_space)
d1p = bempp.api.operators.boundary.laplace.double_layer(p1_space, p1_space, dp0_space)
slp = bempp.api.operators.boundary.laplace.single_layer(dp0_space, p1_space, dp0_space)
```

Definujeme okrajovou podmínku a vytvoříme Dirichletovu funkci na síti.

```
def dirichlet_data(x, n, domain_index, result):
    result[0] = ((x[0]**2+x[1]**2)/2)

dirichlet_fun = bempp.api.GridFunction(p1_space, fun=dirichlet_data)
```

Provedeme přepočít $H_{ij}u^j = \hat{H}_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}$ (rovnice (5.5)).

```
rhs = (.5 * identity + d1p) * dirichlet_fun
```

6.1 PROBLÉM S DIRICHLETOVOU OKRAJOVOU PODMÍNKOU

Vypočteme Neumannovu funkci pomocí metody sdružených gradientů [30].

```
neumann_fun, info = bempp.api.linalg.cg(slp, rhs, tol=1E-3)
```

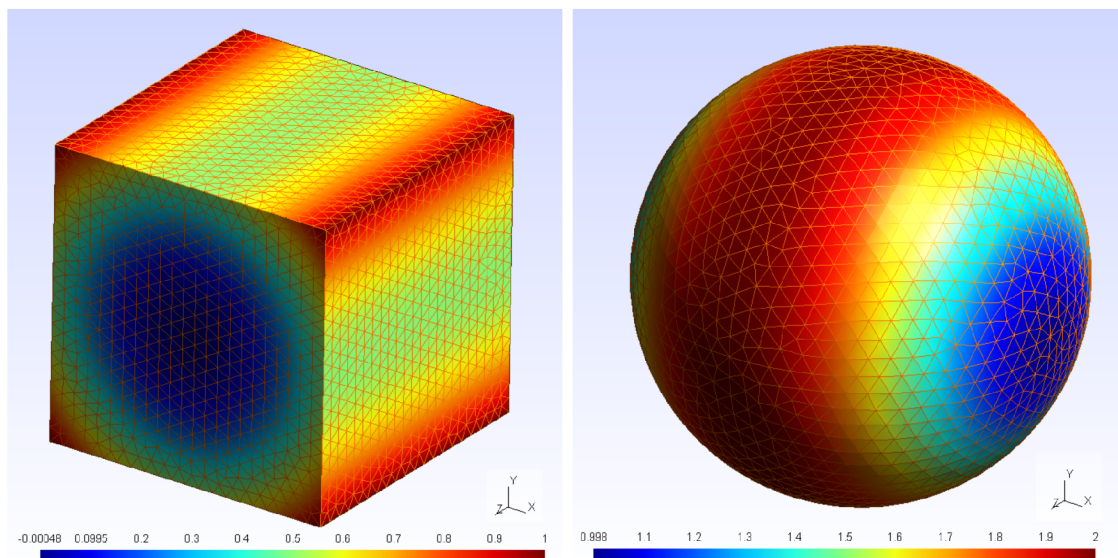
Nakonec vykreslíme Dirichletovu funkci a převedeme ji do formátu *.msh.

```
dirichlet_fun.plot()
bempp.api.export(grid_function=dirichlet_fun, file_name="krychle_D_BEMPP.msh")
```

Dostáváme vykreslení teplot na krychli (obrázek 6.1a).

Na obrázku 6.1b je pak zobrazen případ pro kouli s okrajovou podmínkou

$$\bar{u}(y, z) = y^2 + z^2 + 1. \quad (6.3)$$



(a) Krychle

(b) Koule

Obrázek 6.1: Tvary s Dirichletovou okrajovou podmínkou.

