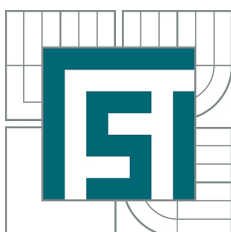


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

TVORBA MATEMATICKÉHO MODELU INTERAKCE
TEKUTINY S HYDROFBNÍM POVRCHEM
CREATION OF A MATHEMATICAL MODEL OF FLUID INTERACTION WITH A
HYDROPHOBIC SURFACE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Ing. JIŘÍ MALÍK

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

prof. Ing. FRANTIŠEK POCHYLÝ, CSc.

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá tvorbou modelu okrajového problému laminárního proudění v obdélníkovém kanále s nesmáčivou stěnou. Text obsahuje přehled teoretických poznatků týkajících se hydrofobie a odvozené modely zohledňující předpoklady vztahující se k experimentům. Modely jsou srovnány se získanými daty a diskutovány z hlediska fyzikální popisnosti.

Summary

The bachelor's thesis deals with a mathematical model of a boundary problem of a laminar flow in a rectangular channel with one non-wetting wall. The thesis contains theoretical survey of hydrophobic phenomena and presents mathematical models based on experimentally obtained facts. The models are fitted to experimental data and the physical validity of each model is then discussed.

Klíčová slova

hydrofobní povrchy, Navierova okrajová podmínka prokluzu, povrchové napětí, Poiseuillovo proudění

Keywords

hydrophobic surfaces, Navier slip boundary condition, surface tension, Poiseuille flow

MALÍK, J. *Tvorba matematického modelu interakce tekutiny s hydrofobním povrchem*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 30 s. Vedoucí prof. Ing. František Pochylý, CSc.

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma *Tvorba matematického modelu interakce tekutiny s hydrofobním povrchem* jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Ing. Jiří Malík

Vřelé díky patří vedoucímu mé bakalářské práce prof. Ing. Františku Pochylému, CSc. za jeho ochotu a čas strávený při konzultacích, stejně jako za jeho neutuchající vědecký zájem, kterým mne inspiruje.

Dále bych také rád poděkoval svým váženým rodičům za nehynoucí podporu při studiu.

Ing. Jiří Malík

Obsah

Úvod	3
1 Principy hydrofobie a hydrofilie	4
1.1 Definice hydrofobie a hydrofilie	4
1.2 Kohezní a adhezní síly	5
1.3 Povrchové napětí	5
2 Okrajová podmínka proudění na hranici kapaliny a pevného povrchu	8
3 Proudění mezi paralelními deskami	9
3.1 Rovnice proudění tekutin	9
3.2 Laminární proudění mezi paralelními deskami	9
3.2.1 Pohybová rovnice	10
3.2.2 Okrajové podmínky	10
3.3 Modely okrajových podmínek	11
3.3.1 Model vrstvy tekutiny s rozdílnou, konstantní viskozitou	12
3.3.2 Model s okrajovou podmínkou při zadané hodnotě smykového napětí na stěně	15
3.3.3 Model s mezní vrstvou proměnlivé viskozity	17
3.3.4 Model s mezní vrstvou proměnlivé viskozity při zadané hodnotě smykového napětí na stěně	21
3.4 Hydraulické ztráty v potrubí	23
4 Metody určení neznámých koeficientů	25
Závěr	27
Příloha 1.	28
Příloha 2.	29

Seznam použitých zkratek a symbolů

γ	povrchové napětí
\mathbf{F}	vektor síly
\mathbf{v}	vektorové pole rychlosti
ρ	hustota
μ	dynamická viskozita
p	tlak
Δp	tlaková difference, tlaková ztráta
L	délka kanálu, na níž tlakovou diferencí měříme
H	šířka průtočného kanálu
D	výška průtočného kanálu (podél z -ové souřadnice)
k	koeficient adheze
L_S	délka prokluzu na nesmáčivé stěně
\mathbf{v}_S, v_S	rychlostní prokluz na nesmáčivé stěně
u_0	tloušťka mezní vrstvy modelu interakce
τ	smykové napětí
τ_0	smykové napětí na stěně
A, B, M, N	integrační konstanty
a, b, c	koeficienty modelu proměnlivé viskozity
Q	objemový průtok

Úvod

Bakalářská práce se zabývá tvorbou matematických modelů okrajové podmínky proudění tekutin po nesmáčivém povrchu. Účelem odvozených modelů je lépe vystihnout fyzikální podstatu interakce tekutiny s hydrofobním materiálem a napomoci tak jejímu hlubšímu porozumění. Text byl vypracován pod Odborem fluidního inženýrství Viktora Kaplana (dále OFIVK) Fakulty strojního inženýrství VUT v Brně.

První část práce obsahuje teoretický přehled problematiky hydrofobie, mezimolekulárních interakcí a povrchové energie. Dále je zpracován pojem okrajové podmínky na nesmáčivém povrchu, který se následně využívá při odvození modelů.

Druhá část práce uvádí získané matematické modely interakce a pohybové rovnice proudění. Tyto jsou využity ke srovnání modelu s experimentálními daty a jejich diskuzi z hlediska popisnosti daného modelu.

Podstata vybraného modelu je demonstrována na problematice hydraulických ztrát v potrubí kruhového průřezu a následně doplněna návrhem metodiky pro získání neznámých součinitelů.

1. Principy hydrofobie a hydrofilie

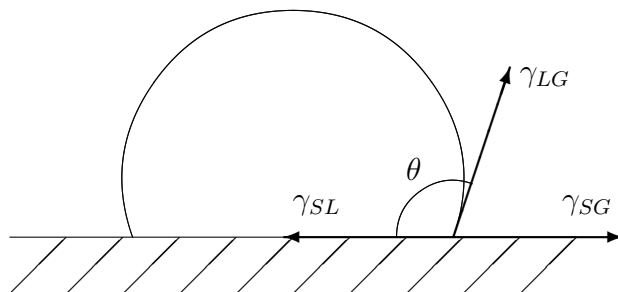
Pojmy hydrofobie a hydrofilie jsou složeniny slov pocházejících z řečtiny, ὕδωρ *húdōr* (voda) a φόβος *phobos*, resp. φιλία *philia* (strach, resp. láska přátelská). Z jejich významu je patrný určitý vztah k vodě. Hydrofobní látky tedy vodu odpuzují, hydrofilní naopak přitahují. Původ těchto mechanismů souvisí s pojmy kohezních a adhezních sil a bude blíže objasněn v této kapitole.

