FAKULTA
PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ
A PEDAGOGICKÁ TUL

**Diplomová práce**

# Možnosti rozvíjení logického myšlení žáků v hodinách matematiky

| | |
|---|---|
| *Studijní program:* | N0114A300076 Učitelství pro 2. stupeň základních škol |
| *Studijní obory:* | Matematika<br>Zeměpis |
| *Autor práce:* | **Bc. Jana Čerychová** |
| *Vedoucí práce:* | Mgr. Jiří Břehovský, Ph.D.<br>Katedra matematiky a didaktiky matematiky |

Liberec 2023

FAKULTA
PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ
A PEDAGOGICKÁ TUL

**Zadání diplomové práce**

# Možnosti rozvíjení logického myšlení žáků v hodinách matematiky

| | |
|---|---|
| *Jméno a příjmení:* | **Bc. Jana Čerychová** |
| *Osobní číslo:* | P20000791 |
| *Studijní program:* | N0114A300076 Učitelství pro 2. stupeň základních škol |
| *Specializace:* | Matematika<br>Zeměpis |
| *Zadávající katedra:* | Katedra matematiky a didaktiky matematiky |
| *Akademický rok:* | 2021/2022 |

## Zásady pro vypracování:

**Cíle práce:** V teoretické části shrnout dosavadní poznatky související s rozvojem logického myšlení a vymezit základní pojmy. S tím souvisí rešeršní činnost odborných periodik (českých a zahraničních). V praktické části vytvořit sbírku úloh, které přispívají k rozvoji logického myšlení a jsou využitelné při běžné výuce matematiky. Popsat, jak lze tyto úlohy při výuce využívat. Navrhnout a realizovat vhodný pedagogický experiment k ověření vytvořených úloh. Zrealizovat a vyhodnotit dotazníkové šetření. To bude mapovat, jakými prostředky rozvíjejí učitelé matematiky logické myšlení žáků.

**Metody:** Rešerše odborné literatury, vymezení základních pojmů, tvorba úloh vhodných k rozvoji logického myšlení, dotazníkové šetření.

*Rozsah grafických prací:*
*Rozsah pracovní zprávy:*
*Forma zpracování práce:* tištěná/elektronická
*Jazyk práce:* Čeština

**Seznam odborné literatury:**

BUDÍNOVÁ, Irena. Matematika pro bystré a nadané žáky, 2. díl. 1. vydání. Praha: EDIKA, 2017. ISBN 978-80-266-1157-8
HEJNÝ, Milan. Teória vyučovania matematiky. 2. vydání. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. ISBN 80-08-01344-3
PIAGET, Jean. Psychologie inteligence. 2. vydání. Praha: SPN, 1970. ISBN 14-053-70
POLÁK, Josef. Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. 1. vydání. Praha: FRAUS, 2014. ISBN 978-80-7239-449-5
ROUGIER, Roger. Trénujeme logické myšlení. 1. vydání. Praha: Portal, 2017. ISBN 978-80-262-1175-4.

*Vedoucí práce:* Mgr. Jiří Břehovský, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

*Datum zadání práce:* 1. září 2022
*Předpokládaný termín odevzdání:* 26. dubna 2023

L.S.

prof. RNDr. Jan Picek, CSc.
děkan

doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 9. září 2022

# Prohlášení

Prohlašuji, že svou diplomovou práci jsem vypracovala samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé diplomové práce a konzultantem.

Jsem si vědoma toho, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitu v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Současně čestně prohlašuji, že text elektronické podoby práce vložený do IS/STAG se shoduje s textem tištěné podoby práce.

Beru na vědomí, že má diplomová práce bude zveřejněna Technickou univerzitou v Liberci v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů.

Jsem si vědoma následků, které podle zákona o vysokých školách mohou vyplývat z porušení tohoto prohlášení.

18. května 2023 Bc. Jana Čerychová

**Poděkování**

Chtěla bych poděkovat především Mgr. Jiřímu Břehovskému, Ph.D. za jeho vedení, cenné rady a čas, který mi věnoval. Rovněž bych chtěla poděkovat učitelům ze Základní školy v Sobotce, kteří mi umožnili realizovat navržený výzkum. Nakonec bych chtěla poděkovat své rodině, která mě podporovala po celou dobu mého studia.

**Anotace**

Diplomová práce pojednává o možnostech rozvíjení logického myšlení žáků v hodinách matematiky na druhém stupni základních škol. Zpočátku v práci shrnujeme dosavadní poznatky související s logickým myšlením a jeho rozvojem, poté uvádíme tři možné prostředky, pomocí nichž lze logické myšlení rozvíjet. V praktické části představujeme vlastní sbírku úloh přispívající k rozvoji logického myšlení. Tyto úlohy ověřujeme ve výzkumné části. V závěru práce popisujeme dotazníkové šetření, které zjišťuje, jakými prostředky rozvíjejí učitelé matematiky logické myšlení žáků.



**Klíčová slova**

myšlení, logické myšlení, rozvoj logického myšlení, matematika, sbírka úloh, heuristické strategie, konstruktivistická výuka



**Annotation**

This thesis deals with the possibilities of developing pupils' logical thinking in mathematics classes at the secondary schools. At the beginning of the thesis, we summarize the previous knowledge related to logical thinking and its development, then we present three possibilities by which logical thinking can be developed. In the practical part, we devise own collection of tasks that develop logical thinking. We verify these tasks in the research part. At the end of the thesis, we describe a questionnaire survey that investigates the means by which mathematics teachers develop students' logical thinking.



**Keywords**

thinking, logical thinking, development of logical thinking, mathematics, collection of tasks, heuristic strategies, constructivist teaching

# OBSAH

## Seznam obrázků

## Seznam grafů



## Seznam tabulek

# ÚVOD

Rozvoj logického myšlení žáků je důležitým aspektem vzdělávání. Schopnost logicky uvažovat zvyšuje žákovu úspěšnost při řešení školních problémů a zároveň ho doprovází po celý život, neboť logické myšlení využíváme při každodenním rozhodování, posuzování informací či hledání cest k řešení problémů. Logické myšlení by mělo být na základních školách rozvíjeno v rámci většiny předmětů. Nezastupitelnou roli v jeho rozvoji představuje matematika, jejíž samotná výuka logické myšlení rozvíjí. Kromě toho je však vhodné při výuce využívat prostředky, které k rozvoji logického myšlení žáků přispívají. Pro učitele může být obtížné takové prostředky vyhledávat a efektivně je zařazovat do výuky. Právě proto vznikla tato diplomová práce, která má za cíl představit možnosti rozvoje logického myšlení žáků v hodinách matematiky na druhém stupni základní školy.

Diplomová práce se skládá ze tří částí: teoretické, praktické a výzkumné. V teoretické části shrnujeme poznatky o logickém myšlení a jeho vývoji u žáků na druhém stupni základní školy. Zmiňujeme rovněž matematickou logiku a zařazení logického myšlení do Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání. V následujících kapitolách uvádíme a podrobněji charakterizujeme tři možnosti, kterými lze přispívat k rozvoji logického myšlení žáků v hodinách matematiky. Jedná se o konstruktivistické vyučování, řešení úloh pomocí heuristických strategií a řešení úloh vedoucích k rozvoji logického myšlení.

V praktické části představujeme vytvořenou sbírku úloh, které připívají k rozvoji logického myšlení žáků. Ve výzkumné části tyto úlohy ověřujeme pomocí vyhodnocení didaktického testu, který jsme předložili žákům druhého stupně. V poslední kapitole této diplomové práce vyhodnocujeme dotazníkové šetření, které se zaměřuje na to, jakými prostředky cílí učitelé matematiky na druhém stupni základní školy na rozvoj logického myšlení svých žáků.

# TEORETICKÁ ČÁST

## 1. Myšlení

Myšlení řadíme společně s vnímáním, pamětí, pozorností a představivostí mezi tzv. **kognitivní procesy**. Jedná se o děje, prostřednictvím kterých lidé poznávají okolní svět i sami sebe. Mnozí psychologové myšlení označují jako nejsložitější kognitivní proces, jelikož je založeno na provázanosti všech ostatních poznávacích procesů.

Vágnerová [40 s. 94] definuje **myšlení** jako „*mentální manipulaci s různými informacemi (tj. s kognitivními prvky, vesměs prezentovanými v symbolické podobě: vjemy, představami, symboly nebo znaky), která slouží k porozumění jejich podstaty a k analýze různých souvislostí a vztahů, na jejichž základě odvozuje jedinec určité závěry*." V širokém slova smyslu je myšlení definováno jako vnitřní mentální děj, který nám umožňuje řešit problémy v různých rovinách. Může se jednat o problémy v rovině vysoce teoretické a abstraktní či v rovině každodenních praktických záležitostí.

Myšlení probíhá na vědomé i nevědomé úrovni a jeho způsob i kvalita úzce souvisí s inteligencí daného jedince, kromě toho je také úzce spojeno s jazykem. Někteří psychologové dokonce považují myšlení za vnitřní řeč člověka. K hlavním funkcím myšlení patří formování pojmů, pochopení kauzálních a funkčních vztahů, vyvozování závěrů z výchozích předpokladů, řešení problémů a vytváření něčeho nového [26].

Proces myšlení se uskutečňuje prostřednictvím **myšlenkových operací,** což jsou operace s různými mentálními reprezentacemi (vjemy, představy, pojmy, abstraktní znaky či elementární myšlenky), které vedou k objevování a využívání vztahů mezi objekty a jejich vlastnostmi. Myšlenkové operace přetrvávají jako dovednost osvojená na určité úrovni vývoje myšlení a umožňují jedinci realizovat činnost určitým způsobem. Nevystupují samostatně, ale jako soustava vzájemně souvisejících funkčních složek činnosti [24].

Myšlenkové operace se dělí na logické a heuristické. Logické myšlenkové operace se řídí jasně danými pravidly a postupy. Patří mezi ně tzv. algoritmy, což jsou přesně vymezené postupy a soubory pravidel, které tvoří série kroků, jejichž dodržování je předpokladem správného řešení. Tyto postupy se používají především v matematice a ostatních přírodních vědách. O výsledcích těchto operací lze rozhodovat, zda jsou správné či nesprávné.

Heuristické myšlenkové operace chápeme jako neformální, spekulativní a intuitivní strategie, které nám pomáhají zjednodušit problém a napovídají nám, na co máme zaměřit pozornost, co máme ignorovat a jakou cestou se máme ubírat. Zkrátka nám pomáhají najít cestu k řešení problému. Heuristické myšlenkové operace však nezaručují nalezení správného řešení (jako je tomu u algoritmu), výsledky lze vyhodnocovat pouze jako vyhovující či nevyhovující. Tyto myšlenkové operace využíváme při řešení všedních praktických problémů [32].

Mezi myšlenkové operace patří:

- **analýza** – myšlenkový rozklad předmětu či jevu na jednotlivé části,
- **syntéza** – myšlenkové spojení jednotlivých prvků předmětů nebo jevů do celku,
- **srovnávání** - zjišťování podobností a rozdílů mezi jednotlivými předměty nebo jevy,
- **abstrakce** - vyčleňování podstatných a obecných vlastností jevů od nepodstatných, vedlejších či individuálních vlastností,
- **zobecnění** - zjišťování a spojování společných vlastností jednotlivých jevů určité skupiny a vytváření nadřazených pojmů,
- **analogie** – vyvozování nového poznatku na základě podobnosti s jinými jevy [24, 14].

Slovní podoba, ve které jedinec vyjadřuje výsledky svého myšlení, ke kterým dospěl prostřednictvím myšlenkových operací, se označuje jako forma myšlení. Podle řeckého filozofa Aristotela probíhá myšlení ve třech základních formách, kterými jsou pojmy, soudy a úsudky.

Jako **pojem** označujeme slovní vyjádření obecných a podstatných znaků určitých předmětů či jevů. Pojmy si osvojujeme v pojmotvorném procesu, během kterého zjišťujeme a poznáváme podstatné znaky a význam daného pojmu. Pojmy můžeme na základě určitých společných znaků zobecňovat a třídit do kategorií. Veškeré jednotky v každé kategorii mají stejné nebo podobné vlastnosti, díky čemuž můžeme nově získané poznatky snadno třídit a zároveň o nich přemýšlet v obecném rozsahu. Proto jsou pojmy považovány za základní stavební kámen liského myšlení [26].

Každý pojem má svůj obsah a rozsah. Rozsahem pojmu chápeme souhrn všeho, co nabývá totožných vlastností jako daný pojem. Například do rozsahu pojmu čtyřúhelník patří čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník, lichoběžník či deltoid. Obsah pojmu představuje souhrn všeho, co daný pojem vymezuje. Obsah pojmu čtyřúhelník tak tvoří všechny vlastnosti, které čtyřúhelník vymezují. Tedy např.: v téže rovině jsou dány čtyři body A, B, C, D, z nichž žádné tři neleží v přímce, pak sjednocení jednoduché uzavřené lomené čáry se čtyřmi vrcholy A, B, C, D a její vnitřní oblasti nazýváme čtyřúhelník.

Spojením pojmů do věty vzniká **soud**. Za soud tedy považujeme jakoukoliv oznamovací větu, která vyjadřuje vztah mezi dvěma, či více pojmy. Myšlenkový proces, při kterém ze známých soudů odvodíme nový poznatek, se nazývá **úsudek**. Skládá se vždy z předpokladů (premisů) a z nich vyvovzených závěrů (konkluzí). Úsudky vznikají v procesu usuzování, který podle postupu obvykle dělíme na indukci a dedukci. **Induktivní usuzování** vychází z konkrétní skutečnosti a vede k určitému zobecnění. Na základě konkrétních případů stanovujeme obecná pravidla. Induktivní úsudky nejsou vždy stoprocentně platné. **Deduktivní usuzování** postupuje od obecného ke konkrétnímu, tedy z obecných pravidel vyvozujeme závěry o specifických případech.

Základním typem úsudku je sylogismus, který vychází ze dvou předpokladů, z nichž lze stanovit závěr. Aristoteles uvádí následující příklad sylogismu:

- 1. předpoklad: Všichni lidé jsou smrtelní.
- 2. předpoklad: Sokrates je člověk.
- závěr: Sokrates je smrtelný.

První předpoklad vymezuje obecnou kategorii (lidé) a druhý předpoklad označuje její konkrétní případ (Sokrates). Závěr pak vyvodíme podle toho, že to, co platí pro obecnou kategorii, platí i pro její konkrétní členy [26].

Myšlení můžeme klasifikovat na základě řady kritérii, většina psychologů se však shoduje na dvou základních níže uvedených klasifikacích. Podle Homoly [9] rozlišujeme tři druhy myšlení na základě psychických obsahů, s nimiž provádíme myšlenkové operace:

- **konkrétní myšlení** – manipulace s reálnými předměty a vjemy,
- **názorné myšlení** – manipulace s představami, nejčastěji vizuálními,
- **abstraktní myšlení** – manipulace s verbálními, matematickými či logickými znaky.

Americký psycholog Joy Paul Guilford dělí myšlení podle způsobu řešení problému:

- **konvergentní myšlení -** myšlenková aktivita se zaměřuje jedním směrem, vede k nalezení jednoho řešení problému,
- **divergentní myšlení** - mnohostranné myšlení charakteristické velkým množstvím nápadů a řešení, vyznačuje se tvořivostí a objevováním nových postupů a řešení.

Dále existuje mnoho významných druhů myšlení (kritické, taktické či tvořivé myšlení), které v této práci nebudeme rozvádět, a zaměříme se již pouze na myšlení logické.

## 1.1. Logické myšlení

Pojem logické myšlení je v psychologii definován značně nejednotně. Široká veřejnost častokrát logické myšlení chybně chápe jako pouhé osvojení si poznatků z výrokové logiky. Jeho význam je však daleko širší. Polák [29] definuje logické myšlení jako „*myšlení založené na příčinách a jejich následcích, hledání logických vazeb a na nich postavených řešení problémů, vyvozování závěrů a zvážení, co se za daných podmínek může stát*."

Vlastimil Chytrý ve své disertační práci [11] uvádí rozhovory s českými didaktiky matematiky na téma logické myšlení. Josef Molnár s Antonínem Jančaříkem se v nich shodují na skutečnosti, že logické myšlení je schopnost uvádět věci do souvislostí, vidět příčinu, následek, důsledek a vztah. Milan Hejný charakterizuje logické myšlení jako odpovídání na otázku proč. Turečtí didaktici Nazan Sezen a Ali Bülbül logické myšlení vysvětlují jako schopnost jednotlivce vyřešit problém pomocí mentálních operací a schopnost dospět k principům a pravidlům pomocí určitých zobecnění nebo abstrakcí [34].

Většina odborníků se přiklání k definici od Hartla a Hartlové, kteří ve svém Psychologickém slovníku [6 s. 296] uvádějí: „*Logické myšlení je vývojově vyšší forma myšlení, než je myšlení závislé na předmětné činnosti, jedná se o správné usuzování podle zákonů formální logiky*." Přitom pod pojmem formální logika chápeme vědu o správném usuzování, tj. vyvozování důsledků z daných předpokladů. Logika zkoumá různé postupy odvozování závěrů z daných předpokladů a dokazování správnosti takového odvození. Zabývá se analýzou a vyhodnocováním úsudků.

Nyní se pozastavíme nad tím, zda je z psychologického hlediska možné logické myšlení rozvíjet. Rozsáhlými vědeckými výzkumy je prokázáno, že již při narození je lidský mozek plně srukturován a naprogramován. Základem pro jakoukoliv jeho činnost, tedy i pro logické myšlení, je dostatečné množství nervových buněk a silná struktura nervových spojů v dané oblasti mozku. Nabízí se tedy otázka, zda je možné logické myšlení rozvíjet, přestože je do jisté míry vrozené. Pozitivním závěrem četných vědeckých výzkumů je, že lidské myšlení lze rozvíjet v průběhu celého života, neboť jakákoliv duševní aktivita člověka vede k tvorbě nových nervových spojů v mozku. Lidé tedy přichází na svět pouze s určitými vlohami k logickému myšlení, které se mohou soustavnou a vhodnou duševní činností rozvíjet a zlepšovat. Mezi tyto aktivity patří porovnávání objektů, hledání společných vlastností a rozdílů, vyzdvihování podstatných znaků, vyvozování závěrů a jejich ověřování, přesvědčivé obhajování pravdivosti svých úsudků a vyvracování nepravdivých závěrů. Úroveň logického myšlení je také závislá na kognitivním vývoji člověka [11, 29].

## 1.2. Kognitivní vývoj

Kognitivní vývoj zahrnuje růst a rozvoj poznávacích procesů, mezi které patří i myšlení. Problematikou kognitivního vývoje dětí se zabývala řada psychologů. Nejuznávanější teorií této problematiky je teorie švýcarského filozofa a vývojového psychologa Jeana Piageta (1896 – 1980).

Za základní princip kognitivního vývoje Piaget považoval kombinaci a vzájemné prolínání procesů asimilace a akomodace. Asimilace spočívá v osvojování si nových zkušeností. Setká-li se dítě s novým objektem či událostí, snaží se je pochopit a zacházet s nimi ve smyslu již existujícího schématu. Nepostačuje-li staré schéma k tomu, aby pojalo nový objekt či událost, pak dochází k akomodaci. To znamená, že si dítě schéma modifikuje, tedy přizpůsobí schéma okolnímu světu. Kognitivní vývoj probíhá jako proces opakované transformace kognitivních schémat. Podmět k této transformaci vzniká, pokud se nové poznatky nedají vysvětlit dosavadním způsobem a je třeba schémata přehodnotit [41].

Piaget byl přesvědčen, že intelektuální vývoj je přímým pokračováním vrozeného biologického vývoje. Zastával názor, že kognitivní vývoj se uskutečňuje v rámci aktivity dítěte v průběhu jednotlivých etap ontogeneze. Piagetova teorie proto není ani nativistická (zdůrazňující podíl vrozené složky), ani behavioristická (zdůrazňující roli stimulace a učení), ale vychází z předpokladu kombinace obou principů [25].

Podle Jeana Piageta [25] probíhá kognitivní vývoj člověka v rámci čtyř hlavních stadií, kterými prochází každé dítě postupně v přibližně stejných věkových obdobích. Přičemž rychlost absolvování jednotlivých stadií je ovlivněna prostředím dítěte a biologicky určeným procesem zrání. Každé stadium je charakteristické určitým přístupem k poznání.

Piagetova stadia kognitivního vývoje jsou:

- senzomotorické stadium (0 – 2 roky),
- předoperační stadium (2 – 7 let),
- stadium konkrétních operací (7 – 12 let),
- stadium formálních operací (12 a více let).

Znalost Piagetovy kognitivní teorie je pro učitele naprosto nezbytná, neboť mnohá výuková selhání pramení z toho, že žáci nedosahují forem myšlení, které jsou po nich požadovány. Žáci přicházející na druhý stupeň základních škol se obvykle nacházejí na přelomu stadia konkrétních operací a stadia formálních operací. Proto se zaměříme právě na tyto dvě etapy kognitivního vývoje.

### 1.2.1. Stadium konkrétních operací

Ve stadiu konkrétních operací si dítě postupně osvojuje nové strategie uvažování, které se řídí základními principy logiky a jsou vázány na realitu. To znamená, že je schopno uvažovat pouze o něčem určitém, co zná, i když předmět jeho uvažování není aktuálně přítomen. Dítěti stačí minulá zkušenost, aby si předmět uvažování dokázalo alespoň představit [25].

Hlavní kognitivní strukturou, která je základem tohoto stadia, je grupování. To znamená, že dítě seskupuje předměty a jevy do skupin podle jejich společných definujících znaků, a vytváří tak logické třídy. Také chápe zahrnutí prvků do třídy. Ukážeme-li mu obrázek, na kterém je 8 koček a 4 psi, a zeptáme se, jestli je tam více koček nebo zvířat, uvědomí si rozdíl mezi prvkem a třídou a odpoví správně. Společně s grupováním se v tomto stadiu objevuje schopnost řazení, tj. uspořádat předměty podle daného kritéria. Tyto nově nabyté schopnosti umožňují dítěti lépe si vysvětlovat vlastní zkušenosti, řešit problémy a vytvářet si realističtější obraz o světě [5].

Další významné charakteristiky tohoto období jsou decentralizace, konzervace a reverzibilita. Decentralizace představuje schopnost posuzovat skutečnost z více hledisek a brát v úvahu různé souvislosti. Konzervace je uvědomění si trvalosti určitých objektů a jejich znaků. Reverzibilita představuje vratnost různých proměn, respektive myšlenkových operací. Tyto charakteristiky názorně vysvětlují Langmeier a Krejčíková [15] na pokusu s přeléváním vody, při kterém jsou dětem dány dvě válcové nádoby, které se liší v šířce a výšce, ale jejich objemy jsou shodné. Pokus spočívá v tom, že první nádobu naplníme až po okraj vodou a následně všechnu vodu přelijeme do druhé nádoby a zeptáme se dítěte, ve které nádobě je více vody. Dítě v předoperačním stadiu si myslí, že více vody je v užší nádobě, protože je vyšší. Naopak dítě ve stadiu konkrétních operací správně usoudí, že v nádobách je vody stejně. Tohoto usuzování je schopno díky chápání konzervace (nic jsme nepřidali, nic jsme neubrali), reverzibility (vodu můžeme přelít zpět) a decentrace (posouzení výšky a šířky nádoby).

V neposlední řadě dítě při usuzování používá již zmíněný sylogismus. I v tomto případě je usuzování stále vázáno na realitu. Dítě je schopno řešit sylogismus pouze s názorným obsahem, tedy dokáže řešit úlohy typu: *Všechny šelmy požírají maso. Vlk je šelma. Co z toho můžeš usoudit o vlkovi?* Provádění abstraktních myšlenkových operací se mu zatím nedaří stejně tak jako systematické experimentování.

### 1.2.2. Stadium formálních operací

Stadium formálních operací je charakterizováno schopností abstraktního myšlení. Dospívající je schopen provádět logické operace s pojmy, které jsou vzdáleny od bezprostřední smyslové zkušenosti, jsou obecnější a abstraktnější. Dokonce dokáže aplikovat logické operace nezávisle na obsahu soudů, je schopen sledovat formu myšlenkového úsudku a odhlédnout od jeho konkrétního obsahu. Například zvládne vyřešit úlohy typu: *Všechny Maro jsou Lope. Všechny Lope jsou zelené. Co můžeš usoudit o Maro?* Kromě toho je dospívající schopen uvažovat i hypoteticky o možnostech, které reálně neexistují či jsou málo pravděpodobné [15].

Při řešení problému se jedinec nespokojí s jediným řešením, ale uvažuje o možných alternativních řešeních a při experimentování systematicky obměňuje proměnnou. Vytváří hypotézy, soustavně ověřuje jejich platnost a postupně je přijímá, nebo zavrhuje. Díky novému způsobu myšlení pohlíží na sebe a na svůj život i na své pocity a myšlenky jakoby zvnějšku, dokáže je analyzovat a kriticky posuzovat. Objevuje se u něj nový způsob morálního hodnocení a častější mravní soudy, které berou ohled na druhé [15].

Stadium formálních operací se u většiny dětí začíná projevovat na začátku pubescence a svého vrcholu dosahuje okolo patnácti let. Jeho nástup je pozvolný, dospívající již může být schopen v některých případech myslet formálně, v jiných je stále ještě vázán na konkrétní obsahy. Pro učitele je nezbytné neustále sledovat a analyzovat aktuální kognitivní vývoj jeho žáků, jelikož formálně abstraktní způsob myšlení je zásadním předpokladem pro pochopení mnohého učiva na druhém stupni základní školy.

## 2. Logika

Termín *logika* pochází z řeckého slova *logos*, které má velmi široký význam. Do češtiny je nejčastěji překládáno jako slovo, řeč či příběh. V širokém smyslu ho můžeme chápat jako libovolný jazykový projev, který má charakter rozumové argumentace. V běžném životě si lidé pod pojmem logika představují myšlenkovou cestu, která vede ke správným závěrům. Většina filozofů definuje logiku jako **vědu o správnosti lidského myšlení a usuzování**. Její zakladatel Aristoteles ji považoval za jakési hledávání pravdy, které spočívá v cestě od pravdivých předpokladů k pravdivým závěrům. Tedy pokud na začátku vyjdeme z pravdivých tvrzení a budeme postupovat pouze podle pravidel logiky, dojdeme vždy k pravdivému závěru, který již není třeba dále ověřovat. Aristoteles zkoumal pravdivost tvrzení na základě vztahů mezi pojmy a na základě již výše objasněného sylogismu.

Logiku lze také chápat jako **nástroj správného usuzování**. V tomto pojetí se jedná o zákony, formy a prostředky, které umožňují ověření správnosti myšlenkových postupů. Asi každý laik zastává názor, že každá rozumně smýšlející osoba logiku běžně používá, aniž by potřebovala studovat zvláštní nástroj. To je sice pravda, nicméně studium logiky je velmi užitečné. Nejenže logika nabízí řadu nástrojů umožňujících správné usuzování, ale také rozvíjí naše myšlení, učí přesnému vyjadřování a argumentaci a usnadňuje vzájemnou komunikaci.

Může se zdát, že logika je nástroj využívaný pouze v matematice. Tento názor má své historické opodstatnění, protože vznik logiky byl do značné míry vyvolán potřebou postavit pevný logický základ pro matematiku. Logiku rozvíjeli zpočátku výhradně matematikové a mají značný podíl na jejím rozpracování. V současnosti se však znalost logiky stala jedním z nutných předpokladů badatelské práce v mnohých přírodních i humanitních vědách. Kromě jiných ze základů logiky vycházejí informatici, filosofové, psychologové či právníci.

Logika je členěna na značné množství podkategorií, které se různě prolínají. V této práci uvedeme pouze základní dělení na formální a neformální logiku. **Formální logika** se zaměřuje výhradně na formu tvrzení a využívá jasně stanovená pravidla a symboliku. Naopak **neformální logika** vychází z obsahu tvrzení, tedy z přirozeného jazyka, a nedotýká se vědeckého odvozování, jedná se spíše o uvažování o všedních problémech na základě intuitivního myšlení [37].

Vzhledem k tomu, že jsme logické myšlení definovali jako správné usuzování podle zákonů formální logiky, zaměříme se na tento druh logiky podrobněji. Jak jsme již zmínili, logika úzce souvisí s usuzováním, při němž přecházíme od poznatků, které již máme k dispozici, k novým poznatkům, kterými jsme dosud nedisponovali. Samotný proces usuzování probíhající v naší hlavě je velmi složitý a obtížně zkoumatelný, proto se usuzováním zabývá široká řada vědních disciplín. Formální logika studuje pouze tu část lidského usuzování, která spočívá v uvědomělém operování s poznatky, které jsou vyjádřené v jazykové formě. Právě jazyk je prostředkem, díky kterému logika usuzování zkoumá. Vyjádření úsudků v písemné jazykové formě je nejvhodnější formou, v níž lze studovat logickou stránku usuzování.

Důležitost jazykového vyjádření úsudku je zřejmá i z terminologie, kterou logika užívá. Základní pojmem formální logiky je **výrok**, což je srozumitelné tvrzení, o kterém má smysl rozhodovat, že je pravdivé nebo nepravdivé. Výrok je vždy vyjádřen oznamovací větou. Tvrzení „*Číslo 12 je větší než číslo 30.*“ a „*Kočka má čtyři nohy*.“ jsou výroky, neboť se jedná o smysluplné oznamovací věty a zároveň o prvním tvrzení lze jednoznačně rozhodnout, že je nepravdivé, a o druhém, že je pravdivé. Naopak věty „*Pospěš si!*“, „*Jak se máš?*“ či „*Dům je součet silnice a chodníku.*“ nejsou výroky, neboť v prvních dvou případech se nejedná o oznamovací věty. Třetí případ je oznamovací věta, která nedává smysl, a nelze rozhodnout o její pravdivosti.

K základním principům formální logiky patří:

- **princip extenzionality** – logika upouští od věcného obsahu tvrzení a pracuje pouze s pravdivostní hodnotou tvrzení,
- **princip dvouhodnotovosti** – pravdivostní hodnoty jsou právě dvě – pravda a nepravda,
- **zákon sporu** – není možné, aby tvrzení bylo současně pravdivé i nepravdivé,
- **princip vyloučeného třetího** – každé tvrzení má právě jednu pravdivostní hodnotu, je buď pravdivé, nebo nepravdivé, jiná možnost se nepřipouští [3].

Nejpropracovanějšími a nejrozvinutějšími systémy formální logiky jsou systémy výrokové a predikátové logiky. Přičemž **výroková logika** zkoumá pravdivost a vyplývání pouze na základě zkoumání vztahů mezi výroky prostřednictvím spojek, kterými jsou spojeny. **Predikátová logika** je rozšířením výrokové logiky, neboť logické vztahy zachycuje ještě podrobněji. Uvažuje totiž i vztahy uvnitř jednoduché věty. Jedná se o vztahy mezi individui (objekty, o kterých mluvíme) a predikáty (vlastnostmi, které individuím přisuzujeme) vyjádřené pomocí kvantifikačních výrazů jako každý, všichni, někteří či žádný [3].

Nyní uvedeme základní pravidla výrokové logiky, jejíž nástroje umožňují řešení značné řady logických úloh. Základním předmětem zkoumání výrokové logiky jsou výroky a jejich skládání. Tradičně se výroky označují pomocí výrokových proměnných, tj. písmeny $p$, $q$, $r$ atd.

Pokud je výrok pravdivý, přiřadíme mu hodnotu 1, pokud je nepravdivý, přiřadíme mu hodnotu 0.

Jednotlivé elementární výroky lze za pomoci vhodných jazykových výrazů (tzv. **výrokových spojek**) skládat ve výroky složené. Pokud spojíme dva výroky pomocí výrokové spojky, výsledkem bude složený výrok. Můžeme tak vytvářet i velmi složité celky, které budou stále výroky. Existuje mnoho jazykových výrazů umožňujících spojování výroků, výroková logika však používá přesně definované spojky, které jednoznačně určují pravdivostní hodnotu výsledného výroku v závislosti na pravdivostních hodnotách dílčích výroků. Pravdivostní hodnota složeného výroku se zjišťuje pomocí **pravdivostní tabulky** [27].

Výroková logika běžně operuje se čtyřmi binárními operacemi a jednou operací unární. V případě binárních operací se jedná o konjunkci, disjunkci, implikaci a ekvivalenci. Unární operaci představuje negace.

**Negaci** definujeme jako unární operaci, která výroku uděluje právě opačnou pravdivostní hodnotu. Negace je spojena s úslovím *není pravda, že.* Příkladem negace výroku „*Dnes je pondělí.*“ je výrok „*Není pravda, že* d*nes je pondělí.*“. Takovýto výrok však častokrát upravujeme do mluvnicky jednoduššího tvaru „*Dnes není pondělí.*“. Negaci výroku *p* zapíšeme formulí $\neg p$.

**Konjunkce** představuje spojení dvou výroků na základě spojek *a, i, a zároveň*. Konjunkce je pravdivá pouze tehdy, když jsou pravdivé současně oba výroky, ze kterých je konjunkce složená. V ostatních případech je považována za nepravdivou. Příkladem konjunkce je složený výrok „*Včera ráno bylo chladno a zároveň pršelo*.“. V matematickém jazyce konjunkci dvou výroků *p, q* zapíšeme $p \wedge q$.

Další binární operací je **disjunkce**, která využívá spojku *nebo*. V běžném jazyce se většinou spojka *nebo* používá ve smyslu vylučovacím. Ve výrokové logice je to trochu jinak, neboť disjunkce je pravdivá právě tehdy, když alespoň jeden z dílčích výroků je pravdivý. Na disjunkci můžeme snadno ilustrovat, že výroková logika pracuje s formou výroku a potlačuje jeho obsah. Vezměme si složený výrok „*V pondělí půjdu do práce pěšky, nebo pojedu autobusem.*“. Z hlediska obsahu výroku nemůže nastat případ, kdy jsou oba dílčí výroky pravdivé, tedy že pojedu autobusem a zároveň půjdu pěšky. Z pohledu výrokové logiky je však složený výrok i v tomto případě pravdivý. Disjunkci dvou výroků *p, q* zapisujeme $p \vee q$.

**Implikace** odpovídá složení výroků prostřednictvím sousloví *z toho plyne.* Mnohem častěji se implikace vyjadřuje vazbami *Jestliže.., pak...* či *Když…, tak….* Z těchto vazeb je zřejmé, že implikace je první zmíněná operace, u které záleží na pořadí výroků. U konjunkce i disjunkce je jedno, zda nejdříve napíšeme první výrok a potom druhý, nebo naopak. Spojením získáme výrok stejného významu i pravdivostního ohodnocení. Pokud však změníme pořadí výroků při implikaci, změníme nejen význam výsledného výroku, ale častokrát i jeho pravdivostní hodnotu. Implikace je nepravdivá, pouze pokud je první výrok pravdivý a druhý nepravdivý. V ostatních případech je vždy pravdivá. Příkladem implikace je složený výrok „*Jestliže bude zítra sněžit, pak pojedeme lyžovat.*“. Implikaci dvou výroků $p$, $q$ zapíšeme formulí $p \Rightarrow q$.

Poslední uvedenou binární operací je **ekvivalence**, která představuje spojení dvou výroků na základě spojení *právě tehdy, když.* Ekvivalence je pravdivá pouze v případě, kdy mají oba výroky stejnou pravdivostní hodnotu, tedy buď jsou oba výroky pravdivé, nebo jsou oba nepravdivé. Příkladem implikace je tvrzení „*Číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné dvěma a třemi zároveň.*“. V matematickém jazyce ekvivalenci dvou výroků $p$, $q$ zapíšeme $p \Leftrightarrow q$.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

*Tabulka 1: Pravdivostní hodnoty složených výroků*

# 3. Logické myšlení v RVP ZV

V současné době je za jeden z hlavních cílů výuky matematiky považován rozvoj logického myšlení žáků. V této kapitole popíšeme, jakým způsobem je logické myšlení ukotveno v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV). Uvedeme význam RVP ZV a jeho dílčí části, v nichž se zaměříme na rozvoj logického myšlení žáků v rámci výuky matematiky na druhém stupni základní školy.