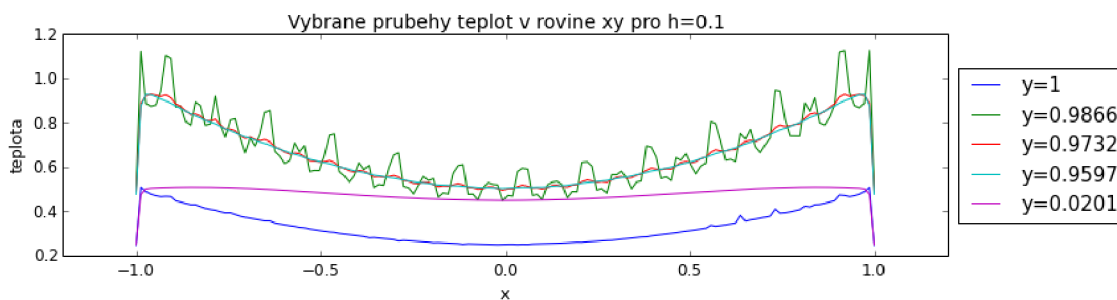
Pokud změříme rychlost výpočtu $t[s]$, získáme závislost na jemnosti dělení h , jak je naznačeno v následující tabulce a v grafu na obrázku 6.2. Odtud vidíme, že s dělením menším než 0,1 čas výpočtu prudce roste.

h	$t[s]$
2	0,17860
1	0,27905
0,5	0,62122
0,3	2,38508
0,2	5,93309
0,1	27,98680
0,08	44,42886
0,05	126,13074



Obrázek 6.2: Čas výpočtu.

Pro každý z těchto případů uděláme řez rovinou xy a pro vybrané hodnoty y vykreslíme teploty. Zde je uveden pouze graf pro $h = 0,1$ (obrázek 6.3). Grafy pro ostatní hodnoty dělení se nacházejí v dodatku A.

Obrázek 6.3: Vykreslení teploty v rovině xy pro dělení $h=0,1$.

Z grafu je vidět, že na hranicích prvku v ose x i y má metoda velké výchytky. Při hrubém dělení jsou výchytky největší, naopak při zjemňování dělení se postupně zhlazují.

6.2 Problém se smíšenými okrajovými podmínkami

Jako druhý příklad volíme opět krychli, nyní se smíšenými okrajovými podmínkami. Abychom byli schopni přiřadit odlišné podmínky různým hranicím, očíslováme její jednotlivé strany (obrázek 6.4). Přičemž platí, že součet hodnot protilehlých stěn je roven 7.

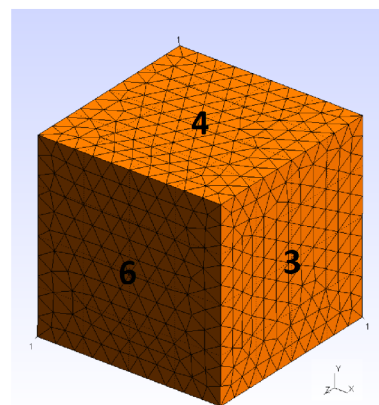
Použitý algoritmus je o něco složitější než algoritmus uvedený v kapitole 6.1. Principiálně je ovšem podobný.

Pro krychli volíme okrajové podmínky

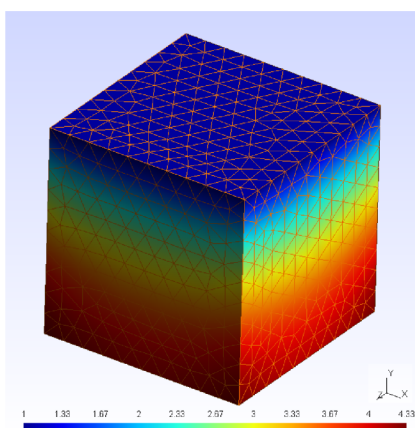
$$\begin{aligned} \bar{u} &= 1 & \text{na } \Gamma_D, \\ \bar{u}_n &= 1 & \text{na } \Gamma_N, \end{aligned} \quad (6.4)$$

kde Γ_D odpovídá stěně 4 a Γ_N stěnám 1, 2, 3, 5, 6. Dostáváme řešení znázorněné na obrázku 6.5a.