Ačkoliv se s nimi můžeme setkat ve velké míře v přírodě (známý fenomén lotosového listu), mají hydrofobní povrchy značné aplikace v technice. Z jejich množiny lze jmenovat úpravu plechů křídel letadla, která jednak snižuje třecí odpor povrchu a také zamezuje vzniku námrazy, která negativně ovlivňuje chování aerodynamického profilu. Další aplikací, v přímé míře motivující tuto práci, je hydrofobní úprava statorového prstence vírové turbíny vyvíjené na OFIVK FSI VUT v Brně za účelem zvýšení její účinnosti.

Také hydrofilní povrchy, nám dobře známé z interakce vody se sklem, jsou v některých technických aplikacích žádoucí. Zvýšená přilnavost vody je nezbytná pro lepší přenos tepla, hydrofilní povrchy tedy nacházejí uplatnění při návrhu tepelných výměníků. [7]

1.1. Definice hydrofobie a hydrofilie

Pojmy hydrofobie a hydrofilie jsou definovány na základě kontaktního úhlu, který v řezu svírá tečna povrchu kapky s rovinou zkoumaného materiálu na vnitřní straně hranice kontaktu. Význam definice je patrný z obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Kapka na zkoumaném povrchu.

Velikost kontaktního úhlu závisí na poměru povrchových napětí mezi jednotlivými fázemi v místě kontaktu, přesně ji popisuje rovnice (1.1) zvaná Youngova rovnice.

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LG}} \quad (1.1)$$

V závislosti na hodnotě kontaktního úhlu rozdělujeme povrchy na:

hydrofilní pro $\theta \in [0, 90]^\circ$

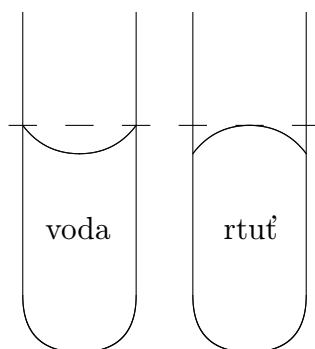
hydrofobní pro $\theta \in [90, 180]^\circ$

S rozvojem této problematiky se v poslední době začaly také používat pojmy superhydrofobní (případně ultrahydrofobní), resp. superhydrofilní, označující vysokou míru nesmáčivosti, resp. smáčivosti povrchu. Hodnoty kontaktních úhlů pro tuto kategorizaci

však nejsou jednoznačně dané, např. [13] uvádí hodnotu kontaktního úhlu pro ultrahydrofobní materiály $\theta = 140^\circ$. [13, 1]

1.2. Kohezní a adhezní síly

Pojmem kohezní síly nazýváme obecně slabé vazebné interakce, které působí mezi molekulami téže látky. Řadíme mezi ně vodíkové můstky působící mezi molekulami vody a také Van der Waalsovy síly působící mezi vrstvami grafitu obyčejné tuhy. Naopak adhezní síly k sobě přitahují molekuly rozdílných substancí. Výrazná je adheze vody ke sklu, která společně se silnou kohezí mezi molekulami vody dává za vznik známému fenoménu hladinového menisku (viz obrázek 1.2). V závislosti na poměru adhezních a kohezních sil vytvoří hladina buď konvexní (rtuť–sklo) nebo konkávní (voda–sklo) meniskus, na pevném povrchu pak vznikne čočka, případně kulovitá kapka. [12, 6]



Obrázek 1.2: Meniskus na hladině kapaliny v kapiláře.

1.3. Povrchové napětí

Povrchové napětí je vlastností volné hladiny všech kapalin. Silové působení na částice pod hladinou je rovnoměrné ze všech stran, avšak ty, jež utváří volnou hladinu kapaliny, jsou v případě slabé adheze s okolní fází silněji vázány k sousedním povrchovým částicím (obrázek 1.4). Utváří společně strukturu podobnou fólii, která se z principu minimální energie snaží zaujmout tvar o nejmenším obsahu plochy.

Povrchové napětí se definuje dvěma způsoby:

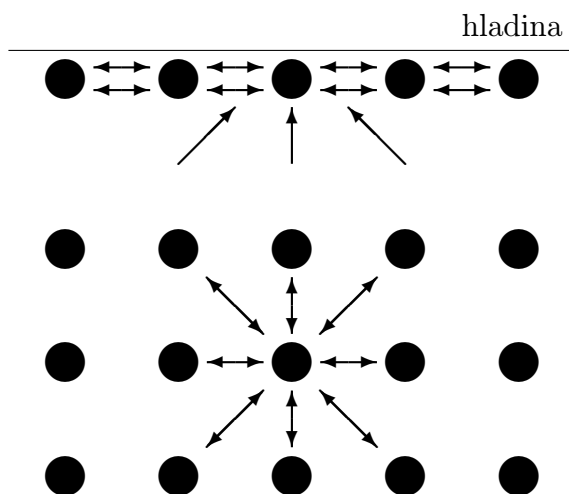
1. Jako energie potřebná pro vytvoření jednotky nového povrchu:

$$dW = \gamma dA,$$

kde dW je elementární přírůstek práce, γ je zmíněné povrchové napětí a dA je element plochy.

