UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matematický model eutrofizace jezera Mendota

Vedoucí bakalářské práce:
prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.
Rok odevzdání: 2009

Vypracovala:
Dana Cahová
MAP, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně za vedení prof. RNDr. Ireny Rachůnkové, DrSc. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 22. února 2009

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucímu bakalářské práce prof. RNDr. Ireně Rachůnkové, DrSc. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích.

Obsah

Použité značení **4**

Úvod **5**

1 Základy teorie dynamických systémů 1. řádu **6**
1.1 Dynamické systémy 1.řádu 6
1.2 Stabilita equilibrií 15

2 Klasifikace jezer **18**
2.1 Rovnovážné stavy a hystereze 18
2.2 Určení fázových portrétů reverzibilního, irreverzibilního a hysterezního jezera 23

3 Jezero Mendota **28**

Závěr **38**

Literatura **39**

Použité značení

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$	množina uspořádaných n-tic reálných čísel
$[a, b]$	uzavřený inetrval v $\mathbb{R}$
(a, b)	otevřený inetrval v $\mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$	podmnožina $\mathbb{R}^n$, ostrá množinová inkluze
$C^n(I)$	množina funkcí se spojitou n-tou derivací
$\frac{dx}{dt}$	derivace funkce f podle nezávislé proměnné t
$f'(x)$	derivace funkce f podle proměnné x

Úvod

S dynamickými systémy se setkáváme v každodenním životě. Modelovat lze různé typy přírodních dějů a procesů, existují i modely vývoje nejrůznějších populací. Tyto dynamické systémy se v matematice znázorňují diferenciálními rovnicemi s konkrétně definovanými vstupy a výstupy a se známými počátečními podmínkami, které určují specifické matematické modely. Mým úkolem bude přiblížit matematický model eutrofizace, jež nám umožní popsat procesy probíhající v jezerech a konkrétní příklad uvést na jezeře Mendota v USA.

Eutrofizací rozumíme proces obohacování vod o živiny, zejména dusík a fosfor. Dusíkaté látky a fosfáty, které způsobují nepřirozenou eutrofizaci, často pocházejí z hnojiv používaných v zemědělském sektoru, najdou se však i jiné zdroje znečištění. Důsledkem je nejprve přemnožení planktonu (vodní květ) a následně, po jeho masovém odumření, nedostatek kyslíku ve vodě a vymírání ryb a dalších organismů. Eutrofizaci lze předcházet omezením znečištění vod, zabráněním vniku hnojiv do vody a také čištěním odpadních vod.

Cílem této bakalářské práce je především ukázat, jak ze základních hypotéz o cirkulaci fosforu v jezeře a v podzemních i povrchových vodách vznikne matematický model ve tvaru dynamického systému.

První kapitola obsahuje přehled základních poznatků z teorie dynamických systémů prvního řádu, který je nezbytný k řešení příkladů popisujících různé chování jezera Mendota.

Druhá kapitola se zabývá vyšetřováním rovnovážných stavů modelů, pomocí uvedené teorie a určováním jejich fázových portrétů pro různé hodnoty parametrů. Vše je názorně ukázáno na obrázcích grafů a fázových portrétů zadaných funkcí.

Matematický model jezera Mendota, který je v této bakalářské práci používán, je podrobně popsán ve třetí kapitole. Bereme v něm v úvahu pouze vliv fosforu. Model by mohl být zpřesněn přidáním dalších parametrů - faktorů ovlivňujících dané jezero, což už by však bylo nad rámec mé práce.

1 Základy teorie dynamických systémů 1. řádu

1.1 Dynamické systémy 1.řádu

Nechť I je otevřený interval reálné osy $\mathbb{R}$. Nechť $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce reálné proměnné t, kde t je nezávislá proměnná (čas) a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce reálné proměnné x.

Definice 1 Nechť $x(t)$ je neznámá funkce a $f(x)$ je daná funkce, pak rovnici

$$x' = f(x) \tag{1.1}$$

nazýváme *skalární autonomní diferenciální rovnicí.*

Definice 2 Řekneme, že funkce $x(t)$ je *řešením rovnice (1.1) na intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, jestliže

$$x'(t) = f(x(t)) \qquad \forall t \in I.$$

Definice 3 *Řešením Cauchyovy počáteční úlohy na intervalu* $I \subset \mathbb{R}$ rozumíme funkci $x(t)$, která je řešením rovnice (1.1) a splňuje

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

kde počáteční čas $t_0 \in I$ a $x_0 \in \mathbb{R}$.

Bez újmy na obecnosti lze u skalární autonomní diferenciální rovnice (1.1) uvažovat $t_0 = 0$.

Označení 1 Označme $\mathbf{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ množinu všech spojitých funkcí $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a $\mathbf{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ množinu všech funkcí $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se spojitou první derivací. Analogicky použijeme značení $\mathbf{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pro množinu všech funkcí $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se spojitými derivacemi až do řádu n včetně. Pokud je definičním oborem funkce f podmnožina $U \subset \mathbb{R}$, pak $\mathbf{C}^0(U, \mathbb{R})$. Nebude-li pochyb, o které funkci mluvíme, budeme psát krátce $\mathbf{C}^0$, $\mathbf{C}^1$, $\mathbf{C}^n$ ...

V případě, že reálná spojitá funkce je funkcí více proměnných, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, pak je třídy $\mathbf{C}^1$, jestliže všechny její první parciální derivace jsou spojité.

K zdůraznění závislosti řešení $x(t)$ rovnice (1.1) na počáteční podmínce (1.2), používáme značení $\varphi(t, x_0)$. Jinými slovy $\varphi(t, x_0) = x(t)$ a $\varphi(0, x_0) = x_0$.

Věta 1 (O existenci a jednoznačnosti)

i) *Jestliže* $f \in \boldsymbol{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *pak pro každé* $x_0 \in \mathbb{R}$ *existuje interval* $I_{x_0} \equiv (\alpha_{x_0}; \beta_{x_0})$ *obsahující* $t_0 = 0$ *a řešení* $\varphi(t, x_0)$ *Cauchyovy počáteční úlohy*

$$x' = f(x)$$

$$x(0) = x_0$$

definované pro každé $t \in I_{x_0}$, *splňující počáteční podmínku* $\varphi(0, x_0) = x_0$. *Je-li* α_{x_0} *konečné, pak*

$$\lim_{t \to \alpha_{x_0}^+} |\varphi(t, x_0)| = \infty.$$

Je-li β_{x_0} *konečné, pak*

$$\lim_{t \to \beta_{x_0}^-} |\varphi(t, x_0)| = \infty.$$

ii) Jestliže $f \in \boldsymbol{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *pak řešení* $\varphi(t, x_0)$ *je jediné na* I_{x_0} *a funkce* $\varphi(t, x_0)$ *je spojitá spolu s jejími prvními parciálními derivacemi na* (t, x_0).

Důkaz 1 Viz lit. [3]

Definice 4 Největší možný interval I_{x_0} z předchozí věty se nazývá *maximální interval existence řešení* $\varphi(t, x_0)$.

Nyní již máme potřebnou teorii a můžeme tedy definovat pojem *dynamický systém*.

Jestliže je funkce f třídy $\mathbf{C}^1$, pak pro každé pevné t je $\varphi(t, x_0)$ zobrazením z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, definované vztahem $x_0 \longmapsto \varphi(t, x_0)$.

Uveďme tři důležité vlastnosti tohoto zobrazení:

i) $\varphi(0, x_0) = x_0$;

ii) $\varphi(t + s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0))$, $\forall t, s$, jestliže je zobrazení na obou stranách rovnice definováno;

iii) $\varphi(t, x_0)$ je zobrazením třídy $\mathbf{C}^1$ pro každé t a existuje k němu spojité inverzní zobrazení $\varphi(-t, x_0)$, které je také třídy $\mathbf{C}^1$.

