

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA OPTIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lineárně-optická kvantová logická hradla

Vedoucí bakalářské práce:
doc. Mgr. Jaromír Fiurášek, Ph.D.
14. květen 2010

Vypracoval:
Libor Mořka
Obecná fyzika a matematická fyzika
III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořil tuto bakalářskou práci samostatně pod vedením doc. Mgr. Jaromíra Fiuráška, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 14. května 2010

Obsah

1	Úvod	4
2	Matematické základy kvantového zpracování informace	6
2.1	Popis kvantového elektromagnetického pole	6
2.2	Kvantový lineární harmonický oscilátor (LHO)	6
2.3	Fockovy stavy	7
2.4	Kvantový bit	8
2.5	Registr kvantových bitů	8
2.6	Proces zpracování informace	9
3	Principy kvantového počítání s lineární optikou	10
3.1	Transformace na optických prvcích	10
3.2	Hong Ou Mandelův jev (HOM)	13
3.3	Vizibilita dvou-fotonové interference	15
3.4	Model statistické směsi	15
3.5	Středovaná fidelita	17
4	Programovatelné kvantové hradlo operující na jednom kvantovém bitu	18
4.1	Popis	18
4.2	Využití	18
4.3	Výpočet fidelity	18
4.3.1	Výpočet výstupu hradla pro nerozlišitelné fotony	19
4.3.2	Výpočet výstupu hradla pro rozlišitelné fotony	20
4.3.3	Pravděpodobnost a fidelita pro daný konkrétní vstupní stav	20
4.3.4	Středování fidelity přes všechny vstupní stavy	21
5	CZ-brána	22
5.1	Popis	22
5.2	Výpočet fidelity	22
5.2.1	Fotony jsou nerozlišitelné	23
5.2.2	Fotony jsou rozlišitelné	23
5.2.3	Střední pravděpodobnosti a fidelity	24
5.2.4	Středování fidelity přes všechny vstupní stavy	24
6	Nedestruktivní CNOT hradlo	26
6.1	Popis	26
6.2	Výpočet fidelity	26
6.3	Statistická směs	27
6.3.1	Fotony jsou na obou hradlech dokonale nerozlišitelné	27
6.3.2	Fotony jsou na prvním hradle nerozlišitelné a na druhém rozlišitelné	27
6.3.3	Fotony jsou na prvním hradle rozlišitelné a na druhém nerozlišitelné	28
6.3.4	Fotony jsou obou hradlech rozlišitelné	28

6.4	Výstupní stavy	29
6.5	Střední pravděpodobnost a fidelita	29
7	Závěr	31
	Zdroje	33

1 Úvod

Mezi hlavními důvody zájmu o kvantové zpracování informací patří zcela jistě kvantový počítač. V roce 1982 poukázal Richard Feynman na problém modelování kvantových systémů pomocí klasických počítačů a současně přišel s ideou kvantového počítače. Exponenciální problémy, mimo jiné například faktorizace velkých čísel, by potom byly řešitelné v reálném čase. O tři roky později zavedl David Deutsch v analogii s Turingovým strojem univerzální kvantový počítač a ukázal, že by byl v principu schopný řešit některé problémy efektivněji než klasický počítač.

Existuje mnoho návrhů pro realizaci kvantového počítače, a ty jsou založené na různých fyzikálních systémech. Jednu ze zajímavých alternativ představuje kvantové zpracování informace pomocí světla. To přináší své výhody i nevýhody. K jednoznačným výhodám optického přístupu patří stabilita informací, které byly do fotonů zakódovány. Na druhou stranu, abychom mohli informace zpracovávat, potřebujeme dosáhnout efektivních nelineárních interakcí mezi fotony. Jednou z možností je využití Kerrových nelinearit [1], avšak přirozeně se vyskytující nelinearity tohoto druhu jsou o několik řádů slabší než je potřeba.

Knill, Laflamme a Milburn [2] ukázali, že nelineárních interakcí mezi fotony je možné dosáhnout pomocí Hong-Ou-Mandelovy interference dvou fotonů na lineárních optických elementech a následné detekce fotonů na detektorech, které jsou umístěny na výstupu. Jinak řečeno, výstupní stav omezíme měřením takovým způsobem, abychom získali jinak lineárně nedosažitelný výstup. Jelikož každé kvantově-mechanické měření má pravděpodobnostní charakter, bude výše uvedená operace také pravděpodobnostní.

V této práci se omezují pouze na optický přístup ke kvantovému zpracování informací. V první polovině druhé kapitoly stručně připomínám formalismus kreačních a anihilačních operátorů a jejich souvislost s kvantovým popisem elektromagnetického pole. Tyto poznatky jsou v zápětí využity při implementaci kvantového bitu pomocí jednoho fotonu nacházejícího se ve dvou modech elektromagnetického pole. Následuje zmínka o operacích na jednom a dvou kvantových bitech. Sekci 2.1, 2.2, 2.3 a 2.6 této kapitoly jsem vytvořil z nejdůležitějších poznatků [3].

Ve třetí kapitole se zabývám evolucí kreačních operátorů na různých lineárních optických prvcích. S využitím těchto prvků lze deterministicky implementovat operace na jednom kvantovém bitu. Dále blíže popisují Hong-Ou-Mandelovou interferenci, která jak již bylo řečeno hraje klíčovou úlohu při implementaci operací na dvou kvantových bitech.

Kombinací bran operujících na jednom kvantovém bitu a pomocí hradla CNOT (hradlo operuje na dvou kvantových bitech a uvažujeme pravděpodobnostní implementaci podle KLM [2]) lze vytvořit hradlo, jehož operace je implementací libovolné logické operace na kvantových bitech. Ve třetí kapitole v sekci o dvoufotonové destruktivní interferenci na děličích svazku (HOM jev) se zmiňuji o nedokonalé interferenci způsobené rozlišitelností fotonů. Jelikož složitější hradla mohou obsahovat více dílčích interferencí, nabízí se otázka, jakým způsobem dílčí nedokonalé interference ovlivní výslednou operaci hradla.

Cílem této práce je určit kvalitu výsledné operace (fidelita) tří vybraných hradel, která je ovlivňována nedokonalými dílčími interferencemi. Ty lze kvantitativně ohodnotit vizibilitou, což je experimentálně zjiřitelná veličina. Ve třech kapitolách postupně zjišťuji fidelitu pro programovatelné kvantové hradlo [4], CZ bránu [5,6,7] a v neposlední řadě také nedestruktivní CNOT hradlo [8]. Při výpočtech používám metodu statistické směsi, která je podrobně popsána ve třetí kapitole.

2 Matematické základy kvantového zpracování informace

2.1 Popis kvantového elektromagnetického pole

Existuje úzká analogie mezi modem elektromagnetického vlnění a lineárním harmonickým oscilátorem. Při kvantovém popisu elektromagnetického pole využíváme skutečnosti, že dynamika každého modu pole je stejná jako časový vývoj kvantového lineárního harmonického oscilátoru. Z tohoto důvodu se jím budeme zabývat podrobněji. Diskuze v následujících sekcích vychází z knihy [3].

2.2 Kvantový lineární harmonický oscilátor (LHO)

Energetické spektrum lineárního harmonického oscilátoru lze získat přímým řešením stacionární Schrödingerovy rovnice

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n. \quad (1)$$

E_n je vlastní energie příslušná vlastnímu stavu ψ_n a \hat{H} je Hamiltonův operátor:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \quad (2)$$

odvozený z Hamiltoniánu LHO. Operátor x -ové souřadnice splňuje s operátorem x -ové složky hybnosti komutační relaci

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar. \quad (3)$$

Další možností je řešit problém v bezrozměrné reprezentaci s využitím jisté symetrie \hat{H} zavedením

$$\hat{a} = \frac{1}{(2m\hbar\omega)^{1/2}} (m\omega\hat{x} + i\hat{p}_x), \quad (4)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{(2m\hbar\omega)^{1/2}} (m\omega\hat{x} - i\hat{p}_x). \quad (5)$$

\hat{a} se nazývá anihilačním a \hat{a}^\dagger kreačním operátorem. Tyto operátory jsou navzájem hermiteovsky sdružené a pro jejich komutátor platí:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (6)$$

Hamiltonův operátor (2) můžeme přepsat pomocí (4) a (5) v symbolice kreačních a anihilačních operátorů:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (7)$$

Pomocí výrazu (7) a komutační relace (6) lze odvodit, že tyto operátory specifickým způsobem mění energii vlastních stavů \hat{H} .

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger\psi_n = (\hbar\omega + E_n)\hat{a}^\dagger\psi_n, \quad (8)$$

$$\hat{H}\hat{a}\psi_n = (-\hbar\omega + E_n)\hat{a}\psi_n. \quad (9)$$

Operátor \hat{a}^\dagger (kreační) zvyšuje energii o $\hbar\omega$, \hat{a} (anihilační operátor) ji o stejnou hodnotu snižuje. Jelikož energie LHO nemůže být záporná, musí existovat stav (základní stav) s vlastností

$$\hat{a}\psi_0 = 0. \quad (10)$$

Snadno lze dokázat, že energie ψ_0 je rovna $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

S využitím předchozích poznatků zapíšeme ψ_n pomocí základního stavu a kreačních operátorů ve tvaru

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}^{\dagger n}\psi_0(x), \quad (11)$$

s energií

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad (12)$$

kde n je přirozené číslo.

2.3 Fockovy stavy

Shrneme-li výsledky předchozí části, množina stavů vzniklých opakovaným působením kreačního operátoru na základní stav bude tvořit ortogonální systém vlastních stavů \hat{H} , kde každý prvek je plně určen číslem n z výrazu (11).

Tyto stavy se nazývají Fockovými stavy a zapisujeme je v Diracově symbolice $|n\rangle$. Souvislost Fockových stavů a stavů kvantového LHO lze znázornit tabulkou.

