



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
ÚSTAV MATEMATIKY  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

# MODEL EPIDÉMIE POMOCOU SYSTÉMU DIFERENCIÁLNÝCH ROVNÍC NECELOČÍSELNÉHO RÁDU

EPIDEMIC MODEL WITH HELP OF A SYSTEM OF NON-INTEGER ORDER  
DIFFERENTIAL EQUATIONS

BAKALÁRSKA PRÁCA  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

KRISTÍNA ŠÁRAIOVÁ

VEDÚCI PRÁCE  
SUPERVISOR

doc. Ing. LUDĚK NECHVÁTAL, Ph.D.

BRNO 2023



# Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Studentka:	<b>Kristína Šáraiová</b>
Studijní program:	Matematické inženýrství
Studijní obor:	bez specializace
Vedoucí práce:	<b>doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Model epidemie pomocí soustavy diferenciálních rovnic neceločíselného řádu**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Klasické epidemické modely jako jsou SIR, SIS, SIRS, SEIS, apod. je možné "vylepšit" v tom smyslu, že v diferenciálním operátoru (který vystupuje na levé straně rovnic) připustíme derivace neceločíselného řádu (zpravidla se uvažuje řád mezi nulou a jednou). Praxe totiž ukázala, že v některých situacích dokážou neceločíselné modely popsat realitu lépe než klasické modely prvního řádu. Je tomu tak díky globální povaze neceločíselných operátorů (zohledňují historii stavu).

### **Cíle bakalářské práce:**

Teoretická část:

1. Seznámení se základy teorie diferenciálních rovnic neceločíselného (zlomkového) řádu.
2. Seznámení se základními epidemickými modely.

Praktická část:

1. Návrh neceločíselného modelu na základě známých dat proběhnuvší epidemie.
2. Numerické experimenty v prostředí MATLAB.

### **Seznam doporučené literatury:**

DIETHELM, K. The Analysis of Fractional Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics 2004, Springer, 2010.

DIETHELM, K. A fractional calculus based model for the simulation of an outbreak of dengue fever. Nonlinear Dynamics 71 (2013), 613–619.

HETHCOTE, H. W. The Mathematics of Infectious Diseases. SIAM Review 42 (2000), 599–653.

KALAS, J., POSPÍŠIL, Z. Spojité modely v biologii, Masarykova univerzita, 2001.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

---

doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Hlavnou témou bakalárskej práce je základná teória a aplikácia zlomkových diferenciálnych rovníc a základných epidemiologických modelov. V posledných rokoch sa používanie zlomkovej kalkulu stalo populárnejším a v mnoho prípadoch, v epidemiológii, vhodnejšie. V práci predstavíme pojmy z teórie neceločíselného rádu diferenciálnych rovníc, ako Riemann–Liouvillov integrál a derivácia, Caputova derivácia, a pojmy numerického riešeni ako zlomková metóda prediktor-korektor.

## **Abstract**

The main topic of the bachelor thesis is the basic theory and application of fractional differential equations and basic epidemiological models. In recent years, the use of fractional calculus has become more popular and in many cases, in epidemiology, more appropriate. In this thesis, we introduce concepts from the theory of non-integer order differential equations, such as Riemann–Liouville integral and derivative, Caputo derivative, and numerical solution concepts such as the fractional predictor-corrector method.

## **Klíčové slová**

Teorie neceločíselného rádu, Riemannov–Liouvilleova derivácia, Caputova derivacia, šírenie epidémie, epidemiologické modely, stabilita, bod rovnováhy

## **Keywords**

Theory of fractional calculus, fractional calculus, Caputo derivative, spread of diseases, epidemiological models, stability, equilibrium point



Vyhlasujem, že som vypracovala bakalársku prácu *Model epidémie pomocou systému diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu* samostatne pod vedením Ludka Nechvátala s použitím uvedených materiálov v zozname referencií

Kristína Šáraiiová





Chcela by som sa poďakovať vedúcemu mojej práce pánovi, doc. Ing. Luďkovi Nechvátalovi, Ph.D., najmä za veľkú trpezlivosť, čas venovaný konzultáciám, za pomoc a všetky užitočné rady, pripomienky a motiváciu.

Kristína Šáraiiová



## Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Vybrané pojmy z teórie nelineárnych dynamických systémov</b>	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>Zlomkový počet</b>	<b>17</b>
3.1	Úvodný materiál o zlomkovom počte . . . . .	17
3.2	Rozdiely medzi ODR1 a ODR $\alpha$ . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Epidemiologické modely</b>	<b>23</b>
4.1	Základné vedomosti . . . . .	23
4.2	Model horúčky dengue . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Dengue horúčka v Madeire</b>	<b>27</b>
5.1	Numerické riešenie . . . . .	27
5.2	Výpočty v programe MATLAB . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Záver</b>	<b>33</b>
<b>7</b>	<b>Literatura</b>	<b>34</b>
<b>8</b>	<b>Apendix</b>	<b>36</b>
8.1	Ekvilibrium našej sústavy . . . . .	36
8.2	MATLABovský kód . . . . .	37



# 1 Úvod

Výskum šírenia epidémií patrí k nevyhnutným oblastiam medicíny, ktorým sa zaoberá disciplína známa ako epidemiológia. Aj v súčasnosti môžu infekcie a vírusy mať významný vplyv na zdravie populácie, ale našťastie, vďaka medicínskemu pokroku, máme nástroje na boj proti nim. Skúmaním symptómov chorôb a ich šírenia sa môžeme dozvedieť viac o týchto problémoch a prostredníctvom epidemiológie môžeme predpovedať ich prípadný zánik. Na simulovanie šírenia epidémií sa používajú epidemiologické modely, ktoré sú založené na matematických prístupoch a odvodzujú sa z rôznych typov rovníc.

Zlomkový počet možno považovať za starú matematickú disciplínu, ktorá je zároveň nová, lebo zjednocuje a zovšeobecňuje deriváciu a integrál celočíselného rádu na ľubovoľne reálny (či dokonca komplexný) rád. Za začiatok teórie sa považuje list medzi L'Hospitalom (1661–1704) a Leibnizom (1646–1716) z roku 1695, v ktorom sa L'Hospital pýtal Leibniza, či sa dá význam derivácie s celočíselným rádom zovšeobecniť na derivácie s neceločíselným rádom, napr. derivácie rádu  $\frac{1}{2}$ . Leibnizova odpoveď: „Zdanlivý paradox, z ktorého, jedného dňa vyvodíme užitočné dôsledky.“ [11] Odtiaľto sa odvíjal záujem matematikov (ako L. Euler, P.S. Laplace, D.F. Lacroix) v 18. až 19. storočí o štúdium tejto oblasti.

Celočíselné derivácie a integrály sú úzko spojené s jasnými fyzikálnymi a geometrickými interpretáciami. Pre zlomkové rády derivovanie a integrovanie, ktoré sa stávajú rýchlo rastúcou oblasťou v teórii aj v aplikáciách reálneho sveta, takéto interpretácie nie sú všeobecne známe. Zlomkový počet si v posledných desaťročiach získal celosvetovú pozornosť vďaka svojmu širokému využitiu v chémii, biológii, fyzike, strojárstve, viskoelastických materiáloch a v spracovaní obrazu.

Ukázalo sa, že zlomkové (alebo neceločíselné) rovnice sú v niektorých prípadoch efektívnejšie a môžu poskytnúť presnejšiu interpretáciu prírodných procesov ako modely s deriváciami celočíselného riadu. To je aj prípad niektorých epidemických problémov, kde klasický systém diferenciálnych rovníc prvého rádu nedokáže kopírovať namerané údaje pri vypuknutí choroby. Klasické diferenciálne rovnice prvého rádu nedokázali dostatočne replikovať ozajstné údaje zozbierané pri skutočnom prepuknutí choroby.

Najjednoduchšie „zlomkovanie“ klasického modelu epidémie SIR spočíva v nahradení derivácií prvého rádu na ľavej strane systému deriváciami rádu  $\alpha \in (0, 1)$ . Zlomkové diferenciálne operátory sú nelokálne a na rozdiel od celočíselných diferenciálnych operátorov zohľadňujú históriu predchádzajúcich stavov spolu s aktuálnym stavom. Vďaka tejto vlastnosti sa ich použitie vo vede a technike stalo populárnym.

V tejto práci sa zaoberáme modelom horúčky dengue na Madeire, v období od októbra 2012 do februára 2013. Cieľom je navrhnúť zlomkový model tak, aby namerané údaje zodpovedali pozorovaným údajom o infikovaných osobách v populácii. Zatiaľ, čo niektoré údaje o epidémii považujeme za fixné (známe z literatúry alebo z rôznych štatistík), iné sme v rámci modelu dohľadali. Horúčku dengue prenášajú komáre a nie je prenosná z človeka na človeka. Predpokladá sa, že nie všetci ľudia, ktorí sú infikovaní, sú si toho vedomí a ak neinfikovaný komár poštiepe nakazeného človeka, nakazí sa tiež. Existujú štyri typy horúčky dengue a ak sa človek nakazí jedným z týchto typov, je doživotne imúnny len proti tomuto typu, no voči ostatným nemá imunitu. To znamená, že horúčkou dengue je možno infikovať sa až štyrikrát počas života.

Druhá kapitola obsahuje základy a vybrané pojmy z teórie nelineárnych dynamických systémov. Táto kapitola zahŕňa aj diskusiu o rovnováhe systému a jeho stabilite.

V tretej kapitole sa zameriavame na zlomkový diferenciálny počet a rozdiely medzi ODR1 a ODR $\alpha$ .

Nasleduje stručný úvod do epidemických modelov. Nakoniec piata kapitola sa zaoberá vlastným návrhom frakčného modelu epidémie horúčky dengue na Madeire a numerickými simuláciami

v programe MATLAB. Práca sa hlavne opiera o [15].

## 2 Vybrané pojmy z teórie nelineárnych dynamických systémov

Následujúce definície, vety a poznámky používajú zdroje [10] a [19].

**Definícia 2.1** (Autonómny systém). Autonómny systémom diferenciálnej rovnice rozumieme sústavu

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

kde  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . V autonómnom systéme teda vektorové pole  $\mathbf{f}$  explicitne nezávisí od času  $t$ .

Je známe, že každý neautonómny systém  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ ,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  môžeme prepísať na autonómnu sústavu (2.1) s  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tak, že položíme  $x_{n+1} = t$  a  $x'_{n+1} = 1$ .

**Definícia 2.2** (Riešenie autonómnej sústavy). Nech  $\mathbf{f} \in C(\Omega)$ <sup>1</sup>, kde  $\Omega$  je otvorená podmnožina  $\mathbb{R}^n$ . Potom riešením sústavy diferenciálnych rovníc (2.1) na intervale  $I$  nazývame každú funkciu  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , že  $\mathbf{x}$  je spojito diferencovateľná na  $I$ ,  $\forall t \in I : \mathbf{x}(t) \in \Omega$ , a  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ .

Navyše, ak je dané  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ , potom  $\mathbf{x}$  je riešením počiatkovej úlohy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

na intervale  $I$ , ak  $t_0 \in I$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .

