

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Aplikace diferenciálních rovnic v
elektrotechnice



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: **doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.**

Vypracoval(a): **David Švec**

Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika

Specializace: Průmyslová matematika

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2023

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: David Švec

Název práce: Aplikace diferenciálních rovnic v elektrotechnice

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2023

Abstrakt: Práce se zabývá popisem vybraných modelů z elektrotechniky. Kromě modelů elektrických obvodů, obsahující základní elektronické součástky: rezistor, cívku a kondenzátor, se v práci nachází i jeden model nelineární. Práce obsahuje stručnou teorii k obyčejným lineárním diferenciálním rovnicím a základní pojmy z elektrotechniky.

Klíčová slova: Obyčejné diferenciální rovnice, elektrotechnika, modelování pomocí diferenciálních rovnic.

Počet stran: 68

Počet příloh: 2

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: David Švec

Title: Applications of differential equations in electrotechnics

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.

The year of presentation: 2023

Abstract: This thesis deals with the description of selected models from electrical engineering. In addition to models of electrical circuits, containing basic electronic components: resistor, coil and capacitor, there is also one non-linear model in this thesis. The work also includes a brief theory of ordinary linear differential equations and basic concepts from electrical engineering.

Key words: Ordinary differential equation, electrotechnics, modeling with differential equations.

Number of pages: 68

Number of appendices: 2

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana doc. RNDr. Jana Tomečka, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne
.....
podpis

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce doc. RNDr. Janu Tomečkovi, Ph.D za veškeré rady a připomínky, které byly vzneseny během konzultací.

Obsah

Úvod	9
1 Teorie diferenciálních rovnic	10
1.1 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu	11
1.2 Lineární diferenciální rovnice druhého řádu	12
2 Základy elektrotechniky	15
2.1 Základní pojmy	15
2.2 Elektrotechnické zákony	17
2.3 Základní elektronické součástky	18
2.3.1 Rezistory	19
2.3.2 Cívky	19
2.3.3 Kondenzátory	20
2.3.4 Diody	20
3 Modely	23
3.1 Sériový RL obvod	23
3.2 Sériový RC obvod	30
3.3 Dolní propust	36
3.4 Pásmová propust	44
3.5 Dvoucestný můstkový usměrňovač	53
Závěr	66
A Lambertova funkce W	67

Seznam obrázků

1	Způsoby zapojení rezistorů.	16
2	Příklad použití Prvního Kirchhoffova zákona.	18
3	Příklad použití Druhého Kirchhoffova zákona.	18
4	Schématická značka rezistoru.	19
5	Schématická značka cívky se vzduchovým jádrem.	19
6	Schématická značka kondenzátoru.	20
7	Voltampérová charakteristika diody. Zdroj: [9].	21
8	Schématická značka usměrňovací diody.	22
9	Sériový RL obvod.	23
10	Průběh proudu v sériovém RL obvodu.	25
11	Grafická interpretace časové konstanty v sériovém RL obvodu.	26
12	Hodnoty časové konstanty v sériovém RL obvodu.	27
13	Průběh napětí $u_R(t)$ a $u_L(t)$ v sériovém RL obvodu.	28
14	Průběh napětí $u_R(t)$ a $u_L(t)$ pro různé hodnoty τ v sériovém RL obvodu.	29
15	Sériový RC obvod.	30
16	Průběhy napětí $u_C(t)$ a $u_R(t)$ v sériovém RC obvodu.	32
17	Průběh proudu v sériovém RC obvodu.	33
18	Sériový RC obvod bez zdroje napětí U_0	34
19	Dolní propust.	36
20	Časové průběhy napětí U_{out} a U_{in} Low-pass filtru.	41
21	Fázová frekvenční charakteristika Low-pass filtru.	42
22	Modulová frekvenční charakteristika Low-pass filtru.	42
23	Frekvenční charakteristiky Low-pass filtru pro různé hodnoty τ , kde $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$	43
24	Pásmová propust.	44
25	Časové průběhy napětí $u_{out}(t)$ a $u_{in}(t)$ Band-pass filtru.	50
26	Modulová frekvenční charakteristika Band-pass filtru.	51
27	Fázová frekvenční charakteristika Band-pass filtru.	52
28	Dvoucestný můstkový usměrňovač.	53
29	Dvoucestný můstkový usměrňovač - chování obvodu pro $t \in [0, \frac{T}{2})$	54
30	Průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměrňovače - metoda konečných diferencí.	61
31	Přiblížený průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměrňovače - metoda konečných diferencí.	61
32	Přiblížený průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměrňovače - metoda konečných diferencí s délkou kroku $\Delta t = 0.0001$	62
33	Srovnání metody konečných diferencí s Lambertovou funkcí W - délka kroku $\Delta t = 0.001153$	63

34	Srovnání metody konečných diferencí ($\Delta t = 0.00001153$) s Lambertovou funkcí W ($\Delta t = 0.001153$).	63
35	Průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměřovače, kde $C = 50$ mF.	64
36	Průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměřovače, kde $R_Z = 100 \Omega$	65
37	Průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměřovače, kde $L = 20$ H.	65
38	Graf Lambertovy funkce W_0 a W_{-1} . Zdroj: [10].	67

Úvod

Diferenciální rovnice mají nepřeberné využití v praxi. Umožňují nám sestavovat matematické modely, které slouží k popisu a předvídání různých jevů ze spousty oborů přírodních, ekonomických či technických věd. Cílem této práce bude popsat a prozkoumat vybrané modely z elektrotechniky prostřednictvím obyčejných diferenciálních rovnic. Bude se zejména jednat o modely elektrických obvodů, které budou popsány obyčejnými lineárními diferenciálními rovnicemi 1. a 2. řádu.

V první kapitole je stručně popsána nejnútnejší teorie k obyčejným diferenciálním rovnicím. Obsahuje popis dvou analytických metod k hledání řešení obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 1. a 2. řádu s konstantními koeficienty.

Druhá kapitola se věnuje základním pojmům z elektrotechniky. Zaměřuje se na nejdůležitější definice a fakta, které zde budeme potřebovat. Obsahuje popis a základní vlastnosti čtyř elementárních elektronických součástek, které jsou použity v modelech elektrických obvodů v poslední kapitole.

Třetí kapitola obsahuje popis pěti elektrických obvodů. Čtyři z nich jsou variace obvodů skládající se z rezistoru, cívky a kondenzátoru. Poslední obvod, kromě těchto součástek, obsahuje i diodu. K příslušným obvodům je vždy odvozena diferenciální rovnice, která je posléze vyřešena. Na konkrétních příkladech (s reálnými hodnotami parametrů) jsou poté řešení příslušných diferenciálních rovnic vizualizovány na grafech.

1 Teorie diferenciálních rovnic

V této kapitole uvedeme základní pojmy z teorie obyčejných diferenciálních rovnic potřebné pro další kapitoly. Nejprve uveďme obecnou definici diferenciální rovnice n -tého řádu.

Definice 1.1 Necht' $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $F: D \rightarrow \mathbb{R}$. Obyčejnou diferenciální rovnicí n -tého řádu rozumíme rovnici ve tvaru

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0. \quad (1.1)$$

Dále uvedeme pojem *řešení rovnice (1.1)*.

Definice 1.2 Říkáme, že funkce $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je řešením rovnice (1.1) na intervalu J , jestliže:

- (i) $\forall t \in J: (t, h(t), h'(t), h''(t), \dots, h^{(n)}(t)) \in D$,
- (ii) $\forall t \in J: F(t, h(t), h'(t), h''(t), \dots, h^{(n)}(t)) = 0$.

Pokud k rovnici (1.1) uvažujeme podmínky, které musí funkce x splňovat, mluvíme o tzv. *počáteční úloze*.

Definice 1.3 Počáteční úlohou rozumíme úlohu najít řešení rovnice (1.1) společně s podmínkami

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, x''(t_0) = x_2, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1},$$

kde $t_0 \in J$, $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \in \mathbb{R}$.

Speciálním případem rovnice (1.1), ve které $x, x', \dots, x^{(n)}$ vystupují lineárně, se říká lineární diferenciální rovnice. My budeme uvažovat ještě speciálnější případ, a sice rovnice s konstantními koeficienty, viz následující definice.

Definice 1.4 Obyčejnou lineární diferenciální rovnicí n -tého řádu s kon-

stantními koeficienty rozumíme

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x^{(1)} + a_nx = q(t), \quad (1.2)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ a q je spojitá funkce v jistém otevřeném intervalu J .

V případě, že $q(t) = 0$ pro všechna $t \in J$, dostáváme tzv. *homogenní rovnici*

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x^{(1)} + a_nx = 0. \quad (1.3)$$

V této práci se budeme zabývat převážně lineárními rovnicemi s konstantními koeficienty, které budou nejvýše druhého řádu, tzn. $n \leq 2$.

1.1 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Uvažujme počáteční úlohu

$$x' + ax = q(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.4)$$

K nalezení řešení této počáteční úlohy použijeme metodu integračního faktoru. Uvažujme řešení x počáteční úlohy (1.4). Pokud diferenciální rovnici v (1.4) vynásobíme funkcí $\exp\left(\int a dt\right) = e^{at}$, dostaneme

$$x'(t)e^{at} + ax(t)e^{at} = q(t)e^{at}. \quad (1.5)$$

Na levé straně rovnosti je derivace součinu funkcí $x(t)$ a e^{at} . Rovnost (1.5) přepíšeme na

$$[x(t)e^{at}]' = q(t)e^{at}.$$

Integrací výše uvedené rovnosti od t_0 do t získáme

$$\int_{t_0}^t [x(s)e^{as}]' ds = \int_{t_0}^t q(s)e^{as} ds.$$

Dále platí

$$x(t)e^{at} - x(t_0)e^{at_0} = \int_{t_0}^t q(s)e^{as} ds.$$

Osamostatněním funkce $x(t)$ dostaneme

$$x(t) = x(t_0)e^{a(t_0-t)} + e^{-at} \int_{t_0}^t q(s)e^{as} ds, \quad (1.6)$$

což je řešení počáteční úlohy (1.4).

1.2 Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Mějme rovnici

$$a_0x'' + a_1x' + a_2x = q(t), \quad (1.7)$$

a její příslušnou homogenní rovnici

$$a_0x'' + a_1x' + a_2x = 0. \quad (1.8)$$

Poznámka 1.1 Množina všech řešení rovnice (1.8) tvoří dvoudimenzionální podprostor prostoru funkcí majících spojitě derivace druhého řádu. Bázi tohoto podprostoru nazýváme *fundamentálním systémem řešení* (dále FSŘ).

Následující věta popisuje vztah mezi řešeními rovnic (1.7) a (1.8).

Věta 1.1 *Je-li u řešení rovnice (1.8) na J a je-li \hat{x} nějaké řešení rovnice (1.7) na J , potom $u + \hat{x}$ je řešení (1.8) na J .*

Důkaz. viz [1], str. 75. □

Z Poznámky 1.1 a Věty 1.1 vyplývá, že každé řešení rovnice (1.7) lze psát

ve tvaru

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \hat{x}(t) \text{ pro } t \in J,$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, funkce x_1, x_2 tvoří FSŘ homogenní rovnice (1.8) a \hat{x} je nějaké konkrétní řešení rovnice (1.7) (partikulární). Tedy, abychom našli řešení nehomogenní rovnice, je třeba najít FSŘ příslušné homogenní rovnice a nějaké partikulární řešení nehomogenní rovnice. Řešení rovnice (1.8) hledáme ve tvaru $x(t) = e^{\lambda t}$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$, které když dosadíme do homogenní rovnice (1.8) a pokrátíme $e^{\lambda t}$ dostaneme tzv. *charakteristickou rovnici*, viz následující definice.

Definice 1.5 *Charakteristickou rovnici* k rovnici (1.8) rozumíme kvadratickou rovnici

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \quad (1.9)$$

Podle kořenů *charakteristické rovnice* rozlišujeme několik možností jak určit FSŘ.

Věta 1.2 *Mějme diferenciální rovnici (1.8). Jestliže pro kořeny λ_1, λ_2 rovnice (1.9) platí:*

(i) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$, pak

rovnice (1.8) má tento fundamentální systém řešení

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_2 t},$$

(ii) $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, pak

rovnice (1.8) má tento fundamentální systém řešení

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t},$$

(iii) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}, \overline{\lambda_1} = \lambda_2, \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak

rovnice (1.8) má fundamentální systém řešení ve tvaru:

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Důkaz. Jedná se o speciální případ Věty 2.19 pro rovnici druhého řádu z [1], str. 93. \square

K určení obecného řešení (1.7) potřebujeme nalézt ještě *partikulární řešení* \hat{x} . Ve třetí kapitole budeme uvažovat rovnici (1.7) s pravou stranou ve speciálním tvaru, proto budeme hledat *partikulární řešení* \hat{x} pomocí *metody neurčitých koeficientů*. Uvažujme rovnici (1.7) s pravou stranou ve tvaru

$$q(t) = e^{\alpha t} (P_1(t) \cos \beta t + P_2(t) \sin \beta t), \quad (1.10)$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, P_1, P_2 jsou polynomy stupňů m, n (pro nulové polynomy položíme $m, n = -1$). Označme k jako násobnost čísla $\alpha + i\beta$ jakožto kořene *charakteristické rovnice* (1.9) (pokud $\alpha + i\beta$ není kořenem (1.9), potom $k = 0$). Pak řešení rovnice (1.7) hledáme ve tvaru

$$\hat{x}(t) = t^k e^{\alpha t} (Q_1(t) \cos \beta t + Q_2(t) \sin \beta t), \quad (1.11)$$

kde Q_1, Q_2 jsou polynomy stupňů nejvýše $\max\{m, n\}$.

Stačí tedy nalézt koeficienty polynomů Q_1, Q_2 . Ty získáme dosazením vztahu (1.11) do zadané diferenciální rovnice a porovnáním levé a pravé strany rovnosti získáme vztahy pro koeficienty polynomů Q_1 a Q_2 .

2 Základy elektrotechniky

Tato kapitola představí jen ty nejdůležitější pojmy a fakta z elektrotechniky, které zde budeme potřebovat.

2.1 Základní pojmy

Definice 2.1 Elektrický náboj je fyzikální veličina, která vyjadřuje schopnost materiálu působit elektrickou silou.

Elektrický náboj se značí Q a měří se v Coulombech $[C]$. Mimo jiné platí *zákon o zachování elektrického náboje*, který říká, že náboj nelze vytvořit ani zničit, lze ho pouze přemístit. Částici se záporně nabitým nábojem se říká elektron.

Definice 2.2 Elektrický zdroj je elektrotechnická součástka, která obsahuje dvě vodivé elektrody. Elektrický zdroj udržuje mezi těmito dvěma elektrodami trvalé *elektrické napětí*.

Definice 2.3 Elektrické napětí je tvořeno rozdílem nábojů mezi dvěma místy.

Pokud k elektrickému zdroji připojíme vodič, začne procházet *elektrický proud*.

Definice 2.4 Elektrický proud je uspořádaným pohybem elektrických nábojů ve vodiči.

Elektrický proud se značí I a jeho jednotkou je Amper $[A]$. Vyjadřuje jaké množství náboje projde vodičem za jednotku času, popsáno rovnicí

$$i(t) = q'(t),$$

kde $i(t)$ je velikost proudu v čase t a $q(t)$ vyjadřuje množství náboje v čase t . Při analýzách obvodů platí konvence, že jako tok proudu je brán pohyb kladných nosičů náboje (ve skutečnosti je tvořen elektrony). My se této do-

hody budeme ve třetí kapitole držet.

Pokud se proud v čase nemění a je tedy konstantní, mluvíme o *stejnoseměrném proudu*. V opačném případě mluvíme o *střídavém proudu*. Střídavým proudem se nejčastěji proud se sinusovým průběhem, který popíšeme vztahem

$$u(t) = U_A \sin(\omega t),$$

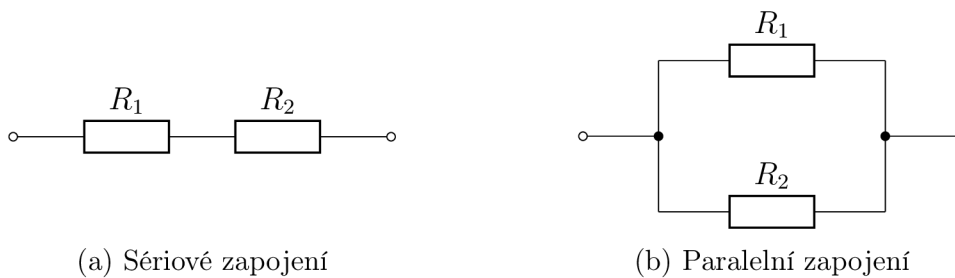
kde U_A je amplituda a $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence.

Definice 2.5 Elektrický odpor je charakteristická vlastnost každého vodiče a zabraňuje průchodu elektrického proudu.

Elektrický odpor se značí R a má jednotku Ohm $[\Omega]$.

