

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Aplikace diferenciálních rovnic v  
elektrotechnice



**Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky**

Vedoucí práce: **doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.**

Vypracoval(a): **David Švec**

Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika

Specializace: Průmyslová matematika

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2023

# BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

**Autor:** David Švec

**Název práce:** Aplikace diferenciálních rovnic v elektrotechnice

**Typ práce:** Bakalářská práce

**Pracoviště:** Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

**Vedoucí práce:** doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.

**Rok obhajoby práce:** 2023

**Abstrakt:** Práce se zabývá popisem vybraných modelů z elektrotechniky. Kromě modelů elektrických obvodů, obsahující základní elektronické součástky: rezistor, cívku a kondenzátor, se v práci nachází i jeden model nelineární. Práce obsahuje stručnou teorii k obyčejným lineárním diferenciálním rovnicím a základní pojmy z elektrotechniky.

**Klíčová slova:** Obyčejné diferenciální rovnice, elektrotechnika, modelování pomocí diferenciálních rovnic.

**Počet stran:** 68

**Počet příloh:** 2

**Jazyk:** český

## BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

**Author:** David Švec

**Title:** Applications of differential equations in electrotechnics

**Type of thesis:** Bachelor's

**Department:** Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

**Supervisor:** doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.

**The year of presentation:** 2023

**Abstract:** This thesis deals with the description of selected models from electrical engineering. In addition to models of electrical circuits, containing basic electronic components: resistor, coil and capacitor, there is also one non-linear model in this thesis. The work also includes a brief theory of ordinary linear differential equations and basic concepts from electrical engineering.

**Key words:** Ordinary differential equation, electrotechnics, modeling with differential equations.

**Number of pages:** 68

**Number of appendices:** 2

**Language:** Czech

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana doc. RNDr. Jana Tomečka, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne .....  
.....  
podpis

## **Poděkování**

Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce doc. RNDr. Janu Tomečkovi, Ph.D za veškeré rady a připomínky, které byly vzneseny během konzultací.

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>9</b>
<b>1 Teorie diferenciálních rovnic</b>	<b>10</b>
1.1 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu . . . . .	11
1.2 Lineární diferenciální rovnice druhého řádu . . . . .	12
<b>2 Základy elektrotechniky</b>	<b>15</b>
2.1 Základní pojmy . . . . .	15
2.2 Elektrotechnické zákony . . . . .	17
2.3 Základní elektronické součástky . . . . .	18
2.3.1 Rezistory . . . . .	19
2.3.2 Cívky . . . . .	19
2.3.3 Kondenzátory . . . . .	20
2.3.4 Diody . . . . .	20
<b>3 Modely</b>	<b>23</b>
3.1 Sériový $RL$ obvod . . . . .	23
3.2 Sériový $RC$ obvod . . . . .	30
3.3 Dolní propust . . . . .	36
3.4 Pásmová propust . . . . .	44
3.5 Dvoucestný můstkový usměrňovač . . . . .	53
<b>Závěr</b>	<b>66</b>
<b>A Lambertova funkce <math>W</math></b>	<b>67</b>

## Seznam obrázků

1	Způsoby zapojení rezistorů. . . . .	16
2	Příklad použití Prvního Kirchhoffova zákona. . . . .	18
3	Příklad použití Druhého Kirchhoffova zákona. . . . .	18
4	Schématická značka rezistoru. . . . .	19
5	Schématická značka cívky se vzduchovým jádrem. . . . .	19
6	Schématická značka kondenzátoru. . . . .	20
7	Voltampérová charakteristika diody. Zdroj: [9]. . . . .	21
8	Schématická značka usměrňovací diody. . . . .	22
9	Sériový $RL$ obvod. . . . .	23
10	Průběh proudu v sériovém $RL$ obvodu. . . . .	25
11	Grafická interpretace časové konstanty v sériovém $RL$ obvodu. . . . .	26
12	Hodnoty časové konstanty v sériovém $RL$ obvodu. . . . .	27
13	Průběh napětí $u_R(t)$ a $u_L(t)$ v sériovém $RL$ obvodu. . . . .	28
14	Průběh napětí $u_R(t)$ a $u_L(t)$ pro různé hodnoty $\tau$ v sériovém $RL$ obvodu. . . . .	29
15	Sériový $RC$ obvod. . . . .	30
16	Průběhy napětí $u_C(t)$ a $u_R(t)$ v sériovém $RC$ obvodu. . . . .	32
17	Průběh proudu v sériovém $RC$ obvodu. . . . .	33
18	Sériový $RC$ obvod bez zdroje napětí $U_0$ . . . . .	34
19	Dolní propust. . . . .	36
20	Časové průběhy napětí $U_{out}$ a $U_{in}$ Low-pass filtru. . . . .	41
21	Fázová frekvenční charakteristika Low-pass filtru. . . . .	42
22	Modulová frekvenční charakteristika Low-pass filtru. . . . .	42
23	Frekvenční charakteristiky Low-pass filtru pro různé hodnoty $\tau$ , kde $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ . . . . .	43
24	Pásmová propust. . . . .	44
25	Časové průběhy napětí $u_{out}(t)$ a $u_{in}(t)$ Band-pass filtru. . . . .	50
26	Modulová frekvenční charakteristika Band-pass filtru. . . . .	51
27	Fázová frekvenční charakteristika Band-pass filtru. . . . .	52
28	Dvoucestný můstkový usměrňovač. . . . .	53
29	Dvoucestný můstkový usměrňovač - chování obvodu pro $t \in [0, \frac{T}{2})$ . . . . .	54
30	Průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměrňovače - metoda konečných diferencí. . . . .	61
31	Přiblížený průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměrňovače - metoda konečných diferencí. . . . .	61
32	Přiblížený průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměrňovače - metoda konečných diferencí s délkou kroku $\Delta t = 0.0001$ . . . . .	62
33	Srovnání metody konečných diferencí s Lambertovou funkcí $W$ - délka kroku $\Delta t = 0.001153$ . . . . .	63

34	Srovnání metody konečných diferencí ( $\Delta t = 0.00001153$ ) s Lambertovou funkcí $W$ ( $\Delta t = 0.001153$ ). . . . .	63
35	Průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměřovače, kde $C = 50$ mF. . . . .	64
36	Průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměřovače, kde $R_Z = 100 \Omega$ . . . . .	65
37	Průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměřovače, kde $L = 20$ H. . . . .	65
38	Graf Lambertovy funkce $W_0$ a $W_{-1}$ . Zdroj: [10]. . . . .	67



# Úvod

Diferenciální rovnice mají nepřeberné využití v praxi. Umožňují nám sestavovat matematické modely, které slouží k popisu a předvídání různých jevů ze spousty oborů přírodních, ekonomických či technických věd. Cílem této práce bude popsat a prozkoumat vybrané modely z elektrotechniky prostřednictvím obyčejných diferenciálních rovnic. Bude se zejména jednat o modely elektrických obvodů, které budou popsány obyčejnými lineárními diferenciálními rovnicemi 1. a 2. řádu.

V první kapitole je stručně popsána nejnútnejší teorie k obyčejným diferenciálním rovnicím. Obsahuje popis dvou analytických metod k hledání řešení obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 1. a 2. řádu s konstantními koeficienty.

Druhá kapitola se věnuje základním pojmům z elektrotechniky. Zaměřuje se na nejdůležitější definice a fakta, které zde budeme potřebovat. Obsahuje popis a základní vlastnosti čtyř elementárních elektronických součástek, které jsou použity v modelech elektrických obvodů v poslední kapitole.

Třetí kapitola obsahuje popis pěti elektrických obvodů. Čtyři z nich jsou variace obvodů skládající se z rezistoru, cívky a kondenzátoru. Poslední obvod, kromě těchto součástek, obsahuje i diodu. K příslušným obvodům je vždy odvozena diferenciální rovnice, která je posléze vyřešena. Na konkrétních příkladech (s reálnými hodnotami parametrů) jsou poté řešení příslušných diferenciálních rovnic vizualizovány na grafech.

# 1 Teorie diferenciálních rovnic

V této kapitole uvedeme základní pojmy z teorie obyčejných diferenciálních rovnic potřebné pro další kapitoly. Nejprve uveďme obecnou definici diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu.

**Definice 1.1** Necht'  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$ ,  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Obyčejnou diferenciální rovnicí  $n$ -tého řádu rozumíme rovnici ve tvaru

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0. \quad (1.1)$$

Dále uvedeme pojem *řešení rovnice (1.1)*.

**Definice 1.2** Říkáme, že funkce  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je řešením rovnice (1.1) na intervalu  $J$ , jestliže:

- (i)  $\forall t \in J: (t, h(t), h'(t), h''(t), \dots, h^{(n)}(t)) \in D$ ,
- (ii)  $\forall t \in J: F(t, h(t), h'(t), h''(t), \dots, h^{(n)}(t)) = 0$ .

Pokud k rovnici (1.1) uvažujeme podmínky, které musí funkce  $x$  splňovat, mluvíme o tzv. *počáteční úloze*.

**Definice 1.3** Počáteční úlohou rozumíme úlohu najít řešení rovnice (1.1) společně s podmínkami

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, x''(t_0) = x_2, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1},$$

kde  $t_0 \in J$ ,  $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \in \mathbb{R}$ .

Speciálním případem rovnice (1.1), ve které  $x, x', \dots, x^{(n)}$  vystupují lineárně, se říká lineární diferenciální rovnice. My budeme uvažovat ještě speciálnější případ, a sice rovnice s konstantními koeficienty, viz následující definice.

**Definice 1.4** Obyčejnou lineární diferenciální rovnicí  $n$ -tého řádu s kon-

stantními koeficienty rozumíme

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x^{(1)} + a_nx = q(t), \quad (1.2)$$

kde  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 \neq 0$  a  $q$  je spojitá funkce v jistém otevřeném intervalu  $J$ .

V případě, že  $q(t) = 0$  pro všechna  $t \in J$ , dostáváme tzv. *homogenní rovnici*

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x^{(1)} + a_nx = 0. \quad (1.3)$$

V této práci se budeme zabývat převážně lineárními rovnicemi s konstantními koeficienty, které budou nejvýše druhého řádu, tzn.  $n \leq 2$ .

## 1.1 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Uvažujme počáteční úlohu

$$x' + ax = q(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.4)$$

K nalezení řešení této počáteční úlohy použijeme metodu integračního faktoru. Uvažujme řešení  $x$  počáteční úlohy (1.4). Pokud diferenciální rovnici v (1.4) vynásobíme funkcí  $\exp\left(\int a dt\right) = e^{at}$ , dostaneme

$$x'(t)e^{at} + ax(t)e^{at} = q(t)e^{at}. \quad (1.5)$$

Na levé straně rovnosti je derivace součinu funkcí  $x(t)$  a  $e^{at}$ . Rovnost (1.5) přepíšeme na

$$[x(t)e^{at}]' = q(t)e^{at}.$$

Integrací výše uvedené rovnosti od  $t_0$  do  $t$  získáme

$$\int_{t_0}^t [x(s)e^{as}]' ds = \int_{t_0}^t q(s)e^{as} ds.$$

Dále platí

$$x(t)e^{at} - x(t_0)e^{at_0} = \int_{t_0}^t q(s)e^{as} ds.$$

Osamostatněním funkce  $x(t)$  dostaneme

$$x(t) = x(t_0)e^{a(t_0-t)} + e^{-at} \int_{t_0}^t q(s)e^{as} ds, \quad (1.6)$$

což je řešení počáteční úlohy (1.4).

## 1.2 Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Mějme rovnici

$$a_0x'' + a_1x' + a_2x = q(t), \quad (1.7)$$

a její příslušnou homogenní rovnici

$$a_0x'' + a_1x' + a_2x = 0. \quad (1.8)$$

**Poznámka 1.1** Množina všech řešení rovnice (1.8) tvoří dvoudimenzionální podprostor prostoru funkcí majících spojitě derivace druhého řádu. Bázi tohoto podprostoru nazýváme *fundamentálním systémem řešení* (dále FSŘ).

Následující věta popisuje vztah mezi řešeními rovnic (1.7) a (1.8).

**Věta 1.1** *Je-li  $u$  řešení rovnice (1.8) na  $J$  a je-li  $\hat{x}$  nějaké řešení rovnice (1.7) na  $J$ , potom  $u + \hat{x}$  je řešení (1.8) na  $J$ .*

*Důkaz.* viz [1], str. 75. □

Z Poznámky 1.1 a Věty 1.1 vyplývá, že každé řešení rovnice (1.7) lze psát

ve tvaru

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \hat{x}(t) \quad \text{pro } t \in J,$$

kde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , funkce  $x_1, x_2$  tvoří FSŘ homogenní rovnice (1.8) a  $\hat{x}$  je nějaké konkrétní řešení rovnice (1.7) (partikulární). Tedy, abychom našli řešení nehomogenní rovnice, je třeba najít FSŘ příslušné homogenní rovnice a nějaké partikulární řešení nehomogenní rovnice. Řešení rovnice (1.8) hledáme ve tvaru  $x(t) = e^{\lambda t}$ , kde  $\lambda \in \mathbb{C}$ , které když dosadíme do homogenní rovnice (1.8) a pokrátíme  $e^{\lambda t}$  dostaneme tzv. *charakteristickou rovnici*, viz následující definice.

**Definice 1.5** *Charakteristickou rovnicí* k rovnici (1.8) rozumíme kvadratickou rovnici

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \quad (1.9)$$

Podle kořenů *charakteristické rovnice* rozlišujeme několik možností jak určit FSŘ.

**Věta 1.2** *Mějme diferenciální rovnici (1.8). Jestliže pro kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$  rovnice (1.9) platí:*

(i)  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ , pak

rovnice (1.8) má tento fundamentální systém řešení

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_2 t},$$

(ii)  $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , pak

rovnice (1.8) má tento fundamentální systém řešení

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t},$$

(iii)  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}, \overline{\lambda_1} = \lambda_2, \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , kde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , pak

rovnice (1.8) má fundamentální systém řešení ve tvaru:

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

*Důkaz.* Jedná se o speciální případ Věty 2.19 pro rovnici druhého řádu z [1], str. 93.  $\square$

K určení obecného řešení (1.7) potřebujeme nalézt ještě *partikulární řešení*  $\hat{x}$ . Ve třetí kapitole budeme uvažovat rovnici (1.7) s pravou stranou ve speciálním tvaru, proto budeme hledat *partikulární řešení*  $\hat{x}$  pomocí *metody neurčitých koeficientů*. Uvažujme rovnici (1.7) s pravou stranou ve tvaru

$$q(t) = e^{\alpha t} (P_1(t) \cos \beta t + P_2(t) \sin \beta t), \quad (1.10)$$

kde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $P_1, P_2$  jsou polynomy stupňů  $m, n$  (pro nulové polynomy položíme  $m, n = -1$ ). Označme  $k$  jako násobnost čísla  $\alpha + i\beta$  jakožto kořene *charakteristické rovnice* (1.9) (pokud  $\alpha + i\beta$  není kořenem (1.9), potom  $k = 0$ ). Pak řešení rovnice (1.7) hledáme ve tvaru

$$\hat{x}(t) = t^k e^{\alpha t} (Q_1(t) \cos \beta t + Q_2(t) \sin \beta t), \quad (1.11)$$

kde  $Q_1, Q_2$  jsou polynomy stupňů nejvýše  $\max\{m, n\}$ .

Stačí tedy nalézt koeficienty polynomů  $Q_1, Q_2$ . Ty získáme dosazením vztahu (1.11) do zadané diferenciální rovnice a porovnáním levé a pravé strany rovnosti získáme vztahy pro koeficienty polynomů  $Q_1$  a  $Q_2$ .

## 2 Základy elektrotechniky

Tato kapitola představí jen ty nejdůležitější pojmy a fakta z elektrotechniky, které zde budeme potřebovat.

### 2.1 Základní pojmy

**Definice 2.1** Elektrický náboj je fyzikální veličina, která vyjadřuje schopnost materiálu působit elektrickou silou.

Elektrický náboj se značí  $Q$  a měří se v Coulombech  $[C]$ . Mimo jiné platí *zákon o zachování elektrického náboje*, který říká, že náboj nelze vytvořit ani zničit, lze ho pouze přemístit. Částici se záporně nabitým nábojem se říká elektron.

**Definice 2.2** Elektrický zdroj je elektrotechnická součástka, která obsahuje dvě vodivé elektrody. Elektrický zdroj udržuje mezi těmito dvěma elektrodami trvalé *elektrické napětí*.

**Definice 2.3** Elektrické napětí je tvořeno rozdílem nábojů mezi dvěma místy.

Pokud k elektrickému zdroji připojíme vodič, začne procházet *elektrický proud*.

**Definice 2.4** Elektrický proud je uspořádaným pohybem elektrických nábojů ve vodiči.

Elektrický proud se značí  $I$  a jeho jednotkou je Amper  $[A]$ . Vyjadřuje jaké množství náboje projde vodičem za jednotku času, popsáno rovnicí

$$i(t) = q'(t),$$

kde  $i(t)$  je velikost proudu v čase  $t$  a  $q(t)$  vyjadřuje množství náboje v čase  $t$ . Při analýzách obvodů platí konvence, že jako tok proudu je brán pohyb kladných nosičů náboje (ve skutečnosti je tvořen elektrony). My se této do-

hody budeme ve třetí kapitole držet.