**Veta 2.3** (Picardova–Lindelöfova veta). Nech  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  je vektorové pole spĺňajúce Lipschitzovu podmienku v okolí bodu  $\mathbf{x}_0$  definované na  $\Omega$ . Potom existuje  $\varepsilon > 0$  také, že úloha (2.2) má jediné riešenie na intervale  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ .

*Poznámka.* Funkcia  $\mathbf{f}$  spĺňa Lipschitzovu podmienku na množine  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , ak existuje konštanta  $L > 0$  s

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)| \leq L|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, \quad (2.3)$$

$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ .

**Definícia 2.4** (Dynamický systém). Dynamický systém na  $\Omega$  sa nazýva spojito diferencovateľná funkcia

$$\phi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega,$$

kde  $\Omega$  je otvorená podmnožinou  $\mathbb{R}^n$ , a ak  $\phi_t(\mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{x})$ , tak  $\phi_t$  spĺňa:

- $\phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  pre  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ ,
- $\phi_t(\phi_s(\mathbf{x})) = \phi_{t+s}(\mathbf{x})$  pre  $\forall s, t \in \mathbb{R}$  a  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ .

Ak  $\phi_t$  je dynamický systém na  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , tak funkcia

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \phi(t, \mathbf{x}) \right|_{t=0}$$

definuje spojito diferencovateľné vektorové pole na  $\Omega$  a pre  $\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega$  platí, že  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  je riešením počiatkovej úlohy (2.1). Navyše, keď  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ , maximálny interval existencie funkcie  $\phi(\cdot, \mathbf{x}_0)$  je  $I = (-\infty, \infty)$ . V tomto prípade hovoríme, že  $\phi_t$  je dynamický systém na  $\Omega$  definovaný systémom (2.2).

<sup>1</sup>Zápisom  $C(\Omega)$  rozumieme, že každá zložka vektorového poľa  $\mathbf{f}$  je spojitá funkcia na  $\Omega$ .

**Definícia 2.5** (Ekvilibrium). Uvažujme bod  $x^* \in \mathbb{R}^n$ . Tento bod sa nazýva *ekvilibrium* alebo *rovnovážny bod*, *pevný bod* systému (2.2), ak spĺňa podmienku  $f(x^*) = 0$ .

**Definícia 2.6** (Stabilita ekvilibria). Hovoríme, že ekvilibrium  $x^*$  je stabilné, ak  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  tak, že  $\forall x_0 \in O_\delta(x^*)$  platí  $x(t) \in O_\varepsilon(x^*) \forall t \geq t_0$ .

*Poznámka.* Uvažujme: systém lineárnych diferenciálnych rovníc

$$x' = Ax$$

s príslušnými vlastnými hodnotami  $\lambda_1, \lambda_2$ . Hovoríme, že rovnovážny bod  $x^*$  systému  $x' = Ax$  je

- a) *odpudivý uzol*, ak  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ ,
- b) *priťahujúci uzol*, ak  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ ,
- c) *sedlový uzol*, ak  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ,
- d) *odpudivé ohnisko*, ak  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$ , kde  $\mu > 0$  a  $\nu \neq 0$ ,
- e) *priťahujúce ohnisko*, ak  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$ , kde  $\mu < 0$  a  $\nu \neq 0$ ,
- f) *stred*, ak  $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$  a  $\nu \neq 0$ .



## 3 Zlomkový počet

### 3.1 Úvodný materiál o zlomkovom počte

Následujúce definície, vety a poznámky čerpajú zo zdrojov [10], [12], [13] a [19].

**Definícia 3.1** (Riemann–Liouvilleov zlomkový integrál). Nech  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  a  $f$  je funkcia integrovateľná na  $\langle t_0, T \rangle$ . Operátor  $I_{t_0}^\alpha$  definovaný ako

$$I_{t_0}^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t_0 < t \leq T, \quad (3.1)$$

sa nazýva Riemann–Liouvilleov neceločíselný integrálny operátor rádu  $\alpha$ . V prípade  $\alpha = 0$  položíme  $I_{t_0}^\alpha f := f$ , teda  $I_{t_0}^0$  je operátor identity.

*Poznámka.* V rovnici (3.1) sa vyskytuje funkcia  $\Gamma$ , ktorá je definovaná ako

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

**Veta 3.2.** Nech  $f \in L_1(\langle 0, T \rangle)$ <sup>2</sup> a  $\alpha > 0$ , tak integrál  $I_{t_0}^\alpha f(t)$  existuje skoro všade na  $\langle 0, T \rangle$ . Okrem toho  $I^\alpha f \in L_1(\langle 0, T \rangle)$ .

**Veta 3.3** (Vlastnosti Riemann–Liouvilleovho zlomkového intergálu). Operátor  $I_{t_0}^\alpha$  pre funkciu  $f \in L_1(\langle 0, T \rangle)$  má vlastnosti:

- $I_{t_0}^q I_{t_0}^r f(t) = I_{t_0}^{q+r} f(t)$ ,  $q, r \geq 0$  (čiže operátor  $I_{t_0}^\alpha$  je aditívny),
- $I_{t_0}^q I_{t_0}^r f(t) = I_{t_0}^r I_{t_0}^q f(t)$ ,  $q, r \geq 0$  (čiže operátor  $I_{t_0}^\alpha$  je komutatívny),
- $I_{t_0}^q (t - t_0)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+q)}$ ,  $q \geq 0, \gamma > -1$ ,
- $I_{t_0}^q C = C \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(q+1)} (t - t_0)^q = \frac{C}{\Gamma(q+1)} (t - t_0)^q$ ,  $q \geq 0, \gamma > -1, C \in \mathbb{R}$ .

**Definícia 3.4** (Riemann–Liouvilleova zlomková derivácia). Nech  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  a  $m = \lceil \alpha \rceil$ , potom sa operátor  $D_{t_0}^\alpha$  definovaný ako

$$D_{t_0}^\alpha f(t) := D^m I_{t_0}^{m-\alpha} f(t), \quad (3.2)$$

nazýva Riemann–Liouvilleov neceločíselný diferenciálny operátor rádu  $\alpha$ . Symbol  $\lceil \alpha \rceil$  označuje celú hornú časť čísla  $\alpha$ , čiže

$$\lceil \alpha \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq \alpha\}.$$

Pre  $\alpha = 0$  opätovne kladieme, že  $D_{t_0}^\alpha f := f$ , čiže  $D_{t_0}^0$  je operátor identity.

**Veta 3.5.** Pre funkciu  $f \in AC^m(\langle 0, T \rangle)$ <sup>3</sup> existuje derivácia  $D_{t_0}^\alpha f$  skoro všade.

**Veta 3.6** (Vlastnosti Riemann–Liouvilleovej zlomkovej derivácie). Pre funkciu  $f \in L_1(\langle 0, T \rangle)$ ,  $\alpha \geq 0$  platia vlastnosti:

- $D_{t_0}^q (t - t_0)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+q)}$ ,  $\forall q \geq 0, \gamma > -1$ ,
- $D_{t_0}^\alpha I_{t_0}^\alpha f(t) = f(t)$  pre skoro všetky  $t \in \langle t_0, T \rangle$ , čo znamená, že operátor  $D_{t_0}^\alpha$  je ľavá inverzia operátora  $I_{t_0}^\alpha$ .

<sup>2</sup> $L_1(\langle 0, T \rangle)$  značí množinu všetkých funkcií absolútne Lebegovo integrovateľných na intervale  $\langle 0, T \rangle$ .

<sup>3</sup>Symbolom  $AC^m(\langle a, b \rangle)$  označíme množinu spojitých funkcií na  $\langle a, b \rangle$ , ktoré majú derivácie až do rádu  $m - 1$ , kde  $(m - 1)$  derivácia je absolútne spojitá funkcia na  $\langle a, b \rangle$ .

Navyše nech  $q, r \geq 0$ ,  $\theta \in L_1(\langle 0, T \rangle)$  a  $f = I^{q+r}\theta$ , potom  $D^q D^r f = D^{q+r} f$  skoro všade v  $\langle 0, T \rangle$ .

Jedna z hlavných odlišností medzi diferenciálnymi operátormi celočíselného rádu a Riemann–Liouvillovými neceločíselnými deriváciami je, že na výpočet  $D^n f(t)$  pre  $n \in \mathbb{N}$  je potrebné poznať funkciu  $f$  iba v malej oblasti okolo  $t$ , zatiaľ čo na výpočet  $D^\alpha f(t)$  pre  $\alpha \geq 0$  je nutné poznať funkciu  $f$  na celom intervale  $\langle 0, t \rangle$ . Z toho vyplýva, že Riemann–Liouvillove operátory nie sú lokálne.

Následne sa zistilo, že Riemann–Liouvilleove zlomkové derivácie nie sú úplne vhodné pre modelovanie reálneho sveta, z dôvodu, že prirodzene pracujú s počiatočnými podmienkami neceločíselného rádu, ktorých fyzikálna interpretácia je nejasná. Našťastie, existuje niekoľko alternatívnych definícií zlomkových derivácií a v súčasnosti sa najviac používa Caputova derivácia zavedená v 60. rokoch 20. storočia.

**Definícia 3.7** (Caputova derivácia). Nech  $\alpha \geq 0$  a  $m = \lceil \alpha \rceil$ . Potom operátor  ${}^C D_{t_0}^\alpha$  definovaný ako

$${}^C D_{t_0}^\alpha f(t) := I_{t_0}^{m-\alpha} D^m f(t) \quad t > t_0 \quad (3.3)$$

sa nazýva Caputov neceločíselný diferenciálny operátor rádu  $\alpha$ . V prípade  $\alpha = 0$  položíme  ${}^C D_{t_0}^\alpha f := f$ , t. j.  ${}^C D_{t_0}^0$  je operátor identity.

*Poznámka.* Pre funkciu  $f \in AC^m(\langle t_0, T \rangle)$  je možné Caputovu deriváciu vyjadriť pomocou Riemann–Liouvilleovej zlomkovej derivácie ako

$${}^C D_{t_0}^\alpha f(t) = D_{t_0}^\alpha \left( f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(t_0) \frac{(t-t_0)^k}{k!} \right) \quad (3.4)$$

pre skoro všetky  $t \in \langle t_0, T \rangle$ .

V niektorej literatúre sa pravá strana rovnice (3.4) bere za definíciu Caputovej derivácie.

**Veta 3.8.** Ak  $f$  je spojitá a  $\alpha \geq 0$ , potom platí

$${}^C D^\alpha I^\alpha f = f$$

skoro všade na  $\langle 0, T \rangle$ .

Veta 3.8 nám hovorí, že Caputova derivácia je ľavou inverziou Riemann–Liouvillovho integrálu.