Definice 2.6 Elektrický obvod je tvořen zdrojem a spotřebičem, který je ke zdroji připojen pomocí vodičů. Spotřebičem může být například žárovka, elektromagnet nebo motor.

Na Obrázku 1 je znázorněno co znamená, když rezistory (nebo jiné elektrotechnické součástky) zapojíme do série, případně paralelně. Navíc platí,



Obrázek 1: Způsoby zapojení rezistorů.

že při sériovém zapojení dvou a více součástek prochází všemi součástkami stejný proud. Při paralelním spojení je na všech součástkách stejný úbytek napětí.

2.2 Elektrotechnické zákony

Nyní si uvedeme tři nejdůležitější zákony, které budeme používat ve třetí kapitole.

Definice 2.7 Ohmův zákon říká, že poměr úbytku napětí na vodiči a proudu protékajícího tímto vodičem je konstantní. Matematicky vyjádřeno

$$R = \frac{U}{I}. \quad (2.1)$$

V analýzách obvodů si často nevystačíme pouze se zákonem popsáním v definici 2.7. Nicméně společně s Kirchhoffovými dvěma zákony získáme dostatečnou sadu nástrojů pro analýzu různě složitých elektrických obvodů.

Definice 2.8 (První Kirchhoffův zákon pro proudy v uzlu) Algebraický součet všech proudů v uzlu se rovná nule. Matematicky vyjádřeno

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0, \quad (2.2)$$

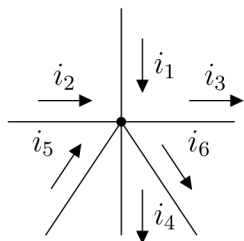
kde n je počet vodičů připojených k uzlu a i_k je k -tý proud vstupující (nebo vycházející) z uzlu.

Jinými slovy, součet proudů vtékajících do uzlu musí být roven součtu proudů vytékajících z uzlu. Pro uzel na Obrázku 2 platí rovnost

$$i_1 + i_2 + i_5 = i_3 + i_4 + i_6.$$

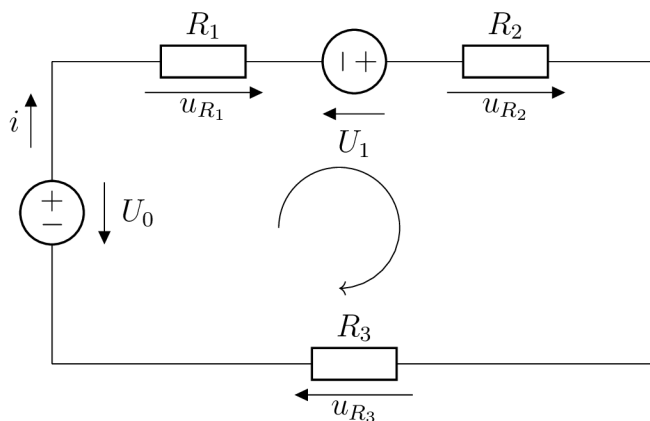
Definice 2.9 (Druhý Kirchhoffův zákon pro napětí kolem uzavřené smyčky) Algebraický součet napětí kolem uzavřené smyčky je roven nule. Vyjádřeno rovnicí

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0, \quad (2.3)$$



Obrázek 2: Příklad použití Prvního Kirchhoffova zákona.

kde n je počet úbytků napětí ve smyčce a u_k je k -té napětí v smyčce.



Obrázek 3: Příklad použití Druhého Kirchhoffova zákona.

Pro ilustraci Definice 2.9 uvažujme obvod na Obrázku 3. Obvod obsahuje dva zdroje U_0, U_1 , rezistory R_1, R_2, R_3 tvoří spotřebiče. Úbytky napětí na těchto rezistorech mají směr proudu procházejícího obvodem. Při průchodu smyčkou ve směru hodinových ručiček platí rovnost

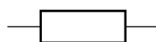
$$u_{R_1} - U_1 + u_{R_2} + u_{R_3} - U_0 = 0.$$

2.3 Základní elektronické součástky

V této části popíšeme základní elektronické součástky, které použijeme ve třetí kapitole.

2.3.1 Rezistory

Rezistory jsou elektronické součástky, jejichž charakteristickou vlastností je *elektrický odpor*. Ideální rezistory mají konstantní odpor, nicméně v reálném světě se rezistor průchodem proudu zahřívá, což zvýší jeho odpor. Jak moc se odpor rezistoru změní vlivem změny teploty, popisuje materiálová konstanta *Teplotní součinitel odporu* α , která bývá pro různé materiály uvedena v tabulkách. Na Obrázku 4 je znázorněna schématická značka rezistoru.



Obrázek 4: Schématická značka rezistoru.

2.3.2 Cívky

Cívky jsou elektronické součástky, jejichž charakteristickou vlastností je vlastní indukčnost L [H]. Cívka je tvořena navinutým drátem (nejčastěji měděným, aby měla co nejmenší odpor) kolem svého jádra, které bývá nejčastěji ze železa nebo feritu. Cívka jádro obsahovat ani nemusí, v tomto případě mluvíme o cívkách se vzduchovým jádrem. V obvodech se střídavým proudem v cívce vzniká elektrické napětí, které je indukované proměnným magnetickým polem v okolí cívky. Rovnice

$$u(t) = L i'(t), \quad (2.4)$$

kde L je vlastní indukčnost cívky, popisuje vztah mezi napětím a proudem v cívce. Na Obrázku 5 je znázorněna schématická značka cívky se vzduchovým jádrem.



Obrázek 5: Schématická značka cívky se vzduchovým jádrem.

2.3.3 Kondenzátory

Kondenzátory jsou elektronické součástky, jejichž charakteristickou vlastností je kapacita C [F]. Kondenzátor se skládá ze dvou vodivých desek (elektrod), které jsou odděleny nějakou elektricky nevodivou látkou - izolantem. Nejčastěji se jedná o vzduch, papír nebo keramiku. Kondenzátor je schopen nakumulovat energii na svých elektrodách a tu poté vydávat do obvodu. Čím větší má kondenzátor kapacitu, tím více energie je schopen uchovat. Proud kondenzátorem prochází pouze při měnícím se napětí, platí vztah

$$i(t) = Cu'(t), \quad (2.5)$$

kde C je kapacita kondenzátoru. Obrázek 6 znázorňuje schématickou značku kondenzátoru.



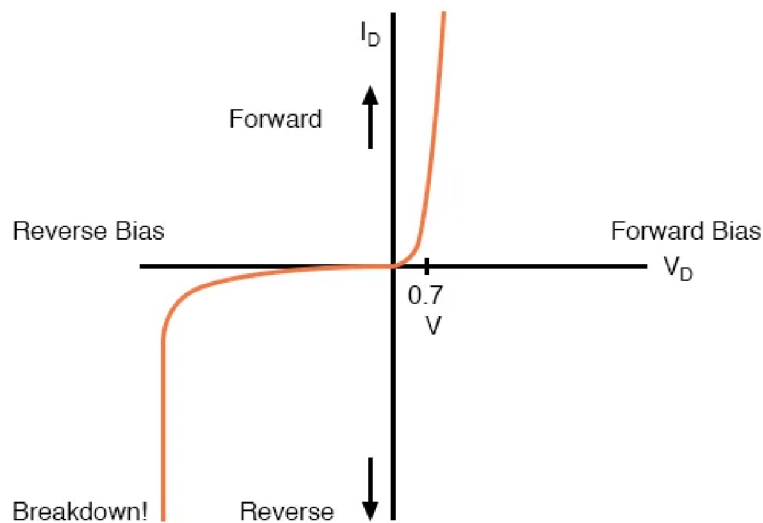
Obrázek 6: Schématická značka kondenzátoru.

2.3.4 Diody

Diody jsou polovodičové součástky, které mají dvě elektrody: anodu a katodu. Dioda se skládá z tzv. PN přechodu, který má tu vlastnost, že propouští elektrický proud pouze v jednom směru. Proto má dioda jiné voltampérové charakteristiky v propustném a závěrném směru. Na Obrázku 7 je znázorněno, jak taková voltampérová charakteristika diody může vypadat.

Voltampérové charakteristiky lze modelovat (s jistými omezeními) pomocí Shockleyho rovnice, viz [2], str. 456:

$$I_D = I_0 \left(e^{\frac{U_D}{nU_T}} - 1 \right), \quad (2.6)$$



Obrázek 7: Voltampérová charakteristika diody. Zdroj: [9].

kde

I_D - proud procházející diodou;

I_0 - saturační proud v závěrném směru, obvykle od $1 \mu\text{A}$ do 1fA ;

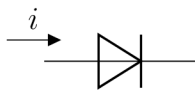
U_D - úbytek napětí na diodě;

n - emisní koeficient - konstanta určená konstrukcí diody;

U_T - tepelné napětí, při teplotě PN přechodu 25°C : $U_T \approx 25.7 \text{mV}$.

Vztah (2.6) nepopisuje velký závěrný proud, který je znázorněn na Obrázku 7 ve třetím kvadrantu. Pokud je dioda v propustném směru a její procházející proud klesne na nulu (což můžeme zařídit např. aplikací napětí opačné polarity), diodou přesto bude chvíli procházet proud (ale už opačné polarity), než se uvede do závěrného směru. Shockleyho rovnice toto nebere v potaz a předpokládá okamžité „přepnutí“ mezi propustným a závěrným směrem. Obrázek 8 znázorňuje schématickou značku usměrňovací diody. Šipka znázor-

ňuje, kterým směrem musí procházet proud, aby byla dioda v propustném směru.

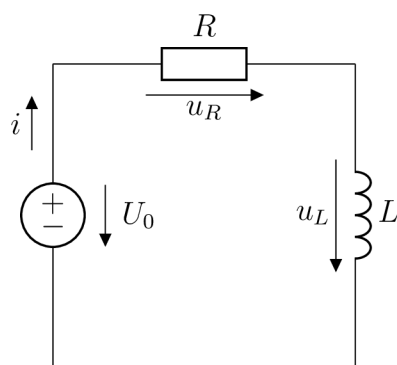


Obrázek 8: Schématická značka usměrňovací diody.

3 Modely

3.1 Sériový RL obvod

Sériový RL obvod se skládá z rezistoru s odporem R a cívky s indukčností L zapojených v sérii. Nyní prozkoumáme chování tohoto obvodu připojeného ke konstantnímu napětí U_0 , viz Obrázek 9.



Obrázek 9: Sériový RL obvod.

Předpokládejme, že jsme v čase $t = 0$ připojili k obvodu zdroj napětí. Při připojení zdroje vznikají na rezistoru a cívce úbytky napětí $u_R(t)$, respektive $u_L(t)$, a obvodem prochází proud $i(t)$.

Z II. Kirchhoffova zákona plyne

$$U_0 = u_R(t) + u_L(t).$$

Za $u_R(t)$ dosadíme z Ohmova zákona a pro napětí na cívce $u_L(t)$ použijeme vztah (2.4):

$$U_0 = R \cdot i(t) + L \cdot i'(t),$$

což je lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Rovnici upravíme tak, aby

koeficient u členu s derivací byl roven jedné. Dostaneme

$$i'(t) + \frac{R}{L} \cdot i(t) = \frac{U_0}{L}. \quad (3.1)$$

K rovnici (3.1) uvažujme počáteční podmínku

$$i(0) = 0, \quad (3.2)$$

tzn. v čase $t = 0$ obvodem neprochází proud. Potom řešení poč. úlohy (3.1), (3.2) je rovno

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad (3.3)$$

které jsme získali ze vztahu (1.6) dosazením $x_0 = 0, t_0 = 0, a = \frac{R}{L}$ a $q(s) = \frac{U_0}{L}$. Vidíme, že platí $i(0) = 0$, tedy proud je nulový (což je ostatně naše počáteční podmínka). Protože (3.3) je spojitá rostoucí funkce a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{U_0}{R} \cdot (1 - 0) = \frac{U_0}{R} =: i_A,$$

bude se velikost proudu s přibývajícím časem zvětšovat, přičemž nepřesáhne hodnotu $\frac{U_0}{R}$.

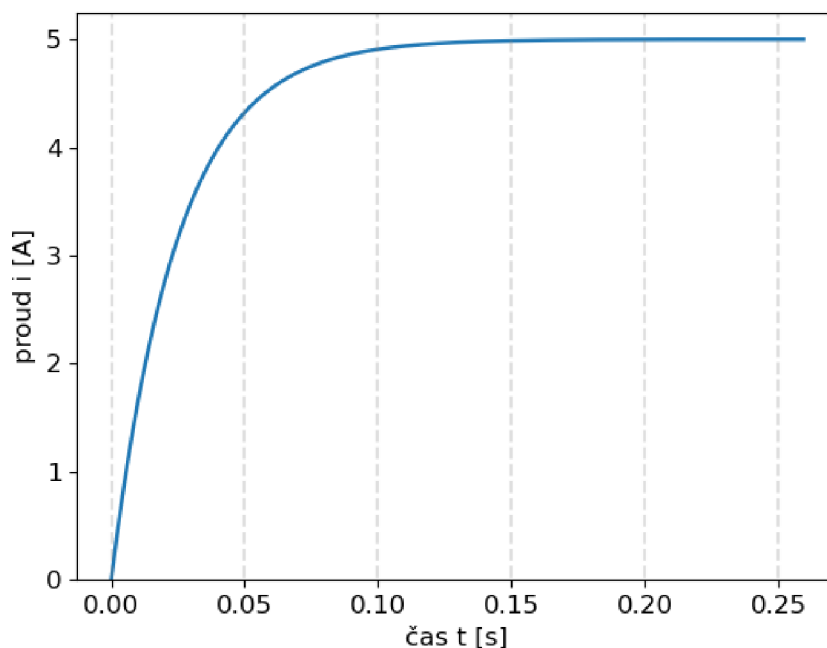
Na příkladu si ukažme jak vypadá průběh $i(t)$ a jak se mění při změnách hodnot R a L .

Příklad 3.1 Uvažujme sériový RL obvod, ve kterém odpor rezistoru R je 2Ω a indukčnost cívky L je 50 mH . Vše je připojeno ke zdroji konstantního napětí $U_0 = 10 \text{ V}$. Vykreslete průběh proudu obvodem $i(t)$ a proveďte diskuzi k hodnotám R a L .

Řešení. Známé hodnoty dosadíme do (3.3) a dostáváme

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{10}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{0.05}t}\right) = 5 \left(1 - e^{-40t}\right), \quad (3.4)$$

viz Obrázek 10.



Obrázek 10: Průběh proudu v sériovém RL obvodu.

Nyní si zavedeme proměnnou $\tau = \frac{L}{R}$, které budeme říkat *časová konstanta*. V našem příkladě nám *časová konstanta* říká, za jakou dobu dosáhne proud své největší hodnoty, pokud je jeho rychlost změny konstantní (viz [3], str. 207). V praxi to znamená, že za τ sekund sledovaná veličina nabyde přibližně 63 % svého maxima, což si ilustrujeme na našem příkladě.

Spočtěme jak vypadá rovnice tečny ke grafu funkce (3.4) v čase $t = 0$, který označíme t_0 . Nejdříve vypočteme derivaci (3.4)

$$i'(t) = [5(1 - e^{-40t})]' = 5(-e^{-40t} \cdot (-40)) = 200e^{-40t},$$

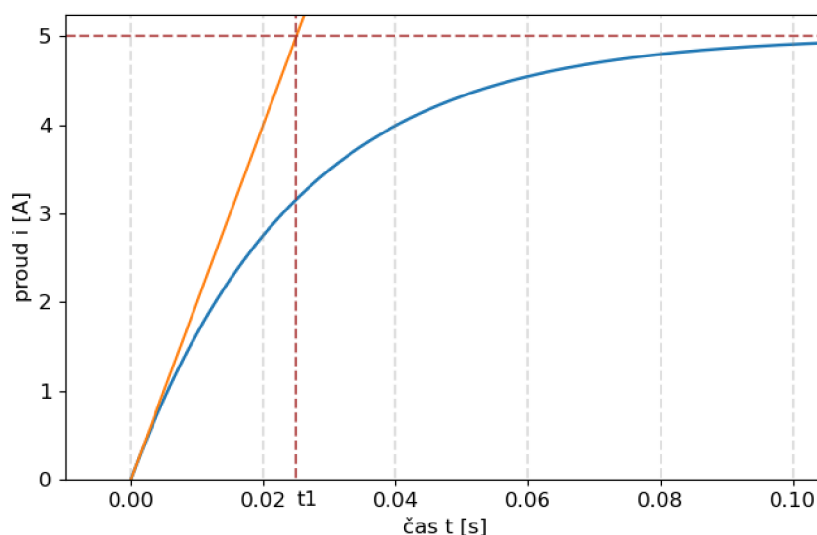
potom tečna sestavená v bodě t_0 se směrnicovým předpisem

$$y(t) = k \cdot (t - t_0) + q, \quad \text{kde } k, q \in \mathbb{R},$$

bude mít směrnici k rovnu $i'(0) = 200$. Koeficient q bude nulový, protože požadujeme $y(0) = 0$. Rovnice tečny v bodě $t_0 = 0$ ke grafu funkce (3.4) vypadá tedy následovně

$$y(t) = 200t.$$

Na Obrázku 11 oranžová úsečka znázorňuje vypočtenou tečnu, která v



Obrázek 11: Grafická interpretace časové konstanty v sériovém RL obvodu.