2. Jako síla vztažená na jednotku délky hranice. Tato definice vychází z experimentu vyobrazeném na obrázku 1.4. Silnou čarou je vykreslen rám, v němž je umístěn pohyblivý drát délky l , v obrázku vyneseny čarou tenkou. Smyčka uzavírá napnutou

1.3. POVRCHOVÉ NAPĚTÍ



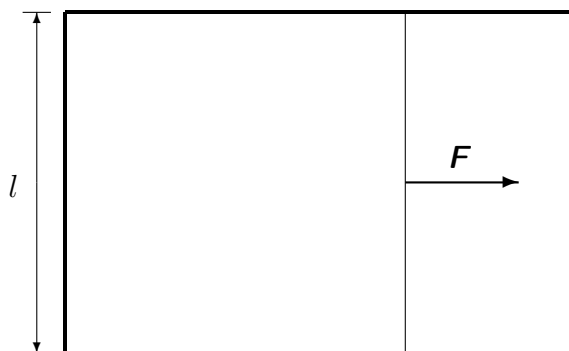
Obrázek 1.3: Silové působení na částice kapaliny na hladině a pod hladinou.

vrstvu kapaliny. Na drát působíme silou F , která udržuje drát v silové rovnováze. Budeme-li opět uvažovat přírůstek práce vzniklý posunutím drátu o elementární délku ve směru působení síly, pak dostáváme:

$$dW = Fdx = \gamma dA = 2\gamma l dx.$$

Faktor 2 na pravé straně vyplývá ze skutečnosti, že vrstva kapaliny má dva povrchy, z nichž každý přispívá stejnou měrou k přitahování drátu. Úpravou předchozí rovnice získáme vztah pro povrchové napětí:

$$\gamma = \frac{F}{2l}.$$



Obrázek 1.4: Povrchové napětí jako měrná síla. Smyčka uzavírá vrstvu kapaliny, která kapilární silou přitahuje pohyblivý drát délky l k levé straně pevného rámu.

O hodnotě povrchového napětí rozhoduje chemické složení stýkajících se fází a také teplota. S rostoucí teplotou povrchové napětí klesá, zvýšená teplota napomáhá smáčivosti vody, která tak dokáže lépe odnášet nečistoty, např. při praní. Pro prací prostředky jsou

1. PRINCIPY HYDROFOBIE A HYDROFILIE

také typické příměsi tzv. surfaktantů¹, které svým chemickým složením dokáží měnit povrchové napětí vody a s ním zlepšovat její smáčivost vůči znečištěnému prádлу.

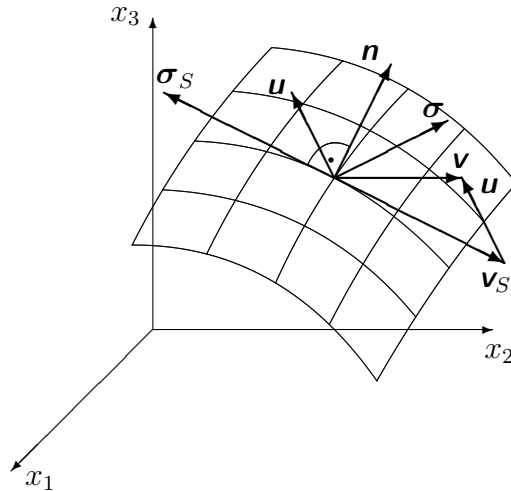
Pro látky pevného skupenství se používá ekvivalentního pojmu povrchové energie, což je měrná energie potřebná k přerušení vazeb mezi částicemi látky za účelem vytvoření nového povrchu. Jelikož plyny mají ve zvyku vyplňovat celý objem prostoru tudíž nevytváří žádnou volnou hladinu a tedy nemá smysl podobný pojem pro plyny zavádět.[11]

¹Termín surfaktant pochází ze spojení anglických slov *surface active agent*.

2. Okrajová podmínka proudění na hranici kapaliny a pevného povrchu

Nejpoužívanější okrajovou podmínkou při řešení úloh proudění tekutin je takzvaná podmínka ulpívání, Dirichletova okrajová podmínka, která udává relativní rychlost viskózní tekutiny vůči pevnému povrchu rovnu nule. Fyzikálně tato podmínka říká, že při proudění tekutiny v blízkosti povrchu převažují adhezní síly nad kohezními a částice proudícího média ulpívají na smáčeném povrchu. Ukazuje se však, že pro některé případy proudění taková podmínka platná není. Proto přišel Navier v roce 1823 se zobecněním, které udává lineární závislost mezi rychlostí prokluzu na stěně a rychlostí deformace newtonské tekutiny. Podmínka je aplikována v následující kapitole na případ rovinného proudění mezi paralelními deskami (viz (3.4) na straně 10). V práci [10] byla odvozena nová okrajová podmínka pro vektor smykových napětí σ_S , pro kapalinu proudící rychlostí \mathbf{v} po zakřiveném hydrofobním povrchu, jenž se pohybuje unášivou rychlostí \mathbf{u} (schématicky znázorněno na obrázku 2.1). Podmínka nabývá tvaru:

$$\sigma_S = (\sigma \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = k(\mathbf{v} - \mathbf{u}). \quad (2.1)$$



Obrázek 2.1: Smykové napětí na zakřiveném povrchu

Koeficient k je adhezní součinitel, který je jistou analogií třecího součinitele známého z mechaniky tuhých těles. Vektor viskózních napětí σ lze po složkách vyjádřit vztahem $\sigma_i = \Pi_{ij}n_j$, kde Π_{ij} jsou složky tenzoru nevratných napětí, pro které v případě nestlačitelné kapaliny platí:

$$\Pi_{ij} = 2\mu c_{ij},$$

kde $c_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$ jsou složky tenzoru rychlosti deformace a μ je dynamická viskozita. Po dosazení do (2.1) dostáváme pro složky vektoru smykových napětí: [5, 10]

$$\sigma_{Si} = \Pi_{jk}n_jn_kn_i - \Pi_{ij}n_j = k(c_i - u_i).$$

3. Proudění mezi paralelními deskami

Tato práce se zabývá tvorbou matematických modelů interakce kapaliny s hydrofobním povrchem. Modely byly vytvořeny pro popis experimentu rovinného proudění mezi paralelními deskami. V této kapitole budou uvedeny rovnice pro popis takového proudění společně s odvozenými modely pro laminární rychlostní profil.