Vzdělávání žáků v České republice se uskutečňuje na základě kurikulárních dokumentů, které jsou vytvářeny na dvou úrovních – státní a školní. Na státní úrovni se jedná o tzv. rámcové vzdělávací programy (RVP), které stanovují závazné rámce jednotlivých etap vzdělávání – předškolní, školní a středoškolské vzdělávání. Na základě těchto dokumentů si jednotlivé školy utvářejí kurikulární dokumenty na školní úrovni. Jedná se o tzv. školní vzdělávací programy, podle kterých se uskutečňuje výuka na konkrétních školách. Tato koncepce dává školám prostor pro uplatnění autonomie, kterou mohou využít pro vlastní profilaci školy [12].

RVP ZV stanovuje očekávanou úroveň vzdělání, které by měli žáci dosáhnout na konci studia základní školy, dále vymezuje klíčové kompetence, vzdělávací oblasti, očekávané výstupy a učivo. Klíčové kompetence představují souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti. Dle RVP ZV musí k rozvoji klíčových kompetencí žáků směřovat veškerý vzdělávací obsah i aktivity a činnosti, které ve škole probíhají. Mezi tyto **klíčové kompetence** patří: kompetence k učení, kompetence k řešení problémů, kompetence komunikativní, kompetence sociální a personální, kompetence občanské, kompetence pracovní a kompetence digitální. Rozvoj logického myšlení úzce souvisí s kompetencemi k učení a k řešení problémů [12].

V rámci kompetencí k učení by žák mimo jiné měl třídit informace a na základě jejich propojení a systematizace je efektivně využívat v procesu učení a praktickém životě, uvádět věci do souvislostí, propojovat do širších celků poznatky z různých vzdělávacích oblastí, samostatně experimentovat a získané výsledky porovnávat, posuzovat a vyvozovat z nich závěry pro využití v budoucnosti. Kompetence k řešení problémů zahrnují tyto činnosti: rozpoznání problému, hledání jeho příčin a promýšlení způsobů řešení problému na základě logických postupů. V rámci všech těchto činností žák uplatňuje a rozvíjí své logické myšlení [12].

Obsah vzdělávání je v RVP ZV rozdělen do devíti **vzdělávacích oblastí**, které jsou tvořeny obsahově blízkými vzdělávacími obory:

- Jazyk a jazyková komunikace (Český jazyk a literatura, Cizí jazyk, Další cizí jazyk)
- Matematika a její aplikace (Matematika a její aplikace)
- Informatika (Informatika)
- Člověk a jeho svět (Člověk a jeho svět)
- Člověk a společnost (Dějepis, Výchova k občanství)
- Člověk a příroda (Fyzika, Chemie, Přírodopis, Zeměpis)
- Umění a kultura (Hudební výchova, Výtvarná výchova)
- Člověk a zdraví (Výchova ke zdraví, Tělesná výchova)
- Člověk a svět práce (Člověk a svět práce)

Jednotlivé vzdělávací oblasti jsou v úvodu vymezeny charakteristikou vzdělávací oblasti, která vyjadřuje její postavení a význam v základním vzdělávání. Obsah vzdělávacích oblastí je tvořen očekávanými výstupy a učivem. **Očekávané výstupy** mají činnostní povahu, jsou ověřitelné, prakticky zaměřené a využitelné v běžném životě. **Učivo** je strukturováno do jednotlivých tematických okruhů a je školám doporučeno jako prostředek k dosažení očekávaných výstupů. Naplňování očekávaných výstupů a rozčlenění učiva do jednotlivých ročníků si učitelé plánují při tvorbě školního vzdělávacího programu [12].

Matematika spadá do vzdělávací oblasti **Matematika a její aplikace**. Jedním z cílových zaměření této oblasti je rozvíjení kombinatorického a logického myšlení prostřednictvím řešení matematických problémů. Vzdělávací obsah oboru Matematika a její aplikace je rozdělen do čtyř tematických okruhů:

- číslo a početní operace,
- závislosti, vztahy a práce s daty,
- geometrie v rovině a v prostoru,
- nestandartní aplikační úlohy a problémy [12].

K rozvoji logického myšlení žáků dochází především prostřednictvím tematického okruhu **nestandardní aplikační úlohy a problémy**. Žáci se v rámci tohoto celku učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života. Cílem je pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje, provádět situační náčrty či řešit optimalizační úlohy. Úspěšnost řešení nestandardních úloh většinou není primárně závislá na již osvojených matematických vědomostech a dovednostech, ale žáci musejí k řešení využít logické myšlení. Úspěch žáků je závislý na jejich rozumové vyspělosti a tvořivosti, proto mohou nestandardní úlohy vzbudit zájem i u žáků, kteří jsou v matematice méně úspěšní.

Dle RVP ZV by měly být nestandardní úlohy do výuky zařazovány v průběhu celého základního vzdělávání napříč všemi tematickými okruhy. Konkrétní zařazení je však v kompetencích učitelů během tvorby ŠVP. Náročnost nestandardních úloh lze snadno modifikovat, a proto také napomáhají k realizaci individuálního přístupu k žákům, a dávají možnost zapojení i slabším žákům.

Rozvoj logického myšlení žáků v hodinách matematiky na 2. stupni základní školy je v RVP ZV podchycen očekávaným výstupem: žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací. Doporučené učivo k tomuto výstupu jsou číselné a logické řady, číselné a obrázkové analogie, logické a netradiční geometrické úlohy.

# 4. Rozvoj logického myšlení v hodinách matematiky

Logické myšlení člověka se výrazně a aktivně rozvíjí především v době docházky na základní školu. Rozvoj logického myšlení žáků probíhá v procesu učení v rámci všech předmětů, v komunikaci s vrstevníky a dospělými i při každodenních činnostech. Role výuky matematiky ve vývoji logického myšlení je velmi rozsáhlá. Hlavní součástí matematického vzdělávání je rozvoj schopnosti plně argumentovat [23].

Pro rozvoj logického myšlení žáků je třeba vzdělávací proces koncipovat tak, aby žáci měli prostor pro vytváření vlastních úsudků, samostatné objevování nových poznatků či hledání nestandardních způsobů řešení problémů. V následujících kapitolách uvedeme tři prostředky, pomocí kterých se mohou učitelé snažit rozvíjet logické myšlení žáků. Na konci každé kapitoly zmíníme, jak lze daný prostředek zařadit do výuky.

## 4.1. Konstruktivistická výuka

Konstruktivismus je směr druhé poloviny dvacátého století, který zdůrazňuje aktivní úlohu člověka, význam jeho vnitřních předpokladů a důležitost jeho interakce s prostředím a společností. V pedagogické terminologii se můžeme setkat s pedagogickým konstruktivismem, který prosazuje, aby se ve výuce využívalo řešení konkrétních životních problémů, tvořivého myšlení a manipulace s názornými pomůckami [23].

Konstruktivismus vznikl jako reakce na převládající transmisivní způsob výuky, který spočívá v tom, že učitel předává hotové a logicky utříděné poznatky žákům, kteří jsou většinou pouze jejich pasivními příjemci. Podle mnohých představitelů konstruktivismu tento způsob výuky nevede ke skutečnému porozumění a potlačuje samostatnost, aktivitu, motivaci i rozvoj žáka. Proto konstruktivismus pojímá **učení a poznání jako aktivní proces** probíhající v interakci žáka s poznávanou skutečností a s druhými lidmi. Role učitele v konstruktivistickém vyučování spočívá ve vytváření pedagogických situací, při kterých dochází k aktivním kognitivním činnostem žáka. Při těchto situacích se učitel snaží vyvolat nějaký problém či rozpor mezi dosavadními představami a novými informacemi nebo zkušenostmi [28].

Na základě navozené situace by měl každý žák samostatně objevovat nové poznatky a pravidla, kterými se řídí, protože jedině tak dojde k jejich skutečnému pochopení. Tento proces poznání obvykle probíhá ve dvou fázích. První zahrnuje zkoumání nového poznatku a vede často k rozporu, jelikož žák zjišťuje, že nová informace není v souladu s jeho dosavadními znalostmi a zkušenostmi. Druhá fáze představuje řešení tohoto rozporu a přijetí nového poznání. Právě takovýto způsob výuky vede k rozvoji logického myšlení žáka, jelikož si na základě předložených informací vytváří nové úsudky a zamýšlí se nad jejich pravdivostí. Kromě toho žák získává schopnosti orientovat se ve složitějších úkolech, stanovovat si postupné cíle, vyhodnocovat dosažené výsledky či rozhodovat se na základě dostupných informací, což jsou jistě nepostradatelné schopnosti pro jeho budoucí život [21].

Smyslem konstruktivistického vyučování je kromě získávání nových poznatků a dovedností také vytvoření trvalého vztahu k učení, který motivuje žáka k celoživotnímu poznávání. Tato skutečnost nastává právě tehdy, když je žák zaangažovaný ve svém vlastním procesu učení a přejímá odpovědnost za vydané pracovní úsilí [21].

Milan Hejný a František Kuřina [7] přetvářejí obecný konstruktivistický přístup k vyučování v tzv. **didaktický konstruktivismus**, který bere v úvahu specifika vyučování v matematice. Tito čeští didaktici formulují následujících 10 zásad, které popisují využití konstruktivismu v rámci výuky matematiky:

1. **Aktivita** - matematika je chápána jako specifická aktivita, nikoli jen jako její výsledek.
2. **Řešení úloh** – podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování.
3. **Konstrukce poznatků** – poznatky jsou nepřenosné a vznikají v mysli žáka.
4. **Zkušenosti** – tvorba poznatků se opírá o zkušenosti žáka, kterých žák nabývá v průběhu svého života či ve škole
5. **Podnětné prostředí** – vzdělávání vychází z prostředí podněcujícího tvořivost, jehož nutným předpokladem je tvořivý učitel, dostatek podnětů a příznivé klima třídy.
6. **Interakce** – k rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě.
7. **Reprezentace a strukturování** – vyučování je založeno na různých reprezentacích a budování matematického světa, poznatky jsou orientovány a tříděny, vznikají obecnější a abstraktnější pojmy.
8. **Komunikace** – značný význam komunikace ve třídě a pěstování jazyka matematiky, důraz na vyjadřování vlastních myšlenek.
9. **Vzdělávací proces** – hodnocení vzdělávacího procesu probíhá na základě tří aspektů: porozumění matematice (pojmy a jejich souvislosti), zvládnutí matematického řemesla (pravidla a algoritmy) a aplikace matematiky.

10. **Formální poznání** – vyučování založené na předávání informací vede pouze ke krátkodobému uložení informací do paměti bez pochopení souvislostí, jedná se pouze o pseudopoznání.

Dalšími propagátory didaktického konstruktivismu jsou Naďa Stehlíková a Jana Cachová, které ve své publikaci *Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe* [38] uvádějí pět zásad konstruktivistického přístupu ve výuce matematiky. Realizaci těchto zásad rovněž ilustrují na řadě komentovaných příkladů. Jedná se o tyto zásady:

1. Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání.
2. Učitel předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy) a vhodně s nimi pracuje.
3. Učiteli jde především o žákovu aktivní činnost.
4. Učitel nahlíží na chybu jako na vývojové stádium žákova chápání matematiky a impulz pro další práci.
5. Učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění spíše než na reprodukci odpovědi.

Kuřina později začal používat termín **realistický konstruktivismus**, který lépe odpovídá reálným možnostem konstruktivního vyučování a zdůrazňuje možnost transmise určitých partií. Podle Kuřiny není reálné očekávat, že žák dokáže veškeré požadované matematické poznatky zkonstruovat objevováním. Proces porozumění nemusí být nutně spjat s objevováním či dokazováním, ale i s aplikací či nácvikem určitých algoritmů. Vyučování by tedy nemělo být striktně konstruktivistické. Transmisivní přístup může být vhodně využit například v situacích, kdy potřebujeme žákům předat fakta, ze kterých je nutné vycházet. Pro harmonické utváření matematických poznatků by se konstruktivistické a transmisivní přístupy měly navzájem doplňovat [7].

## 4.2.Řešení úloh pomocí heuristických strategii

Dovednost řešit problémy tvoří základ úspěšného matematického vzdělávání. Hledání řešení vybraných problémů pomáhá rozvíjet, zdokonalovat a kultivovat matematické myšlení. Řešení úloh mohou žáci realizovat jedním ze tří způsobů v závislosti na jejich angažovanosti, schopnostech a dovednostech. Nejprimitivnější způsob vypořádání se s úlohou je pokus. Žák se v tomto případě snaží zbavit úlohy co nejrychleji, a tak bez jakýchkoliv úvah odhadne výsledek, a obvykle ani nepožaduje zpětnou informaci o úspěšnosti. Druhý způsob řešení úloh označujeme jako přímý. Je založen na aplikaci naučené znalosti či algoritmu. Žák nejenom požadovaný algoritmus řešení zná, ale je také schopen si uvědomit, že ho má použít, a použije ho [30].

Třetí způsob je řešení užitím heuristických strategií, které jsou založené na zkoumání, objevování, práci s hypotézami, dokazování a usuzování, čímž výrazně přispívají k rozvoji logického myšlení. Proto je představíme podrobněji. Heuristické strategie můžeme definovat jako úvahy, pomocí nichž objevujeme řešení předložených problémů. Tyto úvahy však nezaručují, že získané řešení je opravdu správné. Proto musíme po objevení tohoto řešení ověřit, zda je skutečně pravdivé. Jedná se častokrát o velmi opomíjené způsoby řešení, neboť značná řada pedagogů i učebnic se spíše soustředí na přímý způsob řešení úloh a heuristické strategie jsou častokrát využívány pouze tehdy, když žák nemá požadované znalosti a není schopen úlohu vyřešit pomocí algoritmu [13, 30].

Některé z heuristických strategií jsou relativně jednoduché a žáci je dokonce mohou použít k řešení úloh spontánně, aniž by jim byly předtím ve výuce předkládány k osvojení. Jiné je naopak poměrně obtížné si osvojit a aktivně používat k řešení úloh. Žáci by měli být s těmito strategiemi seznámeni, neboť jejich využití při řešení některých úloh je mnohem efektivnější než využití algoritmu.

Novotná, Eisenmann, Přibyl a Břehovský [4] uvádějí, že důležitým aspektem při řešení úloh není pouze použitá heuristická strategie, ale také způsob jejího použití. Proto zavádějí dvourozměrnou klasifikaci užití heuristických strategií. První rozměr tvoří samotné heuristické strategie a druhý tzv. cesty. Jedná se o cesty **aritmetické**, které vycházejí z číselných způsobů řešení, **algebraické**, ve kterých je zavedena jedna či více neznámých, a **grafické**, které se opírají o grafické znázornění. Nyní uvedeme vybrané heuristické strategie a ilustrujeme jejich využití na konkrétní úloze [4].

**Pokus – ověření - korekce**

Principem této strategie je proces přibližování se k výsledku úlohy, kdy nejprve na základě svých zkušeností odhadneme řešení. Následně ověříme, zda je toto řešení správné. Pokud řešení nevyhovuje zadání, provedeme opravu, která nám vygeneruje nový pokus. Tímto způsobem postupujeme až do nalezení řešení. Odhady a jejich ověření je vhodné pro přehlednost zaznamenávat do tabulky. Ukázkovým příkladem této strategie je písemné dělení víceciferného čísla číslem minimálně dvouciferným. Žák nejprve odhadne, kolikrát je dělitel v dělenci obsažen, pak svůj odhad ověří výpočtem a pokud byl jeho odhad špatný, snaží se o korekci [13].

**Příklad č. 1:** Sportovní obchod obdržel 66 tenisových míčků, které jsou zabaleny ve dvaceti baleních. Některá balení obsahují 2 míčky některá 4 míčky. Kolik je balení po dvou míčcích?

**Řešení příkladu č. 1 metodou pokus – ověření – korekce:** Jak jsme již zmínili, jednotlivé pokusy je vhodné si zaznamenávat do tabulky. V prvním sloupci zaznamenáváme počet balení po dvou míčcích, v druhém počet balení po čtyřech míčcích a ve třetím dopočítáme celkový počet míčků obsažený v obou typech balení. Při jednotlivých pokusech vždy odhadneme počet balení po dvou a po čtyřech míčcích tak, aby byl celkový počet balení 20. Tedy například při našem prvním pokusu volíme 10 balení po dvou a 10 balení po čtyřech míčcích. Následně ověříme náš odhad tak, že dopočítáme celkový počet míčku, tj. 60. Řešení tedy není správné, a tak provedeme korekci tím, že upravíme počty jednotlivých balení. Takto pokračujeme až do doby, než dojdeme ke správnému řešení.

| balení po 2 | balení po 4 | celkem míčků |
|---|---|---|
| 10 | 10 | 20 + 40 = 60 |
| 5 | 15 | 20 + 60 = 80 |
| 8 | 12 | 16 + 48 = 64 |
| 7 | 13 | 14 + 52 = 66 |

*Tabulka 2: Řešení příkladu č. 1 metodou pokus - ověření – korekce*

**Systematické experimentování**

Systematické experimentování je strategie, která spočívá v hledání řešení pomocí určitého systému v provádění pokusů. Na začátku zvolíme vstupní parametry či algoritmy, které systematicky měníme až do chvíle, kdy najdeme správné řešení. Tato strategie je někdy příliš zdlouhavá, proto je vhodné experimenty přehledně zapisovat do tabulky, případně strategii zefektivnit využitím počítače [13].

**Řešení příkladu č. 1 metodou systematického experimentování:** Při této metodě využijeme obdobnou tabulku jako při metodě pokus – ověření – korekce. Tentokrát však počty jednotlivých balení neměníme náhodně, ale postupujeme systematicky. Nejprve vezmeme 1 balení po dvou míčcích a 19 balení po čtyřech míčcích, následně zjistíme, že tyto počty balení nevyhovují zadání, a tak zvýšíme balení po dvou o jedno. Takto systematicky postupujeme do doby, než najdeme řešení vyhovující zadání.

| balení po 2 | balení po 4 | celkem míčků |
|---|---|---|
| 1 | 19 | 2 + 76 = 78 |
| 2 | 18 | 4 + 72 = 76 |
| 3 | 17 | 6 + 68 = 74 |
| 4 | 16 | 8 + 64 = 72 |
| 5 | 15 | 10 + 60 = 70 |
| 6 | 14 | 12 + 56 = 68 |
| 7 | 13 | 14 + 52 = 66 |

*Tabulka 3: Řešení příkladu č. 1 metodou systematického experimentování*

### Analogie

Analogie je určitý druh podobnosti. Pokud řešíme obtížnou úlohu, můžeme se pokusit najít jednodušší analogickou úlohu, která pojednává podobným způsobem o analogickém objektu. Následné vyřešení analogické úlohy nám může pomoci k nalezení řešení původního problému. Analogie může spočívat například v nahrazení kvádru obdélníkem či v nahrazení velkých čísel numericky jednoduššími čísly.

**Příklad č. 2:** Rozhodněte, který zlomek je větší: $\frac{164}{165}$ nebo $\frac{163}{164}$ [4].

**Řešení příkladu č. 2 metodou analogie**: Je zřejmé, že tento typ úloh řešíme převodem na společného jmenovatele. Nicméně v tomto případě by byl tento postup velmi zdlouhavý. Všimněme si, že zadané zlomky jsou ve $\frac{x+1}{x+2}$ a $\frac{x}{x+1}$, a tak je zjednodušme. Čísla 163, 164 a 165, které se ve zlomcích vyskytují, nahradíme postupně čísli 3, 4 a 5. Tím vytvoříme analogickou úlohu: Rozhodněte, který zlomek je větší: $\frac{4}{5}$ nebo $\frac{3}{4}$ . Nyní si snadno uvědomíme, případně výpočtem potvrdíme, že zlomek $\frac{4}{5}$ je větší. Vrácením se k původní úloze zjistíme, že zlomek $\frac{164}{165}$ je větší.

### Přeformulování úlohy

Strategie přeformulování úlohy spočívá v úpravě daného problému na nový, který je pro nás snadnější k řešení a na jehož základě můžeme vyřešit i původní problém.

**Řešení příkladu č. 2 metodou přeformulování úlohy**: Podívejme se na tuto úlohu tak, že zlomek $\frac{164}{165}$ vznikne odebráním $\frac{1}{165}$ z jednoho celku a stejně tak zlomek $\frac{163}{164}$ dostaneme po odebrání $\frac{1}{164}$ z jednoho celku. Nyní můžeme vyslovit přeformulovanou úlohu: Chybí do celku méně, když odebereme $\frac{1}{164}$ nebo $\frac{1}{165}$? Při řešení této nové úlohy si snadno uvědomíme, že zlomek $\frac{1}{165}$ je menší než $\frac{1}{164}$, proto do celku chybí méně, když odebereme $\frac{1}{165}$. (Pokud by pro nás bylo obtížné operovat se zlomky $\frac{1}{164}$ a $\frac{1}{164}$, můžeme opět využít strategie analogie a nahradit je zlomky $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{5}$.) Poté se vrátíme k původní úloze a uvědomíme si, že když do celku chybí menší část, je zlomek větší a na základě této úvahy dojdeme k závěru, že zlomek $\frac{164}{165}$ je větší než $\frac{163}{164}$.

### Konkretizace a zobecnění

Konkretizace a zobecnění jsou v matematice často používané strategie, které se navzájem doplňují. V případě, kdy je před nás postavena obecně zadaná úloha, může nám řešení ulehčit její konkretizace. Nejčastěji se jedná o doplnění konkrétní hodnoty místo obecného vzorce, parametru či obecné situace. Po vyřešení konkrétního problému můžeme úlohu opět zpátky zobecnit a vyřešit původní obecně zadanou úlohu. Jindy naopak můžeme zadaný problém zobecnit, a dostat tak problém, který snadno vyřešíme. Pomocí následné konkretizace pak vyřešíme původní problém [13].

**Příklad č. 3**: Překupník koupil vázu za jednu čtvrtinu její původní ceny a prodal ji za tři pětiny její původní ceny. Jaký zisk v procentech má překupník [19]?

**Řešení příkladu č. 3 metodou konkretizace a zobecnění:** Provedeme konkretizaci úlohy, tedy budeme předpokládat, že původní cena vázy byla 200 Kč. Nyní je zřejmé, že překupník koupil vázu za 50 Kč a prodal ji za 120 Kč. Překupníkův zisk byl 70 Kč. Nyní určíme kolik procent je jeho zisk z pořizovací ceny, tj. kolik je 70 Kč z 50 Kč: $\frac{70}{50} \,.\, 100 = 140$ %. Na základě dalších voleb původní ceny vázy bychom mohli snadno ověřit, že na volbě původní ceny nezáleží, proto můžeme provést zobecnění našeho výsledku, čímž dojdeme k závěru, že překupníkův zisk byl 140 %.

### Cesta zpět

Strategie cesta zpět spočívá v tom, že začínáme cílem, tedy výsledkem, kterého máme dosáhnout. Od tohoto cíle se snažíme krok po kroku dostat k počátečnímu zadání. Tento postup často využíváme při konstrukčních úlohách, kdy předpokládáme, že řešení dané úlohy existuje a má požadované vlastnosti. Zpětným rozborem si postupně uvědomujeme, které kroky si bezprostředně předcházely až do počáteční situace. Obrácením tohoto postupu získáváme řešení úlohy. Dalším typem úloh řešených pomocí cesty zpět jsou slovní úlohy, k jejichž řešení využíváme inverzní operace k operacím uvedeným v zadání úlohy [30].

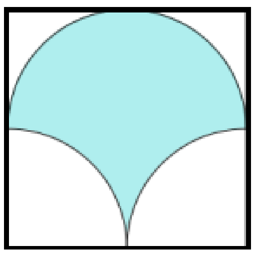
**Příklad č. 4**: Čaroděj má 30 zvířat: kočky, myši a psy. Šest psů proměnil v kočky. Poté proměnil pět koček v myši. Tím čaroděj získal stejný počet psů, koček a myší. Kolik měl původně koček [19]?

**Řešení příkladu č. 4 metodou cesty zpět**: Je dán konečný stav čarodějova počínání. Víme, že na konci měl 10 psů, 10 koček a 10 myší a postupnými inverzními kroky se pokusíme dospět k původním počtům jednotlivých zvířat. Pokud tedy čaroděj proměnil pět koček v myši, inverzním krokem je proměna pěti myší v kočky, čímž získáme: 10 psů, 15 koček, 5 myší. Dalším inverzním krokem je změna šesti koček v psy. Tím se dostaneme k původním počtům zvířat: 16 psů, 9 koček, 5 myší.

**Zavedení pomocného prvku**

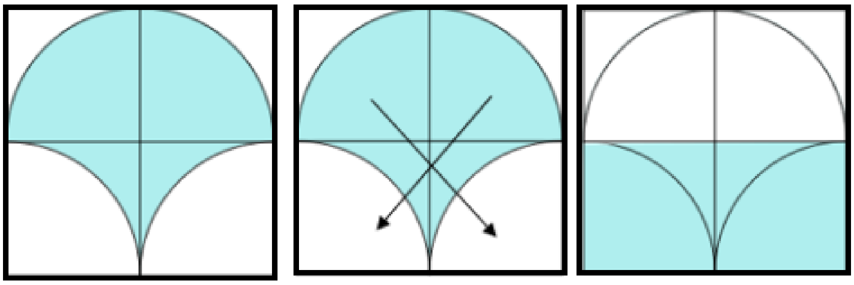
Další strategie spočívá v zavedení pomocného prvku do problémové úlohy s cílem zjednodušit úlohu. Pomocný prvek chápeme jako objekt, který se v původní úloze na první pohled nevyskytuje, ale jeho vložením či zavedením snadněji dosáhneme řešení. U geometrických úloh se obvykle jedná o přímku, úsečku, bod či jednoduchý obrazec, v případě aritmetických či algebraických úloh nejčastěji zavádíme pomocnou proměnnou, číslo či funkci [30].

**Příklad č. 5:** Na obrázku 1 je znázorněný čtverec o délce strany 6 cm a v něm je světle modře vybarvená kapka vytvořená z kruhových oblouků. Vypočítej obsah vybarvené části [17].



*Obrázek 1: Ilustrační obrázek k úloze č. 5*

**Řešení příkladu č. 5 metodou zavedení pomocného prvku:** Úlohu zjednodušíme zavedením dvou pomocných prvků. Do čtverce zakreslíme 2 úsečky, které spojí středy protějších stran čtverce. Tím nám v horní části čtverce vzniknou 2 vybarvené čtvrtkruhy, které jsou shodné se dvěma spodními nevybarvenými čtvrtkruhy. Pokud si tyto čtvrtkruhy přeskupíme, jednoduše zjistíme, že vybarvená část tvoří přesně polovinu čtverce. (Tento postup je znázorněn na obrázku 2.) Nyní snadno spočítáme, že obsah vybarvené části je 18 $cm^2$.



*Obrázek 2: Ilustrace řešení příkladu č. 3*

Heuristické strategie by měli učitelé pravidelně zařazovat do hodin matematiky nejen kvůli rozvoji logického myšlení žáků, ale také proto, že mají motivační charakter. Existuje značné množství úloh, které vybízejí k objevitelským způsobům řešení. Jejich charakteristiku a využití při výuce uvedeme v následující kapitole. Heuristické strategie však můžeme využít i na úlohy, u nichž se očekává spíše řešení formou algoritmu. Ty je vhodné do výuky zařazovat předtím, než se žáci seznámí s potřebným algoritmem. Pokud daný algoritmus již znají, jsou heuristické strategie snadnou cestou, jak diferenciovat výuku. Nadaní žáci se mohou snažit objevit různé další způsoby řešení daného problému, zatímco slabší žáci se soustředí na upevnění algoritmu. Žákům tím také ukážeme, že mnohé úlohy lze řešit více způsoby a rovněž je tím vedeme k tomu, aby se nad způsobem řešení problému zamysleli a nepoužívali bezmyšlenkovitě pouze naučené algoritmy.

## 4.3.Úlohy rozvíjející logické myšlení

Úlohy vedoucí k rozvoji logického myšlení jsou charakteristické tím, že je jejich řešení do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky. Při řešení těchto úloh je zapotřebí uplatnit logické myšlení a úsudek. Jedná se o úlohy, které mohou být pro žáky motivační a které mohou ukazovat školskou matematiku jako zajímavý a přitažlivý předmět.

Klasifikace logických úloh není v současnosti jednoznačně zavedená. Důvodem je obrovská rozmanitost logických úloh a jejich vzájemné prolínání. Vymezením úloh rozvíjejících logické myšlení se zabývá Leontýna Břízová, která ve svém článku [1] uvádí tyto typy úloh: algebrogramy, číselné doplňovačky, magické čtverce, šachovnice, polymina, skládání a dělení obrazců, logické úlohy, hádanky a chytáky, zábavné logické hry, úlohy řešené tabulkou, úlohy řešené grafickou cestou, úlohy řešené pomocí teorie grafů, lháři a poctivci, cesta přes řeku, zebry a hlavolamy.

O rozdělení logických úloh se pokusil Český svaz hádankářů a křížovkářů, který vytvořil tři velmi obsáhlé klasifikace zahrnující obrovské množství různorodých úloh. Jedná se o klasifikace podle formy podání, podle základní operace a podle principu řešení. V této práci ve stručnosti přiblížíme klasifikaci podle principu řešení, ze které vyjdeme při tvorbě vlastního rozdělení úloh rozvíjejících logické myšlení [42].

Klasifikace logických úloh podle principu řešení [42]:

1. **Úlohy s kompletně zadanými prvky bez logických operací**
   *Skrývačka* – hledání objektu v zadaném obrázku.
   *Rozdíly* – hledání rozdílů obvykle mezi dvěma obrázky.
   *Shoda* – hledání totožných objektů.
   *Páry* – hledání odpovídajících si dvojic objektů.
   *Chyba* – hledání věcné chyby či odlišnosti na obrázku.
   *Počítání obrazců* – počítání dílčích obrazců v zadaném obrázku.

2. **Úlohy s kompletně zadanými prvky založené na jejich reorganizaci**
   *Zápalkové úlohy* – přesouvání zápalek tak, aby se získalo požadované aranžmá.
   *Správné pořadí* – uspořádání zpřeházených prvků do správného pořadí.
   *Správné místo* – uspořádání reorganizovaných prvků na správná místa.

3. **Lokalizační úlohy**
   *Zakódované obrázky* – vyhledávání objektů v rastru pomocí soustavy čísel na okrajích obrazce.
   *Miny* – odhalení polohy všech min v rastru na základě políček s čísly, která určují počet min, se kterými políčko sousedí.
   *Strážníci* – rozmístění strážníků na křižovatky tak, aby byly kontrolovány všechny cesty.
   *Šachové figury* – rozmístění zadaných šachových figurek na šachovnici tak, aby byly splněny požadované podmínky.
   *Bludiště* – hledání průchodu z jednoho místa bludiště na druhé.
   *Cesta mezi buňkami* – hledání dráhy jdoucí po čarách rastru, v němž čísla v buňkách značí, kolik úseků čar jde po hranicích příslušné buňky.
   *Fotbal* – hledání dráhy míče, vedené vodorovně, svisle nebo pod úhlem 45° tak, aby si míč vyměnili všichni fotbalisté stejného družstva a poslední dal gól soupeři.

4. **Vývojové řady**

   *Číselné řady* – doplnění členů číselné řady na základě objeveného vztahu.

   *Znakové řady* – hledání vztahů mezi grafickými znaky v zadané řadě a doplnění chybějících členů.

5. **Logicko-matematické úlohy**

   *Algebrogramy* – v soustavě rovnic vyjádřené nečíselnými znaky nahrazujeme znaky číslicemi tak, aby rovnice platily.

   *Hrozny* – číslo v každé bobuli hroznu je vždy součtem sousedících čísel z vyšší řady.

   *Pyramidy* – číslo v každém kameni pyramidy je součtem (součinem) sousedících čísel z nižší řady.

   *Magický čtverec* – doplňování daných čísel do tabulky tak, aby byl součet v řádcích, sloupcích a úhlopříčkách stejný.

6. **Geometrické úlohy**

   *Spojování bodů (objektů) jedním tahem*

   *Nakreslení obrazce jedním tahem*

   *Dělení obrazců* – rozdělování obrazců na stejné části.

   *Rozdělení plochy přímkami* – rozdělení plochy na sektory tak, aby byly splněny dané podmínky, např. aby v každém sektory byl právě jeden puntík.

   *Tangramy* – sestavení požadovaného obrazce ze sedmi daných geometrických tvarů.

   *Pentamina, tetramina, hexamina* – poskládání pentaminových (tetraminových, hexaminových) tvarů do zadaného obrazce tak, aby se nepřekrývaly a pokrývaly celý obrazec.

   *Hrací kostky* – doplňování puntíků na prázdné straně hrací kostky na základě posouzení různých pohledů na kostku.

7. **Úlohy založené na křižování**

   *Kris kros* – umísťování daných slov na správná místa do přiloženého obrazce, tzv. křížovka bez legendy, záleží pouze na křižování znaků.

   *Kakuro* – doplňování čísel do prázdných políček, do dané části řádku či sloupce je třeba doplnit různá čísla 1 až 9 tak, aby jejich součet vždy odpovídal číslu zadanému vlevo od této části řádku (resp. nad touto částí sloupce).

8. **Slovní úlohy**

   *Kryptogramy* – odhalení systému skrytí nebo šifrování a následné dešifrování hesla.

*Zásobník* – ze sloupců zásobníků je třeba vybrat písmena ve správném pořadí tak, aby ve spodní části obrazce vznikla slova určité třídy.

*Posunovačka* – slova na řádcích posouváme tak, abychom ve svislém směru získali tajenkové výrazy.

*Indicie* – hledání slova, které je významově nebo formálně spojeno se skupinou zadaných slov.

*Vetřelec* – odhalení slova, které významově nebo formálně nepatří do dané skupiny slov.

9. **Textové úsudkové a kombinační úlohy**

   *Hádanka* – slovní hříčka, na jejímž základě odhalujeme popisovaný objekt či jev.

   *Zebra* – kombinační úloha, jejímž cílem je přiřadit k sobě jednotlivé prvky (např. jména, příjmení a povolání) na základě zadaných indicií.

   *Detektivka* – odhalení pachatele na základě údajů z daného textu.

   *Poctivci a lháři* – odhalování pravdivých a nepravdivých výroků.

10. **Hlavolamy**

    Problémy či záhady, které jsou založeny na vynalézavosti jejich řešitele.

11. **Optimizery**

    Dynamické logické úlohy s cílem nalézt takové řešení, které odpovídá maximální nebo minimální hledané hodnotě, touto hodnotou může být např. počet tahů, počet bodů, počet prvků…

12. **Herní úlohy**

    Úlohy vycházející z různých herních principů, např. šachové úlohy, karetní úlohy, piškvorky, scrabble…

Nyní navrhneme vlastní klasifikaci úloh, které mají potenciál rozvíjet logické myšlení a jsou využitelné v hodinách matematiky na druhém stupni základní školy. Důvodem tvorby této klasifikace je následné vytvoření přehledné sbírky úloh. Klasifikaci rovněž využijeme v rámci dotazníkového šetření, ve kterém budeme zjišťovat, které typy úloh rozvíjejících logické myšlení učitelé využívají. Prvním krokem při tvorbě této klasifikace byla rešerše úloh v publikacích zaměřujících se na rozvoj logického myšlení [2, 8, 16, 22, 33, 36] a analýza úloh uvedených v klasifikaci Českého svazu hádankářů a křížovkářů [42] a článku od Břízové [1]. Cílem tohoto kroku bylo vytipovat úlohy, které lze zařadit do výuky matematiky. Úlohy jsme vybírali na základě tří kritérií: časová náročnost řešení, schopnost žáků vyřešit úlohu a atraktivita pro žáky. Tato kritéria jsme vyhodnocovali na základě našeho subjektivního názoru založeného na vlastní pedagogické praxi. Tím jsme získali 14 typů úloh rozvíjející logické myšlení. Pro lepší přehlednost jsme těchto 14 typů úloh rozdělili 4 kategorií: slovní úlohy, úlohy založené na objevení a uplatnění vztahů, geometrické úlohy a lokalizační úlohy. Jako kritérium této klasifikace jsem zvolili způsob zadání úlohy, neboť právě ten mají mnohé úlohy podobný. První kategorie úloh se vyznačuje delším slovním zadáním, druhá kategorie obsahuje zadání: „*Objev vztah…*“, třetí kategorie úloh je zadaná pomocí geometrických útvarů a čtvrtá kategorie obsahuje zadání: „*Správně umísti…*“.