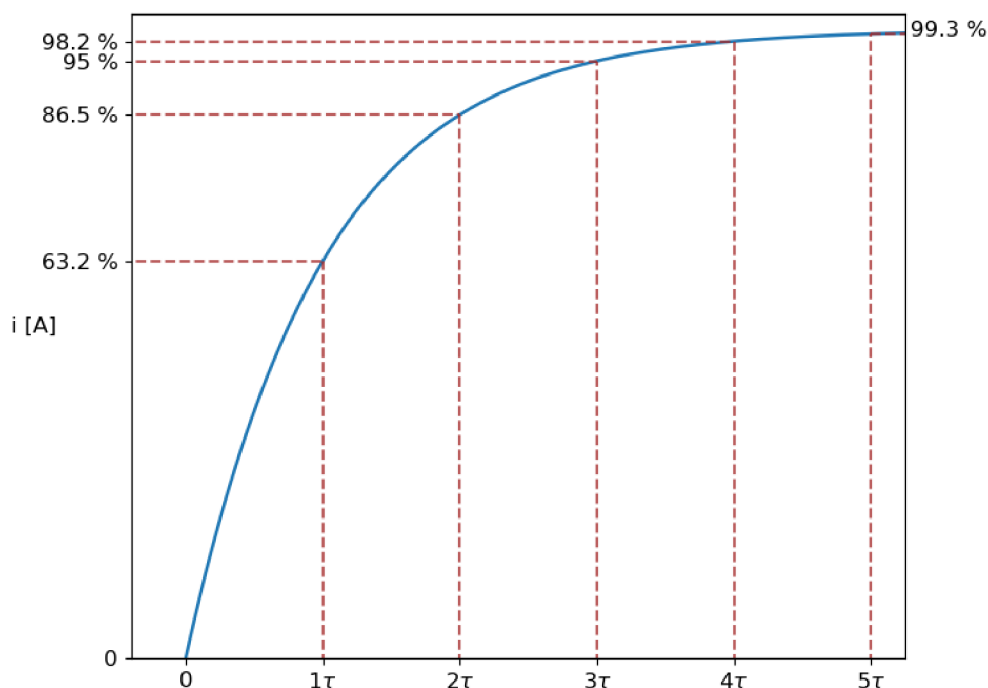
čase $t_1 = \tau = \frac{0.05}{2} = 0.025$ s dosahuje hodnoty $i_A = \frac{U_0}{R} = \frac{10}{2} = 5$, přitom $i(t_1)$ je rovno

$$i(t_1) = 5 (1 - e^{-40 \cdot 0.025}) = 5 (1 - e^{-1}) \doteq 3.16.$$

Podíl $\frac{i(t_1)}{i_A}$ nám potom dává

$$\frac{5 (1 - e^{-1})}{5} \doteq 0.632.$$

Pokud vodorovnou osu na Obrázcích 10 a 11 přepíšeme pomocí proměnné τ , dostaneme Obrázek 12.



Obrázek 12: Hodnoty časové konstanty v sériovém RL obvodu.

Například vidíme, že v čase $5\tau = 0.125\text{s}$, velikost proudu dosáhla 99.3% hodnoty $i_A = 5\text{ A}$, což je přibližně 4.97 A. Od tohoto času je relativní chyba od nového ustáleného stavu menší než 0.7%, což považujeme za ukončení přechodného děje. Rozhodnutí o ukončení přechodového jevu se řídí dle požadavků kladených na velikost relativní chyby.

Zatím jsme se zabývali pouze průběhem proudu, který teče celým obvodem. Funkce, která jej popisuje má tvar (3.4). Jejím vynásobením hodnotou R , získáme průběh napětí na rezistoru, dostaneme

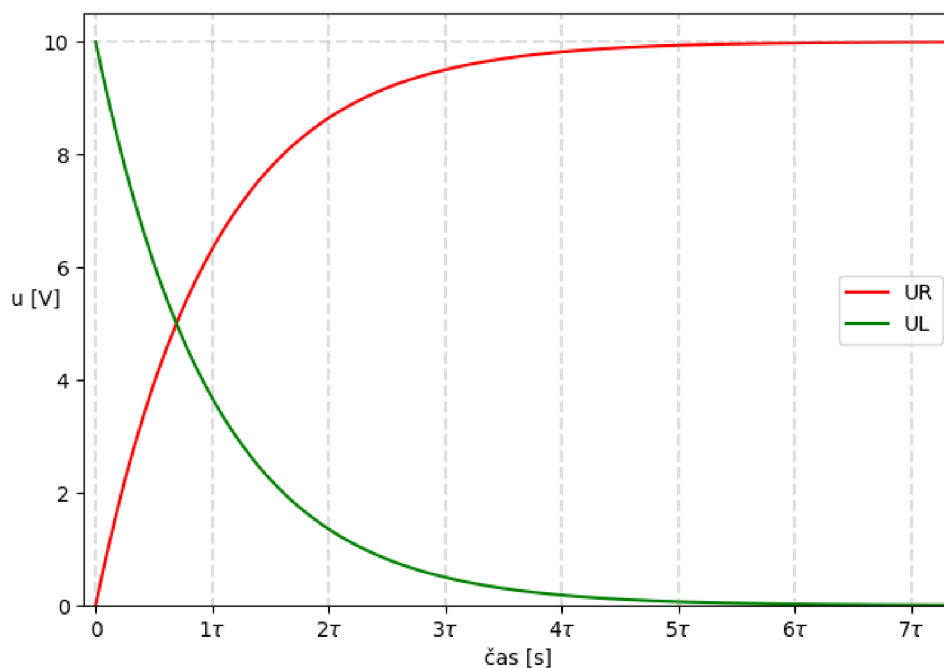
$$u_R(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = 10 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (3.5)$$

kde jsme za U_0 dosadili 10 V a použili vztah $\tau = \frac{L}{R}$. Pomocí rovnosti $U_0 =$

$u_R(t) + u_L(t)$ a výše uvedeného vztahu získáme průběh napětí na cívce $u_L(t)$, které má tvar

$$u_L(t) = U_0 e^{-\frac{R}{L}t} = 10 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3.6)$$

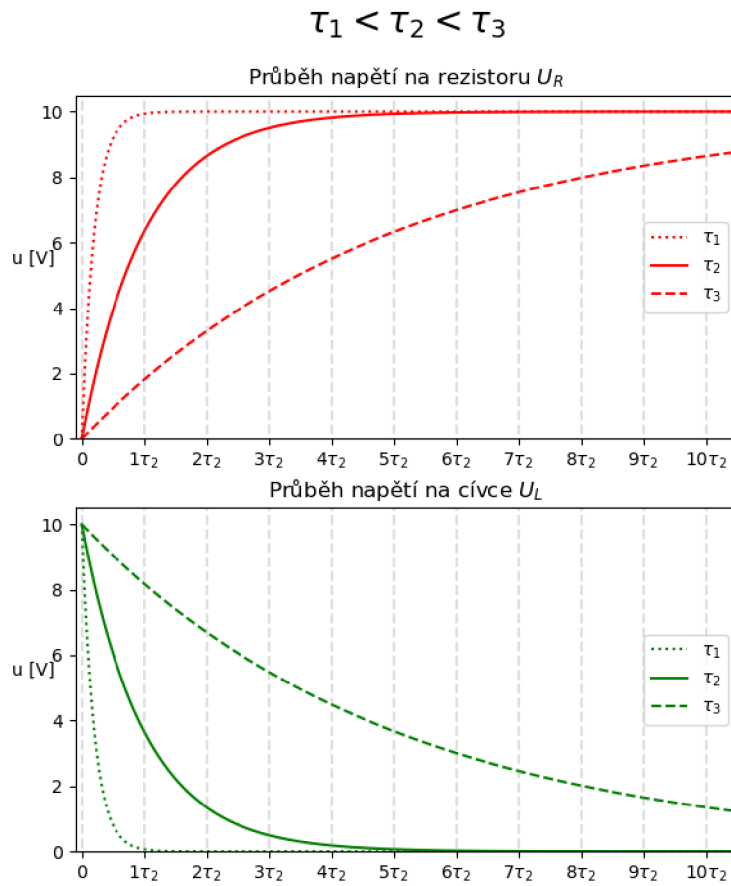
kde jsme opět dosadili za U_0 a $\frac{L}{R}$. Funkce (3.5) a (3.6) si vykreslíme, viz Obrázek 13.



Obrázek 13: Průběh napětí $u_R(t)$ a $u_L(t)$ v sériovém RL obvodu.

Jak se změní průběhy napětí $u_R(t)$ a $u_L(t)$ při změnách hodnot R a L ? Při fixní hodnotě odporu R a rostoucí indukčnost cívky L se bude *časová konstanta* $\tau = \frac{L}{R}$ zvětšovat, tedy napětí $u_R(t)$ (respektive $u_L(t)$) nabyde 63.2% (respektive 36.8%) své nové ustálené hodnoty mnohem později. Podobně pro fixní hodnotu indukčnosti L a klesající hodnotu R . Naopak, pokud fixujeme L a zvyšujeme hodnotu odporu R , bude hodnota τ příliš malá a přechodný děj rychle skončí. Na Obrázku 14 jsou znázorněny tři charakteristiky průběhů napětí $u_R(t)$ a $u_L(t)$ pro různé hodnoty τ . Konkrétně $\tau_1 = \frac{0.05}{10} = 5$ ms,

$$\tau_2 = \frac{0.05}{2} = 25 \text{ ms a konečně } \tau_3 = \frac{0.25}{2} = 125 \text{ ms.}$$

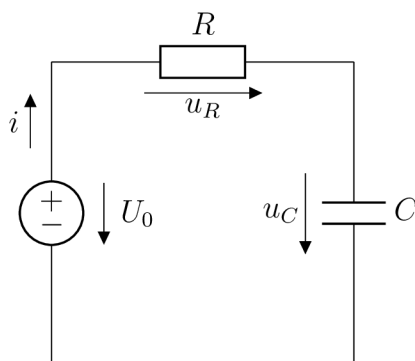


Obrázek 14: Průběh napětí $u_R(t)$ a $u_L(t)$ pro různé hodnoty τ v sériovém RL obvodu.



3.2 Sériový RC obvod

Podobně jako sériový RL obvod se i sériový RC obvod skládá z pasivních elektrotechnických součástí zapojených do série. Namísto cívky s indukčností L se zde nachází kondenzátor s kapacitou C společně s rezistorem s odporem R , které opět připojíme ke zdroji konstantního napětí U_0 , viz Obrázek 15.



Obrázek 15: Sériový RC obvod.

Opět vyjdeme z II. Kirchhoffova zákona, získáme

$$U_0 = u_R(t) + u_C(t),$$

za $u_R(t)$ dosadíme z Ohmova zákona, dostaneme

$$U_0 = R \cdot i(t) + u_C(t),$$

Proud procházející obvodem popíšeme vztahem (2.5), který dosadíme do předchozí rovnice a dostaneme

$$U_0 = R \cdot C \cdot u'_C(t) + u_C(t),$$

což je opět lineární dif. rovnice 1. řádu, kterou přepíšeme do tvaru

$$u'_C(t) + \frac{1}{RC}u_C(t) = \frac{U_0}{RC}. \quad (3.7)$$

Nyní uvažujme dvě situace.

(i) Kondenzátor C je vybitý a v čase $t = 0$ připojíme zdroj napětí, tzn. $u_C(0) = 0$ a $U_0 > 0$.

(ii) Kondenzátor je nabit na napětí zdroje U_0 . Zdroj je v čase $t = 0$ odpojen, tzn. $u_C(0) = U_0$ a pro $t > 0$ je $U_0 = 0$.

ad (i)

Dosazením $x_0 = 0, t_0 = 0, a = \frac{1}{RC}, q(s) = \frac{U_0}{RC}$ do (1.6) a upravením získáme rovnici

$$u_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad (3.8)$$

která je řešením rovnice (3.7) s poč. podmínkou $u_C(0) = 0$. V RC obvodech je *časová konstanta* τ dána vztahem $\tau = RC$ a říká nám totéž co u RL obvodů.

Příklad 3.2 (viz [3], str. 205, Exercise 62/1) Vybitý kondenzátor C s kapacitou $0.2 \mu\text{F}$ je zapojen do série s rezistorem R s odporem $100 \text{ k}\Omega$. K obvodu připojíme zdroj napětí $U_0 = 100 \text{ V}$. Vykreslete průběh napětí $u_C(t)$ na kondenzátoru C . Jaká je hodnota napětí $u_C(t)$ 10 ms po připojení zdroje? Za jak dlouho se kondenzátor nabije na 75 % své ustálené hodnoty napětí?

Řešení. Známé hodnoty dosadíme do (3.8), získáme

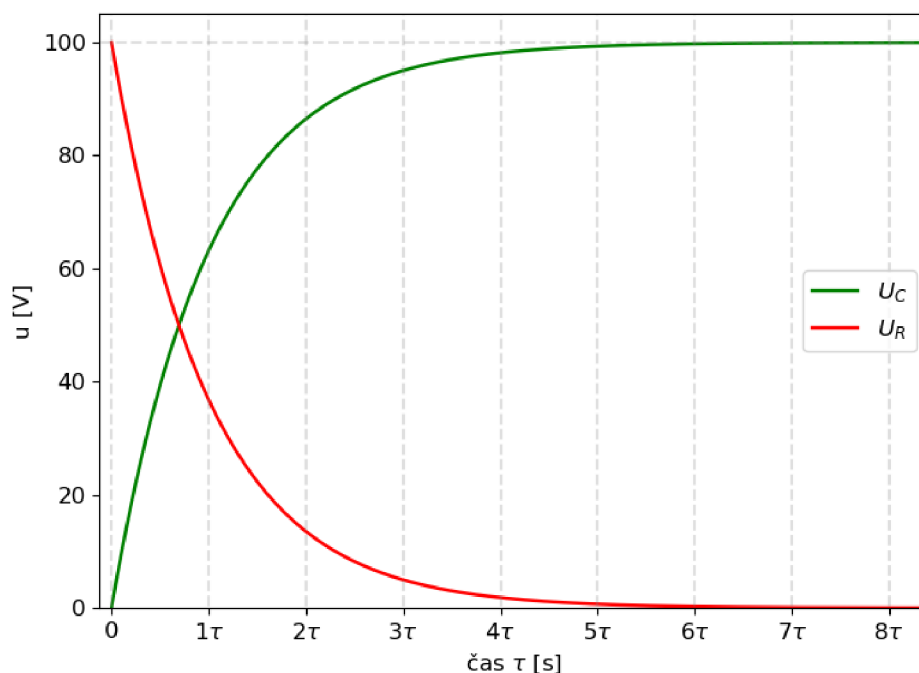
$$u_C(t) = 100 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

kde $\tau = RC = 100 \cdot 0.2 = 20 \text{ ms} = 0.02 \text{ s}$.

Pro názornost si určíme i úbytek napětí na rezistoru. Protože platí $U_0 = u_R(t) + u_C(t)$, dostáváme ihned

$$u_R(t) = 100 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.9)$$

Průběhy napětí $u_C(t)$ a $u_R(t)$ jsou znázorněny na Obrázku 16.

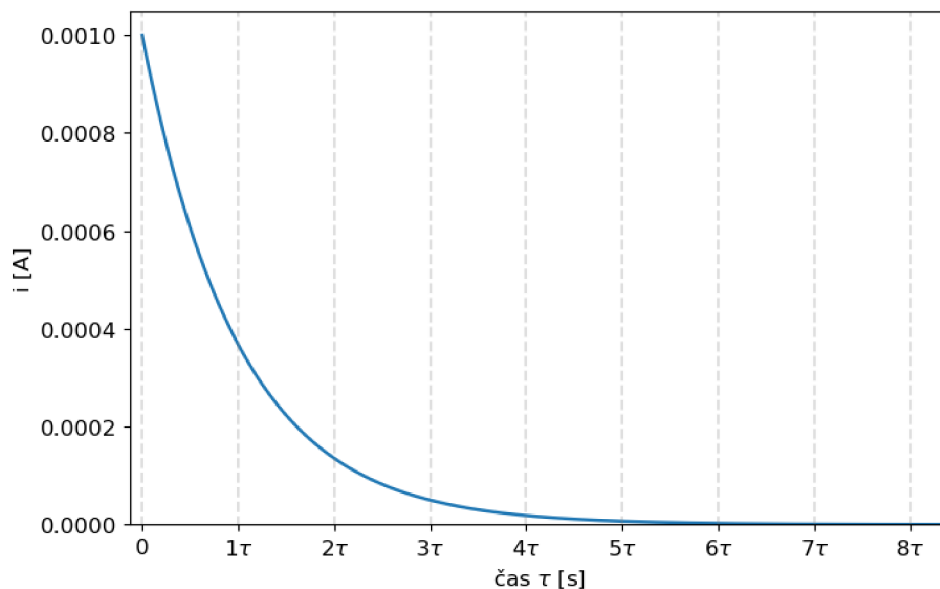


Obrázek 16: Průběhy napětí $u_C(t)$ a $u_R(t)$ v sériovém RC obvodu.