3.1. Rovnice proudění tekutin

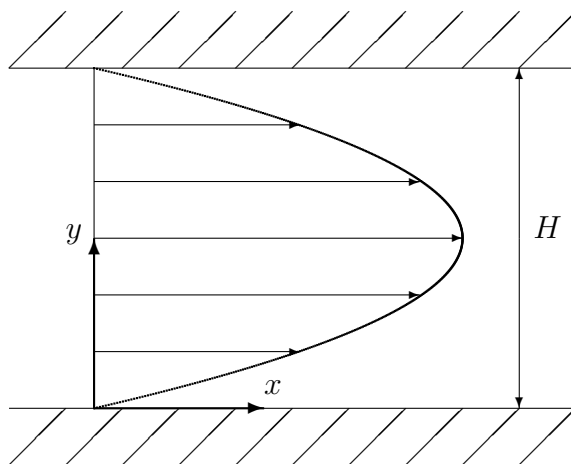
Proudění viskózní (někdy také označované jako mokré) tekutiny popisuje soustava parciálních diferenciálních rovnic zvaná Navier-Stokesovy rovnice. Za předpokladu nestlačitelnosti nabývají tvaru (3.1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{F} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Rovnice jsou odvozeny ze třech základních fyzikálních zákonů zachování, popořadě je tvoří zákon zachování hybnosti, hmotnosti a energie. Třetí rovnice zde není uvedena, neboť uvažujeme proudění bez přenosu energie. Tvar rovnic popisuje proudění nestlačitelné tekutiny, což je pro vodu předpoklad oprávněný. [2, 8]

3.2. Laminární proudění mezi paralelními deskami

Modely okrajových podmínek prezentované v této práci popisují experiment rovinného proudění mezi rovnoběžnými deskami. V literatuře se často tato úloha nazývá Poiseuilleovo proudění. Základní uspořádání experimentu s užívaným souřadnicovým systémem je patrné z obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Rovinné proudění mezi paralelními deskami

3.2. LAMINÁRNÍ PROUDĚNÍ MEZI PARALELNÍMI DESKAMI

3.2.1. Pohybová rovnice

Při odvození pohybových rovnic proudění mezi paralelními deskami vycházíme z rovnic (3.1), jež se z podstaty sledovaného problému značně zjednoduší. Z geometrického uspořádání (viz obrázek 3.1) je patrné, že vektorové pole rychlosti nabývá pouze jediné nenulové složky, v tomto případě složky v_x , navíc je tato složka závislá pouze na souřadnici y , což má za následek:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \left((v_x(y), 0, 0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) (v_x(y), 0, 0) = v_x(y) \frac{\partial v_x(y)}{\partial x} = 0.$$

Dále předpokládáme ustálené proudění, což znamená, že rychlost není závislá na čase, tedy $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$. K dalšímu zjednodušení dojde zanedbáním objemových sil \mathbf{F} , které vystupují na pravé straně rovnice (experiment je realizován tak, aby vliv tíhové síly mohl být zanedbán). Zohledněním předchozích úvah dostáváme rovnici:

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (3.2)$$

Jelikož nepředpokládáme pohyb kapaliny ve směru osy y či z , je zřejmé, že tlakový gradient má nenulovou pouze x -ovou složku, čehož využijeme při úpravě rovnice (3.2):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v_x}{dy^2} &= \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \Big/ \frac{d}{dx} \\ 0 &= \frac{d^2 p}{dx^2} \\ p(x) &= Ax + B \\ p(0) = B &= p_1 \\ p(L) = AL + B &= p_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow A = \frac{p_2 - p_1}{L} = -\frac{\Delta p}{L}$$

Podíl $\frac{\Delta p}{L}$ vyjadřuje tlakový gradient, který zapříčiňuje pohyb tekutiny v kanále. Jelikož dochází při proudění k poklesu tlaku, bude tedy $\Delta p > 0$ a po dosazení získaných vztahů do rovnice (3.2) obdržíme konečný tvar pohybové rovnice popisující rovinné proudění nestlačitelné tekutiny:

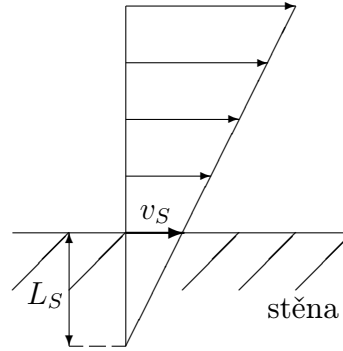
$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{L}. \quad (3.3)$$

3.2.2. Okrajové podmínky

Měřený proudový kanál je obdélníkového průřezu, jehož stěna umístěná v $y = 0$ je tvořena hydrofobním materiálem. Na této stěně proto předpokládáme prokluz rychlosti v_S a k tomuto byla využita Navierova podmínka prokluzu (v angl. lit. zvaná Navier slip condition). Její tvar a fyzikální význam je patrný z obrázku 3.2 a rovnosti (3.4):

$$\left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} = \frac{k}{\mu} v_S \quad (3.4)$$

3. PROUDĚNÍ MEZI PARALELNÍMI DESKAMI



Obrázek 3.2: Okrajová podmínka prokluzu

Konstanta k v rovnosti (3.4) se nazývá adhezní součinitel (někdy také koeficient tření), čím je větší, tím je prokluz na stěně menší. Zlomek k/μ je roven veličině $1/L_S$ z obrázku 3.2, jež se nazývá délka prokluzu a její fyzikální význam je patrný z uvedeného schématu.