Vlastní klasifikace logických úloh využitelných v hodinách matematiky na druhém stupni základní školy:

1. **Slovní úlohy –** kombinatorické úlohy, logické úlohy, algebraické úlohy a zebry.
2. **Úlohy založené na objevení a uplatnění vztahů** – číselné a obrázkové posloupnosti, číselná schémata a algebrogramy.
3. **Geometrické úlohy –** úlohy se sirkami, úlohy jedním tahem, rozdělení obrazce a tangramy.
4. **Lokalizační úlohy –** magické obrazce, správné uspořádání, zabarvovací úlohy.

### 4.3.1. Slovní úlohy

Slovní úlohy jsou verbálně formulované matematické problémy. Jejich řešení je pro mnohé žáky nejnáročnější částí učiva matematiky. Základem úspěšného řešení slovní úlohy je porozumění jejímu zadání a následné přeložení reálné situace vyjádřené běžným jazykem do jazyka matematického. Poté je zapotřebí si uvědomit, jaké početní operace je třeba s danými údaji provést, abychom našli správnou odpověď na otázku slovní úlohy. Při řešení úloh je dobré využívat různá schémata, obrázky či tabulky, které mohou řešení usnadnit [27].

#### Kombinatorické úlohy

Kombinatorika je část matematiky, která se zabývá uspořádáním daných prvků podle zadaných pravidel do určitých skupin. Kombinatorickou úlohou chápeme takový problém, kde je cílem vytváření nejrůznějších konfigurací a schémat. Nejčastěji se jedná o přeuspořádání prvků skupiny, či o výběr prvků z předem určené konečné množiny na základě toho, zda se prvky mohou, či nemohou opakovat a zda záleží či nezáleží na pořadí prvků. V praxi můžeme kombinatoriku využít např. při tvorbě rozvrhu hodin z daných předmětů či při sestavování rozpisu zápasů jednotlivých týmů v rámci hokejového turnaje [31].

Kombinatorika je středoškolské učivo, proto žáci základních škol při řešení těchto úloh nevyužívají kombinatorické vzorce a pravidla, ale řeší úlohy intuitivně. Experimentují prostřednictvím manipulace s danými prvky, nahodile, nebo systematicky hledají možná řešení či využívají grafického znázornění ve formě vhodných schémat. Právě proto jsou kombinatorické úlohy vhodné pro rozvoj logického myšlení žáků.

**Logické úlohy**

Logické úlohy jsou problémy, které vycházejí ze zákonů formální logiky, a při jejichž řešení je třeba správně vyvozovat závěry z daných informací. Formální logika opět není učivem základní školy, a tak žáci tyto úlohy řeší logickým úsudkem. Ke správnému řešení je potřeba důkladné pochopení textu a vztahů mezi jednotlivými objekty vyskytujícími se v úloze a správný úsudek. Logických úloh existuje celá řada, zde se seznámíme pouze s vybranými typy.

Prvním typem jsou tzv. padouši a poctivci. Tyto úlohy jsou o ostrově, na kterém žijí dva druhy lidí – poctivci, kteří vždy mluví pravdu, a padouši, kteří vždy lžou. Obyvatel ostrova je vždy buď poctivec, nebo padouch. Úkolem úlohy je na základě výpovědí obyvatel ostrova vyřešit daný problém, např. najít správnou cestu do města. K tomu je třeba správně určit, kdo je poctivec a kdo padouch, tedy která výpověď je pravdivá a která nepravdivá [1].

Obdobnou úlohou tohoto typu jsou úlohy o Alence v Lese zapomínání, ve kterých Alenka vejde do lesa a zapomene, jaký je den v týdnu. Cestou potkává lva a jednorožce. To jsou zvláštní stvoření. Lev každé pondělí, úterý a středu lže a ostatní dny v týdnu mluví pravdu. Jednorožec lže vždycky ve čtvrtek, v pátek a v sobotu, zato ve zbylé dny v týdnu mluví pravdu. Cílem úlohy je na základě tvrzení lva a jednorožce rozhodnout, ve který den Alenka vešla do lesa [1].

Dalším typem logických úloh je tzv. záhada Porciiných skříněk. Úloha je inspirovaná Shakespearovým dílem Kupec benátský, ve kterém vystupuje dívka Porcie a vlastní 3 skříňky. Do jedné ze skříněk ukryla svoji podobiznu a pokud se některému z jejich nápadníků podaří podobiznu najít, smí se s Porcií oženit. Každá ze skříněk je opatřena nápisem, z nichž vždy nejvýše jeden je pravdivý. Úkolem je přijít na to, ve které skříňce je Porciina podobizna [1].

**Aritmetické úlohy**

Aritmetické úlohy jsou úlohy, k jejichž řešení je třeba provádět vhodné matematické operace se zadanými čísly. Nejedná se ale o klasické matematické příklady, které by ověřovaly, zda žáci umí sčítat, odčítat, násobit a dělit. Stěžejní částí těchto příkladů je objevení správného způsobu řešení, tedy rozhodnutí o tom, které matematické operace použijeme a v jakém pořadí. Ukázkovým příkladem aritmetických úloh jsou inverzně formulované slovní úlohy, ve kterých neznáme výchozí číslo, ale známe výsledek a cestu, kterou se k výsledku dostaneme. K výchozímu stavu se dostaneme řešením pomocí strategie cesta zpět.

**Zebry**

Zebrami nazýváme logické kombinatorické úlohy, které vyžadují správné přiřazování navzájem si odpovídajících prvků z různých množin na základě několika zdánlivě nepostačujících informací. Za zakladatele těchto úloh je považován Albert Einstein, proto jsou také někdy nazývány jako Einsteinova hádanka. Pojmenování zebra je odvozeno od úlohy, která tento typ úloh rozšířila po celém světě a která končila otázkou: Kdo chová zebru?

Tento typ úloh vyžaduje důkladné pochopení zadaného textu a přehledné znázornění daných informací. Při řešení je vhodné využít tabulku, do které zaznamenáme to, co platí tečkou a to, co neplatí křížkem. Další metodou je grafické znázornění, při němž načrtneme trojúhelník (případně čtyřúhelník či pětiúhelník) a na každou jeho stranu zaznamenáme prvky jedné z množin. Pak plnou čárou spojujeme prvky, které k sobě patří, a přerušovanou čárou prvky, které k sobě nepatří. Vycházíme z toho, že každý prvek má být spojen s právě jedním prvkem z každé další množiny. Má-li prvek vyloučeny z nějaké další množiny již všechny prvky až na jeden, musí být spojen právě s ním. Na základě následného správného usuzování bychom měli získat jednoznačné řešení.

### 4.3.2. Úlohy založené na objevení a uplatnění vztahů

Úlohy založené na objevení a uplatnění vztahů spočívají v dosazování číslic, znaků či obrázků do připraveného schématu. Cílem je odhalit pravidlo, které pro schéma platí, a podle něj doplnit chybějící symbol. Postup řešení těchto úloh spočítá v experimentování a nahodilém hledání daného pravidla.

**Číselné a obrázkové posloupnosti**

V případě číselných a obrázkových posloupností je úkolem doplnit následující člen posloupnosti tak, aby posloupnost pokračovala podle daného logického principu. U číselných posloupností se můžeme setkat například se zvětšením, nebo zmenšením následujícího členu o stejné číslo, o jeho násobky či mocniny. Následující člen také může vznikat jako součet či rozdíl dvou předcházejících členů. Obtížné bývá odhalení principu posloupností, které jsou vnořené do sebe, tj. členy posloupností se pravidelně střídají.

**Číselná schémata**

Číselná schémata představují úlohy, ve kterých je rovněž cílem doplnit chybějící číslo podle určitého pravidla. Úlohy bývají obvykle zadané pomocí několika shodných obrazců a v nich vepsaných čísel. V rámci všech obrazců funguje mezi čísly stejný matematický princip. Nejčastěji se jedná o kombinaci různých matematických operací. Úkolem řešitele je odhalit tento princip a na jeho základě doplnit chybějící číslo v neúplném obrazci.

**Algebrogramy**

Algebrogramy jsou matematickými výrazy, ve kterých jsou číslice nahrazeny písmeny, symboly či obrázky. Algebrogramy tvořené písmeny mohou vytvářet celá slova či dokonce věty. Úkolem je dosadit za písmena či obrázky číslice tak, aby matematický výraz dával smysl, tedy aby byl v rovnosti. Při tomto dosazování platí, že za stejná písmena či obrázky dosazujeme stejné číslice 0 – 9 a za různá písmena či obrázky dosazujeme různé číslice.

### 4.3.3. Geometrické úlohy

Geometrické úlohy jsou úlohy, ve kterých manipulujeme s geometrickými útvary a objekty či s jejich modely. Mnozí žáci mají geometrii spojenou pouze s rýsováním různých útvarů, v této práci však představíme úlohy, při kterých není zapotřebí rýsovat. Kromě logického myšlení tyto úlohy rozvíjejí i prostorovou představivost, což je schopnost vnímat objekty ve vzájemném vztahu a schopnost jedince mentálně měnit orientaci objektů ve vztahu s ostatními objekty nebo s ním samotným [39].

**Úlohy se sirkami**

Úlohy se sirkami většinou zahrnují přemístění, odebrání či přidání předem stanoveného počtu zápalek k vytvoření požadovaného obrazce. Kromě geometrických tvarů se v těchto úlohách setkáváme s římskými i arabskými číslicemi, častým chytákem bývá jejich kombinace. Pro usnadnění řešení je vhodné žákům poskytnout sirky či jiné vhodné pomůcky k přímé manipulaci.

**Úlohy jedním tahem**

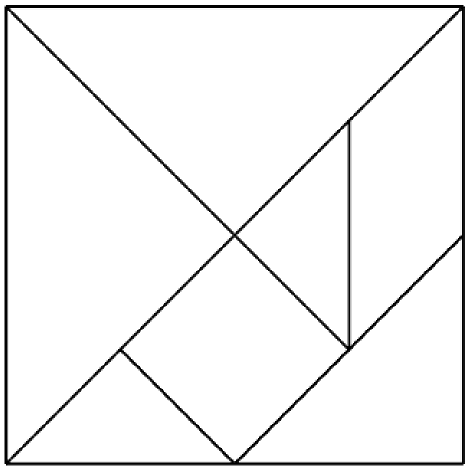
Podstatou úloh jedním tahem je nakreslit zadaný obrazec či spojit dané body tak, abychom od papíru nezvedli tužku a každá čára byla vedena jen jednou, tj. nesmíme kreslit tam, kde už se kreslilo. Povolené je pouze křížení čar.

**Rozdělení obrazce**

Tento typ úloh spočívá v rozdělení zadaného útvaru na menší díly podle stanovených pravidel, například tak, aby všechny menší díly byly totožné. Dalším pravidlem může být rozdělení obrazce pomocí daného počtu přímek tak, aby v každém menším dílku byl stejný počet objektů.

**Tangram**

Tangram je čínský hlavolam, který tvoří čtverec rozdělený na sedm dílů. Jedná se o dva stejně velké trojúhelníky, jeden střední a dva malé trojúhelníky, jeden čtverec a jeden lichoběžník. Z dílů tangramu lze kromě čtverce sestavit řada zajímavých útvarů, např. různá zvířata či předměty z běžného života. Při skládání hlavolamu vycházíme z obrysové předlohy, která nám určuje, jak má výsledný tvar vypadat. Podstata tangramu spočívá v tom, že z předlohy není zřejmé, jak jednotlivé díly situovat, abychom získali výsledný tvar. K jeho složení je vždy zapotřebí všech sedm dílů, které nesmí být přeloženy přes sebe.



*Obrázek 3: Díly tangramu*

### 4.3.4. Lokalizační úlohy

Lokalizační úlohy spočívají v umístění číslic, písmen či zadaných objektů na správné pozice na základě stanovaných indicií. Existuje celá řada úloh, které mají za cíl správně umístit číslice či písmena do čtvercové sítě. Mnohé tyto úlohy však řadíme spíše k rekreačním, jelikož se často objevují v křížovkářských sbornících a jejich řešení je mnohdy časově náročné. Jedná se např. o sudoku, karuko či kris-kros. V této diplomové práci představíme lokalizační úlohy, jejichž řešení není časově náročné a které jsou snadno zařaditelné do hodin matematiky.

**Magické obrazce**

Magické obrazce jsou nejčastěji využívanou lokalizační úlohou ve výuce. Obzvláště pak magické čtverce se hojně objevují i v matematických učebnicích. Magický čtverec je tvořen čtvercovou sítí o rozměrech $n$ x $n$. Úkolem je vyplnit tuto síť po sobě jdoucími přirozenými čísly tak, aby součet čísel ve všech řádcích, sloupcích i obou úhlopříčkách byl stejný, rovný tzv. magické konstantě. Na stejném principu fungují i jiné magické obrazce. Např. rovnostranný trojúhelník, na jehož strany je třeba rozmístit zadaná přirozená čísla tak, že u každého vrcholu bude jedno číslo, u každé strany mezi vrcholy budou další dvě čísla a bude platit, že součet všech čtveřic čísel při stranách trojúhelníku si je roven.

**Správné uspořádání**

Tento typ úloh se skládá z několika objektů či symbolů, které je třeba uspořádat podle zadaných nápověd. Žáci prostřednictvím těchto úloh často dochází k poznání, že k vyřešení úlohy nepostačuje uchování nápověď v paměti, ale že je třeba nápovědy přehledným způsobem zaznamenat a následně z nich vyvozovat nové závěry. Dalším typem těchto úloh jsou úlohy, jejichž cílem je správně umístit dané objekty do rastru na základě daných pravidel či indicií zadaných nejčastěji pomocí číslic v rastru. Nejznámějším příkladem těchto úloh je tzv. hledání min, které mohou žáci znát ve verzi počítavé hry. Cílem této hry je odhalit všechna políčka obsahující minu či odkrýt všechna políčka, která minu neobsahují.

**Zabarvovací úlohy**

Cílem těchto úloh je vybarvit některá políčka rastru na základě číslic nacházejících se přímo v rastru či na jeho krajích. Nejznámějším příkladem jsou tzv. zakódované obrázky skládající se nejčastěji z čtvercové mřížky, okolo které je umístěna legenda s čísly, pomocí nichž lze získat obrázek. Každé číslo v legendě určuje počet za sebou následujících čtverečků stejné barvy v daném řádku či sloupci. Nejčastěji se můžeme setkat s černobílými obrázky, ve kterých čísla v legendě reprezentují počet za sebou následujících čtverečků černé barvy.

# 5. Teorie k výzkumné části

## 5.1. Didaktický test

Didaktický test chápeme jako nástroj objektivního a systematického zjišťování úrovně osvojených vědomostí, získaných dovedností a myšlenkových schopností žáka. Od ostatních způsobů ověřování zvládnutí učiva se didaktický test liší tím, že je navrhován, ověřován, hodnocen a interpretován podle předem stanovených pravidel.

V pedagogických výzkumech se můžeme setkat s didaktickými testy různého druhu, z nichž každý má své specifické vlastnosti. Přehled klasifikací didaktických testů uvedeme v tabulce 4 a následně vybrané druhy podrobněji charakterizujeme.

| KLASIFIKAČNÍ HLEDISKO | TESTY | | |
|---|---|---|---|
| měřená charakteristika výkonu | rychlosti | úrovně | |
| dokonalost přípravy testu a jeho příslušenství | standardizované | kvazistandardizované | nestandardizované |
| povaha činnosti testovaného | kognitivní | psychomotorické | |
| míra specifičnosti učení zjišťovaného testem | výsledků výuky | studijních předpokladů | |
| interpretace výkonu | rozlišující (relativního výkonu) | ověřující (absolutního výkonu) | |
| časové zařazení do výuky | vstupní | průběžné (formativní) | výstupní (sumativní) |
| tematický rozsah | monotematické | polytematické (souhrnné) | |
| míra objektivity skórování | objektivně skórovatelné | kvaziobjektivně skórovatelné | subjektivně skórovatelné |

*Tabulka 4: Přehled klasifikace didaktických testů [35]*

**Testy rychlosti** zjišťují, jakou rychlostí je žák schopen řešit určitý typ úloh. Obvykle se jedná o snadné úlohy řešitelné všemi žáky. **Testy úrovně** upouštějí od sledování času, který žák potřebuje na zvládnutí úloh, a zaměřují se na úroveň vědomostí a dovedností žáka.

**Standardizované testy** jsou obvykle připravovány specializovanými institucemi a jejich vlastnosti jsou důkladně ověřovány na rozsáhlém vzorku žáků. Součástí příslušenství testu je testová příručka, která informuje o vlastnostech testu a jeho správném použití. **Nestandardizované testy** jsou připravovány učiteli pro jejich vlastní potřebu. Jedná se o testy, u kterých neproběhlo ověřování na větším vzorku žáků. **Kvazistandardizované testy** tvoří jakýsi mezistupeň mezi oběma výše uvedenými druhy. Jedná se o testy, které jsou připravovány důkladněji než testy nestandardizované, ale zároveň u nich neproběhlo dostatečně kvalitní ověřování jejich vlastností. Jedná se např. o srovnávací ročníkové testy, které jsou předkládány určitému ročníku na vícero školách [10].

**Testy objektivně skórovatelné** se skládají z úloh, u kterých lze jednoznačně rozhodnout, zda byly vyřešeny správně. Zahrnují např. úlohy, kde žák vybírá jednu či více správných odpovědí. **Testy subjektivně skórovatelné** obsahují úlohy, u nichž nelze stanovit jednoznačná pravidla pro skórování. Patří mezi ně úlohy, kde žák odpovídá vlastní rozsáhlou odpovědí [10].

Každý didaktický test je sestaven z **testových úloh** označovaných také jako testové položky. Podle způsobu, jakým žák v testové úloze odpovídá, lze rozlišit úlohy otevřené a úlohy uzavřené. Oba typy úloh lze dále ještě rozdělit.

**Otevřené úlohy:**

- **otevřené široké úlohy** – požadují vlastní rozsáhlejší odpověď,
- **úlohy se stručnou odpovědí** – požadují vlastní krátkou odpověď.

**Uzavřené úlohy:**

- **úlohy s výběrem odpovědí** – nabízejí několik odpovědí, z nichž může být jedna odpověď správná či více odpovědí správných,
- **úlohy dichotomické** – nabízejí dvě alternativy odpovědi, z nichž právě jedna je správná,
- **přiřazovací úlohy** – přiřazování pojmů z jedné množiny k pojmům druhé množiny,
- **uspořádací úlohy** – uspořádání zadaných prvků množiny podle jistého hlediska (chronologicky, podle velikosti…) [10].

Prvním krokem při plánování testu je rozhodnutí, k jakému účelu má test sloužit. Následným krokem je určení obsahu, který je třeba specifikovat tak, aby bylo zřejmé, jaký obsah mají jednotlivé úlohy zkoušet a na jakou úroveň osvojování vědomostí se mají zaměřovat. Poté můžeme přejít k samotné konstrukci testu, která zahrnuje návrh testových úloh a jejich uspořádání. Následně je vhodné, aby navržené úlohy posoudili další odborníci, případně aby se autor k úlohám vrátil po delším časovém odstupu a úlohy znovu posoudil. Na základě vlastního posouzení a doporučení odborníků provede autor závěrečnou úpravu testu.

Pokud autor vytváří standardizovaný didaktický test, je třeba ověřit jeho vlastnosti na přiměřeně velkém vzorku testovaných osob. Při tomto ověřování se provádí analýza vlastností testových otázek i analýza vlastností testu jako celku. Obě analýzy charakterizujeme velmi stručně, neboť didaktický test vytvoření v této práci nebude standardizovaný.

Analýza vlastností testových otázek zahrnuje obtížnost a citlivost testových úloh a analýzu nenormovaných odpovědí. Citlivost úloh udává, do jaké míry úlohy zvýhodňují testované osoby s lepšími vědomostmi před osobami s horšími vědomostmi. Analýza nenormovaných odpovědí představuje rozbor vynechaných či nesprávných odpovědí. Analýza vlastností testu jako celku zahrnuje validitu a reliabilitu didaktického testu. Validita testu posuzuje, zda test ověřuje skutečně to, co má být ověřováno. Reliabilita testu posuzuje jeho spolehlivost a přesnost [10, 35].

## 5.2. Dotazníkové šetření

Dotazníkové šetření je jednou z nejfrekventovanějších kvantitativních metod pedagogického výzkumu. Dotazník chápeme jako **soustavu písemně připravených, pečlivě formulovaných a promyšleně seřazených otázek**, na které dotazovaná osoba odpovídá písemně. Jedná se o metodu, která umožňuje získat značné množství informací od většího počtu respondentů za krátký časový úsek. Dotazníkovému šetření bývá častokrát oprávněně vytýkáno to, že nezjišťuje pedagogickou realitu objektivně. Výsledky šetření mohou být ovlivněny tím, jak respondenti pedagogickou realitu vidí, nebo jak chtějí, aby byla viděna [10].

Jednotlivé části dotazníku, pomocí nichž získáváme potřebná data, se nazývají **položky**. Ne vždy se jedná o otázky, položky mohou mít formu i oznamovací či rozkazovací věty. Položky dotazníku můžeme třídit podle řady kritérií, např. podle cíle, pro který je položka určena, podle formy požadované odpovědi či podle obsahu, který položka zjišťuje.

Položky podle cíle, pro který jsou určeny:

- **obsahové** – zjišťují údaje naplňující záměr výzkumu,
- **funkcionální** – zajišťují plynulý průběh dotazování, patří mezi ně položky:
    - **kontaktní** – utváří kontakt mezi respondentem a autorem dotazníku, uvádějí respondenta do obsahu problematiky daného dotazníku,
    - **funkcionálně psychologické** – odstraňují napětí u respondenta, vedou k přeorientování na jiné téma či odstranění stereotypních postojů,
    - **filtrační** – vyřazují respondenty, kteří nemají pro výzkum význam,
    - **kontrolní** – prověřují věruhodnost odpovědí [10].

Položky podle formy požadované odpovědi:

- **otevřené (nestrukturované)** – dávají respondentovi prostor k vlastnímu vyjádření, neobsahují žádné předpřipravené odpovědi, obtížně se vyhodnocují,
- **uzavřené (strukturované) –** nabízejí respondentovi varianty odpovědí, ze kterých je nucen si vybrat,
- **polouzavřené** – nabízejí výčet možných odpovědí a zároveň dávají respondentovi možnost napsat vlastní odpověď.

Položky podle obsahu, který položky dotazníku zjišťují:

- **položky zjišťující fakta,**
- **položky zjišťující znalosti či vědomosti,**
- **položky zjišťující mínění, postoje a motivy.**

Při konstrukci dotazníku je třeba se držet řady zásad a vyvarovat se základním chybám, které by mohly vést k nepochopení obsahu jednotlivých položek respondentem. Všechny položky by měly být **formulovány jednoznačně a srozumitelně** pro všechny respondenty a zároveň by měly být stručné. Rovněž nesmějí být návodné, tedy nesmějí napovídat respondentovi, jak má odpovědět. Před provedením dotazníkového šetření je vhodné provést předvýzkum, ve kterém předložíme navržený dotazník alespoň 30 respondentům, a na základě těchto výsledků dotazník naposledy upravíme.

Dotazník je složen ze tří částí: vstupní, hlavní a závěrečné části. Ve vstupní části bychom se měli respondentovi představit a vysvětlit mu, proč by měl dotazník vyplnit, a k čemu budou získaná data použita. Hlavní část dotazníku již obsahuje samotné položky. Zpočátku dotazníku volíme identifikační otázky, pomocí nichž zjišťujeme informace o respondentovi – pohlaví, věk, délka praxe, místo bydliště, nejvyšší dokončené vzdělání. Následují otázky vztahující se k výzkumu. Závěrečnou část tvoří poděkování [35].

Dotazník můžeme distribuovat respondentům třemi způsoby: poštou, osobně či prostřednictvím dalších osob. Nejvyšší návratnosti docílíme osobním předání. Návratnost lze rovněž zvýšit anonymitou respondenta, která také přispívá k získání pravdivějších údajů. Po shromáždění vyplněných dotazníků je vhodné získaná data zkontrolovat a vyloučit dotazníky, které jsou nesprávně či neúplně vyplněny. Posledním krokem dotazníkového šetření je analýza a interpretace získaných dat pomocí tabulek a grafů [35].

# PRAKTICKÁ ČÁST

## 6. Sbírka úloh rozvíjejících logické myšlení

Sbírka předkládá úlohy, které mají potenciál rozvíjet logické myšlení žáků na druhém stupni základní školy. Je určena pro učitele. Úlohy jsou uspořádány podle vlastní výše navržené klasifikace. Každé úloze je přidělena obtížnost, časová náročnost, správný výsledek a didaktický komentář, který obsahuje komentář k řešení, možná úskalí, časté chyby či návrhy různých modifikací. Některé komentáře také obsahují odkaz na webovou stránku, která umožňuje řešit danou úlohu online či nabízí její různé obdoby.

S ohledem na vývoj logického myšlení v průběhu dospívání, dělíme úlohy na dvě skupiny podle příslušnosti k věku. Úlohy vhodné pro žáky 6. – 7. ročníku a úlohy pro žáky 8. – 9. ročníku. Pro přehlednost označuje úlohy pro žáky 6. – 7. ročníku hvězdami a úlohy pro žáky 8. – 9. ročníku květy. V každé z těchto skupin dále rozdělujeme úlohy do tří úrovní podle jejich obtížnosti. Lehké úlohy jsou určeny i pro slabší žáky, středně těžké úlohy by měli zvládnout průměrní žáci a velmi těžké úlohy jsou určeny pro žáky nadané. Rozřazení úloh do jednotlivých skupin jsme provedli na základě jejich didakticko-psychologických vlastností plynoucích ze zadání úloh. Označení náročnosti úloh uvádíme v tabulce 5.

| | 6. – 7. ročník | 8. – 9. ročník |
|---|---|---|
| lehké úlohy | ★ | ✿ |
| středně těžké úlohy | ★ ★ | ✿ ✿ |
| velmi těžké úlohy | ★ ★ ★ | ✿ ✿ ✿ |

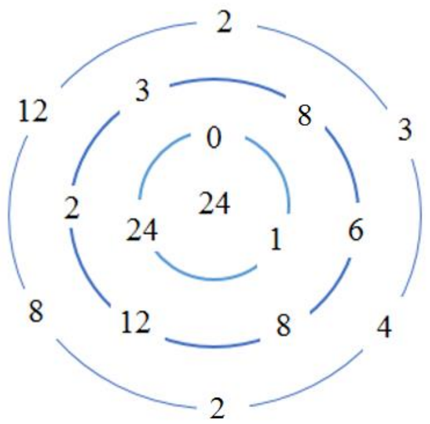
*Tabulka 5: Náročnost úloh*

Úlohy lze ve výuce využívat jako matematické rozcvičky. Mají aktivizační charakter a jejich zařazení do hodiny zabere pouze pár minut. Úlohy lze také snadno předkládat žákům, kteří již mají splněnou zadanou práci. Většina úloh lze snadno diferenciovat, proto je možné je žákům zadávat na individuální úrovni. Sbírka úloh je rovněž vhodným zdrojem, pokud se chceme věnovat nestandardním úlohám. Z úloh je možné snadno vytvořit pracovní list pro případ náhlého využití například v suplovaných hodinách. Úlohy se nevztahují k žádnému tématu, proto je možné je do výuky zařadit kdykoliv.

## 6.1. Slovní úlohy

### 6.1.1. Kombinatorické úlohy

**Úloha 1: Na obrázku je plán labyrintu. Každý průchod (otvor) je označen číslem. Procházíš-li otvory, násobíš postupně čísla, s nimiž se setkáš. Do středu labyrintu se dostaneš, získáš-li číslo 24. Kolik je způsobů, jak se můžeš dostat do středu labyrintu?** (inspirováno [2])




*Obrázek 4*

Obtížnost: 

Časová náročnost: 3 min

Řešení: 7 způsobů

Komentář: Jedná se o kombinatorickou úlohu, ve které si žáci mohou uvědomit komutativnost násobení a vliv násobení nulou a jednou. Při řešení je důležité si uvědomit, že v nejmenší kružnici můžeme využít pouze průchod s číslem 1, které hodnotu výsledku násobení nezmění. Stačí tedy hledat ve dvou zbývajících kružnicích otvory s čísly, jejichž součin je 24. Největší obtíží může být objevení cest, které mají stejnou číselnou kombinaci. Např. cestu s číselnou kombinací 3 – 8 – 1 můžeme využít dvakrát, protože prostřední kružnice obsahuje dva otvory s číslem 8. Úlohu lze snadno ztížit výměnou čísel 0 a 24 za čísla 2 a 3. Pro využití úlohy v 8. – 9. ročníku lze přirozená čísla nahradit desetinnými čísly, zlomky či výrazy s neznámými.

**Úloha 2**: **Moderátor pozval do svého televizního pořadu 5 hostů. Všichni hosté včetně moderátora si navzájem podali ruce. Kolik stisknutí rukou to bylo celkem?**

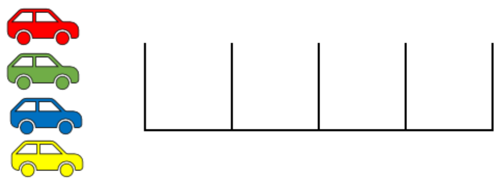
Obtížnost:

Časová náročnost: 5 min

Řešení: 15 stisknutí

Komentář: Tuto kombinatorickou úlohu je vhodné řešit pomocí obrázku. Načrtneme 6 osob a systematicky zakreslujeme, s kým si podávají ruce. Moderátor si podá ruku se všemi hosty (5 stisknutí), první host si podá ruku již pouze se 4 hosty, protože s moderátorem si již podal, druhý host si podá ruku se 3 hosty, atd… K častý chybám patří zapomenutí na moderátora (žák počítá podání rukou 5 osob), či započítání některých stisknutí dvakrát. Mnozí žáci mohou mít mylnou představu, že když každá osoba podá ruku pětkrát a osob je celkem 6, určíme počet stisknutí $5 \cdot 6 = 30$. Tuto mylnou úvahu je třeba vyvrátit pomocí obrázku, či danou situaci s žáky sehrát ve třídě.

**Úloha 3**: **Na parkovišti jsou 4 parkovací místa. Současně na parkoviště přijedou 4 různá auta – červené, modré, zelené a žluté. Kolika způsoby mohou auta na místa zaparkovat?**



*Obrázek 5*

Obtížnost:

Časová náročnost: 5 min

Řešení: 24 způsobů

Komentář: Tato úloha rozvíjí schopnost žáka hledat efektivní cestu k řešení problému. Systematické zaznamenávání všech 24 možných kombinací je zdlouhavé a žák při něm může snadno chybovat, proto doporučujeme řešení zjednodušit následující úvahou. Pokud první auto zaparkujeme na jakékoliv pevné místo, vždy získáme 6 způsobů, jak zaparkovat ostatní auta. Těchto 6 způsobů snadno zjistíme pomocí obrázku, do kterého zakreslíme všechny možné kombinace. Protože pevné místo pro první auto můžeme vybrat ze čtyřech míst, určíme celkový počet možností výpočtem $6 \cdot 4 = 24$. Nápověda, kterou můžeme žáky navést k řešení: *Když zaparkujeme červené auto na první místo, kolika způsoby mohou zaparkovat zbylá tři auta? Jak se situace změní, když červené auto zaparkujeme na druhé, třetí či čtvrté místo?* Úlohu lze snadno diferenciovat, v rámci jednodušší varianty manipulujeme se třemi auty na třech parkovacích místech, v rámci těžší varianty s pěti auty na pěti místech.

**Úloha 4: Hokejový zápas skončil výsledkem 3 : 2. Zjisti, kolik různých průběhů mohl zápas mít.**

Obtížnost: ✿ ✿

Časová náročnost: 5 min

Řešení: 10 způsobů

Komentář: Úloha rozvíjí kombinatorické myšlení žáků. Ke správnému vyřešení vede systematické zaznamenávání jednotlivých průběhů. V rámci motivace doporučujeme využít skóre z reálného utkání, které žáci sledovali nebo se ho účastnili. Je však třeba mít na paměti, že s rostoucím počtem gólů u obou týmů vzrůstá náročnost úlohy.

### 6.1.2. Logické úlohy

**Úloha 5: Odpověz na otázky na základě daných tvrzení.**

1. **Všichni Lukášovi domácí mazlíčci mají 4 nohy.**
   **Žádný papoušek nemá čtyři nohy.**
   **Má Lukáš papouška jako domácího mazlíčka?**
   **a) ano** **b) ne** **c) nelze rozhodnout**

2. **Pokud je toto pokoj číslo 9, pak jsme ve čtvrtém patře.**
   **Toto není pokoj číslo 9.**
   **Jsme ve čtvrtém patře?**
   **a) ano** **b) ne** **c) nelze rozhodnout**

3. **Všechna tato auta vlastní osoby, které znám.**
   **Znám Markovu sestru.**
   **Vlastní Markova sestra některé z těchto aut?**
   **a) ano** **b) ne** **c) nelze rozhodnout**

Obtížnost: ★ ★

Časová náročnost: 5 min

Řešení: 1. b) ne

2. c) nelze rozhodnout

3. c) nelze rozhodnout

Komentář: Úlohy vycházejí z výrokové logiky jsou však založeny na konkrétnosti a názornosti, tudíž by je měli být schopni řešit i žáci, kteří se podle Piagetovy kognitivní teorie stále nacházejí ve fázi konkrétních operací. Úlohy je třeba pozorně číst a následně řešit logickým úsudkem. Pro lepší názornost je možné si dané situace nakreslit.

**Úloha 6: Zebra lže pouze v pondělí, úterý a středu. Šimpanz lže pouze ve čtvrtek, pátek a sobotu. Mauglí se ptal zebry a šimpanze, jaký je den. Zebra řekla: „*Včera byl jeden z mých dnů, kdy lžu.*“ Šimpanz odvětil: „*Včera byl jeden z mých prolhaných dnů.*“ Který den se Mauglí ptal?** (inspirováno [20])

Obtížnost: ★ ★

Časová náročnost: 5 min

Řešení: ve čtvrtek

Komentář: Úloha rozvíjí schopnost žáka zamýšlet se nad důsledky vyřčených tvrzení. Úlohu doporučujeme řešit pomocí tabulky s jednotlivými dny v týdnu. Červeně označíme dny, kdy zvířata lžou. Poté vyznačíme, kdy mohli šimpanz a zebra prohlásit daná tvrzení.

| | pondělí | úterý | středa | čtvrtek | pátek | sobota | neděle |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| zebra | ● | | | ● | | | |
| šimpanz | | | | ● | | | ● |

*Tabulka 6*

**Úloha 7: Je dáno 9 stejně vypadajících kovových koulí a rovnoramenná váha. Osm z těchto koulí má přesně stejnou hmotnost a poslední je o něco málo lehčí. Rukou se hmotnostní rozdíl nedá poznat. Jak pomocí dvou vážení na rovnoramenné váze zjistíte, která koule je lehčí?** (inspirováno [16])

Obtížnost: ★ ★ ★

Časová náročnost: 10 min

Řešení: 1. vážení: 3 + 3 koule (zbylé tři dáme stranou). Pokud je jedna trojice koulí lehčí, obsahuje lehčí kouli. Pokud je váha v rovnováze, lehčí koule je mezi třemi zbylými. Tímto určíme trojici koulí, ve které je lehčí koule.

2. vážení: 1 + 1 koule (zbylou dáme stranou)

Lehčí koule se prokáže ve vážení, v případě rovnováhy je lehčí vyřazená koule.

Komentář: Úloha vede žáky k objevování cesty řešení a rozvíjí jejich vytrvalost při řešení problému. Žákům je třeba zdůraznit, že úloha je opravdu řešitelná a neskrývá se v ní žádný podvod. Možná nápověda: *Rozdělte koule na tři stejné díly.* Problémem může být to, že žáci neznají dvouramennou váhu, proto je vhodné ji přinést do hodiny, či ji žákům promítnout a vysvětlit, jakým způsobem funguje.