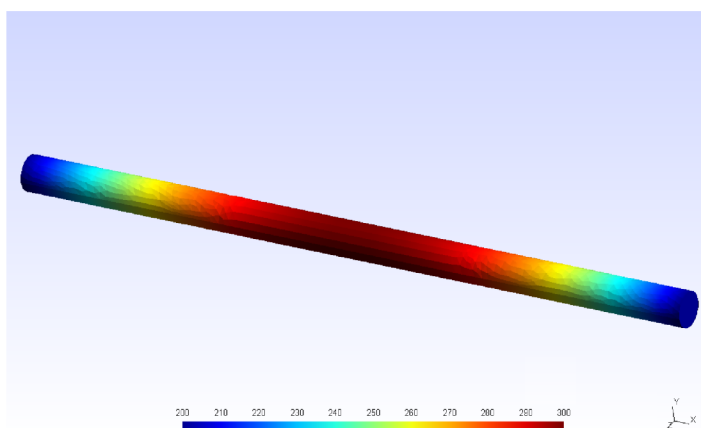
Stejný výpočet provedeme i pro tyč, kde na její okraje předepíšeme hodnotu $\bar{u} = 200$ a na zbytek tyče $\bar{u}_n = 1$ (obrázek 6.5b).



Obrázek 6.4: Označení stran krychle.



(a) Krychle



(b) Tyč

Obrázek 6.5: Tvary se smíšenými okrajovými podmínkami.

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo seznámit se s teoretickými základy metody hraničních prvků pro rovinné úlohy a následně metodu aplikovat na konkrétní případ.

V úvodních kapitolách jsme nastínili vývoj metody a porovnali ji s metodou konečných prvků, čímž jsme interpretovali její největší klady a zápory. Poté jsme zavedli Diracovu delta funkci v jedné a dvou dimenzích a rozebrali jsme Bettiho větu.

Ke zkoumání metody jsme se dostali až v další kapitole, kdy jsme nejdříve odvodili fundamentální řešení pro Laplaceovu a Poissonovu rovnici a pro další použití jsme ho navíc zderivovali podle normály. Následně jsme odvodili hraniční integrální rovnice za použití druhé Greenovy identity. A to nejen pro body uvnitř oblasti, ale i pro body na hranici resp. mimo oblast. V tomto případě jsme se zaměřili pouze na Laplaceovu rovnici, na konci kapitoly je ovšem uvedeno řešení i pro Poissonovu rovnici, ke kterému bychom se dostali drobnou modifikací uvedenou v [1]. Dalším krokem byla diskretizace hranice oblasti. Zjistili jsme, že toho lze docílit více metodami. My jsme pro další zkoumání vybrali výpočet pomocí konstantních hraničních prvků. Integrály, které se nám v tomto kroku nepodařilo diskretizovat jsme označili jako koeficienty závislé na prvku. Nakonec jsme dostali systém lineárních rovnic, ze kterého bychom po dosazení okrajových podmínek dostali hledané hodnoty řešení. Znalosti jsme dále rozšířili o řešení případu oblasti s více hranicemi (jinak řečeno oblasti s dírami) a oblasti, kterou je nutné rozdělit na několik podoblastí.

Při aplikaci metody jsme s ohledem na použitý software řešili problémy na tělesech v prostoru, které jsme interpretovali jako úlohy vedení tepla. Nejprve jsme řešili problémy s Dirichletovou okrajovou podmínkou. Pro jeden z použitých příkladů jsme dále odečítali časy výpočtu pro různá dělení sítě, kde jsme u snižujících se hodnot zaznamenali rychlé zvyšování času výpočtu. Dále jsme pro jednotlivá dělení vykreslovali grafy vybraných průběhů teplot, ze kterých lze vyčíst postupné zmenšování chyby na hranicích prvku pro jemnější dělení sítě. Nakonec jsme řešili problémy se smíšenými okrajovými podmínkami.