Fockův stav	Vlnová funkce	Energie
$ 0\rangle$	$\psi_0(x)$	$1/2\hbar\omega$
$ 1\rangle$	$\psi_1(x)$	$3/2\hbar\omega$
$ 2\rangle$	$\psi_2(x)$	$5/2\hbar\omega$
$ n\rangle$	$\psi_n(x)$	$(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$

Působení kreačního operátoru na stav $|n\rangle$ potom interpretujeme jako vznik kvanta energie. Platí:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (13)$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (14)$$

Výsledky odvozené pro kvantový LHO lze s výhodou využít při popisu kvantového elektromagnetického pole. Hilbertův prostor stavů jednoho modu pole je identický Hilbertovu prostoru LHO. Vakuovému stavu odpovídá základní stav $|0\rangle$. Působením kreačního operátoru na libovolný stav je přidán do systému jeden foton. Fockův stav $|n\rangle$ je potom stavem s n fotony v modu pole.

2.4 Kvantový bit

Klasický bit nabývá pouze dvou hodnot. Celá informace je tak zakódovaná do posloupnosti jedniček a nul, které se při výpočtech podle předem daných pravidel mění. V kvantovém světě existuje ke klasickému bitu analogie a to kvantový bit. V souladu s postuláty kvantové mechaniky kvantový bit je prvkem dvourozměrného Hilbertova prostoru. Označíme-li vektory báze tohoto prostoru $|0\rangle$ a $|1\rangle$, princip superpozice nám dovoluje počítat s libovolnou lineární kombinací těchto dvou stavů. Obecně lze zapsat kvantový bit ve tvaru

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle. \quad (15)$$

Otázkou je, jak takový stav implementovat. Pomocí jednoho modu (single rail encoding) můžeme kódovat do superpozice vakua a jednofotonového stavu. Zapišeme-li stav tohoto systému výrazem

$$|\psi\rangle = (\alpha + \beta \hat{a}^\dagger) |0\rangle, \quad (16)$$

námi zvolená báze Hilbertova prostoru dostává jednoznačnou interpretaci. Podobně lze kódovat prostřednictvím dvou modů elektromagnetického vlnění (dual rail encoding). Dostáváme tak vyjádření kvantového bitu

$$|\psi\rangle = (\alpha \hat{a}^\dagger + \beta \hat{b}^\dagger) |0\rangle \quad (17)$$

za pomoci prostorových modů (jeden foton ve dvou prostorových modech) nebo prostřednictvím polarizačních modů:

$$|\psi\rangle = (\alpha \hat{a}_H^\dagger + \beta \hat{a}_V^\dagger) |0\rangle. \quad (18)$$

Označíme-li pořadě vektory $\hat{a}_H^\dagger |0\rangle$ a $\hat{a}_V^\dagger |0\rangle$ symboly $|H\rangle$ a $|V\rangle$, dosazením do (18) obdržíme

$$|\psi\rangle = \alpha |H\rangle + \beta |V\rangle. \quad (19)$$

Kvantový bit je v tomto případě zakódován do polarizačního stavu jednoho fotonu. Symbol $|H\rangle$ resp. $|V\rangle$ označuje horizontálně resp. vertikálně polarizovaný foton.

Ve výrazech (17) a (18) pro kvantový bit jsme použili symbol $|0\rangle$ vakuového stavu jednoho modu pole pro vyjádření multimodového vakua (v každém ze vzorců vystupují dva různé mody pole). V dalším textu nebudeme (jako ve vztazích (17) a (18)) vakuové stavy různých modů pole odlišovat.

Je nutné zdůraznit, že koeficienty α a β mají význam amplitud pravděpodobnosti. Tedy pokud je stav $|\psi\rangle$ normovaný, musí platit rovnost

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (20)$$

2.5 Registr kvantových bitů

Jak již bylo řečeno, při kódování informace hrají klíčovou úlohu posloupnosti kvantových bitů neboli registry. Speciálně se budeme zabývat registrem dvou kvantových bitů, které lze matematicky zapsat direktním součinem dílčích kvantových bitů:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle. \quad (21)$$

Pokud jsou jednotlivé kvantové bity vyjádřeny jednoduše pomocí jednoho Fockova stavu ukazuje se výhodné psát direktní součin (21) ve tvaru

$$|\psi\rangle = |\psi_1, \psi_2\rangle. \quad (22)$$

Lze dokázat, že tento systém je plně popsán vektorem v čtyřrozměrném Hilbertově prostoru. Využíváme-li polarizačních stupňů volnosti, za přirozenou bázi takového prostoru můžeme zvolit vektory $\hat{a}_H^\dagger \hat{b}_H^\dagger |0\rangle$, $\hat{a}_H^\dagger \hat{b}_V^\dagger |0\rangle$, $\hat{a}_V^\dagger \hat{b}_H^\dagger |0\rangle$, $\hat{a}_V^\dagger \hat{b}_V^\dagger |0\rangle$. V literatuře jsou tyto vektory obvykle pořadě značeny symboly $|H, H\rangle$, $|H, V\rangle$, $|V, H\rangle$, $|V, V\rangle$.

2.6 Proces zpracování informace

V předchozím odstavci jsme popsali možnou implementaci kvantového bitu pomocí fyzikálních systémů. Z hlediska kvantových výpočtů potřebujeme ovlivňovat evoluci takovýchto systémů. K jejich změnám dochází na kvantových hranách (hradlech). Zabýváme se nejprve kvantovými operacemi obecně.

Podle počtu kvantových bitů, s kterými je na hraně manipulováno, rozlišujeme operace na jednom a na dvou kvantových bitech. Platí, že s množinou operací na jednom kvantovém bitu a jednou operací na dvou kvantových bitech lze provést libovolný kvantový výpočet.

Uvažujme bránu operující na jednom kvantovém bitu. Zde dochází k transformaci:

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle. \quad (23)$$

Vyjádříme-li kvantový bit ze vztahu (15) ve vektorovém tvaru, můžeme libovolnou evoluci kvantového bitu na hradle psát v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (24)$$

kde α' a β' jsou členy vektorového vyjádření $|\psi'\rangle$.

Klíčovou úlohu při zpracování kvantové informace hrají brány operující na dvou kvantových bitech. Na rozdíl od předchozí situace dochází na hradle k evoluci registru dvou kvantových bitů. Operace jsou potom popsány prostřednictvím unitárních matic typu 4×4 .

Důležitou úlohu dále hraje operace CNOT, vyjádřená maticí

$$\hat{U}_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Pro větší názornost zde také uvádím pravdivostní tabulku

Vstupní registr	Výstupní registr
$ 0, 0\rangle$	$ 0, 0\rangle$
$ 0, 1\rangle$	$ 0, 1\rangle$
$ 1, 0\rangle$	$ 1, 1\rangle$
$ 1, 1\rangle$	$ 1, 0\rangle$

3 Principy kvantového počítání s lineární optikou

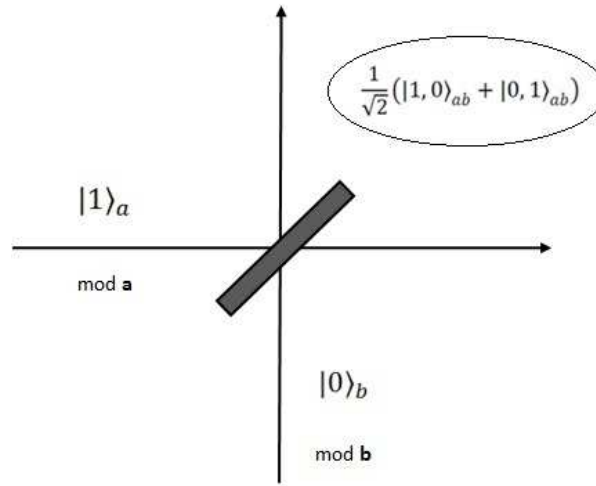
3.1 Transformace na optických prvcích

Uvažujme foton dopadající na **dělič svazku (BS)** a pokusme se odvodit, co se bude dít po průchodu tímto lineárním optickým hradlem. Na dělič jsou fotony přiváděny prostřednictvím dvou prostorových modů elektromagnetického vlnění. Označme módy malými tučnými písmeny **a** a **b**. V našem případě máme mód **a** jednou excitovaný $|1\rangle_a$ a mód **b** se nachází ve vakuové stavu $|0\rangle_b$. Celkový vstupní stav je daný direktním součinem obou dvou stavů

$$|\psi\rangle_{in} = |1\rangle_a \otimes |0\rangle_b \quad (26)$$

nebo užijeme-li zkráceného zápisu máme vstup ve tvaru

$$|\psi\rangle_{in} = |1, 0\rangle_{ab}. \quad (27)$$



Obr. 1: Foton dopadající na dělič svazku

Jak již bylo řečeno v předchozí části, jakýkoli Fockův stav lze ekvivalentně zapsat pomocí kreačních operátorů působících na vakuový stav:

$$|\psi\rangle_{in} = \hat{a}^\dagger |0\rangle. \quad (28)$$

Na děliči dochází k interferenci obou prostorových modů. Tento fakt je vyjádřen následujícími transformačními rovnicemi:

$$\hat{a}_{in}^\dagger = \sqrt{T}\hat{a}_{out}^\dagger + \sqrt{R}\hat{b}_{out}^\dagger \quad (29)$$

$$\hat{b}_{in}^\dagger = -\sqrt{R}\hat{a}_{out}^\dagger + \sqrt{T}\hat{b}_{out}^\dagger \quad (30)$$

Rovnice lze také ekvivalentně zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{in}^\dagger \\ \hat{b}_{in}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{T} & \sqrt{R} \\ -\sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{out}^\dagger \\ \hat{b}_{out}^\dagger \end{pmatrix} \quad (31)$$

Všimněme si, že pracujeme v Heisenbergově obraze. Foton může děličem projít nebo být odražen. Koeficienty T a R potom pořadě vyjadřují příslušné pravděpodobnosti průchodu a odrazu. Protože součet jednotlivých pravděpodobností je roven jedné, musí platit

$$T = 1 - R. \quad (32)$$

Pro jednoduchost volme v našem případě $T = \frac{1}{2}$. Dosazením do transformačních rovnic a za příslušné operátory, získáme výstupní stav

$$|\psi\rangle_{out} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) |0\rangle \quad (33)$$

nebo ekvivalentně ve tvaru

$$|\psi\rangle_{out} = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_a + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_b. \quad (34)$$

Vidíme, že se foton nachází s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ v horním resp. v dolním rameni.