Pokud se proud v čase nemění a je tedy konstantní, mluvíme o *stejnoseměrném proudu*. V opačném případě mluvíme o *střídavém proudu*. Střídavým proudem se nejčastěji proud se sinusovým průběhem, který popíšeme vztahem

$$u(t) = U_A \sin(\omega t),$$

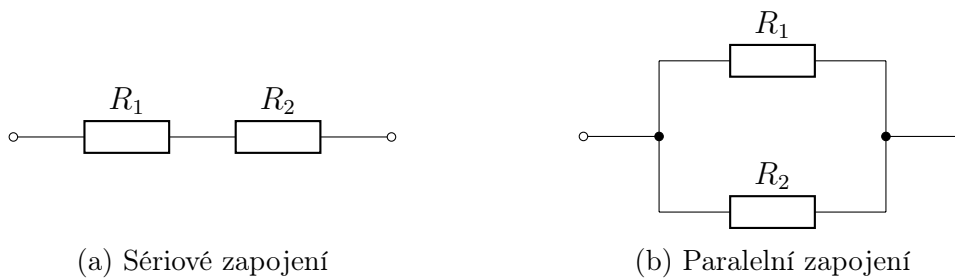
kde  $U_A$  je amplituda a  $\omega = 2\pi f$  je úhlová frekvence.

**Definice 2.5** Elektrický odpor je charakteristická vlastnost každého vodiče a zabraňuje průchodu elektrického proudu.

Elektrický odpor se značí  $R$  a má jednotku Ohm  $[\Omega]$ .

**Definice 2.6** Elektrický obvod je tvořen zdrojem a spotřebičem, který je ke zdroji připojen pomocí vodičů. Spotřebičem může být například žárovka, elektromagnet nebo motor.

Na Obrázku 1 je znázorněno co znamená, když rezistory (nebo jiné elektrotechnické součástky) zapojíme do série, případně paralelně. Navíc platí,



Obrázek 1: Způsoby zapojení rezistorů.

že při sériovém zapojení dvou a více součástek prochází všemi součástkami stejný proud. Při paralelním spojení je na všech součástkách stejný úbytek napětí.



## 2.2 Elektrotechnické zákony

Nyní si uvedeme tři nejdůležitější zákony, které budeme používat ve třetí kapitole.

**Definice 2.7** Ohmův zákon říká, že poměr úbytku napětí na vodiči a proudu protékajícího tímto vodičem je konstantní. Matematicky vyjádřeno

$$R = \frac{U}{I}. \quad (2.1)$$

V analýzách obvodů si často nevystačíme pouze se zákonem popsáním v definici 2.7. Nicméně společně s Kirchhoffovými dvěma zákony získáme dostatečnou sadu nástrojů pro analýzu různě složitých elektrických obvodů.

**Definice 2.8** (První Kirchhoffův zákon pro proudy v uzlu) Algebraický součet všech proudů v uzlu se rovná nule. Matematicky vyjádřeno

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0, \quad (2.2)$$

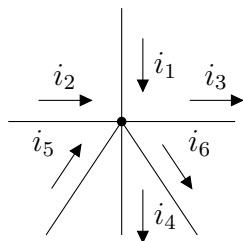
kde  $n$  je počet vodičů připojených k uzlu a  $i_k$  je  $k$ -tý proud vstupující (nebo vycházející) z uzlu.

Jinými slovy, součet proudů vtékajících do uzlu musí být roven součtu proudů vytékajících z uzlu. Pro uzel na Obrázku 2 platí rovnost

$$i_1 + i_2 + i_5 = i_3 + i_4 + i_6.$$

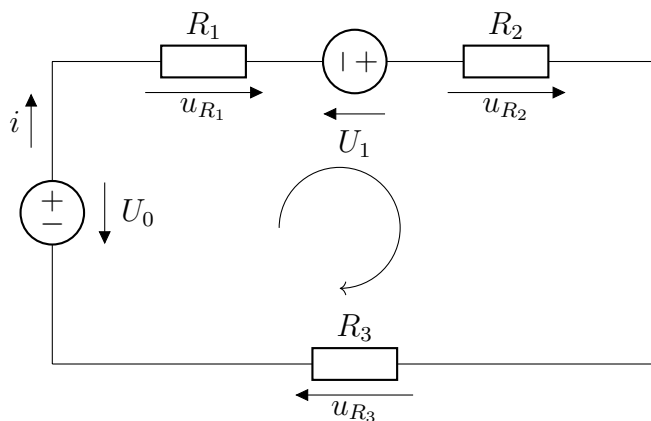
**Definice 2.9** (Druhý Kirchhoffův zákon pro napětí kolem uzavřené smyčky) Algebraický součet napětí kolem uzavřené smyčky je roven nule. Vyjádřeno rovnicí

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0, \quad (2.3)$$



Obrázek 2: Příklad použití Prvního Kirchhoffova zákona.

kde  $n$  je počet úbytků napětí ve smyčce a  $u_k$  je  $k$ -té napětí v smyčce.



Obrázek 3: Příklad použití Druhého Kirchhoffova zákona.

Pro ilustraci Definice 2.9 uvažujme obvod na Obrázku 3. Obvod obsahuje dva zdroje  $U_0, U_1$ , rezistory  $R_1, R_2, R_3$  tvoří spotřebiče. Úbytky napětí na těchto rezistorech mají směr proudu procházejícího obvodem. Při průchodu smyčkou ve směru hodinových ručiček platí rovnost

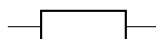
$$u_{R_1} - U_1 + u_{R_2} + u_{R_3} - U_0 = 0.$$

## 2.3 Základní elektronické součástky

V této části popíšeme základní elektronické součástky, které použijeme ve třetí kapitole.

### 2.3.1 Rezistory

Rezistory jsou elektronické součástky, jejichž charakteristickou vlastností je *elektrický odpor*. Ideální rezistory mají konstantní odpor, nicméně v reálném světě se rezistor průchodem proudu zahřívá, což zvýší jeho odpor. Jak moc se odpor rezistoru změní vlivem změny teploty, popisuje materiálová konstanta *Teplotní součinitel odporu*  $\alpha$ , která bývá pro různé materiály uvedena v tabulkách. Na Obrázku 4 je znázorněna schématická značka rezistoru.



Obrázek 4: Schématická značka rezistoru.

### 2.3.2 Cívky

Cívky jsou elektronické součástky, jejichž charakteristickou vlastností je vlastní indukčnost  $L$  [H]. Cívka je tvořena navinutým drátem (nejčastěji měděným, aby měla co nejmenší odpor) kolem svého jádra, které bývá nejčastěji ze železa nebo feritu. Cívka jádro obsahovat ani nemusí, v tomto případě mluvíme o cívkách se vzduchovým jádrem. V obvodech se střídavým proudem v cívce vzniká elektrické napětí, které je indukované proměnným magnetickým polem v okolí cívky. Rovnice

$$u(t) = L i'(t), \quad (2.4)$$

kde  $L$  je vlastní indukčnost cívky, popisuje vztah mezi napětím a proudem v cívce. Na Obrázku 5 je znázorněna schématická značka cívky se vzduchovým jádrem.



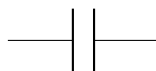
Obrázek 5: Schématická značka cívky se vzduchovým jádrem.

### 2.3.3 Kondenzátory

Kondenzátory jsou elektronické součástky, jejichž charakteristickou vlastností je kapacita  $C$  [F]. Kondenzátor se skládá ze dvou vodivých desek (elektrod), které jsou odděleny nějakou elektricky nevodivou látkou - izolantem. Nejčastěji se jedná o vzduch, papír nebo keramiku. Kondenzátor je schopen nakumulovat energii na svých elektrodách a tu poté vydávat do obvodu. Čím větší má kondenzátor kapacitu, tím více energie je schopen uchovat. Proud kondenzátorem prochází pouze při měnícím se napětí, platí vztah

$$i(t) = Cu'(t), \quad (2.5)$$

kde  $C$  je kapacita kondenzátoru. Obrázek 6 znázorňuje schématickou značku kondenzátoru.



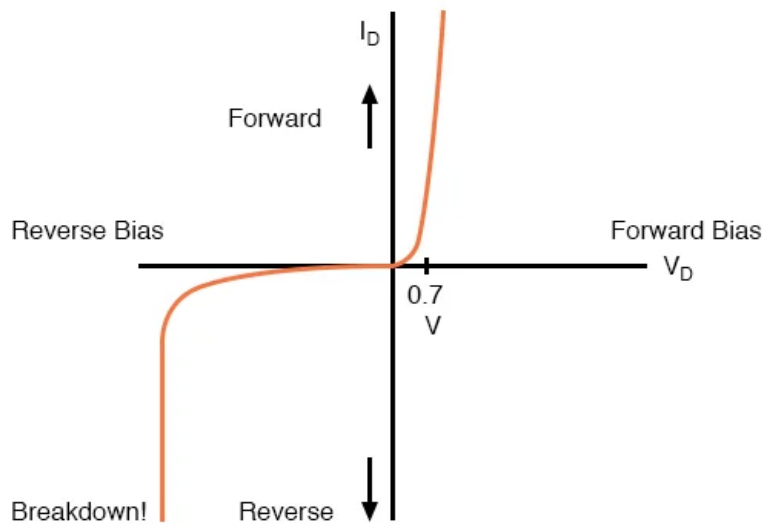
Obrázek 6: Schématická značka kondenzátoru.

### 2.3.4 Diody

Diody jsou polovodičové součástky, které mají dvě elektrody: anodu a katodu. Dioda se skládá z tzv. PN přechodu, který má tu vlastnost, že propouští elektrický proud pouze v jednom směru. Proto má dioda jiné voltampérové charakteristiky v propustném a závěrném směru. Na Obrázku 7 je znázorněno, jak taková voltampérová charakteristika diody může vypadat.

Voltampérové charakteristiky lze modelovat (s jistými omezeními) pomocí Shockleyho rovnice, viz [2], str. 456:

$$I_D = I_0 \left( e^{\frac{U_D}{nU_T}} - 1 \right), \quad (2.6)$$



Obrázek 7: Voltampérová charakteristika diody. Zdroj: [9].

kde

$I_D$  - proud procházející diodou;

$I_0$  - saturační proud v závěrném směru, obvykle od  $1 \mu\text{A}$  do  $1 \text{fA}$ ;

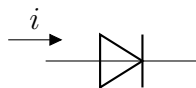
$U_D$  - úbytek napětí na diodě;

$n$  - emisní koeficient - konstanta určená konstrukcí diody;

$U_T$  - tepelné napětí, při teplotě PN přechodu  $25^\circ\text{C}$  :  $U_T \approx 25.7 \text{mV}$ .

Vztah (2.6) nepopisuje velký závěrný proud, který je znázorněn na Obrázku 7 ve třetím kvadrantu. Pokud je dioda v propustném směru a její procházející proud klesne na nulu (což můžeme zařídit např. aplikací napětí opačné polarity), diodou přesto bude chvíli procházet proud (ale už opačné polarity), než se uvede do závěrného směru. Shockleyho rovnice toto nebere v potaz a předpokládá okamžité „přepnutí“ mezi propustným a závěrným směrem. Obrázek 8 znázorňuje schématickou značku usměrňovací diody. Šipka znázor-

ňuje, kterým směrem musí procházet proud, aby byla dioda v propustném směru.

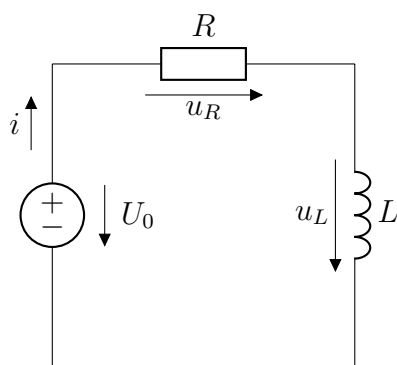


Obrázek 8: Schématická značka usměrňovací diody.

## 3 Modely

### 3.1 Sériový $RL$ obvod

Sériový  $RL$  obvod se skládá z rezistoru s odporem  $R$  a cívky s indukčností  $L$  zapojených v sérii. Nyní prozkoumáme chování tohoto obvodu připojeného ke konstantnímu napětí  $U_0$ , viz Obrázek 9.



Obrázek 9: Sériový  $RL$  obvod.

Předpokládejme, že jsme v čase  $t = 0$  připojili k obvodu zdroj napětí. Při připojení zdroje vznikají na rezistoru a cívce úbytky napětí  $u_R(t)$ , respektive  $u_L(t)$ , a obvodem prochází proud  $i(t)$ .

Z II. Kirchhoffova zákona plyne

$$U_0 = u_R(t) + u_L(t).$$

Za  $u_R(t)$  dosadíme z Ohmova zákona a pro napětí na cívce  $u_L(t)$  použijeme vztah (2.4):

$$U_0 = R \cdot i(t) + L \cdot i'(t),$$

což je lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Rovnici upravíme tak, aby

koeficient u členu s derivací byl roven jedné. Dostaneme

$$i'(t) + \frac{R}{L} \cdot i(t) = \frac{U_0}{L}. \quad (3.1)$$

K rovnici (3.1) uvažujme počáteční podmínku

$$i(0) = 0, \quad (3.2)$$

tzn. v čase  $t = 0$  obvodem neprochází proud. Potom řešení poč. úlohy (3.1), (3.2) je rovno

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad (3.3)$$

které jsme získali ze vztahu (1.6) dosazením  $x_0 = 0, t_0 = 0, a = \frac{R}{L}$  a  $q(s) = \frac{U_0}{L}$ . Vidíme, že platí  $i(0) = 0$ , tedy proud je nulový (což je ostatně naše počáteční podmínka). Protože (3.3) je spojitá rostoucí funkce a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{U_0}{R} \cdot (1 - 0) = \frac{U_0}{R} =: i_A,$$

bude se velikost proudu s přibývajícím časem zvětšovat, přičemž nepřesáhne hodnotu  $\frac{U_0}{R}$ .

Na příkladu si ukažme jak vypadá průběh  $i(t)$  a jak se mění při změnách hodnot  $R$  a  $L$ .

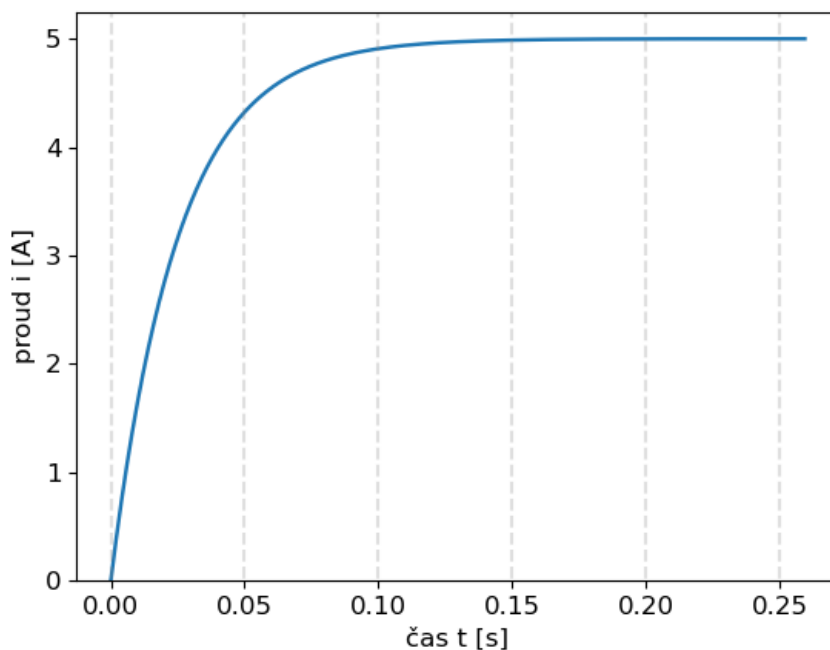
**Příklad 3.1** Uvažujme sériový  $RL$  obvod, ve kterém odpor rezistoru  $R$  je  $2 \Omega$  a indukčnost cívky  $L$  je  $50 \text{ mH}$ . Vše je připojeno ke zdroji konstantního napětí  $U_0 = 10 \text{ V}$ . Vykreslete průběh proudu obvodem  $i(t)$  a proveďte diskuzi k hodnotám  $R$  a  $L$ .

*Řešení.* Známé hodnoty dosadíme do (3.3) a dostáváme

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{10}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{0.05}t}\right) = 5 \left(1 - e^{-40t}\right), \quad (3.4)$$



viz Obrázek 10.



Obrázek 10: Průběh proudu v sériovém  $RL$  obvodu.

Nyní si zavedeme proměnnou  $\tau = \frac{L}{R}$ , které budeme říkat *časová konstanta*. V našem příkladě nám *časová konstanta* říká, za jakou dobu dosáhne proud své největší hodnoty, pokud je jeho rychlost změny konstantní (viz [3], str. 207). V praxi to znamená, že za  $\tau$  sekund sledovaná veličina nabyde přibližně 63 % svého maxima, což si ilustrujeme na našem příkladě.