Definice 5 Zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ splňující výše uvedené vlastnosti se nazývá *dynamický systém třídy* $\boldsymbol{C}^1$ *na* $\mathbb{R}$.

Podívejme se opět na rovnici (1.1), ale tentokrát z geometrického hlediska. V každém bodě roviny (t, x), kde je $f(x)$ definována, vyjadřuje pravá strana rovnice (1.1) hodnotu derivace $\frac{dx}{dt}$, která může být považována za sklon úsečky procházející daným bodem.

Definice 6 Množinu všech těchto úseček nazýváme *směrové pole* diferenciální rovnice (1.1).

Definice 7 *Grafem řešení* úlohy (1.1), které prochází bodem x_0, rozumíme podmnožinu roviny (t, x) definovanou $\{(t, \varphi(t, x_0)) : t \in I_{x_0}\}$. Nazýváme jej *trajektorií procházející bodem* x_0.

Jednoduše řečeno, trajektorie se dotýká úseček směrového pole v každém bodě roviny, kterým prochází.

Ke každému bodu x na ose X lze přiřadit směr určený úsečkou spojující body x a $x + f(x)$. Na tuto úsečku se lze dívat jako na vektor závisející na x. Množinu těchto vektorů nazýváme *vektorové pole* generované rovnicí (1.1).

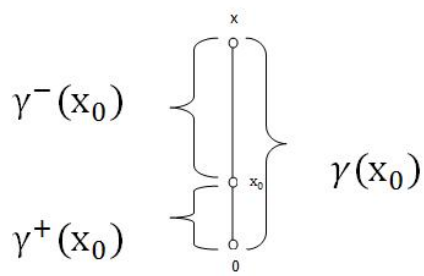
Definice 8 *Kladná orbita* $\gamma^+(x_0)$, *záporná orbita* $\gamma^-(x_0)$ a *orbita* $\gamma(x_0)$ bodu x_0 jsou definovány jako intervaly osy X následovně:

$$\gamma^+(x_0) = \bigcup_{t\in[0;\beta_{x_0})} \varphi(t, x_0)$$

$$\gamma^-(x_0) = \bigcup_{t\in(\alpha_{x_0};0]} \varphi(t, x_0)$$

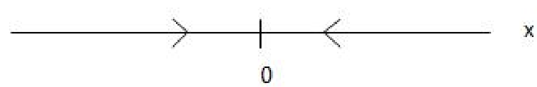
$$\gamma(x_0) = \bigcup_{t\in(\alpha_{x_0};\beta_{x_0})} \varphi(t, x_0)$$

Orbity dostáváme jako projekci grafů řešení do osy X.



Obr. 1.1: Orbity bodu x_0

Množina všech orbit společně se směrovými šipkami se nazývá *fázový portrét*. Směrové šipky vyjadřují pohyb bodu $\varphi(t, x_0)$ po orbitě pro rostoucí t.



Obr. 1.2: Fázový portrét

Definice 9 Bod $\bar{x} \in \mathbb{R}$ nazveme *equilibriem* (také kritickým bodem nebo bodem rovnováhy) diferenciální rovnice (1.1), jestliže $f(\bar{x}) = 0$.

Jestliže je bod $\bar{x}$ equilibriem, pak konstantní funkce $x(t) = \bar{x}$ pro každé t je řešením a orbita $\gamma(\bar{x})$ je $\bar{x}$.

Definice 10 Jestliže $\gamma^{-}(x_0)$ je ohraničená, pak množinu $\alpha(x_0) = \lim\limits_{t \to \alpha_{x_0}^{+}} \varphi(t, x_0)$ nazveme α *-limitní množinou* bodu x_0. Analogicky, je-li $\gamma^{+}(x_0)$ ohraničené, pak množinu $\omega(x_0) = \lim\limits_{t \to \beta_{x_0}^{-}} \varphi(t, x_0)$ nazveme ω *-limitní množinou* bodu x_0.

Ukážeme dvě metody určování equilibrií, orbit a fázového portrétu rovnice (1.1).

První metoda vychází z grafu funkce f vystupující v rovnici (1.1).
Postupujeme tak, že vyšetříme průběh funkce f, nalezneme všechny její nulové body a určíme mezi nimi znaménko funkce f. Pak nulové body funkce f jsou equilibrii rovnice (1.1), orbity jsou tvořeny buď těmito equilibrii nebo otevřenými úsečkami mezi nimi nebo neomezenými intervaly. V posledním případě neexistuje $\alpha-$limitní nebo $\omega-$limitní množina příslusné orbity. Šipka na každé úsečce odpovídá znaménku funkce f mezi krajními body této úsečky. Je-li osa x, na níž tvoříme fázový portrét, vodorovná, pak šipka směřuje napravo, je-li f kladná (pro x z této úsečky) a nalevo, je-li f záporná (pro x z této úsečky). Z rovnice (1.1) totiž plyne, že je-li $f(x) > 0$, pak i $x' > 0$ a tedy řešení $x(t) = \varphi(t, x_0)$ roste. Podobně pro $f(x) < 0$ řešení $x(t)$ klesá.
Stejným způsobem určíme směr šipek na neomezených intervalech. Takto zkonstruujeme celý fázový portrét rovnice (1.1).

Druhá metoda je založena na skutečnosti, že rovnici (1.1) lze psát ve tvaru

$$x' = f(x) = -\frac{d}{dx}F(x), \tag{1.3}$$

kde $F(x) = -\int\limits_0^x f(s)ds$.

Je-li $x(t)$ řešení rovnice (1.3), pak

$$\frac{d}{dt}\left(F(x(t))\right) = \frac{d}{dx}(F(x(t))) \cdot \frac{d}{dt}(x(t)) = -(f(x(t)))^2 \leq 0.$$

F je proto vždy klesající funkce podél řešení. Equilibrium rovnice (1.3) je vždy bodem extrému funkce F. Šipky na orbitách nyní odpovídají směru klesání funkce F.

Poznámka 1 Z fázových portrétů vyplývá, že každé řešení rovnice (1.1) je monotónní a má-li α-limitní nebo ω-limitní množinu, pak tato množina je equilibriem rovnice (1.1).

Příklad 1 Určíme fázový portrét rovnice

$$x' = x - x^3 + \lambda, \tag{1.4}$$

kde λ je reálné číslo.

Rovnici budeme řešit oběma metodami.

Použijeme první metodu a vyšetříme průběh funkce f.

Pro $\lambda = 0$ má rovnice funkce f tvar

$$f(x) = x - x^3.$$

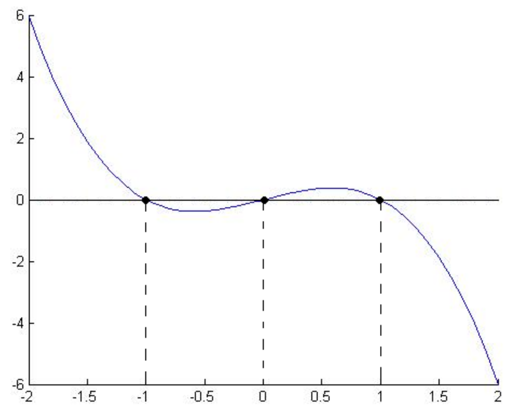
Equilibria určíme z rovnice

$$x - x^3 = 0.$$

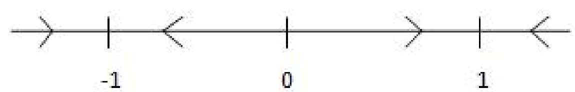
Nulovými body funkce f jsou body: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a $x_3 = -1$. Stacionární body funkce f určíme z rovnice

$$f'(x) = 1 - 3x^2 = 0.$$

Tedy $x^2 = \frac{1}{3}$ a $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Pro x z intervalu $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ a taktéž i pro x z intervalu $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty\right)$je hodnota první derivace funkce f záporná, tudíž funkce f je na tomto intervalu klesající. Pro x z intervalu $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ má f' kladnou hodnotu a funkce f je pro tato x rostoucí. Z grafu pak lehce poznáme, kde má funkce f kladnou, a kde zápornou část. Z čehož lze jednoznačně určit směr šipek v fázovém portrétu funkce f.