Literatura

- [1] KATSIKADELIS, John T. *Boundary elements: theory and applications*. New York: Elsevier, 2002. ISBN 0080441076.
- [2] BROŽ, Petr a Petr PROCHÁZKA. *Metoda okrajových prvků v inženýrské praxi*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1987. Teoretická knižnice inženýra.
- [3] FRANČŮ, Jan. *Parciální diferenciální rovnice*. Páté opravené vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2017. ISBN 978-80-214-5577-1.
- [4] ČERMÁK, Libor. *Algoritmy metody konečných prvků* [online]. 2005 [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: http://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=2603
- [5] ČERMÁK, Libor. *Numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic* [online]. 2015 [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: http://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=624208025
- [6] GREEN, George. *An Essay on the Application on Mathematical Analysis to the Theories of Electricity amd Magmetism*. Notingham, 1828.
- [7] BETTI, Enrico. Theoria dell' Elasticita. *Il Nuovo Cimento*. 1972, s. 7-10.
- [8] SOMIGLIANA, Carlo. Sopra l' Equilibrio di' un Corpo Elastico Isotropo. *Il Nuovo Comento*. 1885, s. 17-20.
- [9] FREDHOLM, Erik Ivar. Sur une Classe d' Equations Fonctionelles. *Acta Mathematica*. 1903, **27**, 365-390.
- [10] KUPRADZE, V.D. *Potential Methods in the Theory of Elasticity*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1965.
- [11] KELLOGG, Oliver Dimon. *Foundations of Potential Theory*. Berlin: Springer-Verlag, 1967.
- [12] JASWON, Maurice Aaron a George Thomas SYMM. *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*. London: Academic Press, 1977.
- [13] KATSIKADELIS, John T. *The Analysis of Plates on Elastic Foundation by the Boundary Integral Equation Method*. N.Y., 1982. Ph.D. Dissertation. Polytechnic University of New York.
- [14] SHERMAN, D.I. On the Solution of the Plane Static Problem of the Theory of Elasticity for Displacements Given on the Boundary. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1940, **27**, 911-913.
- [15] SHERMAN, D.I. On the Solution of the Plane Static Problem of the Theory of Elasticity for Given External Forces. *Dokl. Akad Nauk SSSR*. 1940, **28**, 25-28.
- [16] MICHLIN, Solomon Grigorievič. *Integral Equations*. London: Pergamon Press, 1952.
- [17] MUSCHELIŠVILI, Nikoloz I. *Some Basic Problems of the Theory of Elasticity*. Holland: Noordhoff, 1963.

LITERATURA

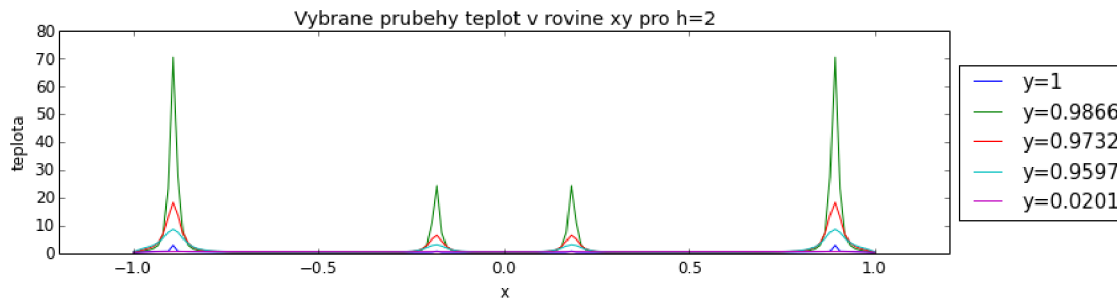
- [18] JASWON, Maurice Aaron. Integral Equation Methods in Potential Theory I. *Proceedings of the Royal Society*. 1963, **275**, 23-32.
- [19] SYMM, George Thomas. Integral Equation Methods in Potential Theory II. *Proceedings of the Royal Society*. 1963, **275**, 33-46.