**Veta 3.9** (Vlastnosti Caputovej derivácie). Pre  $f \in AC^m(\langle t_0, T \rangle)$ , kde  $m \in \mathbb{N} : m - 1 < \alpha \leq m$  a  $\forall t \in \langle t_0, T \rangle$  platí

$$I_{t_0}^\alpha {}^C D_{t_0}^\alpha f(t) = I_{t_0}^\alpha I_{t_0}^{m-\alpha} D^m f(t) = I_{t_0}^m D^m f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(t_0) \frac{(t-t_0)^k}{k!},$$

kde  $\sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(t_0) \frac{(t-t_0)^k}{k!}$  je Taylorov polynóm stupňa  $m - 1$  pre funkciu  $f(t)$  so stredom v  $t_0$ .

**Definícia 3.10** (Autonómny systém diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu). Pod autonómym systémom diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu rozumieme systém

$${}^C D^\alpha \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (3.5)$$

kde vektorové pole  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Definícia 3.11** (Riešenie autonómneho systému diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu). Nech  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $f \in C(\Omega)$ , kde  $\Omega$  je otvorená podmnožina  $\mathbb{R}^n$ ,  $I = \langle 0, T \rangle$ . Riešením systému (3.5) na  $I$  nazývame každú funkciu  $x \in C(I)$ , pre ktorú  $x(t) \in \Omega$  a

$${}^C D^\alpha x = f(x), \quad \forall t \in (0, T). \quad (3.6)$$

Navyše, ak  $x(0) = x_0 \in \Omega$ , potom  $x$  je riešením počiatkovej úlohy

$$\begin{aligned} D^\alpha x &= f(x), \quad \forall t \in (0, T), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

**Veta 3.12** (Veta o existencii riešenia). Nech  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $K > 0$  a  $h^* > 0$ . Definujeme  $G := \langle x_1^0 - K, y_1^0 + K \rangle \times \cdots \times \langle x_n^0 - K, x_n^0 + K \rangle$  a nech funkcia  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  je spojitá. Definujme navyše  $M := \max_{\xi \in G} |f(\xi)|$  a

$$h := \begin{cases} h^* & \text{ak } M=0, \\ \min\{h^*, (K\Gamma(\alpha+1)/M)^{1/\alpha}\} & \text{ináč.} \end{cases}$$

Potom existuje funkcia  $x \in C(\langle 0, h \rangle)$ , ktorá je riešením počiatkovému problému (3.7).

**Lema 3.13.** Za predpokladov vety 3.12 funkcia  $x \in C(\langle 0, h \rangle)$  sa stáva riešením počiatkovej úlohy (3.7) práve vtedy, keď je riešením nelineárnej Volterrovej rovnice druhého druhu

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(x(\tau)) d\tau, \quad \alpha \in (0, 1).$$

**Veta 3.14** (Veta o jednoznačnosti riešenia). Nech  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $K > 0$  a  $H^* > 0$ . Definujeme množinu  $G$  ako vo vete 3.12 a nech funkcia  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  je spojitá a spĺňa Lipschitzovu podmienku, a definujeme  $h$  ako vo vete 3.12. Potom počiatková úloha (3.7) má jedinečné riešenie  $x \in C(\langle 0, h \rangle)$ .

**Veta 3.15** (Veta o globálnej existencii riešení). Uvažujme: predpoklady vety 3.14 s výnimkou množiny  $G$ , ktorá je teraz definovaná ako  $G := \mathbb{R}^n$ . Okrem toho predpokladajme, že  $f$  je spojitá na  $G$  a že existujú konštanty  $c_1 \geq 0$ ,  $c_2 \geq 0$  a  $0 \leq \mu \leq 1$  také, že

$$|f(x)| \leq c_1 + c_2 |x|^\mu, \quad \forall x \in G.$$

Potom existuje funkcia  $x \in C\langle 0, \infty \rangle$ , ktorá rieši počiatkovú úlohu (3.7).

Môžeme uviesť ešte jednu vetu o existencii a jednoznačnosti riešenia, čo používa ľahko odlišné predpoklady, ktoré nám umožňujú odvodiť globálnu existenciu a jednoznačnosť riešenia.

**Veta 3.16.** Nech  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Definujme množinu  $G := \mathbb{R}^n$ , a nech funkcia  $f$  je spojitá a splňuje Lipschitzovu podmienku pre  $\forall x_1, x_2 \in G$  s konštantou  $L > 0$ . Potom existuje jednoznačne definovaná funkcia  $x \in C(\langle 0, \infty \rangle)$ , ktorá rieši počiatkovú úlohu (3.7).

**Definícia 3.17** (Mittag-Lefflerova funkcia rádu  $\alpha$ ). Nech  $\alpha > 0$ . Funkcia  $E_\alpha$  definovaná ako

$$E_\alpha(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j\alpha + 1)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

sa nazýva jednoparametrická Mittag-Lefflerova funkcia. Táto rada konverguje pre každé  $z \in \mathbb{C}$ .

**Definícia 3.18** (Hyperbolické ekvilibrium). Bod rovnováhy  $\mathbf{x}^*$  sústavy (3.5) sa nazýva hyperbolický, ak všetky vlastné čísla  $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$  Jacobiove matice  $Df(\mathbf{x}^*)$  v bode rovnováhy sú nenulové a  $|\arg(\lambda)| \neq \alpha\pi/2$ .

System (3.5) sa teda linearizuje, rovnako ako v celočíselnom prípade, do tvaru

$${}^C D^\alpha \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3.8)$$

pričom  $\mathbf{A} = Df(\mathbf{x}^*)$ .

Nasledujúca veta špecifikuje tvar riešenia (3.8).

**Veta 3.19** (Veta o riešení sústavy lineárnych rovníc neceločíselného rádu). *Nech  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  reálna matica,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sú jej vlastné hodnoty a  $v_1, \dots, v_n$  sú príslušné vlastné vektory, kde vlastné čísla majú rovnakú algebraickú a geometrickú násobnosť. Potom všeobecné riešenie rovnice (3.8) možno zapísať ako*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k v_k E_\alpha(\lambda_k t^\alpha),$$

kde  $c_k \in \mathbb{C}$ .

**Veta 3.20** (Linearizovaná asymptotická stabilita pre ODR $\alpha$ ). *Nech  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , a nech  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  sú jej vlastné čísla. Potom riešenie (3.6) s  $\mathbf{f}(0) = 0$  a  $Df(0) = \mathbf{A}$ , je*

- i) *asymptoticky stabilné vtedy a len vtedy, ak všetky vlastné hodnoty  $\lambda_i$  spĺňajú podmienky  $|\arg(\lambda_i)| > \alpha\pi/2$ ;*
- ii) *nestabilné, ak aspoň jedno z vlastných čísel  $\lambda_i$  Jacobiho matice spĺňa  $|\arg(\lambda_i)| < \alpha\pi/2$ .*

V kontexte vety 3.20 asymptotická stabilita znamená, že triviálne riešenie je asymptoticky stabilné, ak všetky vlastné hodnoty Jacobiho matice  $\mathbf{A}$ , označené  $\lambda_i$ , majú argument  $\arg(\lambda_i)$  (fázový uhol) s absolútnou hodnotou väčšou ako  $\alpha\pi/2$ . Tento argument udáva, v akom smere a v akej miere sa vlastné hodnoty odchyľia od reálnej osi. Ak majú všetky vlastné hodnoty argument s absolútnou hodnotou väčšou ako  $\alpha\pi/2$ , triviálne riešenie konverguje k rovnovážnemu stavu alebo cieľu.

Nestabilita je opakom asymptotickej stability a opisuje vlastnosť, pri ktorej triviálne riešenie diverguje alebo osciluje v čase namiesto toho, aby konvergovalo k rovnovážnemu stavu alebo cieľu. V kontexte vety to znamená, že triviálne riešenie je nestabilné, ak aspoň jedna z vlastných hodnôt Jacobiho matice má argument s absolútnou hodnotou menšou ako  $\alpha\pi/2$ . Toto naznačuje, že táto vlastná hodnota sa vzdiala od reálnej osi a spôsobuje, že triviálne riešenie sa vzdialuje od rovnovážneho stavu alebo cieľa.

**Dôsledok 3.21.** *Nech  $\mathbf{x}^*$  je ekvilibrium (3.6), a nech  $\mathbf{f}$  je  $C^1$ -vektorové pole s  $Df(\mathbf{x}^*)$  s vlastnými číslami, ktoré spĺňajú podmienky  $|\arg(\lambda_i)| > \alpha\pi/2$ , alebo inak povedané sa nachádzajú v takzvanom Matignonovom sektore. Potom  $\mathbf{x}^*$  je asymptoticky stabilný. Ak existuje aspoň jedno vlastné číslo také, že  $|\arg(\lambda_i)| < \alpha\pi/2$ , potom  $\mathbf{x}^*$  je nestabilný.*

*Poznámka.* Ak  $|\arg(\lambda_i)| \geq \alpha\pi/2$  a rovnosť nastane aspoň pre jedno vlastné číslo  $\lambda_i$ , potom nie sme schopní určiť, či je  $\mathbf{x}^*$  stabilný, pretože rovnovážny bod nie je hyperbolický, a preto je nemožné použiť vetu 3.20.

**Veta 3.22** (Harmann–Grobmanova veta). *Ak je počiatkom hyperbolický rovnovážny bod systému z (3.7), potom vektorové pole  $\mathbf{f}$  v okolí počiatku je topologicky ekvivalentné linearizovanému vektorovému poľu  $Df(0)\mathbf{x}$  v okolí počiatku.*

V kontexte Harmann–Grobmanovej vety hovorí topologická ekvivalencia o tom, že vektorové pole  $f$  a jeho linearizácia  $Df(0)x$  v okolí počiatku majú podobné topologické vlastnosti. To znamená, že ak počiatkový hyperbolický rovnovážny bod systému je stabilný alebo nestabilný vzhľadom na dynamiku  $f$ , rovnaká stabilita alebo nestabilita sa zachováva aj v okolí počiatku pri linearizácii vektorového poľa  $Df(0)x$ .

### 3.2 Rozdiely medzi ODR1 a ODR $\alpha$

ODR $\alpha$  má veľa vlastností ako ODR1, na druhej strane aj veľa odlišných. Cieľom tejto časti je ukázať tieto rozdiely pomocou [1], [4] a [5] zdrojov.

Dve rôzne trajektórie jednorozmerného ODR $\alpha$  sa nestretnú. Je dobre známe, že za Lipschitzovej podmienky (2.3) má úloha s počiatkovými hodnotami pre (3.5) jednoznačné riešenie definované na celom intervale  $I = \langle 0, T \rangle$  pre každú danú počiatkovú hodnotu. Pre ukázanie, že ľubovoľné dve riešenia rovnice (3.5) sa buď zhodujú, alebo sa nepretínajú na  $I$ , potrebujeme dva technické nástroje: vzorec variácie konštánt a princíp porovnávania.

**Lema 3.23** (Vzorec pre variácie konštánt pre ODR $\alpha$ ). *Uvažujme (3.5) na konečnom intervale  $I = (0, T)$ . Predpokladajme, že funkcia  $f$  v rovnici (3.5) spĺňa Lipschitzovu podmienku. Ak je funkcia  $f$  v tvaru*

$$f(t, x) = Mx + g(t, x),$$

pre nejaké pevné  $M \in \mathbb{R}$  a všetky  $t \in I$  a  $x \in \mathbb{R}$ , potom riešenie  $x$  (3.5) s počiatkovou hodnotou  $x(0) = x_0$  spĺňa pre všetky  $t$  z intervalu vzorec

$$x(t) = E_\alpha(Mt^\alpha)x_0 + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(M(t - \tau)^\alpha)g(\tau, x(\tau))d\tau.$$

Dôkaz lémy 3.23 je popísaný v článku [4].