Horní stěnu kanálu tvoří smáčivý materiál, na nějž aplikujeme podmínku ulpívání (v angl. lit. zvaná no-slip condition). Podmínka nabývá tvaru:

$$v_x|_{y=H} = 0. \quad (3.5)$$

Řešení úlohy rovinného proudění s okrajovými podmínkami ulpívání dává rovnici (3.6), z níž je patrný parabolický tvar proudového profilu, tvar typický pro rovinné laminární proudění.

$$v_x(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu L}y^2 + \frac{\Delta p H}{2\mu L}y \quad (3.6)$$

3.3. Modely okrajových podmínek

Kapitola obsahuje odvození konkrétních modelů popisující rovinné proudění kapaliny v kanále šířky H , které je dáno rovnicí (3.3). Společně s okrajovými podmínkami tvoří tato okrajový problém, jehož řešením je daný model. Každý model závisí na určitém počtu konstant, vliv určujících konstant na výsledný proudový profil je u každého z nich diskutován a doplněn grafem srovnávající numericky vyhodnocené profily s daty získanými při měření na Technické univerzitě v Liberci. Experiment byl proveden pro hodnotu Reynoldsova čísla $Re = 466$. Hodnoty neznámých konstant byly získány pomocí jednoduchého optimalizačního algoritmu založeného na principu úplné enumerace. Srovnávacím kritériem byl průtok, který je v tomto případě roven obsahu plochy pod křivkou proudového profilu.

Postup řešení předvedeme na rovnici (3.3) s podmínkou prokluzu pro $y = 0$ a podmínkou ulpívání pro $y = H$, bez dalších doplňujících předpokladů. Dvojitou integrací rovnice získáme:

$$v_x(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu L}y^2 + Ay + B.$$

Hodnoty integračních konstant určíme z okrajových podmínek, konkrétně:

3.3. MODEL Y OKRAJOVÝCH PODMÍNEK

pro $y = 0$:

$$\left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} = A = \frac{k}{\mu} v_x|_{y=0} = \frac{k}{\mu} B$$

pro $y = H$:

$$v_x|_{y=H} = -\frac{\Delta p}{2\mu L} H^2 + AH + B = 0.$$

Získali jsme tedy soustavu dvou lineárních rovnic, jejichž řešením dostáváme výsledné hodnoty integračních konstant, které po dosazení do pohybové rovnice dávají:

$$v_x(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} y^2 + \frac{\Delta p H^2 k}{2\mu L(kH + \mu)} y + \frac{\Delta p H^2}{2L(kH + \mu)},$$

jelikož v limitě pro $k \rightarrow \infty$ přechází okrajová podmínka prokluzu (3.4) v podmínku ulpívání (3.5), blíží se i odvozený vztah pro velké hodnoty k rovnici (3.6).

Jedinou veličinou, kterou lze ovlivnit výsledek experimentu rovinného proudění je v praxi objemový průtok, proto každý model obsahuje i vztah pro jeho výpočet. V případě proudění v obdélníkovém kanále šířky H a výšky D je objemový průtok roven:

$$Q = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^D \int_0^H \mathbf{v}(y, z) dy dz,$$

úloha proudění v kanále obdélníkového průřezu nemá analytické řešení, proto zavádíme zjednodušující předpoklad, že vektorové pole rychlosti nezávisí na z -ové souřadnici, navíc v případě laminárního proudění má vektor rychlosti nenulovou pouze x -ovou složku. Vztah pro objemový průtok se pak zjednoduší:

$$Q = \int_0^D \int_0^H v(y) dy dz = D \int_0^H v(y) dy.$$

Pro tento případ jednoduché podmínky nesmáčivosti obdržíme vztah:

$$Q = \frac{DH^3 \Delta p (Hk + 4\mu)}{12L\mu(Hk + \mu)}. \quad (3.7)$$

3.3.1. Model vrstvy tekutiny s rozdílnou, konstantní viskozitou

V experimentech (viz [5]) bylo ukázáno, že hydrofobní povrchy dokáží z protékající vody extrahovat rozpuštěný vzduch, který následně ulpívá na stěně a tvoří vrstvu, po které protékající voda klouže. Tato skutečnost byla motivací pro vytvoření modelu, jež předpokládá takovou vrstvu s rozdílnou viskozitou, ta je v rovnicích označována symbolem μ_0 . Tloušťku této mezní vrstvy značí koeficient u_0 . Pro přehlednost jsou tedy veličiny vztahující se k mezní vrstvě $[0, u_0]$ označovány indexem 0, naopak veličiny ve vrstvě $[u_0, H]$ indexem 1. Dále se také v dalším textu upouští od indexu x , jelikož složka rychlosti v_x je jediná nenulová, je toto značení nadbytečné.

Rovnici (3.3) tedy řešíme postupně na intervalech $[0, u_0]$ a $[u_0, H]$ s okrajovou podmínkou prokluzu pro $y = 0$, na stěně $y = H$ uvažujeme ulpívání kapaliny. Navíc je však třeba přidat podmínky na rozhraní mezní vrstvy. Řešíme rovnice pro dvě vrstvy protékající kapaliny, integrací tedy získáme celkem čtyři neznámé konstanty, je tedy třeba přidat dvě podmínky. První podmínkou je zřejmě spojitost výsledného řešení, tedy $v_0(u_0) = v_1(u_0)$,

3. PROUDĚNÍ MEZI PARALELNÍMI DESKAMI

druhá podmínka vyplývá ze skutečnosti, že popisujeme laminární proudění a požadujeme, aby na každou vrstvu protékající kapaliny působilo stejné smykové napětí, jinak by došlo ke vzniku momentu, což by zapříčinilo zavíření proudu. Smykové napětí je dáno vztahem:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}, \quad (3.8)$$

pro $y = u_0$ tedy požadujeme také $\mu_0 \frac{dv_0}{dy} \Big|_{y=u_0} = \mu_1 \frac{dv_1}{dy} \Big|_{y=u_0}$.