Analogií děliče svazku pro polarizační módy je **vlnová destička**. Místo dvou prostorových módů nyní máme dva polarizační módy. Dále v textu se setkáme se speciálním případem, a to půlvlnnou destičkou. Transformace mají stejný tvar jako pro dělič svazku.

Mezi další lineární optické prvky patří **polarizační dělič svazku (PBS)**. PBS odděluje horizontální a vertikální polarizaci v jednotlivých prostorových módech tak, že horizontální polarizace je propuštěna a vertikální odražena. Transformační rovnice operátorů píšeme ve tvaru

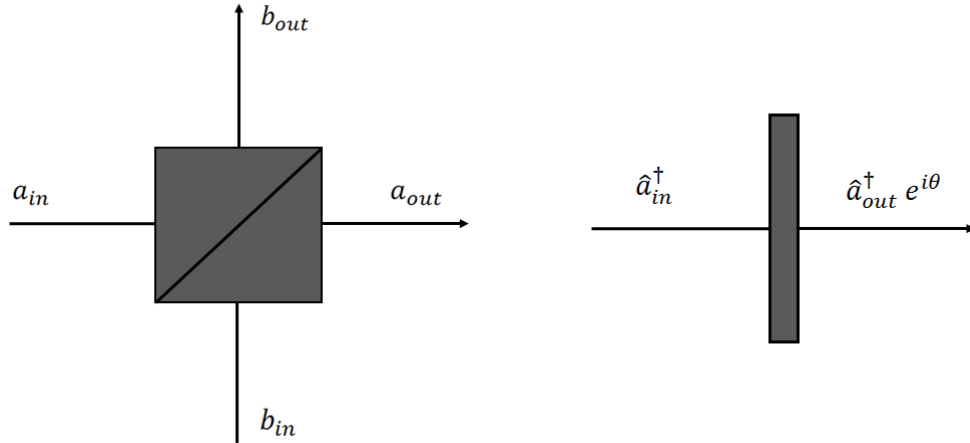
$$\hat{a}_{in,H}^\dagger = \hat{a}_{out,H}^\dagger, \quad (35)$$

$$\hat{a}_{in,V}^\dagger = \hat{b}_{out,V}^\dagger, \quad (36)$$

$$\hat{b}_{in,H}^\dagger = \hat{b}_{out,H}^\dagger, \quad (37)$$

$$\hat{b}_{in,V}^\dagger = \hat{a}_{out,V}^\dagger. \quad (38)$$

Rovnice lze zobecnit doplněním o koeficienty propustnosti a odrazivosti.



Obr. 2: Polarizační dělič svazku a fázová destička

V neposlední řadě zde pro úplnost uvádím **fázovou destičku**, která mění fázi fotonu podle vztahu

$$\hat{a}_{in}^\dagger = \hat{a}_{out}^\dagger e^{i\theta}. \quad (39)$$

Libovolnou unitární operaci na jednom kvantovém bitu kódovaném do stavu jednoho fotonu nacházejícího se ve dvou prostorových či polarizačních modech lze deterministicky implementovat s využitím lineární optiky.

Tato problematika je rovněž řešena v [1].

3.2 Hong Ou Mandelův jev (HOM)

Hong Ou Mandelův jev [9] je čistě kvantově mechanický jev, který nemá v klasické fyzice analogii. Jedná se o destruktivní interferenci dvou fotonů na děliči svazku, což vyruší jisté výstupní stavy. Tento jev nastává pouze za podmínky dokonalé nerozlišitelnosti obou fotonů a jelikož hraje klíčovou úlohu v optickém kvantovém zpracování informací, zabývejme se jím proto podrobněji.

Nechme na dělič svazku dopadat z každé strany jeden foton (oba ze vstupních prostorových módů jsou jednou excitované) a pokusme se vypočítat výstupní stav. Uvažujeme dělič opět s propustností $T = \frac{1}{2}$. Vstupu odpovídá stav

$$|\psi\rangle_{in} = |1, 1\rangle_{ab}. \quad (40)$$

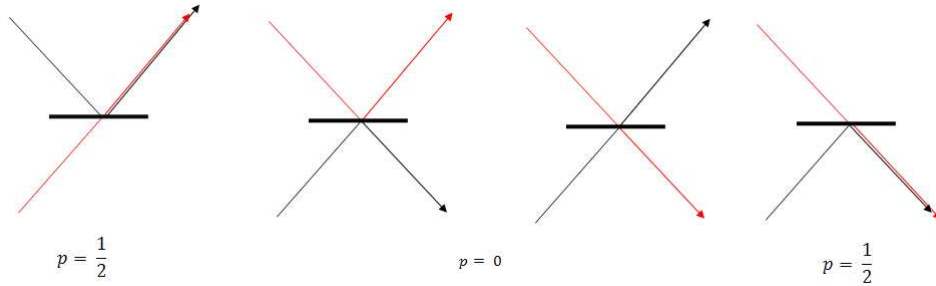
Výraz přepíšeme pomocí kreačních operátorů, dosadíme transformační rovnice a roznásobíme. Jevy, kdy se oba fotony odrazí nebo projdou děličem svazku, mají opačné amplitudy pravděpodobnosti. Vzhledem k nerozlišitelnosti fotonů má výstupní stav $|1, 1\rangle_{ab}$ nulovou amplitudu pravděpodobnosti. Obdržíme

$$\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger |0\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) \frac{1}{\sqrt{2}} (-\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) |0\rangle = \frac{1}{2} (-\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{b}^{\dagger 2}) |0\rangle. \quad (41)$$

Zbavíme se kreačních operátorů a dostáváme konečný výstupní stav ve tvaru

$$|\psi\rangle_{out} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|2, 0\rangle_{ab} + |0, 2\rangle_{ab}). \quad (42)$$

Pokud by byly na výstupu umístěny detektory, naměříme vždy oba fotony jen v jednom výstupním prostorovém módu. Situace, kdy je na každém detektoru zaznamenán právě jeden foton, vůbec nenastává. *V tomto případě se jedná o dokonalou destruktivní interferenci.*



Obr. 3: Možné jevy při dopadu dvou fotonů na dělič svazku

Zkusme teď pokus modifikovat. Uvažujme foton s horizontální polarizací v horní větvi děliče a s vertikální v dolní větvi. Místo dvou módů nyní pracujeme s dvěma prostorovými a dvěma polarizačními módy. Vstupní registr bude mít tvar

$$|\psi\rangle_{in} = |1_H\rangle_a \otimes |0_V\rangle_a \otimes |0_H\rangle_b \otimes |1_V\rangle_b. \quad (43)$$

Znaménko direktního součinu budeme dále pro přehlednost vynechávat. Každý mod má svůj kreační operátor. Transformační rovnice použijeme pro každý polarizační mod zvlášť. Výraz

$$\hat{a}_H^\dagger \hat{b}_V^\dagger |0\rangle \longrightarrow \frac{1}{2} \left(\hat{a}_H^\dagger + \hat{b}_H^\dagger \right) \left(-\hat{a}_V^\dagger + \hat{b}_V^\dagger \right) |0\rangle \quad (44)$$

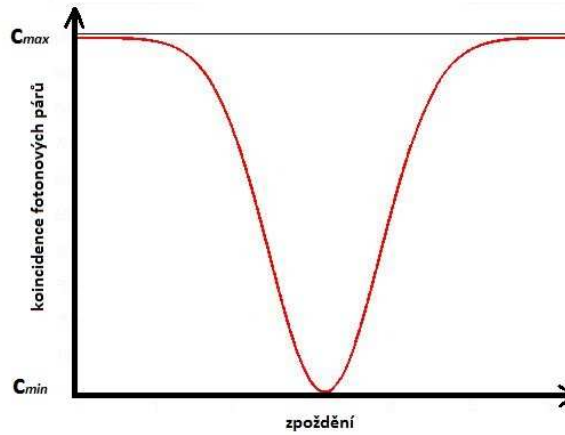
pak finálně upravíme na tvar

$$|\psi\rangle_{out} = \frac{1}{2} \left(-|1_H\rangle_a |1_V\rangle_a |0_H\rangle_b |0_V\rangle_b + |1_H\rangle_a |0_V\rangle_a |0_H\rangle_b |1_V\rangle_b \right. \\ \left. - |0_H\rangle_a |1_V\rangle_a |1_H\rangle_b |0_V\rangle_b + |0_H\rangle_a |0_V\rangle_a |1_H\rangle_b |1_V\rangle_b \right). \quad (45)$$

K žádné interferenci v tomto případě nedochází. Na výstupu lze změřit stavy, kdy se fotony nachází v opačných prostorových modech. Je to způsobeno rozlišitelností obou fotonů na vstupu. *Rozlišitelnost fotonů obecně interferenci ničí.*

Obě předchozí situace jsou pouze extrémními případy toho, co se ve skutečnosti na děličích svazku odehrává. *Obecně budou fotony vždy částečně rozlišitelnými.*

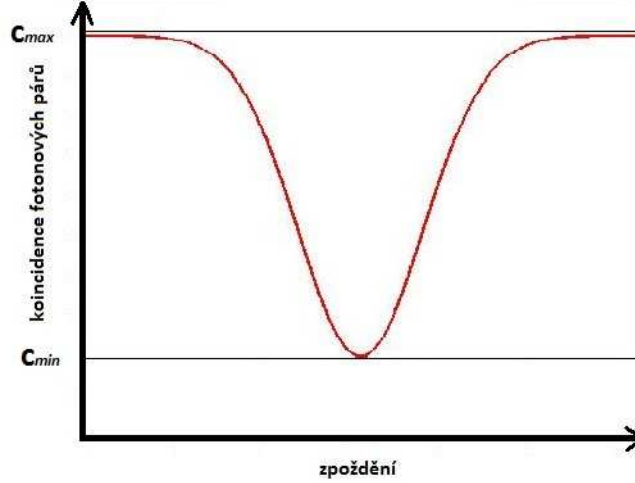
Nedokonalou rozlišitelnost lze modelovat například malým zpožděním prvního fotonu, kdy se vlnové balíky obou fotonů překrývají pouze částečně. Uvažujme experiment měření koincidence fotonů na obou detektorech. Je to opět ideální situace, v němž je částečná rozlišitelnost způsobena pouze časovým zpožděním. Pro vybraná časová zpoždění pošleme na dělič N párů fotonů a spočítáme počet událostí, kdy byly fotony detekovány v opačných prostorových modech. Obrázek znázorňuje závislost počtu koincidence na zpoždění fotonu. Destruktivní interference je zodpovědná za jejich pokles uprostřed grafu. Zde se fotony staly nerozlišitelnými.