**Lema 3.24** (Princíp porovnávania). *Nech  $0 < q < 1$  a predpokladajme, že spojité funkcie  $v, v_1, w, w_1 \in C(I)$  a  $g \in C(J \times \mathbb{R})$  spĺňajú*

$$v(t) \leq v_1(t) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - s)^{q-1} g(s, v(s))ds,$$

$$w(t) \geq w_1(t) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - s)^{q-1} g(s, w(s))ds,$$

pre všetky  $t \in I$ . Predpokladajme ďalej, že  $g(t, x)$  je nerastúce v  $x$  pre každý  $t \in I$ . Ak

$$v_1(t) < w_1(t) \text{ pre každé } t \in I,$$

tak

$$v(t) < w(t) \text{ pre každé } t \in I.$$

Dôkaz lémy 3.24 je popísaný v článku [4].

**Veta 3.25** (Rôzne trajektórie sa nestretávajú). *Predpokladajme, že  $f$  spĺňa Lipschitzovu podmienku. Potom pre ľubovoľné dve rôzne počiatkových hodnôt  $x_{10} \neq x_{20}$  v  $\mathbb{R}$ , trajektórie príslušných riešení (3.5) sa nestretávajú na  $I$ , t. j. riešenia  $x_1$  a  $x_2$ , ktoré vychádzajú z  $x_{10} = x_1(0)$  a  $x_{20} = x_2(0)$ , spĺňajú  $x_1(t) \neq x_2(t)$  pre všetky  $t \in I$ .*

Dve trajektórie rovníc celočíselného rádu sa nepretínajú, ak áno, tak sú identické. Táto vlastnosť vo všeobecnosti neplatí, pokiaľ neuvažujeme o špeciálnych prípadoch  $ODR\alpha$ . Vlastnosť platí pre jednorozmerné  $ODR\alpha$  (3.6) a trojuholníkový systém v tvare

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha y_1(x) &= f_1(x, y_1(x)), \\ {}^C D^\alpha y_2(x) &= f_2(x, y_1(x), y_2(x)), \\ &\vdots \\ {}^C D^\alpha y_n(x) &= f_n(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Môžeme ukázať, že existuje zobrazenie

$$\phi_{x,\hat{x}}(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \forall x, \hat{x} \in I,$$

ktoré sa nazýva dvojparametrický tok v  $\mathbb{R}^n$ , spĺňajúci vlastnosti

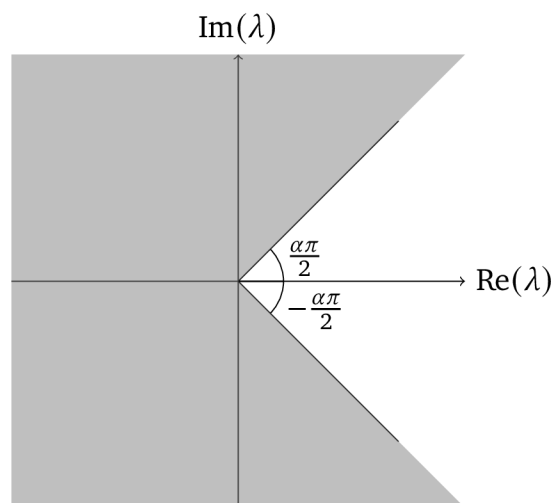
- $\phi_{x,\hat{x}}$  je spojitá funkcia troch premenných  $x, \hat{x} \in I$  a  $y \in \mathbb{R}^n$ ,
- funkcia  $\phi_{x,\hat{x}}(\cdot)$  je homeomorfizmom  $\mathbb{R}^n$  pre ľubovoľné pevné body  $x, \hat{x} \in I$ ,
- vlastnosť toku  $\phi_{x,\hat{x}} \circ \phi_{\bar{x},x} = \phi_{\bar{x},\hat{x}}$  pre všetky  $x, \hat{x}, \bar{x} \in I$ , kde symbol  $\circ$  označuje zloženie zobrazení.

V konkrétnych prípadoch je možné kvôli týmto vlastnostiam definovať zlomkové dynamické systémy.

V ostatných prípadoch, pre  $n \geq 2$ ,  $ODR\alpha$  daná rovnicou (3.6) všeobecne negeneruje dvojparametrový tok v  $\mathbb{R}^n$ , čiže všeobecne negeneruje nelokálny dynamický systém.

Tiež rozdiel medzi  $ODR1$  a  $ODR\alpha$  je to, ako klasifikujeme equilibrium celočíselného a neceločíselného rádu diferenciálnych rovníc. Môžeme brať do úvahy, že stabilita u  $ODR\alpha$  je opäť určená vlastnými číslami  $\lambda_1, \lambda_2$  s rozdielmi:

- Neexistuje singulárny bod, ktorý by zodpovedal stredú, čo je dôsledkom  $ODR\alpha$ , ktoré nemôžu mať periodické riešenia.
- Oblasť stability sa rozširuje v prípade stabilných ohniskových bodov. T.j. ako stabilné ohnisko body sa považujú aj tie body, ktoré majú  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$  napriek tomu, že spĺňajú  $|\text{Arg}(\lambda_{1,2})| > \alpha\pi/2$ . To znamená, že hranica medzi stabilitou a nestabilitou už nie je imaginárna os.



**Obr. 1:** Oblasť stability pre  $ODR\alpha$

## 4 Epidemiologické modely

### 4.1 Základné vedomosti

Nasledujúce popisy základných epidemiologických modelov sú prevzaté z [2] a [18]. Model SIR je základným epidemiologickým modelom, ktorý sa používa na simuláciu chorôb s dlhodobou imunitou. Tento model bol prvýkrát navrhnutý Kermackom a McKendrickom v roku 1927 a následne bol aplikovaný na rôzne choroby, najmä na detské s celoživotnou imunitou po vyliečení, ako sú osýpky, mumps (priušnice), rubeola a čierny kašeľ. Označenie  $S$  (susceptible),  $I$  (infective) a  $R$  (recovered) predstavuje počet vnímavých, infikovaných a vyliečených osôb a  $N = S + I + R$  predstavuje celkovú populáciu.

System diferenciálnych rovníc pre model SIR bez vitálnej dynamiky<sup>4</sup> je definovaný ako:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta SI}{N}, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Ak má populácia vitálnu dynamiku, novorodenci môžu zvýšiť počet vnímavých jedincov, a tým podporiť epidémiu alebo umožniť rozšírenie nových prípadov v celej populácii. V takejto reálnej populácii sa môže vyskytnúť ustálený stav dynamiky ochorenia, ktorý je charakterizovaný endemickým stavom chorôb v regióne.

Ak predpokladáme, že miera pôrodnosti a úmrtnosti sú rovnaké ( $\mu = \nu$ ), aby sme udržali konštantnú populáciu, musí byť počet narodených rovnaký ako počet úmrtí. Keď je dynamika choroby ustálená, platí  $\frac{dI}{dt} = 0$ . V tomto prípade sa ODR zjednodušuje na:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\mu N - \frac{\beta SI}{N} - \nu S, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I - \nu I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \nu R.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Model SIR predpokladá, že po vyliečení z choroby získava jedinec celoživotnú imunitu voči ochoreniu. Avšak niektoré choroby, ako napríklad sezónna chrípka, nevyvolávajú takúto imunitu, a preto sa používa model SIRS, ktorý umožňuje, aby sa uzdravení jedinci opäť stali náchylní na infekciu.

Samozrejme, existuje mnoho ďalších variantov základného modelu SIR, napríklad keď sa berie do úvahy karanténa, alebo keď je populácia rozdelená do skupín.

Mnohé choroby majú latentnú fázu, počas ktorej je jedinec už infikovaný, ale ešte nie je infekčný. Toto oneskorenie medzi získaním infekcie a infekčným stavom sa môže zahrnúť do modelu SIR pridaním latentnej/exponovanej populácie  $E$  a umožnením pohybu infikovaných (ale ešte nie infekčných) jedincov z náchylných do  $E$  a z  $E$  do infikovaných.

V modeli SEIRS je navyše zahrnutá aj latentná/exponovaná populácia, čo znamená, že po nakazení trvá určitý čas, kým sa jedinec stane infekčným. To umožňuje lepšie zachytiť reálne prejavy ochorenia. Celkovo ide o komplexnejší model ako SIR alebo SIRS, pretože zohľadňuje viac faktorov a umožňuje detailnejšiu simuláciu rôznych chorôb.

<sup>4</sup>Model bez vitálnej dynamiky znamená, že veľkosť populácie považujeme za nemennú.

Existujú aj rozšírené verzie modelu SEIR, pričom najbežnejšia z nich zahŕňa aj karanténu.

Model SI je vhodný pre ochorenia, pri ktorých sa jednotlivci po nakazení neuzdravia a zostanú infikovaní a infekční po zvyšok svojho života. Príkladom ochorenia, ktoré by bolo vhodné modelovať pomocou modelu SI, je napríklad trvalá infekcia herpesom. Tento model však nie je vhodný pre väčšinu chorôb, pretože mnoho chorôb sa lieči a vedie k uzdraveniu jednotlivca, ktorý potom získava imunitu a už sa nemusí znova nakaziť. U modelu SI platí  $N = S + I$ , čo predstavuje celkový počet populácie.

Systém diferenciálnych rovníc pre model SI s vitálnou dynamikou je definovaný ako:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\mu N - \frac{\beta SI}{N} - \nu S, \\ \frac{dI}{dt} &= -\frac{\beta SI}{N} - \nu I,\end{aligned}\tag{4.3}$$

## 4.2 Model horúčky dengue

Pri skúmaní horúčky dengue sme si všimli, že ľudia môžu byť rozdelení do troch skupín – vnímaví, infekční a vyliečení. Podobne aj samičky komárov by mali byť rozdelené do skupín vnímavých a infekčných. Výsledný model horúčky dengue bude pozostávať z modelu SIR s vitálnou dynamikou pre ľudí a z modelu SI s vitálnou dynamikou pre samičky komárov. Z tohto dôvodu sme sa rozhodli použiť nasledujúci zápis, v ktorom sú všetky skupiny chápané v čase  $t$ :

- $N_h(t)$  – celkový počet ľudí,
- $S_h(t)$  – počet podozrivých ľudí,
- $I_h(t)$  – počet infikovaných ľudí,
- $R_h(t)$  – počet vyliečených ľudí,
- $N_m(t)$  – celkový počet samičiek komárov,
- $S_m(t)$  – počet podozrivých samičiek komárov,
- $I_m(t)$  – počet infikovaných samičiek komárov.