Pohybové rovnice:

$y \in [0, u_0]$:

$$v_0(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu_0 L} y^2 + Ay + B$$

$y \in [u_0, H]$:

$$v_1(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu_1 L} y^2 + My + N,$$

dosazení okrajových podmínek:

pro $y = 0$:

$$\frac{dv_0}{dy} \Big|_{y=0} = A = \frac{k}{\mu_0} v_0(0) = \frac{k}{\mu_0} B$$

pro $y = u_0$:

$$\begin{aligned} v_0(u_0) &= -\frac{\Delta p}{2\mu_0 L} u_0^2 + Au_0 + B = v_1(u_0) = -\frac{\Delta p}{2\mu_1 L} u_0^2 + Mu_0 + N \\ \mu_0 \frac{dv_0}{dy} \Big|_{y=u_0} &= -\frac{\Delta p}{L} u_0 + \mu_0 A = \mu_1 \frac{dv_1}{dy} \Big|_{y=u_0} = -\frac{\Delta p}{L} u_0 + \mu_1 M \end{aligned}$$

pro $y = H$:

$$v_1(H) = -\frac{\Delta p}{2\mu_1 L} H^2 + MH + N = 0.$$

Opět jsme získali soustavu lineárních rovnic, tentokrát pro čtyři neznámé. Vyřešením této soustavy získáme hodnoty integračních konstant, které po dosazení do příslušných pohybových rovnic dávají řešení okrajového problému:

$y \in [0, u_0]$:

$$\begin{aligned} v_0(y) &= -\frac{\Delta p}{2\mu_0 L} y^2 + \frac{k\Delta p(H^2\mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)u_0^2)}{2\mu_0 L((\mu_1 - \mu_0)ku_0 + (Hk + \mu_1)\mu_0)} y + \\ &\quad + \frac{\Delta p(H^2\mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)u_0^2)}{2L((\mu_1 - \mu_0)ku_0 + (Hk + \mu_1)\mu_0)} \end{aligned}$$

3.3. MODELÝ OKRAJOVÝCH PODMÍNEK

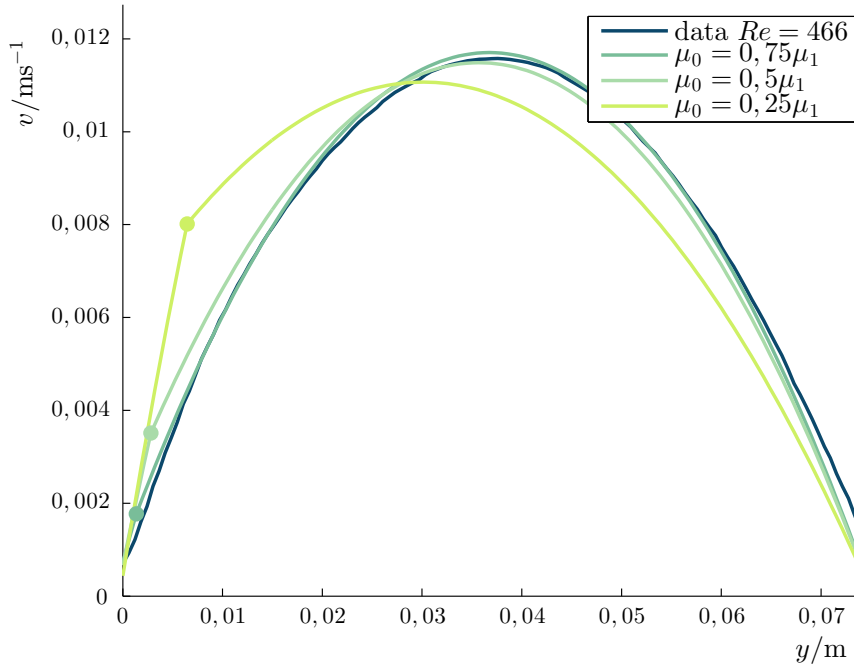
$y \in [u_0, H]$:

$$v_1(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu_1 L} y^2 + \frac{k\Delta p(H^2\mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)u_0^2)}{2\mu_1 L((\mu_1 - \mu_0)ku_0 + (Hk + \mu_1)\mu_0)} y + \frac{\Delta p H(H\mu_0\mu_1 + (\mu_1 - \mu_0)(Hku_0 - ku_0^2))}{2\mu_1 L((\mu_1 - \mu_0)ku_0 + (Hk + \mu_1)\mu_0)}.$$

Objemový průtok díky linearitě integrálu vzhledem k definičnímu oboru i oboru integrace získáme ze vztahu:

$$\begin{aligned} Q &= D \int_0^H v(y) dy = D \left(\int_0^{u_0} v_0(y) dy + \int_{u_0}^H v_1(y) dy \right) \\ &= \frac{D\Delta p (k(\mu_0 - \mu_1)^2 u_0^4 + 4(\mu_1 - \mu_0)(Hk\mu_0 + \mu_0\mu_1)u_0^3 - 6H^2k\mu_0(\mu_1 - \mu_0)u_0^2)}{12L\mu_0\mu_1((\mu_1 - \mu_0)ku_0 + Hk\mu_0 + \mu_0\mu_1)} + \\ &\quad + \frac{D\Delta p (4H^3k\mu_0(\mu_1 - \mu_0)u_0 + H^4k\mu_0^2 + 4H^3\mu_0^2\mu_1)}{12L\mu_0\mu_1((\mu_1 - \mu_0)ku_0 + Hk\mu_0 + \mu_0\mu_1)}. \end{aligned}$$

Na obrázku 3.3 jsou v grafu zobrazena data získaná z experimentu laminárního proudění v kanále (pro $Re = 466$) s nesmáčivou stěnou v porovnání s profily vykreslenými dle modelu s různými hodnotami dynamické viskozity v mezní vrstvě. Bodem příslušné barvy jsou v grafu zaznačeny nalezené hodnoty optimální tloušťky mezní vrstvy u_0 .



Obrázek 3.3: Proudové profily pro model mezní vrstvy s konstantní viskozitou μ_0 .