Spočtěme jak vypadá rovnice tečny ke grafu funkce (3.4) v čase  $t = 0$ , který označíme  $t_0$ . Nejdříve vypočteme derivaci (3.4)

$$i'(t) = [5(1 - e^{-40t})]' = 5(-e^{-40t} \cdot (-40)) = 200e^{-40t},$$

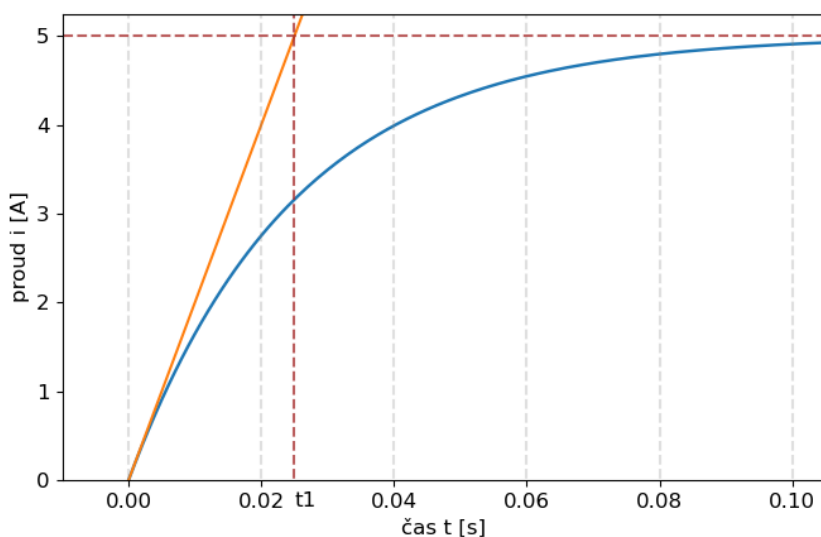
potom tečna sestavená v bodě  $t_0$  se směrnicovým předpisem

$$y(t) = k \cdot (t - t_0) + q, \quad \text{kde } k, q \in \mathbb{R},$$

bude mít směrnici  $k$  rovnu  $i'(0) = 200$ . Koeficient  $q$  bude nulový, protože požadujeme  $y(0) = 0$ . Rovnice tečny v bodě  $t_0 = 0$  ke grafu funkce (3.4) vypadá tedy následovně

$$y(t) = 200t.$$

Na Obrázku 11 oranžová úsečka znázorňuje vypočtenou tečnu, která v



Obrázek 11: Grafická interpretace časové konstanty v sériovém  $RL$  obvodu.

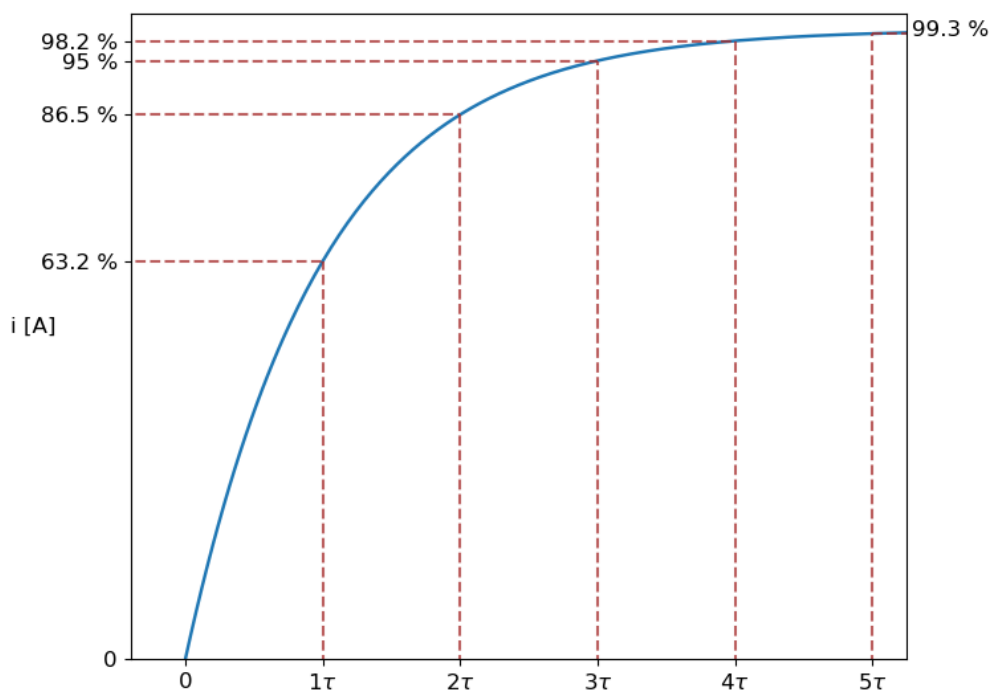
čase  $t_1 = \tau = \frac{0.05}{2} = 0.025$  s dosahuje hodnoty  $i_A = \frac{U_0}{R} = \frac{10}{2} = 5$ , přitom  $i(t_1)$  je rovno

$$i(t_1) = 5 (1 - e^{-40 \cdot 0.025}) = 5 (1 - e^{-1}) \doteq 3.16.$$

Podíl  $\frac{i(t_1)}{i_A}$  nám potom dává

$$\frac{5 (1 - e^{-1})}{5} \doteq 0.632.$$

Pokud vodorovnou osu na Obrázcích 10 a 11 přepíšeme pomocí proměnné  $\tau$ , dostaneme Obrázek 12.



Obrázek 12: Hodnoty časové konstanty v sériovém  $RL$  obvodu.

Například vidíme, že v čase  $5\tau = 0.125\text{ s}$ , velikost proudu dosáhla 99.3% hodnoty  $i_A = 5\text{ A}$ , což je přibližně 4.97 A. Od tohoto času je relativní chyba od nového ustáleného stavu menší než 0.7%, což považujeme za ukončení přechodného děje. Rozhodnutí o ukončení přechodového jevu se řídí dle požadavků kladených na velikost relativní chyby.

Zatím jsme se zabývali pouze průběhem proudu, který teče celým obvodem. Funkce, která jej popisuje má tvar (3.4). Jejím vynásobením hodnotou  $R$ , získáme průběh napětí na rezistoru, dostaneme

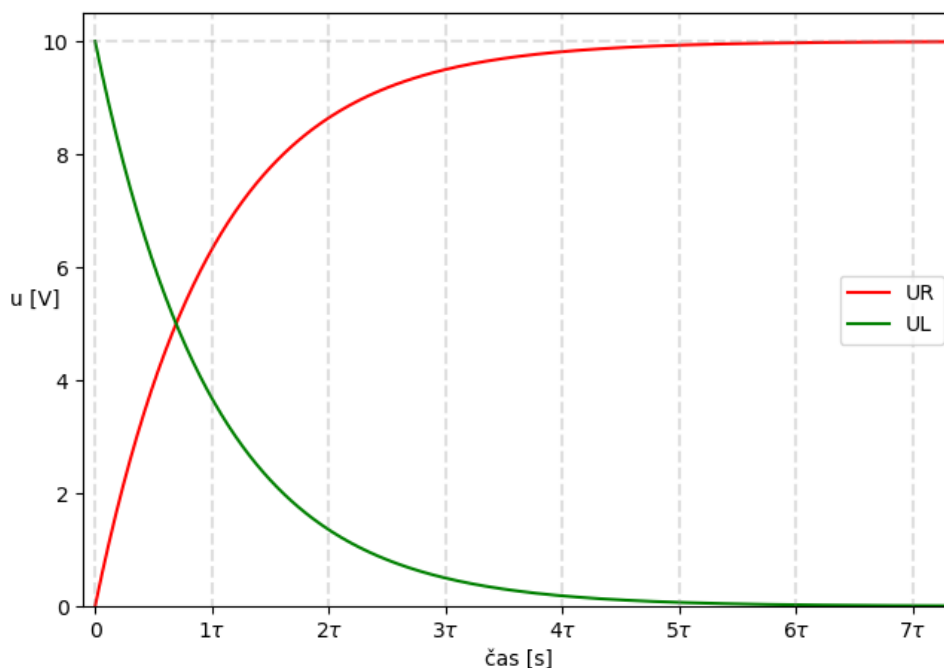
$$u_R(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = 10 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (3.5)$$

kde jsme za  $U_0$  dosadili 10 V a použili vztah  $\tau = \frac{L}{R}$ . Pomocí rovnosti  $U_0 =$

$u_R(t) + u_L(t)$  a výše uvedeného vztahu získáme průběh napětí na cívce  $u_L(t)$ , které má tvar

$$u_L(t) = U_0 e^{-\frac{R}{L}t} = 10 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3.6)$$

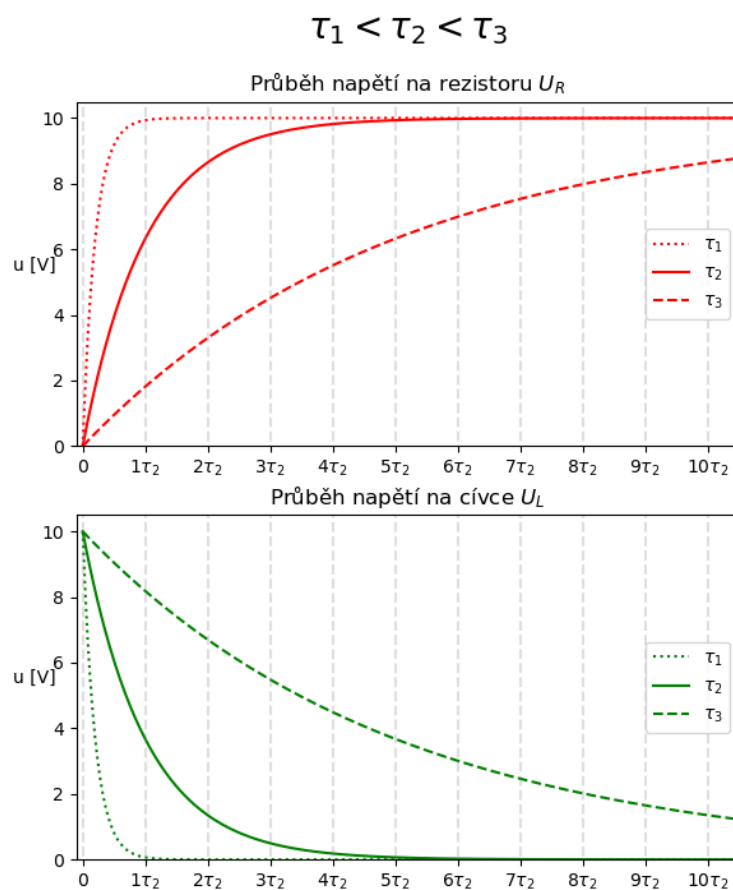
kde jsme opět dosadili za  $U_0$  a  $\frac{L}{R}$ . Funkce (3.5) a (3.6) si vykreslíme, viz Obrázek 13.



Obrázek 13: Průběh napětí  $u_R(t)$  a  $u_L(t)$  v sériovém  $RL$  obvodu.

Jak se změní průběhy napětí  $u_R(t)$  a  $u_L(t)$  při změnách hodnot  $R$  a  $L$ ? Při fixní hodnotě odporu  $R$  a rostoucí indukčnost cívky  $L$  se bude *časová konstanta*  $\tau = \frac{L}{R}$  zvětšovat, tedy napětí  $u_R(t)$  (respektive  $u_L(t)$ ) nabyde 63.2% (respektive 36.8%) své nové ustálené hodnoty mnohem později. Podobně pro fixní hodnotu indukčnosti  $L$  a klesající hodnotu  $R$ . Naopak, pokud fixujeme  $L$  a zvyšujeme hodnotu odporu  $R$ , bude hodnota  $\tau$  příliš malá a přechodný děj rychle skončí. Na Obrázku 14 jsou znázorněny tři charakteristiky průběhů napětí  $u_R(t)$  a  $u_L(t)$  pro různé hodnoty  $\tau$ . Konkrétně  $\tau_1 = \frac{0.05}{10} = 5$  ms,

$\tau_2 = \frac{0.05}{2} = 25 \text{ ms}$  a konečně  $\tau_3 = \frac{0.25}{2} = 125 \text{ ms}$ .

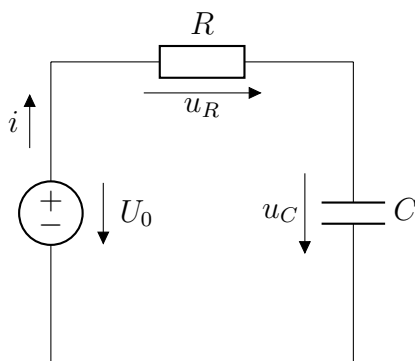


Obrázek 14: Průběh napětí  $u_R(t)$  a  $u_L(t)$  pro různé hodnoty  $\tau$  v sériovém  $RL$  obvodu.

○

### 3.2 Sériový $RC$ obvod

Podobně jako sériový  $RL$  obvod se i sériový  $RC$  obvod skládá z pasivních elektrotechnických součástí zapojených do série. Namísto cívky s indukčností  $L$  se zde nachází kondenzátor s kapacitou  $C$  společně s rezistorem s odporem  $R$ , které opět připojíme ke zdroji konstantního napětí  $U_0$ , viz Obrázek 15.



Obrázek 15: Sériový  $RC$  obvod.

Opět vyjdeme z II. Kirchhoffova zákona, získáme

$$U_0 = u_R(t) + u_C(t),$$

za  $u_R(t)$  dosadíme z Ohmova zákona, dostaneme

$$U_0 = R \cdot i(t) + u_C(t),$$

Proud procházející obvodem popíšeme vztahem (2.5), který dosadíme do předchozí rovnice a dostaneme

$$U_0 = R \cdot C \cdot u'_C(t) + u_C(t),$$

což je opět lineární dif. rovnice 1. řádu, kterou přepíšeme do tvaru

$$u'_C(t) + \frac{1}{RC}u_C(t) = \frac{U_0}{RC}. \quad (3.7)$$

Nyní uvažujme dvě situace.

(i) Kondenzátor  $C$  je vybitý a v čase  $t = 0$  připojíme zdroj napětí, tzn.  $u_C(0) = 0$  a  $U_0 > 0$ .

(ii) Kondenzátor je nabit na napětí zdroje  $U_0$ . Zdroj je v čase  $t = 0$  odpojen, tzn.  $u_C(0) = U_0$  a pro  $t > 0$  je  $U_0 = 0$ .

**ad (i)**

Dosazením  $x_0 = 0, t_0 = 0, a = \frac{1}{RC}, q(s) = \frac{U_0}{RC}$  do (1.6) a upravením získáme rovnici

$$u_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad (3.8)$$

která je řešením rovnice (3.7) s poč. podmínkou  $u_C(0) = 0$ . V  $RC$  obvodech je *časová konstanta*  $\tau$  dána vztahem  $\tau = RC$  a říká nám totéž co u  $RL$  obvodů.

**Příklad 3.2** (viz [3], str. 205, Exercise 62/1) Vybitý kondenzátor  $C$  s kapacitou  $0.2 \mu\text{F}$  je zapojen do série s rezistorem  $R$  s odporem  $100 \text{ k}\Omega$ . K obvodu připojíme zdroj napětí  $U_0 = 100 \text{ V}$ . Vykreslete průběh napětí  $u_C(t)$  na kondenzátoru  $C$ . Jaká je hodnota napětí  $u_C(t)$  10 ms po připojení zdroje? Za jak dlouho se kondenzátor nabije na 75 % své ustálené hodnoty napětí?

*Řešení.* Známé hodnoty dosadíme do (3.8), získáme

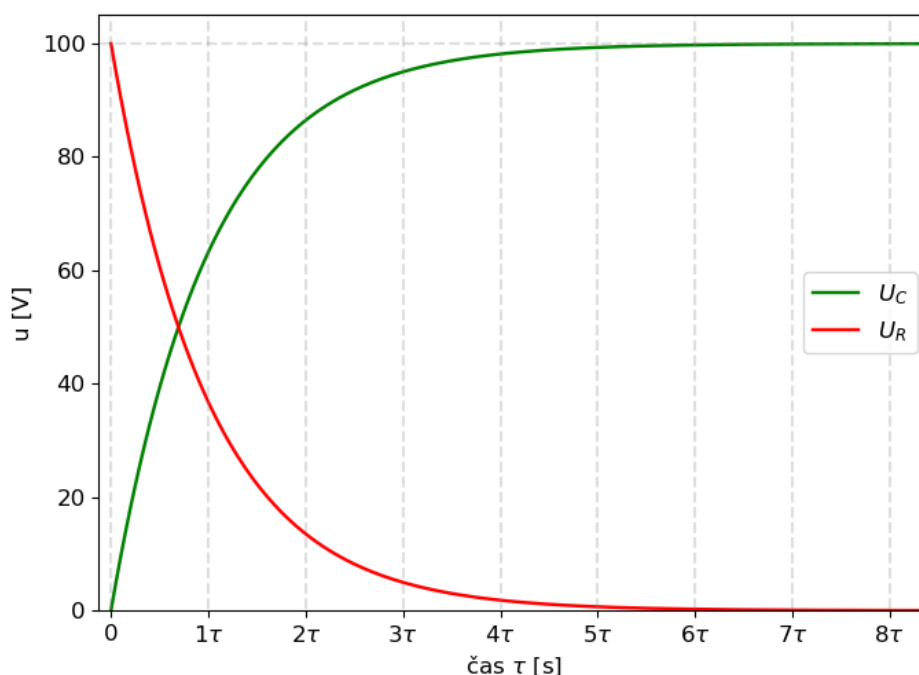
$$u_C(t) = 100 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

kde  $\tau = RC = 100 \cdot 0.2 = 20 \text{ ms} = 0.02 \text{ s}$ .

Pro názornost si určíme i úbytek napětí na rezistoru. Protože platí  $U_0 = u_R(t) + u_C(t)$ , dostáváme ihned

$$u_R(t) = 100 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.9)$$

Průběhy napětí  $u_C(t)$  a  $u_R(t)$  jsou znázorněny na Obrázku 16.