Můžeme si všimnout jisté (anti)symetrie s RL obvodem při fyzikálně stejné počáteční úloze. (Dříve jsme uvažovali cívku bez energie a připojení zdroje k obvodu v čase $t = 0$). Zatímco napětí na cívce $u_L(t)$ klesá s rostoucím časem, napětí na kondenzátoru $u_C(t)$ roste, podobně pro rezistor (srovnej průběhy napětí na Obrázcích 13 a 16).

To je dáno hlavním rozdílem mezi cívkou a kondenzátorem, a to tím, že cívka působí proti změnám proudu, zatímco kondenzátor působí proti změnám napětí. Proud obvodem (který získáme vydělením rovnice (3.9) hodnotou R)

by měl tedy klesat, viz Obrázek 17.



Obrázek 17: Průběh proudu v sériovém RC obvodu.

Nyní určíme velikost napětí $u_C(t)$ v čase $t = 10$ ms. Stačí jen dosadit do vzorečku pro $u_C(t)$, dostáváme

$$u_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 100 \left(1 - e^{-\frac{10 \times 10^{-3}}{0.02}}\right) \doteq 39.35 \text{ V.}$$

Kdy bude kondenzátor nabit na 75 % napětí zdroje ? Hledáme čas t_1 pro který platí následující rovnost

$$75 = 100 \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right),$$

která je ekvivalentní s rovností

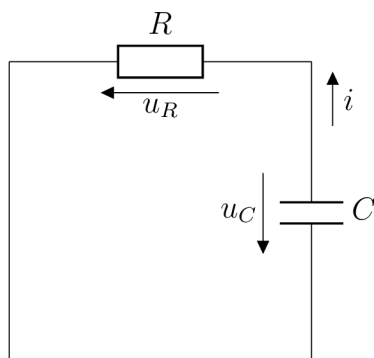
$$-\frac{t_1}{\tau} = \ln(0.25),$$

čas t_1 je tedy přibližně roven $t_1 = -0.02 \cdot \ln(0.25) \doteq 27.8 \text{ ms} \doteq 1.4\tau$. ○

Nyní se podíváme na situaci vybíjení kondenzátoru.

ad (ii)

Při odpojení zdroje vypadá schéma obvodu následovně, viz Obrázek 18.



Obrázek 18: Sériový RC obvod bez zdroje napětí U_0 .

Všimněme si opačných polarit napětí $u_R(t)$ a $u_C(t)$. Pokud dosadíme do (1.6) $x_0 = U_0, t_0 = 0, q(s) = 0, a = \frac{1}{\tau}$, dostaneme

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

kde $\tau = RC$. Druhý Kirchhoffův zákon pro obvod na obrázku 18 říká, že platí rovnost $u_R = -u_C$. Dokážeme tedy ihned určit vztahy pro napětí na rezistoru $u_R(t)$ a proud tekoucí obvodem.

$$u_R(t) = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{a} \quad i(t) = \frac{u_R(t)}{R} = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3.10)$$

kde $\tau = RC$ a $I_0 = \frac{U_0}{R}$.

Příklad 3.3 (viz [3], str. 205, Exercise 62/4) Kapacitor je zapojen do série s voltmetrem a baterií. Vnitřní odpor voltmetru činí $750 \text{ k}\Omega$. Jakmile se údaj ukázaný na voltmetru ustálí, je z obvodu odpojena baterie. Určete kapacitu kondenzátoru, pokud trvá 17 s , než údaj zobrazený na voltmetru klesne na dvě třetiny své původní hodnoty.

Řešení. Voltmetr je zařízení, které měří velikost napětí na nějakém spotřebiči. Nejčastěji se zapojuje paralelně k měřenému spotřebiči. Musí mít proto velký vnitřní odpor (ideálně nekonečný), aby ním procházel co nejmenší proud. Protože tím na voltmetru vzniká úbytek napětí a zmenšuje přesnost měření. Tedy, čím menší vnitřní odpor, tím větší je chyba naměřeného elektrického napětí.

V našem případě je voltmetr zcela netradičně zapojen v sérii s kondenzátorem. Chová se tedy jako běžný rezistor s odporem, který označíme R_i . Zpočátku obvodem teče proud $I_0 = \frac{U_B}{R_i} = \frac{U_B}{750 \times 10^3}$, kde U_B je napětí baterie. Tento proud bude díky voltmetru zpravidla malý až postupně klesne na nulu. Mezitím se kondenzátor nabije na napětí U_B , které bude navíc zobrazeno na voltmetru. Po odpojení baterie se začne kondenzátor vybíjet podle vztahu $u_C(t) = U_B e^{-\frac{t}{\tau}}$, kde $\tau = R_i C$. Ze zadání víme, že má platit

$$\frac{2}{3}U_B = u_C(17) = U_B e^{-\frac{17}{750 \times 10^3 \cdot C}},$$

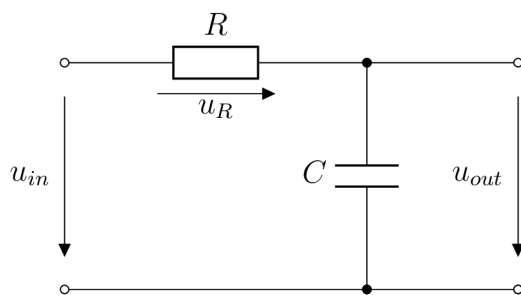
napětí U_B se nám zkrátí. Na rovnost aplikujeme funkci \ln , dostaneme

$$\ln \frac{2}{3} = -\frac{17}{750 \times 10^3 \cdot C}.$$

Kapacita kondenzátoru je potom přibližně rovna $C \doteq 55.9 \mu\text{F}$. ○

3.3 Dolní propust

Dolní propust (Low-pass filter) je frekvenční filtr, který propouští signál o nižších frekvencích. Skládá se z rezistoru a kondenzátoru. Využijeme tedy poznatky z předchozích úvah, kde tentokrát budeme uvažovat časově proměnný zdroj signálu. Mějme tedy rezistor R a kondenzátor C zapojený do série. Napětí $u_{in}(t)$ znázorňuje časově proměnný vstupní signál, napětí $u_{out}(t)$ potom signál výstupní, viz Obrázek 19.



Obrázek 19: Dolní propust.

Diferenciální rovnice popisující tento obvod je rovna

$$u'_{out}(t) + \frac{1}{RC}u_{out}(t) = \frac{u_{in}(t)}{RC}, \quad (3.11)$$

potom pro poč. podmínku $u_{out}(t_0) = u_{out}^0$ je řešení rovnice (3.11) ve tvaru

$$u_{out}(t) = u_{out}^0 e^{\frac{1}{RC}(t_0-t)} + e^{-\frac{1}{RC}t} \int_{t_0}^t \frac{u_{in}(s)}{RC} e^{\frac{1}{RC}s} ds. \quad (3.12)$$

Uvažujme, že zdrojový signál je ve tvaru

$$u_{in}(t) = U_A \sin(\omega t), \quad (3.13)$$

tedy sinusoida s amplitudou U_A a úhlovou frekvencí ω . Potom lze pomocí dvojnásobného použití metody integrace *per partes* odvodit následující vzo-

rec:

$$\int e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma) dt = \frac{\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} (\sin(\beta t + \gamma) - \frac{\beta}{\alpha} \cos(\beta t + \gamma))}{1 + (\frac{\beta}{\alpha})^2} + K, \quad (3.14)$$

kde $K \in \mathbb{R}$, který nám poslouží pro výpočet integrálu v rovnosti (3.12). Pokud je tedy napětí $u_{in}(t)$ v (3.12) určeno rovností (3.13), můžeme integrál v (3.12) vypočítat pomocí vzorce (3.14), kde $\alpha = \frac{1}{RC}$, $\beta = \omega$, $\gamma = 0$, dostaneme

$$u_{out}(t) = u_{out}^0 e^{\frac{1}{RC}(t_0-t)} + e^{-\frac{1}{RC}t} \frac{U_A}{RC} \cdot \frac{RC e^{\frac{1}{RC}t} [\sin(\omega t) - RC \omega \cos(\omega t)]}{1 + (RC\omega)^2}.$$

Upravením získáme vztah pro výstupní napětí $u_{out}(t)$

$$u_{out}(t) = u_{out}^0 e^{\frac{1}{RC}(t_0-t)} + \frac{U_A [\sin(\omega t) - RC \omega \cos(\omega t)]}{1 + (RC\omega)^2}. \quad (3.15)$$

Tento vztah se dá ještě upravit na pro nás výhodnější tvar pomocí následujícího lemmatu.

Lemma 3.1 (Harmonický součet) *Nechť $A, B \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí následující rovnost:*

$$A \sin t + B \cos t = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(t + \phi),$$

kde $\phi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$ a $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Speciálně

$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad \text{pro} \quad A = 0 \wedge B > 0; \quad \phi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{pro} \quad A = 0 \wedge B < 0.$$

Důkaz. $\forall A, B \in \mathbb{R}, A^2 + B^2 \neq 0$ platí:

$$A \sin t + B \cos t = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos t \right). \quad (3.16)$$

Jelikož

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1,$$

leží bod $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ na jednotkové kružnici a tedy existuje $\phi \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\cos \phi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \wedge \quad \sin \phi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad (3.17)$$

Z (3.16) s využitím (3.17) dále plyne

$$\sqrt{A^2+B^2} (\cos \phi \sin t + \sin \phi \cos t) = \sqrt{A^2+B^2} \sin(t+\phi).$$

Přitom,

1. je-li $A = 0$, pak

(a) je-li $B > 0$, pak $\cos \phi = 0 \wedge \sin \phi = 1$, tedy $\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

(b) je-li $B < 0$, pak $\cos \phi = 0 \wedge \sin \phi = -1$, tedy $\phi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

2. je-li $A \neq 0$, pak

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}} = \frac{B}{A},$$

tedy

$$\phi = \arctan \frac{B}{A} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□

Výstupní napětí $u_{out}(t)$ v (3.15) přepíšeme pomocí výše uvedeného lemmatu na

$$u_{out}(t) = \frac{U_A \sin(\omega t + \phi)}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} + u_{out}^0 e^{\frac{1}{RC}(t_0-t)}, \quad (3.18)$$

kde $\phi = \arctan(-RC\omega)$. Všimněme si, že pro nulovou počáteční podmínku je výstupní napětí $u_{out}(t)$ jen fázově posunutý vstupní signál $u_{in}(t)$ s faktorem $\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$. U frekvenčních filtrů nás často zajímá podíl amplitud výstupního a vstupního signálu, tzv. *přenos obvodu* G , který úzce souvisí s tzv. *přenosovou funkcí* H o které se čtenář může dozvědět více v [4], str. 614. Přenos obvodu je v našem případě roven

$$G = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}, \quad (3.19)$$

kde jsme za U_{out} , resp. U_{in} dosadili amplitudy z (3.18), resp. (3.13). Tento podíl amplitud vyšetřujeme v závislosti na ω . Při pohledu na rovnici (3.19) je zřejmé, že pro $\omega \rightarrow 0$ jde podíl k jedničce, tedy obě napětí mají skoro stejné amplitudy. Pro $\omega \rightarrow \infty$ jde amplituda výstupního napětí k nule.

Přenos obvodu se častěji počítá v decibelech následujícím způsobem (viz [4], str. 617)

$$G_{dB} = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}},$$

kde P_{out} je amplituda výkonu na výstupu obvodu a P_{in} je amplituda vstupního výkonu (dodávaného). My v našich úvahách ale počítáme s napětím. Tedy vzorec upravíme na následující tvar

$$G_{dB} = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}} = 10 \log \frac{U_{out}I}{U_{in}I} = 10 \log \frac{\frac{U_{out}^2}{R}}{\frac{U_{in}^2}{R}} = 20 \log \frac{U_{out}}{U_{in}}.$$

Frekvenci, při které výkonový přenos klesne na polovinu své maximální hodnoty, říkáme *mezní frekvence* (*cutoff frequency*), značíme f_c (viz [4], str. 639)¹.

¹To znamená, že pro *mezní frekvenci* f_c platí: $\frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{1}{2}$, $\frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. ($P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow$ pokud n -krát zmenšíme výkon, napětí se zmenší \sqrt{n} -krát.)

V řeči decibelů to znamená pokles přibližně o 3 dB, protože

$$G_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq -3.$$

Jak lze určit *mezní frekvenci*? Pohledem na rovnici (3.19) vidíme, že pro *mezní frekvenci* musí platit $RC2\pi f_c = 1$, tedy

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi\tau}. \quad (3.20)$$

Příklad 3.4 (viz [3], str. 174, Exercise 52/3) Mějme pasivní RC filtr jako na Obrázku 19. Nechť je obvod bez energie a vstupní signál je popsán vztahem $u_{in}(t) = 250 \sin 800t$. Velikost rezistoru je $R = 30 \Omega$ a velikost kondenzátoru je $C = 50 \mu\text{F}$. Určete výstupní napětí $u_{out}(t)$, *mezní frekvenci* f_c a fázový posun ϕ mezi vstupním a výstupním napětím. Nakreslete příslušné charakteristiky. *Řešení.* Napětí $u_{out}(t)$ určíme jednoduchým dosazením příslušných hodnot do vztahu (3.18), získáme

$$u_{out}(t) = \frac{250 \sin(800t + \phi)}{\sqrt{1 + 1.2^2}} = \frac{1250}{\sqrt{61}} \sin(800t + \phi).$$

Jak velký je fázový posun ϕ ? Platí

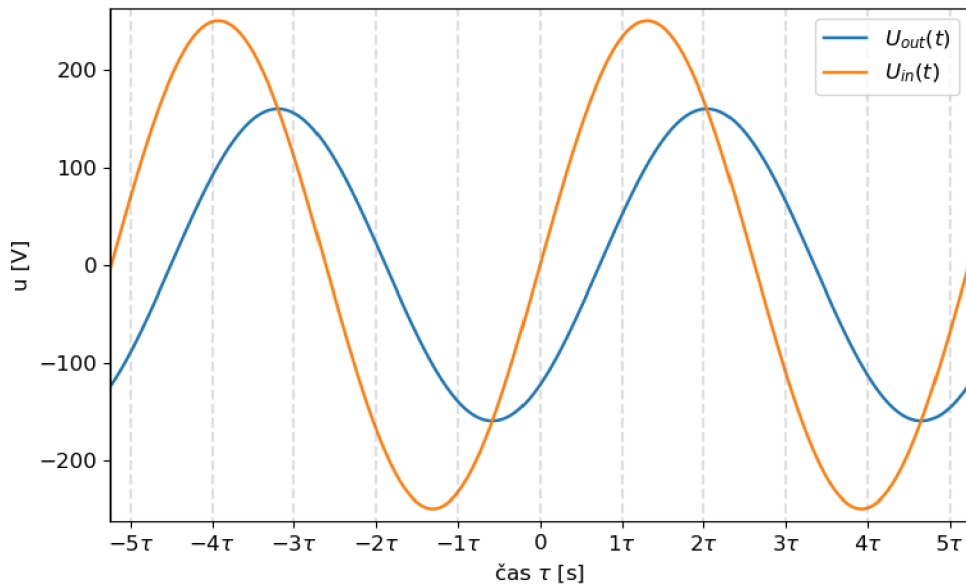
$$\phi = \arctan(-RC\omega) = \arctan(-1.2) \doteq -0.88 \text{ rad} \doteq -50^\circ.$$

Ještě určíme *mezní frekvenci* f_c , dostáváme

$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi \cdot 1.5 \cdot 10^{-3}} \doteq 106 \text{ Hz}.$$

Vykresleme si časový průběh napětí $u_{out}(t)$, viz Obrázek 20.