**Úloha 8: Dvě mince dávají dohromady 3 Kč, i když jedna z nich není koruna. Co je to za mince?** (inspirováno [16])

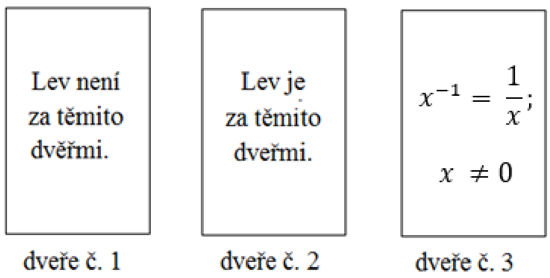
Obtížnost:

Časová náročnost: 2 min

Řešení: koruna a dvoukoruna

Komentář: Úloha je založena na správném pochopení formulace: „*jedna z nich není koruna*“. Žáci by si měli uvědomit, že formulace omezuje jednu minci, ale o druhé nic neříká. K tomuto pochopení je můžeme navést obdobnou úlohou: *Anička má dvě zvířata, jedno z nich není kočka? Je možné, že má Anička kočku?*

**Úloha 9: Za jedněmi dveřmi je lev. Na každých dveřích je napsán výrok, z nichž nejvýše jeden je pravdivý. Za kterými dveřmi je lev?** (inspirováno [19])




*Obrázek 6*

Obtížnost:

Časová náročnost: 3 min

Řešení: dveře č. 1

Komentář: Úloha rozvíjí žákovu schopnost určit pravdivostní hodnotu výroku i vytvořit a porozumět jeho negaci. Obtížnost úlohy lze měnit pomocí tvrzení na posledních dveřích, kam je možné umístit jakýkoliv pravdivý výrok. Tím docílíme propojení výrokové logiky s jakýmkoliv aktuálně probíraným učivem. Např. pro šestý ročník můžeme využít tato tvrzení: *Číslo 697 045 je dělitelné 9. Číslo 89 je prvočíslo. Součet velikostí vedlejších úhlů je 180°.*

**Úloha 10: Přeneseme se na ostrov, na kterém žijí 2 typy lidí – poctivci, kteří mluví vždy pravdu, a padouši, kteří vždy lžou. Každý obyvatel ostrova je buď poctivec, nebo padouch. Mezi obyvatele ostrova patří i Adam a Marek, kteří se vyskytují v následujících úkolech.**

**a) Adam prohlásí: „*Marek je padouch*.“**
**Marek odpoví: „*Oba jsme padouši.*“**
**Urči, kdo je padouch a kdo poctivec.**

**b) Adam říká: „*Aspoň jeden z nás je poctivec*.“**
**Marek říká: „*Adam je padouch*.“**
**Urči, kdo je padouch a kdo poctivec.**

(inspirováno [36])

Obtížnost:

Časová náročnost: 10 min

Řešení: a) Adam je poctivec, Marek je padouch.
b) Adam je poctivec, Marek je padouch.

Komentář: Jedná se o velmi náročné úlohy, které doporučujeme předkládat pouze vybraným žákům a dopřát jim k řešení dostatek času a klidu. Při řešení žáci rozvíjejí schopnost zamýšlet se nad důsledky pravdivostních hodnot jednotlivých tvrzení. Jsou nuceni stanovovat předpoklady a pomocí daných tvrzení je ověřovat. Pro kontrolu je možné rozhovory sehrát. Poctivec si vezme zelenou fixu, padouch červenou, abychom je lépe rozeznali, a postupně říkají své repliky a třída kontroluje, zda jsou v souladu s jejich postavou, tedy jestli je jejich replika pravda, či nepravda.

### 6.1.3. Aritmetické úlohy

**Úloha 11: Na prádelní šňůře visí 10 kapesníků. Je takové teplo, že jeden kapesník uschne za čtvrt hodiny. Za kolik minut uschnou všechny kapesníky?**

Obtížnost:

Časová náročnost: 2 min

Řešení: 15 minut

Komentář: Jedná se o velmi jednoduchou praktickou úlohu, při které však mohou mnozí žáci chybovat, neboť jsou zvyklí ve slovních úlohách hledat číselné hodnoty a s nimi provádět matematické operace. V tomto případě je třeba žáky vést k tomu, aby si situaci představili ve své mysli, případně ji i načrtli a díky tomu získali potřebný vhled – všechny kapesníky schnou najednou. Další chybou může být zapomenutí na převod jednotek.

**Úloha 12: Na babiččinu zahrádku chodí škodit slimáci. Každý den se jich tam objeví dvakrát víc než předchozí den. Dnes je středa a na záhonu je 16 slimáků. Který den v týdnu byl na zahrádce jen jeden slimák?** (inspirováno [33])

Obtížnost:

Časová náročnost: 5 min

Řešení: v sobotu

Komentář: Jedná se o inverzně formulovanou slovní úlohu, kterou je vhodné řešit pomocí heuristické strategie zvané cesta zpět. Stěžejní je uvědomění si inverzní operace k operaci dvakrát více. Žáci pravděpodobně snadno přijdou na to, že se jedná o operaci dvakrát méně, nicméně mohou váhat, zda se jedná o dělení dvěma či odečtení dvou. Toto rozhodování jim usnadní vrácení se k původní operaci – dvakrát více. Jedná se o násobení, tudíž inverzní operací je dělení. Úlohu je také možné řešit pomocí strategie pokus-ověření-korekce, při které žáci odhadnou den, kdy byl na zahrádce jen jeden slimák a každý další den počet slimáků patřičně zvyšují. Následně rozhodnou, zda byl jejich odhad správný či nikoliv. Úlohu doporučujeme řešit pomocí tabulky.

| **den** | Pá | So | Ne | Po | Út | St |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **počet slimáků** | | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |

*Tabulka 7*

**Úloha 13: Součet věků skupiny dětí je 36 let. Za dva roky bude součet jejich věků 60 let. Kolik dětí je v této skupině?** (inspirováno [20])

Obtížnost:

Časová náročnost: 5 min

Řešení: 12 dětí

Komentář: Pro žáky může být náročné si uvědomit, čemu je roven počet dětí. K tomu je možné je navést jednodušší úlohou: *Součet věků dvou bratrů je 10 let, o kolik let se tento součet změní za rok? Co kdyby bylo bratrů pět? Jak se za rok změní součet jejich věků?*

**Úloha 14: Erik má doma dvoje hodiny. Jedny se každou hodinu předbíhají o jednu minutu a ty druhé se každou hodinu zpožďují o dvě minuty. Erik včera oboje hodiny nastavil na správný čas. Právě teď první hodiny ukazují čas 11.00 a druhé 12.00. Kdy je Erik včera nastavil?** (inspirováno [20])

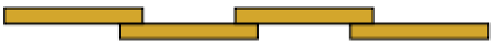
Obtížnost:

Časová náročnost: 5 min

Řešení: 15:40

Komentář: Úloha rozvíjí žákovo vnímání složitosti reálného světa a jeho zkušenosti s matematizací reálných situací. Hlavním úskalím této úlohy je určení správného aktuálního času. Proto je nutné si uvědomit, v jakém poměru se časy na hodinách mění. Mezitím, co se první hodiny přesunou o 1 minutu vpřed, druhé se přesunou o 2 minuty vzad, ke změně času tedy dochází v poměru 1 : 2. Pro mnohé žáky je přijatelnější vyjádření, že zrychlení času na druhých hodinách je vždy dvojnásobkem zpoždění na prvních hodinách. Časový rozdíl na hodinách je 60 minut. To znamená, že první se předběhly o 20 minut a druhé zpozdily o 40 minut. Správný čas je tedy 11:40. Nyní již snadno určíme, že Erik hodiny nastavoval před 20 hodinami, tedy v 15:40.

**Úloha 15: Pavel chce vyrobit nový plot z 25 desek, z nichž každá je dlouhá 1,5 m. Desky chce poskládat tak, aby mezi dvěma sousedními deskami bylo shodné mírné překrytí (na obrázku v pohledu shora). Kolika centimetrové překrytí má zvolit, aby mu 25 desek přesně vystačilo na 36,3 m dlouhý plot?**



*Obrázek 7*

Obtížnost:

Časová náročnost: 10 min

Řešení: 5 cm

Komentář: Úloha rozvíjí schopnost matematizace jednoduchých reálných situací. Nejnáročnějším krokem je určit, kolik překrytí musí Pavel na plotě udělat. To mohou žáci zjistit několika způsoby. Doporučujeme úvahu, že na konci každé desky kromě poslední je jeden překryv, tedy překryvů je o jeden méně než je desek. Ke stejnému závěru mohou dojít pomocí obrázku, na kterém vidí, že plot složený ze dvou desek má 1 překryv, plot ze třech desek má 2 překryvy, ze čtyř desek 3 překryvy atd. Tedy plot z 25 desek má 24 překryvů. V dalším kroku je třeba zjistit, kolik centimetrů má Pavel k dispozici na všechny překryvy. K tomu může žáky navést nápovědou: *Jak dlouhý plot z desek sestavíme, pokud ho uděláme bez překryvů? Jak dlouhý má nový plot být? Kolik centimetrů přebývá?* Poslední krok – určení délky jednoho překryvu by měli žáci zvládnout samostatně. Nejčastější chybou může být určení špatného počtu překryvů, kdy žáci počítají s 25 překryvy či každý překryv počítají jako dva s odůvodněním, že každý spoj vzniká ze dvou desek a na každé desce je jeden překryv. Tuto chybnou úvahu můžeme žákům vyvrátit vysvětlením, že překryv chápeme jako místo, kde jsou dvě desky zároveň. Řešení můžeme doplnit následujícím obrázkem, na kterém vyznačíme části, které jsou navíc oproti tomu, kdyby byl plot tvořen bez překryvů.

*Obrázek 8*

### 6.1.4. Zebry

**Úloha 16: Marek koupil v květinářství 5 druhů květin (růže, karafiáty, lilie, tulipány, kaktusy). Každá květina stála jinou cenu za kus (20 Kč, 35 Kč, 45 Kč, 70 Kč, 100 Kč). Dále víme, že růže stojí méně než 45 Kč a jeden kaktus stojí pětkrát víc než jeden karafiát. Kolik stojí dohromady jeden tulipán a jedna lilie?**

Obtížnost: ☆

Časová náročnost: 10 min

Řešení: 115 Kč

Komentář: K řešení vede důkladný zápis známých informací a správný úsudek. Jedná se o jednoduchou zebru, ve které může být jedinou obtíží správné pochopení vazeb*: růže stojí méně než 45 Kč a jeden kaktus stojí pětkrát víc než jeden karafiát***.** Méně než 45 Kč znamená 20 Kč či 35 Kč, žáci však mohou chybně uvažovat i 45 Kč. Z informace *jeden kaktus stojí pětkrát víc než jeden karafiát* plyne, že kaktus stojí 100 Kč a karafiát 20 Kč. Proto růže stojí 35 Kč. A na tulipán a lilii zbývá 45 kč a 70 Kč.

**Úloha 17: Každý ze tří kamarádů (Petr, Karel, Jan) o letních prázdninách odjel na dovolenou do jednoho ze států Slovensko, Chorvatsko či Francie a dopravil se tam právě jedním z těchto dopravních prostředků: auto, autobus, vlak. Každý jel někam jinam a jiným dopravním prostředkem. Pomocí následujících indicií určete, kam jel Jan a jak se tam dopravil.**

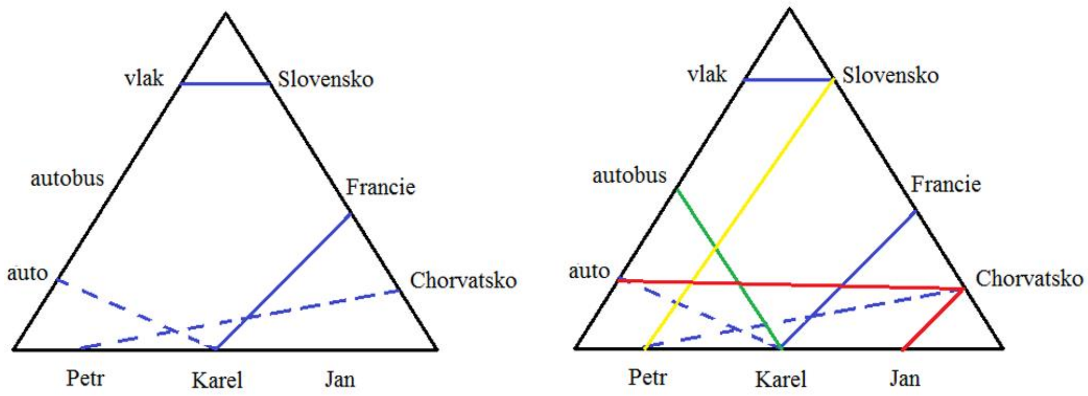
- **Karel jel do Francie a nejel autem.**
- **Petr byl v Chorvatsku na jaře a proto jel v létě jinam.**
- **Ten, kdo jel na Slovensko, jel vlakem.**

Obtížnost: ★★

Časová náročnost: 10 min

Řešení: Jan jel do Chorvatska autem.

Komentář: Jedná se o jednoduchou zebru, kterou mnozí žáci zvládnout vyřešit pomocí vlastního přehledného zápisu a správného úsudku. Doporučujeme však žáky seznámit i s námi navrženým řešením, které mohou v budoucnu využít při řešení složitějších zeber. Řešení spočívá v tom, že si načrtneme trojúhelník a na každou jeho stranu vypíšeme prvky jedné množiny – na jednu stranu jména, na druhou státy a na třetí dopravní prostředky. Následně do trojúhelníku zaznamenáme indicie – to, co k sobě patří, spojíme plnou čarou a to, co k sobě nepatří, spojíme přerušovanou čárou (viz obrázek 9). Nyní z obrázku vidíme, že jediný stát, kam může Petr jet, je Slovensko, tudíž Jan musí jet do Chorvatska. Dále vidíme, že Karel může jet pouze autobusem, tudíž na Jana zbylo auto. Nové informace opět postupně zaznamenáváme do trojúhelníku, do doby než jsme schopni odpovědět na zadanou otázku. Ke špatnému řešení může žáky zavést 2. indicie, po jejímž nedůsledném přečtení mohou žáci snadno chybně usoudit, že Petr byl v létě v Chorvatsku. Na závěr je vhodné ověřit správnost našeho výsledku vzhledem k stanoveným podmínkám.




*Obrázek 9*

**Úloha 18: Tři známí (pan Hajný, pan Kuchař a pan Zahradník) sedí spolu v kavárně, povídají si a najednou jeden povídá: *„To je legrace, my máme stejná zaměstnání jako jsou naše jména, ale nikomu se jméno a zaměstnání nekryje!“* Na to odpoví hajný: *„To máte pravdu, pane Zahradníku!“* Jaké zaměstnání měl pan Kuchař?** (inspirováno [16])

Obtížnost:

Časová náročnost: 5 min

Řešení: hajný

Komentář: Úloha rozvíjí schopnost třídit a přehledně zaznamenávat zadané údaje a následně z nich vyvozovat nové závěry. Lze ji řešit pomocí tabulky, ve které proškrtneme dvojice, které se vylučují (Hajný – hajný, Kuchař – kuchař, Zahradník – zahradník), pak i dvojici těch, co spolu hovořili (hajný – Zahradník).

| | pan Hajný | pan Kuchař | pan Zahradník |
|---|---|---|---|
| hajný | x | | x |
| kuchař | | x | |
| zahradník | | | x |

*Tabulka 8*

Z tabulky vidíme, že pan Zahradník je kuchař, protože v jeho sloupci je jen jedna možnost. Tu vyznačíme puntíkem jako správnou a v příslušném řádku vyškrtáme zbylé možnosti. Stejným způsobem zjistíme, že pan Hajný je zahradník a pak Kuchař je hajný.

| | pan Hajný | pan Kuchař | pan Zahradník |
|---|---|---|---|
| hajný | x | ● | x |
| kuchař | x | x | ● |
| zahradník | ● | x | x |

*Tabulka 9*

Problematické může být rozeznání jmen a povolání, neboť se liší pouze velikostí prvního písmena, proto je důležité, aby žáci dbali na správný zápis. Obtížné může být také uvědomění si, že pan Zahradník nemůže být hajný.

**Úloha 19: Na Karlovu oslavu přišli čtyři hosti: Adéla, Boris, Cecilka a David. Každý z nich měl právě jeden z následujících doplňků: sluneční brýle, šátek, batůžek, náramek, v jedné z barev bílá, žlutá, zelená, modrá.**

- **Adéla měla sluneční brýle.**
- **Bílou barvu zvolil Boris.**
- **Šátek byl žlutý.**

- **Adéla neměla doplněk zelené barvy.**
- **Cecilka měla batůžek.**

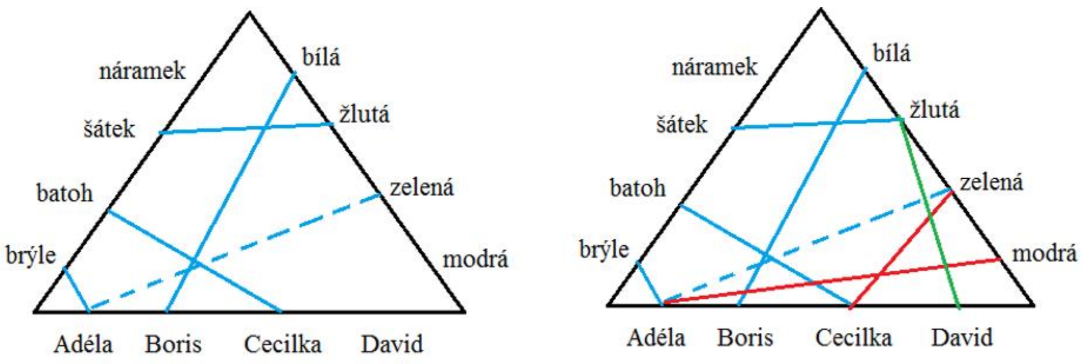
**Jaký doplněk měl David a jakou měl barvu?**

Obtížnost:

Časová náročnost: 10 min

Řešení: žlutý šátek

Komentář: Jedná se o složitější zebru, jejíž řešení vyžaduje systematický zápis daných indicií. Doporučujeme řešení pomocí obrázku, kdy načrtneme trojúhelník a na každou jeho stranu vypíšeme prvky jedné množiny – na jednu stranu jména, na druhou doplňky a na třetí barvy. Následně do trojúhelníku zaznamenáme indicie – to, co k sobě patří, spojíme plnou čarou a to, co k sobě nepatří, spojíme přerušovanou čárou (obrázek 10). Z obrázku vidíme, že Adéla může mít jedině modrý doplněk, a tudíž Cecika zelený. Na Davida zbyde zelený šátek. Jedná se o velmi rychlý a snadný způsob řešení, proto je vhodné s ním žáky seznámit, aby jej mohli využívat i při řešení dalších zeber.




*Obrázek 10*

## 6.2. Úlohy založené na objevení a uplatnění vztahů

### 6.2.1. Číselné a obrázkové řady

**Úloha 20: Každá následující číselná posloupnost se rozvíjí podle určitého logického principu. Na základě toho principu doplňte další člen posloupnosti.**

| **úroveň** | **posloupnost** | **řešení** | **princip** |
|---|---|---|---|
| ★ | **3, 7, 11, 15, 19, ___** | 23 | přičítáme 4 |
| | **1, 5, 11, 19, 29, ___** | 41 | přičítáme násobky dvou: 4, 6, 8, 10, 12.. |
| ★★ | **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ___** | 23 | prvočísla |
| | **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ___** | 21 | součet dvou předchozích členů |
| ★★★ | **2, 6, 3, 9, 6, 18, 15, 45, ___** | 42 | střídáme násobení třemi a odečtení tří |
| | **120, 24, 6, 2, ___** | 1 | dělíme postupně pěti, čtyřmi, třemi, dvěma |

*Tabulka 10*

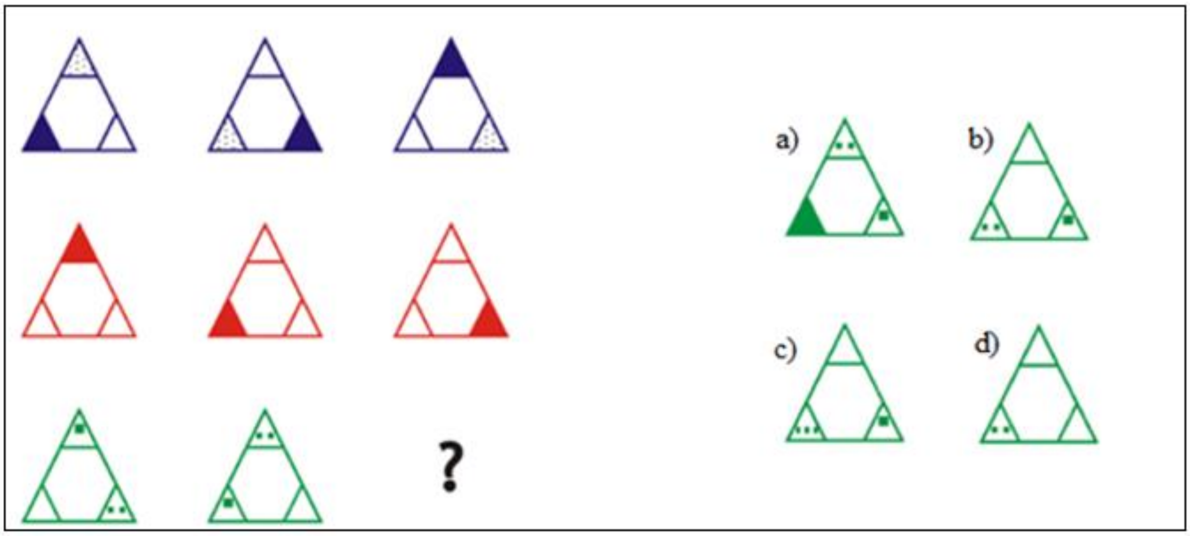
| **úroveň** | **posloupnost** | **řešení** | **princip** |
|---|---|---|---|
| ✿ | **1, 4, 9, 16, 25, ___** | 36 | mocniny čísel 1, 2, 3, 4… |
| | **- 324, 108, - 36, 12, ___** | - 4 | dělíme číslem -3 |
| ✿✿ | **1, 4, 10, 19, 31, 46, ___** | 64 | přičítáme násobky tří: 3, 6, 9, 12.. |
| | **1, 1, 2, 6, 24, 120, ___** | 600 | násobíme jednou, dvěma, třemi, čtyřmi… |
| ✿✿✿ | **1, 2, 5, 14, 41, ___** | 122 | násobíme třemi a odečteme 1 |
| | **1, 3, 3, 6, 5, 9, 7, 12, 9, 15, ___** | 11 | 2 vnořené posloupnosti: 1. lichá čísla, 2. násobky tří |

*Tabulka 11*

Časová náročnost: 2 až 5 min na každou posloupnost v závislosti na obtížnosti

Komentář: Tento typ úloh rozvíjí žákovu schopnost experimentovat a zkoumat závislosti mezi danými čísly, což směřuje k pochopení pojmu funkce. Úlohy žákům předkládáme od nejjednodušších po nejobtížnější. Vhodné je po vyřešení první řady rozvést diskuzi, jakým způsobem žáci úlohu řešili, tedy jakým způsobem hledali princip, podle kterého se posloupnost rozvíjí. Společně s žáky bychom měli zmínit tyto způsoby: určení rozdílů mezi dvěma sousedními členy, hledání společných znaků členů posloupnosti – lichá/sudá čísla, násobky určitého čísla či provádění různých matematických operací mezi sousedními členy atd. Tato společná diskuze by mohla pomoci slabším žákům při řešení obtížnějších úloh.

**Úloha 21: Doplňte správný symbol místo otazníku.**




*Obrázek 11*

Obtížnost: ⭐

Časová náročnost: 3 min

Řešení: b

Komentář: Úloha vede žáky k objevování zákonitostí. V případě obtíží lze žáky navést, aby se zaměřili na to, jakým způsobem mění svoji polohu modře a červeně vybarvený trojúhelník na prvním a druhém řádku posloupnosti a stejný způsob použili na poslední řádek.

**Úloha 22: Následujících sedm symbolů má určitý význam. Rozluštěte tento význam a doplňte osmý symbol této zvláštní posloupnosti.** (inspirováno [16])

*Obrázek 12*

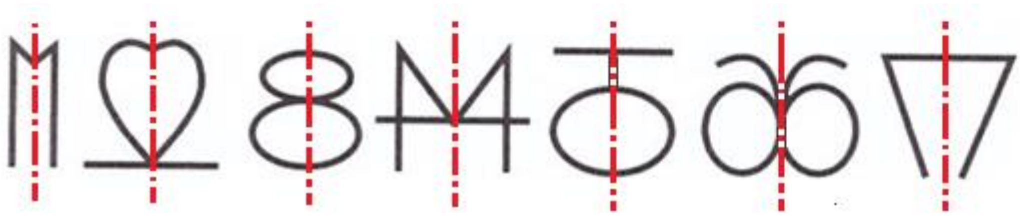
Obtížnost: 

Časová náročnost: 5 min

Řešení: 

*Obrázek 13*

(Čísla 1, 2, 3, 4… zobrazená v osové souměrnosti podle vertikální osy viz obrázek 14)



*Obrázek 14*

Komentář: Úlohu je možné zařadit v rámci opakování osové souměrnosti. Žáky můžeme navést otázkou: *Kolik os souměrnosti má každý člen zadané posloupnosti?* Dále se jich můžeme zeptat: *Kolik členů tvoří tuto posloupnost?* Při jejich počítání si mohou žáci všimnout podobnosti některých členů s číslicemi. Pro ověření a vysvětlení principu posloupnosti doporučujeme načrtnout u všech členů posloupnosti osu souměrnosti a zakrýt levou část symbolu – zbydou číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

**Úloha 23: Který symbol bude 75. v pořadí?**

*Obrázek 15*

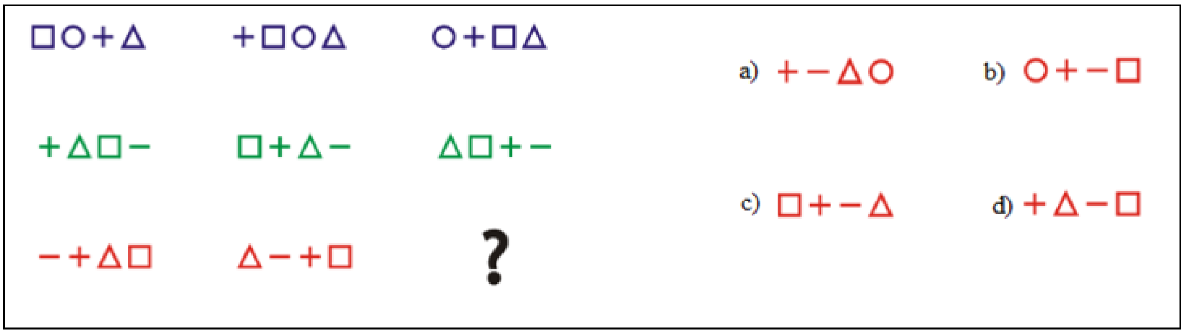
Obtížnost: 

Časová náročnost: 5 min

Řešení: 

Komentář: Úloha rozvíjí žákovu schopnost hledat efektivní cestu k řešení problému. Žák sám dojde k závěru, že vypisování 75 členů této posloupnosti není vhodným způsobem řešení. Posloupnost se skládá ze stále se opakující šestice symbolů. Proto je třeba určit, kolik ze 75 členů posloupnosti vytvoří celé šestice a kolik symbolů obsahuje poslední seskupení symbolů.

**Úloha 24: Doplňte správný symbol místo otazníku.**




*Obrázek 16*

Obtížnost:

Časová náročnost: 5 min

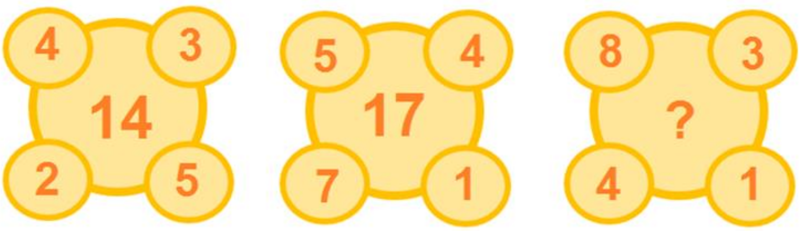
Řešení: d)

Komentář: Úloha dává příležitost k objevování zákonitostí. Jedná se o obrázkovou posloupnost, ve které je třeba se zaměřit na pohyb jednotlivých symbolů v každém řádku. Žákům můžeme poradit, aby se zaměřili na to, jakým způsobem mění svoji polohu symboly v řádku, a aplikovali tento způsob na poslední řádek. Řešení je možné ztížit tím, že žákům nenabídneme výběr ze 4 možností.

### 6.2.2. Číselná schémata

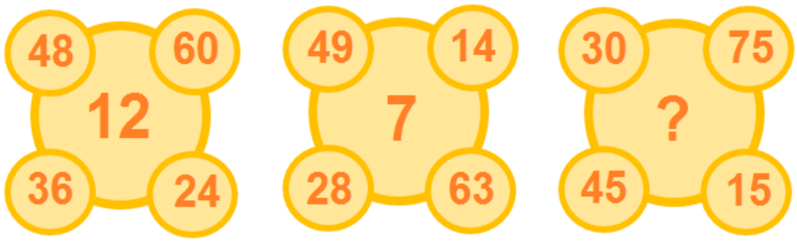
**Úloha 25: V každé sadě obrázků čísla v rohových kruzích stejným způsobem určují číslo uprostřed. Jaká čísla se skrývají pod otazníky v jednotlivých zadáních?**

**a)**



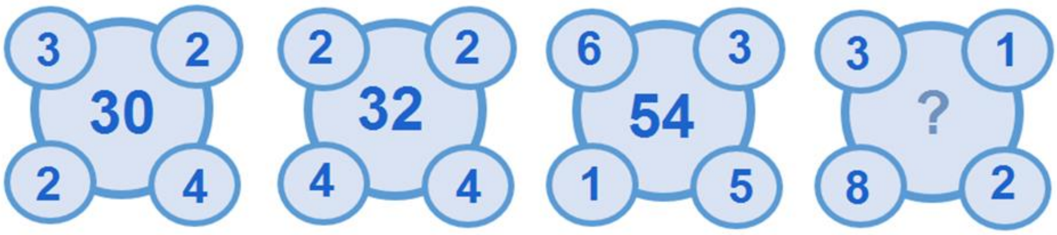

*Obrázek 17*

**b)**




*Obrázek 18*

**c)**




*Obrázek 19*

Obtížnost: a) ★ b) ★★ c) ★★★

Časová náročnost: 5 min

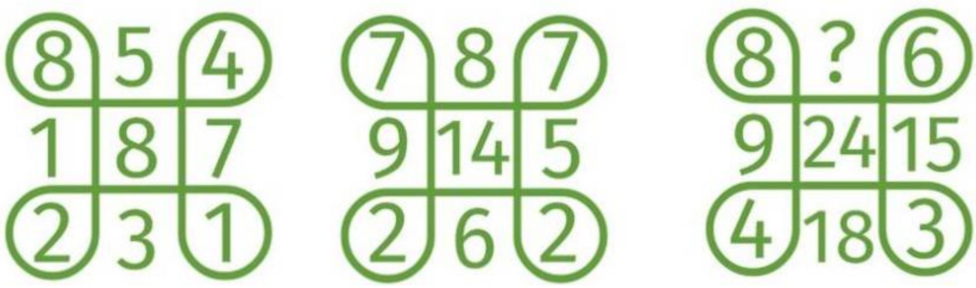
Řešení: a) 16 (číslo uprostřed je rovno součtu čísel v rohových kruzích)

b) 15 (číslo uprostřed je největší společný dělitel čísel v rohových kruzích)

c) 40 (číslo uprostřed je rovno součinu součtu čísel v horních rozích a součtu čísel v dolních rozích, tedy (3 + 2) · (4 + 2) = 30, (2 + 2) · (4 + 4) = 32 atd. )

Komentář: Úloha dává žákům příležitost zkoumat a objevovat závislosti mezi čísly. Také rozvíjí jejich vytrvalost a schopnost systematicky experimentovat. Úlohy doporučujeme předkládat žákům ve stanoveném pořadí. Úloha a) je velmi snadná a slouží především k tomu, aby žáci pochopili zadání těchto úloh a následně mohli řešit obtížnější.

**Úloha 26: Doplňte správné číslo místo otazníku.**




*Obrázek 20*

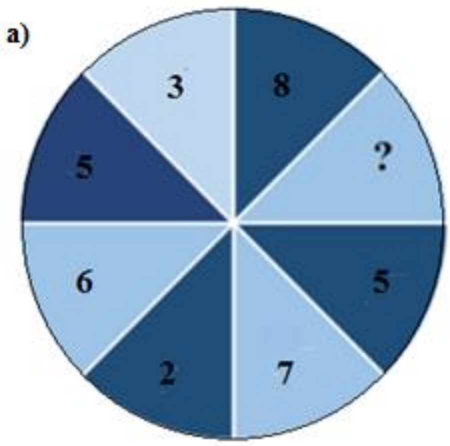
Obtížnost: ⭐⭐

Časová náročnost: 2 min

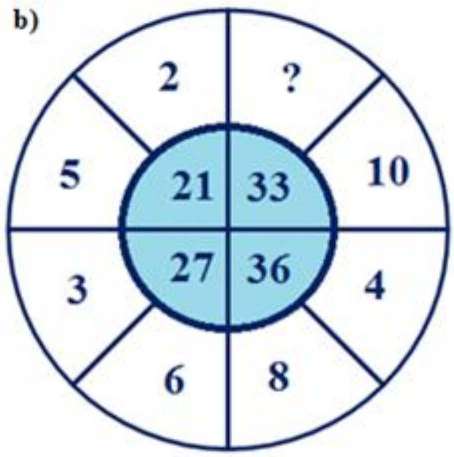
Řešení: 6 (číslo uprostřed je součet čísel ve vertikálním směru i součet čísel v horizontálním směru)

Komentář: Úloha dává žákům příležitost zkoumat a objevovat závislosti mezi čísly, rozvíjí jejich kreativitu a vytrvalost při hledání řešení problému. Úlohu lze učinit obtížnější výměnou přirozených čísel za desetinná čísla či zlomky.

**Úloha 27: Čísla na těchto obrázcích se řídí určitým logickým principem. Objevte ho a doplňte číslo místo otazníku.**




*Obrázek 21*




*Obrázek 22*

Obtížnost: ✿

Časová náročnost: 5 min

Řešení:

a) 4 (součet čísel na protilehlých výsečí je 10)

b) 1 (trojnásobek součtu čísel na dvou vnějších výsečích je roven číslu ve vnitřní výseči)

Komentář: Úloha rozvíjí žákovu kreativitu a vytrvalost při hledání řešení problému. Úlohu lze učinit obtížnější výměnou přirozených čísel za desetinná čísla či zlomky.

**Úloha 28: Mezi číslicemi v těchto tabulkách platí určitý logický princip. Objevte ho a doplňte čísla místo otazníků.**

a)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 25 | ? | 35 |
| 15 | 55 | 50 | 25 |
| 10 | 30 | 50 | 5 |
| 5 | 0 | 30 | 15 |

*Obrázek 23*

b)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 3 | 5 |
| 7 | 4 | 1 | 4 |
| 6 | 2 | 3 | 7 |
| 9 | 5 | 2 | ? |

*Obrázek 24*

Obtížnost: a) ✽ ✽ b) ✽ ✽ ✽

Časová náročnost: 10 min

Řešení:

a) 30 (součet čísel v buňkách stejné barvy je 100)

b) 6 (číslo v prvním sloupci minus číslo ve druhém plus číslo ve třetím rovná se číslo v posledním sloupci)

Komentář: V úloze a) je důležité zachovat barvy buněk, tedy úlohu **není možné tisknout černobíle**. Případně doporučujeme přepsat čísla na tabuli tak, že čísla ve stejně barevných buňkách napíšeme na tabuli stejnou barvou. V úloze b) nehrají barvy buněk žádnou roli, naopak jejich vynecháním úlohu zjednodušíme. Možné nápovědy k úloze a): *Zaměřte se na čísla v buňkách se stejnou barvou. Jaký je jejich součet?* Možné nápovědy k úloze b): *Nevšímejte si barev a zaměřte se na vztahy mezi jednotlivými čísly v každém řádku. Jaké matematické operace musíme provést s čísly v jednotlivých sloupcích, abychom získali číslo v posledním sloupci?*

### 6.2.3. Algebrogramy

**Úloha 29: Pavel odečetl dvě dvojciferná čísla. Potom přes jednu číslici nakreslil srdce a přes druhou kruh. Určete součet zakrytých čísel.**

**♥3 – 2● = 25**

*Obrázek 25*

Obtížnost: ★ ★

Časová náročnost: 5 min

Řešení: 13

Komentář: Úloha rozvíjí žákův vhled do desítkové soustavy a aritmetických souvislostí. Jedná se o jednoduchý algebrogram, na kterém žáci snadno pochopí, jak algebrogramy fungují, a jsou připraveni řešit obtížnější úlohy. Správný výsledek mohou žáci sami ověřit jednoduchou zkouškou. Nejčastější chybou může být to, že žáci odhalí zakrytá čísla, ale zapomenou uvést jejich součet.