V grafu je zřetelná nespojitost první derivace, ta je však způsobena porušením jednoho z předpokladů mechaniky kontinua a totiž, že materiálové charakteristiky (tedy i dynamická viskozita) jsou hladkými funkcemi prostorových souřadnic.

3.3.2. Model s okrajovou podmínkou při zadané hodnotě smykového napětí na stěně

Hodnota smykového napětí na stěně je důležitá pro popis proudění tekutiny. Hodnota smykového napětí je dána vztahem (3.8), tuto podmínku proto využijeme pro stěnu $y = 0$, na stěně druhé předpokládáme ulpívání. Rovnici (3.3) řešíme s okrajovými podmínkami:

pro $y = 0$:

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{dv}{dy} \right|_{y=0} = \mu A$$

pro $y = H$:

$$v(H) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} H^2 + \frac{\tau_0}{\mu} H + B = 0.$$

Výsledná rovnice:

$$v(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} y^2 + \frac{\tau_0}{\mu} y + \frac{H(H\Delta p - 2L\tau_0)}{2\mu L}. \quad (3.9)$$

Rovnici dále upravíme do tvaru:

$$v(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} y^2 + \frac{\tau_0}{\mu} y + \frac{H\left(\frac{H}{2} \frac{\Delta p}{L} - \tau_0\right)}{\mu},$$

z něž je vhodné zdůraznit význam posledního členu. Ten totiž zdola omezuje hodnotu smykového napětí, jelikož požadujeme $v(0) \geq 0$, musí být $\tau_0 \leq \frac{H}{2} \frac{\Delta p}{L}$. Tato nerovnost také poukazuje na fakt, že smykové napětí na stěně je funkcí tlakového gradientu, který v proudovém kanále působí. Pro různé hodnoty smykového napětí vztahené ke kritické hodnotě τ_{krit} dané předchozí nerovností byly vykresleny profily, které jsou zobrazeny na obrázku 3.4.

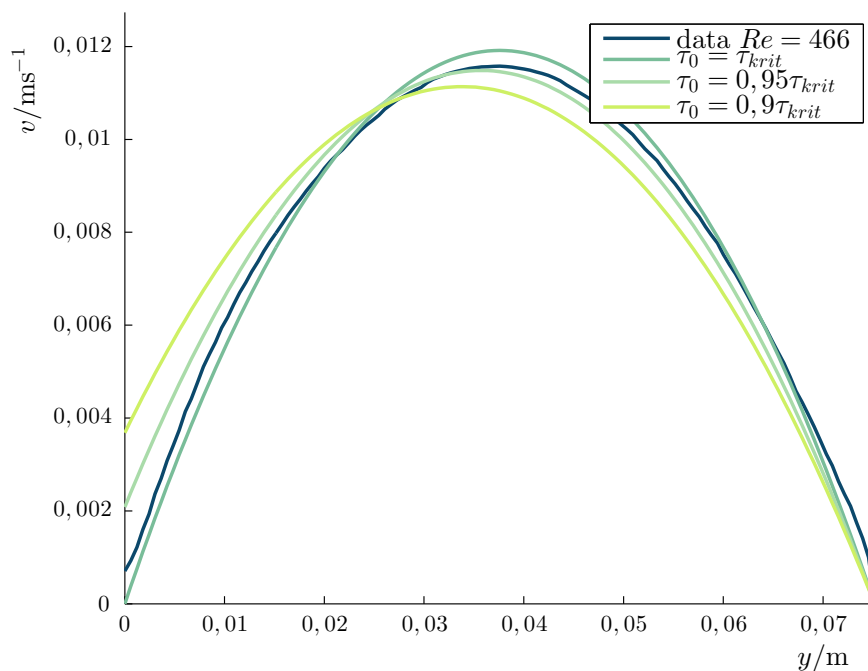
Z tvaru pohybových rovnic i z grafu je patrné, že pro hodnotu smykového napětí $\tau_0 = \tau_{\text{krit}}$ přechází rovnice v řešení problému s okrajovými podmínkami ulpívání (3.6). Pro kritickou hodnotu smykového napětí proudění na stěně ulpívá, s větší hodnotou tlakového gradientu však může docházet k prokluzu, což značí jistou analogii se statickým a dynamickým třením v mechanice tuhých těles. K obdobnému modelu lze dospět za použití kombinace okrajových podmínek (3.4) a (3.8). Výsledná rovnice, zohledňující koeficient adheze k je tvaru:

$$v(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} y^2 + \frac{\frac{H^2}{2} \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p}{L} - \tau_0}{Hk} y + \frac{\tau_0}{k}.$$

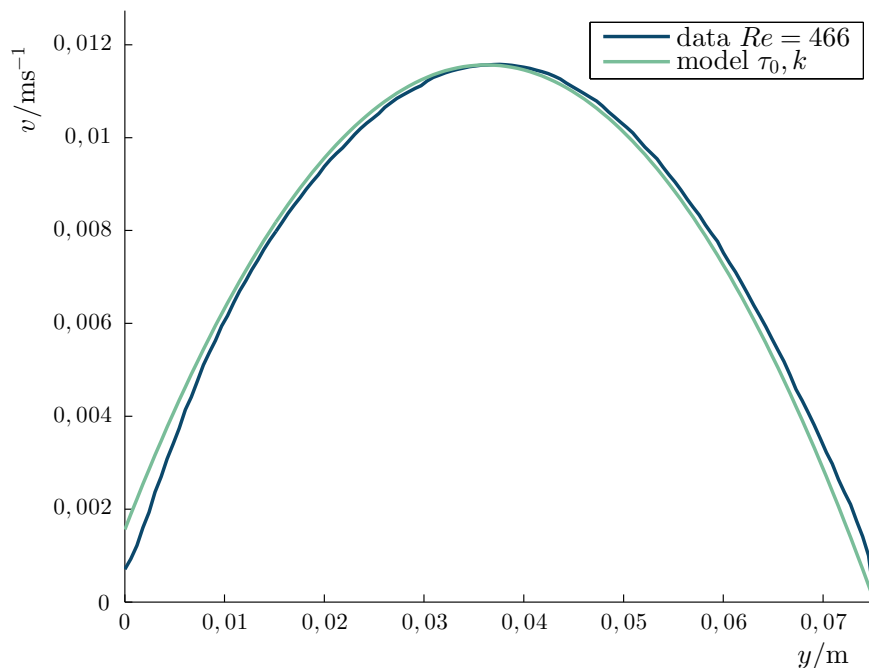
Rovnice opět přechází pro $\lim_{k \rightarrow \infty}$ ve vztah (3.6). Hodnota prokluzu na stěně je dána podílem τ_0/k , podmínku ulpívání tedy získáme pro hodnotu $\tau_0 = 0$ Pa, což ovšem opět dává model (3.6) odvozený na začátku této kapitoly. Obrázek 3.5 porovnává získaný numerický model s experimentálními daty.