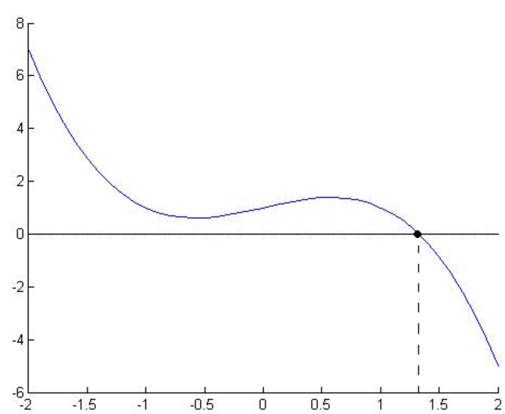


Obr. 1.3: Graf funkce f $(\lambda = 0)$



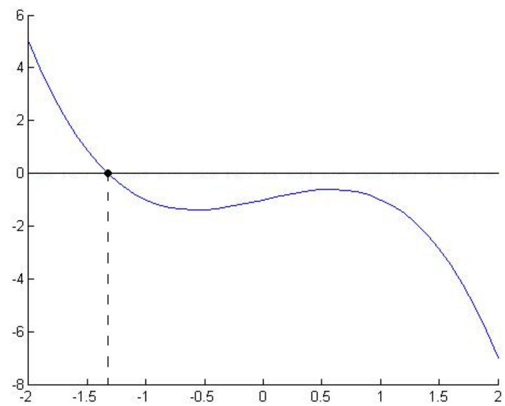
Obr. 1.4: Fázový portrét rovnice (1.4) $(\lambda = 0)$

Pro $\lambda = 1$ se graf funkce f posune po ose Y směrem nahoru a funkce f má pouze jeden nulový bod. Tedy existuje pouze jedno equilibrium tj. jistý bod $x_0 > 1$.



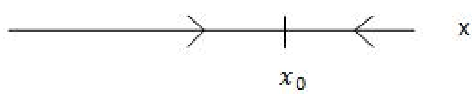
Obr. 1.5: Graf funkce f $(\lambda = 1)$

Pro $\lambda = -1$ se graf funkce f posune po ose Y směrem dolů a funkce f má opět pouze jeden nulový bod. Tedy existuje pouze jedno equilibrium tj. jistý bod $x_0 < -1$.



Obr. 1.6: Graf funkce f $(\lambda = -1)$

Pro funkce, kde je $\lambda = 1$ nebo $\lambda = -1$ jsou fázové portréty téměř stejné, akorát pro každé λ bude jiný bod x_0.



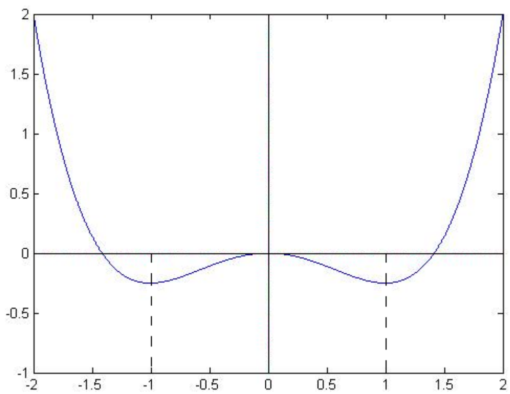
Obr. 1.7: Fázový portrét rovnice (1.4) ($\lambda = 1$, $\lambda = -1$)

Druhá metoda vychází z použití funkce F. Fázový portrét pro $\lambda = 0$ určíme pomocí druhé metody.

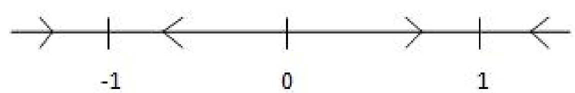
Funkce F má tvar

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

a jejím grafem je křivka 4. stupně s nulovými body $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$. Funkce F má lokální maximum v 0 a lokální minima v $-1, 1$. Tyto tři body jsou equilibria rovnice (1.4). Šipky na fázovém portrétu mezi eqiulibrii určují směr v němž klesá F.



Obr. 1.8: Graf funkce F ($\lambda = 0$)



Obr. 1.9: Fázový portrét rovnice (1.4) ($\lambda = 0$)

1.2 Stabilita equilibrií

V této kapitolce se budeme v krátkosti věnovat stabilitě equilibrií.

Definice 11 Řekneme, že equilibrium $\bar{x}$ rovnice (1.1) je *stabilní*, jestliže $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0 \forall x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže $|x_0 - \bar{x}| < \delta$, potom řešení $\varphi(t, x_0)$ úlohy (1.1), (1.2) splňuje nerovnost $|\varphi(t, x_0) - \bar{x}| < \epsilon, \forall t \geq 0$.
V opačném případě řekneme, že je bod $\bar{x}$ *nestabilní*.

Definice 12 Řekneme, že equilibrium $\bar{x}$ je *asymptoticky stabilní*, jestliže $\exists r > 0$: $\lim\limits_{t \to \infty} |\varphi(t, x_0) - \bar{x}| = 0$ pro každé x_0 splňující $|x_0 - \bar{x}| < r$.

Následující věta umožňuje určení stability equilibria rovnice (1.1) z vlastností funkce $f(x)$.

Věta 2 *Předpokládejme, že funkce f je třídy $\mathbb{C}^1$ a $\bar{x}$ je equilibrium rovnice (1.1) tj. $f(\bar{x}) = 0$. Dále předpokládejme, že $f'(\bar{x}) \neq 0$. Pak equilibrium $\bar{x}$ je asymptoticky stabilní, jestliže $f'(\bar{x}) < 0$ a nestabilní, jestliže $f'(\bar{x}) > 0$.*

Důkaz 2 Viz lit. [3]

Poznámka 2 Rovnici $\frac{dx}{dt} = f'(\bar{x})x$ nazýváme lineární variační rovnicí. Můžeme ale také říci, že se jedná o linearizaci vektorového pole $\frac{dx}{dt} = f(x)$ v okolí equilibria $\bar{x}$. Věta 2 ukazuje, že je-li $f'(\bar{x}) \neq 0$, pak typ stability equilibria $\bar{x}$ rovnice (1.1) je stejný jako typ stability nulového equilibria v odpovídajícím linearizovaném vektorovém poli.

Definice 13 Řekneme, že equilibrium $\bar{x}$ rovnice (1.1) je *hyperbolické equilibrium*, jestliže $f'(\bar{x}) \neq 0$.
Je-li $f'(\bar{x}) = 0$, pak se $\bar{x}$ nazývá *nehyperbolické equilibrium*.

Příklad 2 Na rovnici (1.4) ukážeme bifurkaci, avšak λ bereme z intervalu $(0,1)$.