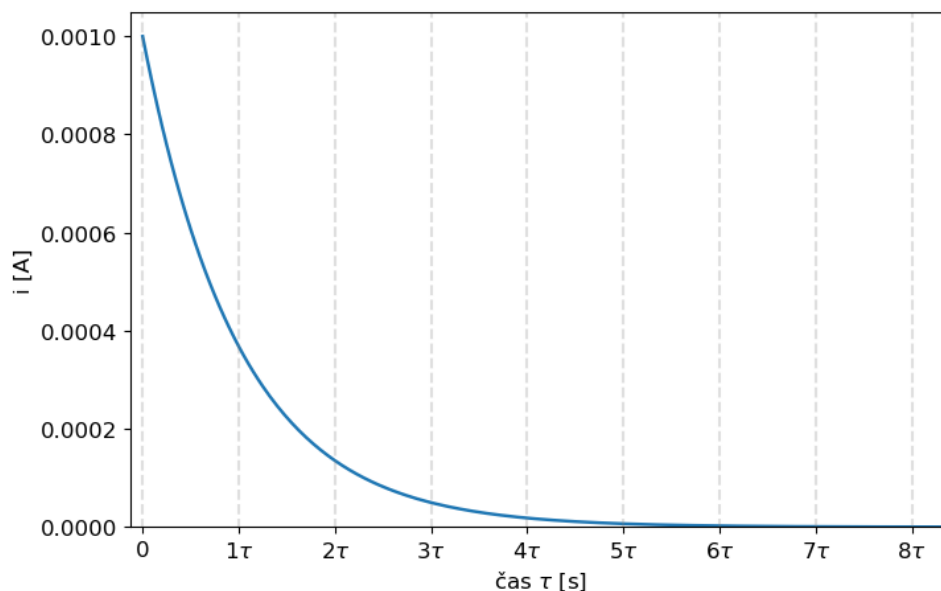
Obrázek 16: Průběhy napětí  $u_C(t)$  a  $u_R(t)$  v sériovém  $RC$  obvodu.

Můžeme si všimnout jisté (anti)symetrie s  $RL$  obvodem při fyzikálně stejné počáteční úloze. (Dříve jsme uvažovali cívku bez energie a připojení zdroje k obvodu v čase  $t = 0$ ). Zatímco napětí na cívce  $u_L(t)$  klesá s rostoucím časem, napětí na kondenzátoru  $u_C(t)$  roste, podobně pro rezistor (srovnej průběhy napětí na Obrázcích 13 a 16).

To je dáno hlavním rozdílem mezi cívkou a kondenzátorem, a to tím, že cívka působí proti změnám proudu, zatímco kondenzátor působí proti změnám napětí. Proud obvodem (který získáme vydělením rovnice (3.9) hodnotou  $R$ )



by měl tedy klesat, viz Obrázek 17.



Obrázek 17: Průběh proudu v sériovém  $RC$  obvodu.

Nyní určíme velikost napětí  $u_C(t)$  v čase  $t = 10$  ms. Stačí jen dosadit do vzorečku pro  $u_C(t)$ , dostáváme

$$u_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 100 \left(1 - e^{-\frac{10 \times 10^{-3}}{0.02}}\right) \doteq 39.35 \text{ V.}$$

Kdy bude kondenzátor nabit na 75% napětí zdroje? Hledáme čas  $t_1$  pro který platí následující rovnost

$$75 = 100 \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right),$$

která je ekvivalentní s rovností

$$-\frac{t_1}{\tau} = \ln(0.25),$$

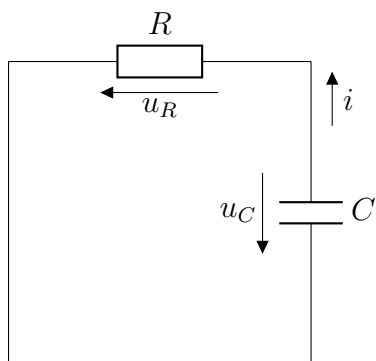
čas  $t_1$  je tedy přibližně roven  $t_1 = -0.02 \cdot \ln(0.25) \doteq 27.8 \text{ ms} \doteq 1.4\tau$ .

○

Nyní se podíváme na situaci vybíjení kondenzátoru.

**ad (ii)**

Při odpojení zdroje vypadá schéma obvodu následovně, viz Obrázek 18.



Obrázek 18: Sériový  $RC$  obvod bez zdroje napětí  $U_0$ .

Všimněme si opačných polarit napětí  $u_R(t)$  a  $u_C(t)$ . Pokud dosadíme do (1.6)  $x_0 = U_0, t_0 = 0, q(s) = 0, a = \frac{1}{\tau}$ , dostaneme

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

kde  $\tau = RC$ . Druhý Kirchhoffův zákon pro obvod na obrázku 18 říká, že platí rovnost  $u_R = -u_C$ . Dokážeme tedy ihned určit vztahy pro napětí na rezistoru  $u_R(t)$  a proud tekoucí obvodem.

$$u_R(t) = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{a} \quad i(t) = \frac{u_R(t)}{R} = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3.10)$$

kde  $\tau = RC$  a  $I_0 = \frac{U_0}{R}$ .

**Příklad 3.3** (viz [3], str. 205, Exercise 62/4) Kapacitor je zapojen do série s voltmetrem a baterií. Vnitřní odpor voltmetru činí  $750 \text{ k}\Omega$ . Jakmile se údaj ukázaný na voltmetru ustálí, je z obvodu odpojena baterie. Určete kapacitu kondenzátoru, pokud trvá  $17 \text{ s}$ , než údaj zobrazený na voltmetru klesne na dvě třetiny své původní hodnoty.

*Řešení.* Voltmetr je zařízení, které měří velikost napětí na nějakém spotřebiči. Nejčastěji se zapojuje paralelně k měřenému spotřebiči. Musí mít proto velký vnitřní odpor (ideálně nekonečný), aby ním procházel co nejmenší proud. Protože tím na voltmetru vzniká úbytek napětí a zmenšuje přesnost měření. Tedy, čím menší vnitřní odpor, tím větší je chyba naměřeného elektrického napětí.

V našem případě je voltmetr zcela netradičně zapojen v sérii s kondenzátorem. Chová se tedy jako běžný rezistor s odporem, který označíme  $R_i$ . Zpočátku obvodem teče proud  $I_0 = \frac{U_B}{R_i} = \frac{U_B}{750 \times 10^3}$ , kde  $U_B$  je napětí baterie. Tento proud bude díky voltmetru zpravidla malý až postupně klesne na nulu. Mezitím se kondenzátor nabije na napětí  $U_B$ , které bude navíc zobrazeno na voltmetru. Po odpojení baterie se začne kondenzátor vybíjet podle vztahu  $u_C(t) = U_B e^{-\frac{t}{\tau}}$ , kde  $\tau = R_i C$ . Ze zadání víme, že má platit

$$\frac{2}{3}U_B = u_C(17) = U_B e^{-\frac{17}{750 \times 10^3 \cdot C}},$$

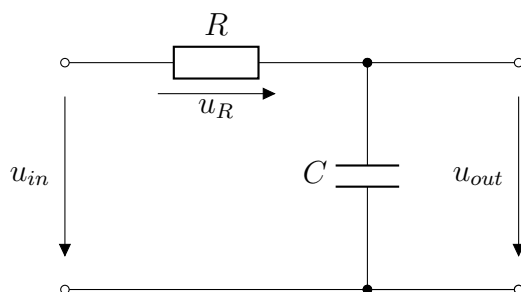
napětí  $U_B$  se nám zkrátí. Na rovnost aplikujeme funkci  $\ln$ , dostaneme

$$\ln \frac{2}{3} = -\frac{17}{750 \times 10^3 \cdot C}.$$

Kapacita kondenzátoru je potom přibližně rovna  $C \doteq 55.9 \mu\text{F}$ . ○

### 3.3 Dolní propust

Dolní propust (Low-pass filter) je frekvenční filtr, který propouští signál o nižších frekvencích. Skládá se z rezistoru a kondenzátoru. Využijeme tedy poznatky z předchozích úvah, kde tentokrát budeme uvažovat časově proměnný zdroj signálu. Mějme tedy rezistor  $R$  a kondenzátor  $C$  zapojený do série. Napětí  $u_{in}(t)$  znázorňuje časově proměnný vstupní signál, napětí  $u_{out}(t)$  potom signál výstupní, viz Obrázek 19.



Obrázek 19: Dolní propust.

Diferenciální rovnice popisující tento obvod je rovna

$$u'_{out}(t) + \frac{1}{RC}u_{out}(t) = \frac{u_{in}(t)}{RC}, \quad (3.11)$$

potom pro poč. podmínku  $u_{out}(t_0) = u_{out}^0$  je řešení rovnice (3.11) ve tvaru

$$u_{out}(t) = u_{out}^0 e^{\frac{1}{RC}(t_0-t)} + e^{-\frac{1}{RC}t} \int_{t_0}^t \frac{u_{in}(s)}{RC} e^{\frac{1}{RC}s} ds. \quad (3.12)$$

Uvažujme, že zdrojový signál je ve tvaru

$$u_{in}(t) = U_A \sin(\omega t), \quad (3.13)$$

tedy sinusoida s amplitudou  $U_A$  a úhlovou frekvencí  $\omega$ . Potom lze pomocí dvojnásobného použití metody integrace *per partes* odvodit následující vzo-

rec:

$$\int e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma) dt = \frac{\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} (\sin(\beta t + \gamma) - \frac{\beta}{\alpha} \cos(\beta t + \gamma))}{1 + (\frac{\beta}{\alpha})^2} + K, \quad (3.14)$$

kde  $K \in \mathbb{R}$ , který nám poslouží pro výpočet integrálu v rovnosti (3.12). Pokud je tedy napětí  $u_{in}(t)$  v (3.12) určeno rovností (3.13), můžeme integrál v (3.12) vypočítat pomocí vzorce (3.14), kde  $\alpha = \frac{1}{RC}$ ,  $\beta = \omega$ ,  $\gamma = 0$ , dostaneme

$$u_{out}(t) = u_{out}^0 e^{\frac{1}{RC}(t_0-t)} + e^{-\frac{1}{RC}t} \frac{U_A}{RC} \cdot \frac{RC e^{\frac{1}{RC}t} [\sin(\omega t) - RC \omega \cos(\omega t)]}{1 + (RC\omega)^2}.$$

Upravením získáme vztah pro výstupní napětí  $u_{out}(t)$

$$u_{out}(t) = u_{out}^0 e^{\frac{1}{RC}(t_0-t)} + \frac{U_A [\sin(\omega t) - RC \omega \cos(\omega t)]}{1 + (RC\omega)^2}. \quad (3.15)$$

Tento vztah se dá ještě upravit na pro nás výhodnější tvar pomocí následujícího lemmatu.

**Lemma 3.1** (Harmonický součet) *Nechť  $A, B \in \mathbb{R}$ . Pak pro každé  $t \in \mathbb{R}$  platí následující rovnost:*

$$A \sin t + B \cos t = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(t + \phi),$$

kde  $\phi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$  a  $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Speciálně

$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad \text{pro} \quad A = 0 \wedge B > 0; \quad \phi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{pro} \quad A = 0 \wedge B < 0.$$

*Důkaz.*  $\forall A, B \in \mathbb{R}, A^2 + B^2 \neq 0$  platí:

$$A \sin t + B \cos t = \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos t \right). \quad (3.16)$$

Jelikož

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1,$$

leží bod  $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$  na jednotkové kružnici a tedy existuje  $\phi \in \mathbb{R}$  takové, že platí

$$\cos \phi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \wedge \quad \sin \phi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad (3.17)$$

Z (3.16) s využitím (3.17) dále plyne

$$\sqrt{A^2+B^2} (\cos \phi \sin t + \sin \phi \cos t) = \sqrt{A^2+B^2} \sin(t+\phi).$$

Přitom,

1. je-li  $A = 0$ , pak

(a) je-li  $B > 0$ , pak  $\cos \phi = 0 \wedge \sin \phi = 1$ , tedy  $\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

(b) je-li  $B < 0$ , pak  $\cos \phi = 0 \wedge \sin \phi = -1$ , tedy  $\phi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

2. je-li  $A \neq 0$ , pak

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}} = \frac{B}{A},$$

tedy

$$\phi = \arctan \frac{B}{A} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□

Výstupní napětí  $u_{out}(t)$  v (3.15) přepíšeme pomocí výše uvedeného lemmatu na

$$u_{out}(t) = \frac{U_A \sin(\omega t + \phi)}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} + u_{out}^0 e^{\frac{1}{RC}(t_0-t)}, \quad (3.18)$$

kde  $\phi = \arctan(-RC\omega)$ . Všimněme si, že pro nulovou počáteční podmínku je výstupní napětí  $u_{out}(t)$  jen fázově posunutý vstupní signál  $u_{in}(t)$  s faktorem  $\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$ . U frekvenčních filtrů nás často zajímá podíl amplitud výstupního a vstupního signálu, tzv. *přenos obvodu*  $G$ , který úzce souvisí s tzv. *přenosovou funkcí*  $H$  o které se čtenář může dozvědět více v [4], str. 614. Přenos obvodu je v našem případě roven

$$G = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}, \quad (3.19)$$

kde jsme za  $U_{out}$ , resp.  $U_{in}$  dosadili amplitudy z (3.18), resp. (3.13). Tento podíl amplitud vyšetřujeme v závislosti na  $\omega$ . Při pohledu na rovnici (3.19) je zřejmé, že pro  $\omega \rightarrow 0$  jde podíl k jedničce, tedy obě napětí mají skoro stejné amplitudy. Pro  $\omega \rightarrow \infty$  jde amplituda výstupního napětí k nule.

Přenos obvodu se častěji počítá v decibelech následujícím způsobem (viz [4], str. 617)

$$G_{dB} = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}},$$

kde  $P_{out}$  je amplituda výkonu na výstupu obvodu a  $P_{in}$  je amplituda vstupního výkonu (dodávaného). My v našich úvahách ale počítáme s napětím. Tedy vzorec upravíme na následující tvar

$$G_{dB} = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}} = 10 \log \frac{U_{out}I}{U_{in}I} = 10 \log \frac{\frac{U_{out}^2}{R}}{\frac{U_{in}^2}{R}} = 20 \log \frac{U_{out}}{U_{in}}.$$

Frekvenci, při které výkonový přenos klesne na polovinu své maximální hodnoty, říkáme *mezní frekvence* (*cutoff frequency*), značíme  $f_c$  (viz [4], str. 639)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>To znamená, že pro *mezní frekvenci*  $f_c$  platí:  $\frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . ( $P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow$  pokud  $n$ -krát zmenšíme výkon, napětí se zmenší  $\sqrt{n}$ -krát.)

V řeči decibelů to znamená pokles přibližně o 3 dB, protože

$$G_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq -3.$$

Jak lze určit *mezní frekvenci*? Pohledem na rovnici (3.19) vidíme, že pro *mezní frekvenci* musí platit  $RC2\pi f_c = 1$ , tedy

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi\tau}. \quad (3.20)$$

**Příklad 3.4** (viz [3], str. 174, Exercise 52/3) Mějme pasivní  $RC$  filtr jako na Obrázku 19. Nechť je obvod bez energie a vstupní signál je popsán vztahem  $u_{in}(t) = 250 \sin 800t$ . Velikost rezistoru je  $R = 30 \Omega$  a velikost kondenzátoru je  $C = 50 \mu\text{F}$ . Určete výstupní napětí  $u_{out}(t)$ , *mezní frekvenci*  $f_c$  a fázový posun  $\phi$  mezi vstupním a výstupním napětím. Nakreslete příslušné charakteristiky. *Řešení.* Napětí  $u_{out}(t)$  určíme jednoduchým dosazením příslušných hodnot do vztahu (3.18), získáme

$$u_{out}(t) = \frac{250 \sin(800t + \phi)}{\sqrt{1 + 1.2^2}} = \frac{1250}{\sqrt{61}} \sin(800t + \phi).$$

Jak velký je fázový posun  $\phi$ ? Platí

$$\phi = \arctan(-RC\omega) = \arctan(-1.2) \doteq -0.88 \text{ rad} \doteq -50^\circ.$$

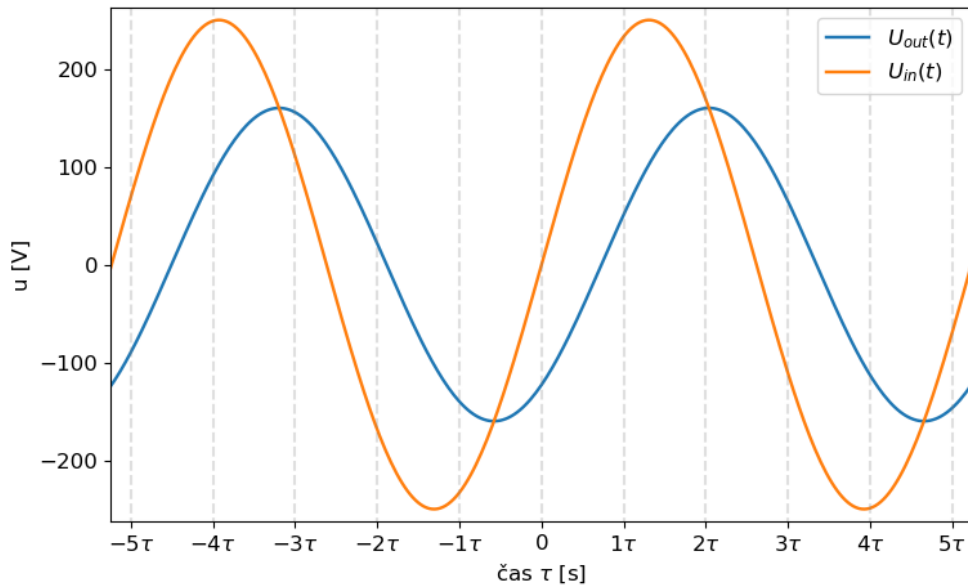
Ještě určíme *mezní frekvenci*  $f_c$ , dostáváme

$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi \cdot 1.5 \cdot 10^{-3}} \doteq 106 \text{ Hz}.$$

Vykresleme si časový průběh napětí  $u_{out}(t)$ , viz Obrázek 20.