Taktiež platí, že celkový počet ľudí a komárov v populácii je súčtom jednotlivých skupín:  $N_h(t) = S_h(t) + I_h(t) + R_h(t)$  a  $N_m(t) = S_m(t) + I_m(t)$ . Týmto spôsobom sa piatim funkciám  $S_h, I_h, R_h, S_m$  a  $I_m$  pripisuje nezávislosť, ktorú je potrebné opísať a ďalšie dve funkcie,  $N_h$  a  $N_m$ , závisia od týchto piatich funkcií.

Tieto poznatky sa zahrnú do sústavy (4.2) a vytvorí sa tak klasický model horúčky dengue. Model pozostáva z piatich sústav obyčajných diferenciálnych rovníc s neznámymi funkciami  $S_h, I_h, R_h, S_m$  a  $I_m$ .

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h(N_h - S_h) - \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_m,\tag{4.4a}$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_m - (\mu_h + \gamma) I_h,\tag{4.4b}$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma I_h - \mu_h R_h,\tag{4.4c}$$

$$\frac{dS_m}{dt} = A - \frac{\beta_m b}{N_h + m} S_m I_h - \mu_m S_m,\tag{4.4d}$$

$$\frac{dI_m}{dt} = \frac{\beta_m b}{N_h + m} S_m I_h - \mu_m I_m.\tag{4.4e}$$



Taktiež platí, že sústava (4.2) obsahuje niekoľko epidemických parametrov,  $\mu_h$  predstavuje úmrtnosť ľudí, ktorú získame ako prevrátenu hodnotu priemernej dĺžky života v dňoch. Podobne,  $\mu_m$  označuje úmrtnosť komárov. Parameter  $\gamma$  zodpovedá miere uzdravenia ľudí, ktorú môžeme chápať ako prevrátenu hodnotu priemerného trvania infekcie. Parameter  $b$  reprezentuje mieru uštipnutia, zatiaľ čo pravdepodobnosť prenosu infekcie z komára na človeka a naopak označujeme ako  $\beta_h$  a  $\beta_m$ . Okrem toho máme ešte veličinu  $m$ , ktorá predstavuje počet krvných zdrojov mimo človeka a veličinu  $A$ , ktorá určuje mieru „rekrutovania“ (ako populácia komárov nerastie/klesá) komárov.

Pri podrobnejšom skúmaní systému (4.4a)–(4.4e) si možno všimnúť, že môžeme redukovať náš pôvodný systém piatich rovníc na nový systém, ktorý bude obsahovať len tri. Na dosiahnutie tohto cieľa spojíme rovnice (4.4d) a (4.4e) do jednej rovnice.

$$\frac{dS_m}{dt} + \frac{dI_m}{dt} = A - \mu_m(S_m + I_m) = A - \mu_m N_m \Rightarrow A = \mu_m N_m$$

Potom, vzhľadom na to, že hodnota  $N_m$  je známa konštanta, môžeme z rovnice  $N_m = S_m + I_m$  vyjadriť premennú  $I_m$  ako

$$I_m = N_m - S_m.$$

S využitím týchto poznatkov a po úpravách rovníc dostaneme

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h(N_h - S_h) - \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h(N_m - S_m), \quad (4.5a)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h(N_m - S_m) - (\mu_h + \gamma)I_h, \quad (4.5b)$$

$$\frac{dS_m}{dt} = \mu_m N_m - \frac{\beta_m b}{N_h + m} S_m I_h - \mu_m S_m. \quad (4.5c)$$

V posledných rokoch sa pozorovaním v mnohých oblastiach zistilo, že modely založené na diferenciálnych rovniciach neceločíselného rádu môžu poskytnúť lepšie zhody medzi nameranými a simulovanými hodnotami ako klasické modely založené na diferenciálnych rovniciach celočíselného rádu. [6] Z tohto dôvodu sa zdá byť rozumné použiť v tomto prípade zodpovedajúcu modifikáciu pôvodného modelu. Na konštrukciu modelu neceločíselného rádu sa použije Caputova derivácia, ktorá je definovaná vzťahom (3.3). Pretože ľudia a komáre sa správajú odlišne, budeme uvažovať nad dvoma rôznymi rádmi Caputovej derivácie, jedným pre ľudskú populáciu,  $\alpha_h$ , druhým pre populáciu komárov,  $\alpha_m$ . Zlomkový model horúčky dengue bude vytvorený tak, že ľavé strany sústavy (4.4a)–(4.4e) nahradíme Caputovou deriváciou príslušných stavu. Model na neceločíselný rád Caputovej derivácie horúčky dengue bude mať tvar

$$D_{*a}^{\alpha_h} S_h = \mu_h(N_h - S_h) - \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_m, \quad (4.6a)$$

$$D_{*a}^{\alpha_h} I_h = \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_m - (\mu_h + \gamma)I_h, \quad (4.6b)$$

$$D_{*a}^{\alpha_h} R_h = \gamma I_h - \mu_h R_h, \quad (4.6c)$$

$$D_{*a}^{\alpha_m} S_m = \mu_m N_m - \frac{\beta_m b}{N_h + m} S_m I_h - \mu_m S_m, \quad (4.6d)$$

$$D_{*a}^{\alpha_m} I_m = \frac{\beta_m b}{N_h + m} S_m I_h - \mu_m I_m. \quad (4.6e)$$

V tomto systéme je dôležité brať do úvahy rozmer času. Na ľavej strane máme dve rôzne dimenzie, čas<sup>- $\alpha_h$</sup>  (v rovniciach (4.6a)–(4.6c)) a čas<sup>- $\alpha_m$</sup>  (v rovniciach (4.6d)–(4.6e)). Preto aj

pravé strany by mali mať rovnaké rozmery, a preto vytvárame novú sústavu rovníc. Skôr ako sa do toho pustíme, pozrime sa na parametre a veličiny na pravej strane. Zistíme, že dimenzie  $\mu_h, \mu_m, \gamma$  a  $b$  sú na jednotkách čas<sup>-1</sup>, preto musíme tieto dimenzie upraviť. Nová upravená sústava bude mať nasledovný tvar:

$$D_{*a}^{\alpha_h} S_h = \mu_h^{\alpha_h} (N_h - S_h) - \frac{\beta_h b^{\alpha_h}}{N_h + m} S_h I_m, \quad (4.7a)$$

$$D_{*a}^{\alpha_h} I_h = \frac{\beta_h b^{\alpha_h}}{N_h + m} S_h I_m - (\mu_h^{\alpha_h} + \gamma^{\alpha_h}) I_h, \quad (4.7b)$$

$$D_{*a}^{\alpha_h} R_h = \gamma^{\alpha_h} I_h - \mu_h^{\alpha_h} R_h, \quad (4.7c)$$

$$D_{*a}^{\alpha_m} S_m = \mu_m^{\alpha_m} N_m - \frac{\beta_m b^{\alpha_m}}{N_h + m} S_m I_h - \mu_m^{\alpha_m} S_m, \quad (4.7d)$$

$$D_{*a}^{\alpha_m} I_m = \frac{\beta_m b^{\alpha_m}}{N_h + m} S_m I_h - \mu_m^{\alpha_m} I_m. \quad (4.7e)$$

Sústavu piatich rovníc môžeme zredukovať na ekvivalentný systém s tromi rovnicami rovnako, ako sme to urobili v klasickom modeli (pozri (4.5a)–(4.5c)). Po redukcii získame sústavu v tvare:

$$D_{*a}^{\alpha_h} S_h = \mu_h^{\alpha_h} (N_h - S_h) - \frac{\beta_h b^{\alpha_h}}{N_h + m} S_h (N_m - S_m), \quad (4.8a)$$

$$D_{*a}^{\alpha_h} I_h = \frac{\beta_h b^{\alpha_h}}{N_h + m} S_h (N_m - S_m) - (\mu_h^{\alpha_h} + \gamma^{\alpha_h}) I_h, \quad (4.8b)$$

$$D_{*a}^{\alpha_m} S_m = \mu_m^{\alpha_m} N_m - \frac{\beta_m b^{\alpha_m}}{N_h + m} S_m I_h - \mu_m^{\alpha_m} S_m. \quad (4.8c)$$

Analýza modelu horúčky dengue so zlomkovými deriváciami zahŕňa zistenie, že je nelineárny, dynamický, autonómny systém typu  $ODR\alpha$ , s nelineárnou interakciou (v rovniciach sa vyskytujú nelineárne výrazy, ktoré opisujú vzájomnú závislosť medzi premennými) a závislosťou na parametroch.

Analýza stability modelu horúčky dengue je dôležitá pre hodnotenie správneho chovania a dlhodobého vývoja epidémie. V nasledujúcej analýze budeme skúmať stabilitu rovnovážnych stavov modelu a ich vplyv na dynamiku epidémie.

Rovnovážne stavy predstavujú stabilné body, kde sa hodnoty premenných udržiavajú konštantné. Pre model horúčky dengue hľadáme hodnoty premenných  $S_h, I_h$  a  $S_m$ , pre ktoré sú derivácie týchto premenných v systéme rovníc rovné nule. Existujú dva druhy ekvilibríá: beznákazové (v angličtine „disease free equilibrium“ (DFE)) a endemické („endemic equilibrium“ (EE)). Beznákazový stav nastáva, keď je v populácii ľudí nulový počet infikovaných jedincov ( $I_h = 0$ ). V tomto stave neexistuje žiadna aktívna infekcia a ochorenie sa v populácii ľudí nešíri. Endemický stav nastáva, keď je v populácii ľudí nenulový počet infikovaných jedincov ( $I_h > 0$ ). V tomto stave je ochorenie prítomné a udržuje sa v populácii ľudí. Výpočet rovnováhy pre našu sústavu je uvedený v kapitole 8.1.

Pre nulový stav určujeme stabilitu analyzovaním vlastných hodnôt Jacobiovej matice. Ak všetky vlastné hodnoty majú negatívne reálne časti, nulový stav je asymptoticky stabilný. Ak existuje aspoň jedna vlastná hodnota s pozitívnou reálnou časťou, nulový stav je nestabilný.

Pre nenulový stav postupujeme rovnako. Analyzujeme vlastné hodnoty Jacobiovej matice a ak všetky majú negatívne reálne časti, nenulový stav je asymptoticky stabilný. Ak existuje aspoň jedna vlastná hodnota s pozitívnou reálnou časťou, nenulový stav je nestabilný.

Výsledok analýzy stability nulového a nenulového stavu nám poskytuje informácie o chovaní epidémie horúčky dengue a pomáha nám predpovedať jej dlhodobý vývoj a potenciálne intervencie na jej kontrolu.

## 5 Dengue horúčka v Madeire

Najprv funkčnosť programu, ktorý sme napísali v programe MATLAB, otestujeme na dátach Diethelma [6].

Pre účely testovania sme sa rozhodli použiť údaje o horúčke dengue na Madeire v období od októbra 2012 do februára 2013. Tieto údaje boli uverejnené v zdroji [15].