Obr. 4: Závislost počtu koincidence na časovém zpoždění prvního fotonu na dokonalém děličí svazku

3.3 Vizibilita dvou-fotonové interference

V praxi počet koincidenčí nikdy nepoklesne na nulu. Hong-Ou-Mandelův dip sice s dokonalejší interferencí klesá (větší nerozlišitelnost), ale svého minima dosáhne na nenulové hodnotě.



Obr. 5: Závislost počtu koincidenčí na časovém zpoždění prvního fotonu na reálném děliči svazku

Tento jev lze charakterizovat vizibilitou dvou fotonové interference (dále jen vizibilitou), která je definována vztahem

$$V = \frac{c_{max} - c_{min}}{c_{max} + c_{min}}, \quad (46)$$

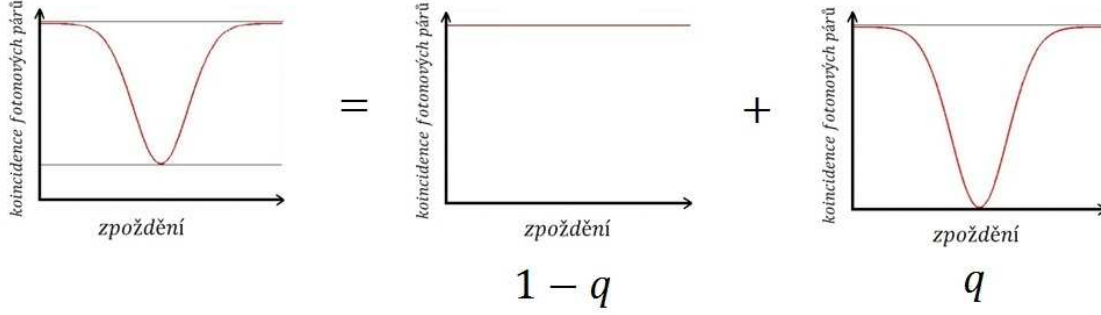
kde c_{max} je maximální a c_{min} minimální počet koincidenčí. Pro dokonalou interferenci máme $V = 1$, v případě zcela rozlišitelných fotonů dostáváme $V = 0$.

3.4 Model statistické směsi

Uvažujme obecné hradlo složené z n elementárnějších prvků na kterých dochází k nedokonalé interferenci, a tedy příslušné vizibility HOM jevu jsou různé od jedné. Pro popis výstupního stavu z tohoto hradla si již nevystačíme s vektory Hilbertova prostoru. Závadí se statistická směs čistých stavů ρ nebo také matice hustoty. Pojďme se podívat, jak se liší výstupní stav tohoto hradla od ideálního výstupního stavu ψ . Míru odlišnosti pak vyjádříme dosazením do vztahu

$$F = \langle \psi | \rho | \psi \rangle, \quad (47)$$

kde jsme zavedli novou veličinu F s názvem fidelita. Pro fidelitu platí $0 \leq F \leq 1$ a jestliže nastane $F = 1$, potom ρ je čistý stav.



Obr. 6: Model statistické směsi

Za účelem výpočtu fidelity modelujeme celý proces na hradle statistickou směsí jistých případů. Představujeme si, že na každém z n prvků hradla mohou nastat pouze dvě události. Fotony se zde zachovávají dokonale nerozlišitelně nebo dokonale rozlišitelně. Pravděpodobnost těchto událostí úzce souvisí s vizibilitou HOM jevu na děliči. Uvažujeme fotony nerozlišitelné s pravděpodobností q (dále jen nerozlišitelnost) a úplně rozlišitelné s pravděpodobností $1 - q$.

Odvodíme souvislost mezi nerozlišitelností q a vizibilitou V . Uvažujeme N fotonových párů dopadajících na dělič za jednotku času. Koincidence dosahují maxima ve chvíli, kdy fotony v páru bezpečně odlišíme, třeba díky velkému časovému zpoždění jednoho z nich. Pravděpodobnost koincidence potom bude rovna jedné polovině. Za jednotku času tedy naměříme $c_{max} = \frac{1}{2}N$ koincidencí. Naopak minimum budeme mít při současném dopadu obou fotonů. Nyní zanikla uměle vytvořená rozlišitelnost, ale zůstává rozlišitelnost, jejíž pravděpodobnost je $1 - q$. Minimální počet koincidencí tedy je $c_{min} = (1 - q)\frac{1}{2}N$. Dosazením do (46) a úpravou obdržíme požadovaný vztah:

$$q = \frac{2V}{1 + V}. \quad (48)$$

V případě, že hradlo zahrnuje více dílčích interferencí, lze výsledný proces chápat jako směs K rozdílných procesů, lišících se ve volbě, zda jsou v daném děliči fotony rozlišitelné či nerozlišitelné. Každému z těchto elementárních procesů lze přiřadit apriorní pravděpodobnost Q_l , jež je přímočarým zobecněním rozlišitelnosti q . Pro daný vstupní stav $|\psi\rangle$ odpovídá každému dílčímu procesu čistý výstupní stav $|\phi_l(\psi)\rangle$, který obecně není normovaný a

$$p_l = \langle \phi_l(\psi) | \phi_l(\psi) \rangle, \quad (49)$$

udává pravděpodobnost hradla pro daný dílčí proces. Střední pravděpodobnost pro daný vstupní stav zavádíme vztahem

$$P(\psi) = \sum_l Q_l p_l(\psi). \quad (50)$$

Prostřednictvím pomocných fidelit

$$f_l(\psi) = \frac{1}{p_l} |\langle \phi(\psi) | \phi_l(\psi) \rangle|^2, \quad (51)$$

kde za $\phi(\psi)$ považujeme ideální normovaný výstupní stav, zavádíme obdobně střední fidelitu pro daný vstupní stav:

$$F(\psi) = \frac{1}{P(\psi)} \sum_l Q_l p_l(\psi) f_l(\psi). \quad (52)$$

3.5 Středovaná fidelita

Zatím jsme došli k fidelitě, která obecně závisí na vstupním stavu. Po dosazení získáme fidelitu nějakého konkrétního vstupního stavu. Abychom získali globální charakteristiku studovaného hradla, budeme fidelitu středovat přes všechny čisté vstupní stavy. Obdržíme střední pravděpodobnost

$$\bar{P} = \int P(\psi) d\psi \quad (53)$$

a střední fidelitu

$$\bar{F} = \frac{\int P(\psi) F(\psi) d\psi}{\int P(\psi) d\psi}. \quad (54)$$

Nejprve převedeme výraz (54) na funkci parametrů Blochovy sféry. Libovolný stav

$$|\psi\rangle = \alpha |H\rangle + \beta |V\rangle \quad (55)$$

lze zapsat ve tvaru

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |H\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} |V\rangle, \quad (56)$$

kde

$$\theta \in [0, \pi] \quad a \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

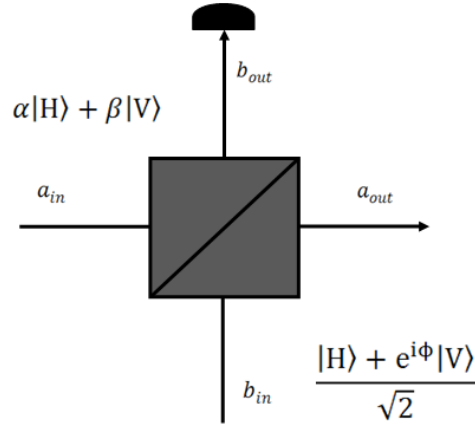
Porovnáním rovnic (55) a (56) dostáváme vztahy pro koeficienty α a β . Po dosazení do výrazu (54) můžeme integrovat přes Blochovu sféru:

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi. \quad (57)$$

Obecně jsou střední fidelita a pravděpodobnost funkcemi více vstupních stavů. V takovém případě se postupuje analogicky s tím, že integrujeme přes více Blochových sfér.

4 Programovatelné kvantové hradlo operující na jednom kvantovém bitu

4.1 Popis



Obr. 6: Programovatelné hradlo se vstupními kvantovými bity

Programovatelné kvantové hradlo operující na jednom kvantovém bitu [4] je složeno z polarizačního děliče svazku, který horizontálně polarizované fotony úplně propustí ($T_H = 1$) a vertikálně polarizované fotony odrazí ($T_V = 0$). Na výstupu polarizačního děliče modu \mathbf{b} je umístěn filtr propouštějící pouze diagonálně polarizované fotony $\frac{|H\rangle + |V\rangle}{\sqrt{2}}$ dále následován detektorem počtu fotonů.

4.2 Využití

Uvažujme v prostorovém modu \mathbf{a} libovolně polarizovaný foton a v modu \mathbf{b} foton polarizovaný $\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + e^{i\phi}|V\rangle)$. Úkolem brány [4] je pracovat jako programovatelné kvantové hradlo, které operuje na jednom kvantovém bitu. Pomocí kontrolního kvantového bitu, který je reprezentován fotonem v modu \mathbf{b} , řídíme činnost hradla. Operace provedená na kontrolovaném kvantovém bitu bude v požadovaném tvaru

$$|H\rangle + \beta|V\rangle \longrightarrow \alpha|H\rangle + e^{i\phi}\beta|V\rangle \quad (58)$$

jen za podmínky, že detektor zaznamená právě jeden foton.