- [20] RIZZO, Frank J. An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1967, **25**, 83-95.
- [21] CRUSE, T. A. Numerical Solutions in Three-Dimensional Elastostatics. *International Journal of Solids and Structures*. 1969, **5**, 1259-1274.
- [22] RIZZO, Frank J. a D. J. SHIPPY. A Method for Stress Determination in Plane Anisotropic Elastic Bodies. *Journal of Composite Materials*. 1970, (4), 36-61.
- [23] CRUSE, T. a Frank J. RIZZO. A Direct Formulation and Numerical Solution of the Transient Elastodynamic Problem-I. *International Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1968, **22**, 244-259.
- [24] IGNACZAK, Jozef a Witold NOWACKI. Singular Integral Equations in Thermoelasticity. *International Journal of Engineering Sciences*. 1968, **4**, 53-68.
- [25] MENDELSON, Alexander. *Solution of the Elastoplastic Torsion Problem by Boundary Integral Method*. NASA, TN D- 7418, 1973.
- [26] Domain (FEM) and boundary (BEM) discretization: BEM. In: *Boundary elements: theory and applications*. New York: Elsevier, 2002, s. 3. ISBN 0080441076.
- [27] Domain (FEM) and boundary (BEM) discretization: FEM. In: *Boundary elements: theory and applications*. New York: Elsevier, 2002, s. 3. ISBN 0080441076.
- [28] ODEN, J. Tinsley. *Mechanics of elastic structures*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [29] *Bempp Services* [online]. Bempp/BEM++ Authors, 2015 [cit. 2018-04-28]. Dostupné z: <https://bempp.com/>