Ze vztahu (3.18) je zřejmé, že s rostoucí frekvencí klesá amplituda výstupního napětí $u_{out}(t)$ a roste i velikost fázového posunu ϕ . Při velkých

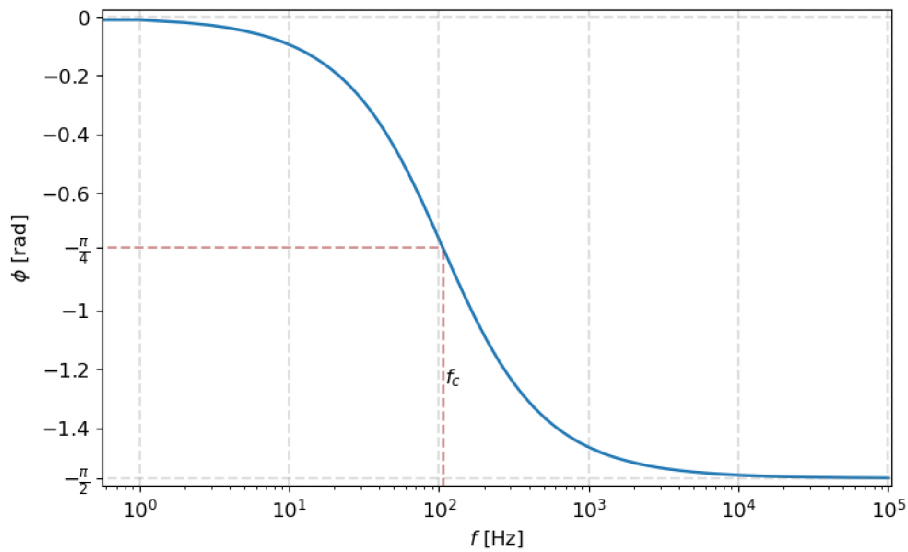


Obrázek 20: Časové průběhy napětí U_{out} a U_{in} Low-pass filtru.

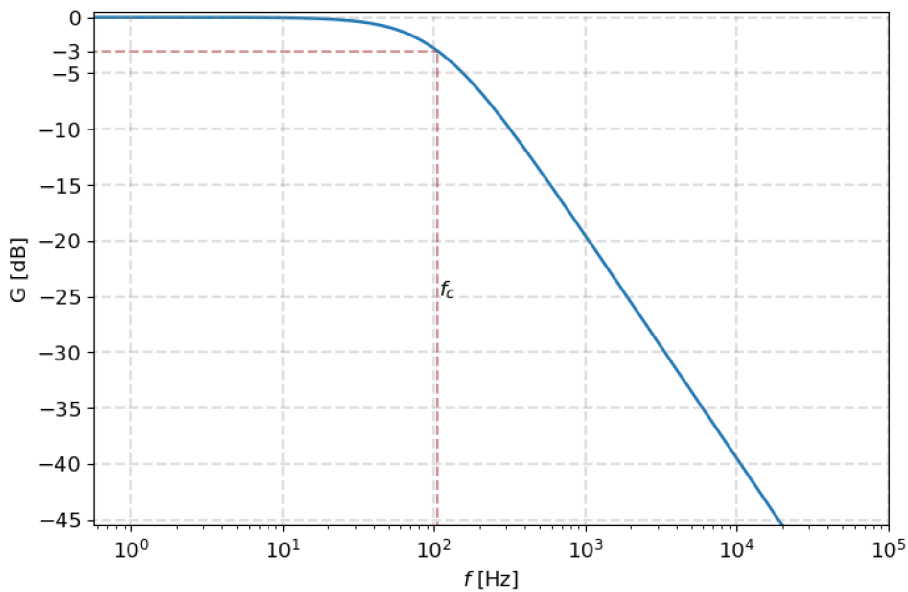
hodnotách f je výstupní signál zpožděn oproti vstupnímu limitně o $\frac{\pi}{2}$ rad, viz Obr. 21. Podobně to platí i pro velké hodnoty R a C . Na Obr. 21 mimo jiné vidíme, že pro *mezní frekvenci* f_c je fázový posun přesně $-\frac{\pi}{4}$ rad, což lze ověřit výpočtem $\phi = \arctan(-RC 2\pi f_c) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Závislost zesílení obvodu na frekvenci popisuje modulová frekvenční charakteristika, znázorněna, společně s mezní frekvencí f_c , na Obrázku 22. RC obvod z našeho příkladu tedy propouští signál o frekvencích v rozmezí $(0, f_c \doteq 106) \text{ Hz}$. Vstupní signál s frekvencí větší než je f_c už obvod velmi tlumí. Přitom z Obrázku 22 lze odhadnout, že zesílení obvodu, v pásmu frekvencí větších než f_c , klesá stejně rychle, konkrétně 20 dB/dekádu ². Skutečně, pro-

²Dekáda je interval mezi dvěma frekvencemi s poměrem 10; např. mezi 10 a 100 Hz.



Obrázek 21: Fázová frekvenční charakteristika Low-pass filtru.

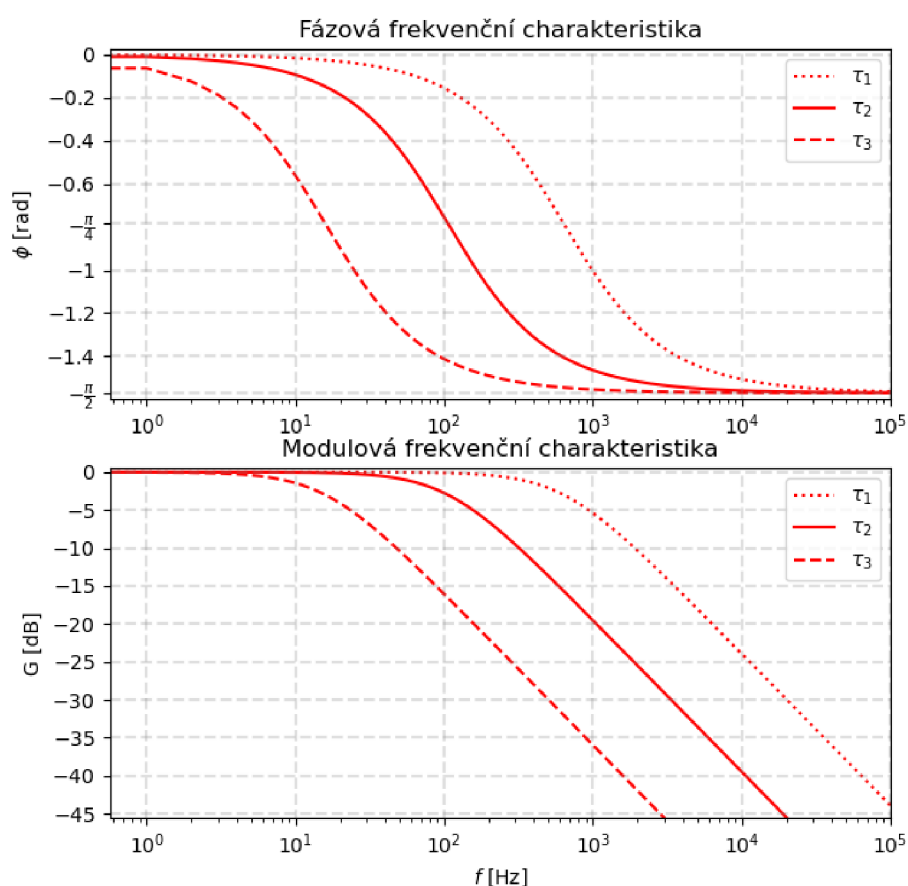


Obrázek 22: Modulová frekvenční charakteristika Low-pass filtru.

tože pro $\tau\omega \gg 1$ platí

$$\begin{aligned} \Delta G_{dB/dek} &= 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} - 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau 10\omega)^2}} = 20 \log \frac{\sqrt{1 + (\tau 10\omega)^2}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \\ &\approx 20 \log \frac{\sqrt{(\tau 10\omega)^2}}{\sqrt{(\tau\omega)^2}} = 20 \log 10 = 20. \end{aligned}$$

Na závěr si ještě ukážeme jak se mění frekvenční charakteristiky při změnách hodnot τ , tedy změnách hodnot R a C . Na Obrázku 23 jsou znázorněny tři různé frekvenční charakteristiky pro hodnoty τ_1, τ_2 a τ_3 , kde $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$. Na modulové frek. charakteristice si lze všimnout, že pro malé hodnoty τ je pásmo propustnosti³ širší, fázový posun ϕ mezi výstupním a vstupním signálem se mění mnohem pozvolněji. Pro velké τ je šířka pásma propustnosti malá a velikost fázového posunu roste rychleji.



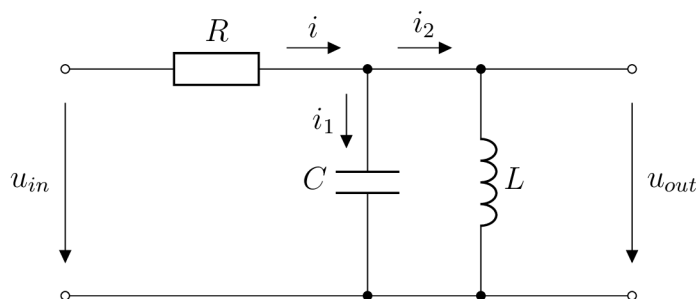
Obrázek 23: Frekvenční charakteristiky Low-pass filtru pro různé hodnoty τ , kde $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$.

○

³Pásmem propustnosti rozumíme rozdíl mezi nejvyšší a nejnižší frekvencí přenášeného signálu. V našem případě to jsou frekvence pro které platí $f \leq f_c$.

3.4 Pásmová propust

Pásmová propust (Band-pass filter) je frekvenční filtr, který propouští signál v určitém rozmezí frekvencí. My ho budeme implementovat pomocí sériově-paralelního zapojení rezistoru, kondenzátoru a cívky. Mějme tedy rezistor R , který je zapojen do série s paralelním zapojením cívky L a kondenzátoru C . Napětí $u_{in}(t)$ je časově proměnný vstupní signál, napětí $u_{out}(t)$ potom signál výstupní, viz Obrázek 24.



Obrázek 24: Pásmová propust.

K sestavení diferenciální rovnice pro obvod na Obr. 24 potřebujeme určit vztah mezi výstupním napětím $u_{out}(t)$ a vstupním napětím $u_{in}(t)$.

Z I. Kirchhoffova zákona pro proudy i, i_1, i_2 na Obr. 24 platí vztah $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$, pro jehož derivaci dále platí

$$i'(t) = i_1'(t) + i_2'(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_R'(t)}{R} = C u_C''(t) + \frac{1}{L} u_L(t), \quad (3.21)$$

kde jsme za proud i dosadili z Ohmova zákona $i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$, pro proudy i_1 , resp. i_2 procházející kondenzátorem, resp. cívku jsme použili vztahy z 2. kapitoly $i_1(t) = C u_C'(t)$ a $u_L(t) = L i_2'(t)$. Z druhého Kirchhoffova zákona platí

$$u_{in}(t) = u_R(t) + u_C(t), \quad (3.22)$$

přičemž, když si uvědomíme, že platí rovnosti $u_C(t) = u_L(t) = u_{out}(t)$, (C a

L jsou zapojeny paralelně), můžeme vyjádřením $u_R(t)$ z (3.22) upravit vztah (3.21) na

$$\frac{u'_{in}(t) - u'_{out}(t)}{R} = C u''_{out}(t) + \frac{1}{L} u_{out}(t),$$

vynásobením $\frac{1}{C}$ rovnice výše a uspořádáním členů dostaneme diferenciální rovnici, která modeluje průběh výstupního napětí $u_{out}(t)$ obvodu na Obr. 24.

$$u''_{out}(t) + \frac{1}{RC} u'_{out}(t) + \frac{1}{LC} u_{out}(t) = \frac{1}{RC} u'_{in}(t). \quad (3.23)$$

Jedná se tedy o lineární diferenciální rovnici 2. řádu. Pokud bude vstupní signál určen vztahem $u_{in}(t) = U_A \sin \omega t$, můžeme k nalezení *partikulárního řešení* \hat{u}_{out} rovnice (3.23) použít *metodu neurčitých koeficientů*, viz (1.11). Nejdříve ale najdeme *fundamentální systém řešení* výše uvedené rovnice. *Charakteristická rovnice* k rovnici (3.23) vypadá následovně

$$\lambda^2 + \frac{1}{RC} \lambda + \frac{1}{LC} = 0, \quad (3.24)$$

jejíž řešení je ve tvaru

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC}}. \quad (3.25)$$

Máme tedy tři situace, a to v závislosti podle znaménka výrazu pod odmocninou.

(i) $\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC} < 0$:

Řešení rovnice (3.24) je ve tvaru

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm i \frac{1}{2} \sqrt{\left| \frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC} \right|},$$

fundamentální systém řešení rovnice (3.23) je tvořen funkcemi u_1, u_2

$$u_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad u_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad (3.26)$$

kde $\alpha = -\frac{1}{2RC}$, $\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\left| \frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC} \right|}$.

(ii) $\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC} = 0$:

Řešení rovnice (3.24) je jeden kořen

$$\lambda = -\frac{1}{2RC},$$

fundamentální systém řešení je tvořen funkcemi

$$u_1(t) = e^{-\frac{1}{2RC}t}, \quad u_2(t) = te^{-\frac{1}{2RC}t}. \quad (3.27)$$

(iii) $\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC} > 0$:

Rovnice (3.24) má dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2 . *Fundamentální systém řešení* se skládá z funkcí

$$u_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad u_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \quad (3.28)$$

kde $\lambda_{1,2}$ je rovno (3.25). Nyní hledejme partikulární řešení \hat{u}_{out} rovnice (3.23).

Pro $u_{in}(t) = U_A \sin \omega t$ je pravá strana rovnice (3.23) rovna

$$\frac{1}{RC} \omega U_A \cos \omega t.$$

Můžeme tedy použít metodu řešení se speciální pravou stranou (viz (1.10)),

kde

$$\alpha = 0, \quad P_1(x) = \frac{1}{RC} \omega U_A, \quad \beta = \omega, \quad P_2(x) = 0,$$

navíc platí: $k = 0, m = 0, n = -1$. Partikulární řešení \hat{u}_{out} tedy hledáme ve tvaru

$$\hat{u}_{out}(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (3.29)$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Tento tvar řešení dosadíme do rovnice (3.23). Aby platila rovnost, musí pro koeficienty a, b platit

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{RC}b + \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)a &= \frac{1}{RC}\omega U_A \\ \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)b - \frac{\omega}{RC}a &= 0 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostáváme

$$a = \frac{U_A LR \omega (1 - LC \omega^2)}{L^2 \omega^2 + R^2 (1 - LC \omega^2)^2}, \quad b = \frac{U_A L^2 \omega^2}{L^2 \omega^2 + R^2 (1 - LC \omega^2)^2}.$$

Když tyto vztahy dosadíme do (3.29) a použijeme Lemma 3.1, dostaneme

$$\hat{u}_{out}(t) = \frac{U_A L \omega}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2 (1 - LC \omega^2)^2}} \sin(\omega t + \phi),$$

kde $\phi = \arctan\left(\frac{R(1 - LC \omega^2)}{L \omega}\right)$. Obecné řešení diferenciální rovnice (3.23) je rovno

$$u_{out}(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \frac{U_A L \omega}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2 (1 - LC \omega^2)^2}} \sin(\omega t + \phi), \quad (3.30)$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a funkce $u_1(t), u_2(t)$ jsou buď (3.26), (3.27) nebo (3.28). Pro úplnost ještě určíme přenos obvodu G , dostáváme

$$G = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{L \omega}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2 (1 - LC \omega^2)^2}}, \quad (3.31)$$

kde U_{in} je amplituda vstupního napětí a U_{out} je amplituda výstupního napětí v (3.30) (jelikož jsou reálné části kořenů *charakteristická rovnice* (3.24) záporné, funkce v (3.26), (3.27) a (3.28) se limitně blíží k nule pro $t \rightarrow \infty$. Proto uvažujeme amplitudu pouze partikulárního řešení). Z (3.31) už asi tušíme, že *mezních frekvencí* bude více. Řešíme rovnici pro neznámou ω (připomeňme, že pro *mezní frekvenci* platí, že napěťový přenos je roven $\frac{1}{\sqrt{2}}$):

$$\frac{L\omega}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.32)$$

která je ekvivalentní následujícím dvěma rovnostem

$$RLC\omega^2 \pm L\omega - R = 0. \quad (3.33)$$

Jedná se o kvadratické rovnice, proto jsou řešení $\omega_{1,2}$, $\omega_{3,4}$ rovnic z (3.33) ve tvaru

$$\omega_{1,2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 + 4R^2LC}}{2RLC}, \quad \omega_{3,4} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 + 4R^2LC}}{2RLC}.$$

Rovnost (3.32) je splněna pouze pro $\omega > 0$, proto z rovnice (3.33) uvažujeme řešení $\omega_{c_1}, \omega_{c_2}$, která jsou kladná. *Mezní frekvence* f_{c_1}, f_{c_2} jsou rovny

$$f_{c_1} = \frac{-L + \sqrt{L^2 + 4R^2LC}}{4\pi RLC}, \quad f_{c_2} = \frac{L + \sqrt{L^2 + 4R^2LC}}{4\pi RLC}. \quad (3.34)$$

Již jsme se zmínili, že Pásmová propust propouští signál v určitém pásmu frekvencí, nyní už víme, že toto pásmo má šířku $B = f_{c_2} - f_{c_1}$. Jak určíme frekvenci f_o , která je „uprostřed“ pásu B ? Jedná se o frekvenci při které je

přenos obvodu maximální. Hledáme tedy f_0 , při které platí

$$G = \frac{L\omega_0}{\sqrt{L^2\omega_0^2 + R^2(1 - LC\omega_0^2)^2}} = 1,$$

což je ekvivalentní rovnosti $R^2(1 - LC\omega_0^2)^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Frekvence f_0 je tedy rovna

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (3.35)$$

Poznamenejme ještě, že platí $f_0 = \sqrt{f_{c_1}f_{c_2}}$, tedy, že *střední frekvence* f_0 je geometrickým průměrem *mezních frekvencí* f_{c_1} a f_{c_2} .