**Úloha 30: Nahraďte písmena číslicemi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tak, aby příklad dával smysl. Stejná písmena nahraď stejnými číslicemi, různá různými.**

a) **A · A = B + B**

b) **STU + ST + S = 260**

c) **C9 – DC = DD**

d) **OKO + OKO = ZRAK**

e)

$$\begin{array}{rrrrr} & O & S & E & L \\ & & S & E & L \\ & & & E & L \\ & & & & L \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{rrrr} B & O & T & A \\ & O & T & A \\ & & T & A \\ & & & A \\ \hline B & B & B & B \end{array}$$

Obtížnost: a) ★ b) ★★ c) ★★

d) ✽✽ e) ✽✽ f) ✽✽✽

Časová náročnost: 2 až 10 min na jeden algebrogram

Řešení:

a) A = 4, B = 8

b) S = 2, T = 3, U = 5

c) C = 6, D = 3

d) O = 8, K = 6, A = 3, R = 7, Z = 1

e) 1. řešení: O = 8, S = 9, E = 7, L = 6

2. řešení: O = 9, S = 4, E = 7, L = 6

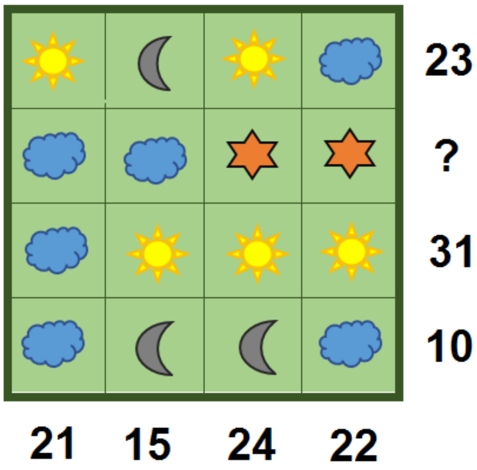
f) 1. řešení: B = 2, O = 0, T = 7, A = 3

2. řešení: B = 8, O = 4, T = 2, A = 7

Komentář: Řešení těchto úloh rozvíjí vhled žáků do desítkové soustavy a vede je k uvědomování si aritmetických zákonitostí. Algebragromy řešíme metodou pokus – omyl. Častou chybou může být to, že žáci nahradí různá písmena stejnými číslicemi.

a) Možné převést do slovní podoby: Součet čísla se sebou samým je roven součinu jiného čísla se sebou samým. Častá chyba: A = 2, B = 2. V tomto případě výraz dává smysl, ale různá písmena nejsou nahrazena různými čísly.
b) Příklad je vhodné přepsat pod sebe. Z toho zápisu snadno odhalíme, že S = 2 a jednoduše určíme i zbylá čísla.
c) Příklad je vhodné přepsat pod sebe a nalézt jednodušší vztahy, tj. D + C = 9, D + D = C.
d) Příklad je vhodné přepsat pod sebe a systematicky měnit čísla pod písmeny O a K. Důležité je si uvědomit, že součet dvou O je roven K a zároveň součet dvou K je větší než 9.
e) Při řešení toho algebrogramu je zapotřebí žákům zopakovat, že různá písmena představují různá čísla, úloha svádí k chybnému řešení L = 1, E = 1, S = 5, O = 9. Možná nápověda pro žáky*: Písmeno L ani E nepředstavují číslo jedna.*
f) Úloha lze zlehčit tím, že žákům prozradíme hodnotu jednoho písmena, např. T = 7.

**Úloha 31: Jednotlivé obrázky zastupují různá jednociferná čísla. Číslo na konci každého řádku (sloupce) je součtem daných čísel v příslušném řádku (sloupci). Určete, která čísla zastupují jednotlivé obrázky v tabulce a otazník na konci druhého řádku?** (inspirováno [2])




*Obrázek 26*

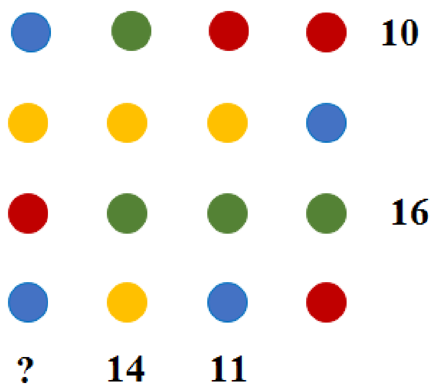
<u>Obtížnost</u>: 

<u>Časová náročnost</u>: 10 min

<u>Řešení</u>:  = 9,  = 4,  = 1,  = 5, ? = 18

<u>Komentář</u>: Žákům můžeme při řešení doporučit, aby se nejprve zaměřili na ty části tabulky, kde se vyskytují 2 stejné proměnné, tedy první sloupec a třetí řádek, a metodou pokus-omyl určili tyto proměnné. Jejich objevení je nejobtížnější částí. Úloha vybízí k chybě z nepozornosti, kdy žáci správně určí hodnoty jednotlivých symbolů, ale zapomenou určit číslo, které patří místo otazníku.

**Úloha 32: Každá barva zastupuje jedno z čísel 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Číslo na konci řádku (sloupce) je součtem daných čísel v řádku (sloupci). Které číslo patří na místo otazníku?**




*Obrázek 27*

Obtížnost:

Časová náročnost: 5 min

Řešení: 9

Komentář: Řešení těchto úloh vede žáky k systematickému experimentování. Žákům je možné napovědět, aby se zaměřili na třetí řádek a druhý sloupec a pokoušeli se odhadnout, která čísla představují dané barvy. Úloha vybízí k chybě z nepozornosti, kdy žáci barvy správně určí, ale zapomenou určit číslo, které patří místo otazníku.

**Úloha 33: Nahraďte písmena různými číslicemi 0 – 9 tak, aby příklad dával smysl.** (inspirováno [16])

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **2B** | · | **CB** | = | **DED** |
| · | | **–** | | **–** |
| **C2** | **–** | **BF** | = | **FF** |
| **D66** | + | **F2** | = | **DHE** |

*Obrázek 28*

Obtížnost:

Časová náročnost: 10 min

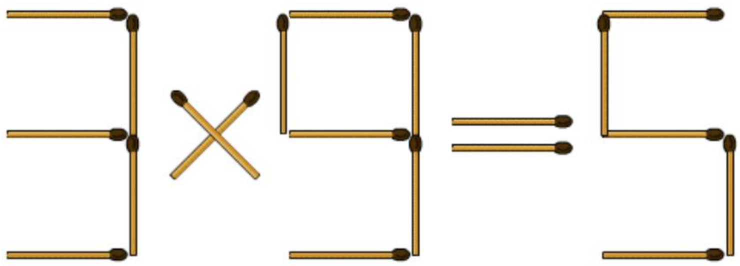
Řešení: B = 3, C = 4, D = 9, E = 8, F = 1, H = 7

Komentář: Zásadním krokem je objevení místa, od kterého je vhodné začít algebrogram řešit. V tomto případě se jedná o první sloupec, ve kterém je zadáno nejvíce číslic. Po vyřešení této první části je řešení pro žáky zvyklé řešit algebrogramy již snadné.

## 6.3. Geometrické úlohy

### 6.3.1. Úlohy se sirkami

**Úloha 34: Přemístěte jednu zápalku tak, aby platila rovnost.** (inspirováno [16])

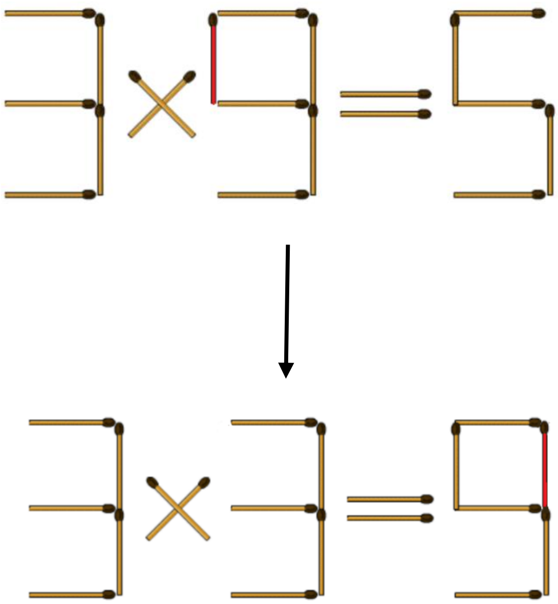


*Obrázek 29*

Obtížnost:

Časová náročnost: 5 min

Řešení:



*Obrázek 30*

Komentář: Při řešení této úlohy je třeba se zpočátku soustředit na to, jak můžeme změnit dané číslice pomocí přemístění pouhé jedné sirky. Možná nápověda pro žáky: *Z které číslice můžeme odebráním jedné sirky vytvořit jinou číslici? Kterému číslu se rovná nově vzniklý součin?*

**Úloha 35: Přemístěte dvě zápalky tak, aby platila rovnost.** (inspirováno [16])

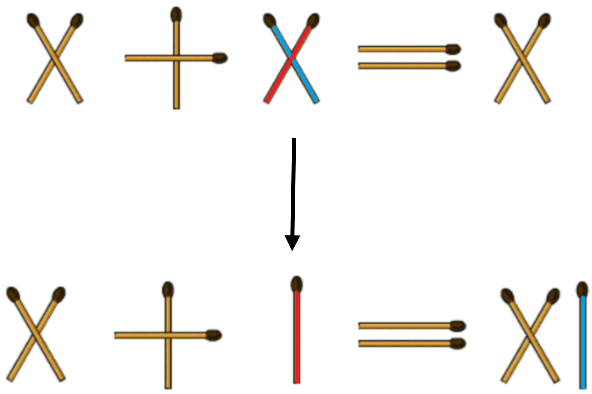
*Obrázek 31*

Obtížnost: ★★

Časová náročnost: 5 min

Řešení:

1. způsob řešení:

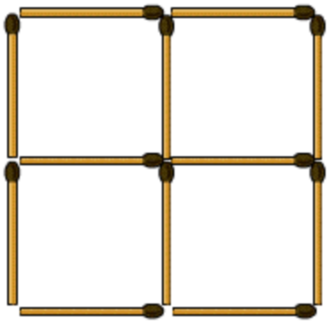


*Obrázek 32*

2. způsob: stejným způsobem přemístíme sirky, které tvoří prvního sčítance.

Komentář: Úloha rozvíjí schopnost modelovat rovnice a vede k objevování jejich ekvivalentních úprav. Možná nápověda: *Odeberte dvě sirky tak, aby na obou stranách rovnice zůstaly stejné hodnoty. Odebrané sirky umístěte tak, aby opět na obou stranách rovnice byly stejné hodnoty.*

**Úloha 36: Odeberte právě dvě zápalky tak, aby na obrázku zůstaly pouze dva čtverce a nic jiného.** (inspirováno [16])

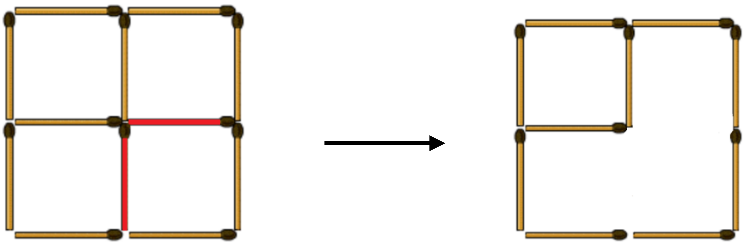


*Obrázek 33*

Obtížnost: 

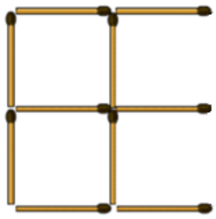
Časová náročnost: 5 min

Řešení: Úloha má více řešení, je třeba odstranit libovolné dvě sousední sirky nacházející se uvnitř velkého čtverce.



*Obrázek 34*

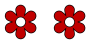
Komentář: Žákům je třeba zdůraznit, že v aranžmá nesmí zůstat nic jiného než dva čtverce. Nejčastější chybou je odebrání dvou sirek ze stran velkého čtverce, které sice vede k vytvoření dvou čtverců, ale v aranžmá zbydou přebytečné sirky. Proto je vhodné žákům hned při zadání ukázat, že toto není řešení (viz obrázek 34).



*Obrázek 35*

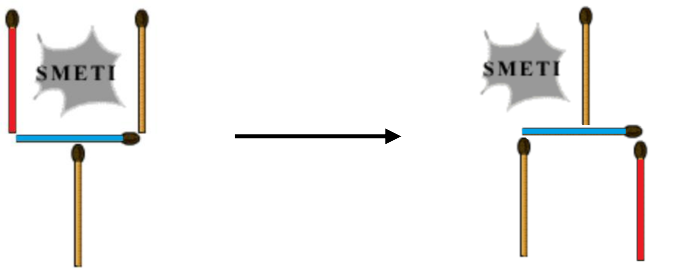
**Úloha 37: Přemístěte právě dvě zápalky tak, aby se smetí nacházelo mimo lopatku.**


*Obrázek 36*

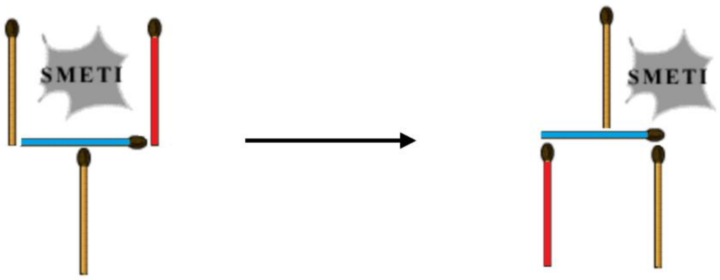
Obtížnost: 

Časová náročnost: 3 min

Řešení: Úloha má dvě řešení.



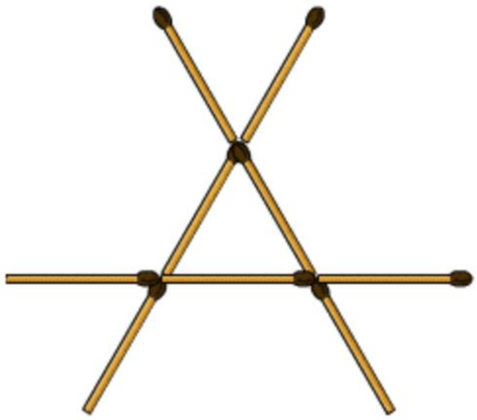

*Obrázek 37*




*Obrázek 38*

Komentář: Pokud žáci sestavují toto aranžmá, mohou jako smetí použít sirku rozlomenou na alespoň 3 části. Žáky je vhodné upozornit na to, že se smetím není třeba nijak manipulovat. Jako nápovědu můžeme žákům prozradit, že ke správnému řešení vede otočení lopatky na druhou stranu.

**Úloha 38: Přemístěte čtyři zápalky tak, abyste získali pět rovnostranných trojúhelníků.** (inspirováno [16])

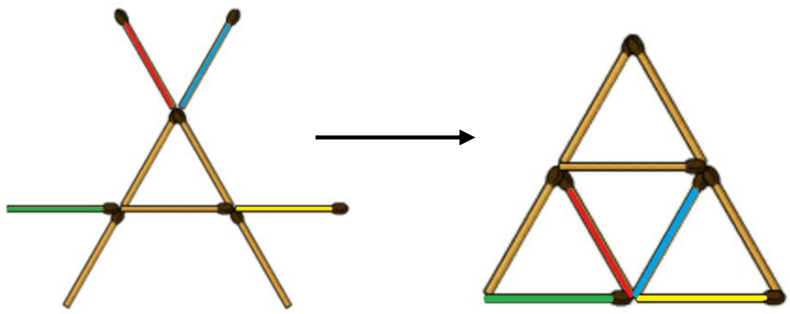


*Obrázek 39*

Obtížnost:

Časová náročnost: 10 min

Řešení:

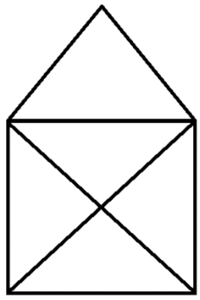


*Obrázek 40*

Komentář: Doporučujeme žáky upozornit, že v aranžmá nesmí zůstat nic jiného než 5 trojúhelníků a že k řešení nevede překládání sirek přes sebe. Možná nápověda: *Řešením je jeden velký trojúhelník obsahující další 4 menší trojúhelníky*. Žáky pravděpodobně napadne přemístit červeně a modře vyznačenou sirku k zelené a žluté – tím vytvoří 3 trojúhelníky. Poté je možné je navést, aby z těchto 3 trojúhelníků vytvořili jeden velký.

### 6.3.2. Úlohy jedním tahem

**Úloha 39: Na obrázku vpravo vidíte obrazec – domeček. Dokážete tento obrazec nakreslit jedním tahem tak, abyste po každé nakreslené čáře jeli jen jednou?**

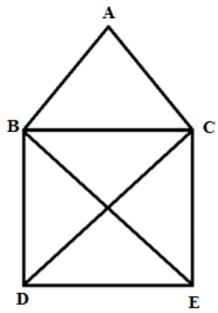


*Obrázek 41*

<u>Obtížnost</u>: 

<u>Časová náročnost</u>: 5 min

<u>Řešení</u>: Existuje více než 20 způsobů, jak domeček nakreslit, v této práci však uvedeme pouze 3 vybrané způsoby. Pro jednodušší popis řešení označíme klíčové body obrázku písmeny, pomocí nichž ilustrujeme tah tužkou.

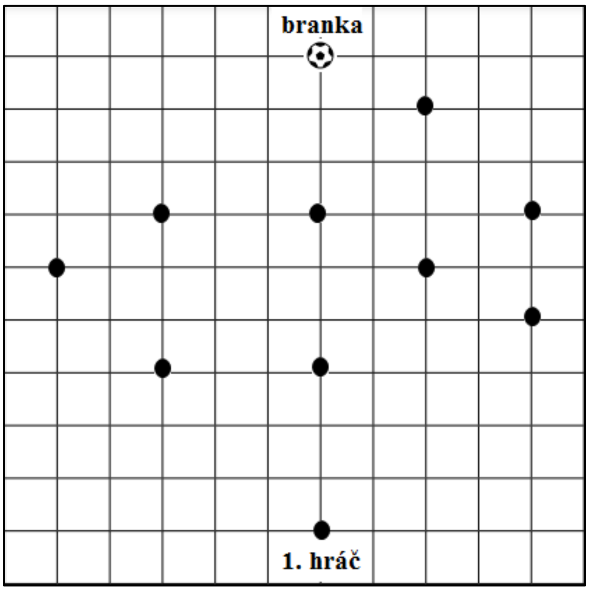



*Obrázek 42*

1. způsob: E → D → B → C → A → B → E → C → D
2. způsob: D → B → E → D → C → B → A → C → E
3. způsob: E → C → B → A → C → D → B → E → D

<u>Komentář:</u> Velmi známá a jednoduchá úloha, která je snadno kontrolovatelná samotnými žáky. Vhodné rozšíření úlohy: *Vyznačte všechny body, ze kterých lze začít domeček kreslit*. Online verze: https://www.transum.org/Maths/Activity/without/ (05. 2023). Online hra s obdobnými úlohami seřazenými podle obtížnosti: https://www.silvergames.com/en/single-line (05. 2023).

**Úloha 40: Najdi dráhu míče vedoucí od prvního hráče do branky tak, aby se každý hráč (černý puntík) dotkl míče právě jednou a poslední hráč dal gól. Přihrávky můžeš vést pouze vodorovně, svisle, nebo pod úhlem 45°.**

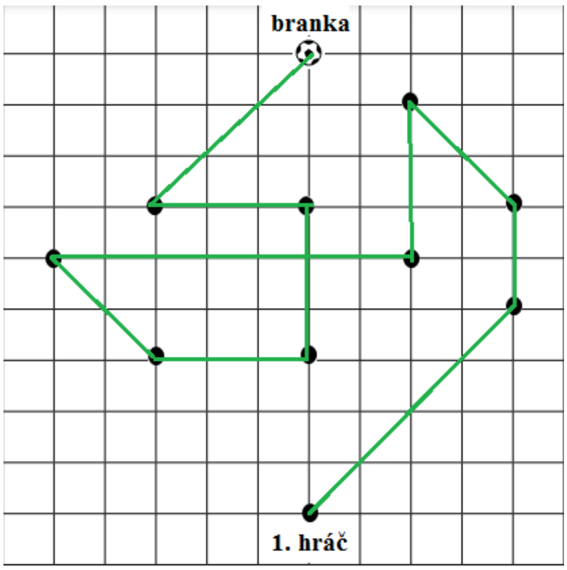



*Obrázek 43*

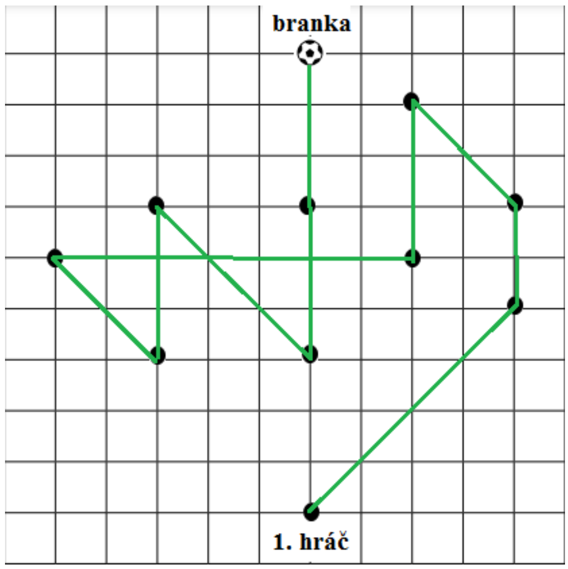
Obtížnost:

Časová náročnost: 10 min

Řešení: První čtyři přihrávky jsou shodné ve všech řešeních, zbylé přihrávky lze kombinovat více způsoby. Uvádíme 2 vybraná řešení:



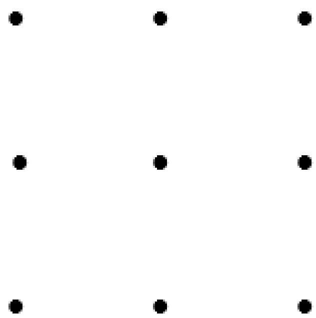

*Obrázek 45*




*Obrázek 44*

Komentář**:** Pro správné pochopení zadání je vhodné žákům na obrázku ilustrovat, jakými způsoby lze vést přihrávky. Zásadní krokem je objevení první přihrávky, kterou je nutné vést vpravo pod úhlem 45°. Poté je již řešení snadné. Úlohu lze stížit tím, že po žácích požadujeme více řešení či vysvětlení, proč musí být první čtyři nahrávky vždy stejné.

**Úloha 41: Spojte těchto devět bodů jedním tahem. Spojující čára se může skládat pouze ze čtyř úseček, takže tužka smí při kreslení změnit směr pouze třikrát.** (inspirováno [8])

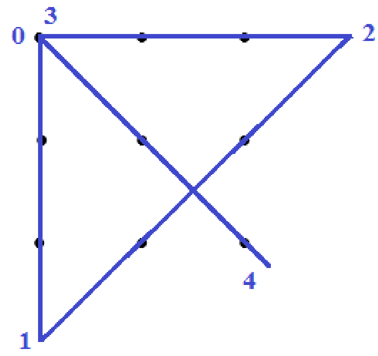


*Obrázek 46*

Obtížnost:

Časová náročnost: 5 min

Řešení: Úloha má více řešení v závislosti na tom, od kterého bodu začneme kreslit. Nicméně všechna řešení obsahují stejný trik – prodloužení úseček mimo vyznačené tečky. Nyní uvedeme vybrané řešení, které začneme kreslit v bodě označeném číslicí 0 a postupně pokračujeme do bodů 1, 2, 3 a 4.

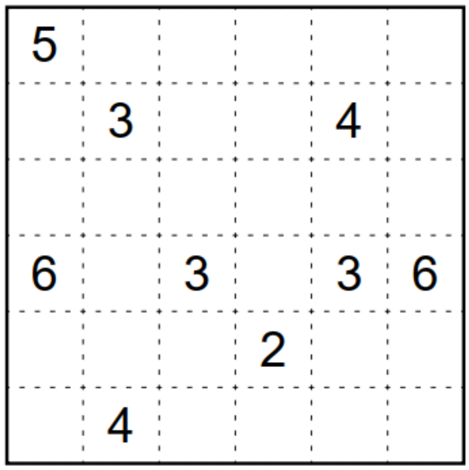


*Obrázek 47*

Komentář: Při řešení se žáci často omezují pouze na část roviny vymezenou zadanými body a úsečky vedou pouze mezi nimi, což nevede k řešení. Největší obtíží je uvědomění si, že je možné úsečky vést i mimo tyto body. Jako nápovědu lze žákům prozradit polohu první úsečky. Možné rozšíření úlohy: *Najděte všechna možná řešení či označte všechny body, ze kterých je možné začít kreslit řešení.*

### 6.3.3. Rozdělení obrazce

**Úloha 42: Rozdělte tabulku podél čar mřížky do obdélníkových nebo čtvercových území tak, aby každá vzniklá oblast obsahovala právě jedno číslo, které udává, z kolika políček se dané území skládá.** (inspirováno [44])

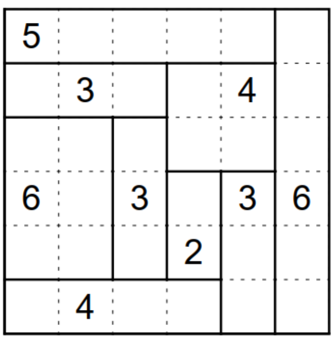


*Obrázek 48*

Obtížnost:

Časová náročnost: 5 min

Řešení:

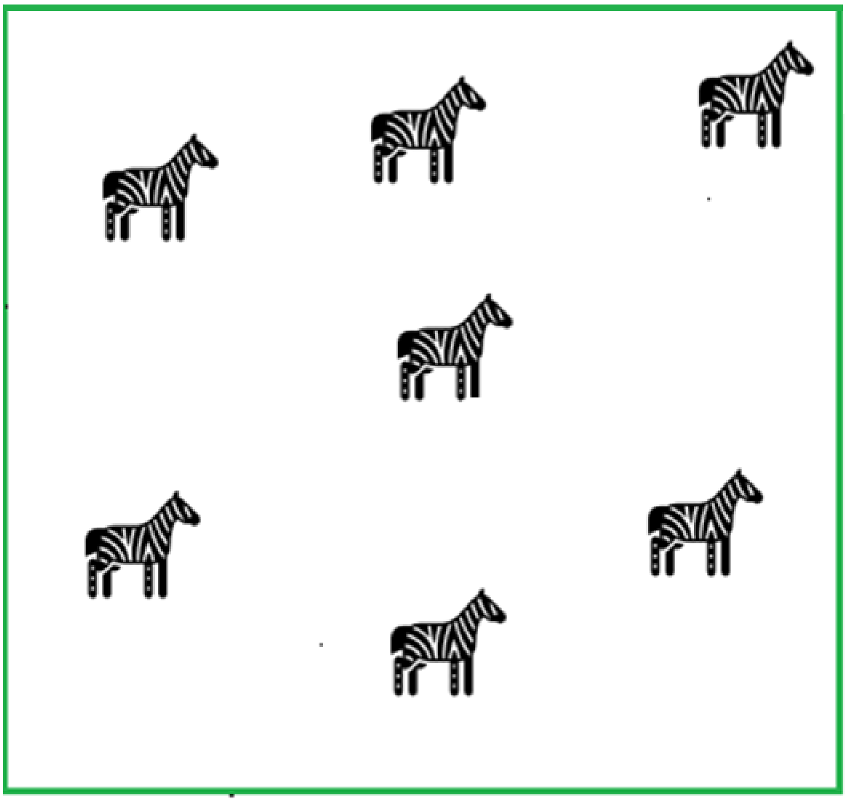


*Obrázek 49*

Komentář: Jedná se o japonský hlavolam nesoucí název shikaku. Stěžejní částí je správné pochopení pravidel, která se mohou zdát žákům na první pohled obtížná. Po jejich zautomatizování je však řešení snadné. Klíčem k řešení je objevení území, která mohou vzniknout pouze jedním způsobem. První shikaku doporučujeme vyřešit s žáky společně na interaktivní tabuli.

Online generátor úloh s různou obtížností: **https://cz.puzzle-shikaku.com/** (05. 2023).

**Úloha 43: Následujících sedm zeber rozdělte pomocí 3 úseček tak, aby se každá zebra pásla v samostatné ohradě.**



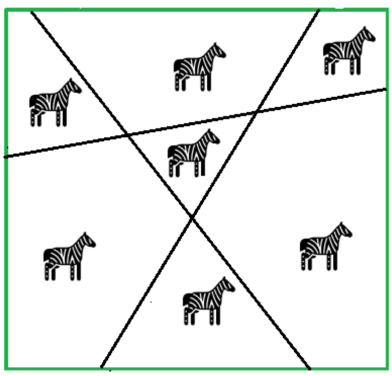
*Obrázek 50*

Obtížnost: ★ ★

Časová náročnost: 5 min

Řešení:

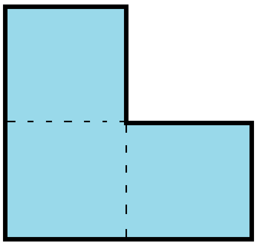
žáka.



*Obrázek 51*

Komentář: Úloha rozvíjí rovinnou představivost Vhodná nápověda: *Zamyslete se nad tím, jakým způsobem je možné rozdělit čtverec pomocí 3 čar na 7 částí.*

**Úloha 44: Následující útvar složený ze tří čtverců rozdělte na 4 stejné části.**



*Obrázek 52*

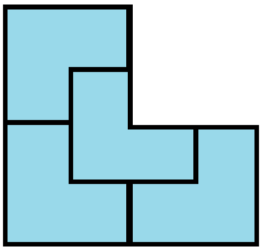
Obtížnost:

Časová náročnost: 5 min

Řešení:

Vhodné

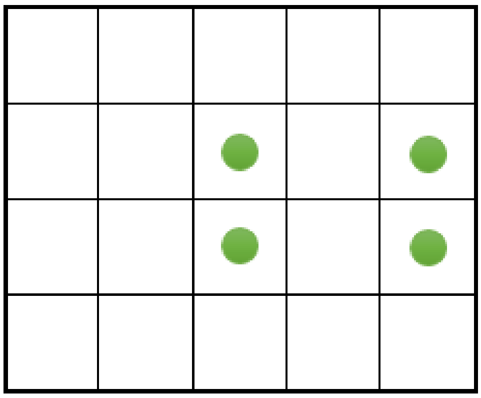
*jedna*



*Obrázek 53*

Komentář: Úloha vede žáka k objevování cesty k řešení. Možné nápovědy: *Zamyslete se nad tím, jak velká bude část, když potřebujeme 3 celky rozdělit na 4 části. Jak nakreslíme* $\frac{3}{4}$ *čtverce?* Dále může žákům pomoc rozdělení útvaru na 12 malých a shodných čtverců.

**Úloha 45: Rozdělte obdélník složený z 20 čtverců na 4 stejné části tak, aby každá část obsahovala právě jeden puntík.**

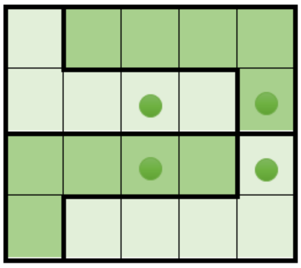


*Obrázek 54*

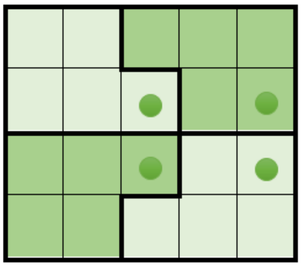
Obtížnost:

Časová náročnost: 5 min

Řešení: 2 řešení:



*Obrázek 56*



*Obrázek 55*

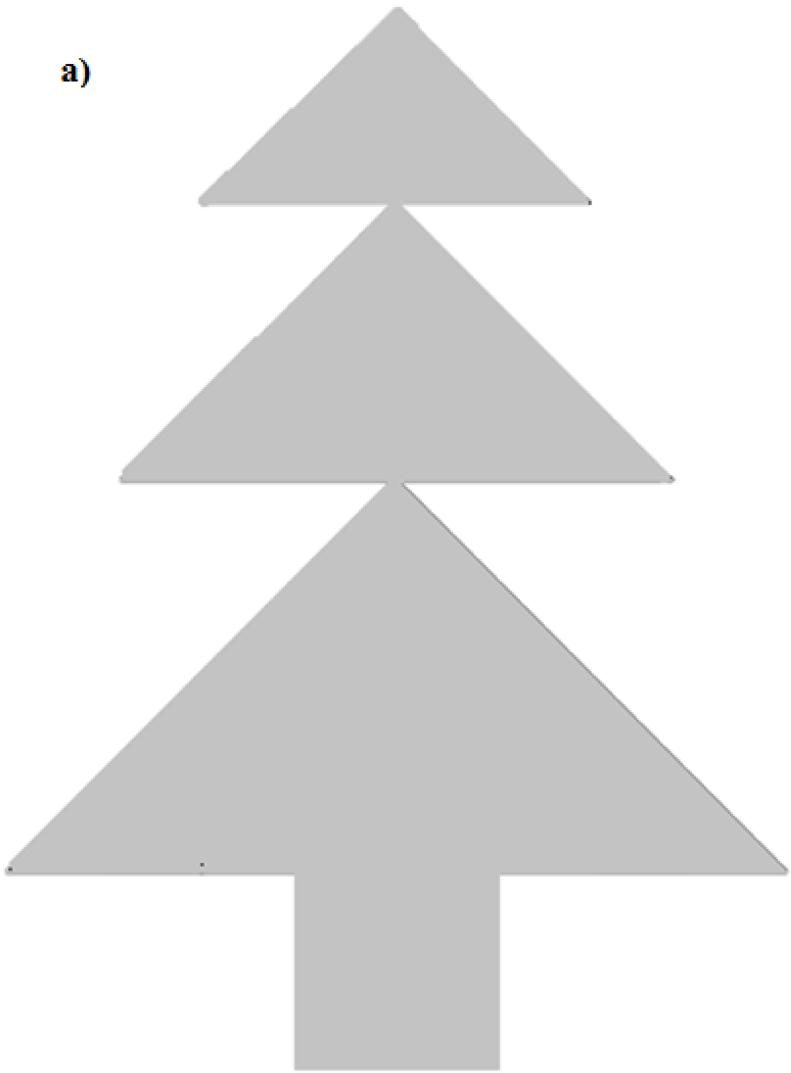
Komentář: Při řešení je třeba si uvědomit, z kolika čtverců se bude skládat jedna část. Poté zbývá vytvářet různé obrazce složené z 5 čtverců a pokoušet se je umisťovat tak, aby každá část obsahovala právě jeden puntík.