Pro $\lambda = 0$ spočítáme první derivaci funkce $f(x) = x - x^3$.

$$f'(x) = 1 - 3x^2 = 0$$

$$-3x^2 = -1$$

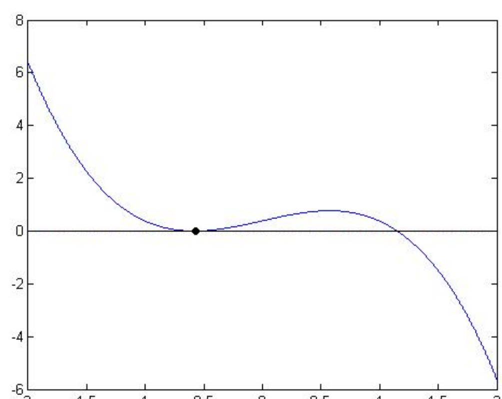
$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x_{1/2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

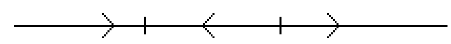
Nyní určíme hodnotu minima a maxima funkce $f(x)$. Dosazením x_1 do rovnice

$$-x + x^3 = \lambda$$

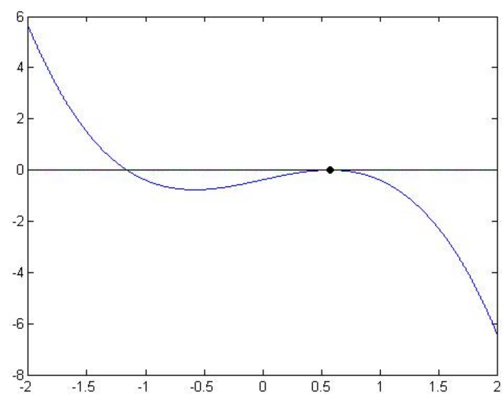
dostaneme hodnotu minima $\lambda = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ a dosazením x_2 dostaneme hodnotu maxima$\lambda = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.
Získali jsme dvě hodnoty bifurkačního parametru λ. Pro hodnoty tohoto parametru nastala bifurkace, neboli změna fázového portrétu. Dvě equilibria ze tří se seskupila v jedno a na fázových portrétech jsou vidět už jen dvě equilibria. Equilibrium, které vzniklo splynutím dvou equilibrií, je nehyperbolické.



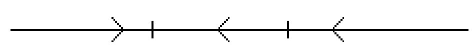
Obr. 1.10: Graf funkce uvedené v rovnici (1.4) ($\lambda = \frac{2\sqrt{3}}{9}$)



Obr. 1.11: Fázový portrét rovnice (1.4) ($\lambda = \frac{2\sqrt{3}}{9}$)



Obr. 1.12: Graf funkce uvedené v rovnici (1.4) ($\lambda = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$)



Obr. 1.13: Fázový portrét rovnice (1.4) ($\lambda = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$)

2 Klasifikace jezer

2.1 Rovnovážné stavy a hystereze

Jezero je velmi složitým ekosystémem. Abychom dokázali sestavit kompletní model určitého jezera, museli bychom vzít v úvahu jeho rozměry, hloubku a teplotu a v neposlední řadě koncentraci rozličných organických a anorganických materiálů přítomných v jezeře, všechny druhy vegetace, ryb a jiných živočichů vyskytujících se v něm.
Umíme dobře popsat dva druhy jezer - *oligotrofická* a *eutrofická jezera*. Oligotrofickým jezerem rozumíme jezero, jehož stav je charakterizován nízkým přísunem živin a sníženou rostlinnou produkcí s relativně čistou vodou. Naopak eutrofické jezero je charakterizováno vysokým přísunem živin, značnou rostlinnou produkcí, znečištěnou vodou a mnohdy i toxicitou.
Eutrofizace jezera je obvykle způsobena nadměrným obsahem živin v jezerní vodě. Největší podíl na tomto procesu mají producenti zemědělství a lesnictví. V současné době je nejsledovanější látkou způsobující eutrofizaci fosfor, který se do vody dostává především podzemními a povrchovými vodami přímo ze zemědělsky obdělávaných polí. Fosfor se usazuje na dně jezera a ze sedimentů se neustále uvolňuje do vody.

S. R. Carpenter, D. Ludwig a W. A. Brock studovali funkci $p(t)$ udávající množství fosforu ve vodě a měnící se v závislosti na čase t.
Vyslovili následující hypotézy:

1. Z povodí přitéká do jezera konstantní množství fosforu L.

2. Úbytek fosforu ze sedimentace, odtoku, absorbce konzumenty a vegetací je přímo úměrný množství fosforu ve vodě a je dán vzorcem $sp(t)$, kde s je konstantní koeficient závisející na podmínkách v konkrétním jezeře.

3. Na základě studia limnologických mechanizmů tito pánové předpokládají,

že recirkulační odhad je dán esovitou funkcí

$$\frac{rp^q}{m^q + p^q},$$

kde funkce $p(t)$ je sledované množství fosforu v jezeře, exponent q ($q \geq 2$) popisuje strmost funkce v inflexním bodu. Exponent q může nabývat hodnot od 2 pro hluboké, studené jezero do 20 pro teplé, mělké jezero. Parametr r je maximální recyklující odhad fosforu a m je koncentrace fosforu, na které je recirkulace v polovině svého maximálního odhadu.

Protože změna studované funkce $p(t)$ (tj. její růst nebo klesání) je charakterizováno derivací $p'(t)$, lze kolísání množství fosforu v jezeře vyjádřit následující diferenciální rovnicí

$$\frac{dp}{dt} = L - sp + r\frac{rp^q}{m^q + p^q} \tag{2.1}$$

měnící se v závislosti na čase t.

Nulové body funkce $f(p) = L - sp + \frac{rp^q}{m^q+p^q}$ lze nalézt například takto: vyjádříme $f(p) = f_1(p) - f_2(p)$, kde

$$f_1(p) = L + \frac{rp^q}{m^q + p^q} \tag{2.2}$$

a

$$f_2(p) = sp. \tag{2.3}$$

Hledáme body splňující rovnici $f_1(p) = f_2(p)$, tj. průsečíky křivky $y = f_1(p)$ představující přísun fosforu s přímkou $y = f_2(p)$ vyjadřující odtok fosforu.

Abychom ukázali, že existuje alespoň jeden takový průsečík, vyšetříme průběh funkce f_1 na $\langle 0, \infty)$.

Funkce f_1 nemá žádné nulové body, je kladná a z první derivace je vidět, že je i rostoucí na celém intervalu $\langle 0, \infty)$.

$$f_1' = \frac{rqm^q p^{g-1}}{(m^q + p^q)^2}$$

Najdeme jediný inflexní bod.

$$f_1'' = rqm^q \frac{(q-1)m^q p^{q-2} + (-q-1)p^{2q-2}}{(m^q + p^q)^3}$$

$$rqm^q \frac{(q-1)m^q p^{q-2} + (-q-1)p^{2q-2}}{(m^q + p^q)^3} = 0$$

$$rqm^q((q-1)m^q p^{q-2} + (-q-1)p^{2q-2}) = 0$$

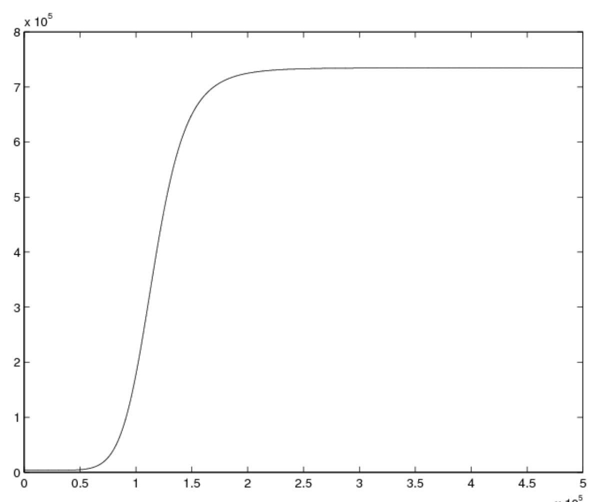
$$(q-1)m^q p^{q-2} + (-q-1)p^{2q-2} = 0$$

$$p = \sqrt[q]{\frac{(q-1)m^q}{1+q}}$$

Funkce f_1 je shora ohraničená.

$$\lim_{p\to\infty} f_1(p) = \lim_{p\to\infty} (L + \frac{rp^q}{m^q + p^q}) = L + r$$

Celý graf funkce f_1 vidíme na obrázku (2.1).