Příklad 3.5 (hodnoty součástek z [4], str. 617, Example 14.2) Mějme obvod znázorněný na Obr. 24. Hodnoty součástek jsou $R = 4 \Omega$, $C = 0.5 \text{ F}$, $L = 2 \text{ H}$. Určete výstupní napětí $u_{out}(t)$, *mezní frekvenci* f_{c_1} , f_{c_2} , šířku pásma B a fázový posun ϕ mezi vstupním a výstupním napětím, pokud je vstupní napětí popsáno rovnicí $u_{in}(t) = 120 \sin 3t$. Nakreslete modulovou a fázovou frekvenční charakteristiku.

Řešení. Abychom určili jak vypadají funkce $u_1(t)$, $u_2(t)$ z (3.30), potřebujeme vypočítat diskriminant *charakteristické rovnice* k rovnici (3.23), dostáváme

$$D = \frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC} = \frac{1}{(4 \cdot 0.5)^2} - \frac{4}{2 \cdot 0.5} = -3.75.$$

Tedy, *fundamentální systém řešení* rovnice (3.23) se skládá z funkcí

$$u_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad u_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

kde $\alpha = -\frac{1}{4}$, $\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Dosazením známých hodnot do (3.30) dostaneme

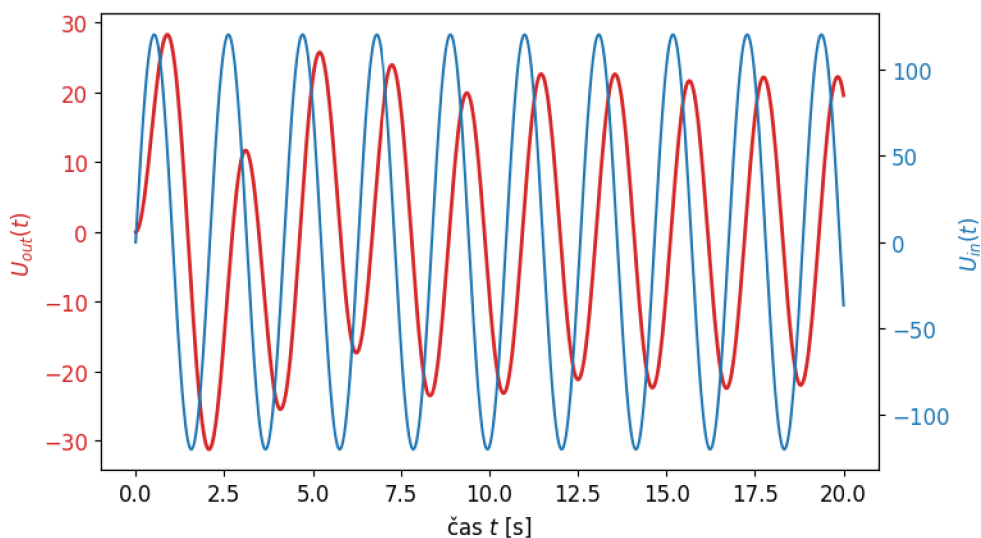
předpis pro výstupní napětí $u_{out}(t)$

$$u_{out}(t) = c_1 e^{-\frac{t}{4}} \cos \frac{\sqrt{15}}{4} t + c_2 e^{-\frac{t}{4}} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} t + \frac{72\sqrt{265}}{53} \sin(3t + \phi), \quad (3.36)$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\phi \doteq -79.38^\circ \doteq -1.39$ rad. Pokud zvolíme počáteční podmínky jako $u_{out}(0) = 0$, $u'_{out}(0) = 0$, dostaneme z (3.36) vztahy pro c_1, c_2

$$c_1 = -\frac{72\sqrt{265}}{53} \sin \phi, \quad c_2 = -\frac{24\sqrt{159}}{53} \sin \phi - \frac{288\sqrt{159}}{53} \cos \phi. \quad (3.37)$$

Na Obrázku 25 je znázorněn časový průběh napětí $u_{out}(t)$ z (3.36) společně s vstupním signálem $u_{in}(t)$, kde c_1, c_2 jsou určeny vztahy (3.37).



Obrázek 25: Časové průběhy napětí $u_{out}(t)$ a $u_{in}(t)$ Band-pass filtru.

Lze si všimnout působení funkcí $u_1(t), u_2(t)$ pro malé hodnoty t . Pro $t \rightarrow \infty$ se tento vliv vytrácí, protože např. pro $u_1(t)$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{4}} \cos \frac{\sqrt{15}}{4} t = 0,$$

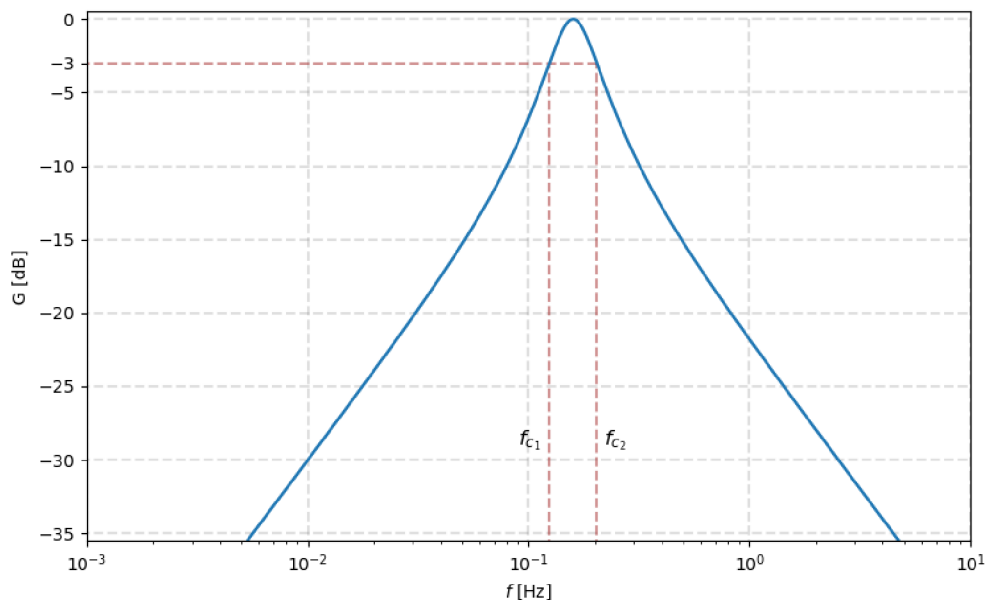
podobně pro $u_2(t)$. Mezní frekvence f_{c_1}, f_{c_2} určíme snadno pouhým dosazením

zadaných hodnot do (3.34). Dostaneme

$$f_{c_1} = \frac{-2 + \sqrt{2^2 + 4 \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot 0.5}}{4\pi \cdot 4 \cdot 2 \cdot 0.5} \doteq 0.124 \text{ Hz},$$

$$f_{c_2} = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4 \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot 0.5}}{4\pi \cdot 4 \cdot 2 \cdot 0.5} \doteq 0.204 \text{ Hz}.$$

Šířka pásma propustnosti je potom $B = f_{c_2} - f_{c_1} = 0.08 \text{ Hz}$. Nám tedy vyšlo velmi úzké rozmezí propustnosti. Šířku pásma můžeme zvětšit např. zmenšením hodnoty odporu R . Na Obrázku 26 je znázorněna modulová frekvenční charakteristika, společně s mezními frekvencemi f_{c_1}, f_{c_2} .



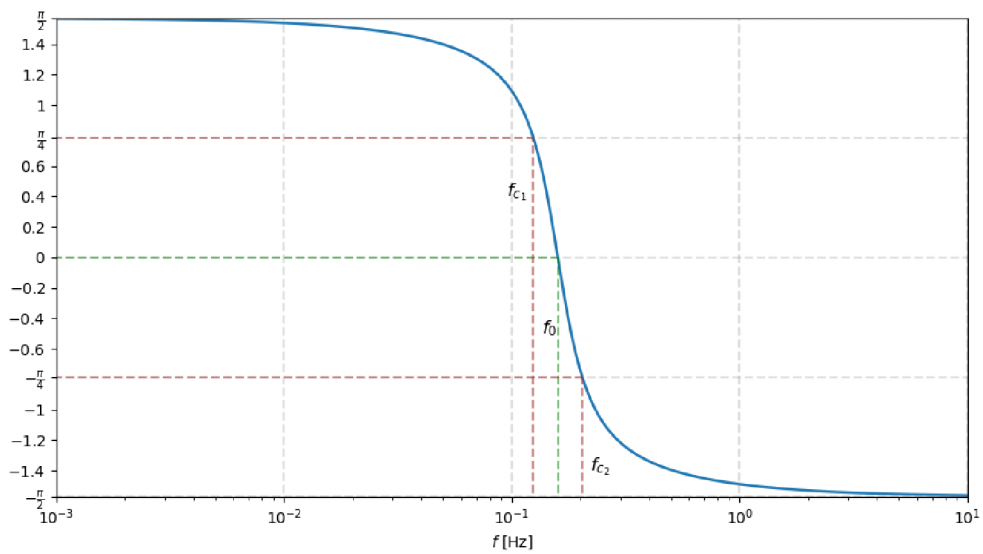
Obrázek 26: Modulová frekvenční charakteristika Band-pass filtru.

Ukažme si ještě jak vypadá fázová frekvenční charakteristika. Z Obrázku 27 vyčteme, že pásmová propust má fázový posun v intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, na rozdíl od dolní propusti, kde $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ (viz Obr. 21). Zároveň platí, že $\phi = \frac{\pi}{4}$ pro f_{c_1} a $\phi = -\frac{\pi}{4}$ pro f_{c_2} . Na Obr. 27 je zaznačená i *střední frekvence* f_0 , pro kterou je fázový posun mezi vstupním a výstupním signálem nulový. Skutečně,

pro f_0 můžeme psát

$$\phi = \arctan\left(\frac{R(1 - LC\omega_0^2)}{L\omega_0}\right) = \arctan\left(\frac{R(1 - 1)}{L\omega_0}\right) = \arctan 0 = 0,$$

kde jsme využili vztahu $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

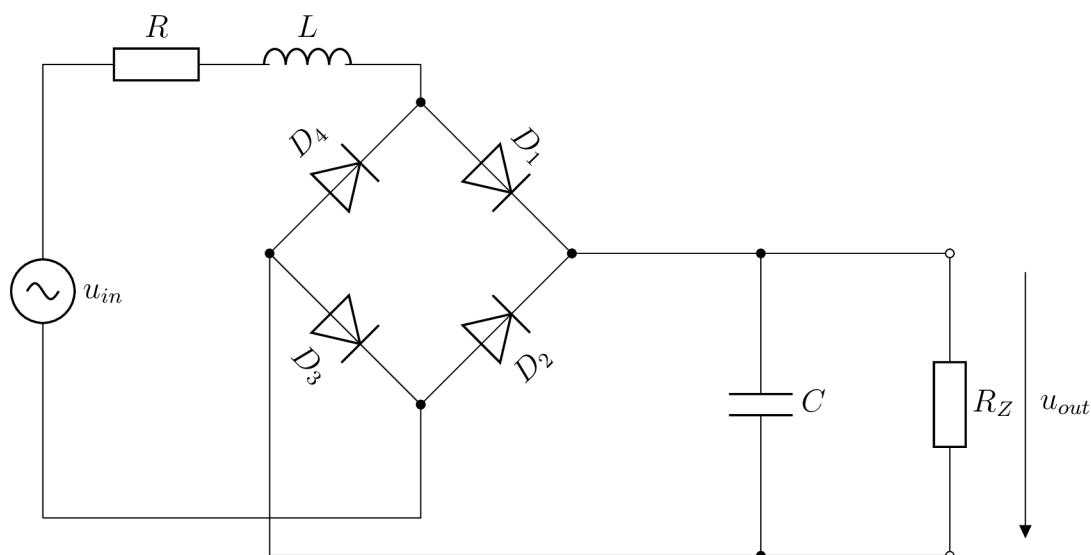


Obrázek 27: Fázová frekvenční charakteristika Band-pass filtru.



3.5 Dvoucestný můstkový usměrňovač

Usměrňovače slouží pro převod střídavého signálu na stejnosměrný. My se budeme zabývat můstkovým diodovým usměrňovačem, viz Obrázek 28.



Obrázek 28: Dvoucestný můstkový usměrňovač.

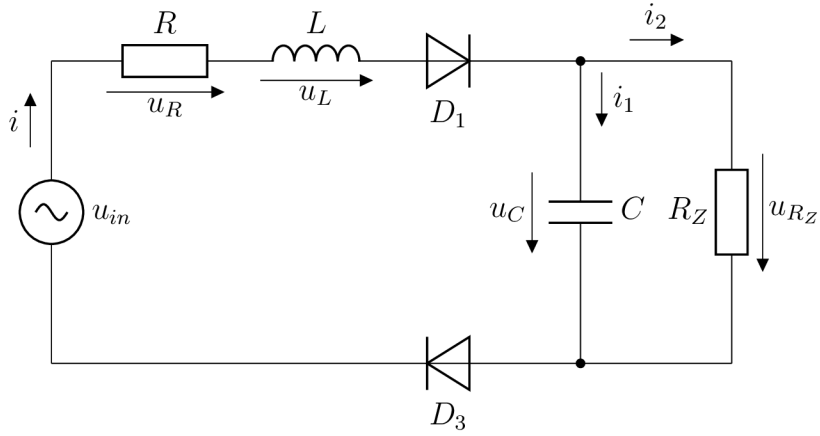
Uvažujme vstupní střídavý signál ve tvaru

$$u_{in}(t) = U_A \sin \omega t.$$

Nás bude zajímat časový průběh výstupního napětí $u_{out}(t)$. Zaměřme se nyní na časový interval $[0, \frac{T}{2})$, kde T je délka periody $u_{in}(t)$. V takovém případě teče proud pouze jedním směrem (uvažujme směr nahoru od zdroje u_{in} na Obrázku 28). Proud prochází prvky R a L přes diodu D_1 , pokračuje přes rezistor R_Z a vrací se diodou D_3 zpátky do zdroje $u_{in}(t)$. Diody D_4 a D_2 jsou v závěrném směru. Tato část obvodu je znázorněna na Obrázku 29.

Dle prvního Kirchhoffova zákona pro proudy i, i_1, i_2 platí

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t).$$



Obrázek 29: Dvoucestný můstkový usměrňovač - chování obvodu pro $t \in [0, \frac{T}{2})$.