Ze vztahu (3.18) je zřejmé, že s rostoucí frekvencí klesá amplituda výstupního napětí  $u_{out}(t)$  a roste i velikost fázového posunu  $\phi$ . Při velkých



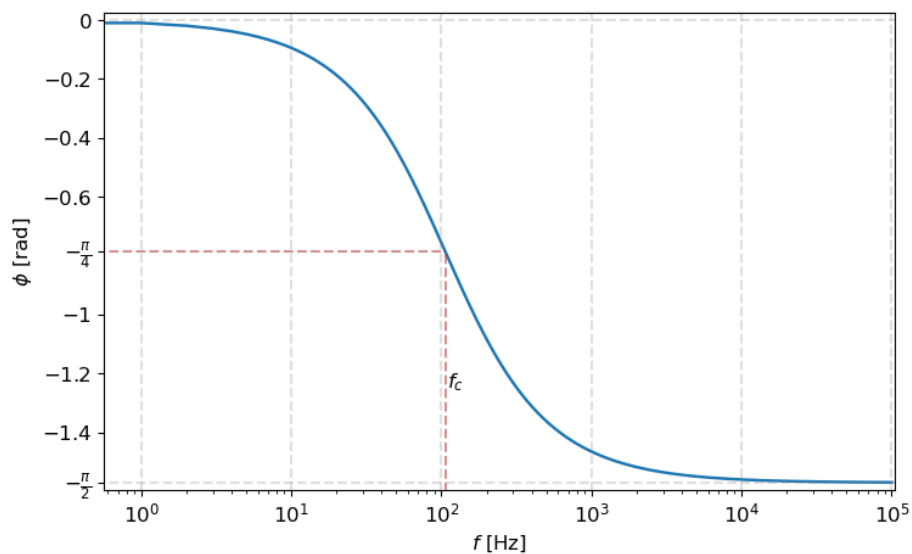


Obrázek 20: Časové průběhy napětí  $U_{out}$  a  $U_{in}$  Low-pass filtru.

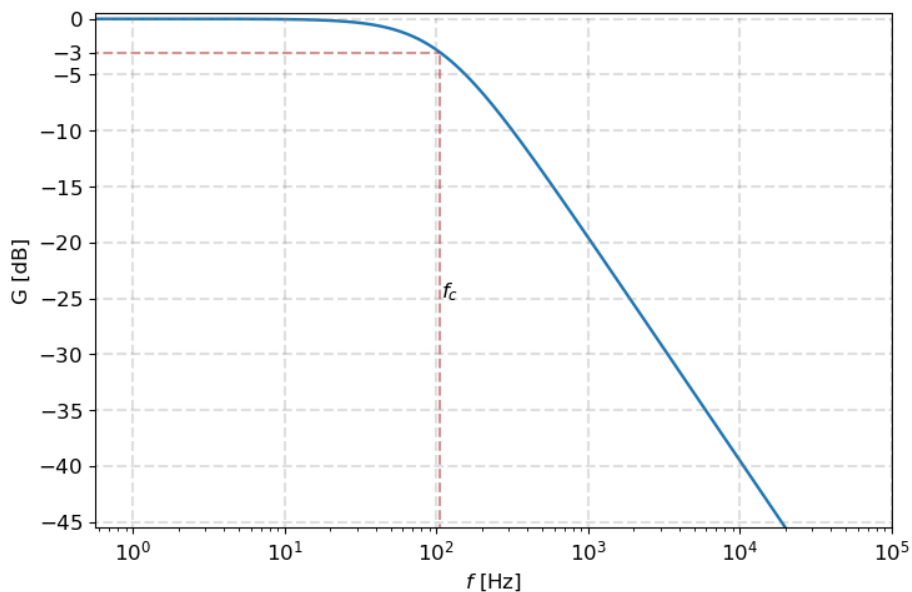
hodnotách  $f$  je výstupní signál zpožděn oproti vstupnímu limitně o  $\frac{\pi}{2}$  rad, viz Obr. 21. Podobně to platí i pro velké hodnoty  $R$  a  $C$ . Na Obr. 21 mimo jiné vidíme, že pro *mezní frekvenci*  $f_c$  je fázový posun přesně  $-\frac{\pi}{4}$  rad, což lze ověřit výpočtem  $\phi = \arctan(-RC 2\pi f_c) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ .

Závislost zesílení obvodu na frekvenci popisuje modulová frekvenční charakteristika, znázorněna, společně s mezní frekvencí  $f_c$ , na Obrázku 22.  $RC$  obvod z našeho příkladu tedy propouští signál o frekvencích v rozmezí  $(0, f_c \doteq 106)Hz$ . Vstupní signál s frekvencí větší než je  $f_c$  už obvod velmi tlumí. Přitom z Obrázku 22 lze odhadnout, že zesílení obvodu, v pásmu frekvencích větších než  $f_c$ , klesá stejně rychle, konkrétně 20 dB/dekádu<sup>2</sup>. Skutečně, pro-

<sup>2</sup>Dekáda je interval mezi dvěma frekvencemi s poměrem 10; např. mezi 10 a 100 Hz.



Obrázek 21: Fázová frekvenční charakteristika Low-pass filtru.

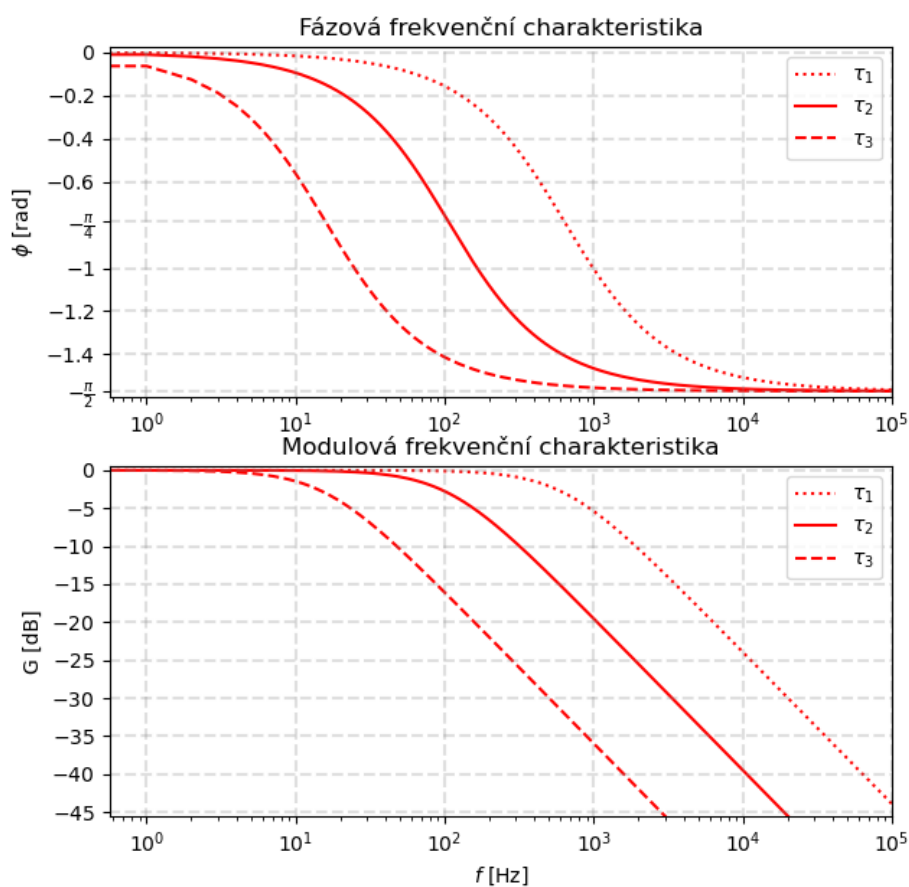


Obrázek 22: Modulová frekvenční charakteristika Low-pass filtru.

tože pro  $\tau\omega \gg 1$  platí

$$\begin{aligned} \Delta G_{dB/dek} &= 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} - 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau 10\omega)^2}} = 20 \log \frac{\sqrt{1 + (\tau 10\omega)^2}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \\ &\approx 20 \log \frac{\sqrt{(\tau 10\omega)^2}}{\sqrt{(\tau\omega)^2}} = 20 \log 10 = 20. \end{aligned}$$

Na závěr si ještě ukážeme jak se mění frekvenční charakteristiky při změnách hodnot  $\tau$ , tedy změnách hodnot  $R$  a  $C$ . Na Obrázku 23 jsou znázorněny tři různé frekvenční charakteristiky pro hodnoty  $\tau_1, \tau_2$  a  $\tau_3$ , kde  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ . Na modulové frek. charakteristice si lze všimnout, že pro malé hodnoty  $\tau$  je pásmo propustnosti<sup>3</sup> širší, fázový posun  $\phi$  mezi výstupním a vstupním signálem se mění mnohem pozvolněji. Pro velké  $\tau$  je šířka pásma propustnosti malá a velikost fázového posunu roste rychleji.



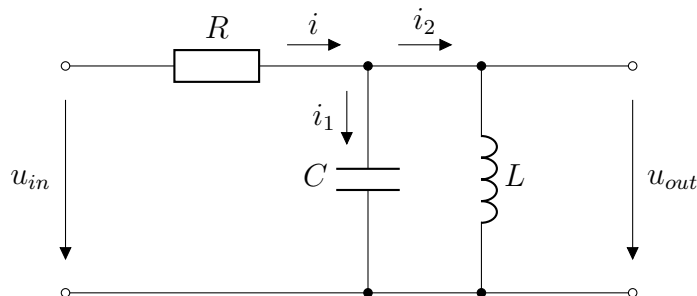
Obrázek 23: Frekvenční charakteristiky Low-pass filtru pro různé hodnoty  $\tau$ , kde  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ .

○

<sup>3</sup>Pásmem propustnosti rozumíme rozdíl mezi nejvyšší a nejnižší frekvencí přenášeného signálu. V našem případě to jsou frekvence pro které platí  $f \leq f_c$ .

### 3.4 Pásmová propust

Pásmová propust (Band-pass filter) je frekvenční filtr, který propouští signál v určitém rozmezí frekvencí. My ho budeme implementovat pomocí sériově-paralelního zapojení rezistoru, kondenzátoru a cívky. Mějme tedy rezistor  $R$ , který je zapojen do série s paralelním zapojením cívky  $L$  a kondenzátoru  $C$ . Napětí  $u_{in}(t)$  je časově proměnný vstupní signál, napětí  $u_{out}(t)$  potom signál výstupní, viz Obrázek 24.



Obrázek 24: Pásmová propust.

K sestavení diferenciální rovnice pro obvod na Obr. 24 potřebujeme určit vztah mezi výstupním napětím  $u_{out}(t)$  a vstupním napětím  $u_{in}(t)$ .

Z I. Kirchhoffova zákona pro proudy  $i, i_1, i_2$  na Obr. 24 platí vztah  $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ , pro jehož derivaci dále platí

$$i'(t) = i_1'(t) + i_2'(t) \Leftrightarrow \frac{u_R'(t)}{R} = C u_C''(t) + \frac{1}{L} u_L(t), \quad (3.21)$$

kde jsme za proud  $i$  dosadili z Ohmova zákona  $i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$ , pro proudy  $i_1$ , resp.  $i_2$  procházející kondenzátorem, resp. cívku jsme použili vztahy z 2. kapitoly  $i_1(t) = C u_C'(t)$  a  $u_L(t) = L i_2'(t)$ . Z druhého Kirchhoffova zákona platí

$$u_{in}(t) = u_R(t) + u_C(t), \quad (3.22)$$

přičemž, když si uvědomíme, že platí rovnosti  $u_C(t) = u_L(t) = u_{out}(t)$ , ( $C$  a

$L$  jsou zapojeny paralelně), můžeme vyjádřením  $u_R(t)$  z (3.22) upravit vztah (3.21) na

$$\frac{u'_{in}(t) - u'_{out}(t)}{R} = C u''_{out}(t) + \frac{1}{L} u_{out}(t),$$

vynásobením  $\frac{1}{C}$  rovnice výše a uspořádáním členů dostaneme diferenciální rovnici, která modeluje průběh výstupního napětí  $u_{out}(t)$  obvodu na Obr. 24.

$$u''_{out}(t) + \frac{1}{RC} u'_{out}(t) + \frac{1}{LC} u_{out}(t) = \frac{1}{RC} u'_{in}(t). \quad (3.23)$$

Jedná se tedy o lineární diferenciální rovnici 2. řádu. Pokud bude vstupní signál určen vztahem  $u_{in}(t) = U_A \sin \omega t$ , můžeme k nalezení *partikulárního řešení*  $\hat{u}_{out}$  rovnice (3.23) použít *metodu neurčitých koeficientů*, viz (1.11). Nejdříve ale najdeme *fundamentální systém řešení* výše uvedené rovnice. *Charakteristická rovnice* k rovnici (3.23) vypadá následovně

$$\lambda^2 + \frac{1}{RC} \lambda + \frac{1}{LC} = 0, \quad (3.24)$$

jejíž řešení je ve tvaru

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC}}. \quad (3.25)$$

Máme tedy tři situace, a to v závislosti podle znaménka výrazu pod odmocninou.

(i)  $\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC} < 0$  :

Řešení rovnice (3.24) je ve tvaru

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm i \frac{1}{2} \sqrt{\left| \frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC} \right|},$$

fundamentální systém řešení rovnice (3.23) je tvořen funkcemi  $u_1, u_2$

$$u_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad u_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad (3.26)$$

kde  $\alpha = -\frac{1}{2RC}$ ,  $\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\left| \frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC} \right|}$ .

(ii)  $\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC} = 0$  :

Řešení rovnice (3.24) je jeden kořen

$$\lambda = -\frac{1}{2RC},$$

fundamentální systém řešení je tvořen funkcemi

$$u_1(t) = e^{-\frac{1}{2RC}t}, \quad u_2(t) = te^{-\frac{1}{2RC}t}. \quad (3.27)$$

(iii)  $\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC} > 0$  :

Rovnice (3.24) má dva různé reálné kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$ . Fundamentální systém řešení se skládá z funkcí

$$u_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad u_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \quad (3.28)$$

kde  $\lambda_{1,2}$  je rovno (3.25). Nyní hledíme partikulární řešení  $\hat{u}_{out}$  rovnice (3.23).

Pro  $u_{in}(t) = U_A \sin \omega t$  je pravá strana rovnice (3.23) rovna

$$\frac{1}{RC} \omega U_A \cos \omega t.$$

Můžeme tedy použít metodu řešení se speciální pravou stranou (viz (1.10)),

kde

$$\alpha = 0, \quad P_1(x) = \frac{1}{RC} \omega U_A, \quad \beta = \omega, \quad P_2(x) = 0,$$

navíc platí:  $k = 0, m = 0, n = -1$ . Partikulární řešení  $\hat{u}_{out}$  tedy hledáme ve tvaru

$$\hat{u}_{out}(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (3.29)$$

kde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Tento tvar řešení dosadíme do rovnice (3.23). Aby platila rovnost, musí pro koeficienty  $a, b$  platit

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{RC}b + \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)a &= \frac{1}{RC}\omega U_A \\ \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)b - \frac{\omega}{RC}a &= 0 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostáváme

$$a = \frac{U_A L R \omega (1 - LC \omega^2)}{L^2 \omega^2 + R^2 (1 - LC \omega^2)^2}, \quad b = \frac{U_A L^2 \omega^2}{L^2 \omega^2 + R^2 (1 - LC \omega^2)^2}.$$

Když tyto vztahy dosadíme do (3.29) a použijeme Lemma 3.1, dostaneme

$$\hat{u}_{out}(t) = \frac{U_A L \omega}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2 (1 - LC \omega^2)^2}} \sin(\omega t + \phi),$$

kde  $\phi = \arctan\left(\frac{R(1 - LC \omega^2)}{L \omega}\right)$ . Obecné řešení diferenciální rovnice (3.23) je rovno

$$u_{out}(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \frac{U_A L \omega}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2 (1 - LC \omega^2)^2}} \sin(\omega t + \phi), \quad (3.30)$$

kde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  a funkce  $u_1(t), u_2(t)$  jsou buď (3.26), (3.27) nebo (3.28). Pro úplnost ještě určíme přenos obvodu  $G$ , dostáváme

$$G = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{L \omega}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2 (1 - LC \omega^2)^2}}, \quad (3.31)$$

kde  $U_{in}$  je amplituda vstupního napětí a  $U_{out}$  je amplituda výstupního napětí v (3.30) (jelikož jsou reálné části kořenů *charakteristická rovnice* (3.24) záporné, funkce v (3.26), (3.27) a (3.28) se limitně blíží k nule pro  $t \rightarrow \infty$ . Proto uvažujeme amplitudu pouze partikulárního řešení). Z (3.31) už asi tušíme, že *mezních frekvencí* bude více. Řešíme rovnici pro neznámou  $\omega$  (připomeňme, že pro *mezní frekvenci* platí, že napěťový přenos je roven  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ):

$$\frac{L\omega}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.32)$$

která je ekvivalentní následujícím dvěma rovnostem

$$RLC\omega^2 \pm L\omega - R = 0. \quad (3.33)$$

Jedná se o kvadratické rovnice, proto jsou řešení  $\omega_{1,2}$ ,  $\omega_{3,4}$  rovnic z (3.33) ve tvaru

$$\omega_{1,2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 + 4R^2LC}}{2RLC}, \quad \omega_{3,4} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 + 4R^2LC}}{2RLC}.$$

Rovnost (3.32) je splněna pouze pro  $\omega > 0$ , proto z rovnice (3.33) uvažujeme řešení  $\omega_{c_1}, \omega_{c_2}$ , která jsou kladná. *Mezní frekvence*  $f_{c_1}, f_{c_2}$  jsou rovny

$$f_{c_1} = \frac{-L + \sqrt{L^2 + 4R^2LC}}{4\pi RLC}, \quad f_{c_2} = \frac{L + \sqrt{L^2 + 4R^2LC}}{4\pi RLC}. \quad (3.34)$$

Již jsme se zmínili, že Pásmová propust propouští signál v určitém pásmu frekvencí, nyní už víme, že toto pásmo má šířku  $B = f_{c_2} - f_{c_1}$ . Jak určíme frekvenci  $f_o$ , která je „uprostřed“ pásu  $B$ ? Jedná se o frekvenci při které je



přenos obvodu maximální. Hledáme tedy  $f_0$ , při které platí

$$G = \frac{L\omega_0}{\sqrt{L^2\omega_0^2 + R^2(1 - LC\omega_0^2)^2}} = 1,$$

což je ekvivalentní rovnosti  $R^2(1 - LC\omega_0^2)^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ . Frekvence  $f_0$  je tedy rovna

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (3.35)$$

Poznamenejme ještě, že platí  $f_0 = \sqrt{f_{c_1}f_{c_2}}$ , tedy, že *střední frekvence*  $f_0$  je geometrickým průměrem *mezních frekvencí*  $f_{c_1}$  a  $f_{c_2}$ .