Obr. 2.1: funkce f_1 s konkrétními parametry pro jezero Mendota

Protože přímka (2.3) začíná v bodě 0 pro $p = 0$ a není omezená, zatímco křivka (2.2) má nezápornou hodnotu L pro $p = 0$ a je ohraničená pro $p \to \infty$, tak vždy existuje alespoň jeden průsečík. Přitom v závislosti na vzájemné poloze a tvaru grafů funkcí f_1 a f_2 mohou existovat také dva nebo tři průsečíky (což je maximální možný počet).

Leží-li průsečík $A = (p_1, f_1(p_1))$ v levé části grafu funkce f_1, tj. hodnota p_1 je malá, hovoříme o *oligotrofickém equilibriu.*

Leží-li průsečík $B = (p_2, f_1(p_2))$ v pravé části grafu funkce f_1, tj. hodnota p_2 je velká, hovoříme o *eutrofickém equilibriu.*

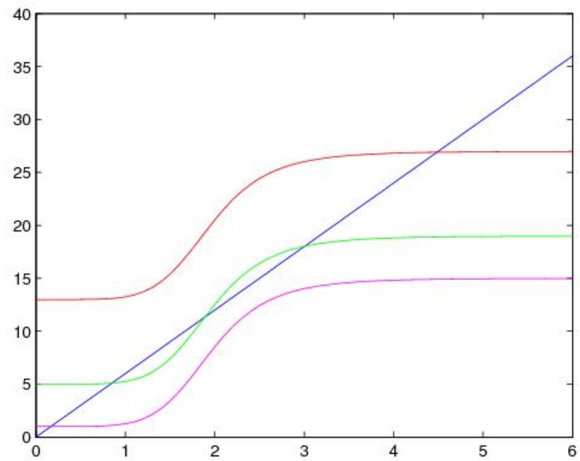
Typickou situací při malé hodnotě L je existence oligotrofického equilibria. S velkou hodnotou L najdeme eutrofické equilibrium a při střední hodnotě L existují tři equilibria: oligotrofické, eutrofické a prostřední nestabilní.

Správa kvality vody vyzývá ke kontrole jezer s eutrofickým equilibriem ve snaze převést jej na oligotrofické. V některých případech lze jezeru pomoci regulací přísunu fosforu, avšak u spousty jezer, z důvodu velké recirkulace, pouhá redukce přísunu fosforu z okolí nestačí. U těchto jezer je třeba snížit recirkulaci a zvýšit sedimentaci.

Pro naše účely budeme předpokládat, že jezero lze zachránit pouze omezením přísunu fosforu.

V modelu (2.1) najdeme equilibrium jako průsečík křivky (2.2) a přímky (2.3). Pokles přísunu fosforu z vnějšího okolí odpovídá posunu křivky (2.2) dolů.

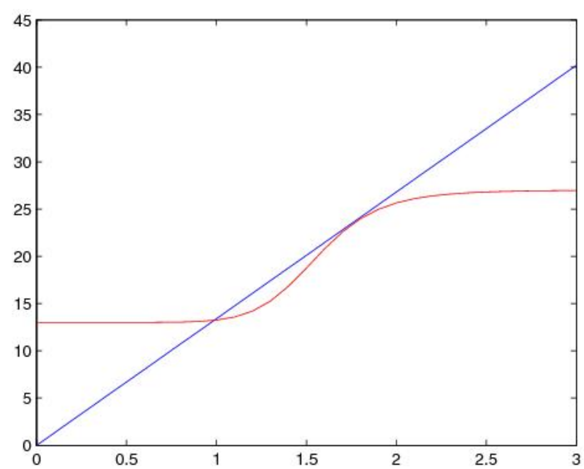
Na obrázku (2.2) vidíme eutrofické equilibrium pro velké L, pro malé L oligotrofické equilibrium a pro střední hodnotu L najdeme obě equilibria a navíc nestabilní equilibrium mezi nimi.



Obr. 2.2

Ve snaze dosáhnout u jezera oligotrofického equilibria v případě, že jsou přítomny obě equilibria, je nezbytné dostat koncentraci fosforu níže pod nestabilní equlibrium. Což může být v mnohých případech velmi obtížné a vyžaduje další zásahy do jezera.

Na obrázku (2.3) je znázorněno množství fosforu, při kterém eutrofické a nestabilní equilibria splývají. Pro tento případ je přímka tečnou ke křivce.



Obr. 2.3

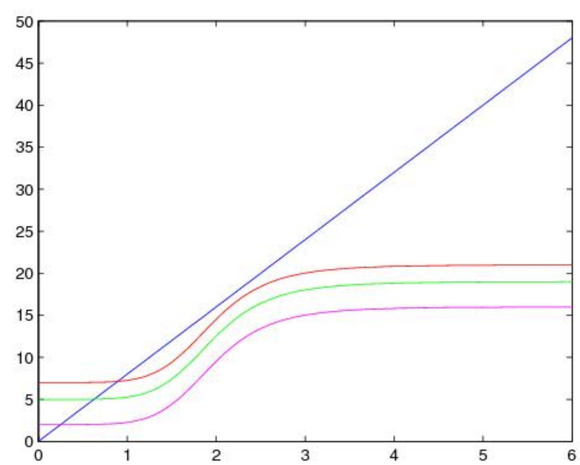
V případě, že snížíme množství L pod výše zmíněnou kritickou úroveň, objeví se pouze oligotrofické equilibrium. Pak je zastavena eutrofizace jezera. Ztráta equilibria je známa jako *hystereze* a jezero vykazující takové vlastnosti se nazývá *hysterezní*.

Minimální přísun fosforu do jezera je ovlivněn různými faktory (např. půdní chemie) a nesmí být příliš nízký na to, aby hysterezní jezero opustilo své eutrofické equilibrium. Mohlo by se totiž stát, že i v případě, kdy by se hysterezní jezero dostalo do oligotrofického equilibria, změny v podmínkách by způsobily nárůst minimálního přípustného fosforu a vedly k eutrofizaci.

Je-li hysterezní jezero, které je ve svém oligotrofickém equilibriu, narušeno abnormálním přísunem fosforu, může se dostat do stavu, kdy se eutrofické equilibrium změní na eutrofické přitažlivé equlibrium. Může pak rychle přejít z oligotrofického do eutrofického equilibria a je velmi obtížné tento proces vrátit. Tyto změny v jezeře mohou být velkým problémem pro okolí jezera a mohou mít vážné následky. Jedním z nich je např. zánik rybolovu.

2.2 Určení fázových portrétů reverzibilního, irreverzibilního a hysterezního jezera

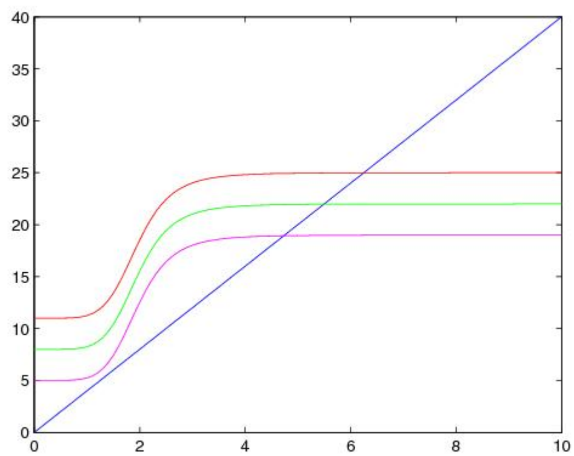
Zajímavý případ nastane, je-li sklon přímky (2.3) větší než největší sklon křivky (2.2). Systém (2.1) má pak pouze oligotrofické equilibrium, jak vidíme na obrázku (2.4).



Obr. 2.4

V tomto případě jezero odolává eutrofizaci a i velký přísun fosforu může být jezerem absorbován bez závažných škodlivých následků. Tento typ jezera nazýváme *reverzibilní*.