- [30] ČERMÁK, Libor. *Vybrané statě z numerických metod* [online]. [cit. 2018-05-22]. Dostupné z: http://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=324774479

Seznam použitých zkratek a symbolů

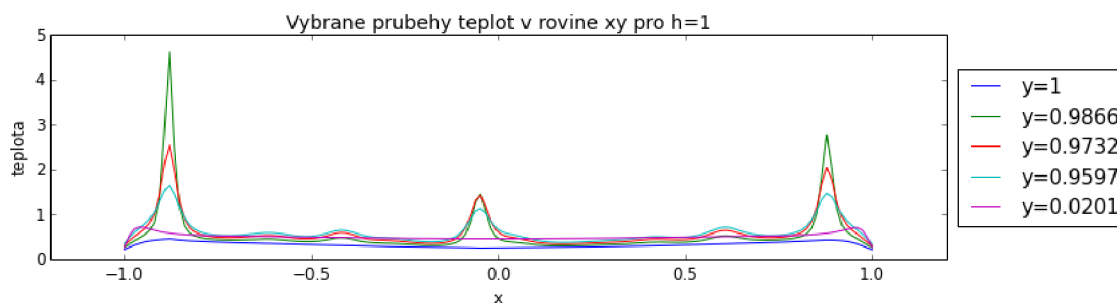
$(F_x, F_y, F_z), (\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z)$	objemové síly
$(f_x, f_y, f_z), (\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z)$	plošné síly
$(u, v, w), (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}), \Delta$	deformační posuvy
F	bodová síla
$G(x, \xi)$	Greenova funkce
h	jemnost sítě
$\hat{H}_{ij}, H_{ij}, G_{ij}$	koeficienty
i, j	indexy
k	tuhost tělesa
MHP	metoda hraničních prvků
MKP	metoda konečných prvků
n	normála
N	počet prvků hranice Γ
P, Q	body na oblasti Ω
p, q	body na hranici Γ
r	vzdálenost bodů P a Q
R, ρ	poloměr
T	tloušťka
$t[s]$	čas
u	řešení Laplaceovy nebo Poissonovy rovnice
v	fundamentální řešení
W	mechanická práce
δ	Diracova delta funkce
$\varepsilon(P)$	koeficient závislý na bodě P
θ	úhel sklonu úsečky PQ
Γ	hranice oblasti Ω
Ω	těleso (oblast)

A Grafy teplot pro různá dělení

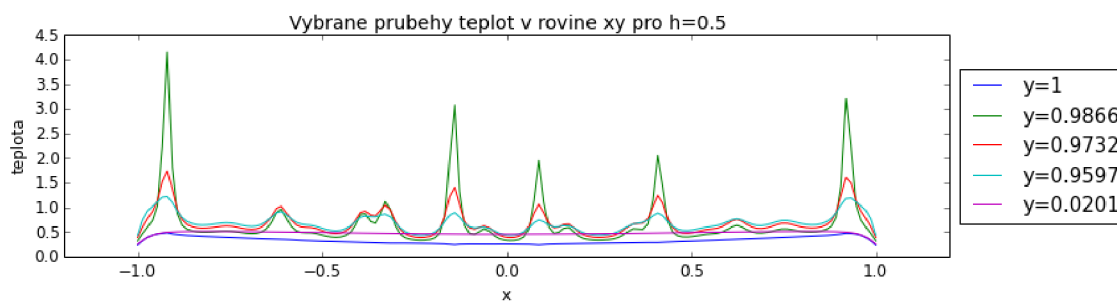
V kapitole 6.1 jsme vykreslili graf průběhů teploty v řezu rovinou xy pro dělení $h = 0, 1$ (obrázek 6.3). Zde pro srovnání uvedeme i ostatní grafy pro dělení $h = 2; 1; 0, 5; 0, 3; 0, 2; 0, 1; 0, 08$ a $0, 05$.



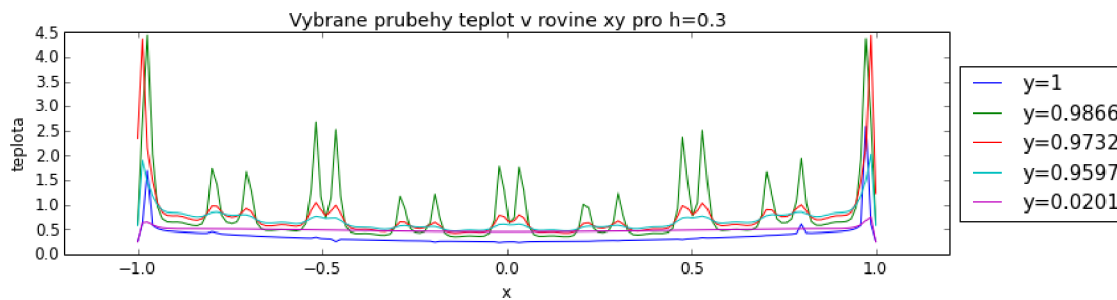
Obrázek A.1: Vykreslení teploty v rovině xy pro dělení $h=2$.



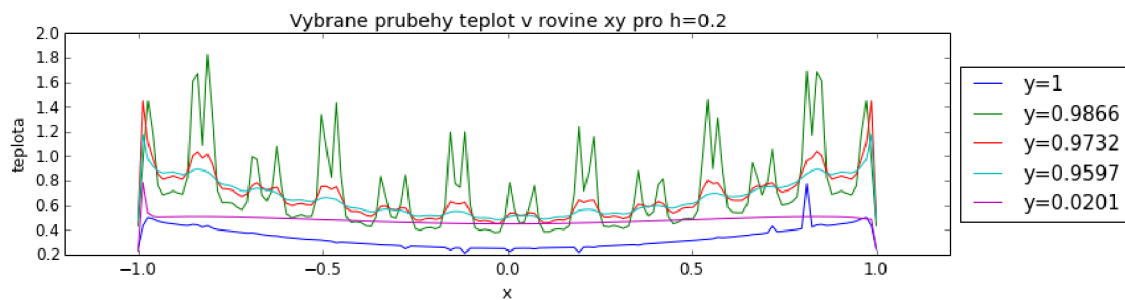
Obrázek A.2: Vykreslení teploty v rovině xy pro dělení $h=1$.