Předpokládejme, že $D_1 \equiv D_3$, tedy že diody mají stejné parametry (v realitě toho nikdy nedosáhneme, nicméně jsme schopni se tomuto požadavku aspoň přiblížit). Za i dosadíme vztah (2.6), za i_1 dosadíme vztah pro procházející proud kondenzátorem (2.5) a za i_2 dosadíme z Ohmova zákona, dostaneme

$$I_0 \left(e^{\frac{u_D(t)}{nU_T}} - 1 \right) = C u'_C(t) + \frac{u_{R_Z}(t)}{R_Z}. \quad (3.38)$$

Podle druhého Kirchhoffova zákona pro úbytky napětí v obvodu na Obrázku 29 platí

$$u_{in}(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_{D_1}(t) + u_C(t) + u_{D_3}(t), \quad (3.39)$$

přičemž předpokládáme, že $u_{D_1}(t) = u_{D_3}(t) = u_D(t)$ pro všechna t . Navíc, když si uvědomíme, že $u_C(t) = u_{R_Z}(t) = u_{out}(t)$ pro každé t , z rovnice (3.39) vyjádříme úbytek napětí na diodě a ten následně dosadíme do (3.38), dosta-

neme

$$I_0 \left[\exp \left(\frac{u_{in}(t) - u_{out}(t) - u_R(t) - u_L(t)}{2nU_T} \right) - 1 \right] = C u'_{out}(t) + \frac{u_{out}(t)}{R_Z}. \quad (3.40)$$

Dále platí

$$\begin{aligned} u_R(t) + u_L(t) &= R i(t) + L i'(t) \\ &= R \left(C u'_{out}(t) + \frac{u_{out}(t)}{R_Z} \right) + L \left(C u''_{out}(t) + \frac{u'_{out}(t)}{R_Z} \right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

kde jsme v první rovnosti využili Ohmův zákon a vztah (2.4), ve druhé rovnosti jsme za $i(t)$ resp. $i'(t)$ dosadili rovnost (3.38) resp. její derivaci s využitím faktu, že $u_C(t) = u_{R_Z}(t) = u_{out}(t)$ pro každé t . Dosazením (3.41) do (3.40) a upravením získáme

$$\begin{aligned} \frac{I_0}{C} \left\{ \exp \left[\frac{1}{2nU_T} \left(u_{in}(t) - u_{out}(t) - RC u'_{out}(t) - \frac{R}{R_Z} u_{out}(t) - LC u''_{out}(t) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{L}{R_Z} u'_{out}(t) \right) \right] - 1 \right\} \\ - \frac{u_{out}(t)}{C R_Z} = u'_{out}(t), \end{aligned} \quad (3.42)$$

což je nelineární diferenciální rovnice druhého řádu, která popisuje chování obvodu na Obrázku 29. Poznamenejme, že tato rovnice modeluje chování obvodu na Obrázku 28 pro $t \in [0, \frac{T}{2}]$. Nicméně analogicky můžeme odvodit model i pro $t \in [\frac{T}{2}, T]$. Pro tento čas by se v obvodu na Obr. 29 změnil směr proudu a diody D_1, D_3 bychom nahradili diodami D_2 a D_4 a všechny odvozené rovnosti by pořád platily. Za předpokladu, že všechny čtyři diody mají stejné parametry, bychom mohli v modelu (3.42) pro $t \in [\frac{T}{2}, T]$ změnit

$u_{in}(t)$ na $-u_{in}(t)$. Můžeme tedy psát, že pro každé $t \geq 0$ rovnice

$$\frac{I_0}{C} \left\{ \exp \left[\frac{1}{2nU_T} \left(|u_{in}(t)| - u_{out}(t) - RCu'_{out}(t) - \frac{R}{R_Z} u_{out}(t) - LCu''_{out}(t) - \frac{L}{R_Z} u'_{out}(t) \right) \right] - 1 \right\} - \frac{u_{out}(t)}{CR_Z} = u'_{out}(t), \quad (3.43)$$

modeluje průběh výstupního napětí v obvodu na Obrázku 28. Jelikož je tato rovnice nelineární, je velmi obtížné najít její analytické řešení, my ji proto budeme řešit numericky. Budeme postupovat tak, že rovnici (3.43) zdiskretizujeme, tedy interval, ve kterém hledáme řešení, rozdělíme pomocí konečného počtu bodů, ve kterých splníme diferenciální rovnici přibližně, a to tak, že derivace nahradíme diferenčními formulemi. Tento způsob řešení se nazývá *metoda konečných diferencí*. Následně si ukážeme, jak se tato zdiskretizovaná rovnice dá vyřešit pomocí *Lambertovy funkce W*, viz Appendix (A).

(i) „Klasická“ metoda konečných diferencí:

Uvažujme rovnici (3.43) s počátečními podmínkami

$$u_{out}(0) = u'_{out}(0) = 0. \quad (3.44)$$

Rovnice (3.43) rozřešená vzhledem k $u''_{out}(t)$ má tvar

$$\begin{aligned}
u''_{out}(t) = & -\frac{2nU_T}{LC} \ln \left(\frac{u_{out}(t)}{I_0 R_Z} + \frac{C}{I_0} u'_{out}(t) + 1 \right) \\
& - \left(\frac{1}{C R_Z} + \frac{R}{L} \right) u'_{out}(t) \\
& - \left(\frac{R}{L C R_Z} + \frac{1}{L C} \right) u_{out}(t) \\
& + \frac{1}{L C} |u_{in}(t)|.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Nyní aproximujeme $u''_{out}(t)$ využitím dopředné diference, vyjádřené pomocí $u'_{out}(t)$, dostaneme

$$u''_{out}(t) \approx \frac{u'_{out}(t + \Delta t) - u'_{out}(t)}{\Delta t}, \tag{3.46}$$

pro nějaké malé Δt . Pokud takto vyjádřenou druhou derivaci $u''_{out}(t)$ dosadíme do rovnice (3.45), ze které vyjádříme $u'_{out}(t + \Delta t)$, dostaneme

$$\begin{aligned}
u'_{out}(t + \Delta t) \approx & -\frac{2\Delta t n U_T}{L C} \ln \left(\frac{u_{out}(t)}{I_0 R_Z} + \frac{C}{I_0} u'_{out}(t) + 1 \right) \\
& - \left(\frac{\Delta t}{C R_Z} - 1 + \frac{R \Delta t}{L} \right) u'_{out}(t) \\
& - \left(\frac{R \Delta t}{L C R_Z} + \frac{\Delta t}{L C} \right) u_{out}(t) \\
& + \frac{\Delta t}{L C} |u_{in}(t)|.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Máme tedy určen explicitní vztah pro $u'_{out}(t + \Delta t)$. My ale chceme určit hodnoty $u_{out}(t)$, ne jejich derivace. K tomu nám opět poslouží dopředná diference

$$u'_{out}(t) \approx \frac{u_{out}(t + \Delta t) - u_{out}(t)}{\Delta t}, \tag{3.48}$$

ze které vyjádříme $u_{out}(t + \Delta t)$. Vztahy (3.47) a (3.48) nám určují iterační

metodu

$$\begin{aligned}
U'_{out}{}^{(i+1)} &= -\frac{2\Delta t nU_T}{LC} \ln \left(\frac{U_{out}^{(i)}}{I_0 R_Z} + \frac{C}{I_0} U'_{out}{}^{(i)} + 1 \right) \\
&\quad - \left(\frac{\Delta t}{CR_Z} - 1 + \frac{R\Delta t}{L} \right) U'_{out}{}^{(i)} \\
&\quad - \left(\frac{R\Delta t}{LCR_Z} + \frac{\Delta t}{LC} \right) U_{out}^{(i)} \\
&\quad + \frac{\Delta t}{LC} |U_{in}^{(i)}|, \\
U_{out}{}^{(i+1)} &= U_{out}^{(i)} \Delta t + U_{out}^{(i)},
\end{aligned} \tag{3.49}$$

pro $i = 0, 1, 2, \dots, N$ s délkou kroku Δt , kde hodnoty $U_{in}^{(i)}$ jsou dány pro všechna i .

K jiné iterační metodě se lze dostat pomocí *Lambertovy funkce W*, viz [8].

(ii) Metoda konečných diferencí a Lambertova funkce W:

V rovnici (3.43) nahradíme derivace příslušnými diferencemi, tentokrát použijeme zpětné diference. V rovnici (3.43) tedy nahradíme $u'_{out}(t)$, $u''_{out}(t)$ následujícími vztahy

$$\begin{aligned}
u'_{out}(t) &\approx \frac{u_{out}(t) - u_{out}(t - \Delta t)}{\Delta t}, \\
u''_{out}(t) &\approx \frac{u_{out}(t) - 2u_{out}(t - \Delta t) + u_{out}(t - 2\Delta t)}{\Delta t}.
\end{aligned}$$

Po pár úpravách se dostaneme k následující rovnici

$$\begin{aligned}
\frac{I_0}{C} \left\{ \exp \left[\frac{1}{2nU_T} \left(u_{in}(t) + \left(\frac{R_Z RC \Delta t + 2LCR_Z + L\Delta t}{R_Z (\Delta t)^2} \right) u_{out}(t - \Delta t) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. - \left(1 + \frac{(L + R\Delta t)(R_Z C + \Delta t)}{R_Z (\Delta t)^2} \right) u_{out}(t) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. - \frac{LC}{(\Delta t)^2} u_{out}(t - 2\Delta t) \right) \right] - 1 \right\} = \\
= -\frac{1}{\Delta t} u_{out}(t - \Delta t) + \left(\frac{\Delta t + R_Z C}{R_Z C \Delta t} \right) u_{out}(t).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Vynásobením rovnosti (3.50) faktorem $\frac{C}{I_0}$ a definováním nových proměnných vztahy

$$\begin{aligned}
a := \frac{1}{2nU_T} \left(u_{in}(t) + \left(\frac{R_Z RC \Delta t + 2LCR_Z + L\Delta t}{R_Z (\Delta t)^2} \right) u_{out}(t - \Delta t) \right. \\
\left. - \frac{LC}{(\Delta t)^2} u_{out}(t - 2\Delta t) \right)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$b := \frac{1}{2nU_T} \left(1 + \frac{(L + R\Delta t)(R_Z C + \Delta t)}{R_Z (\Delta t)^2} \right) \tag{3.52}$$

$$c := 1 - \frac{C}{I_0 \Delta t} u_{out}(t - \Delta t) \tag{3.53}$$

$$d := \frac{\Delta t + R_Z C}{R_Z I_0 \Delta t}, \tag{3.54}$$

přejde rovnice (3.50) na

$$\exp(a - b u_{out}(t)) = c + d u_{out}(t). \tag{3.55}$$

Pokud rovnici (3.55) vynásobíme $\frac{b}{d} \exp\left(b u_{out}(t) + \frac{bc}{d}\right)$ dostaneme

$$\frac{b}{d} \exp\left(a + \frac{bc}{d}\right) = \left[b u_{out}(t) + \frac{bc}{d} \right] \exp\left(b u_{out}(t) + \frac{bc}{d}\right). \tag{3.56}$$

Jelikož je levá strana výše uvedené rovnice vždy kladná, musí být i výraz $\frac{bc}{d} + b u_{out}(t)$ kladný. Proto můžeme na obě strany rovnice aplikovat *Lambertovu funkci* W_0 . Dostaneme

$$W_0 \left[\frac{b}{d} \exp \left(a + \frac{bc}{d} \right) \right] = \frac{bc}{d} + b u_{out}(t).$$

Vyjádřením $u_{out}(t)$ získáme

$$u_{out}(t) = -\frac{c}{d} + \frac{1}{b} W_0 \left[\frac{b}{d} \exp \left(a + \frac{bc}{d} \right) \right]. \quad (3.57)$$

Vzorec (3.57) je základem pro iterační metodu

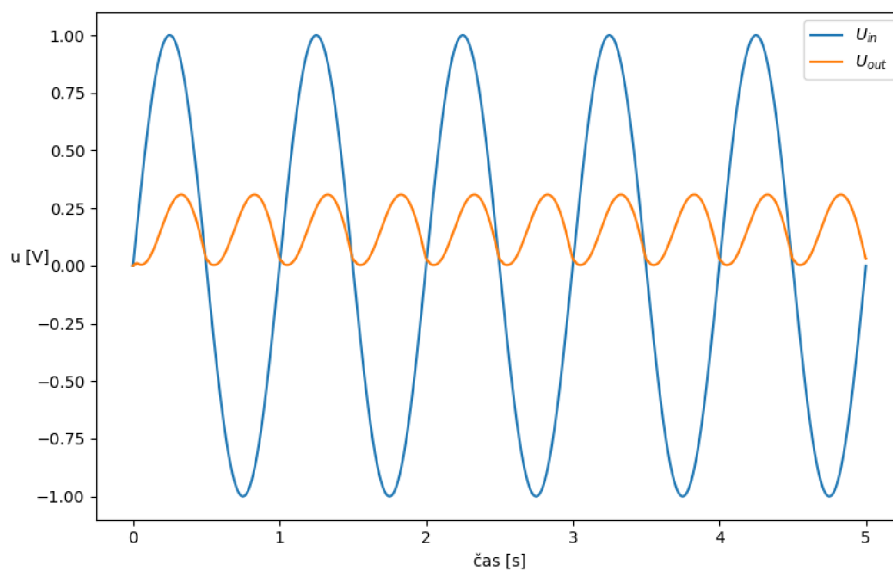
$$\begin{cases} t_i &= t_{i-1} + \Delta t \\ U_{out}^{(i)} &= -\frac{c}{d} + \frac{1}{b} W_0 \left[\frac{b}{d} \exp \left(a + \frac{bc}{d} \right) \right], \end{cases} \quad (3.58)$$

pro $i = 2, 3, \dots, N$ s délkou kroku Δt , kde a, b, c, d jsou určeny vztahy (3.51) - (3.54). Kódy, psané v programovacím jazyce Python, k oběma iteračním metodám (3.49) a (3.58) jsou součástí přílohy.

Na následujícím příkladě si ukážeme jak vypadá průběh napětí $u_{out}(t)$ pro konkrétní hodnoty součástek v obvodu na Obr. 28.

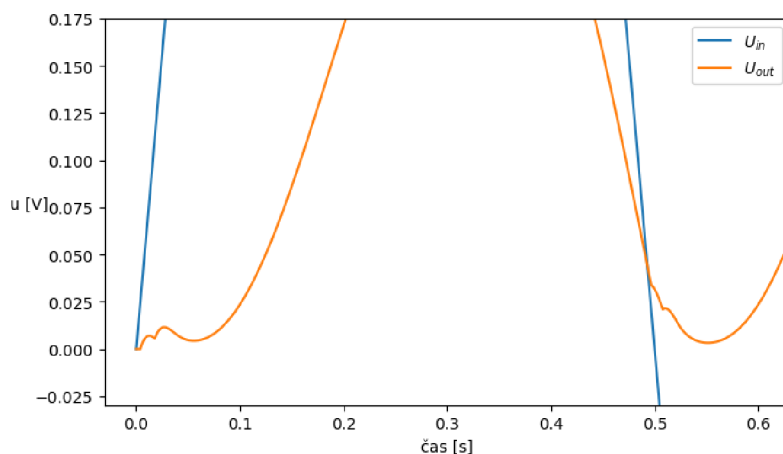
Příklad 3.6 Uvažujme obvod na Obr. 28 s hodnotami součástek $R = 5 \Omega, L = 2 \text{ H}, C = 1 \text{ mF}, R_Z = 15 \Omega$. Diody D_1, D_2, D_3, D_4 mají stejné parametry: $I_0 = 1 \mu\text{A}, n = 1$ a předpokládáme, že teplota PN přechodu je 25°C , tzn. $U_T \approx 25.7 \text{ mV}$. Určete průběh napětí $u_{out}(t)$, pokud má zdroj napětí sinusový průběh $u_{in}(t) = \sin(2\pi t)$.

Řešení. Uvažujme k rovnici (3.43) nulové poč. podmínky určeny vztahem (3.44), tedy obvod bez energie ke kterému v čase $t = 0$ připojíme zdroj napětí U_{in} . Potom iterační metoda (3.49), s délkou kroku $\Delta t = 0.001$, nám, pro časový interval $[0, 5]$ sekund, dá následující graf řešení, viz Obrázek 30.



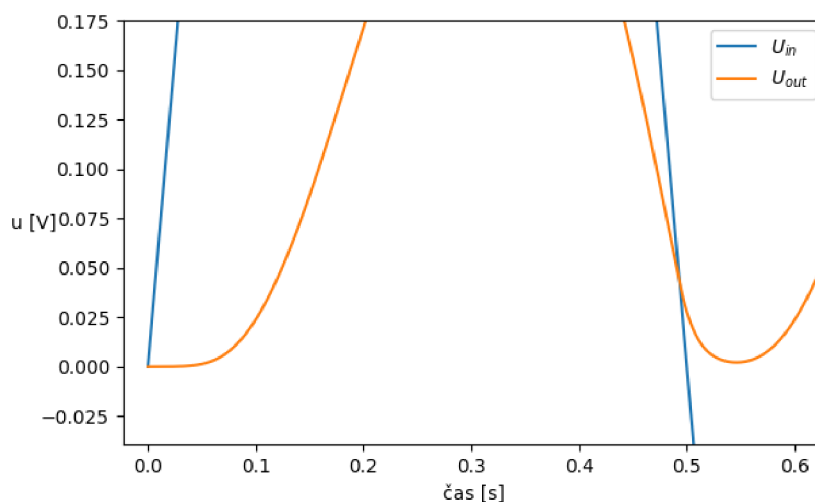
Obrázek 30: Průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměrňovače - metoda konečných diferencí.

Vidíme, že výstupní napětí $u_{out}(t)$ je pořád kladné. Obvod tedy slouží jako převodník střídavého signálu na stejnosměrný (AC/DC převodník). Pokud si graf řešení na Obr. 30 přiblížíme, můžeme si všimnout jistých nedokonalostí, viz Obr. 31.



Obrázek 31: Přiblížený průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměrňovače - metoda konečných diferencí.

Nicméně tyto věci se dají vyřešit zmenšením délky kroku. Např. pro desetkrát menší délku kroku se tyto problémy již nevyskytují, viz Obr. 32



Obrázek 32: Přibližný průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměrňovače - metoda konečných diferencí s délkou kroku $\Delta t = 0.0001$.