V jiném případě se může stát, že pro nejmenší možný přísun fosforu je přímka (2.3) pod křivkou (2.2) (pro malé p) a systém (2.1) má pouze eutrofické equilibrium, což tentokrát vidíme na obrázku (2.5). Tento typ jezera se nazývá *irreverzibilní*. V tomto případě není možné pouze snížením přísunu fosforu dostat jezero na oligotrofické equilibrium.

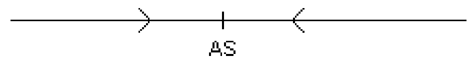


Obr. 2.5

Poznámka 3 Jednoduše řečeno, jezero je reverzibilní, jestliže směrnice s přímky (2.3) reprezentující míru ztráty fosforu je dostatečně velká. Je-li s dostatečně malé, je jezero irreverzibilní. A jestliže má s střední hodnotu, pak jde o jezero hysterezní.

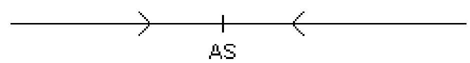
Klasifikace typu jezera tedy závisí na s a na L, což udává minimální dosažitelný přísun fosforu z povodí.

Fázový portrét reverzibilního jezera určíme z grafu funkce $f(p)$. Tato funkce je kladná, pokud $f_1 > f_2$ a záporná, pokud $f_1 < f_2$. Oligotrofické equilibrium je asymptoticky stabilní.



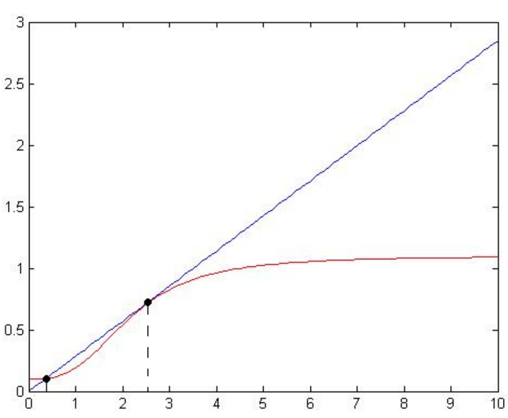
Obr. 2.6: Fázový portrét reverzibilního jezera

Analogicky určíme fázový portrét irreverzibilního jezera. Eutrofické equilibrium je opět asymptoticky stabilní.

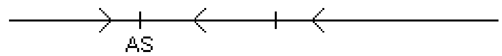


Obr. 2.7: Fázový portrét irreverzibilního jezera

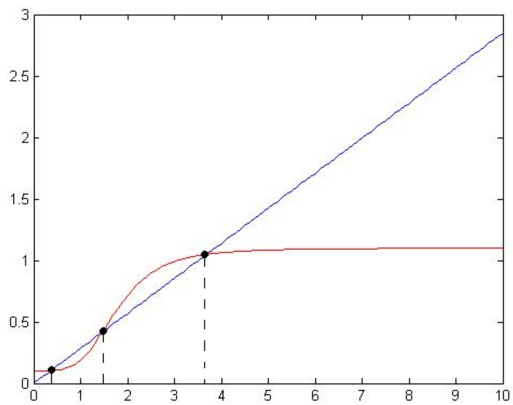
Fázové portréty hysterezního jezera jsou 3 typů, v závislosti na tom, kolik equilibrií a jakého druhu má systém (2.1).



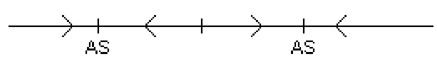
Obr. 2.8: Graf funkce znázorňující hysterezní jezero



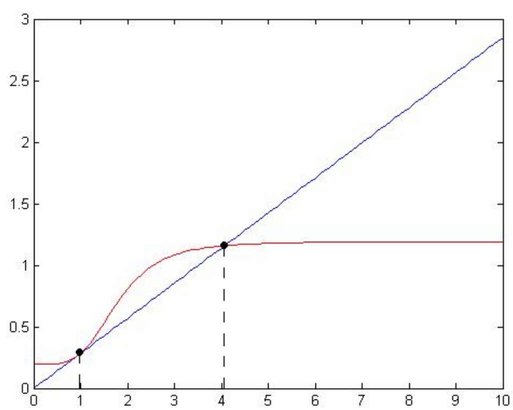
Obr. 2.9: Fázový portrét hysterezního jezera



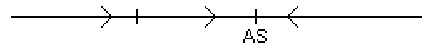
Obr. 2.10: Graf funkce znázorňující hysterezní jezero



Obr. 2.11: Fázový portrét hysterezního jezera



Obr. 2.12: Graf funkce znázorňující hysterezní jezero



Obr. 2.13: Fázový portrét hysterezního jezera

3 Jezero Mendota

Jedním z nejvíce studovaných jezer na světě je jezero Mendota ležící ve Wisconsinu ve Spojených státech amerických. Detailní měření přísunu fosforu do jezera a množství fosforu v jezeře se provádí již více než 20 let.
Rovnice (2.1) obsahuje parametry s, r, m a q, jimž můžeme nyní přiřadit konkrétní hodnoty z daných měření provedených na jezeře Mendota.
$s = 0.817/rok$
$r = 731000kg/rok$
$m = 116000kg$
$q = 7,88$

Poznámka 4 Naneštěstí ve skutečnosti existuje velký problém s rozsahem naměřěných hodnot, 10-místý pro r a pro m dokonce 100-místný. Stav jezera Mendota závisí na těchto parametrech a tudíž jeho model kolísá mezi reverzibilním a irreverzibilním jezerem.

V následujícím textu budeme předpokládat, že výše uvedené hodnoty jsou přesné a správné a použijeme je k určení stavu jezera.
Parametr p vhodně vyjádříme

$$p = mx$$

a dostaneme:

$$m\frac{dx}{dt} = L - smx + \frac{m^q x^q}{m^q + m^q x^q} = L - smx + r\frac{x^q}{1 + x^q}$$

Equilibrium určíme z rovnice:

$$L - smx + r\frac{x^q}{1 + x^q} = 0$$

Položíme

$$L = ra$$

a

$$s = \frac{rb}{m}$$

a dostaneme podmínku pro equilibrium:

$$a + \frac{x^q}{1 + x^q} = bx.$$

K určení stavu jezera hledáme průsečík křivky

$$y = a + \frac{x^q}{1 + x^q} \tag{3.1}$$

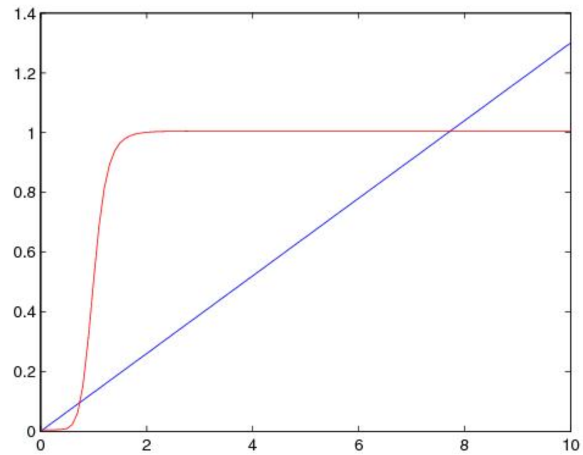
a přímky

$$y = bx \tag{3.2}$$

Těmito kroky jsme získali nový model

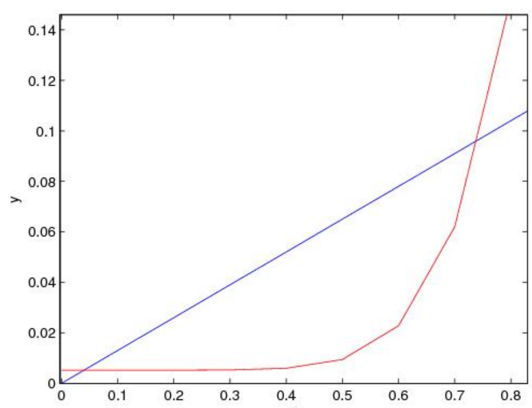
$$x' = \frac{r}{m}(a - bx + \frac{x^q}{1 + x^q}). \tag{3.3}$$

Podíl $\frac{m}{r}$ ukazuje dynamiku systému (3.3). Equilibria závisí na třech číselných parametrech a, b a q. Předpokládejme, že b a q jsou vlastnosti studovaného jezera a a je řídící parametr. Při použití konkrétních parametrů pro jezero Mendota obdržíme $b = 0.130$. Minimální přísun fosforu L je odhadem 3800 kg/rok, což odpovídá hodnotě $a = \frac{3800}{731000} = 0.0052$. S těmito hodnotami a, b a q, kde $q = 7.88$, můžeme nakreslit graf křivky (3.1) a přímky (3.2). Použitím softwaru Matlab uvidíme na obrázku (3.1) tři equilibria.