### 6.3.4. Tangram

**Úloha 46: Vystřihněte jednotlivé části tangramu a následně z nich složte zadané tvary.**

*Obrázek 57*

**a)**

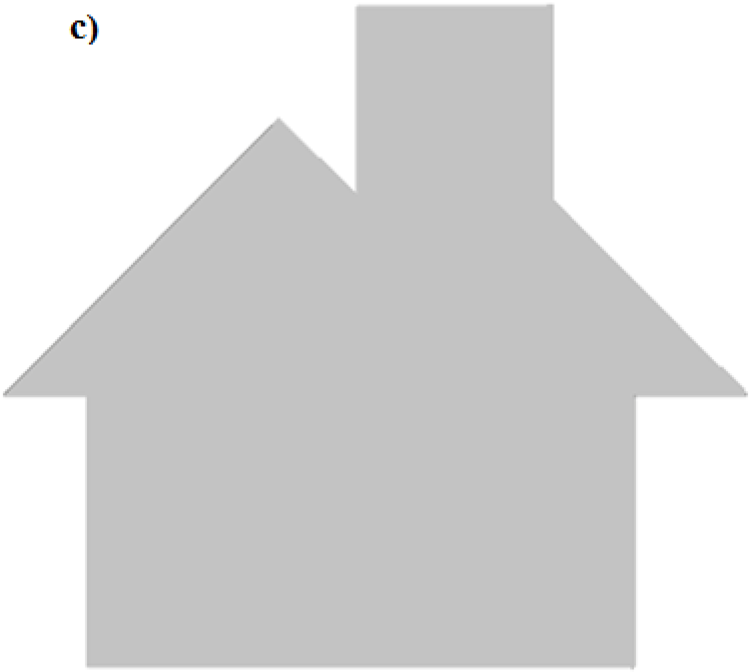


*Obrázek 58*

**b)**

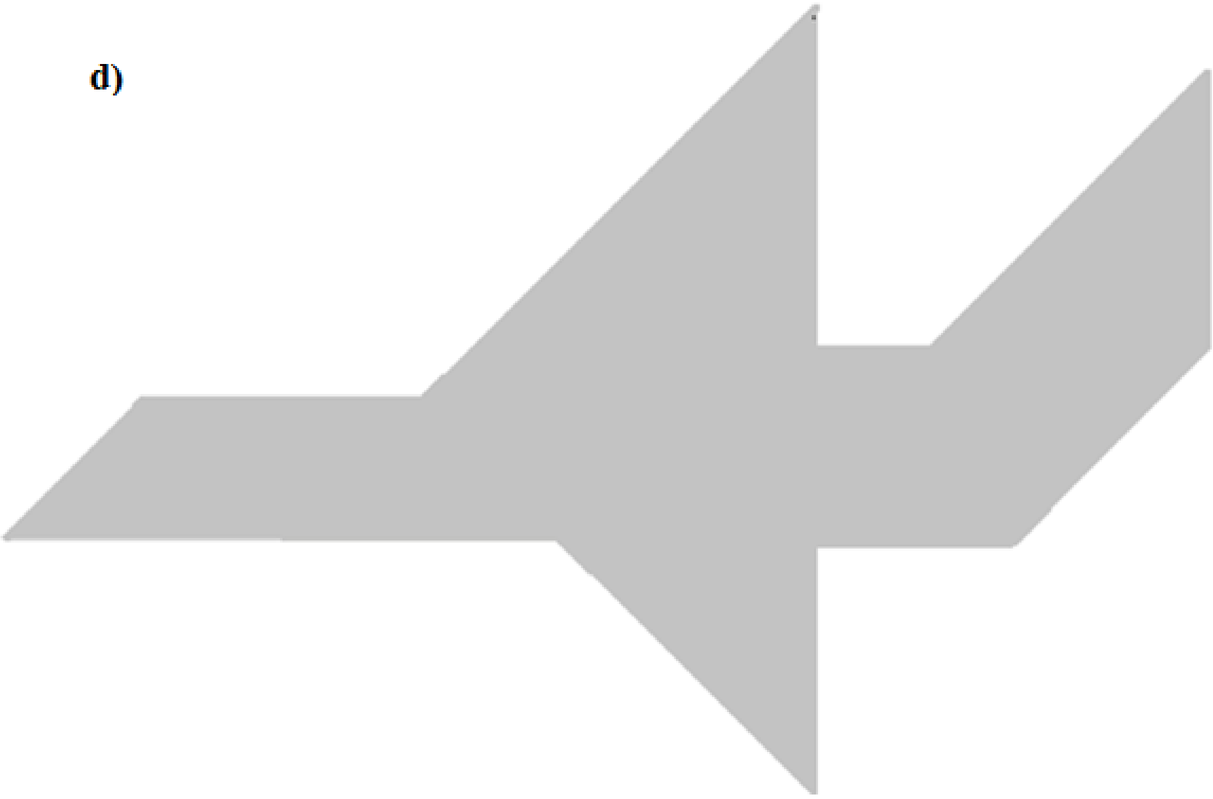
*Obrázek 59*

**c)**



*Obrázek 60*

**d)**



*Obrázek 61*

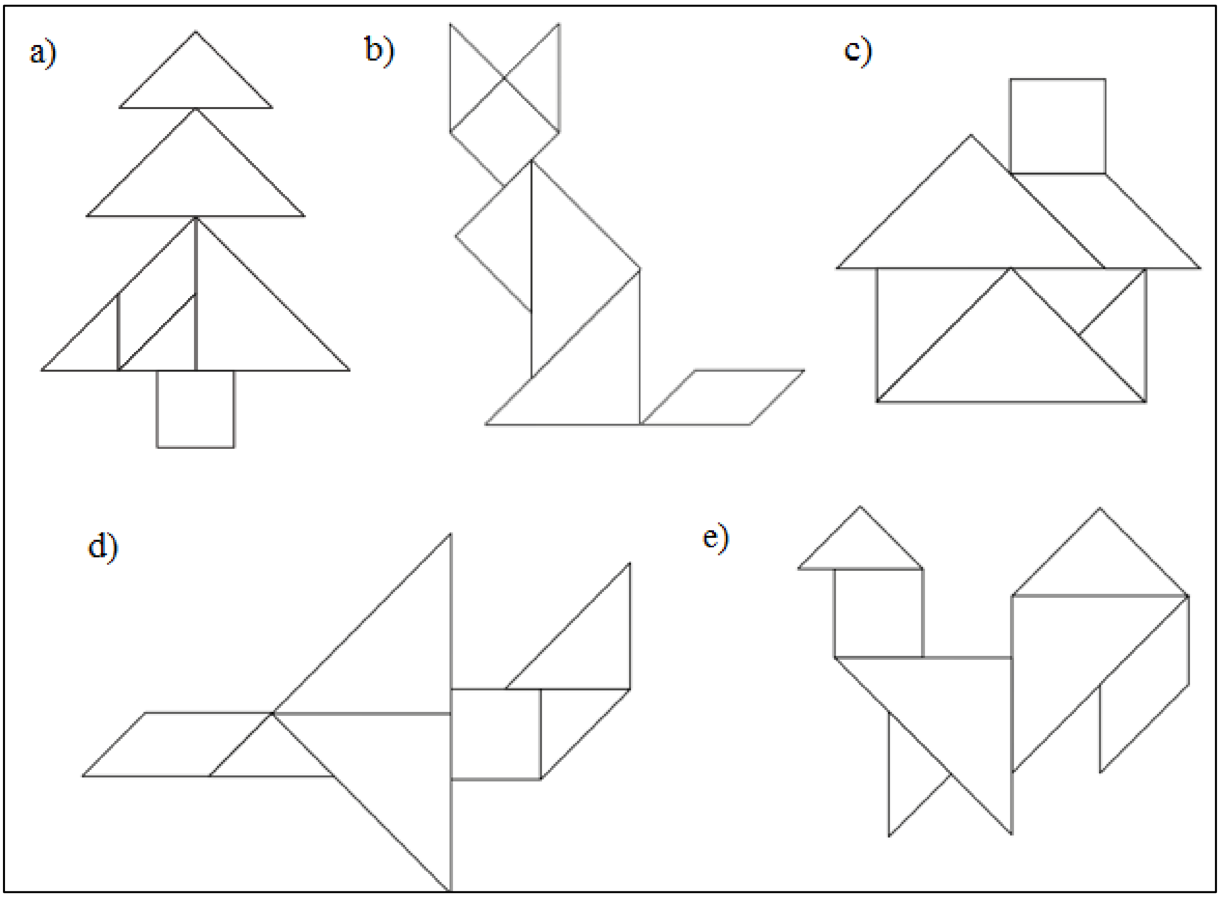
**e)**

*Obrázek 62*

Obtížnost: ⭐ ⭐

Časová náročnost: 5 min na 1 obrazec

Řešení:




*Obrázek 63*

Komentář: Úlohy rozvíjejí rovinnou představivost žáka a jeho schopnost systematicky experimentovat při hledání řešení problému. Dílky tangramu a předlohy obrazců jsou v odpovídající si velikosti. Je možné je vytisknout a tangram skládat přímo na předlohu. Pokud bychom chtěli žákům skládání ztížit, doporučujeme předlohy vytisknout v menším formátu tak, aby žáci skládali obrazce mimo předlohy. Při řešení je vhodné jako první umístit dva velké trojúhelníky. Online verze tangramu: https://mathigon.org/tangram (05. 2023).

## 6.4. Lokalizační úlohy

### 6.4.1. Magické obrazce

**Úloha 47: Magický čtverec obsahuje čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tak, že se žádné nesmí opakovat. Součet čísel ve všech řádcích, sloupcích i obou hlavních úhlopříčkách je stejný. Umístěte čísla do čtverce.**

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

*Obrázek 64*

<u>Obtížnost</u>: ★ ★

<u>Časová náročnost</u>: 10 min

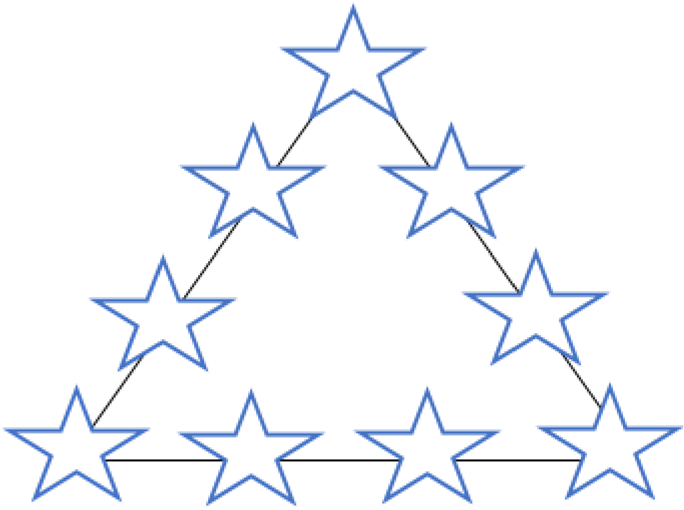
<u>Řešení</u>: Řešení je více, ovšem vždy musí být číslo 5 uprostřed. Uvádíme pouze jedno vybrané řešení.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

*Obrázek 65*

<u>Komentář:</u> Zásadním krokem je objevení součtu čísel v jednom řádku, sloupci resp. na úhlopříčce. Možná nápověda: *Kolik je součet čísel ve všech třech řádcích? Víme, že v každém řádku je součet čísel stejný, kolik tedy bude v jednom řádku?* Poté je vhodné systematicky zapsat trojice různých čísel, jejichž součet je 12. Častou chybou může být zapomenutí na to, že stejný součet čísel musí být i na obou úhlopříčkách. Možný doplňující úkol: *Vysvětlete, proč uprostřed může být pouze číslo 5.* Slabším žákům lze hodnotu součtu čísel na jednotlivých řádcích, sloupcích a úhlopříčkách sdělit přímo při zadání. Nadaným žákům doporučujeme zadat spíše magický čtverec o rozměrech 4 x 4, do kterého se doplňují čísla od 1 do 16. V rámci zadání opět můžeme sdělit i součet čísel na jednom řádku, který je v tomto případě 23. Zadání magických čtverců online: <u>https://www.umimematiku.cz/presouvani-scitani-magicke-ctverce-2/201</u> (05. 2023).

**Úloha 48: Zapište do každé hvězdy jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tak, aby součet čísel na každé straně trojúhelníku byl 21. Každé číslo můžete použít pouze jednou.** (inspirováno [22])

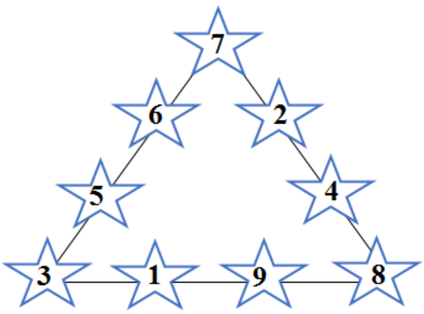


*Obrázek 66*

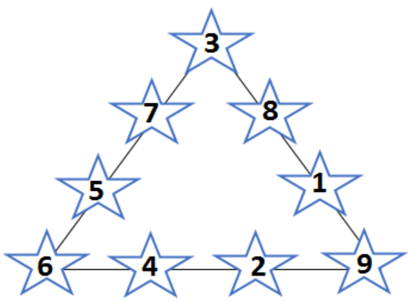
Obtížnost:

Časová náročnost: 10 min

Řešení: Úloha má více řešení, uvádíme dvě vybraná:



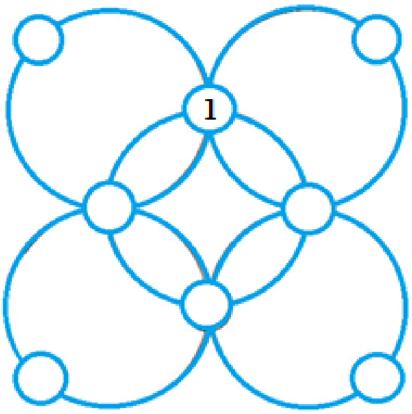

*Obrázek 69*




*Obrázek 68*

Komentář: Nejobtížnějším krokem je určit, která čísla je třeba umístit do vrcholů trojúhelníka. Stačí si uvědomit, že součet všech čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 je 45 a že každé číslo při vrcholu trojúhelníku vystupuje ve dvou součtech při stranách. Protože $21 \cdot 3 - 45 = 18$, musí být součet čísel u vrcholů roven 18. Pak už není těžké čísla do trojúhelníku rozmístit. Doporučujeme žáky navést na zmíněný způsob objevení čísel u vrcholů, neboť jejich náhodné hledání je velmi zdlouhavé. Nadaným žákům je vhodné zadat objevení více řešení či určení všech trojic čísel, které mohou být při vrcholech trojúhelníka.

**Úloha 49: Doplňte do kroužků čísla 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8 tak, aby součet všech čísel na každé kružnici byl 12.** (inspirováno [22])

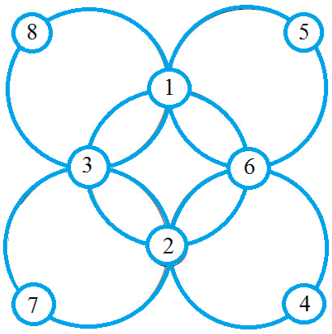



*Obrázek 70*

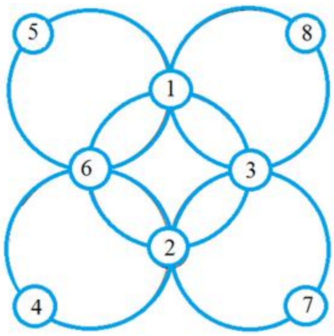
Obtížnost:

Časová náročnost: 10 min

Řešení: Úloha má dvě řešení:



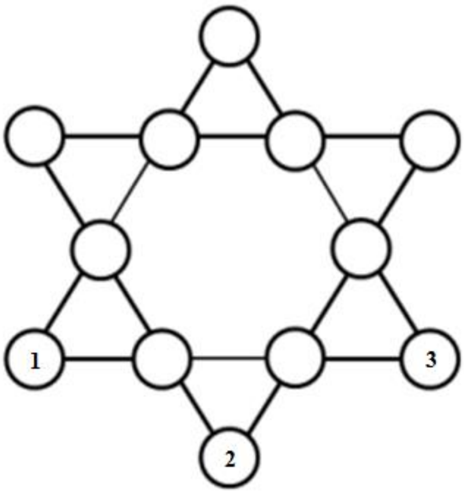

*Obrázek 71*




*Obrázek 72*

Komentář: Úlohu lze snadno diferenciovat, pro jednodušší verzi lze do zadání správně umístit číslo 2, naopak odstraněním čísla 1 získáme obtížnější verzi. Při řešení je vhodné vypsat všechny trojice čísel, jejichž součet je 12, a následně hledat způsob, jak je správně uspořádat na kružnice. Častou obtíží a také chybou je získání správného součtu na prostřední kružnici.

**Úloha 50: Do prázdných kroužků šesticípé hvězdy rozmístěte všechna přirozená čísla od 1 do 12 tak, aby součet čtyř čísel v přímých směrech byl vždy 26. Čísla 1, 2 a 3 jsou již v hvězdě doplněny.** (inspirováno [40])

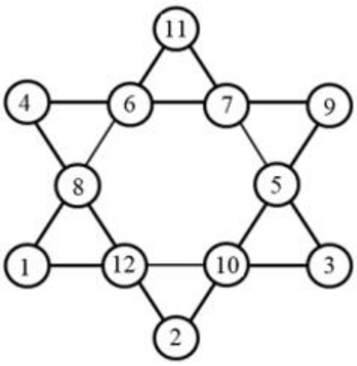



*Obrázek 73*

Obtížnost: ✽ ✽ ✽

Časová náročnost: 15 min

Řešení:



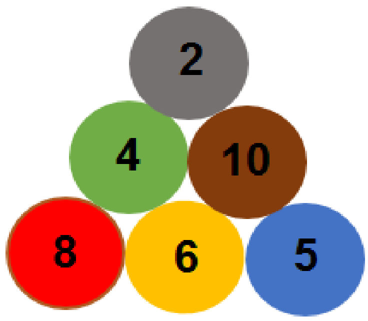

*Obrázek 74*

Komentář: Při řešení je vhodné systematicky zaznamenávat čtveřice čísel, jejichž součet je 26, přičemž je výhodné hledat čtveřice, ve kterých již některá čísla známe, tj, jako první začít čtveřicí obsahující čísla 1 a 3.

### 6.4.2. Správné uspořádání

**Úloha 51: Dokážete koule na obrázku zpřeházet podle následujících nápověd?**

- **Osmička je hned nalevo od šestky.**
- **Součet čísel na koulích ve spodní řadě je 16.**
- **Desítka je ve spodní řadě uprostřed.**
- **Čtyřka se dotýká osmičky.**




*Obrázek 75*

Obtížnost: ★

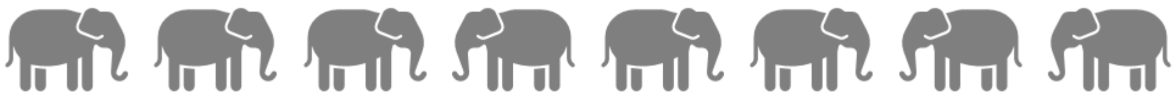
Časová náročnost: 5 min

Řešení:


*Obrázek 76*

Komentář: Úloha rozvíjí schopnost přehledně zaznamenávat dané informace a vyvozovat z nich závěry.

**Úloha 52: V jedné řadě je 8 slonů. Pokud dva sloni stojí vedle sebe hlavami k sobě, vymění si místo. Za jednu výměnu považujeme prohození míst dvou slonů. Tyto výměny probíhají postupně a pokračují tak dlouho, dokud tam někteří dva takoví sloni budou. Kolik takových výměn proběhne?** (inspirováno [18])



*Obrázek 77*

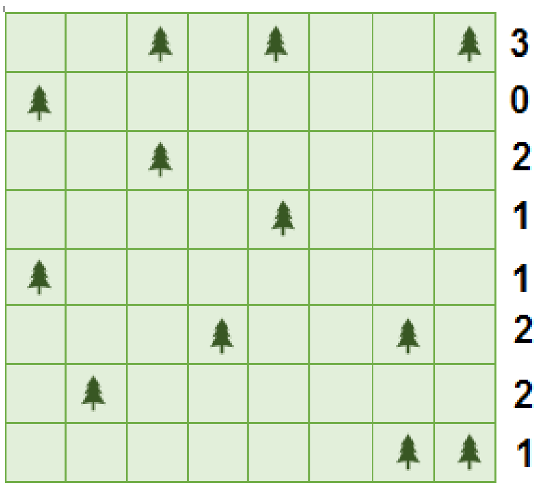
Obtížnost: ★★

Časová náročnost: 5 min

Řešení: 13

Komentář: Při řešení je třeba si uvědomit, že výměny skončí právě tehdy, když všechny slony směřující nalevo převedeme do levé části řady a všechny slony směřující napravo do pravé části řady. Do tohoto stavu slony dostaneme pomocí systematického vyměňování.

**Úloha 53: Stany v kempu Pod stromy jsou rozmístěny podle jasně daných pravidel. Ve vodorovném nebo svislém směru s každým stromem těsně sousedí jeden stan. Dva stany nesmějí být těsně vedle sebe, a to ani úhlopříčně. Čísla na konci každé řady a sloupce udávají počet stanů v dané řadě či sloupci. Dokážete podle těchto pravidel stany správně rozmístit?** (inspirováno [2])

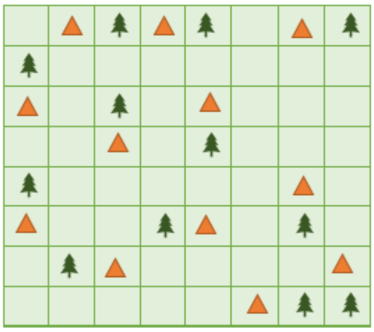



*Obrázek 78*

Obtížnost: 

Časová náročnost: 10 min

Řešení:



*Obrázek 79*

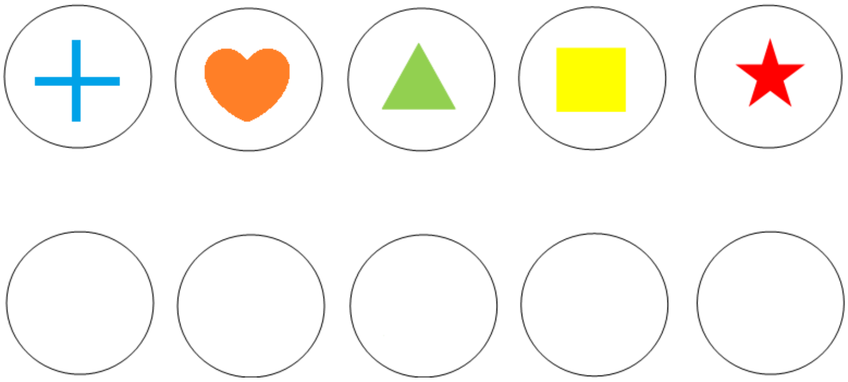
Komentář: Pochopení zadání této úlohy může být pro mnohé žáky velmi obtížné, proto doporučujeme jeho společné vysvětlení či případné společné umístění prvního stanu. Při řešení je vhodné postupně slabě vyškrtávat políčka, ve kterých nemůže být žádný stan umístěn.

**Úloha 54: Je dáno 5 symbolů. Dokážete je pomocí třech nápověd uspořádat ve správném pořadí?**

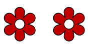
**1. nápověda: Trojúhelník ani křížek není vedle čtverce.**

**2. nápověda: Srdce sousedí s jedním symbolem, tím však není křížek.**

**3. nápověda: Mezi hvězdou a křížkem je právě jeden symbol a zároveň se hvězda nachází nalevo od křížku.** (inspirováno [2])



*Obrázek 80*

Obtížnost: 

Časová náročnost: 5 min

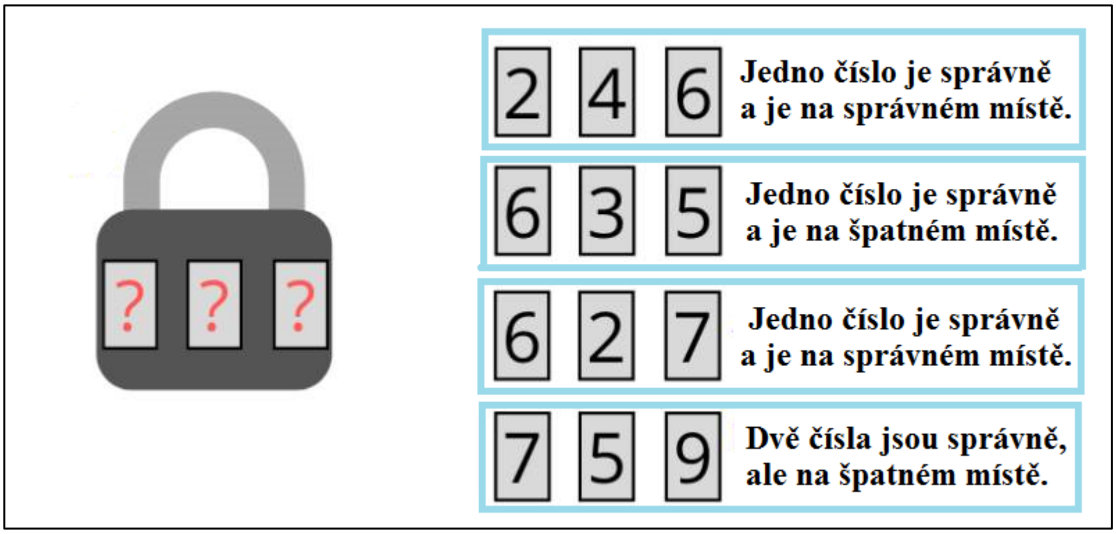
Řešení:

*Obrázek 81*

Komentář: Žáci by prostřednictvím této úlohy měli dojít k poznání, že k vyřešení úlohy nepostačuje uchování nápověd v paměti, ale že je třeba nápovědy přehledným způsobem zaznamenat. Úloha rovněž vede žáka k ověření správnosti výsledku vzhledem k stanoveným podmínkám. Nejčastější chybou bývá uspořádání symbolů v opačném pořadí, kdy však není splněna 3. nápověda (viz obrázek 81).

*Obrázek 82*

**Úloha 55: Pomocí čtyř indicií rozlušti číselný kód, který otevírá zámek.**




*Obrázek 83*

Obtížnost: ✿ ✿

Časová náročnost: 5 min

Řešení: 547

Komentář: Úlohu lze snadno diferenciovat tím, že slabším žákům zprostředkujeme ještě jednu indicii:


*Obrázek 84*

Úloha rozvíjí schopnost kombinovat více pravdivých tvrzení dohromady, vyvozovat z nich závěry a ty následně ověřovat. Zásadním krokem je zjištění, že čísla 2 a 6 nejsou součástí kódu, což vyplývá z 1. a 3. tvrzení.

**Úloha 56: Do prázdných políček tabulky zakreslete v podobě černých puntíků zadaný počet min tak, aby v každém políčku byla nejvýše jedna mina. Při umístění vás omezují políčka s čísly, která udávací počet nim nacházejících se v sousedních políčkách (včetně diagonálních).**

**a) Doplňte 15 min.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | | 4 | | |
| | | | | | 3 |
| | | 2 | | 3 | |
| 1 | | | | | 4 |
| | | 2 | | | |
| 0 | | | 3 | | |

*Obrázek 85*

**b) Doplňte 25 min.**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 3 | | |
| 1 | | 2 | | 3 | | | | |
| | 1 | | | | 1 | | | 3 |
| | | 5 | | 4 | | 1 | | |
| 3 | | | | | | | | |
| | 3 | | 6 | | 6 | | | 2 |
| | | 3 | | | | | | |
| 1 | | | | 4 | | | 5 | |
| | | | | | | 2 | | |

*Obrázek 86*

Obtížnost: a) ★★ b) ✿✿✿

Časová náročnost: a) 5 min b) 15 min

Řešení:

a)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | ● | ● | 4 | ● | |
| ● | ● | ● | | ● | 3 |
| ● | | 2 | | 3 | ● |
| 1 | | | | ● | 4 |
| | | 2 | ● | ● | ● |
| 0 | | ● | 3 | | ● |

*Obrázek 87*

b)

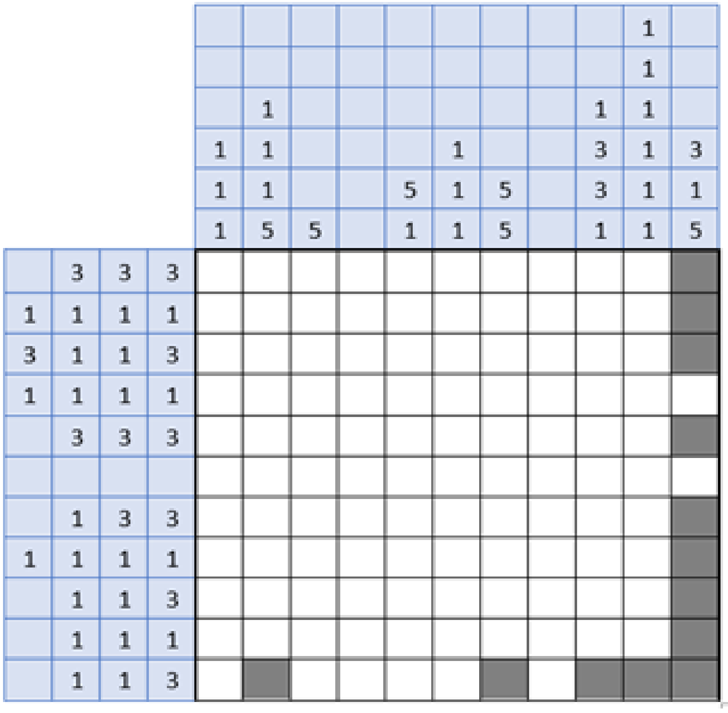
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ● | | | | ● | 3 | | |
| 1 | | 2 | | 3 | ● | | ● | ● |
| | 1 | | ● | | 1 | | | 3 |
| | ● | 5 | | 4 | | 1 | | ● |
| 3 | ● | ● | ● | ● | ● | | | |
| ● | 3 | | 6 | ● | 6 | | | 2 |
| | | 3 | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 1 | ● | | ● | 4 | | ● | 5 | |
| | | | | | | 2 | ● | |

*Obrázek 88*

Komentář: Jako první doplňujeme miny, jejichž poloha je jistá. Žákům zdůrazníme, aby úlohu řešili obyčejnou tužkou, jelikož je možné, že umístěné miny bude zapotřebí přesouvat. Ačkoliv je v obou úlohách zadán počet min, zpočátku doporučujeme tuto podmínku vypustit a až poté, co máme rozmístěné všechny miny, se k této podmínce vrátit a upravit podle ní naše řešení. Nejčastější chybou může být doplnění více min než je zadáno. Úloha vede žáka k soustavné sebekontrole při každém kroku řešení. Online verze: https://minesweeper.online/.

### 6.4.3. Zabarvovací úlohy

**Úloha 57: Čísla před každou řadou a nad každým sloupcem označují počet za sebou následujících čtverečků šedé barvy v dané řadě a sloupci. Mezi každým šedým uskupením čtverečků je vždy minimálně jeden bílý čtvereček. Čísla před každou řadou a nad každým sloupcem jsou uspořádána v odpovídajícím pořadí. Dokážete podle tohoto návodu řádky a sloupce v následujícím obrázku správně vybarvit a získat tak šestimístný kód? Poslední řádek a sloupec jsou již správně vybarvené.** (inspirováno [43])

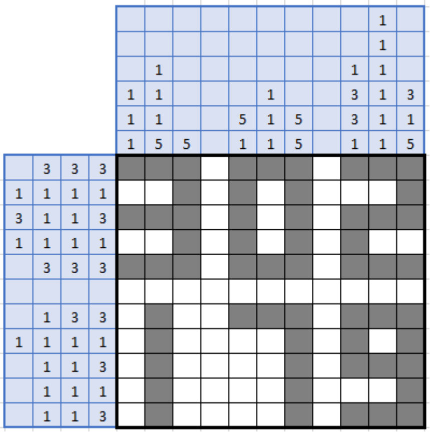



*Obrázek 89*

Obtížnost: ★★

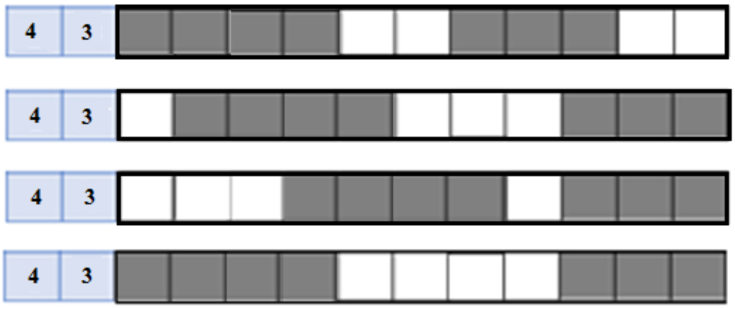
Časová náročnost: 10 min

Řešení:




*Obrázek 90*

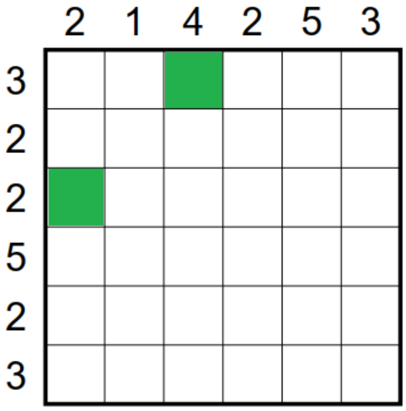
Komentář: Pochopení zadání této úlohy může být pro žáky velmi náročné, proto doporučujeme ho projít společně a názorně ilustrovat, jakým způsobem můžeme řádky a sloupce vybarvovat. Např. řádky, před kterými jsou uvedena čísla 4 a 3, lze vybarvit některým z těchto způsobů:




*Obrázek 91*

Samotné řešení je jednoduché, úloha slouží především k pochopení zadání úloh tohoto typu. Při řešení je vhodné postupovat od řádků a sloupců, které jsou jednoznačně rozvržené, tj. 1., 3. a 4. řádek a 2., 7., 9. a 10. sloupec. Obtížnější variantu předkládáme v úloze 60. Zakódované obrázky lze čerpat z webové stránky: http://kod.petricek.net/, odkud lze obrázky jednoduše vytisknout, či je řešit online.

**Úloha 58: V tabulce je ukryt had o délce 17 políček, který má šířku jednoho pole a skládá se ze stranově sousedících čtverců. Had se sám sebe nedotýká, ani rohem. Čísla okolo tabulky udávají, kolik polí v daném řádku či sloupci je obsazeno hadem. V tabulce je zadaný jeho začátek a konec. Najdi hada.** (inspirováno [44])

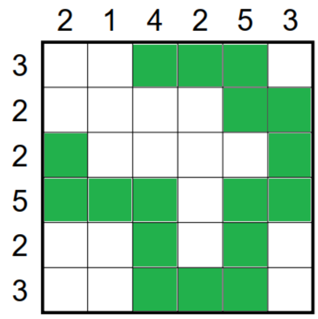



*Obrázek 92*

Obtížnost:

Časová náročnost: 10 min

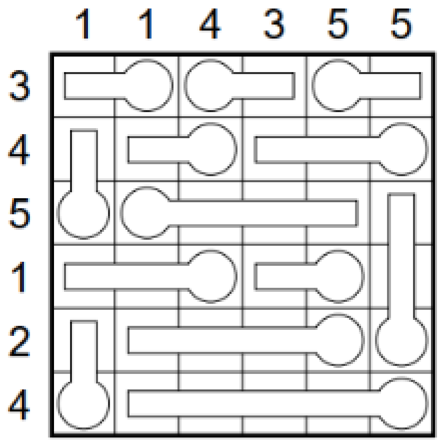
Řešení:




*Obrázek 93*

Komentář: Zpočátku doporučujeme se zaměřit na sloupce a řádky s extrémními hodnotami, tj. 5 políček a 1 políčko. To nám může napovědět, kde se bude nacházet hadova největší část. Jelikož žáci častokrát řeší úlohu způsobem pokus omyl, je třeba jim zdůraznit, aby úlohu řešili obyčejnou tužkou. Úlohu je také možné řešit na tabletech v programu malování, kde žáci snadno zabarvují a odbarvují jednotlivá políčka pomocí funkce *vyplnit barvou*.