Naším cieľom je teraz použiť tento prístup na modelovanie vypuknutia horúčky dengue na vyššie uvedené obdobie. Išlo o výnimočnú udalosť, keďže to bola prvá zaznamenaná horúčka dengue v Európe, a preto môžeme predpokladať, že pri získavaní údajov boli veľmi opatrní. Do marca 2013 bolo zaznamenaných 2168 pravdepodobných prípadov horúčky dengue, z ktorých 1084 bolo laboratórne potvrdených [7, str. 9]. Všetky nahlásené prípady sa týkajú obyvateľov ostrova a neboli hlásené žiadne úmrtia ani závažné prípady.

Je dôležité všimnúť si, že počet potvrdených prípadov je výrazne nižší ako počet podozrivých prípadov. Madeira sa geograficky nachádza v Atlantickom oceáne, 978 km od afrického pobrežia, preto sa predpokladá, že interakcia medzi infikovanou oblasťou a vonkajším svetom je minimálna. Okrem toho vieme, že ľudia sú pre komáre jediným zdrojom krvi, takže môžeme povedať, že

$$m = 0.$$

Zostávajúce parametre sú [15, str. 7, 8]:

$$\mu_h = \frac{1}{79 \cdot 365}, \quad \mu_m = \frac{1}{15}, \quad \beta_h = 0.25, \quad \beta_m = 0.25, \quad b = \frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{7}, \quad N_h = 112000.$$

Počiatkové hodnoty pre systém diferenciálnych rovníc (4.8a) – (4.8c) sú:

$$\begin{aligned} S_h(0) &= 111991, & I_h(0) &= 9, & R_h(0) &= 0, \\ A(0) &= 111900 \cdot 6, & S_m(0) &= 111900 \cdot 3, & I_m(0) &= 1000. \end{aligned}$$

Tieto hodnoty môžu znamenať to, že vírus sa na ostrove nachádzal už štandardne a nebol naň prinesený infikovanými ľuďmi alebo nebol každý infikovaný človek zaregistrovaný v systéme.

### 5.1 Numerické riešenie

Nasledujúce popisy hlavne využívajú zdroje [9] a [14]. Numerické riešenie diferenciálnych rovníc (klasických či zlomkových) sú väčšinu postupné metódy, ktoré môžeme zhruba rozdeliť do dvoch hlavných skupín: jednokrokové a viackrokové metódy.

V prípade jednokrokových metód sa výpočet uskutočňuje s využitím iba jednej aproximácie riešenia z predchádzajúceho kroku. Tieto metódy sú najvhodnejšie v situáciách, keď je potrebné dynamicky meniť veľkosť kroku, aby sa proces integrácie prispôbil správaniu riešenia. Vo viackrokových metódach je namiesto toho potrebné na výpočet riešenia použiť viac predtým vyhodnotených aproximácií.

Vzhľadom na pretrvávajúcu pamäť operátorov zlomkového rádu sú viackrokové metódy jednoznačne prirodzenou voľbou pre neceločíselné diferenciálne rovnice.

Aj keď viackrokové metódy pre ODR $\alpha$  sú zvyčajne odvodené z viackrokových metód pre ODR, ich aplikácia na zlomkové rovnice sa líši. V týchto prípadoch nie je pevne stanovený počet krokov zahrnutých do výpočtu, ale zvyšuje sa postupom.

Musíme však spomenúť, že existuje mnoho numerických metód, ako napríklad Runge–Kutta metódy a ich rozšírenia, všeobecné Adamsove metódy (Adams–Bashfortove alebo Adams–Moultonove), všeobecné exponenciálne integrátory, spektrálne metódy, metódy založené na

maticových funkciách, zlomkové lineárne viackrokové metódy, metódy založené na numerickej integrácii (v angličtine „product-integration rules“ (PI)), atď.

V PI metódach vzhľadom na sieť  $t_n = t_0 + nh$  s konštantnou veľkosťou kroku  $h > 0$  je riešenie VIR<sup>5</sup> pri  $t_n$  sa najprv zapísaný kusovým spôsobom:

$$y(t) = T_{m-1}[y; t_0](t_n) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{(t_{j+1})} (t_n - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau,^6$$

a  $f(\tau, y(\tau))$  sa v každom podintervale  $[t_j, t_{j+1}]$  aproximuje pomocou nejakého interpolovaného polynómu. Hodnoty integrálov sú teda vypočítavané s vysokou presnosťou, čo umožňuje získať hodnotu  $y_n$ . Závisí to od toho, akým spôsobom je aproximácia vykonávaná, či budeme mať explicitné alebo implicitné metódy.

Napríklad rozšírenie explicitnej a implicitnej Eulerovej metódy na ODR $\alpha$ , stačí v každom intervale  $[t_j, t_{j+1}]$  aproximovať integrál  $f(\tau, y(\tau))$  konštantnými hodnotami  $f(t_j, y_j)$  a  $f(t_{j+1}, y_{j+1})$ . Metódy potom vyzarajú ako

$$\text{explicitný PI: } y_n = T_{m-1}[y; t_0](t_n) + h^\alpha \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j-1}^{(\alpha)} f(t_j, y_j),$$

$$\text{implicitný PI: } y_n = T_{m-1}[y; t_0](t_n) + h^\alpha \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j}^{(\alpha)} f(t_j, y_j),$$

kde  $b_n^{(\alpha)} = ((n+1)^\alpha - n^\alpha) / \Gamma(\alpha+1)$ .

Taktiež existujú lichobežníkové metódy, z ktorých explicitná verzia je tiež možná, ale nestretáme s nimi často.

$$\text{Lichobežníkový PI: } y_n = T_{m-1}[y; t_0](t_n) + h^\alpha \left( \tilde{a}_n^{(\alpha)} f_0 + \sum_{j=0}^n a_{n-j}^{(\alpha)} f(t_j, y_j) \right),$$

kde

$$\tilde{a}_n^{(\alpha)} = \frac{(n-1)^{\alpha+1} - n^\alpha(n-\alpha-1)}{\Gamma(\alpha+2)}, \quad a_n^{(\alpha)} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} & n = 0 \\ \frac{(n-1)^{\alpha+1} - 2n^{\alpha+1} + (n+1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Aby sme sa vyhli riešeniu nelineárnych rovníc na vyhodnotenie  $y_n$ , uprednostňuje sa niekedy prístup založený na metóde prediktor-korektor (PC), pri ktorej sa prvá aproximácia  $y_n$  sa predikuje pomocou explicitnej PI metódy a následne sa koriguje implicitnou PI metódou podľa

$$y_n^P = T_{m-1}[y; t_0](t_n) + h^\alpha \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j-1}^{(\alpha)} f(t_j, y_j),$$

$$y_n = T_{m-1}[y; t_0](t_n) + h^\alpha \left( \tilde{a}_n^{(\alpha)} f_0 + \sum_{j=0}^n a_{n-j}^{(\alpha)} f(t_j, y_j) + a_0^{(\alpha)} f(t_n, y_n^P) \right).$$

<sup>5</sup>VIR označuje modifikovanú slabo-singulárnu Volterrovu integrálnu rovnicu:

$$y(t) = T_{m-1}[y; t_0](t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

<sup>6</sup> $T_{m-1}[y; t_0](t_n)$  označuje Taylorov polynóm stupňa  $m-1$  pre funkciu  $f(t_n)$  so stredom v  $t_0$ .

S cieľom zlepšiť aproximáciu je možné použiť viacnásobné korekčné iterácie, napríklad  $\mu$ :

$$y_n^{[0]} = T_{m-1}[y; t_0](t_n) + h^\alpha \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j-1}^{(\alpha)} f(t_j, y_j),$$

$$y_n^{[\mu]} = T_{m-1}[y; t_0](t_n) + h^\alpha \left( \tilde{a}_n^{(\alpha)} f_0 + \sum_{j=0}^n a_{n-j}^{(\alpha)} f(t_j, y_j) + a_0^{(\alpha)} f(t_n, y_n^{[\mu-1]}) \right), \quad \mu = 1, 2, \dots$$

Očakáva sa, že každá iterácia zvýši rád konvergencie zlomku z prvého rádu konvergencie metódy prediktora, až kým sa nedosiahne rád konvergencie metódy korektora; preto je zvyčajne potrebná jedna alebo veľmi málo iterácií korektora. Explicitná PI metóda sa získava, keď  $\mu = 0$ , štandardná prediktor-korektor metóda ak  $\mu = 1$ .

Numerické metódy riešenia diferenciálnych rovníc môžu byť explicitnej alebo implicitnej povahy. Pri explicitných metódach vypočítanie každého  $y_n$  nepredstavuje žiadny vážny problém, keď predchádzajúce hodnoty  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  sú už známe. Pri implicitných metódach sa aproximácia  $y_n$  vyjadruje pomocou  $y_0, y_1, \dots, y_n$  hodnôt. Implicitné metódy majú lepšie vlastnosti z hľadiska stability, ale potrebujú určitý numerický postup na riešenie nelineárnej rovnice alebo sústavy nelineárnych rovníc.

Za špeciálny prípad nelineárnych systémov  $ODR_\alpha$  považujeme systémy, v ktorých má každá rovnica svoj vlastný rád, ktorý sa môže líšiť od rádu ostatných rovníc. Všeobecný tvar je

$$\begin{aligned} D_{t_0}^{\alpha_1} y_1(t) &= f_1(t, y(t)), \\ D_{t_0}^{\alpha_2} y_2(t) &= f_2(t, y(t)), \\ &\vdots \\ D_{t_0}^{\alpha_Q} y_Q(t) &= f_Q(t, y(t)). \end{aligned} \tag{5.1}$$

pričom  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_Q(t))$  musí byť spojená s počiatocnými podmienkami:

$$y(t_0) = y_0, \quad \frac{d}{dt} y(t_0) = y_0^{(1)}, \quad \dots, \quad \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} y(t_0) = y_0^{(m-1)},$$

kde ich počet je  $m = \max\{m_1, m_2, \dots, m_Q\}$ , pričom  $m_i = [\alpha_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, Q$ . Aj v tomto prípade platí, že je možné preformulovať každú rovnicu sústavy (5.1) ako VIR:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= T_{m_1-1}[y_1; t_0](t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_0}^{t_n} (t_n - s)^{\alpha_1-1} f_1(s, y(s)) ds, \\ y_2(t) &= T_{m_2-1}[y_2; t_0](t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_0}^{t_n} (t_n - s)^{\alpha_2-1} f_2(s, y(s)) ds, \\ &\vdots \\ y_Q(t) &= T_{m_Q-1}[y_Q; t_0](t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_Q)} \int_{t_0}^{t_n} (t_n - s)^{\alpha_Q-1} f_Q(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

na ktoré môžeme aplikovať vyššie uvedené metódy.