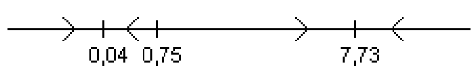


Obr. 3.1

Pokud obrázek (3.1) vhodně přiblížíme, vidíme, že křivka opravdu protíná přímku na obrázku (3.2) v oligotrofickém equilibriu.



Obr. 3.2



Obr. 3.3: Fázový portrét modelu (3.3) s konkrétními parametry jezera Mendota

Tyto equilibria můžeme ocenit hodnotami 0.04, 0.75 a 7.73, což odpovídá hodnotám fosforu 4640 kg (oligotrofické equilibrium), 87 000 kg (nestabilní equilibrium) a 897 000 kg (eutrofické equilibrium).

Jezero Mendota má běžně equilibrium hodnoty 57 000 kg, která odpovídá hodnotě $x = 0.49$.
To je méně než nestabilní equlibrium systému s minimálním přísunem fosforu a je zároveň v oblasti přitažlivosti oligotrofického equilibria. Což ukazuje na to, že jezero je hysterezní, ale schopné přejít do oligotrofického equilibria.
V reálném světě však tyto hodnoty kolísají a není tedy možné nakreslit přesný graf.

Aktivity jakými jsou zemědělství, lesnictví a urbanizace, které zvyšují nadměrný přísun fosforu do jezer a vedou k jejich eutrofizaci, mají z procesu eutrofizace přímý ekonomický prospěch. Tyto výhody jsou však v rozporu s myšlenkami na obnovu zničených jezer.

V příkladech, které si nyní uvedeme, budeme uvažovat určité změny, které ovlivnily jezero Mendota, a budeme zkoumat reakci jezera na tyto zásahy.

Příklad 3 Předpokládejme, že hodnoty parametrů s, r a m odpovídají naměřeným hodnotám pro jezero Mendota, avšak stala se velká chyba v ohodnocení parametru q, ($q = 2$). Zjištěme, jaký je stav jezera po změně, a jestli lze do modelu vrátit oligotrofické equilibrium.

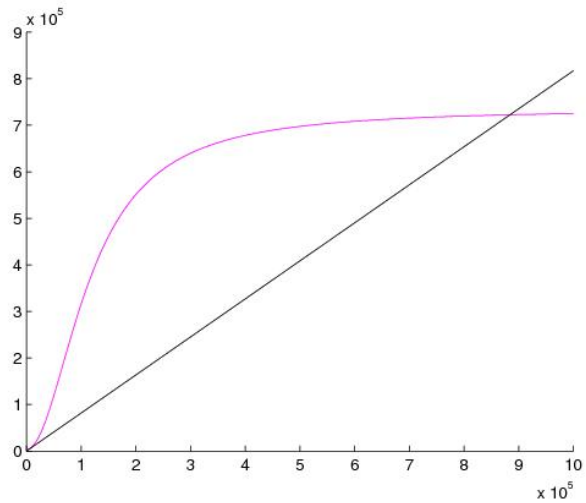
Pomocí softwaru Matlab vykreslíme graf funkce

$$f_1 = 3800 + \frac{731000x^2}{13456000000 + x^2}$$

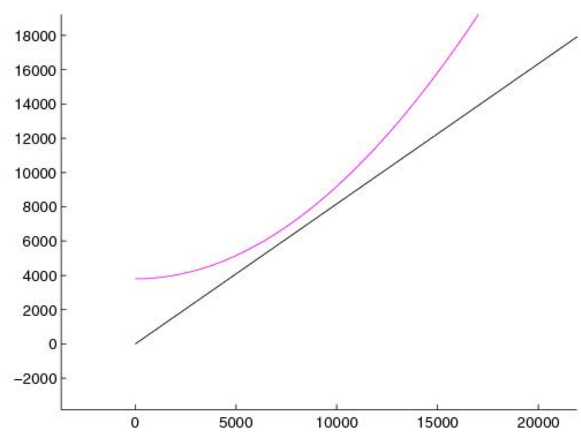
dle vztahu (2.2). Najdeme průsečík funkce f_1a funkcí

$$f_2 = 0,817x$$

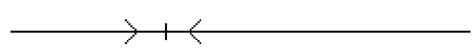
ze vztahu (2.3). Na obrázku (3.3) vidíme, že se ztratily dvě equilibria a zůstalo pouze jedno a to eutrofické. Na obrázku (3.4), který je přiblížením obrázku (3.3) vidíme, že funkce f_1 opravdu přímku f_2 neprotíná.



Obr. 3.3



Obr. 3.4



Obr. 3.5

Jezero Mendota se stává při změně parametru q z 7,88 na 2 irreverzibilním jezerem. Oligotrofické equilibrium by se v našem modelu objevilo v případě, že v jezeře stoupne teplota vody. Pokud se v jezeře teplota nezvýší, bude fázový portrét na obrázku (3.5) obsahovat jediné asymptoticky stabilní equilibrium a tedy pro libovolnou počáteční hodnotu $p(0) > 0$ se bude jezero s rostoucím časem dostávat do eutrofického equilibria.

Příklad 4 Předpokládejme, že hodnoty s a q jsou správně naměřeny, ale tentokrát budeme počítat s jinými hodnotami parametrů r a m, kde $m = 100000kg$ a $r = 800000kg/rok$. Zjištěme jaký je stav jezera a zda-li jej lze zachránit.

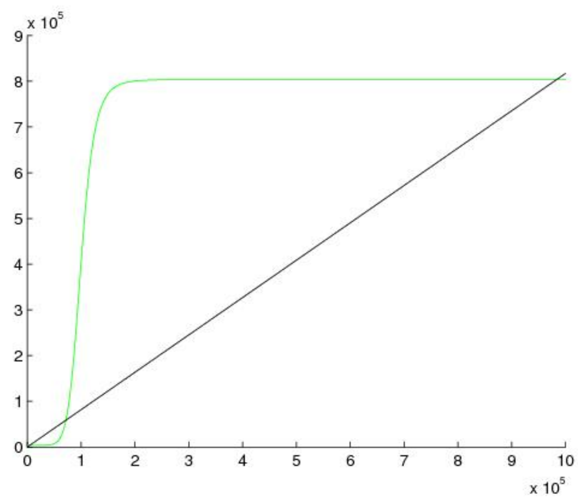
Opět použijeme software Matlab a vykreslíme tentorkát graf funkce

$$f_1 = 3800 + \frac{800000x^{7.88}}{100000^{7.88} + x^{7.88}}.$$

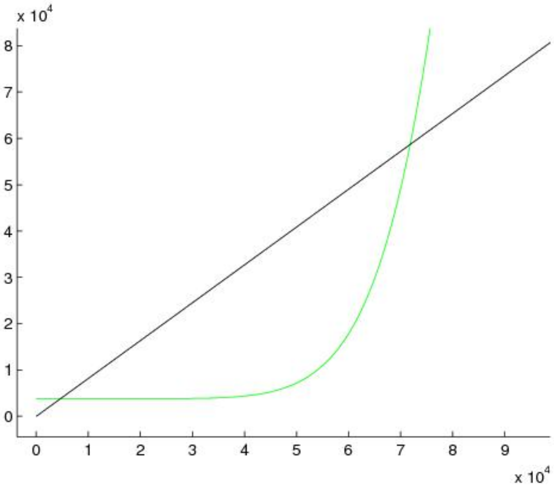
Vidíme tři průsečíky s přímkou

$$f_2 = 0,817x,$$

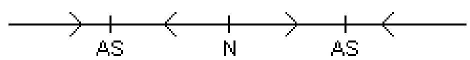
máme zastoupeny všechny tři equilibria. Rozdíl je pouze u eutrofického equilibria, které se nám posunulo směrem nahoru, což můžeme pozorovat na obrázcích (3.6) a (3.7).