**Úloha 59: V mřížce se nachází teploměry, do kterých je třeba zakreslit rtuť. Teploměry mohou být prázdné, plné nebo něco mezi tím. Rtuť však musí vždy začíná od kruhové baňky a jednotkovým množstvím je jedno políčko mřížky. Zakreslete rtuť do teploměrů, jestliže čísla okolo tabulky udávají počet políček obsahujících rtuť v příslušném řádku či sloupci.** (inspirováno [44])

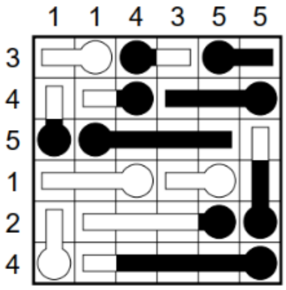



*Obrázek 94*

Obtížnost:

Časová náročnost: 10 min

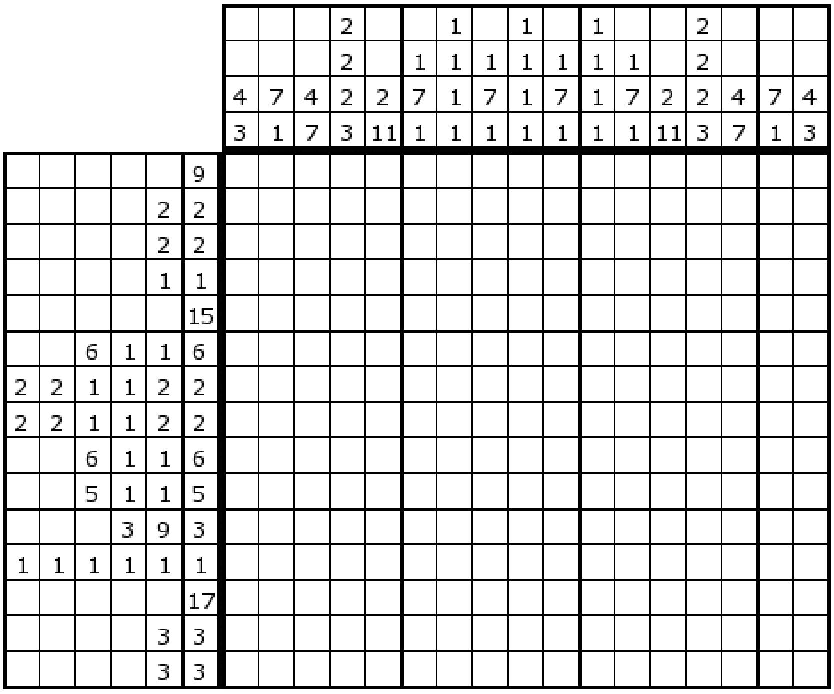
Řešení:




*Obrázek 95*

Komentář: Úloha rozvíjí žákovu schopnost kriticky posuzovat zadané číselné indicie, vyvozovat z nich závěry a ověřovat jejich správnost. Úlohu je vhodné začít řešit od sloupců a řádků, ve kterých se nachází 5 políček s rtutí, a postupně zakreslovat políčka, ve kterých se rtuť jistě nachází, a vyškrtávat políčka, ve kterých rtuť nemůže být.

**Úloha 60: Čísla před každou řadou a nad každým sloupcem označují délky šedých úseků (počty za sebou následujících čtverečků šedé barvy) v dané řadě a sloupci. Každé dva takového šedé úseky odděluje alespoň jeden bílý čtvereček. Čísla před každou řadou a nad každým sloupcem jsou uspořádána v odpovídajícím pořadí. Dokážete podle tohoto návodu řádky a sloupce správně vybarvit a získat tak zakódovaný obrázek?** (inspirováno [43])

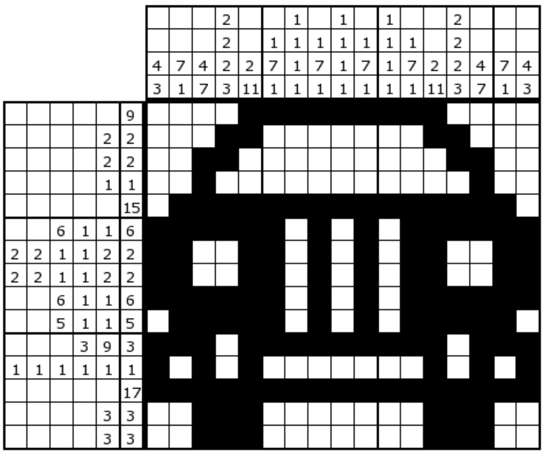


*Obrázek 96*

Obtížnost:

Časová náročnost: 15 min

Řešení:



*Obrázek 97*

Komentář: Tuto úlohu doporučujeme zadávat žákům, kteří již mají zkušenosti s řešením kódovaných obrázků. V případě, že řeší kódovaný obrázek poprvé je vhodné jim předložit úlohu 57, ve které je zadání podrobněji vysvětleno. Při řešení je vhodné postupovat od řádků, které jsou jednoznačně rozvržené, tj. 9., 13. a 11. řádek. Již ze zadání je možné usoudit, že vzniklý obrázek bude osově souměrný podle osy nacházející se v 9. sloupci, což nám velmi usnadní řešení. Zakódované obrázky lze čerpat z webové stránky: http://kod.petricek.net/, odkud lze obrázky jednoduše vytisknout, či je řešit online.

# VÝZKUMNÁ ČÁST

Výzkumná část má dva cíle. Prvním je ověření vytvořené sbírky úloh, druhým cílem je pomocí dotazníkového šetření zmapovat, jakými prostředky rozvíjejí učitelé matematiky logické myšlení žáků.

## 7. Ověření vytvořené sbírky úloh

V této kapitole uvedeme, jakým způsobem jsme ověřovali vytvořenou sbírku úloh. Zmíníme zvolenou metodu výzkumu, charakterizujeme výzkumný vzorek, popíšeme realizaci výzkumu a vyhodnotíme získaná data.

### 7.1. Metoda výzkumu

Ověření navržené sbírky úloh přispívajících k rozvoji logického myšlení jsme provedli metodou **vyhodnocení didaktického testu**, který jsme sestavili z úloh převzatých z navržené sbírky. Ve sbírce rozlišujeme úlohy pro 6. – 7. ročník a úlohy pro 8. – 9. ročník, proto jsme vytvořili dva didaktické testy, každý pro odpovídající dvojici ročníků. Do každého testu jsme vybrali 6 testových úloh tak, aby test zahrnoval vždy jeden až dva příklady z každé ze čtyř popsaných kategorií logických úloh. Každý test obsahoval dvě lehké, dvě středně těžké a dvě velmi těžké úlohy. Jednotlivé úlohy jsme v testech uspořádaly od nejjednodušších po nejobtížnější. Didaktické testy nebyly standardizovány. Jde o dlouhý a náročný proces. S ohledem na cíl didaktického testu, ověření funkčnosti navrhovaných úloh, není standardizace testu nutná.

Tři úlohy ve vytvořených didaktických testech měly více než jedno řešení, což bylo uvedeno v jejich zadání. Po řešiteli bylo požadováno pouze jedno z těchto řešení. Ve způsobu řešení či zaznamenání jeho průběhu nebyli řešitelé jinak omezováni. Čas potřebný k vypracování každého testu jsme stanovili na 40 minut. Z důvodu přehlednosti a jednoznačnosti řešení zapisovali řešitelé výsledky úloh do záznamového archu. Zadané didaktické testy, záznamové archy a správná řešení jsou uvedená v přílohách 1 – 6.

### 7.2. Výzkumný vzorek

Výzkumný vzorek tvořili všichni žáci druhého stupně na Základní škole v Sobotce, kteří byli přítomni v době zadání didaktických testů. Jedná se o maloměstskou školu, která vzdělává žáky od prvního ročníku až po devátý, přičemž v každém ročníku jsou dvě třídy s 20 až 30 žáky. Matematika je zde vyučována v 6., 8. a 9. ročníku v hodinové dotaci 4 hodiny týdně a v 7. ročníku v hodinové dotaci 5 hodin týdně. Nestandardní úlohy jsou v ŠVP zařazeny v každém ročník hned několikrát, a to na konci většiny tematických celků. Žáci se pravidelně zapojují do matematické olympiády a Matematického klokana, kde mají možnost se setkat s řadou úloh, které mají potenciál rozvíjet jejich logické myšlení. Počty žáků, kteří tvořili výzkumný vzorek, uvádíme v tabulce 12.

| **ročník** | **celkový počet žáků** | **žáci s SPU** | **žáci OMJ** |
|---|---|---|---|
| **6. ročník** | 43 | 3 | 2 |
| **7. ročník** | 49 | 5 | 3 |
| **8. ročník** | 39 | 4 | 3 |
| **9. ročník** | 46 | 6 | 4 |

*Tabulka 12: Počty žáků, kterým byly předloženy didaktické testy*

## 7.3. Realizace výzkumu

Didaktické testy byly zadány žákům na Základní škole v Sobotce v termínu od 29.5. do 2.6. 2023. Testy zadávali příslušní učitelé matematiky, kteří společně s dostatečným počtem zadání testů a záznamových archů obdrželi tyto instrukce:

*Každý žák obdrží 1 test a 1 záznamový arch. Do testu řeší úlohy, do záznamového archu zapisuje výsledky. Testy jsou anonymní, žáci se nepodepisují a odevzdávají oba papíry společně na jednu hromádku, aby bylo možné dohledat, které papíry k sobě patří. Žáci mohou mít k dispozici pouze psací potřeby. Čas na vypracování testu je 40 minut. U každé úlohy stačí uvést jedno řešení.*

*Prosím o vyplnění informací o žácích, kterým byl didaktický test předložen.*

*ročník:*

*celkový počet žáků:*

*počet žáků s SPU:*

*počet žáků s OMJ:*

*počet žáků, kteří by na vypracování testu potřebovali více času:*

*dotazy žáků k testu:*

## 7.4. Vyhodnocení získaných dat

Získaná data jsme vyhodnotili jak kvantitativně, tak kvalitativně. V rámci kvantitativního vyhodnocení jsme provedli **analýzu obtížnosti jednotlivých úloh**, pomocí které jsme ověřovali správnost přiřazení obtížnosti jednotlivým úlohám v navržené sbírce. Při této analýze jsme určili index obtížnosti, což je procento testovaných ve skupině, kteří danou úlohu vyřešili správně. Index obtížnosti jsme vypočítali pomocí vzorce:

$$P = 100 \cdot \frac{n_s}{n}$$

kde $P$ je index obtížnosti, $n_s$ počet žáků, kteří odpověděli správně a $n$ je celkový počet žáků ve vzorku. Při vyhodnocování indexu obtížnosti jsme se drželi hodnot stanovených Chráskou [10]:

- $P$ se blížící k 100 → nevhodná úloha pro daný ročník,
- $P$ je vyšší než 80 → lehká úloha,
- $P$ je 80 až 20 → středně těžká úloha,
- $P$ je nižší než 20 → velmi těžká úloha,
- $P$ se blížící k 0 → nevhodná úloha pro daný ročník.

Didaktický test pro 6. – 7. ročník nestihlo v časovém limitu 40 minut dokončit 5 žáků, tj. 5,4 % žáků z výzkumného vzorku. Jednalo se o zanedbatelné procento, které analýzu úloh výrazně neovlivnilo. Hodnoty indexu obtížnosti úloh pro 6. – 7. ročník uvádíme v tabulce 13.

| | **navržená úroveň obtížnosti** | **hodnota indexu obtížnosti** | **úroveň obtížnosti na základě indexu obtížnosti** |
|---|---|---|---|
| **příklad 1 a)** | lehká | 82,60 | lehká |
| **příklad 1 b)** | středně těžká | 67,39 | středně těžká |
| **příklad 1 c)** | velmi těžká | 54,43 | středně těžká |
| **příklad 2** | lehká | 80,43 | lehká |
| **příklad 3** | středně těžká | 29,30 | středně těžká |
| **příklad 4** | středně těžká | 38,04 | středně těžká |
| **příklad 5** | velmi těžká | 23,91 | středně těžká |
| **příklad 6** | velmi těžká | 19,56 | velmi těžká |

*Tabulka 13: Obtížnost úloh v didaktického testu pro 6. – 7. ročník*

Hodnota indexu obtížnosti úloh pro 6. – 7. ročník odpovídala navržené úrovni u všech úloh kromě dvou. Jednalo se o příklad 1 c) a příklad 5, u kterých jsme předpokládali obtížnost na úrovni velmi těžká, tedy index obtížnosti by měl být pod hodnotou 20. Tomu nevyhovuje zejména příklad 1 c), jehož index obtížnosti dosáhl hodnoty 54,43. Vzhledem k velké odchylce indexu obtížnosti příkladu 1 c) od požadované hodnoty jsme u tohoto příkladu navrhli očekávanou úroveň obtížnosti chybně. Obtížnost příkladu 1 c) na základě našeho výzkumu byla stanovena na úroveň středně těžkou.

Index obtížnosti příkladu 5 dosáhl hodnoty 23,91. Odchylka této hodnoty od navržené úrovně byla menší než 4 %, proto nelze navrženou úroveň obtížnosti jednoznačně vyvrátit. Krajních hodnot indexu obtížnosti rovněž dosáhly: příklad 1 a), příklad 2, příklad 6.

Didaktický test pro 8. – 9. ročník stihli dokončit všichni žáci v časovém limitu. Výsledky výzkumu nebyly ovlivněny nedostatkem času na vypracování zadaných úloh. Hodnoty indexu obtížnosti úloh pro 8. – 9. ročník uvádíme v tabulce 14.

| | **navržená úroveň** | **hodnota indexu obtížnosti** | **úroveň na základě indexu obtížnosti** |
|---|---|---|---|
| **příklad 1** | lehká | 76,47 | středně těžká |
| **příklad 2** | lehká | 82,35 | lehká |
| **příklad 3** | středně těžká | 21,17 | středně těžká |
| **příklad 4** | středně těžká | 61,17 | středně těžká |
| **příklad 5** | velmi těžká | 17,64 | velmi těžká |
| **příklad 6** | velmi těžká | 20,00 | velmi těžká |

Tabulka 14: Obtížnost úloh v didaktického testu pro 8. – 9. ročník

Hodnota indexu obtížnosti úloh pro 8. – 9. ročník odpovídala navržené úrovni u všech úloh kromě dvou. Jednalo se o příklad 1 a příklad 6. U příkladu 1 jsme navrhovali obtížnost na úrovni lehká, tedy index obtížnosti by měl být nad hodnotou 80. Na základě našeho výzkumu tato hodnota vyšla 76,47.  Odchylka je opět velmi malá, menší než 4 %, proto nelze navrženou úroveň obtížnosti jednoznačně vyvrátit. Stejně je tomu i u příkladu 6, kterému jsme přiřadili očekávanou obtížnost na úrovni velmi těžká, tedy index obtížnosti by se měl pohybovat pod hodnotou 20. Dle naši nasbíraných dat vyšla hodnota indexu obtížnosti tohoto příkladu 20,00, čímž opět nelze jednoznačně vyvrátit navrženou úroveň obtížnosti. Stejně je tomu u příkladů, jejich index obtížnosti nabyl krajních hodnot: příklad 3 a příklad 5.

V rámci analýzy obtížnosti úloh jsme v obou testech potvrdili správné přiřazení obtížnosti k většině testovaných úloh. Nevhodné přiřazení očekávané úrovně jsme odhalili pouze u příkladu 1 c) v didaktickém testu pro 6. – 7. ročník. S ohledem na počet žáků, kteří se zúčastnili ověření obtížnosti úloh a s ohledem na dobré výsledky testovaných úloh, které reprezentovali celou sbírku, lze předpokládat, že navržené úrovně obtížnosti všech úloh dobře korespondují s jejich skutečnou obtížností.

Nyní uvedeme kvalitativní rozbor testovaných úloh, ve kterém jsme se zaměřili na to, jakým způsobem žáci úlohy řešili a jakých chyb se nejčastěji dopouštěli. Některé úlohy žáci řešili jen ve své mysli a zaznamenávali pouze výsledky, proto jsme rozbor provedli pouze u vybraných úloh, k nimž jsme nasbírali potřebná data. Z didaktického testu pro 6. – 7. ročník jsme vybrali: příklad 3, příklad 4 a příklad 6.

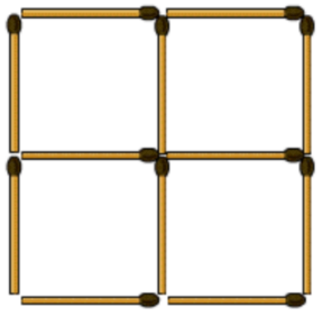
**Příklad 3: Moderátor pozval do svého televizního pořadu 5 hostů. Všichni hosté včetně moderátora si navzájem podali ruce. Kolik stisknutí rukou to bylo celkem?**

Při řešení této úlohy si žáci označili hosty čísly 1 – 5 a moderátora číslem 6 či písmenem M a systematicky vypisovali všechny možnosti podání rukou, tedy spontánně využívali systematického experimentování. Pouze dva žáci řešili úlohu pomocí obrázku. Častou chybou bylo započítání všech podání rukou dvakrát. 15 % žáků provedlo chybnou úvahu, že když každá osoba podá ruku pětkrát a osob je celkem 6, určíme počet stisknutí výpočtem $5 \cdot 6 = 30$. Další častou chybou bylo opomenutí na moderátora zkombinované s předchozí mylnou úvahou. To vedlo žáky k výpočtu $4 \cdot 5 = 20$. Výsledky testů potvrzují námi předpokládané obtíže žáků, na které upozorňujeme ve sbírce úloh v rámci didaktického komentáře.

**Příklad 4: Zebra lže pouze v pondělí, úterý a středu. Šimpanz lže pouze ve čtvrtek, pátek a sobotu. Mauglí se ptal zebry a šimpanze, jaký je den. Zebra řekla: „*Včera byl jeden z mých dnů, kdy lžu.*“ Šimpanz odvětil: „*Včera byl jeden z mých prolhaných dnů*.“ Který den se Mauglí ptal?**

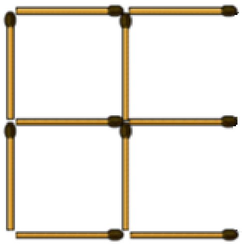
Úlohu žáci nejčastěji řešili pomocí přehledného zápisu dnů, kdy šimpanz a zebra lžou. Následně se zamýšleli, ve které dny mohla zvířata pronést dané výroky. Zásadním krokem bylo objevení dne, ve který mohla dané výroky pronést obě zvířata. Nejčastější chybnou odpovědí byla *neděle*. K tomu žáci došli na základě tvrzení šimpanze, ale již zapomněli zohlednit tvrzení zebry.

**Příklad 6: Odeberte právě dvě zápalky tak, aby na obrázku (obrázek 98) zůstaly <u>pouze dva čtverce a nic jiného.</u>**



*Obrázek 98*

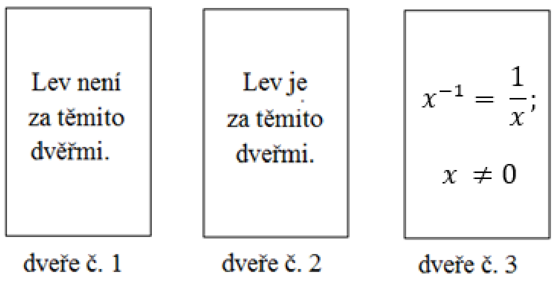
Nejčastější chybou při řešení této úlohy bylo odebrání dvou zápalek ze stran velkého čtverce, které sice vedlo k vytvoření dvou čtverců, ale na obrázku zbyly přebytečné sirky. Tohoto chybného řešení se dopustilo 25 % žáků, proto doporučujeme žákům hned při zadání úlohy zdůraznit, že všechny sirky, které zbydou na obrázku musí vytvářet právě dva čtverce a nic jiného. V didaktickém komentáři také doporučujeme ukázat žákům příklad chybného řešení (obrázek 99), ve kterém jsou přebytečné sirky.



*Obrázek 99*

Z didaktického testu pro 8. – 9. ročník rozebereme řešení příkladů 3, 5 a 6.

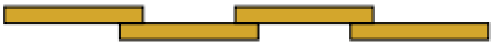
**Příklad 3: Za jedněmi dveřmi je lev. Na každých dveřích je napsáno tvrzení, z nichž nejvýše jedno je pravdivé. Za kterými dveřmi je lev?**




*Obrázek 100*

Tuto úlohu vyřešilo správně pouze 21 % žáků. Nejčastější chybnou odpovědí bylo označení dveří č. 2, ke kterému dospělo 41 % žáků. Zhruba polovina žáků příklad řešila bez jakéhokoliv zápisu, proto se nabízí otázka, zda žáci úlohu opravdu řešili či správný výsledek tipovali. Pouze 10 % žáků provedlo zápis vedoucí k správnému řešení. Žáci označili tvrzení na dveřích č. 3 za pravdivé a tvrzení na zbylých dveřích za nepravdivé, z čehož usoudili, že lev je za dveřmi č. 1. 42 % žáků při řešení zaznamenalo, že tvrzení na dveřích č. 3 je pravdivé. K správnému řešení většina z nich následně nedošla a jako odpověď označila dveře č. 3. Z toho lze usoudit, že problém nespočíval v neznalosti výrazu na dveřích č. 3, ale spíše v chybném vyhodnocení důsledků, které plynou z toho, že tvrzení na dveřích č. 3 pravdivé. Pro žáky bylo obtížné porozumění formulaci „*nejvýše jedno tvrzení je pravdivé*“ a vytvoření negace výroků na dveřích č. 1 a č. 2.

**Příklad 5: Pavel chce vyrobit nový plot z 25 dřevěných prken, z nichž každé je dlouhé 1,5 m. Prkna chce poskládat tak, aby mezi dvěma sousedními prkny bylo shodné mírné překrytí (na obrázku v pohledu shora). Kolika centimetrové překrytí má zvolit, aby mu 25 prken přesně vystačilo na 36,3 m dlouhý plot?**

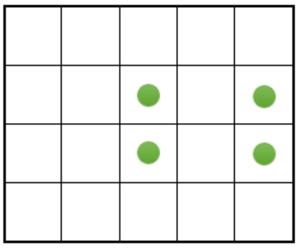


*Obrázek 101*

U úlohy se potvrdil nejnáročnější krok, který jsme předpokládali v příslušném didaktickém komentáři. Největším problémem a také nejčastější chybou bylo určení, kolik překrytí musí Pavel na plotě udělat. 38 % žáků došlo k chybnému závěru (25 překrytí), které vedlo k chybnému určení délky jednoho překryvu. K správnému určení počtu překryvů je třeba si uvědomit, že na konci každého prkna kromě posledního je jeden překryv, tedy překryvů je o jeden méně, než je prken. Další tipy, jak žáky navést na správný počet překryvů, uvádíme v didaktickém komentáři uvedeném v rámci sbírky úloh. Se zbylými kroky řešení neměli žáci žádné obtíže.

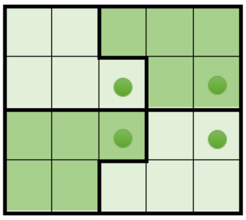
Během zadávání této úlohy žáků, jsme si uvědomili, že úloha není příliš reálná, jelikož plot složený z prken tímto způsobem by byl příliš nízký. Proto jsme po testování upravili zadání této úlohy ve sbírce tak, aby úloha odpovídala realitě a nahradili jsme prkna deskami. Matematický kontext úlohy zůstal po této změně stejný.

**Příklad 6: Rozdělte obdélník složený z 20 čtverců na 4 stejné části tak, aby každá část obsahovala právě jeden puntík.**

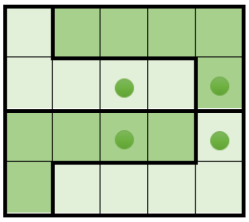


*Obrázek 102*

Jedná se o úlohu, ve které nejsme schopni rozebrat postup, kterým žáci došli k řešení, protože většina z nich zaznamenala pouze výsledek. Na této úloze nás překvapilo, že ačkoliv má dvě různá řešení, všichni úspěšní řešitelé došli k jednomu totožnému řešení (obrázek 102. Druhý způsob řešení (obrázek 103) neuvedl žádný žák. K tomu mohlo dojít tak, že si žáci uvědomili, že každá část musí být složena z 5 čtverců. Dále začali systematicky vytvářet jednotlivé útvary složené z 5 čtverců a zkoušet, zda jsou řešením, a dříve objevili útvar odpovídající prvnímu řešení (obrázek 104). Vzhledem k tomu, že index obtížnosti této úlohy byl na hodnotě 20,00, je možné tuto úlohu ztížit tím, že po řešiteli budeme požadovat uvedení všech řešení.



*Obrázek 103*



*Obrázek 104*

# 8. Dotazníkové šetření

V této části diplomové práce uvedeme popis a vyhodnocení dotazníkového šetření, jehož cílem bylo zmapovat, jakými prostředky rozvíjejí učitelé matematiky logické myšlení žáků na druhém stupni základních škol.

## 8.1. Tvorba a distribuce dotazníku

Dotazník byl sestaven z devíti položek. Cílem první položky bylo ověření, že respondent je učitelem matematiky na druhém stupni základní školy. Druhá položka zjišťovala, jak dlouho respondent matematiku vyučuje. Následovali obsahové položky, pomocí nichž jsme zjišťovali, jakými prostředky a jak často cílí učitelé na rozvoj logického myšlení svých žáků. Zajímalo nás především konstruktivistické vyučování, řešení úloh pomocí heuristických strategií a nestandardní úlohy, které chápeme tak, jak je specifikuje RVP. Sedmá položka se skládala z výčtu všech typů úloh uvedených v navržené sbírce. Respondenti u každého typu úloh zaznamenávali, zda uvedené úlohy využívají při výuce. Rovněž jim byla nabídnuta možnost*: „Tyto úlohy neznám.*“ Pro případ, že by si respondenti nebyli jistí, co si pod daným typem úloh představit, uvedli jsme k vybraným úlohám vysvětlivky. Osmá položka mapovala důvody, proč učitelé nezařazují uvedené typy úloh do výuky častěji. V poslední položce jsme dali učitelům prostor pro vyjádření jejich námětů, poznámek či připomínek k rozvoji logického myšlení. Náhled dotazníku je v příloze 7.

V dotazníku jsme využili všechny tři typy položek na základě formy odpovědi – uzavřené, otevřené i polouzavřené. U velké části položek jsme použili uzavřené odpovědi, zaměřili jsme se především na to, zda a jak často učitelé využívají danou metodu či typ úloh. U třetí a osmé položky jsme použili polouzavřené odpovědi. Zařadili jsme zde očekávané odpovědi a zároveň umožnili respondentovi zaznamenat vlastní odpověď pomocí: „*Jiné….*“. U poslední položky, ve které dáváme učitelům prostor pro poznámky, jsme zvolili odpověď otevřenou.

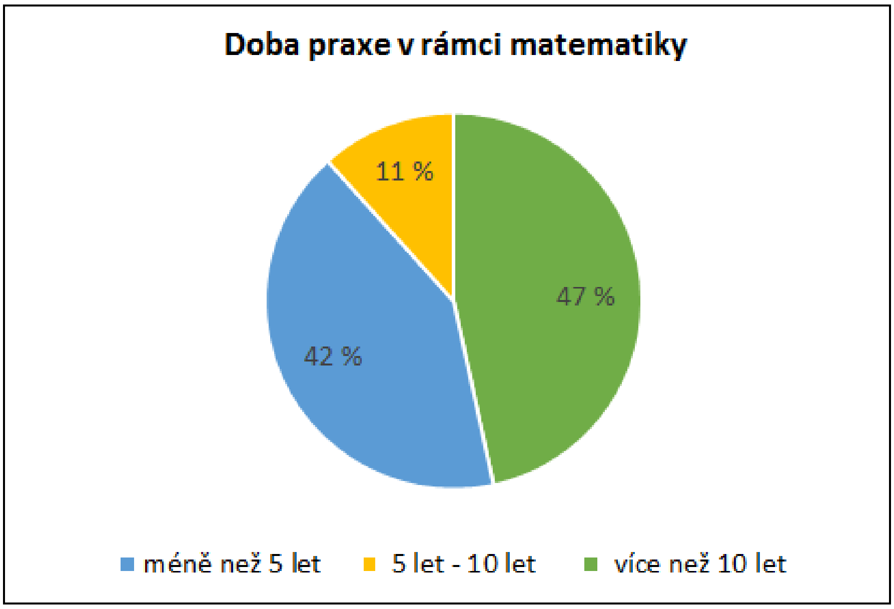
Dotazník byl určen pro učitele matematiky na druhém stupni základních škol. Byl vytvořen v aplikaci Survio a distribuován online formou. Dotazník byl rozeslán 24.5.2023 učitelům matematiky přes e-mail a sociální sítě. Jeho vyplnění bylo možné po dobu jednoho týdne. Dotazníkového šetření se zúčastnilo celkem 103 respondentů.

## 8.2. Vyhodnocení dotazníku

**Položka 1: Učíte nebo jste učil/a matematiku na druhém stupni základní školy?**

Na první otázku odpověděli všichni respondenti kladně, tedy dotazník vyplňovali pouze učitelé, kteří učí, či v minulosti učili matematiku na druhém stupni základní školy.

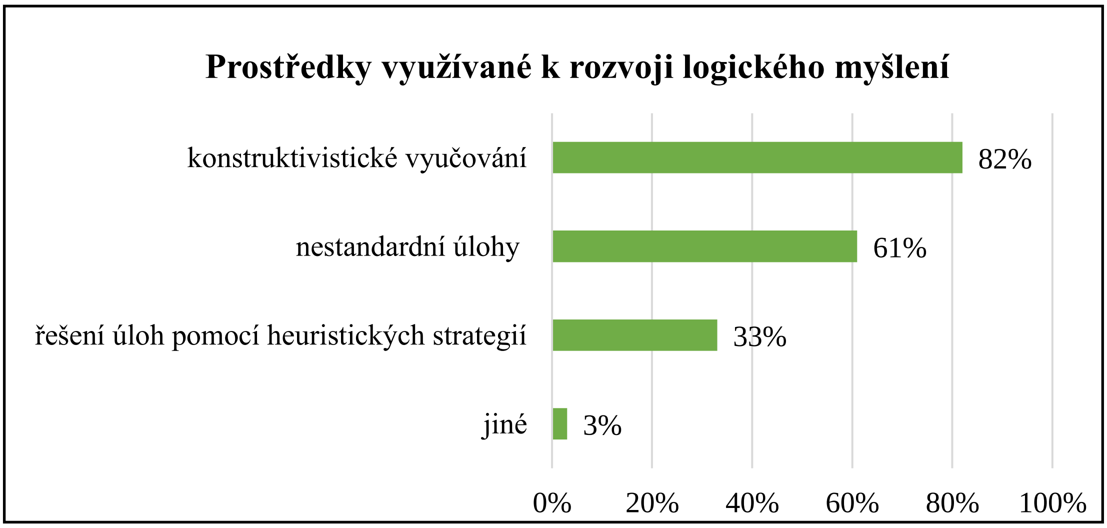
**Položka 2: Jak dlouho učíte matematiku na 2. stupni ZŠ?**




*Graf 1: Doba praxe v rámci matematiky*

Mezi respondenty převažovali učitelé, kteří vyučují matematiku více než 10 let. Nepatrně menší bylo zastoupení začínajících učitelů, tedy učitelů s praxí v rámci matematiky kratší než 5 let.

**Položka 3: Jaké prostředky používáte k rozvoji logického myšlení svých žáků?**



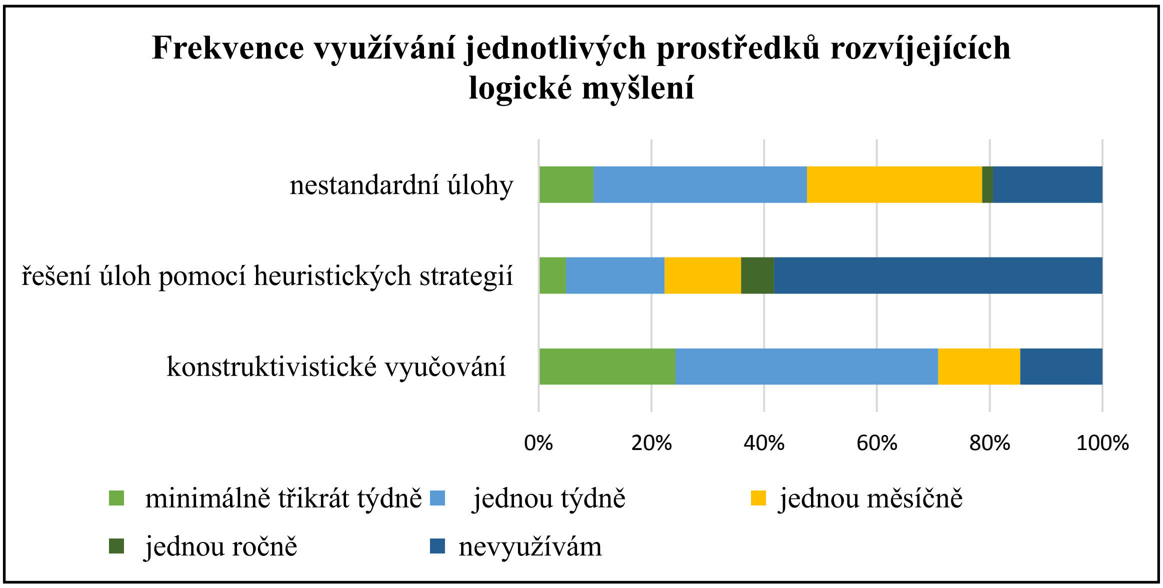

*Graf 2: Prostředky využívané k rozvoji logického myšlení*

Graf znázorňuje relativní četnost počtu učitelů, kteří používají dané prostředky k rozvoji logického myšlení. Nejvíce využívaným prostředkem k rozvoji logického myšlení žáků je konstruktivistické vyučování. Při výuce ho využívá 82 % dotazovaných učitelů. Nadpoloviční většina z nich zařazuje do výuky nestandardní úlohy. Pouze třetina dotazovaných cílí na rozvoj logického myšlení žáků řešením úloh pomocí heuristických strategií.

**Položka 4: Jak často při výuce využíváte <u>konstruktivistické vyučování</u>?**

**Položka 5: Jak často při výuce využíváte <u>řešení úloh pomocí heuristických strategií</u>?**

**Položka 6: Jak často při výuce využíváte <u>nestandardní úlohy</u>?**




*Graf 3: Frekvence využívání jednotlivých prostředků rozvíjejících logické myšlení*

Učitelé do výuky zařazují nestandardní úlohy převážně jednou týdně či jednou měsíčně. Řešení úloh pomocí heuristických strategií do výuky zařazuje přibližně 40 % dotazovaných, opět nejčastěji s frekvencí jednou měsíčně až jednou týdně. Konstruktivistické vyučování využívá jednou týdně 45 % pedagogů, 25 % z nich ho do výuky zařazuje dokonce minimálně třikrát týdně a 15 % ho zařazuje jednou měsíčně.