4.3 Výpočet fidelity

Hlavní součástí hradla je polarizační dělič svazku, který je charakterizován svou vizibilitou. U každé brány nás především zajímá kvalita operace neboli fidelita. Ta závisí na vizibili-

tách jednotlivých prvků brány. Vzhledem k tomu, že brána obsahuje jeden dělič svazku, bude výsledná fidelita záviset pouze na jednom parametru. Máme zde pak jednodušší, avšak již netriviální výpočet. Vzhledem k tomu, že výsledná fidelita nezávisí na parametru ϕ , můžeme pro potřeby výpočtu volit vstupní stav modu \mathbf{b} ve tvaru $\frac{|H\rangle+|V\rangle}{\sqrt{2}}$.

Prvním krokem zjistíme stav na výstupu hradla. Připomínám, že celkové chování brány je modelováno jako statistická směs dvou extrémních případů. Nejprve budeme uvažovat dokonale nerozlišitelné fotony a následně v druhé části výpočtu rozlišitelné fotony.

4.3.1 Výpočet výstupu hradla pro nerozlišitelné fotony

Uvažujme mod \mathbf{a} v obecném tvaru $\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$, kde koeficienty α a β určují polarizaci. Mod \mathbf{b} zvolme diagonálně polarizovaný $\frac{|H\rangle+|V\rangle}{\sqrt{2}}$. S použitím (21) obdržíme

$$|\psi\rangle_{in} = (\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle) \otimes \left(\frac{|H\rangle + |V\rangle}{\sqrt{2}} \right). \quad (59)$$

Libovolný Fockův stav lze zapsat pomocí anihilačních operátorů a vakuového stavu. Kromě dvou prostorových modů musíme ještě počítat s dvěma polarizačními mody. Každý mod má svůj kreační operátor. Výraz

$$|\psi\rangle_{in} = \left(\alpha \hat{a}_H^\dagger + \beta \hat{a}_V^\dagger \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{b}_H^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{b}_V^\dagger \right) |0\rangle. \quad (60)$$

je ekvivalentní (59).

Může použít transformační rovnice pro polarizační dělič (35)-(38). Dosazením a po následném roznásobení závorek dojdeme k výstupnímu stavu

$$|\psi\rangle_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \hat{a}_H^\dagger \hat{b}_H^\dagger + \alpha \hat{a}_H^\dagger \hat{a}_V^\dagger + \beta \hat{b}_H^\dagger \hat{b}_V^\dagger + \beta \hat{a}_V^\dagger \hat{b}_V^\dagger \right) |0\rangle. \quad (61)$$

Ten pak omezíme jen na případy, kdy v každém rameni na výstupu bude přítomný jeden foton (postselekce)

$$|\psi\rangle_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \hat{a}_H^\dagger \hat{b}_H^\dagger + \beta \hat{a}_V^\dagger \hat{b}_V^\dagger \right) |0\rangle. \quad (62)$$

Hradlo pracuje v tzv. koincidenční bázi. Zde přejdeme opět k braketovému zápisu

$$|\psi\rangle_{out} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |H, H\rangle_{ab} + \beta |V, V\rangle_{ab}) \quad (63)$$

Ke konečnému výsledku se dostáváme po vynásobení (63) výrazem $\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_b + \langle V|_b)$. výstupní foton v modu \mathbf{b} je vyprojektován na stav $\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_b + \langle V|_b)$. Výstupní stav pak bude mít tvar

$$|\psi\rangle_{out} = \frac{1}{2} (\alpha |H\rangle_a + \beta |V\rangle_a). \quad (64)$$

4.3.2 Výpočet výstupu hradla pro rozlišitelné fotony

Výpočet je analogický předchozímu případu. Odlišnost se skrývá v rozlišení obou stavů na výstupu. Příslušné anihilační operátory proto označíme číslem 1 resp. 2. Vstupní stav pak nabude tvaru

$$|\psi\rangle_{in} \left(\alpha \hat{a}_{H1}^\dagger + \beta \hat{a}_{V1}^\dagger \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}_{H2}^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}_{V2}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (65)$$

Obdobně dosazením transformačních rovnic a roznásobením získáme

$$|\psi\rangle_{out} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \hat{a}_{H1}^\dagger \hat{b}_{H2}^\dagger + \alpha \hat{a}_{H1}^\dagger \hat{a}_{V2}^\dagger + \beta \hat{b}_{V1}^\dagger \hat{b}_{H2}^\dagger + \beta \hat{b}_{V1}^\dagger \hat{a}_{V2}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (66)$$

V této chvíli provedeme postselekcí a zapíšeme už v braketové symbolice

$$|\psi\rangle_{out} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha |H_1, H_2\rangle_{ab} + \beta |V_2, V_1\rangle_{ab} \right). \quad (67)$$

Po vyprojektování na diagonální polarizaci v modu **b** dostáváme požadovaný výstup, u kterého lze rozlišit dvě části

$$|\psi_1\rangle_{out} = \frac{\alpha}{2} |H_1\rangle_a \quad (68)$$

$$|\psi_2\rangle_{out} = \frac{\beta}{2} |V_2\rangle_a. \quad (69)$$

4.3.3 Pravděpodobnost a fidelita pro daný konkrétní vstupní stav

Pravděpodobnosti jednotlivých výstupů získáme sečtením druhých mocnin absolutních hodnot koeficientů u příslušných stavů. Po provedení výpočtu vidíme, že

$$p_\psi = \frac{1}{4}, \quad (70)$$

$$p_{\psi_1} = \frac{|\alpha|^2}{4}, \quad (71)$$

$$p_{\psi_2} = \frac{|\beta|^2}{4}. \quad (72)$$

$$(73)$$

Zde nesmíme zapomenout, že stav $|\psi\rangle$ nastane za podmínky dokonalé nerozlišitelnosti fotonů. $|\psi_1\rangle$ a $|\psi_2\rangle$ pak v případě, že jsou fotony rozlišitelné.

Sečtením všech tří podmíněných pravděpodobností obdržíme výslednou pravděpodobnost pro daný vstupní stav ve tvaru

$$P(\psi) = \frac{q}{4} + (1-q) \left(\frac{|\alpha|^2}{4} + \frac{|\beta|^2}{4} \right) \quad (74)$$

$$= \frac{1}{4}, \quad (75)$$

přihlédneme-li k $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Vypočítáme pomocné fidelity

$$f_0 = |\langle \psi | \psi \rangle|^2 = 1, \quad (76)$$

$$f_1 = |\langle \psi | \psi_1 \rangle|^2 = |\alpha|^2, \quad (77)$$

$$f_2 = |\langle \psi | \psi_2 \rangle|^2 = |\beta|^2, \quad (78)$$

kde f_0, f_1, f_2 jsou po řadě fidelity stavů $|\psi\rangle, |\psi_1\rangle$ a $|\psi_2\rangle$.

Dosazením do vztahu (52) získáme

$$F(\psi) = \frac{1}{4} \left(\frac{q}{4} + \frac{1-q}{4} |\alpha|^4 + \frac{1-q}{4} |\beta|^4 \right) = q + (1-q) (|\alpha|^4 + |\beta|^4), \quad (79)$$

což je střední fidelita pro daný vstupní stav.

4.3.4 Středování fidelity přes všechny vstupní stavy

Zatím jsem došli k fidelitě, která závisí na vstupních parametrech α, β . Výraz (79) převedme na funkci dvou parametrů Blochovy sféry. Dosazením za α, β ve vztahu (79) dostáváme

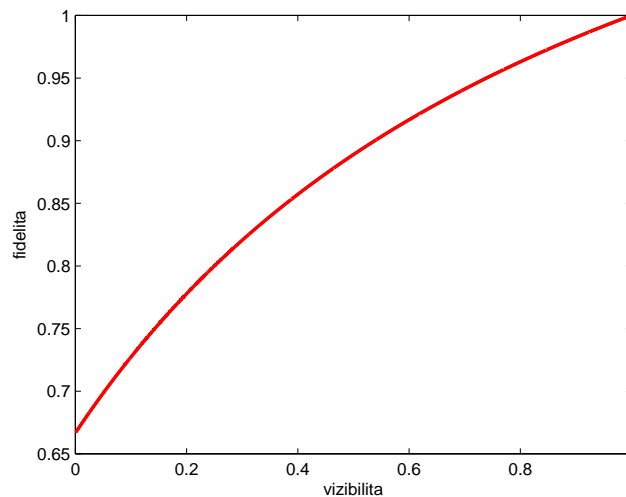
$$F(\theta, \phi) = q + (1-q) \left(\left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^4 + \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^4 \right). \quad (80)$$

Integrováním podle obou parametrů dojdeme ke konečnému tvaru fidelity:

$$\bar{F} = \frac{q+2}{3}. \quad (81)$$

Pomocí(48) lze (81) dále upravit na

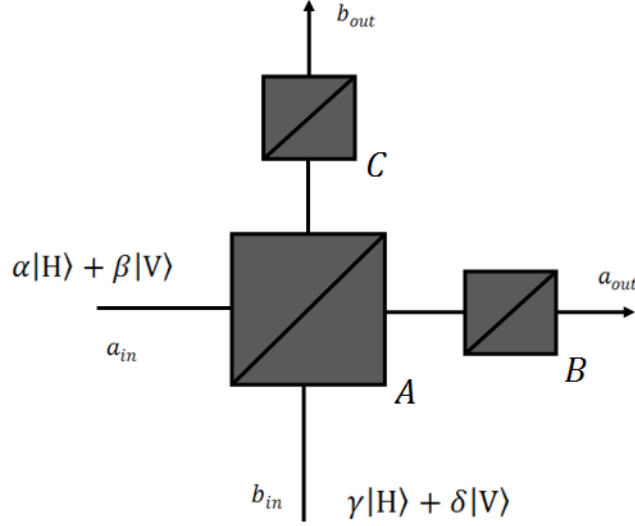
$$\bar{F} = \frac{4V+2}{3(1+V)} \quad (82)$$



Obr. 8: Závislost fidelity na vizibilitě pro programovatelné kvantové hradlo

5 CZ-brána

5.1 Popis



Obr. 9: CZ brána

CZ-brána [5,6,7] je složena z primárního děliče svazku, který je doplněn dvěma sekundárními děliči v každém výstupním rameni. Uvažujme odlišné propustnosti pro horizontální $T_H = \frac{1}{3}$ a vertikální $T_V = 1$ složku polarizace na primárním děliči a $T_V = \frac{1}{3}, T_H = 1$ na sekundárním děliči. Sekundární děliče fungují jako filtry. Hradlo úspěšně zafunguje tehdy, jestliže se v každém výstupním prostorovém modu nachází právě jeden foton.