Obr. 3.6



Obr. 3.7



Obr. 3.8

Typ fázového portrétu se nezměnil. Má-li funkce $p(t)$ svou počáteční hodnotu menší než nestabilní equilbrium, dostává se jezero s rostoucím časem do oligotrofického equilibria.

Příklad 5 Uvažujme správné hodnoty parametrů jezera Mendota. Vývojáři však jednorázově vyvezli do jezera 40000kg fosforu. Jak se tato akce projevila na jezeře?

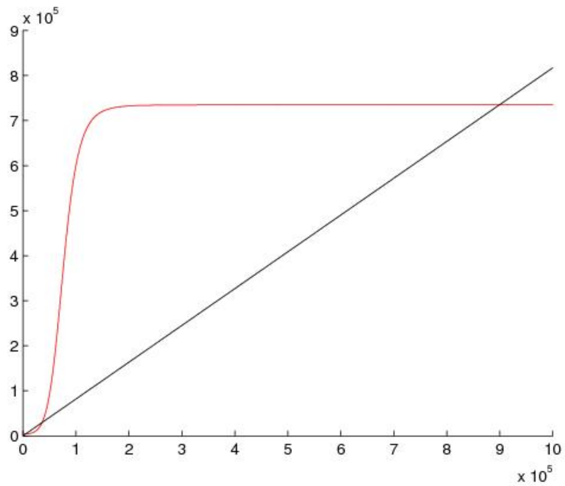
Pužijeme software Matlab k nalezení průsečíků křivky

$$f_1 = 3800 + \frac{731000(x+40000)^{7.88}}{116000^{7.88} + (x+40000)^{7.88}}.$$

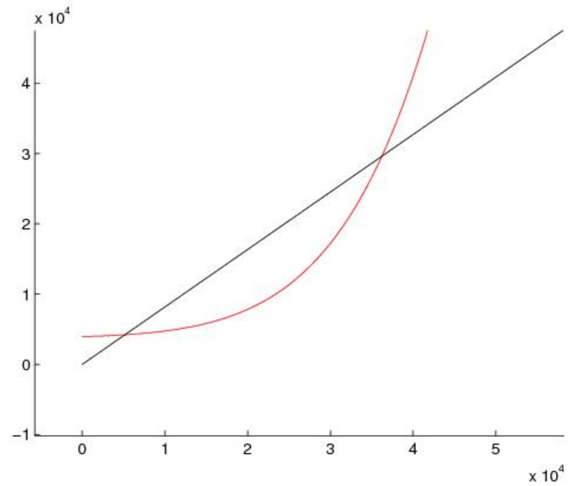
s přímkou

$$f_2 = 0,817x.$$

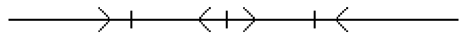
Na obrázku (4.9) (přiblížení na obrázku (4.10))si můžeme všimnout, že oligotrofické equilibrium je blíže k nestabilnímu equilibriu než jak bylo patrno na předešlých modelech. Eutrofické equilibrium kleslo níže a oblast přitažlivosti oligotrofického equilibria se zmenšila.



Obr. 3.9



Obr. 3.10



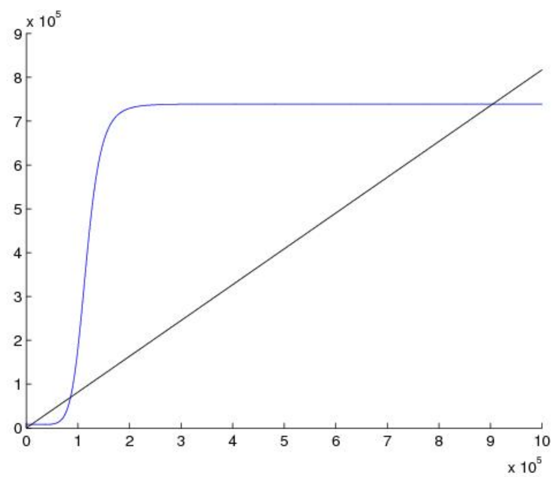
Obr. 3.11

Příklad 6 Uvažujme opět správné hodnoty parametrů jezera Mendota. Nový výzkum však zvedl hladinu minimálního přísunu fosforu z 3800 na 8000kg/rok. Jaký je efekt na jezero?

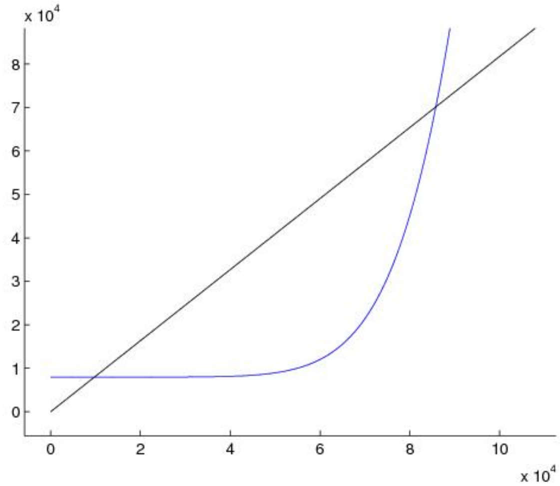
Použitím softwaru Matlab vidíme na obrázcích (4.12), (4.13) všechny tři equilibria. Graf zůstal stejný, jen křivka

$$f_1 = 8000 + \frac{731000x^{7.88}}{116000^{7.88} + x^{7.88}}$$

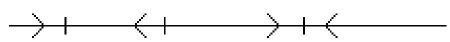
se posunula nahoru po ose X a začíná na hodnotě 8000Kg/rok. První dvě equilibria se oddálila a oblast přitažlivosti oligotrofického equilibria se zvětšila.



Obr. 3.12



Obr. 3.13



Obr. 3.14

Závěr

Diplomová práce ukazuje základní postupy při tvorbě a studiu matematického modelu eutrofizace. Při vyšetřování konkrétního modelu jezera Mendota jsou ilustrovány reakce jezera na zásahy zvenčí. Najdete zde vyřešené příklady ukazující různé stavy jezera, které vycházejí z diferenciální rovnice sestavené pány S. R. Carpenterem, D. Ludwigem a W. A. Brockem. Konkrétní hodnoty parametrů pro jezero Mendota, které se dosazují do již zmíněné diferenciální rovnice, jsou meřeny v roce 2001. V současné době může být situace v jezeře poněkud jiná. Je nutno tedy brát tyto parametry pouze jako orientační.

Literatura

[1] Brauer, F., Castillo-Chávez, C.: *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer, 2001

[2] Carpenter, S.R., Ludwig, D., and Brock, W.A.: *Management of eutrofication for lakes subject to potencially reversible change, Ecological aplication*, 9:751-771

[3] Hale, J., Kocak, H.: *Dynamics and Bifurcations*, Springer, 1991