**Položka 7: Využíváte uvedené nestandardní úlohy v hodinách matematiky?**

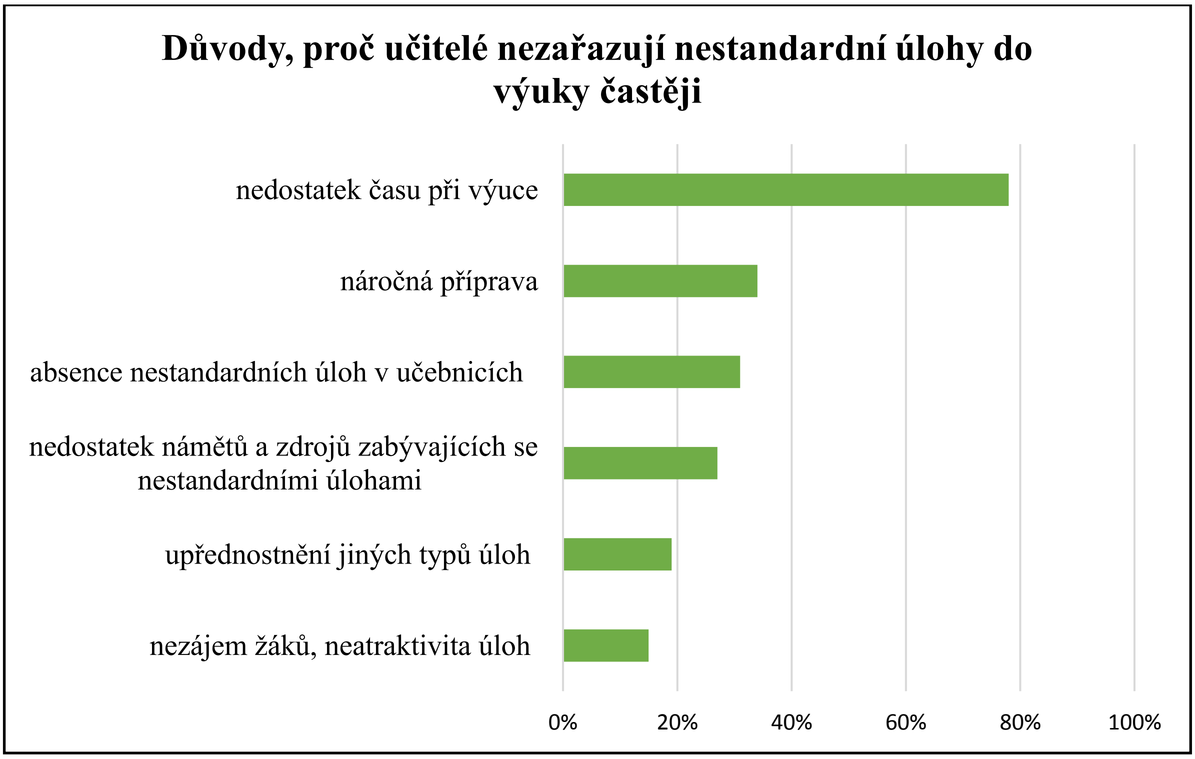
Za účelem kvantitativního vyhodnocení položky 7 jsme uvedli četnost odpovědí respondentů u jednotlivých typů úloh a průměrné rozložení odpovědí. To jsme určili tak, že jsme přiřadili číselné hodnoty jednotlivým škálovým položkám: 5 – určitě ano, 4 – spíše ano, 3 – tyto úlohy neznám, 2 – spíše ne, 1 – určitě ne. Jednotlivé hodnoty jsme vynásobili jejich četností a všech 5 součinů sečetli. Tento součet jsme vydělili počtem respondentů. Výsledná hodnota znázorňovala průměrné rozložení odpovědí a mohla se pohybovat v intervalu ⟨1; 5⟩. Tato výsledná hodnota identifikovala, zda učitelé využívají daný typ úloh v hodinách matematiky. Čím vyšší tato hodnota byla, tím více učitelů zařazovalo dané úlohy do výuky [10].

| | **určitě ano** | **spíše ano** | **tyto úlohy neznám** | **spíše ne** | **určitě ne** | **průměrné rozložení odpovědí** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **aritmetické úlohy** | 59 | 43 | 0 | 1 | 0 | **4,55** |
| **číselné a obrázkové posloupnosti** | 26 | 50 | 0 | 24 | 3 | **3,70** |
| **kombinatorické úlohy** | 29 | 40 | 3 | 29 | 2 | **3,54** |
| **rozdělení obrazce** | 26 | 39 | 3 | 29 | 6 | **3,46** |
| **číselná schémata** | 14 | 45 | 6 | 25 | 5 | **3,14** |
| **úlohy se sirkami** | 21 | 32 | 1 | 38 | 10 | **3,13** |
| **tangramy** | 18 | 31 | 11 | 28 | 15 | **3,09** |
| **zebry** | 7 | 21 | 42 | 21 | 12 | **2,90** |
| **správné uspořádání** | 7 | 39 | 4 | 38 | 15 | **2,85** |
| **magické obrazce** | 9 | 30 | 13 | 36 | 15 | **2,83** |
| **algebrogramy** | 9 | 26 | 13 | 35 | 20 | **2,70** |
| **zabarvovací úlohy** | 3 | 24 | 21 | 38 | 17 | **2,59** |
| **úlohy jedním tahem** | 11 | 21 | 4 | 45 | 22 | **2,55** |
| **logické úlohy** | 5 | 21 | 7 | 49 | 21 | **2,42** |

*Tabulka 15: Četnost jednotlivých odpovědí a jejich průměrné rozložení*

Nejvíce využívaným typem z uvedených úloh jsou aritmetické úlohy, které využívají všichni respondenti kromě jednoho. K úlohám, které do výuky zařazuje alespoň polovina dotazovaných, patří číselné a obrázkové posloupnosti, kombinatorické úlohy, rozdělení obrazce, číselná schémata, úlohy se sirkami a tangramy. Naopak nejméně jsou do výuky zařazovány logické úlohy, úlohy jedním tahem, zabarvovací úlohy a algebrogramy. K úlohám, které byly pro všechny respondenty známé, řadíme pouze aritmetické úlohy a číselné a obrázkové posloupnosti. Nejméně známým typem úloh byly zebry, které nezná 35 % dotazovaných učitelů. Více než 10 % z nich rovněž nezná zabarvovací úlohy, algebrogramy, magické obrazce či tangramy.

**Položka 8: Proč nezařazujete úlohy uvedené v předchozí položce do výuky častěji?**




*Graf 4: Důvody, proč učitelé nezařazují předložené úlohy do výuky častěji*

Hlavním důvodem, proč učitelé nevyužívají předložené nestandardní úlohy více, je nedostatek času při výuce. Tento důvod uvádí téměř 80 % respondentů. Více než 20 % z nich uvádí tyto tři důvody: náročná příprava, absence úloh v učebnicích a nedostatek námětů a zdrojů zabývajících se nestandardními úlohami. Méně než 20 % respondentů nezařazuje zmíněné úlohy do výuky častěji z důvodu upřednostnění jiných typů úloh a také z důvodu nezájmu žáků a neatraktivity úloh.

**Položka 9: Místo pro poznámky, připomínky či nápady k rozvoji logického myšlení žáků v hodinách matematiky.**

V rámci této položky učitelé nejčastěji zmiňovali, že k rozvoji logického myšlení žáků přispívá vytvoření menších vzdělávacích skupin s 10 - 15 žáky, kteří jsou na podobné úrovni, a vyšší časová dotace hodin matematiky. Někteří také uváděli, že nestandardní úlohy zařazují do výuky jako matematické rozcvičky či mají vytvořený soubor nestandardních úloh, který nosí do všech hodin. V případě, že mají žáci splněný zadaný úkol, vybírají si z tohoto souboru sami úlohu, kterou řeší. Další připomínkou bylo zařazování nestandardních úloh (např. jednoduché kombinatorické úlohy) již v předškolním věku a na prvním stupni ZŠ, aby byli žáci zvyklí hledat vlastní metody řešení.

# ZÁVĚR

Diplomová práce se zaměřovala na možnosti rozvoje logického myšlení žáků v hodinách matematiky na druhém stupni základní školy. Z počátku jsme se zabývali teoretickým vymezením logického myšlení a jeho vývojem a s ním úzce související matematickou logikou, která bývá někdy s logickým myšlením ztotožňována. V rámci této práce jsme matematickou logiku chápali pouze jako nezbytnou část logického myšlení.

Dále jsme stanovili tři prostředky, pomocí nichž lze v hodinách matematiky cílit na rozvoj logického myšlení žáků. Mezi tyto prostředky jsme zařadili konstruktivistické vyučování, heuristické strategie a úlohy rozvíjející logické myšlení. Zjistili jsme, že klasifikace logických úloh není v současnosti jednoznačně zavedená z důvodu jejich obrovské rozmanitosti a jejich vzájemného prolínání. Pro účely této diplomové práce jsme stanovili vlastní klasifikaci úloh, které mají potenciál rozvíjet logické myšlení.

V praktické části jsme vytvořili sbírku šedesáti úloh přispívajících k rozvoji logického myšlení, které jsme uspořádali na základě námi navržené klasifikace. U každé úlohy jsme navrhli vhodné zařazení do ročníku, obtížnost, časovou náročnost, správný výsledek a didaktický komentář, který obsahuje komentář k řešení, možná úskalí, časté chyby či návrhy různých modifikací. Příklady ve sbírce lze snadno diferenciovat, proto pomáhají k realizaci individuálního přístupu k žákům a dávají všem žákům možnost zažít úspěch.

Dvanáct vybraných úloh z této sbírky jsme ověřili ve výzkumné části pomocí vyhodnocení didaktického testu, který jsme předložili žákům druhého stupně na Základní škole v Sobotce. V rámci kvantitativního vyhodnocení jsme provedli analýzu obtížnosti úloh, která odhalila pouze jedno chybné přiřazení obtížnosti. U zbylých jedenácti úloh se očekávaná úroveň obtížnosti buď potvrdila, anebo se jejich index obtížnosti pohyboval v blízkosti krajních hodnot, a tak nebylo možné o úrovni jednoznačně rozhodnout. Vzhledem k výsledkům testovaných úloh, které dobře reprezentovali celou sbírku, lze předpokládat, že navržené úrovně obtížnosti všech úloh dobře korespondují s jejich skutečnou obtížností. V rámci kvalitativního vyhodnocení úloh jsme provedli rozbor žákovských řešení, který potvrdil obtížné pasáže úloh, na které jsme upozorňovali v rámci didaktických komentářů ve sbírce úloh.

V poslední části diplomové práce jsme vyhodnotili dotazníkové šetření, kterého se zúčastnilo 103 učitelů matematiky. Zjistili jsme, že učitelé nejčastěji cílí na rozvoj logického myšlení žáků prostřednictvím konstruktivistického vyučování, které do výuky zařazují alespoň jednou týdně. Nestandardní úlohy zařazuje do výuky přibližně polovina učitelů převážně jednou týdně či jednou měsíčně. Heuristické strategie při výuce využívá pouze třetina učitelů.

Dále jsme zjišťovali, které úlohy z vytvořené klasifikace úloh učitelé zařazují do výuky. Nejvyužívanější jsou aritmetické úlohy. Alespoň polovina učitelů využívá také číselné a obrázkové posloupnosti, kombinatorické úlohy, rozdělení obrazce, číselná schémata, úlohy se sirkami a tangramy. Nejméně známým typem úloh byly zebry, které nezná přibližně třetina učitelů. Mnozí učitelé v dotazníkovém šetření zmínili, že k rozvoji logického myšlení žáků přispívá vytvoření menších vzdělávacích skupin s 10 - 15 žáky, kteří jsou na podobné úrovni, a vyšší časová dotace hodin matematiky.

Věříme, že tato diplomová práce rozšíří povědomí učitelů matematiky o možnostech rozvoje logického myšlení žáků a že se nám podařilo vytvořit sbírku úloh, která je pro učitele přehledným a praktickým zdrojem při plánování výuky.

# SEZNAM ZDROJŮ

## Tištěné zdroje

[1] BŘÍZOVÁ, L. Logické úlohy nejen v matematice. In: *Ani jeden matematický talent nazmar: sborník příspěvků 9. ročníku konference učitelů matematiky a přírodních oborů na základních, středních a vysokých školách*. Hradec Králové: Univerzita Hradec Králové, 2021. ISBN 978-80-7435-846-3.

[2] CAMPBELL, G., MORGAN, P. *365 hlavolamů.* Praha: Slovart, 2010. ISBN 978-80-7391-357-1.

[3] DOSTÁLOVÁ, L. *Logika (LOF)* [Online]. 2013 [cit. 21. ledna 2023]. Dostupné z: https://www.esf.kfi.zcu.cz/logika/opory/lof/

[4] EISENMANN, P., NOVOTNÁ, J., PŘIBYL, J., BŘEHOVSKÝ, J. The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies. In: *Mathematics Education Research Journal*, 2015, 27(4), 535–562.

[5] FONTANA, D. *Psychologie ve školní praxi: příručka pro učitele*. Praha: Portál, 2010. ISBN 978-80-7367-725-1.

[6] HARTL, P., HARTLOVÁ, H. *Psychologický slovník*. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-569-1.

[7] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-397-0.

[8] HEMME, H. *Heuréka – Matematické hádanky s překvapivým řešením*. 1. vyd. Praha: Portál, 2019. ISBN 978-80-262-1508-0.

[9] HOMOLA, M. *Základy obecné psychologie*. Olomouc: Univerzita Palackého, 1992. ISBN 80-7067-101-7.

[10] CHRÁSKA, M., *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu*. Praha: Grada, 2007. Pedagogika. ISBN 978-80-247-1369-4.

[11] CHYTRÝ, V. *Rozvoj logického myšlení pomocí matematických her*. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, 2013.

[12] Kolektiv autorů. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Praha: NÚV, MŠMT ČR, 2021.

[13] KOPKA, J. *Hrozny problémů ve školské matematice.* Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, 1999. ISBN 80-7044-247-6.

[14] KOSÍKOVÁ, V. *Psychologie ve vzdělávání a její psychodidaktické aspekty*. Praha: Grada Publishing, 2011. ISBN 978-80-247-2433-1.

[15] LANGMEIER, J., KREJČÍŘOVÁ, D. *Vývojová psychologie*. Praha: Grada Publishing, 2006. ISBN 80-247-1284-9.

[16] LOUKOTA, J., *Veselá matematika aneb kouzla, hříčky, hádanky, rébusy, lamohlavy*. 1. vyd. Olomouc: Votobia, 1998. ISBN 80-7198-318-7.

[17] MALÁČ, J., KURFÜRST, J. Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ. 1. vyd. Praha: SPN, 1981. ISBN 14-513-81.

[18] *Matematický klokan 2017*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2017. ISBN 978-80-244-5178-7

[19] *Matematický klokan 2019*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2019. ISBN 978-80-244-5551-8.

[20] *Matematický klokan 2022*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2022. ISBN 978-80-244-6278-3.

[21] MOLNÁR, J. *Konstruktivismus ve vyučování matematice*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2008. ISBN 978-80-244-1883-4.

[22] MOLNÁR, J., *Zajímavá matematika (nejen) pro páťáky: 5. ročník*. 1.vyd. Olomouc: Prodos, 1997. ISBN 80-85806-68-1.

[23] O´LJAYEVNA, O. F., SHAVKATOVNA, S. R. The development of logical thinking of primary school students in mathematics. In: *European Journal of Research and Reflection in Educational Sciences*. Birmingham: Progressive Academic Publishing, 2020. vol. 8. Part II, ISSN 235-239.

[24] PAULÍK, K. *Obecná psychologie*. Ostrava: Ostravská univerzita, 2002. ISBN 80-7042-201-7.

[25] PIAGET, J., INHELDER, B. *Psychologie dítěte*. Praha: Portál, 2007. ISBN 978-80-7367-263-8.

[26] PLHÁKOVÁ, A. *Učebnice obecné psychologie*. Praha: Academia, 2003. ISBN 80-200-1086-6.

[27] POLÁK, J. *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. Plzeň: Fraus, 2014. ISBN 978-80-7238-449-5.

[28] POLÁK, J. *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně. II. část, Obecná didaktika matematiky*. Plzeň: Fraus, 2016. ISBN 978-80-7489-326-1.

[29] POLÁK, J. Rozvoj logického myšlení žáků ve výuce matematiky. In: *Učitel matematiky*. JČMF, 2019. vol. 27, issue 2, s. 96-110.

[30] PÓLYA, G. *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Expanded Princeton science library edition. Princeton: Princeton University Press, 2004.ISBN 0-691-11966-X.

[31] PŘÍHONSKÁ, J., BŘEHOVSKÝ, J. Rozvíjení kombinatorického myšlení na prvním stupni základní školy. In: *Učitel matematiky,* 2017. vol. 25, issue 4, s. 215-231.

[32] PUGNEROVÁ, M. *Psychologie: pro studenty pedagogických oborů*. Praha: Grada, 2019. Pedagogika. ISBN 978-80-271-0532-8.

[33] ROUGIER, R. *Trénujeme logické myšlení*. 1. vyd. Praha: Portál, 2017. ISBN 978-80-262-1175-4.

[34] SEZEN, N., BÜLBÜL A. A scale on logical thinking abilities. In: *Procedia Social and Behavioral Sciences.* Ankara: Elsevier Ltd, 2011. ISSN 2476–2480.

[35] SKUTIL, M., *Základy pedagogicko-psychologického výzkumu pro studenty učitelství*. Praha: Portál, 2011. ISBN 978-80-7367-778-7

[36] SMULLYAN, R. M. *Jak se jmenuje tahle knížka?*. Praha: Portál, 2015. ISBN 978-80-262-0822-8.

[37] SOUSEDÍK, P. *Logika pro studenty humanitních oborů*. Praha: Vyšehrad, 2001. ISBN 80-7021-509-7.

[38] STEHLÍKOVÁ, N., CACHOVÁ, J. Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe. In: *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*. Praha: JČMF. 2006.

[39] TIPPS, S., JOHNSON, A., KENNEDY, L. M. *Guiding Children's Learning of Mathematics*. Boston: Cengage Learning. 2016. ISBN 975-1-96066-4.

[40] TREJBAL, J., *Sbírka zajímavých úloh z matematiky*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-7196-072-1.

[41] VÁGNEROVÁ, M. *Vývojová psychologie*. Praha: Portál, 2000. ISBN 978-80-246-2209-5.

## Online zdroje

[42] Český svaz hádankářů a křížovkářů: Klasifikace [online]. [vid. 27. 2. 2023]. Dostupné z: https://www.cshak.cz/klasifikace-0

[43] Kódované obrázky [online]. [vid. 25. 4. 2023]. Dostupné z: http://kod.petricek.net/

[44] Sudokualogika.cz: Typové logické úlohy [online]. [vid. 10. 4. 2023]. Dostupné z: http://sudokualogika.cz/node/2199#easy_as_abc

## Příloha 1: Didaktický test pro 6. – 7. ročník

**Příklad č. 1: Každá následující číselná posloupnost se rozvíjí podle určitého logického principu. Na základě toho principu doplňte další člen posloupnosti.**

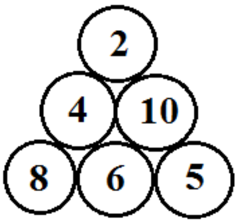
**a) 3, 7, 11, 15, 19, ___**

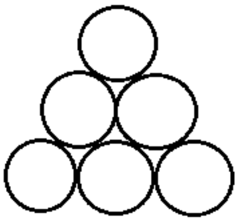
**b) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ___**

**c) 2, 6, 3, 9, 6, 18, 15, 45, ___**

**Příklad č. 2: Dokážete míčky na obrázku zpřeházet podle následujících nápověd?**

- **Osmička je hned nalevo od šestky.**
- **Součet čísel na míčcích ve spodní řadě je 16.**
- **Desítka je ve spodní řadě uprostřed.**
- **Čtyřka se dotýká osmičky.**

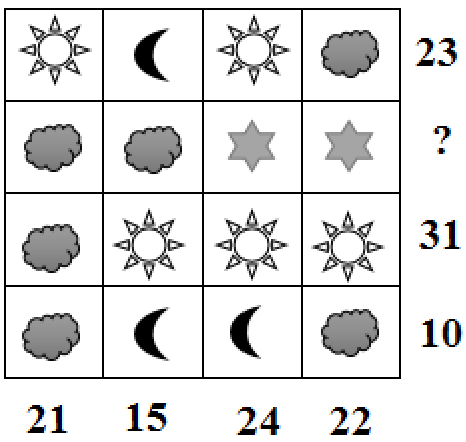


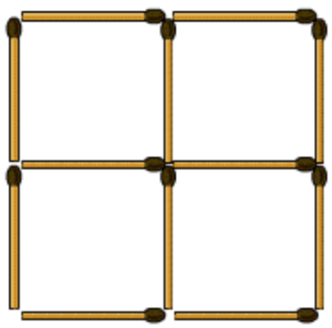
**Příklad č. 3: Moderátor pozval do svého televizního pořadu 5 hostů. Všichni hosté včetně moderátora si navzájem podali ruce. Kolik stisknutí rukou to bylo celkem?**

**Příklad č. 4:** **Zebra lže pouze v pondělí, úterý a středu. Šimpanz lže pouze ve čtvrtek, pátek a sobotu. Mauglí se ptal zebry a šimpanze, jaký je den. Zebra řekla: „*Včera byl jeden z mých dnů, kdy lžu.*“ Šimpanz odvětil: „*Včera byl jeden z mých prolhaných dnů*.“ Který den se Mauglí ptal ?**

**Příklad č. 5:** **Jednotlivé obrázky zastupují různá jednociferná čísla. Číslo na konci každého řádku (sloupce) je součtem daných čísel v příslušném řádku (sloupci). Určete, která čísla zastupují jednotlivé obrázky v tabulce a otazník na konci druhého řádku?**




**Příklad č. 6:** **Odeberte právě dvě zápalky tak, aby na obrázku zůstaly <u>pouze dva čtverce a nic jiného.</u>**

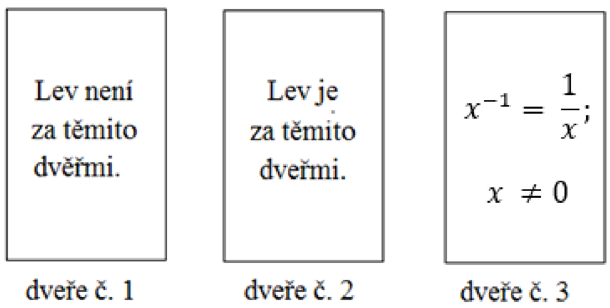


# Příloha 2: Didaktický test pro 8. – 9. ročník

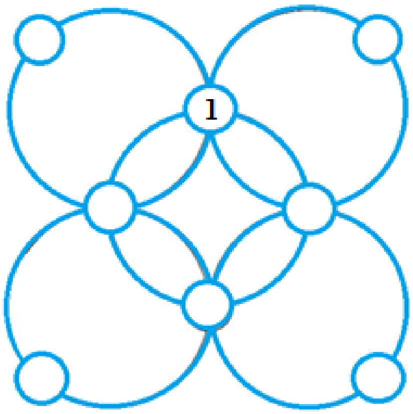
**Příklad č. 1: Který symbol bude 75. v pořadí?**

**Příklad č. 2: Číslice na těchto obrázcích se řídí určitým logickým principem. Objevte ho a doplňte číslo místo otazníku.**

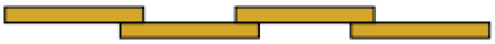

**Příklad č. 3: Za jedněmi dveřmi je lev. Na každých dveřích je napsáno tvrzení, z nichž nejvýše jedno je pravdivé. Za kterými dveřmi je lev?**



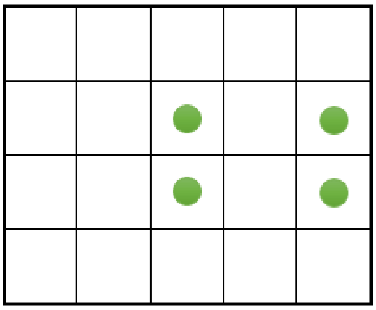
**Příklad č. 4 : Doplňte do kroužků čísla 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8 tak, aby součet všech čísel na každé kružnici byl 12.**




**Příklad č. 5: Pavel chce vyrobit nový plot z 25 dřevěných prken, z nichž každé je dlouhé 1,5 m. Prkna chce poskládat tak, aby mezi dvěma sousedními prkny bylo shodné mírné překrytí (na obrázku v pohledu shora). Kolika centimetrové překrytí má zvolit, aby mu 25 prken přesně vystačilo na 36,3 m dlouhý plot?**



**Příklad č. 6: Rozdělte obdélník složený z 20 čtverců na 4 stejné části tak, aby každá část obsahovala právě jeden puntík.**



## Příloha 3: Záznamový arch k didaktickému testu pro 6. – 7. ročník

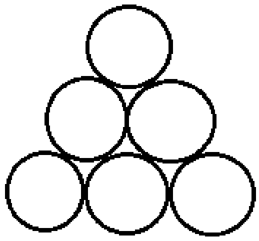
**Příklad č. 1:** Zapiš doplněná čísla:

**a)**

**b)**

**c)**

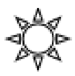
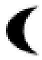
**Příklad č. 2:** Do míčků vepiš čísla podle zadaných nápověd.



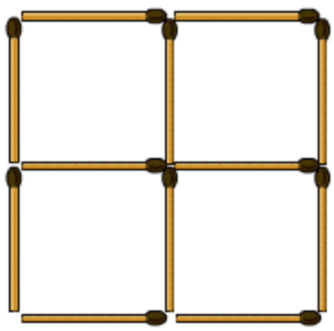
**Příklad č. 3:** Zapiš počet stisknutí.

**Příklad č. 4:** Zapiš den, který se Mauglí ptal.

**Příklad č. 5:** Zapiš hodnoty jednotlivých symbolů a otazníku.

 =  =  =  = **?** =

**Příklad č. 6:** Přeškrtni dvě sirky, které je třeba odebrat.



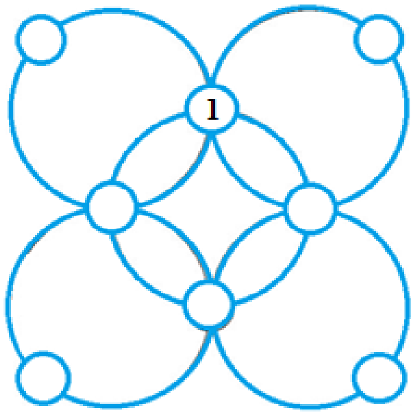
## Příloha 4: Záznamový arch k didaktickému testu pro 8. – 9. ročník

**Příklad č. 1:** Zapiš 75. symbol v pořadí.

**Příklad č. 2:** Zapiš hledanou číslici**.**

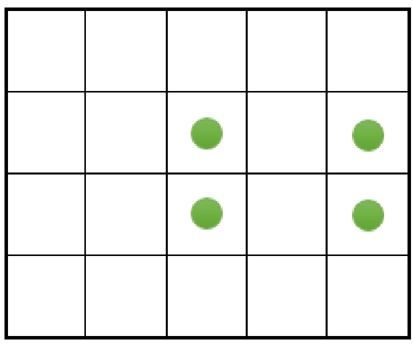
**Příklad č. 3:** Zapiš číslo dveří, za kterými je lev.

**Příklad č. 4:** Doplň do kroužků čísla 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8.




**Příklad č. 5:** Zapiš kolika centimetrové překrytí má Pavel zvolit.

**Příklad č. 6:** Přehledně vyznač 4 stejné části.



**Příloha 5: Správné řešení didaktického testu pro 6. – 7. ročník**

## Záznamový arch k didaktickému testu pro 6. – 7. ročník

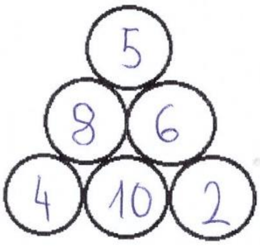
**Příklad č. 1:** Zapiš doplněná čísla:

a) 23

b) 21

c) 42

**Příklad č. 2:** Do míčků vepiš čísla podle zadaných nápověd.




**Příklad č. 3:** Zapiš počet stisknutí.

15 stisknutí

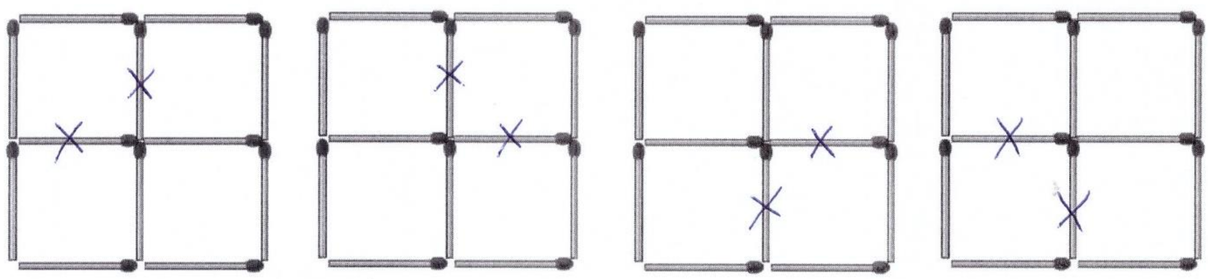
**Příklad č. 4:** Zapiš den, který se Mauglí ptal.

ve čtvrtek

**Příklad č. 5:** Zapiš hodnoty jednotlivých symbolů a otazníku.

 = 9  = 1  = 4  = 5 ? = 18

**Příklad č. 6:** Přeškrtni dvě sirky, které je třeba odebrat.



*1. způsob řešení* *2. způsob řešení* *3. způsob řešení* *4. způsob řešení*

## Příloha 6: Správné řešení didaktického testu pro 8. – 9. ročník

### Záznamový arch k didaktickému testu pro 8. – 9. ročník

**Příklad č. 1:** Zapiš 75. symbol v pořadí.

△

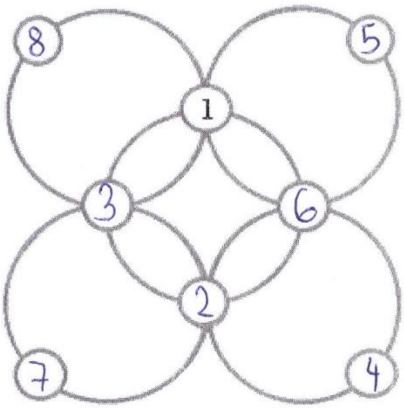
**Příklad č. 2:** Zapiš hledanou číslici.

4

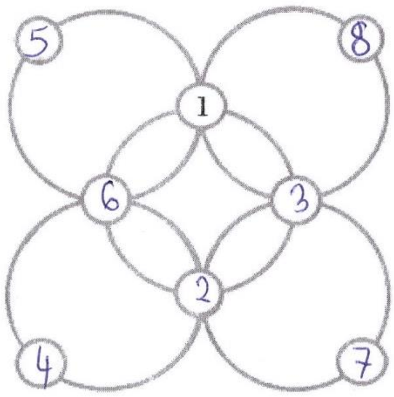
**Příklad č. 3:** Zapiš číslo dveří, za kterými je lev.

č. 1

**Příklad č. 4:** Doplň do kroužků čísla 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8.




*1. způsob řešení*

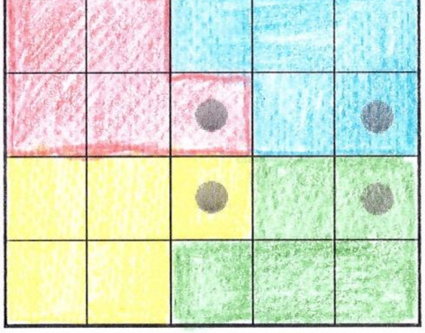



*2. způsob řešení*

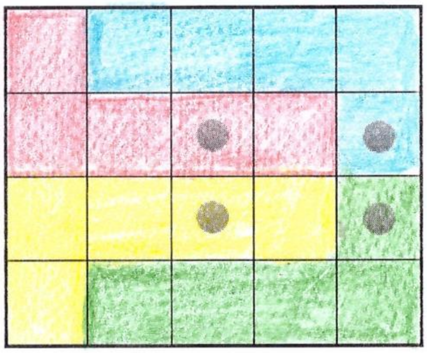
**Příklad č. 5:** Zapiš kolika centimetrové překrytí má Pavel zvolit.

5 cm

**Příklad č. 6:** Přehledně vyznač 4 stejné části.



*1. způsob řešení*



*2. způsob řešení*

## Příloha 7: Dotazník

**Položka 1: Učíte nebo jste učil/a matematiku na druhém stupni základní školy?**

Vyberte jednu odpověď.

- ☐ ano
- ☐ ne

**Položka 2: Jak dlouho učíte matematiku na 2. stupni ZŠ?**

Vyberte jednu odpověď.

- ☐ méně než 5 let
- ☐ 5 let - 10 let
- ☐ více než 10 let

**Položka 3: Jaké prostředky používáte k rozvoji logického myšlení svých žáků?**

Vyberte jednu nebo více odpovědí.

- ☐ konstruktivistické vyučování
- ☐ řešení úloh pomocí heuristických strategií
- ☐ nestandardní úlohy
- ☐ jiné:______________________________________________________________

**Položka 4: Jak často při výuce využíváte <u>konstruktivistické vyučování</u>?**

Vyberte jednu odpověď.

- ☐ minimálně třikrát týdně
- ☐ jednou týdně
- ☐ jednou měsíčně
- ☐ jednou ročně
- ☐ nevyužívám

**Položka 5: Jak často při výuce využíváte <u>řešení úloh pomocí heuristických strategií</u>?**

Vyberte jednu odpověď.

- ☐ minimálně třikrát týdně
- ☐ jednou týdně
- ☐ jednou měsíčně
- ☐ jednou ročně
- ☐ nevyužívám

**Položka 6: Jak často při výuce využíváte <u>nestandardní úlohy</u>?**

Vyberte jednu odpověď.

- ☐ minimálně třikrát týdně
- ☐ jednou týdně
- ☐ jednou měsíčně
- ☐ jednou ročně
- ☐ nevyužívám

**Položka 7: Využíváte uvedené nestandardní úlohy v hodinách matematiky?**

Vyberte jednu odpověď v každém řádku. Pokud si nebude jistí, co si pod daným typem úloh představit, nahlédněte do níže uvedených vysvětlivek.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **kombinatorické úlohy** | ☐ určitě ano | ☐ spíše ano | ☐ tyto úlohy neznám | ☐ spíše ne | ☐ určitě ne |
| **logické úlohy**[1] | ☐ určitě ano | ☐ spíše ano | ☐ tyto úlohy neznám | ☐ spíše ne | ☐ určitě ne |
| **aritmetické úlohy** | ☐ určitě ano | ☐ spíše ano | ☐ tyto úlohy neznám | ☐ spíše ne | ☐ určitě ne |
| **zebry**[2] | ☐ určitě ano | ☐ spíše ano | ☐ tyto úlohy neznám | ☐ spíše ne | ☐ určitě ne |
| **číselné a obrázkové posloupnosti** | ☐ určitě ano | ☐ spíše ano | ☐ tyto úlohy neznám | ☐ spíše ne | ☐ určitě ne |
| **číselná schémata**[3] | ☐ určitě ano | ☐ spíše ano | ☐ tyto úlohy neznám | ☐ spíše ne | ☐ určitě ne |
| **algebrogramy** | ☐ určitě ano | ☐ spíše ano | ☐ tyto úlohy neznám | ☐ spíše ne | ☐ určitě ne |
| **úlohy se sirkami** | ☐ určitě ano | ☐ spíše ano | ☐ tyto úlohy neznám | ☐ spíše ne | ☐ určitě ne |
| **úlohy jedním tahem** | ☐ určitě ano | ☐ spíše ano | ☐ tyto úlohy neznám | ☐ spíše ne | ☐ určitě ne |
| **rozdělení obrazce**[4] | ☐ určitě ano | ☐ spíše ano | ☐ tyto úlohy neznám | ☐ spíše ne | ☐ určitě ne |
| **tangramy** | ☐ určitě ano | ☐ spíše ano | ☐ tyto úlohy neznám | ☐ spíše ne | ☐ určitě ne |
| **magické obrazce** | ☐ určitě ano | ☐ spíše ano | ☐ tyto úlohy neznám | ☐ spíše ne | ☐ určitě ne |
| **správné uspořádání**[5] | ☐ určitě ano | ☐ spíše ano | ☐ tyto úlohy neznám | ☐ spíše ne | ☐ určitě ne |
| **zabarvovací úlohy**[6] | ☐ určitě ano | ☐ spíše ano | ☐ tyto úlohy neznám | ☐ spíše ne | ☐ určitě ne |

[1] logické úlohy = úlohy založené na výrokové logice

[2] zebry = úlohy, které vyžadují správné přiřazování navzájem si odpovídajících prvků z různých množin na základě několika zdánlivě nepostačujících informací

[3] číselná schémata = objevení vztahu mezi zadanými čísly v rámci určitého obrazce a doplnění chybějícího čísla

[4] rozdělení obrazce = rozdělení zadaného útvaru na menší díly podle stanovených pravidel

[5] správné uspořádání = uspořádání daných objektů na základě zadaných indicií

[6] zabarvovací úlohy = vybarvení některých políček rastru podle daných pravidel (např. zakódované obrázky)

**Položka 8: Proč nezařazujete úlohy uvedené v předchozí položce do výuky častěji?**

Vyberte jednu nebo více odpovědí.

- ☐ nedostatek času při výuce
- ☐ náročná příprava
- ☐ nezájem žáků, neatraktivita úloh
- ☐ upřednostnění jiných typů úloh
- ☐ nedostatek námětů a zdrojů zabývajících se nestandardními úlohami
- ☐ absence nestandartních úloh v učebnicích
- ☐ jiné:______________________________

**Otázka 9: Místo pro poznámky, připomínky či nápady k rozvoji logického myšlení žáků v hodinách matematiky.**

Napište jedno nebo více slov.