**Příklad 3.5** (hodnoty součástek z [4], str. 617, Example 14.2) Mějme obvod znázorněný na Obr. 24. Hodnoty součástek jsou  $R = 4 \Omega$ ,  $C = 0.5 \text{ F}$ ,  $L = 2 \text{ H}$ . Určete výstupní napětí  $u_{out}(t)$ , *mezní frekvenci*  $f_{c_1}$ ,  $f_{c_2}$ , šířku pásma  $B$  a fázový posun  $\phi$  mezi vstupním a výstupním napětím, pokud je vstupní napětí popsáno rovnicí  $u_{in}(t) = 120 \sin 3t$ . Nakreslete modulovou a fázovou frekvenční charakteristiku.

*Řešení.* Abychom určili jak vypadají funkce  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  z (3.30), potřebujeme vypočítat diskriminant *charakteristické rovnice* k rovnici (3.23), dostáváme

$$D = \frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC} = \frac{1}{(4 \cdot 0.5)^2} - \frac{4}{2 \cdot 0.5} = -3.75.$$

Tedy, *fundamentální systém řešení* rovnice (3.23) se skládá z funkcí

$$u_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad u_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

kde  $\alpha = -\frac{1}{4}$ ,  $\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$ . Dosazením známých hodnot do (3.30) dostaneme

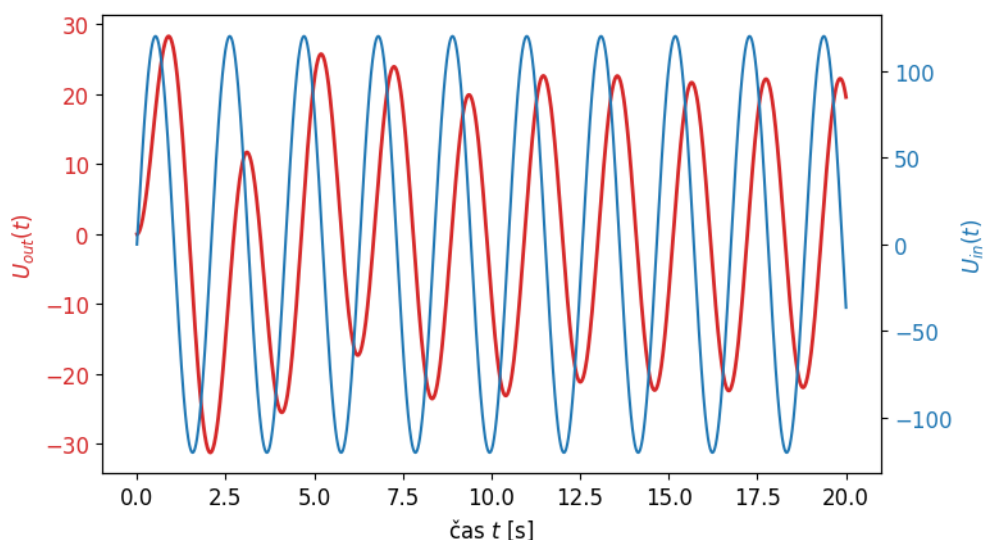
předpis pro výstupní napětí  $u_{out}(t)$

$$u_{out}(t) = c_1 e^{-\frac{t}{4}} \cos \frac{\sqrt{15}}{4} t + c_2 e^{-\frac{t}{4}} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} t + \frac{72\sqrt{265}}{53} \sin(3t + \phi), \quad (3.36)$$

kde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\phi \doteq -79.38^\circ \doteq -1.39$  rad. Pokud zvolíme počáteční podmínky jako  $u_{out}(0) = 0$ ,  $u'_{out}(0) = 0$ , dostaneme z (3.36) vztahy pro  $c_1, c_2$

$$c_1 = -\frac{72\sqrt{265}}{53} \sin \phi, \quad c_2 = -\frac{24\sqrt{159}}{53} \sin \phi - \frac{288\sqrt{159}}{53} \cos \phi. \quad (3.37)$$

Na Obrázku 25 je znázorněn časový průběh napětí  $u_{out}(t)$  z (3.36) společně s vstupním signálem  $u_{in}(t)$ , kde  $c_1, c_2$  jsou určeny vztahy (3.37).



Obrázek 25: Časové průběhy napětí  $u_{out}(t)$  a  $u_{in}(t)$  Band-pass filtru.

Lze si všimnout působení funkcí  $u_1(t), u_2(t)$  pro malé hodnoty  $t$ . Pro  $t \rightarrow \infty$  se tento vliv vytrácí, protože např. pro  $u_1(t)$  platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{4}} \cos \frac{\sqrt{15}}{4} t = 0,$$

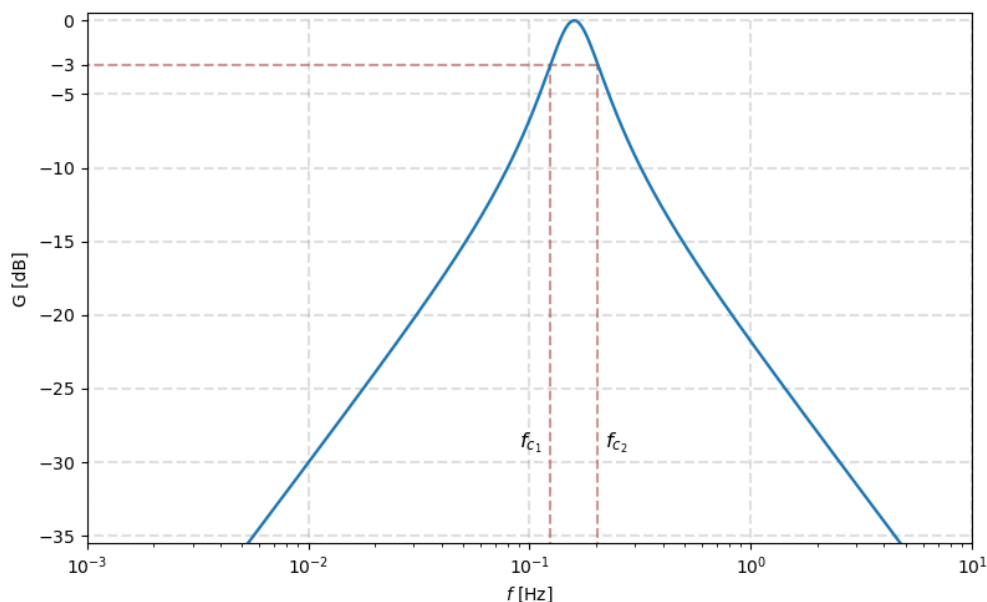
podobně pro  $u_2(t)$ . Mezní frekvence  $f_{c_1}, f_{c_2}$  určíme snadno pouhým dosazením

zadaných hodnot do (3.34). Dostaneme

$$f_{c_1} = \frac{-2 + \sqrt{2^2 + 4 \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot 0.5}}{4\pi \cdot 4 \cdot 2 \cdot 0.5} \doteq 0.124 \text{ Hz},$$

$$f_{c_2} = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4 \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot 0.5}}{4\pi \cdot 4 \cdot 2 \cdot 0.5} \doteq 0.204 \text{ Hz}.$$

Šířka pásma propustnosti je potom  $B = f_{c_2} - f_{c_1} = 0.08 \text{ Hz}$ . Nám tedy vyšlo velmi úzké rozmezí propustnosti. Šířku pásma můžeme zvětšit např. zmenšením hodnoty odporu  $R$ . Na Obrázku 26 je znázorněna modulová frekvenční charakteristika, společně s mezními frekvencemi  $f_{c_1}, f_{c_2}$ .



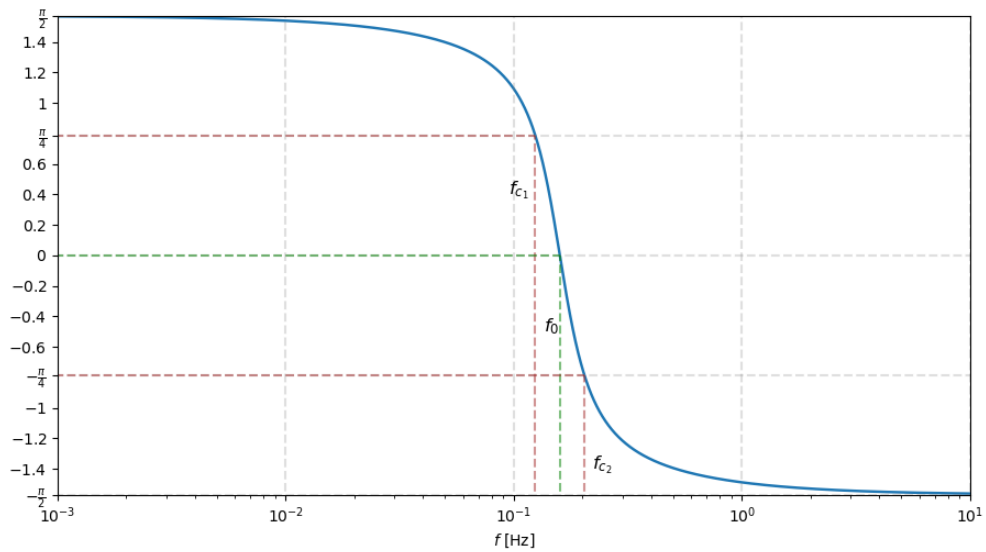
Obrázek 26: Modulová frekvenční charakteristika Band-pass filtru.

Ukažme si ještě jak vypadá fázová frekvenční charakteristika. Z Obrázku 27 vyčteme, že pásmová propust má fázový posun v intervalu  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , na rozdíl od dolní propusti, kde  $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$  (viz Obr. 21). Zároveň platí, že  $\phi = \frac{\pi}{4}$  pro  $f_{c_1}$  a  $\phi = -\frac{\pi}{4}$  pro  $f_{c_2}$ . Na Obr. 27 je zaznačená i *střední frekvence*  $f_0$ , pro kterou je fázový posun mezi vstupním a výstupním signálem nulový. Skutečně,

pro  $f_0$  můžeme psát

$$\phi = \arctan\left(\frac{R(1 - LC\omega_0^2)}{L\omega_0}\right) = \arctan\left(\frac{R(1 - 1)}{L\omega_0}\right) = \arctan 0 = 0,$$

kde jsme využili vztahu  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

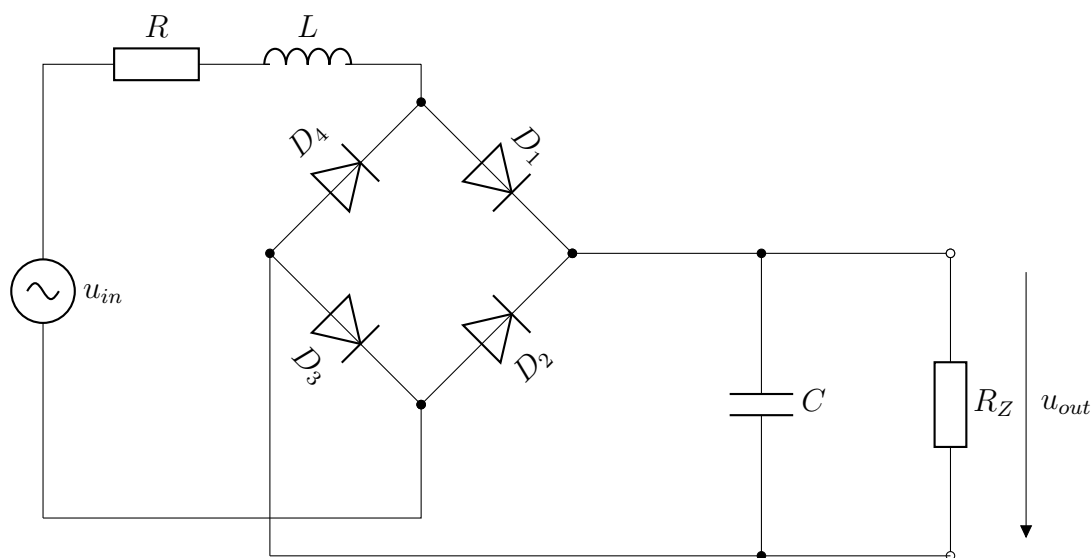


Obrázek 27: Fázová frekvenční charakteristika Band-pass filtru.

○

### 3.5 Dvoucestný můstkový usměrňovač

Usměrňovače slouží pro převod střídavého signálu na stejnosměrný. My se budeme zabývat můstkovým diodovým usměrňovačem, viz Obrázek 28.



Obrázek 28: Dvoucestný můstkový usměrňovač.

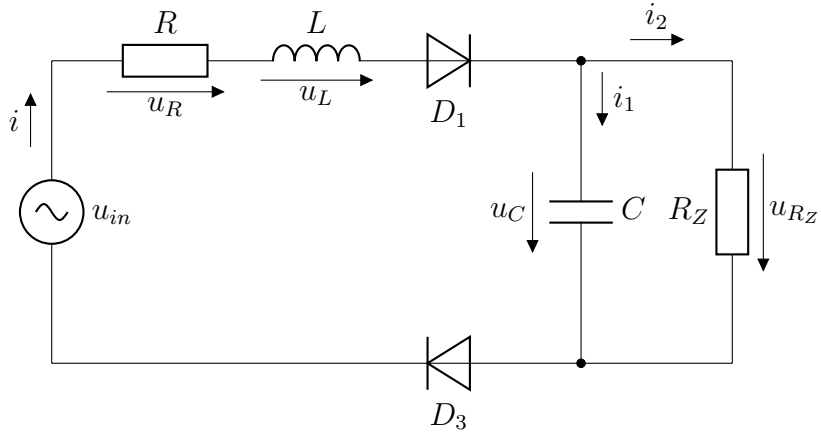
Uvažujme vstupní střídavý signál ve tvaru

$$u_{in}(t) = U_A \sin \omega t.$$

Nás bude zajímat časový průběh výstupního napětí  $u_{out}(t)$ . Zaměřme se nyní na časový interval  $[0, \frac{T}{2})$ , kde  $T$  je délka periody  $u_{in}(t)$ . V takovém případě teče proud pouze jedním směrem (uvažujme směr nahoru od zdroje  $u_{in}$  na Obrázku 28). Proud prochází prvky  $R$  a  $L$  přes diodu  $D_1$ , pokračuje přes rezistor  $R_Z$  a vrací se diodou  $D_3$  zpátky do zdroje  $u_{in}(t)$ . Diody  $D_4$  a  $D_2$  jsou v závěrném směru. Tato část obvodu je znázorněna na Obrázku 29.

Dle prvního Kirchhoffova zákona pro proudy  $i, i_1, i_2$  platí

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t).$$



Obrázek 29: Dvoucestný můstkový usměrňovač - chování obvodu pro  $t \in [0, \frac{T}{2})$ .