5.2 Výpočet fidelity

Postup bude analogický výpočtu fidelity předchozí brány s tím, že oba vstupní stavy jsou zadány obecně a místo dvou musíme počítat se čtyřmi parametry. Transformační rovnice primárního děliče budou mít pak tvar

$$\hat{a}_H^\dagger \longrightarrow \sqrt{\frac{1}{3}}\hat{a}_H^\dagger + \sqrt{\frac{2}{3}}\hat{b}_H^\dagger, \quad (83)$$

$$\hat{a}_V^\dagger \longrightarrow \hat{a}_V^\dagger, \quad (84)$$

$$\hat{b}_H^\dagger \longrightarrow -\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{a}_H^\dagger + \sqrt{\frac{1}{3}}\hat{b}_H^\dagger, \quad (85)$$

$$\hat{b}_V^\dagger \longrightarrow \hat{b}_V^\dagger. \quad (86)$$

5.2.1 Fotony jsou nerozlišitelné

Máme obecně zadaný vstupní stav v symbolice kreačních operátorů

$$|\psi\rangle_{in} = \left(\alpha \hat{a}_H^\dagger + \beta \hat{a}_V^\dagger \right) \left(\gamma \hat{b}_H^\dagger + \delta \hat{b}_V^\dagger \right) |0\rangle, \quad (87)$$

do kterého dosadíme transformační rovnice děliče. Dostáváme

$$|\psi\rangle_{out} = \left(\alpha \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \hat{a}_H^\dagger + \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{b}_H^\dagger \right) + \beta \hat{a}_V^\dagger \right) \left(\gamma \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \hat{a}_H^\dagger + \sqrt{\frac{1}{3}} \hat{b}_H^\dagger \right) + \delta \hat{b}_V^\dagger \right) |0\rangle. \quad (88)$$

Roznásobením a provedením postselekce vede na

$$|\psi\rangle_{out} = \left(-\frac{1}{3} \alpha \gamma \hat{a}_H^\dagger \hat{b}_H^\dagger + \frac{1}{\sqrt{3}} \alpha \delta \hat{a}_H^\dagger \hat{b}_V^\dagger + \frac{1}{\sqrt{3}} \beta \gamma \hat{a}_V^\dagger \hat{b}_H^\dagger + \beta \delta \hat{a}_V^\dagger \hat{b}_V^\dagger \right) |0\rangle. \quad (89)$$

Sekundární děliče vyrovnají amplitudy na $\frac{1}{3}$. Provedením operace obdržíme

$$|\psi\rangle_{out} = \left(-\frac{1}{3} \alpha \gamma \hat{a}_H^\dagger \hat{b}_H^\dagger + \frac{1}{3} \alpha \delta \hat{a}_H^\dagger \hat{b}_V^\dagger + \frac{1}{3} \beta \gamma \hat{a}_V^\dagger \hat{b}_H^\dagger + \frac{1}{3} \beta \delta \hat{a}_V^\dagger \hat{b}_V^\dagger \right) |0\rangle. \quad (90)$$

V této chvíli již stačí převést výraz do braketové symboliky

$$|\psi\rangle = -\frac{1}{3} \alpha \gamma |H, H\rangle_{ab} + \frac{1}{3} \alpha \delta |H, V\rangle_{ab} + \frac{1}{3} \beta \gamma |V, H\rangle_{ab} + \frac{1}{3} \beta \delta |V, V\rangle_{ab} \quad (91)$$

5.2.2 Fotony jsou rozlišitelné

Pro tento případ označíme kreační operátory v jednotlivých módech

$$|\psi\rangle_{in} = \left(\alpha \hat{a}_{H1}^\dagger + \beta \hat{a}_{V1}^\dagger \right) \left(\gamma \hat{b}_{H2}^\dagger + \delta \hat{b}_{V2}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (92)$$

Stejně jako pro nerozlišitelné fotony dosadíme transformační rovnice

$$|\psi\rangle_{out} = \left(\alpha \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \hat{a}_{H1}^\dagger + \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{b}_{H1}^\dagger \right) + \beta \hat{a}_{V1}^\dagger \right) \left(\gamma \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \hat{a}_{H2}^\dagger + \sqrt{\frac{1}{3}} \hat{b}_{H2}^\dagger \right) + \delta \hat{b}_{V2}^\dagger \right) |0\rangle, \quad (93)$$

roznásobíme, vyselektujeme jeden foton v každém rameni a pomocí transformací sekundárních děličů upravíme amplitudy

$$|\psi\rangle_{out} = \left(\frac{1}{3} \alpha \gamma \hat{a}_{H1}^\dagger \hat{b}_{H2}^\dagger + \frac{1}{3} \alpha \delta \hat{a}_{H1}^\dagger \hat{b}_{V2}^\dagger - \frac{2}{3} \alpha \gamma \hat{a}_{H2}^\dagger \hat{b}_{H1}^\dagger + \frac{1}{3} \beta \gamma \hat{a}_{V1}^\dagger \hat{b}_{H2}^\dagger + \frac{1}{3} \beta \delta \hat{a}_{V1}^\dagger \hat{b}_{V2}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (94)$$

Výsledek lze rozdělit na dvě části. Experimentálně pak například sledováním doby příchodu fotonu. Dostáváme

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{3} \alpha \gamma |H, H\rangle_{ab} + \frac{1}{3} \alpha \delta |H, V\rangle_{ab} + \frac{1}{3} \beta \gamma |V, H\rangle_{ab} + \frac{1}{3} \beta \delta |V, V\rangle_{ab}, \quad (95)$$

$$|\psi_2\rangle = -\frac{2}{3} \alpha \gamma |H, H\rangle_{ab}. \quad (96)$$

5.2.3 Střední pravděpodobnosti a fidelity

Princip počítání jsem popsal v předchozích kapitolách, uvedu zde tedy jen výsledky výpočtů.

Pomocné pravděpodobnosti vychází

$$p_\psi = \frac{1}{9}, \quad (97)$$

$$p_{\psi_1} = \frac{1}{9}, \quad (98)$$

$$p_{\psi_2} = \frac{4}{9} (|\alpha|^2 |\gamma|^2). \quad (99)$$

$$(100)$$

Po zohlednění pracovních pravděpodobností a rozlišitelností dostáváme

$$P(\psi_{in}) = \frac{q}{9} + (1-q)\frac{1}{9} + (1-q)\frac{4}{9}|\alpha|^2|\gamma|^2, \quad (101)$$

$$= \frac{1}{9} (1 + 4(1-q)|\alpha|^2|\gamma|^2) \quad (102)$$

$$(103)$$

střední pravděpodobnost pro dané vstupní stavy. Vynásobením pomocných fidelit

$$f_0 = |\langle \psi | \psi \rangle|^2 = 1 \quad (104)$$

$$f_1 = |\langle \psi | \psi_1 \rangle|^2 = |\alpha|^2 (|\delta|^2 - |\gamma|^2) + |\beta|^2 \quad (105)$$

$$f_2 = |\langle \psi | \psi_2 \rangle|^2 = |\alpha\gamma|^2 \quad (106)$$

$$(107)$$

a dosazením do

$$F(\psi_{in}) = \frac{qp_\psi f_0 + (1-q)p_{\psi_1} f_1 + (1-q)p_{\psi_2} f_2}{P(\psi_{in})} \quad (108)$$

obdržíme střední fidelitu pro dané vstupní stavy.

5.2.4 Středování fidelity přes všechny vstupní stavy

Jelikož střední fidelita pro dané vstupní stavy závisí na čtyřech parametrech budeme nezávisle středovat přes dvě Blochovy sféry. Každá z Blochových sfér odpovídá stavu jednoho vstupního fotonu. Všimněme si, že střední pravděpodobnost pro dané vstupní stavy není konstantní jako u předchozího případu. Pro zjednodušení výpočtů upravíme integrál

$$\bar{F} = \int F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) d\alpha d\beta d\gamma d\delta \quad (109)$$

na tvar

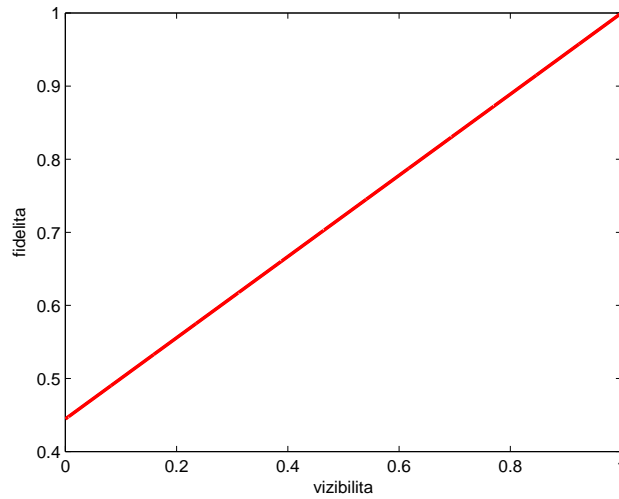
$$\bar{F} = \frac{\int P(\alpha, \beta, \gamma, \delta) F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) d\alpha d\beta d\gamma d\delta}{\int P(\alpha, \beta, \gamma, \delta) d\alpha d\beta d\gamma d\delta}. \quad (110)$$