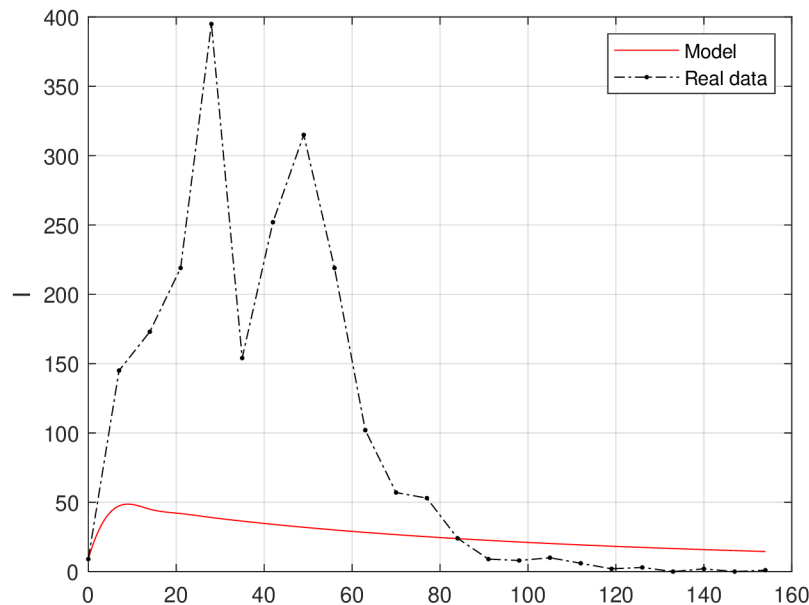
Z teoretického hľadiska neexistujú špecifické rozdiely pri riešení systému  $ODR_\alpha$ , v ktorom majú všetky rovnice rovnaký rád, ale výpočet je náročnejší. Preto by bolo nevyhnutné optimalizovať kódy, aby sme využili možnosť, keď rovnice majú rovnaký rád, a tým predišli zbytočným výpočtom.

## 5.2 Výpočty v programe MATLAB

V programe MATLAB používame vopred napísanú funkciu `fde_pi2_im`, ktorú môžeme stiahnuť z [20].

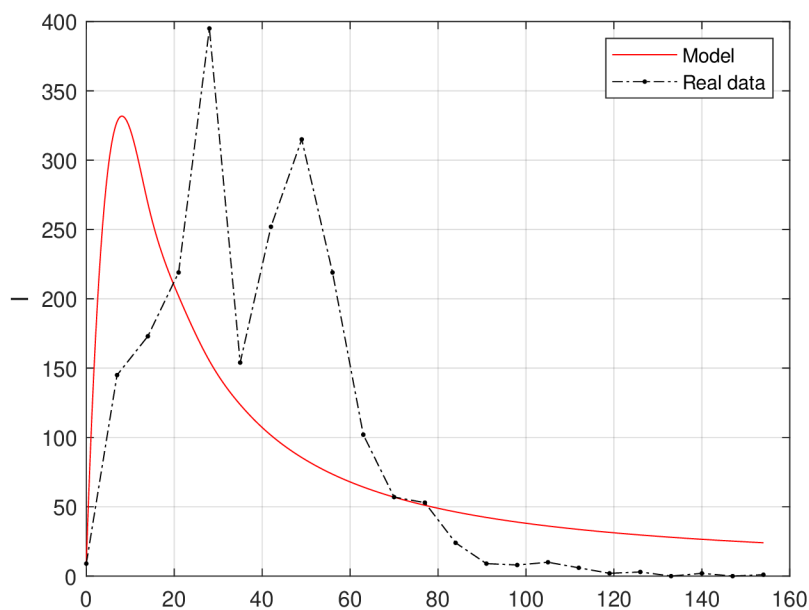
Najprv otestujeme funkčnosť programu na dátach Diethelma [6]. Naša kontrola spočíva v spustení programu na údajoch, ktoré použil Diethelm, a v porovnaní výsledného grafu s jeho grafom.

Potom prepíšme údaje na naše skúmané údaje zo zdroja [15] a spustíme program, z čoho dostaneme Obrázok 2.



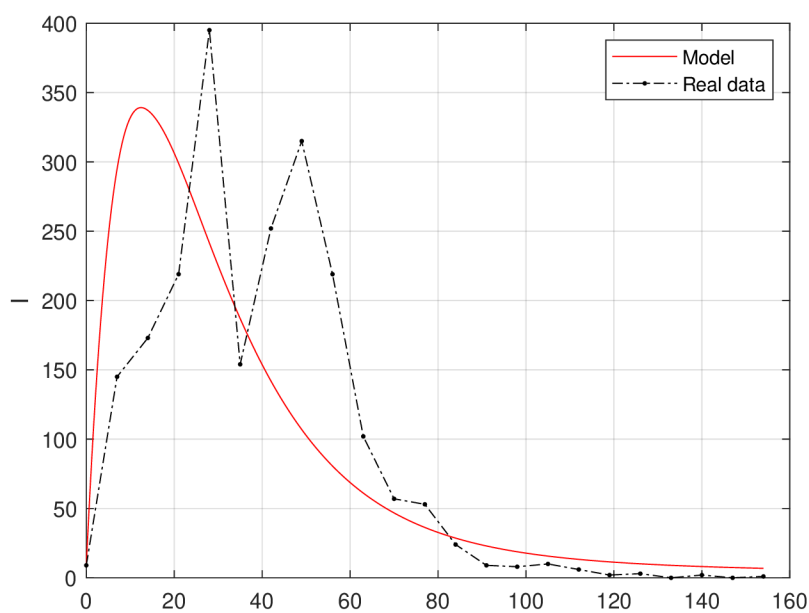
Obr. 2: Model s originálnymi datami

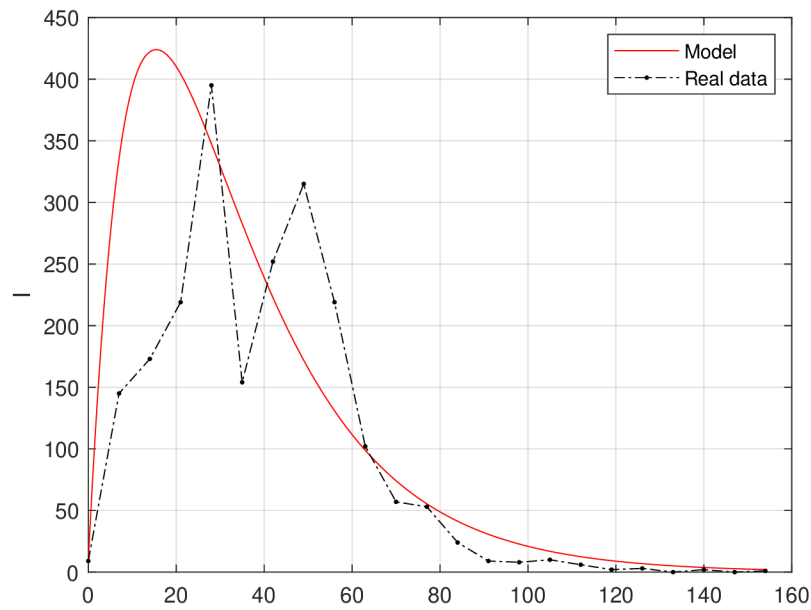
Ako na obrázku 2 vidíme, výsledky výpočtov sa líšia od reality. Aby výsledky nášho modelu boli bližšie realite, musíme nájsť, ktoré premenné treba zmeniť. Upravili sme program pridaním cyklu, ktorý porovnáva výsledky našich výpočtov s reálnymi údajmi pre všetkých šesť premenných (pomocou sumy absolútnych hodnôt rozdielov), a uchová iba „najlepšie výsledky“. Tie dostaneme tak, že porovnáваме aktuálnu odchýlku s najmenšou dosiahnutou odchýlkou, a ak je aktuálna odchýlka menšia, aktualizujeme zapamätanú hodnotu na aktuálnu, ako aj príslušné premenné s hodnotami modelu a časových bodov, pri ktorých sa táto najmenšia odchýlka dosiahla. (viď kapitola 8.2) Pre premenné ( $\alpha_h, \alpha_m, \beta_m, \beta_h, b, \gamma$ ) sme určili intervaly, lebo v rôznych zdrojoch ([6], [7] a [15]) sú uvedené rôzne údaje.



Obr. 3: Modifikovaný model

Na obrázku 3 vidíme, že na našom modeli ešte niečo musíme modifikovať. Po kontrole všetkých parametrov sme zistili, že ako premennú máme aj celkový počet samičiek komárov, s ktorou tiež môžeme pracovať. Experimentálne sme zistili, že najreálnejší graf vychádza, keď  $N_m < N_h$  (obr. 5). Tento výsledok tiež podporuje tvrdenie, že Madeira má veľmi nízku populáciu komárov vďaka svojmu ekosystému. [21]

Obr. 4: Modifikovaný model s hodnotami  $N_h = N_m \cdot 0,3$



Obr. 5: Modifikovaný model s hodnotami  $N_h = N_m \cdot 0,1$

Ešte by sa dalo priblížiť náš model ku grafu reálnych dát, keby sme zmenili počet infikovaných samičiek komárov. Nakoľko z údajov [15] sme mali tento počet pevne daný, tak sme s tým nepracovali ako premenným.



## 6 Záver

Na základe nášho výskumu sme sa v tejto bakalárskej práci zaoberali modelom horúčky dengue na Madeire v období od októbra 2012 do februára 2013. Naším cieľom bolo navrhnúť zlomkový model, ktorý by správne odpovedal pozorovaným údajom o infikovaných osobách v populácii. V práci sme využili známe údaje z literatúry a štatistík, ale tiež sme v rámci modelu získali nové údaje.

Použili sme základné pojmy a teórie nelineárnych dynamických systémov a diskutovali sme o rovnováhe systému a jeho stabilite. Ďalej sme sa zamerali na zlomkový diferenciálny počet a rozdiely medzi ODR1 a ODR $\alpha$ . Podrobne sme skúmali aj epidemiologické modely a ich aplikáciu na horúčku dengue.

Vytvorili sme vlastný návrh zlomkového modelu epidémie horúčky dengue na Madeire a numericky sme ho simulovali v programe MATLAB. Počas týchto simulácií sme sa zameriavali na optimalizáciu parametrov modelu a skúmali sme ich vplyv na výsledky. Zistili sme, že parametre súvisiace s komármi majú najväčší vplyv na skúmaný model.

Dospeli sme k záveru, že náš navrhnutý zlomkový model je schopný pomerne dobre popísať epidémiu horúčky dengue na Madeire v zadanom časovom období. Naše výsledky by mohli poslúžiť ako základ pre ďalšie výskumné práce v tejto oblasti a prispieť k lepšiemu porozumeniu a riadeniu tejto choroby.