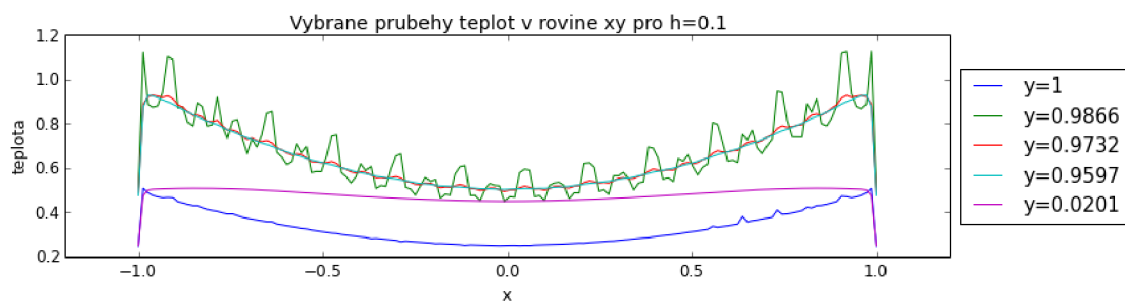
Obrázek A.3: Vykreslení teploty v rovině xy pro dělení $h=0,5$.



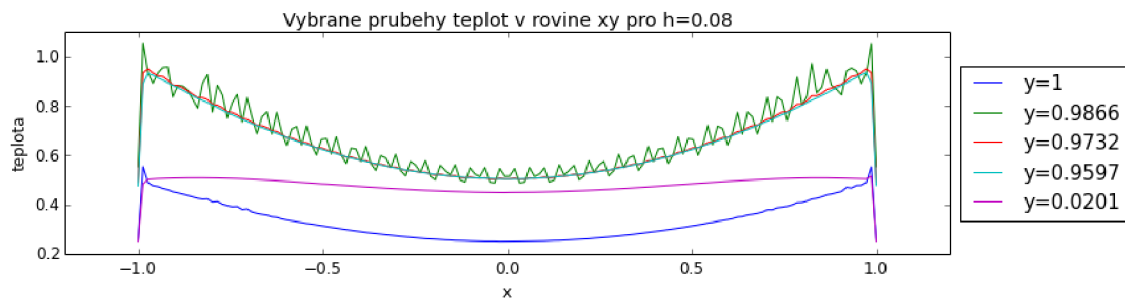
Obrázek A.4: Vykreslení teploty v rovině xy pro dělení $h=0,3$.



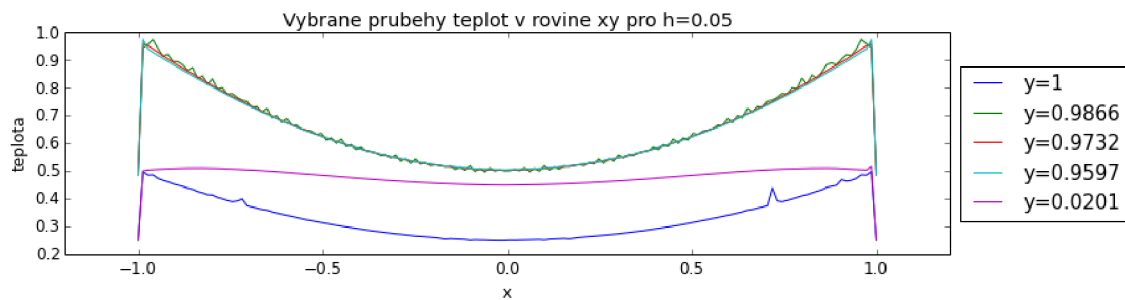
Obrázek A.5: Vykreslení teploty v rovině xy pro dělení $h=0,2$.



Obrázek A.6: Vykreslení teploty v rovině xy pro dělení $h=0,1$.



Obrázek A.7: Vykreslení teploty v rovině xy pro dělení $h=0,08$.



Obrázek A.8: Vykreslení teploty v rovině xy pro dělení $h=0,05$.