Předpokládejme, že  $D_1 \equiv D_3$ , tedy že diody mají stejné parametry (v realitě toho nikdy nedosáhneme, nicméně jsme schopni se tomuto požadavku aspoň přiblížit). Za  $i$  dosadíme vztah (2.6), za  $i_1$  dosadíme vztah pro procházející proud kondenzátorem (2.5) a za  $i_2$  dosadíme z Ohmova zákona, dostaneme

$$I_0 \left( e^{\frac{u_D(t)}{nU_T}} - 1 \right) = C u'_C(t) + \frac{u_{R_Z}(t)}{R_Z}. \quad (3.38)$$

Podle druhého Kirchhoffova zákona pro úbytky napětí v obvodu na Obrázku 29 platí

$$u_{in}(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_{D_1}(t) + u_C(t) + u_{D_3}(t), \quad (3.39)$$

přičemž předpokládáme, že  $u_{D_1}(t) = u_{D_3}(t) = u_D(t)$  pro všechna  $t$ . Navíc, když si uvědomíme, že  $u_C(t) = u_{R_Z}(t) = u_{out}(t)$  pro každé  $t$ , z rovnice (3.39) vyjádříme úbytek napětí na diodě a ten následně dosadíme do (3.38), dosta-

neme

$$I_0 \left[ \exp \left( \frac{u_{in}(t) - u_{out}(t) - u_R(t) - u_L(t)}{2nU_T} \right) - 1 \right] = C u'_{out}(t) + \frac{u_{out}(t)}{R_Z}. \quad (3.40)$$

Dále platí

$$\begin{aligned} u_R(t) + u_L(t) &= R i(t) + L i'(t) \\ &= R \left( C u'_{out}(t) + \frac{u_{out}(t)}{R_Z} \right) + L \left( C u''_{out}(t) + \frac{u'_{out}(t)}{R_Z} \right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

kde jsme v první rovnosti využili Ohmův zákon a vztah (2.4), ve druhé rovnosti jsme za  $i(t)$  resp.  $i'(t)$  dosadili rovnost (3.38) resp. její derivaci s využitím faktu, že  $u_C(t) = u_{R_Z}(t) = u_{out}(t)$  pro každé  $t$ . Dosazením (3.41) do (3.40) a upravením získáme

$$\begin{aligned} \frac{I_0}{C} \left\{ \exp \left[ \frac{1}{2nU_T} \left( u_{in}(t) - u_{out}(t) - RC u'_{out}(t) - \frac{R}{R_Z} u_{out}(t) - LC u''_{out}(t) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{L}{R_Z} u'_{out}(t) \right) \right] - 1 \right\} \\ - \frac{u_{out}(t)}{C R_Z} = u'_{out}(t), \end{aligned} \quad (3.42)$$

což je nelineární diferenciální rovnice druhého řádu, která popisuje chování obvodu na Obrázku 29. Poznamenejme, že tato rovnice modeluje chování obvodu na Obrázku 28 pro  $t \in [0, \frac{T}{2})$ . Nicméně analogicky můžeme odvodit model i pro  $t \in [\frac{T}{2}, T)$ . Pro tento čas by se v obvodu na Obr. 29 změnil směr proudu a diody  $D_1, D_3$  bychom nahradili diodami  $D_2$  a  $D_4$  a všechny odvozené rovnosti by pořád platily. Za předpokladu, že všechny čtyři diody mají stejné parametry, bychom mohli v modelu (3.42) pro  $t \in [\frac{T}{2}, T)$  změnit

$u_{in}(t)$  na  $-u_{in}(t)$ . Můžeme tedy psát, že pro každé  $t \geq 0$  rovnice

$$\frac{I_0}{C} \left\{ \exp \left[ \frac{1}{2nU_T} \left( |u_{in}(t)| - u_{out}(t) - RCu'_{out}(t) - \frac{R}{R_Z} u_{out}(t) - LCu''_{out}(t) - \frac{L}{R_Z} u'_{out}(t) \right) \right] - 1 \right\} - \frac{u_{out}(t)}{CR_Z} = u'_{out}(t), \quad (3.43)$$

modeluje průběh výstupního napětí v obvodu na Obrázku 28. Jelikož je tato rovnice nelineární, je velmi obtížné najít její analytické řešení, my ji proto budeme řešit numericky. Budeme postupovat tak, že rovnici (3.43) zdiskretizujeme, tedy interval, ve kterém hledáme řešení, rozdělíme pomocí konečného počtu bodů, ve kterých splníme diferenciální rovnici přibližně, a to tak, že derivace nahradíme diferenčními formulemi. Tento způsob řešení se nazývá *metoda konečných diferencí*. Následně si ukážeme, jak se tato zdiskretizovaná rovnice dá vyřešit pomocí *Lambertovy funkce W*, viz Appendix (A).

**(i) „Klasická“ metoda konečných diferencí:**

Uvažujme rovnici (3.43) s počátečními podmínkami

$$u_{out}(0) = u'_{out}(0) = 0. \quad (3.44)$$



Rovnice (3.43) rozřešená vzhledem k  $u''_{out}(t)$  má tvar

$$\begin{aligned}
u''_{out}(t) = & -\frac{2nU_T}{LC} \ln \left( \frac{u_{out}(t)}{I_0 R_Z} + \frac{C}{I_0} u'_{out}(t) + 1 \right) \\
& - \left( \frac{1}{CR_Z} + \frac{R}{L} \right) u'_{out}(t) \\
& - \left( \frac{R}{LCR_Z} + \frac{1}{LC} \right) u_{out}(t) \\
& + \frac{1}{LC} |u_{in}(t)|.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Nyní aproximujeme  $u''_{out}(t)$  využitím dopředné diference, vyjádřené pomocí  $u'_{out}(t)$ , dostaneme

$$u''_{out}(t) \approx \frac{u'_{out}(t + \Delta t) - u'_{out}(t)}{\Delta t}, \tag{3.46}$$

pro nějaké malé  $\Delta t$ . Pokud takto vyjádřenou druhou derivaci  $u''_{out}(t)$  dosadíme do rovnice (3.45), ze které vyjádříme  $u'_{out}(t + \Delta t)$ , dostaneme

$$\begin{aligned}
u'_{out}(t + \Delta t) \approx & -\frac{2\Delta t nU_T}{LC} \ln \left( \frac{u_{out}(t)}{I_0 R_Z} + \frac{C}{I_0} u'_{out}(t) + 1 \right) \\
& - \left( \frac{\Delta t}{CR_Z} - 1 + \frac{R\Delta t}{L} \right) u'_{out}(t) \\
& - \left( \frac{R\Delta t}{LCR_Z} + \frac{\Delta t}{LC} \right) u_{out}(t) \\
& + \frac{\Delta t}{LC} |u_{in}(t)|.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Máme tedy určen explicitní vztah pro  $u'_{out}(t + \Delta t)$ . My ale chceme určit hodnoty  $u_{out}(t)$ , ne jejich derivace. K tomu nám opět poslouží dopředná diference

$$u'_{out}(t) \approx \frac{u_{out}(t + \Delta t) - u_{out}(t)}{\Delta t}, \tag{3.48}$$

ze které vyjádříme  $u_{out}(t + \Delta t)$ . Vztahy (3.47) a (3.48) nám určují iterační

metodu

$$\begin{aligned}
U'_{out}{}^{(i+1)} &= -\frac{2\Delta t nU_T}{LC} \ln \left( \frac{U_{out}^{(i)}}{I_0 R_Z} + \frac{C}{I_0} U'_{out}{}^{(i)} + 1 \right) \\
&\quad - \left( \frac{\Delta t}{CR_Z} - 1 + \frac{R\Delta t}{L} \right) U'_{out}{}^{(i)} \\
&\quad - \left( \frac{R\Delta t}{LCR_Z} + \frac{\Delta t}{LC} \right) U_{out}^{(i)} \\
&\quad + \frac{\Delta t}{LC} |U_{in}^{(i)}|, \\
U_{out}^{(i+1)} &= U'_{out}{}^{(i)} \Delta t + U_{out}^{(i)},
\end{aligned} \tag{3.49}$$

pro  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  s délkou kroku  $\Delta t$ , kde hodnoty  $U_{in}^{(i)}$  jsou dány pro všechna  $i$ .

K jiné iterační metodě se lze dostat pomocí *Lambertovy funkce W*, viz [8].

### (ii) Metoda konečných diferencí a Lambertova funkce W:

V rovnici (3.43) nahradíme derivace příslušnými diferencemi, tentokrát použijeme zpětné diference. V rovnici (3.43) tedy nahradíme  $u'_{out}(t)$ ,  $u''_{out}(t)$  následujícími vztahy

$$\begin{aligned}
u'_{out}(t) &\approx \frac{u_{out}(t) - u_{out}(t - \Delta t)}{\Delta t}, \\
u''_{out}(t) &\approx \frac{u_{out}(t) - 2u_{out}(t - \Delta t) + u_{out}(t - 2\Delta t)}{\Delta t}.
\end{aligned}$$

Po pár úpravách se dostaneme k následující rovnici

$$\begin{aligned}
\frac{I_0}{C} \left\{ \exp \left[ \frac{1}{2nU_T} \left( u_{in}(t) + \left( \frac{R_Z RC \Delta t + 2LCR_Z + L\Delta t}{R_Z (\Delta t)^2} \right) u_{out}(t - \Delta t) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. - \left( 1 + \frac{(L + R\Delta t)(R_Z C + \Delta t)}{R_Z (\Delta t)^2} \right) u_{out}(t) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. - \frac{LC}{(\Delta t)^2} u_{out}(t - 2\Delta t) \right) \right] - 1 \right\} = \\
= -\frac{1}{\Delta t} u_{out}(t - \Delta t) + \left( \frac{\Delta t + R_Z C}{R_Z C \Delta t} \right) u_{out}(t).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Vynásobením rovnosti (3.50) faktorem  $\frac{C}{I_0}$  a definováním nových proměnných vztahy

$$\begin{aligned}
a := \frac{1}{2nU_T} \left( u_{in}(t) + \left( \frac{R_Z RC \Delta t + 2LCR_Z + L\Delta t}{R_Z (\Delta t)^2} \right) u_{out}(t - \Delta t) \right. \\
\left. - \frac{LC}{(\Delta t)^2} u_{out}(t - 2\Delta t) \right)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$b := \frac{1}{2nU_T} \left( 1 + \frac{(L + R\Delta t)(R_Z C + \Delta t)}{R_Z (\Delta t)^2} \right) \tag{3.52}$$

$$c := 1 - \frac{C}{I_0 \Delta t} u_{out}(t - \Delta t) \tag{3.53}$$

$$d := \frac{\Delta t + R_Z C}{R_Z I_0 \Delta t}, \tag{3.54}$$

přejde rovnice (3.50) na

$$\exp(a - b u_{out}(t)) = c + d u_{out}(t). \tag{3.55}$$

Pokud rovnici (3.55) vynásobíme  $\frac{b}{d} \exp(b u_{out}(t) + \frac{bc}{d})$  dostaneme

$$\frac{b}{d} \exp\left(a + \frac{bc}{d}\right) = \left[ b u_{out}(t) + \frac{bc}{d} \right] \exp\left(b u_{out}(t) + \frac{bc}{d}\right). \tag{3.56}$$

Jelikož je levá strana výše uvedené rovnice vždy kladná, musí být i výraz  $\frac{bc}{d} + b u_{out}(t)$  kladný. Proto můžeme na obě strany rovnice aplikovat *Lambertovu funkci*  $W_0$ . Dostaneme

$$W_0 \left[ \frac{b}{d} \exp \left( a + \frac{bc}{d} \right) \right] = \frac{bc}{d} + b u_{out}(t).$$

Vyjádřením  $u_{out}(t)$  získáme

$$u_{out}(t) = -\frac{c}{d} + \frac{1}{b} W_0 \left[ \frac{b}{d} \exp \left( a + \frac{bc}{d} \right) \right]. \quad (3.57)$$

Vzorec (3.57) je základem pro iterační metodu

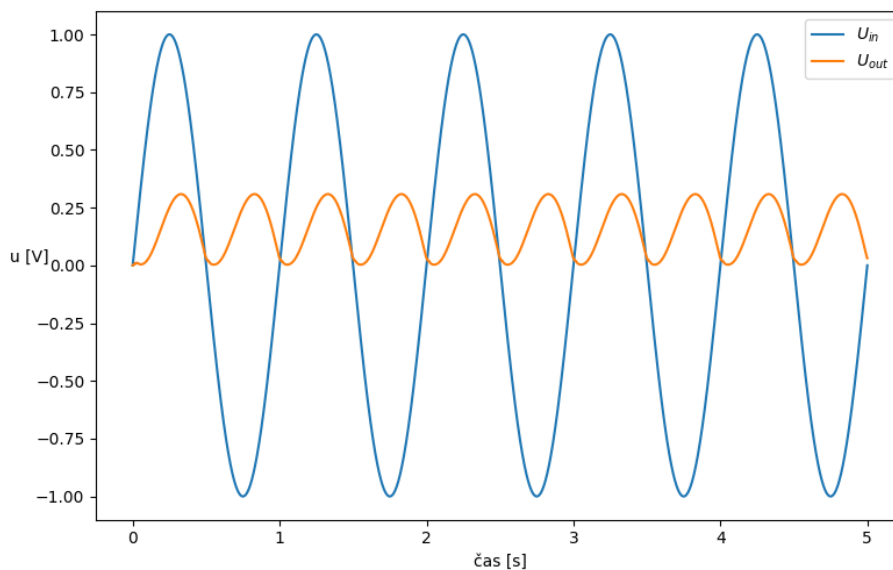
$$\begin{cases} t_i &= t_{i-1} + \Delta t \\ U_{out}^{(i)} &= -\frac{c}{d} + \frac{1}{b} W_0 \left[ \frac{b}{d} \exp \left( a + \frac{bc}{d} \right) \right], \end{cases} \quad (3.58)$$

pro  $i = 2, 3, \dots, N$  s délkou kroku  $\Delta t$ , kde  $a, b, c, d$  jsou určeny vztahy (3.51) - (3.54). Kódy, psané v programovacím jazyce Python, k oběma iteračním metodám (3.49) a (3.58) jsou součástí přílohy.

Na následujícím příkladě si ukážeme jak vypadá průběh napětí  $u_{out}(t)$  pro konkrétní hodnoty součástek v obvodu na Obr. 28.

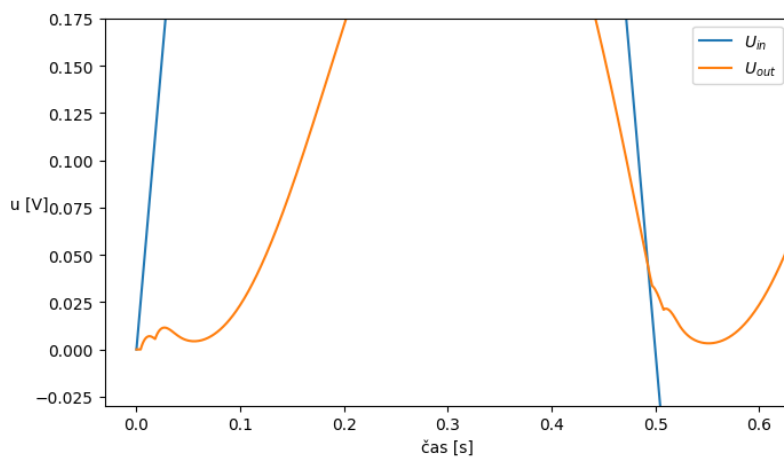
**Příklad 3.6** Uvažujme obvod na Obr. 28 s hodnotami součástek  $R = 5 \Omega$ ,  $L = 2 \text{ H}$ ,  $C = 1 \text{ mF}$ ,  $R_Z = 15 \Omega$ . Diody  $D_1, D_2, D_3, D_4$  mají stejné parametry:  $I_0 = 1 \mu\text{A}$ ,  $n = 1$  a předpokládáme, že teplota PN přechodu je  $25^\circ\text{C}$ , tzn.  $U_T \approx 25.7 \text{ mV}$ . Určete průběh napětí  $u_{out}(t)$ , pokud má zdroj napětí sinusový průběh  $u_{in}(t) = \sin(2\pi t)$ .

*Řešení.* Uvažujme k rovnici (3.43) nulové poč. podmínky určeny vztahem (3.44), tedy obvod bez energie ke kterému v čase  $t = 0$  připojíme zdroj napětí  $U_{in}$ . Potom iterační metoda (3.49), s délkou kroku  $\Delta t = 0.001$ , nám, pro časový interval  $[0, 5]$  sekund, dá následující graf řešení, viz Obrázek 30.



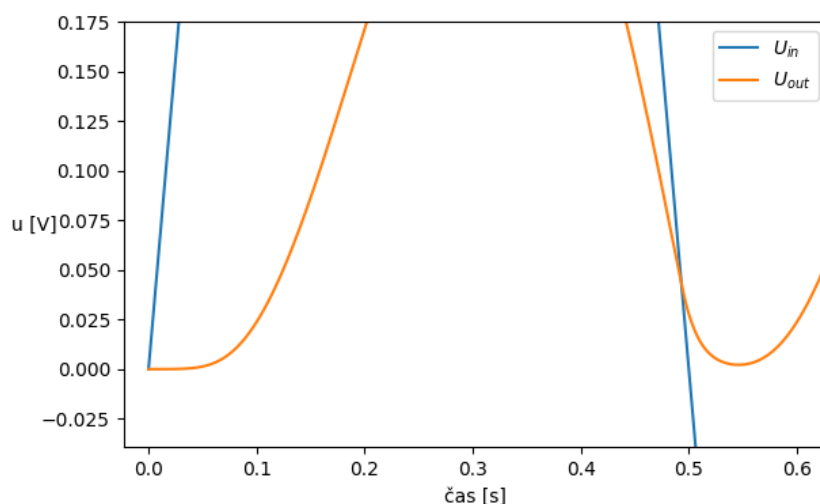
Obrázek 30: Průběh napětí  $u_{out}(t)$  můstkového usměrňovače - metoda konečných diferencí.

Vidíme, že výstupní napětí  $u_{out}(t)$  je pořád kladné. Obvod tedy slouží jako převodník střídavého signálu na stejnosměrný (AC/DC převodník). Pokud si graf řešení na Obr. 30 přiblížíme, můžeme si všimnout jistých nedokonalostí, viz Obr. 31.



Obrázek 31: Přiblížený průběh napětí  $u_{out}(t)$  můstkového usměrňovače - metoda konečných diferencí.

Nicméně tyto věci se dají vyřešit zmenšením délky kroku. Např. pro desetkrát menší délku kroku se tyto problémy již nevyskytují, viz Obr. 32



Obrázek 32: Přibližný průběh napětí  $u_{out}(t)$  můstkového usměrňovače - metoda konečných diferencí s délkou kroku  $\Delta t = 0.0001$ .