Zbývá provést transformaci k proměnným Blochovy sféry a integrovat. Výsledek výjde ve tvaru

$$\bar{F} = \frac{8 + q}{9(2 - q)} \quad (111)$$

nebo (dosazením za pravděpodobnost)

$$\bar{F} = \frac{4 + 5V}{9}. \quad (112)$$

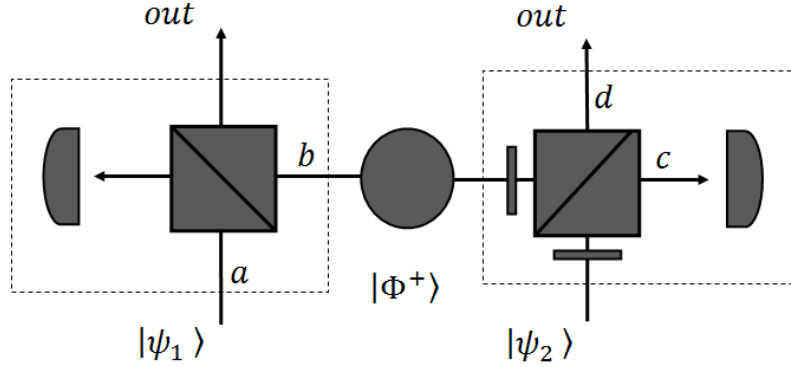


Obr. 10: Závislost fidelity na vizibilitě pro CZ-bránu

Na obrázku 10 je znázorněn graf závislosti fidelity na vizibilitě pro CZ-bránu. Tato závislost je lineární.

6 Nedestruktivní CNOT hradlo

6.1 Popis



Obr. 11: Nedestruktivní CNOT hradlo

Nedestruktivní CNOT hradlo popsané v článku [8] je jeden z druhů již sofistikovanějších hradel. Skládá se ze dvou částí. Parity check spolu se zdrojem entanglovaných fotonů $|\psi^+\rangle$ má za úkol nakopírovat kontrolní kvantový bit. Druhá část je tvořená destruktivním CNOT hradlem. Ten překlápí polarizaci kontrolovaného kvantového bitu právě tehdy, když je kontrolní foton horizontálně polarizovaný. V případě vertikální polarizace kontrolního fotonu je kontrolovaný kvantový bit pouze přenesen do výstupního prostorového modu. Skládá se z diagonálně natočeného polarizačního děliče svazku, který lze nahradit polarizačním děličem a fázovou destičkou.

6.2 Výpočet fidelity

Pro potřeby výpočtu uvažujme vstupní stavy ve tvaru

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H, H\rangle_{bc} + |V, V\rangle_{bc}), \quad (113)$$

$$|\psi_1\rangle = \alpha |H\rangle_a + \beta |V\rangle_a, \quad (114)$$

$$|\psi_2\rangle = \gamma |H\rangle_d + \delta |V\rangle_d, \quad (115)$$

kde $|\Phi^+\rangle$ je entanglovaný stav. V dalším postupu musíme zohlednit přítomnost dvou polarizačních děličů svazku obecně s různou vizibilitou. Chování hradla, které je popisované modelem statistické směsi, je teď složitější. Výstupní stavy budeme zjišťovat pro čtyři krajní případy. U každého nejprve spočítáme výstupní stav z prvního hradla a následně tento výstup necháme vstoupit do druhého. Jedná se o ekvivalentní popis situace, kde obě dílčí hradla pracují současně. Fidelity je dále počítaná pro CZ operaci, která je však ekvivalentní CNOT operaci. Od CZ přejdeme k CNOT pomocí dvou půlvlných destiček.

6.3 Statistická směs

6.3.1 Fotony jsou na obou hradlech dokonale nerozlišitelné

- část 1

Vstup zapíšeme jako

$$|\psi_A\rangle_{in}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \hat{a}_H^\dagger + \beta \hat{a}_V^\dagger \right) \left(\hat{b}_H^\dagger \hat{c}_H^\dagger + \hat{b}_V^\dagger \hat{c}_V^\dagger \right) |0\rangle, \quad (116)$$

v druhé závorce můžeme rozlišit entanglovanou část. Dosadíme transformační rovnice pro první dělič. Mění se jen mod **a** a mod **b**, mod **c** zůstává beze změny. Dále provádíme veškeré operace odpovídající Parity checku. Dostáváme

$$|\psi_A\rangle_{out}^1 = \frac{1}{2} \left(\alpha \hat{a}_H^\dagger \hat{c}_H^\dagger - \beta \hat{a}_V^\dagger \hat{c}_V^\dagger \right) |0\rangle \quad (117)$$

- část 2

Výstup z první části vezmeme jako vstupní stav druhé části tedy

$$|\psi_A\rangle_{in}^2 = \frac{1}{2} \left(\alpha \hat{a}_H^\dagger \hat{c}_H^\dagger - \beta \hat{a}_V^\dagger \hat{c}_V^\dagger \right) \left(\gamma \hat{d}_H^\dagger + \delta \hat{d}_V^\dagger \right) |0\rangle. \quad (118)$$

Provedeme transformace $\hat{c}_H^\dagger \longrightarrow \frac{\hat{c}_H^\dagger + \hat{c}_V^\dagger}{\sqrt{2}}$, $\hat{c}_V^\dagger \longrightarrow \frac{\hat{c}_H^\dagger - \hat{c}_V^\dagger}{\sqrt{2}}$ a operace Parity checku. Obdržíme

$$|\psi_A\rangle_{out}^2 = \frac{1}{4} \left(\alpha \gamma \hat{a}_H^\dagger \hat{d}_H^\dagger - \alpha \delta \hat{a}_H^\dagger \hat{d}_V^\dagger - \beta \gamma \hat{a}_V^\dagger \hat{d}_H^\dagger - \beta \delta \hat{a}_V^\dagger \hat{d}_V^\dagger \right) |0\rangle, \quad (119)$$

což je požadovaný výstupní stav.

6.3.2 Fotony jsou na prvním hradle nerozlišitelné a na druhém rozlišitelné

- část 1

Hradlo dokonale zafungovalo. Výpočty na prvním hradle jsou stejné jako v předchozím případě.

- část 2

Fotony na druhém hradle jsou rozlišitelné. Očíslujeme kreační operátory vstupního stavu

$$|\psi_B\rangle_{in}^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\alpha \hat{a}_{H1}^\dagger \hat{c}_{H1}^\dagger - \beta \hat{a}_{V1}^\dagger \hat{c}_{V1}^\dagger \right) \left(\gamma \hat{d}_{H2}^\dagger + \delta \hat{d}_{V2}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (120)$$

Postup dále je analogický pouze musíme přihlédnout k číselným indexům operátorů. Dostáváme

$$|\psi_B\rangle_{out}^2 = \frac{1}{4} \left(\alpha \gamma \hat{a}_{H1}^\dagger \hat{d}_{H2}^\dagger - \alpha \delta \hat{a}_{H1}^\dagger \hat{d}_{V1}^\dagger - \beta \gamma \hat{a}_{V1}^\dagger \hat{d}_{H2}^\dagger - \beta \delta \hat{a}_{V1}^\dagger \hat{d}_{V1}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (121)$$

6.3.3 Fotony jsou na prvním hradle rozlišitelné a na druhém nerozlišitelné

- část 1

Očísluje-li na vstupu kreační operátory podle příslušnosti k prostorovým modům, můžeme na výstupu první části rozlišit dva samostatné stavy.

$$|\psi_C\rangle_{out}^1 = \frac{1}{2}\alpha |H, H\rangle_{ad} \quad (122)$$

a

$$|\psi_C\rangle_{out}^1 = -\frac{1}{2}\beta |V, V\rangle_{ad}. \quad (123)$$

- část 2

Druhé hradlo funguje dokonale, musíme ale propočítat oba výstupní stavy z části jedna. Dostaneme tak na konečném výstupu dva rozlišitelné stavy $|\psi_{C1}\rangle$ a $|\psi_{C2}\rangle$.

6.3.4 Fotony jsou obou hradlech rozlišitelné

- část 1

První část je obět stejná jako v předchozím případě.

- část 2 Nyní jsou fotony dopadající na druhé hradlo rozlišitelné. Propočítáme oba stavy a dostáváme čtyři rozlišitelné výstupní stavy $|\psi_{D11}\rangle, |\psi_{D12}\rangle, |\psi_{D21}\rangle, |\psi_{D22}\rangle$.

6.4 Výstupní stavy

$$|\psi_A\rangle = \frac{1}{4}(\alpha\gamma|H, H\rangle - \alpha\delta|H, V\rangle - \beta\gamma|V, H\rangle - \beta\delta|V, V\rangle) \quad (124)$$

$$|\psi_{B_1}\rangle = \frac{\gamma}{4}(\alpha|H, H\rangle - \beta|V, H\rangle) \quad (125)$$

$$|\psi_{B_2}\rangle = -\frac{\delta}{4}(\alpha|H, V\rangle + \beta|V, V\rangle) \quad (126)$$

$$|\psi_{C_1}\rangle = \frac{\alpha}{4}(\gamma|H, H\rangle - \delta|H, V\rangle) \quad (127)$$

$$|\psi_{C_2}\rangle = -\frac{\beta}{4}(\gamma|V, H\rangle + \delta|V, V\rangle) \quad (128)$$

$$|\psi_{D_{11}}\rangle = \frac{\alpha\gamma}{4}|H, H\rangle \quad (129)$$

$$|\psi_{D_{12}}\rangle = -\frac{\gamma\delta}{4}|H, V\rangle \quad (130)$$

$$|\psi_{D_{21}}\rangle = -\frac{\gamma\beta}{4}|V, H\rangle \quad (131)$$

$$|\psi_{D_{22}}\rangle = -\frac{\alpha\delta}{4}|V, V\rangle \quad (132)$$

6.5 Střední pravděpodobnost a fidelita

Výstupní stav	Pravděpodobnost q	Pravděpodobnost p	Fidelita stavu
$ \psi_A\rangle$	$q_1 q_2$	$\frac{1}{16}$	1
$ \psi_{B_1}\rangle$	$q_1 (1 - q_2)$	$\frac{1}{16} \gamma ^2$	$ \gamma ^2$
$ \psi_{B_2}\rangle$	$q_1 (1 - q_2)$	$\frac{1}{16} \delta ^2$	$ \delta ^2$
$ \psi_{C_1}\rangle$	$(1 - q_1) q_2$	$\frac{1}{16} \alpha ^2$	$ \alpha ^2$
$ \psi_{C_2}\rangle$	$(1 - q_1) q_2$	$\frac{1}{16} \beta ^2$	$ \beta ^2$
$ \psi_{D_{11}}\rangle$	$(1 - q_1) (1 - q_2)$	$\frac{1}{16} \alpha ^2 \gamma ^2$	$ \alpha\gamma ^2$
$ \psi_{D_{12}}\rangle$	$(1 - q_1) (1 - q_2)$	$\frac{1}{16} \alpha ^2 \delta ^2$	$ \alpha\delta ^2$
$ \psi_{D_{21}}\rangle$	$(1 - q_1) (1 - q_2)$	$\frac{1}{16} \gamma ^2 \beta ^2$	$ \gamma\beta ^2$
$ \psi_{D_{22}}\rangle$	$(1 - q_1) (1 - q_2)$	$\frac{1}{16} \beta ^2 \delta ^2$	$ \beta\delta ^2$