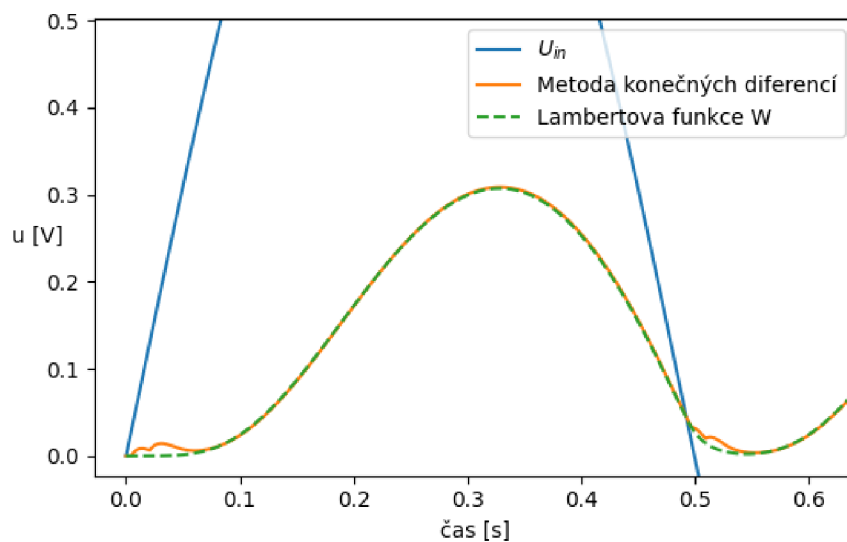
Graf řešení pomocí iterační metody (3.58) (s Lambertovou funkcí W) má totožný tvar jako na Obr. 30. Navíc neobsahuje nedokonalosti znázorněny na Obrázku 31. Na Obrázku 33 jsou vykresleny oba grafy řešení pomocí iteračních metod (3.49) a (3.58) se shodnou délkou kroku $\Delta t = 0.001153$. (Tato délka kroku je nejmenší 7ciferné číslo, při kterém Python nehlásil „overflow“ funkce \exp v (3.58).) Lze si všimnout, že oba grafy řešení téměř splývají. Největší absolutní chyby dosahujeme v časech, viz Tabulka 1:

čas t	31.1 ms	30 ms	32.3 ms	28.8 ms	33.4 ms
abs. chyba	0.01414	0.01412	0.01403	0.01395	0.01381

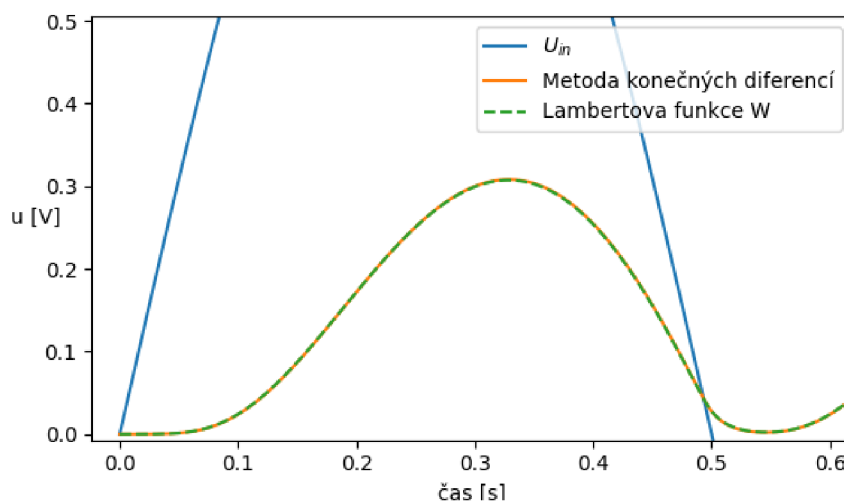
Tabulka 1: Absolutní chyba mezi metodou konečných diferencí a Lambertovou funkcí W .

Tyto chyby se vždy opakují při přiblížení výstupního napětí k nule. Můžeme si všimnout, že chyby jsou v řádů desítek mV, navíc, čím menší bude

délka kroku u metody konečných diferencí, tím blíže bude její graf řešení ke grafu řešení určený Lambertovou funkcí W , viz Obrázek 34.

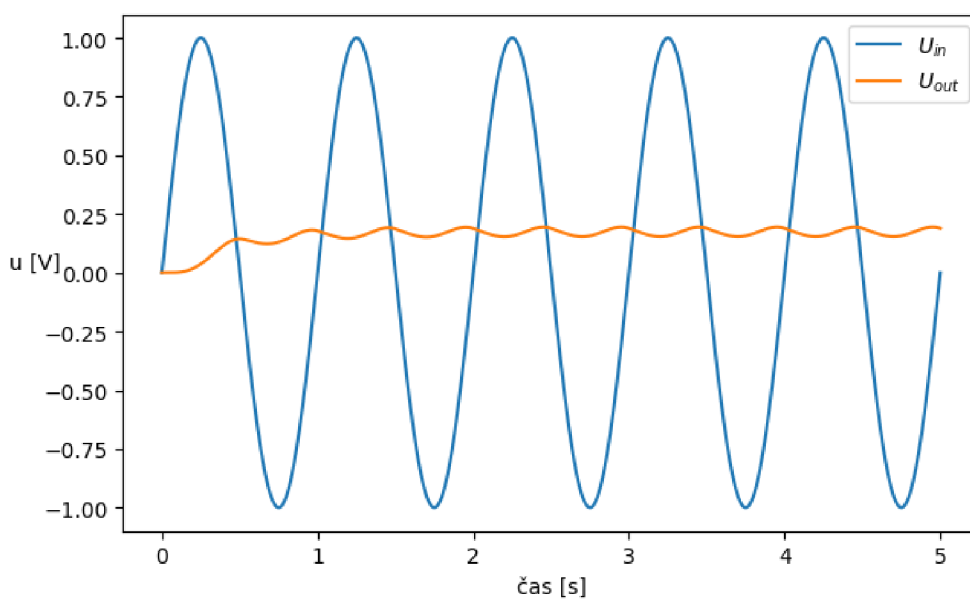


Obrázek 33: Srovnání metody konečných diferencí s Lambertovou funkcí W - délka kroku $\Delta t = 0.001153$.



Obrázek 34: Srovnání metody konečných diferencí ($\Delta t = 0.00001153$) s Lambertovou funkcí W ($\Delta t = 0.001153$).

Na závěr si ukážeme jak se bude měnit průběh výstupního napětí $u_{out}(t)$ při změnách hodnot součástek. Pokud bychom například zvětšili kapacitu kondenzátoru na $C = 50 \text{ mF}$, dostali bychom průběh znázorněný na Obr. 35.

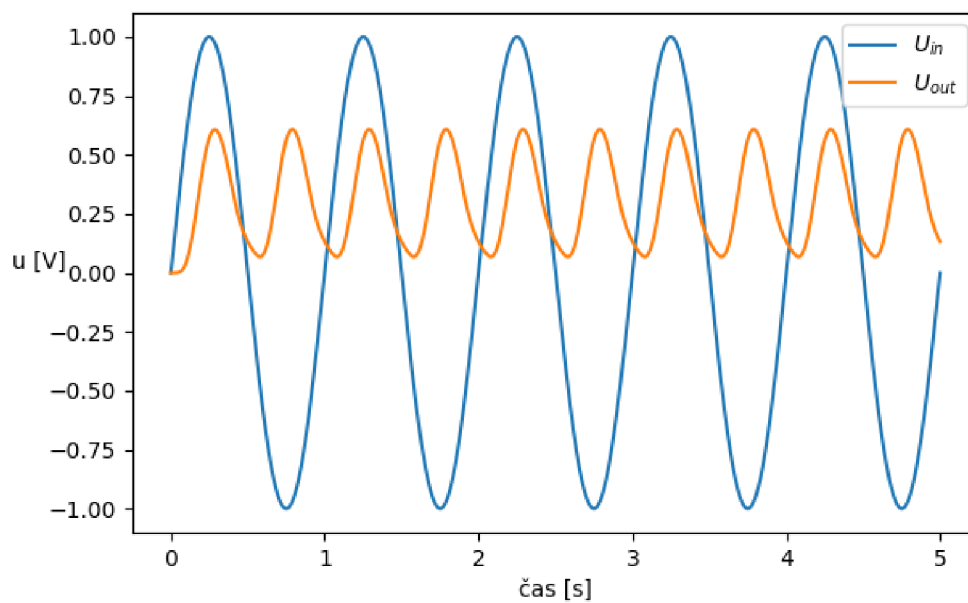


Obrázek 35: Průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměrňovače, kde $C = 50 \text{ mF}$.

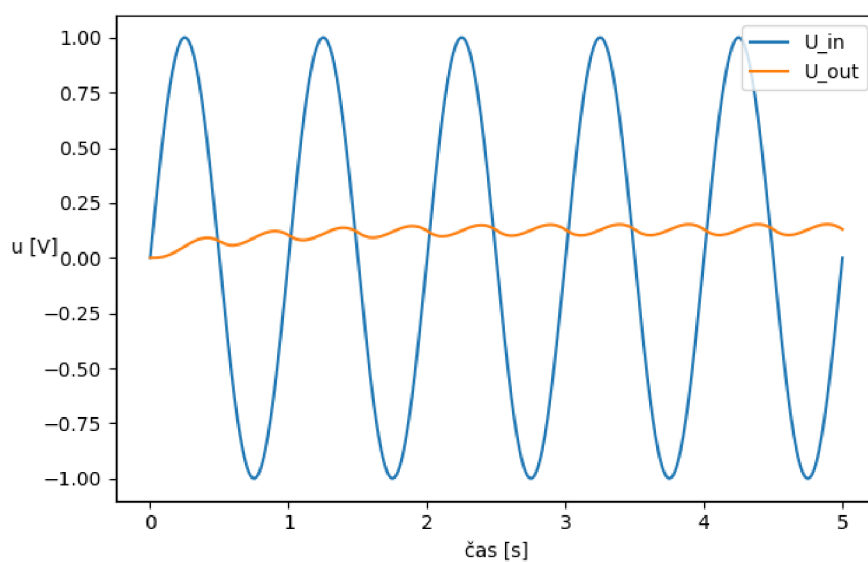
Kondenzátor C se nazývá filtrační kondenzátor a má za úkol stabilizovat výstupní napětí $u_{out}(t)$. Průběh napětí na Obr. 35 je určitě vhodnější pro AC/DC převodník než průběh na Obrázku 30, zejména proto, že napětí kmitá s mnohem menší amplitudou.

Rezistory R a R_Z mění velikost amplitudy napětí $u_{out}(t)$, viz Obrázek 36. Čím větší je velikost odporu R_Z , tím větší je amplituda napětí $u_{out}(t)$. Naopak, čím menší je velikost odporu R , tím větší je maximální hodnota napětí $u_{out}(t)$.

Cívka L v obvodu na Obr. 28 má stejnou funkci jako filtrační kondenzátor C . Tedy, čím větší je indukčnost cívky, tím stabilnější je výstupní napětí $u_{out}(t)$, viz Obrázek 37.



Obrázek 36: Průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměrňovače, kde $R_Z = 100 \Omega$.



Obrázek 37: Průběh napětí $u_{out}(t)$ můstkového usměrňovače, kde $L = 20 \text{ H}$.

○

Závěr

V práci jsem se věnoval několika modelům různých elektrických obvodů. Nejprve jsem se zaměřil na obvody obsahující cívku a kondenzátor. Pochopil jsme, že tyto součástky se v stejnosměrných obvodech při sériovém zapojení s rezistorem chovají zcela odlišně, čehož jsem si všiml na časových průbězích napětí na cívce a kondenzátoru.

Při nahrazení stejnosměrného zdroje za střídavý zdroj, jsem ze sériového RC obvodu získal jednoduchý frekvenční filtr hojně používaný např. v audio technice. Dále jsem se věnoval frekvenčnímu filtru, který se skládá z paralelního zapojení rezistoru, cívky a kondenzátoru. Byly zavedeny nové pojmy a odvozeny vztahy se kterými se ve frekvenčních filtrech pracuje. Ukázal jsem jak vypadají příslušné charakteristiky k těmto filtrům a jak se mění v závislosti na změnách hodnot součástek.

Poslední model, kterému jsem se věnoval, byl, na rozdíl od předchozích, nelineární, a proto jsem ho řešil numericky. Zajímal mě časový průběh napětí na výstupu obvodu, pokud jsem uvažoval střídavý zdrojový signál. Zjistil jsem, že výstupní napětí je pouze jedné polarity, a proto obvod slouží jako převodník střídavého signálu na stejnosměrný.

A Lambertova funkce W

Uvažujme funkci $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$. Derivace funkce f je rovna

$$f'(x) = e^x(1+x).$$

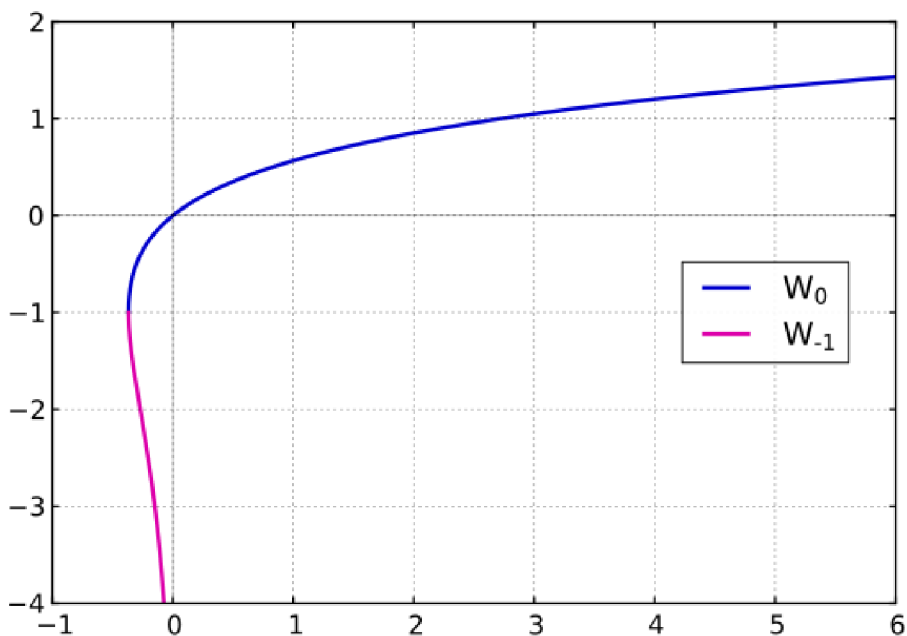
Navíc platí

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1, \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1.$$

Tedy, existují funkce $W_0 := (f|_{[-1, \infty)})^{-1}$ a $W_{-1} := (f|_{(-\infty, -1]})^{-1}$, pro které platí

$$W_0 : \left[-\frac{1}{e}, \infty\right) \rightarrow [-1, \infty), \quad W_{-1} : \left[-\frac{1}{e}, 0\right) \rightarrow (-\infty, -1].$$

Funkci W_0 nazýváme *základní Lambertovou funkcí* W . Na Obrázku 38 jsou znázorněny funkce W_0 a W_{-1} . Více k Lambertově funkci W najdete např. v [7].



Obrázek 38: Graf Lambertovy funkce W_0 a W_{-1} . Zdroj: [10].

Literatura

- [1] KOFROŇ, Josef. Obyčejné diferenciální rovnice v reálném oboru. 2. vyd. Praha: Karolinum, 2004. ISBN 80-246-0946-0.
- [2] The Bell system technical journal: a journal devoted to the scientific and engineering aspects of electrical commutation. New York: American telephone and telegraph comp., 1983.
- [3] BIRD, John. Electrical circuit theory and technology. 3rd ed. Oxford: Newnes, 2007. ISBN 0-7506-8139-1.
- [4] K. ALEXANDER, Charles a Matthew N.O. SADIKU. Fundamentals of Electric Circuits. Fourth Edition. New York: McGraw Hill, 2009. ISBN 978-0-07-352955-4.
- [5] BUSATTO, Tatiano, Sarah K. RÖNNBERG a Math H. J. BOLLEN. Comparison of Models of Single-Phase Diode Bridge Rectifiers for Their Use in Harmonic Studies with Many Devices. *Energies*. 2022, 15(1). ISSN 1996-1073. Dostupné z: doi:10.3390/en15010066
- [6] Full Wave Rectifier and Bridge Rectifier Theory. <https://www.electronics-tutorials.ws> [online]. Cambridge (Massachusetts), c2023 [cit. 2023-06-08]. Dostupné z: https://www.electronics-tutorials.ws/diode/diode_6.html
- [7] DENCE, Thomas P. A Brief Look into the Lambert W Function. *Applied Mathematics*. 2013, 04(06), 887-892. ISSN 2152-7385. Dostupné z: doi:10.4236/am.2013.46122
- [8] Problem with numerical solving 2nd order nonlinear differential equation - Mathematics Stack Exchange [online]. New York: TeM (<https://math.stackexchange.com/users/247735/tem>), 2023 [cit. 2023-03-29]. Dostupné z: <https://math.stackexchange.com/q/4659026>
- [9] All About Circuits. In: <https://www.allaboutcircuits.com> [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: <https://www.allaboutcircuits.com/textbook/semiconductors/chpt-3/introduction-to-diodes-and-rectifiers/>
- [10] Branches of Lambert W function. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2023-05-10]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Mplwp_lambert_W_branches.svg