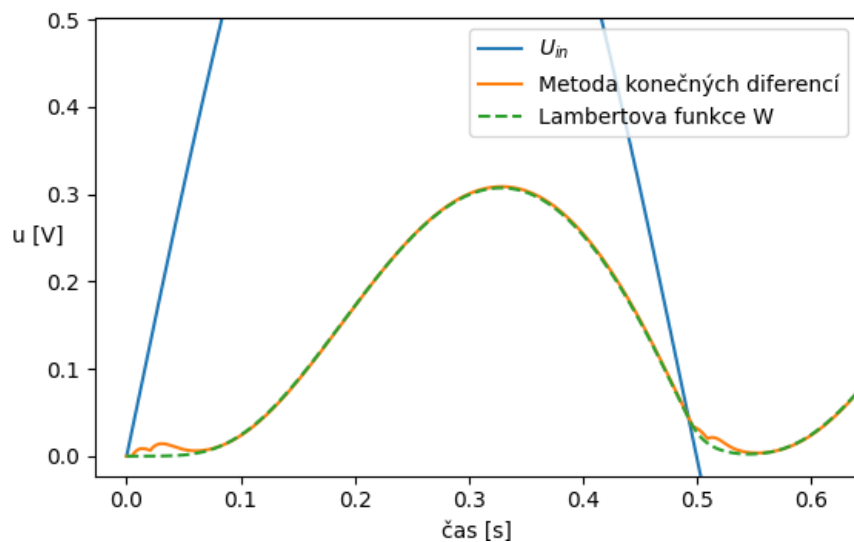
Graf řešení pomocí iterační metody (3.58) (s Lambertovou funkcí  $W$ ) má totožný tvar jako na Obr. 30. Navíc neobsahuje nedokonalosti znázorněny na Obrázku 31. Na Obrázku 33 jsou vykresleny oba grafy řešení pomocí iteračních metod (3.49) a (3.58) se shodnou délkou kroku  $\Delta t = 0.001153$ . (Tato délka kroku je nejmenší 7ciferné číslo, při kterém Python nehlásil „overflow“ funkce  $\exp$  v (3.58).) Lze si všimnout, že oba grafy řešení téměř splývají. Největší absolutní chyby dosahujeme v časech, viz Tabulka 1:

čas $t$	31.1 ms	30 ms	32.3 ms	28.8 ms	33.4 ms
abs. chyba	0.01414	0.01412	0.01403	0.01395	0.01381

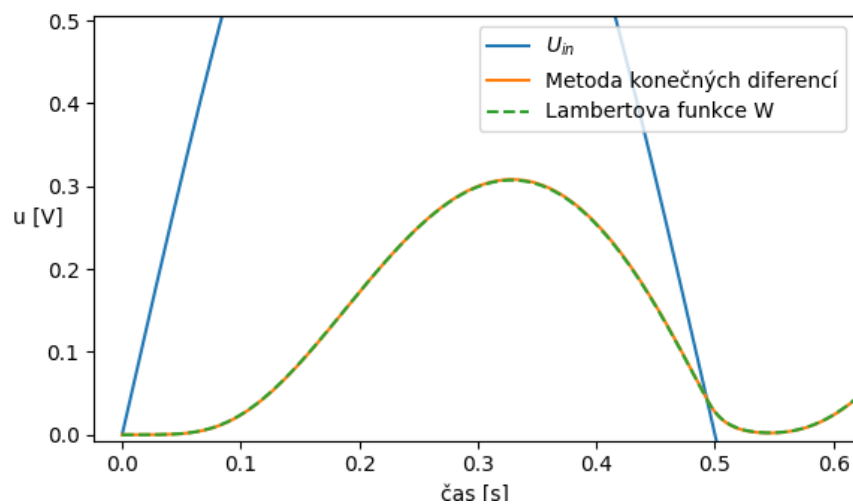
Tabulka 1: Absolutní chyba mezi metodou konečných diferencí a Lambertovou funkcí  $W$ .

Tyto chyby se vždy opakují při přiblížení výstupního napětí k nule. Můžeme si všimnout, že chyby jsou v řádů desítek mV, navíc, čím menší bude

délka kroku u metody konečných diferencí, tím blíže bude její graf řešení ke grafu řešení určený Lambertovou funkcí  $W$ , viz Obrázek 34.

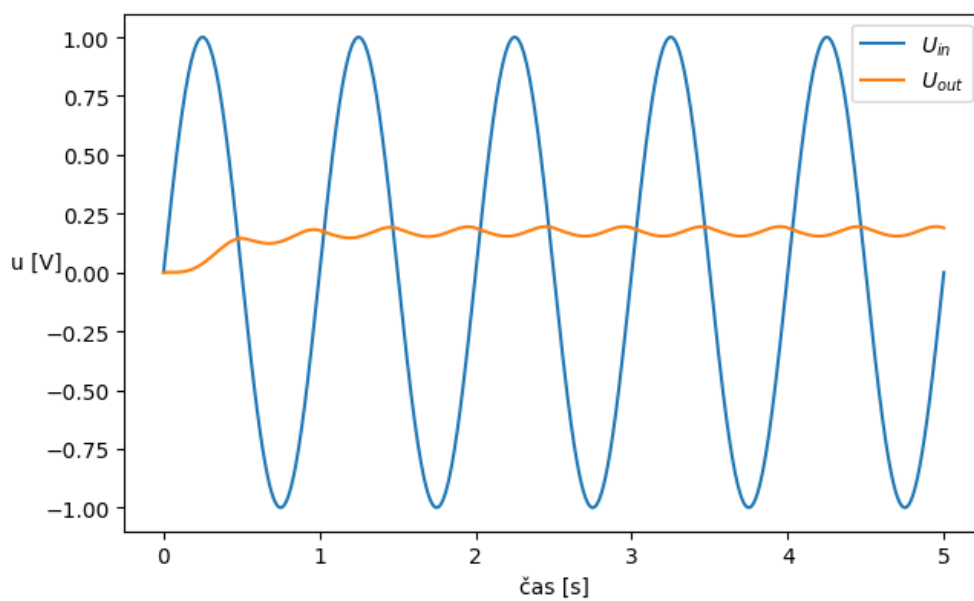


Obrázek 33: Srovnání metody konečných diferencí s Lambertovou funkcí  $W$  - délka kroku  $\Delta t = 0.001153$ .



Obrázek 34: Srovnání metody konečných diferencí ( $\Delta t = 0.00001153$ ) s Lambertovou funkcí  $W$  ( $\Delta t = 0.001153$ ).

Na závěr si ukážeme jak se bude měnit průběh výstupního napětí  $u_{out}(t)$  při změnách hodnot součástek. Pokud bychom například zvětšili kapacitu kondenzátoru na  $C = 50 \text{ mF}$ , dostali bychom průběh znázorněný na Obr. 35.



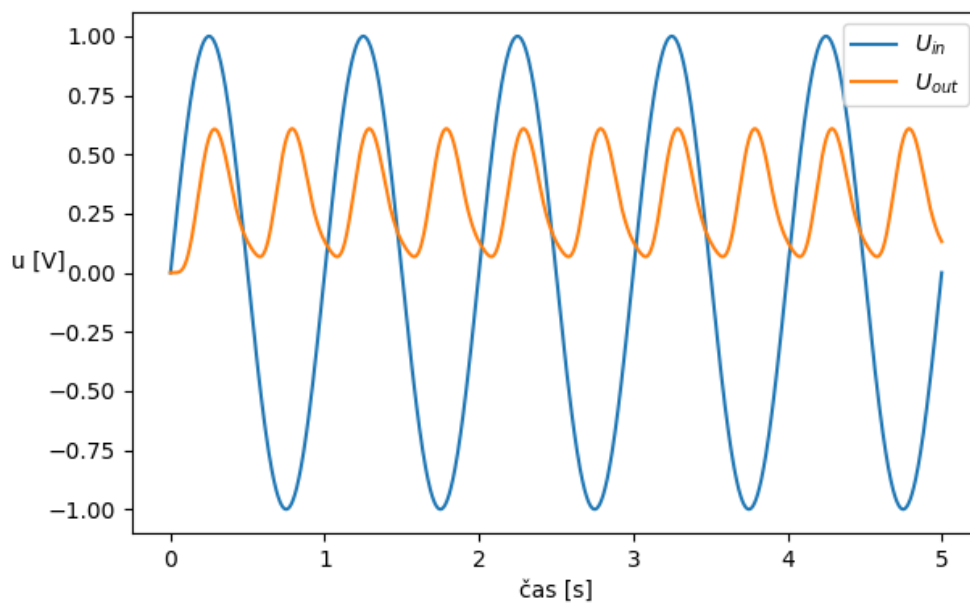
Obrázek 35: Průběh napětí  $u_{out}(t)$  můstkového usměrňovače, kde  $C = 50 \text{ mF}$ .

Kondenzátor  $C$  se nazývá filtrační kondenzátor a má za úkol stabilizovat výstupní napětí  $u_{out}(t)$ . Průběh napětí na Obr. 35 je určitě vhodnější pro AC/DC převodník než průběh na Obrázku 30, zejména proto, že napětí kmitá s mnohem menší amplitudou.

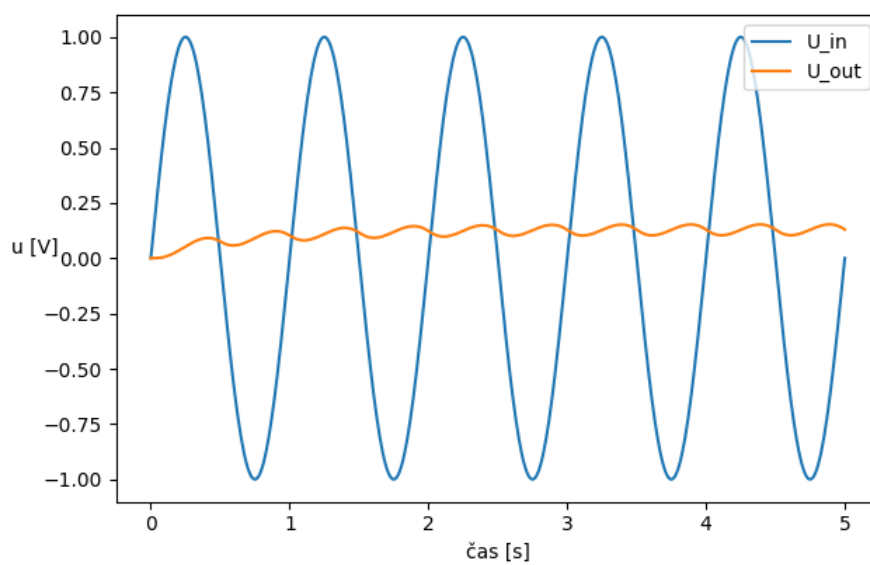
Rezistory  $R$  a  $R_Z$  mění velikost amplitudy napětí  $u_{out}(t)$ , viz Obrázek 36. Čím větší je velikost odporu  $R_Z$ , tím větší je amplituda napětí  $u_{out}(t)$ . Naopak, čím menší je velikost odporu  $R$ , tím větší je maximální hodnota napětí  $u_{out}(t)$ .

Cívka  $L$  v obvodu na Obr. 28 má stejnou funkci jako filtrační kondenzátor  $C$ . Tedy, čím větší je indukčnost cívky, tím stabilnější je výstupní napětí  $u_{out}(t)$ , viz Obrázek 37.





Obrázek 36: Průběh napětí  $u_{out}(t)$  můstkového usměrňovače, kde  $R_Z = 100 \Omega$ .



Obrázek 37: Průběh napětí  $u_{out}(t)$  můstkového usměrňovače, kde  $L = 20 \text{ H}$ .

○

## Závěr

V práci jsem se věnoval několika modelům různých elektrických obvodů. Nejprve jsem se zaměřil na obvody obsahující cívku a kondenzátor. Pochopil jsme, že tyto součástky se v stejnosměrných obvodech při sériovém zapojení s rezistorem chovají zcela odlišně, čehož jsem si všiml na časových průbězích napětí na cívce a kondenzátoru.

Při nahrazení stejnosměrného zdroje za střídavý zdroj, jsem ze sériového  $RC$  obvodu získal jednoduchý frekvenční filtr hojně používaný např. v audiotechnice. Dále jsem se věnoval frekvenčnímu filtru, který se skládá z paralelního zapojení rezistoru, cívky a kondenzátoru. Byly zavedeny nové pojmy a odvozeny vztahy se kterými se ve frekvenčních filtrech pracuje. Ukázal jsem jak vypadají příslušné charakteristiky k těmto filtrům a jak se mění v závislosti na změnách hodnot součástek.

Poslední model, kterému jsem se věnoval, byl, na rozdíl od předchozích, nelineární, a proto jsem ho řešil numericky. Zajímal mě časový průběh napětí na výstupu obvodu, pokud jsem uvažoval střídavý zdrojový signál. Zjistil jsem, že výstupní napětí je pouze jedné polarity, a proto obvod slouží jako převodník střídavého signálu na stejnosměrný.

## A Lambertova funkce $W$

Uvažujme funkci  $f(x) = xe^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Derivace funkce  $f$  je rovna

$$f'(x) = e^x(1+x).$$

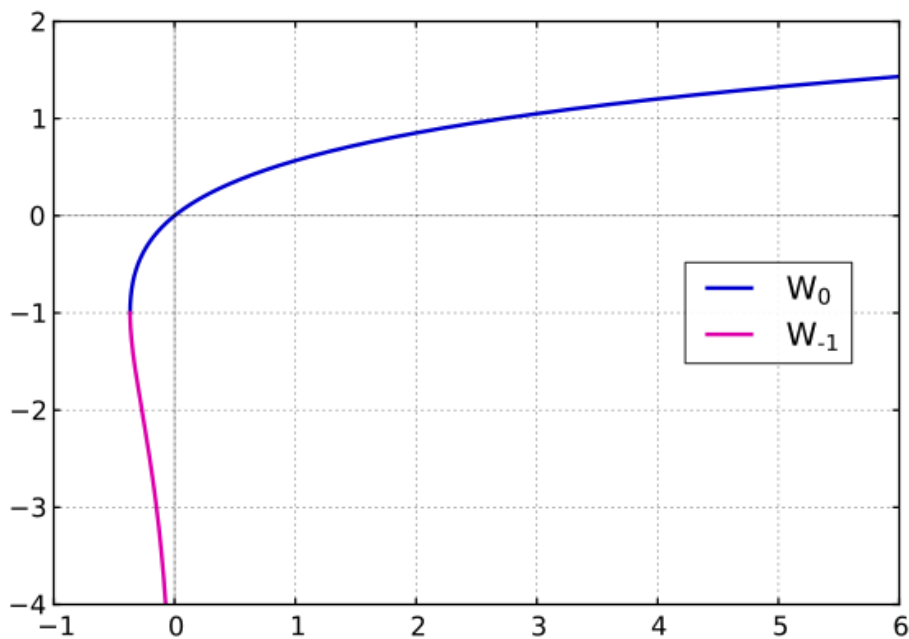
Navíc platí

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1, \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1.$$

Tedy, existují funkce  $W_0 := (f|_{[-1, \infty)})^{-1}$  a  $W_{-1} := (f|_{(-\infty, -1]})^{-1}$ , pro které platí

$$W_0 : \left[-\frac{1}{e}, \infty\right) \rightarrow [-1, \infty), \quad W_{-1} : \left(-\infty, -\frac{1}{e}\right) \rightarrow (-\infty, -1].$$

Funkci  $W_0$  nazýváme *základní Lambertovou funkcí*  $W$ . Na Obrázku 38 jsou znázorněny funkce  $W_0$  a  $W_{-1}$ . Více k Lambertově funkci  $W$  najdete např. v [7].



Obrázek 38: Graf Lambertovy funkce  $W_0$  a  $W_{-1}$ . Zdroj: [10].

## Literatura

- [1] KOFROŇ, Josef. Obyčejné diferenciální rovnice v reálném oboru. 2. vyd. Praha: Karolinum, 2004. ISBN 80-246-0946-0.
- [2] The Bell system technical journal: a journal devoted to the scientific and engineering aspects of electrical commutation. New York: American telephone and telegraph comp., 1983.
- [3] BIRD, John. Electrical circuit theory and technology. 3rd ed. Oxford: Newnes, 2007. ISBN 0-7506-8139-1.
- [4] K. ALEXANDER, Charles a Matthew N.O. SADIKU. Fundamentals of Electric Circuits. Fourth Edition. New York: McGraw Hill, 2009. ISBN 978-0-07-352955-4.
- [5] BUSATTO, Tatiano, Sarah K. RÖNNBERG a Math H. J. BOLLEN. Comparison of Models of Single-Phase Diode Bridge Rectifiers for Their Use in Harmonic Studies with Many Devices. *Energies*. 2022, 15(1). ISSN 1996-1073. Dostupné z: doi:10.3390/en15010066
- [6] Full Wave Rectifier and Bridge Rectifier Theory. <https://www.electronics-tutorials.ws> [online]. Cambridge (Massachusetts), c2023 [cit. 2023-06-08]. Dostupné z: [https://www.electronics-tutorials.ws/diode/diode\\_6.html](https://www.electronics-tutorials.ws/diode/diode_6.html)
- [7] DENCE, Thomas P. A Brief Look into the Lambert W Function. *Applied Mathematics*. 2013, 04(06), 887-892. ISSN 2152-7385. Dostupné z: doi:10.4236/am.2013.46122
- [8] Problem with numerical solving 2nd order nonlinear differential equation - Mathematics Stack Exchange [online]. New York: TeM (<https://math.stackexchange.com/users/247735/tem>), 2023 [cit. 2023-03-29]. Dostupné z: <https://math.stackexchange.com/q/4659026>
- [9] All About Circuits. In: <https://www.allaboutcircuits.com> [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: <https://www.allaboutcircuits.com/textbook/semiconductors/chpt-3/introduction-to-diodes-and-rectifiers/>
- [10] Branches of Lambert W function. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2023-05-10]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Mplwp\\_lambert\\_W\\_branches.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Mplwp_lambert_W_branches.svg)