Z tabulky lze přehledně zjistit střední veličiny. Pravděpodobnost

$$P = \frac{1}{16} q_1 q_2 + \frac{1}{16} q_1 (1 - q_2) + \frac{1}{16} (1 - q_1) q_2 + \frac{1}{16} (1 - q_1) (1 - q_2) \quad (133)$$

$$= \frac{1}{16} \quad (134)$$

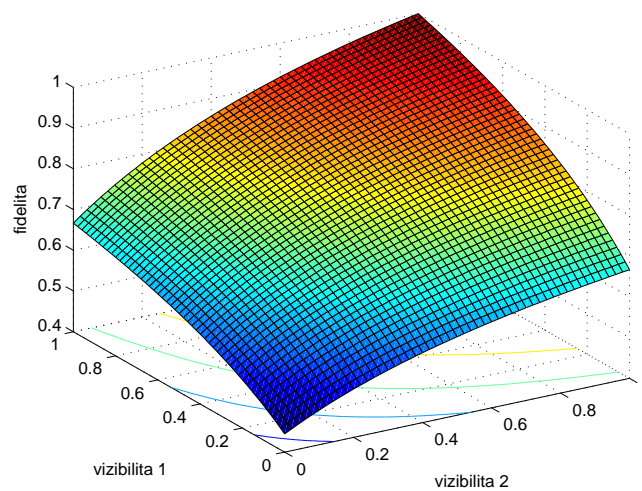
a fidelitu

$$F = \frac{1}{16} [q_1 p_2 + q_1 (1 - q_2) (|\gamma|^4 + |\delta|^4) + (1 - q_1) q_2 (|\alpha|^4 + |\beta|^4) + (1 - q_1) (1 - q_2) (|\alpha|^4 (|\gamma|^4 + |\delta|^4) + |\beta|^4 (|\gamma|^4 + |\delta|^4))] \quad (135)$$

Integrovaním přes všechny vstupní parametry obdržíme střední fidelitu

$$\bar{F} = \frac{1}{9} [q_1 q_2 + 2(q_1 + q_2) + 4]. \quad (136)$$

$$\bar{F} = \frac{4}{9} \left(\frac{V_1 V_2}{(1 + V_1)(1 + V_2)} + \frac{V_1}{1 + V_1} + \frac{V_2}{1 + V_2} + 1 \right). \quad (137)$$



Obr. 12: Závislost fidelity na vizibilitě pro nedestruktivní CNOT hradlo

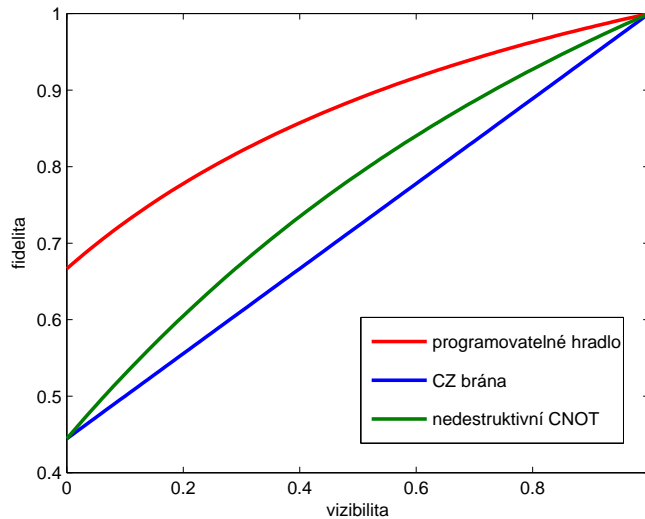
7 Závěr

V této práci jsem zkoumal s odkazem na příslušnou literaturu tři lineárně optická kvantová logická hradla. Snahou bylo popsat nedokonalé chování těchto bran a zjistit citlivost procesu zpracování informace na nedokonalou dvou-fotonovou interferenci. Ve všech třech případech jsem uvažoval pouze nedokonalosti související s Hong Ou Mandelovým jevem. Po provedení příslušných výpočtů byla pro každou bránu zjištěna závislost fidelity na vizibilitě resp. vizibilitách.

V posledních třech kapitolách podrobně popisují postup, který vede ke zjištění fidelit po řadě pro programovatelné kvantové hradlo [4] CZ bránu [5,6,7] a nedestruktivní CNOT hradlo [8]. Pro připomenutí byly zjištěny následující závislosti (třetí vztah obdržíme položením $V = V_1 = V_2$ v (137)):

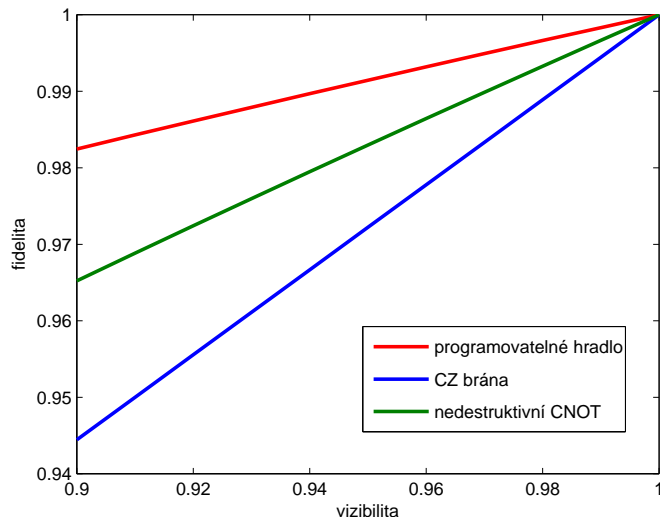
Hradlo	Fidelita
programovatelné	$\frac{4V+2}{3(1+V)}$
CZ brána	$\frac{1}{9}(4 + 5V)$
nedestruktivní CNOT	$\frac{4}{9} \left(\frac{3V^2+2V}{(1+V)^2} + 1 \right)$

Nedokonalé chování hradla jsem modeloval statistickou směsí rozdílných procesů, kterým byly apriori přiřazeny pravděpodobnosti související s vizibilitou dílčích interferencí. Pro každý proces jsem vypočítal výstupní stav z hradla a přiřadil mu pomocnou fidelitu. Vypočítáním jejich střední hodnoty byla určena fidelita daného vstupního stavu. Středováním přes všechny vstupní stavy jsem získal střední fidelitu. Tato veličina je globální charakteristikou daného hradla. V poslední době se podobnou problematikou zabývali [10].



Obr. 12: Srovnání fidelit u tří hradel

Na obrázku 12 jsou znázorněny grafy závislostí fidelit na vizibilitách pro jednotlivá zkoumaná hradla. Jelikož programovatelné hradlo je nejjednodušší, dostáváme pro něj také nejlepší závislost. V praxi lze na děličích svazku dosáhnout vizibility větší než 0.95. Z obrázku 13 je patrné, že v tomto intervalu lze křivky aproximovat přímkami.



Obr. 13: Srovnání fidelit u tří hradel v detailu

Reference

- [1] Pieter Kok, W.J. Munro, Kae Nemoto, T.C. Ralph, Jonathan P. Dowling, and G.J. Milburn, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 135 (2007).
- [2] E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn, *Nature* **46** 409 (2001)
- [3] Mark Fox: *Quantum Optics*, Oxford University Press 2006
- [4] M. Mičuda, M. Ježek, M. Dušek, and J. Fiurášek, *Phys. Rev. A* **78**, 062311 (2008).
- [5] Nikolai Kiesel, Christian Schmid, Ulrich Weber, Rupert Ursin, and Harald Weinfurter, *Phys. Rev. Lett.* **95** 210505 (2008)
- [6] N. K. Langford, T. J. Weinhold, R. Prevedel, K. J. Resch, A. Gilchrist, J. L. O'Brien, G. J. Pryde, and A. G. White, *Phys. Rev. Lett.* **95** 210504 (2008)
- [7] Ryo Okamoto, Holger F. Hofmann, Shigeki Takeuchi, and Keiji Sasaki, *Phys. Rev. Lett.* **95** 210506 (2008) Nikolai Kiesel, Christian Schmid, Ulrich Weber, Rupert Ursin, and Harald Weinfurter, *Phys. Rev. Lett.* **95** 210505 (2008).
- [8] T. B. Pittman, B.C. Jacobs, and J. D. Franson, *Phys. Rev. A* **64**, 062311 (2001).
- [9] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel *Phys. Rev. Lett.* **59** 18 (1987)
- [10] T Nagata, R Okamoto, H F Hofmann, and S Takeuchi, *New Journal of Physics* **12** 043053 (2009)