## 7 Literatura

### Literatura

- [1] Bhalekar, S., Patil, M., *Singular points in the solution trajectories of fractional order dynamical systems*, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear science, 2018
- [2] Brauer, F., Pauline van den Driessche, Wu, J. *Mathematical Epidemiology*, Lecture Notes in Mathematics 1945, 2008
- [3] Čermák, J.; Nechvátal, L., *On a problem of linearized stability for fractional difference equations*, Nonlinear Dyn. **104** (2021), 1253–1267.
- [4] Cong, N. D., Tuan, H. T., *Generation of nonlocal fractional dynamical systems by fractional differential equations*, Journal of Integral Equations and Applications, Volume 29, Number 4, 2017
- [5] Daróczy M., Bátkai, Z., *Törtszám-differenciálegyenletek periódikus és aszimptotikusan periódikus megoldásai*, Matematikai Lapok, vol. 21, no. 1, pp. 1-21, 2010.
- [6] Diethelm, K., *A fractional calculus based model for the simulation of an outbreak of dengue fever*, Nonlinear Dynamics, 2013
- [7] European Centre for Disease Prevention and Control Mission report, *Dengue outbreak in Madeira, Portugal/ March 2013*, Stockholm: ECDC; 2014.
- [8] Fečkan, M., *Note on periodic solutions of fractional differential equations*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 41, 2018
- [9] Garappa, R., *Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial*, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari, Via E. Orabona 4, 70126 Bari, Italy, 2017
- [10] Glozиковá, A., *Autonomous systems of differential equations - classical vs fractional ones* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2020, Vedoucí práce: doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.
- [11] Jassim, H. K.; Hussein, M. A. , *A Novel Formulation of the Fractional Derivative with the Order  $\alpha \leq 0$  and without the Singular Kernel*, 2022 Department of Mathematics, University of Thi-Qar, Nasiriyah 64001, Iraq
- [12] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M., *A new definition of fractional derivative*, Journal of Computational and Applied Mathematics 264 (2014) 65–70, 2013
- [13] Kisela, T., *Fractional differential equations and their applications*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008, Vedoucí práce: doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.
- [14] Kyjovský, A., *Numerické metody řešení diferenciálních rovnic neceločíselného rádu* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018, Vedoucí práce: doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.
- [15] Rodrigues, H. S., Monteiro, M. T. T., Torres, D. F. M., Silva A. C., Sousa, C., Conceicao, C., *Dengue in Madeira Island*, Dynamics, Games and Science, CIM Series in Mathematical Sciences 1 (2015), 593–605, 2014.
- [16] Medlock, J., *Mathematical modeling of epidemics*, University of Washington, Applied Mathematics Department, 2002
- [17] Nishiura, H., *Mathematical and Statistical Analyses of the Spread of Dengue*, Department of Medical Biometry, University of Tübingen, Westbahnhofstr. 55, Tübingen, D-72070, Germany

and Research Center for Tropical Infectious Diseases, Nagasaki University Institute of Tropical Medicine, 1-12-4 Sakamoto, Nagasaki, 852-8523, Japan, 2006

- [18] Šisková, B., *Eko-epidemiologické modely*, Brno, Masarykova Univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2016, Vedoucí práce: RNDr. Lenka Příbylová, Ph.D
- [19] Šustková, A., *Analýza dvoudimenzionálních modelů neceločíselného řádu*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2019, Vedoucí práce: doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.
- [20] Webová stránka vopred napísaneho kódu v programe matlab <https://www.dm.uniba.it/Members/garrappa/Software>.
- [21] Oficiálna stránka Madeiry <https://www.madeira-web.com/en/madeira/facts/tourism/safe-destination.html>

## 8 Apendix

### 8.1 Ekvilibrium našej sústavy

$$D_{*a}^{\alpha_h} S_h = \mu_h^{\alpha_h} (N_h - S_h) - \frac{\beta_h b^{\alpha_h}}{N_h + m} S_h (N_m - S_m) \quad (8.1)$$

$$D_{*a}^{\alpha_h} I_h = \frac{\beta_h b^{\alpha_h}}{N_h + m} S_h (N_m - S_m) - (\mu_h^{\alpha_h} + \gamma^{\alpha_h}) I_h \quad (8.2)$$

$$D_{*a}^{\alpha_m} S_m = \mu_m^{\alpha_m} N_m - \frac{\beta_m b^{\alpha_m}}{N_h + m} S_m I_h - \mu_m^{\alpha_m} S_m \quad (8.3)$$

Vieme, že  $S'_h = I'_h = S'_m = 0$ . Potom z (8.3) vyjadríme

$$I_h = \frac{\mu_m (N_m - S_m) (N_h + m)}{S_m b \beta_m} ,$$

a dosadíme do (8.2)

$$0 = \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h (N_m - S_m) - \frac{\mu_m (N_m - S_m) (N_h + m) (\mu_h + \gamma)}{S_m b \beta_m} \quad (8.4)$$

Z rovnici (8.1) vyjadríme

$$S_h = \frac{\mu_h N_h (n_h + m)}{(N_h + m) \mu_h + \beta_h b (N_h - S_h)}$$

Ak rovnicu (8.4) delíme s  $(N_m - S_m)$ , a dosadíme vyjadrené  $S_h$ , dostaneme

$$0 = \frac{\beta_h b}{N_h + m} \cdot \frac{\mu_h N_h (n_h + m)}{(N_h + m) \mu_h + \beta_h b (N_h - S_h)} - \frac{\mu_m (N_h + m) (\mu_h + \gamma)}{S_m b \beta_m}$$

Ďalej len upravujeme rovnice.

$$\mu_m (N_h + m) (\mu_h + \gamma) = \frac{\beta_h \beta_m b^2}{N_h + m} \cdot \frac{\mu_h N_h (N_h + m) S_m}{(N_h + m) \mu_h + \beta_h b (N_m - S_m)}$$

$$\frac{\mu_m (N_h + m)^2 (\mu_h + \gamma)}{\beta_h \beta_m b^2} = \frac{\mu_h N_h (N_h + m) S_m}{(N_h + m) \mu_h + \beta_h b (N_m - S_m)}$$

$$\frac{(N_h + m) \mu_h (\mu_h + \gamma)}{\beta_h \beta_m b^2} \cdot \left( (N_h + m) \mu_h + \beta_h b (N_m - S_m) \right) = \mu_h N_h S_h$$

$$\frac{(N_h + m) \mu_m (\mu_h + \gamma) \left( (N_h + m) + \beta_h b N_m \right)}{\beta_h \beta_m b^2} = \left( \frac{(N_h + m) \mu_m (\mu_h + \gamma) \beta_h b}{\beta_h \beta_m b^2} + \mu_h N_h \right)$$

$$S_m^{**} = \frac{\mu_m (\mu_h + \gamma) \left( (N_h + m) \mu_h + \beta_h b N_m \right) / N_h + m}{\mu_m (\mu_h + \gamma) \beta_h b (N_h + m) + \mu_h N_h \beta_h \beta_m b^2}$$

$$I_h^{**} = \frac{\mu_m (N_m - S_m) (N_h + m)}{S_m b \beta_m}$$

Do  $I_h^{**}$  dosadíme  $S_m = S_m^{**}$ , dostaneme

$$I_h^{**} = \frac{\mu_h \left( N_h N_m b^2 \beta_h \beta_m - \mu_m (\mu_h + \gamma) (N_h + m)^2 \right)}{\beta_m b (\mu_h + \gamma) \left( (N_h + m) \mu_h + N_m b \beta_h \right)}$$

$$S_h^{**} = \frac{\mu_h N_h (N_h + m)}{(N_h + m) \mu_h + \beta_h b (N_m - S_m)},$$

kde  $S_m = S_m^{**}$ .

$$S_m^{**} = \frac{(N_h + m) \left( (\mu_h + \gamma) (N_h + m) \mu_m + N_h \beta_m b \mu_h \right)}{\beta_m b \left( (N_h + m) \mu_h + N_m \beta_h b \right)}$$

DFE:  $E^* = [S_h^*, I_h^*, S_m^*] = [N_h, 0, N_m]$

EE:  $E^{**} = [S_h^{**}, I_h^{**}, S_m^{**}]$

## 8.2 MATLABovský kód

```

%% FRACTIONAL SIR MODEL of dengue fever in Madeira (Portugalia),
    2012-13
clc; clear;

%Input data
Ih0=9;           % number of infected humans in inicial
                condition
Sh0=111991;     % number of suspected humans in inicital
                condition
Nh=Ih0+Sh0;     % total polupation of humans
Nm = Nh*0.1;   % total population of mosquitoes
Im0=1000;      % number of infected mosquitoes in inicial
                condition
Sm0=Nm-Im0;    % number of suspected mosquitoes in inicial
                condition
muh=1/(79*365); % human mortality rate
mum=1/10;      % mosquito mortality rate
m=0;           % alternative blood source
t0=0;          % initial time in days
T=23*7;       % final time in days
h=0.05;        % time step for Caputo derivative
k=0.03;        % time step for other parameters
y0=[Sh0;Ih0;Sm0]; % Inicial contition
% alphah - Caputo derivative order for humans
% alpham - Caputo derivative order or mosquitoes
% betam - disease transmission rate human-mosquito
% betah - disease transmission rate mosquito-human

```

```

% b - biting rate
% gamma - rate of recovery from the disease

%Real data
treal=0:7:154;
Ireal
    =[9,145,173,219,395,154,252,315,219,102,57,53,24,9,8,10,6,2,3,0,2,0,1]

% Set initial values for smallest deviation
min_deviation = inf;
min_I = [];
min_t = [];

% Cycluces to find the best values
for alphah=0.5:h:1
    for alpham = 0.5:h:1
        for betam=0.25:k:0.37
            betah=betam;
            for b = 0.3:k:0.7
                for gamma = 1/15:k:1/3
                    f_fun = @(t,y) [muh^alphah*(Nh-y(1))-betah*b^
                        alphah/(Nh+m)*y(1)*(Nm-y(3));...
                        betah*b^alphah/(Nh+m)*y(1)*(Nm-y
                            (3))-(muh^alphah+gamma^alphah
                                )*y(2);...
                        mum^alpham*Nm-betam*b^alpham/(Nh
                            +m)*y(3)*y(2)-mum^alpham*y(3)
                            ];

                    J_fun = @(t,y) [-muh^alphah-betah*b^alphah*(Nm
                        -y(3))/(Nh + m),0,betah*b^alphah*y(1)/(Nh
                            + m); ...
                        betah*b^alphah*(Nm-y(3))/(Nh+
                            m),-muh^alphah-gamma^
                                alphah,-betah*b^alphah*y
                                    (1)/(Nh + m);...
                        0,-betam*b^alpham*y(2)/(Nh+m)
                            ,-betam*b^alpham*y(3)/(Nh
                                + m)-mum^alpham];

                    % Calculate deviation from real data
                    [t, y]=fde_pi2_im([alphah, 1, alpham], f_fun,
                        J_fun, t0, T, y0, h);
                    I_model_interp = interp1(t, y(2,:), treal); %
                        interpolate to match real data time
                        points
                    deviation = sum(abs(Ireal - I_model_interp));
                end
            end
        end
    end
end

```

```
        % Store new smallest deviation if it's
        % smaller than current
        if deviation < min_deviation
            min_deviation = deviation;
            min_I = I_model_interp;
            min_t = treal;
        end
    end
end
end
end
end
end

%% Plotting results
% Model plot
t_interp = linspace(min_t(1), min_t(end), 1000); % define new
    time points for interpolation
I_interp = interp1(min_t, min_I, t_interp, 'spline'); %
    interpolate the model results
plot(t_interp, I_interp, 'r'); % plot the interpolated curve
% Original plot
hold on;
plot(treal, Irealm, '.-k');
grid on;
xlabel('t');
ylabel('I');
legend('Model', 'Real data', 'Location', 'northeast', '
    Orientation', 'vertical');
```