Analytický vztah pro výpočet průtoku vycházející z pohybové rovnice (3.9):

3.3. MODEL Y OKRAJOVÝCH PODMÍNEK



Obrázek 3.4: Proudové profily pro model se smykovým napětím na stěně τ_0 .



Obrázek 3.5: Proudový profil pro model s okrajovou podmínkou prokluzu k a zadanou hodnotou smykového napětí na stěně τ_0 .

$$Q = D \left[-\frac{\Delta p H^3}{6\mu L} + \frac{\tau_0 H^2}{2\mu} + \frac{H^2(H\Delta p - 2L\tau_0)}{2\mu L} \right].$$

3. PROUDĚNÍ MEZI PARALELNÍMI DESKAMI

Model využívající okrajovou podmínku prokluzu pak dává tento vztah pro výpočet objemového průtoku:

$$Q = D \left[-\frac{\Delta p H^3}{12\mu L} + \frac{\tau_0 H}{2k} \right].$$

3.3.3. Model s mezní vrstvou proměnlivé viskozity

Model s mezní vrstvou proměnlivé viskozity vychází z prvního modelu, za pozměněného předpokladu, že viskozita závisí na kolmé vzdálenosti od nesmáčivého povrchu. Vztah závislosti je v případě této úlohy vyjádřen rovnicí (3.10).

$$\mu_0(y) = \frac{1}{a + by + cy^2} \quad (3.10)$$

Koeficienty a, b určíme za použití předpokladů kontinua, tzn. materiálové vlastnosti jsou hladkými funkcemi souřadnic. Na hranici vrstev $y = u_0$ tedy požadujeme spojitost funkce společně s její první derivací.

pro $y = u_0$:

$$\begin{aligned} \mu_0(u_0) &= \frac{1}{cu_0^2 + bu_0 + a} = \mu \\ \left. \frac{d\mu_0}{dy} \right|_{y=u_0} &= -\frac{2cu_0 + b}{(cu_0^2 + bu_0 + a)^2} = 0 \end{aligned}$$

Po vyjádření konstant a, b a dosazení do (3.10) dostáváme model viskozity v závislosti pouze na konstantě c . Závislost je vyjádřena rovnicí (3.11). Z rozměrové analýzy plyne, že jednotkou c je $\text{Pa}^{-1} \text{s}^{-1} \text{m}^{-2}$.

$$\mu_0(y) = \frac{\mu}{1 + c\mu(u_0 - y)^2} \quad (3.11)$$

Následně opět řešíme okrajový problém, do rovnice proudění v kanále (3.3) pro $y \in [0, u_0]$ dosadíme model viskozity (3.11). Na jednotlivých intervalech definičního oboru tedy získáme:

$y \in [0, u_0]$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_0}{dy^2} &= -\frac{1}{\mu_0(y)} \frac{\Delta p}{L} = -\frac{\Delta p(1 + c\mu(u_0 - y)^2)}{\mu L} \\ v_0(y) &= -\frac{\Delta p c}{12L} y^4 + \frac{\Delta p c u_0}{3L} y^3 - \frac{\Delta p(1 + c\mu u_0^2)}{2\mu L} y^2 + Ay + B \end{aligned}$$

$y \in [u_0, H]$:

$$v_1(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} y^2 + My + N,$$

okrajové podmínky:

3.3. MODELÝ OKRAJOVÝCH PODMÍNEK

pro $y = 0$:

$$\left. \frac{dv_0}{dy} \right|_{y=0} = A = \frac{k}{\mu_0(y)} v_0(0) = \frac{k(1 + c\mu(u_0 - y)^2)}{\mu_1} B$$

pro $y = u_0$:

$$v_0(u_0) = \frac{\Delta pc}{4L} u_0^4 - \frac{\Delta p(1 + c\mu u_0^2)}{2\mu L} u_0^2 + Au_0 + B = v_1(u_0) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} u_0^2 + Mu_0 + N$$

$$\left. \frac{dv_0}{dy} \right|_{y=u_0} = -\frac{\Delta pc}{3L} u_0^3 - \frac{\Delta p}{\mu L} u_0^2 + A = \left. \frac{dv_1}{dy} \right|_{y=u_0} = -\frac{\Delta p}{\mu L} u_0 + M$$

pro $y = H$:

$$v_1(H) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} H^2 + MH + N = 0.$$

Z předchozích rovnic získáme integrační konstanty, které společně s pohybovými rovnicemi popisují proudový profil.

$y \in [0, u_0]$:

$$v_0(y) = -\frac{\Delta pc}{12L} y^4 + \frac{\Delta pc u_0}{3L} y^3 - \frac{\Delta p(1 + c\mu u_0^2)}{2\mu L} y^2 +$$

$$+ \frac{\Delta pk(1 + c\mu u_0^2)((4H - u_0)c\mu u_0^3 + 6H^2)}{12\mu L((1 + c\mu u_0^2)Hk + \mu)} y +$$

$$+ \frac{\Delta p((4H - u_0)c\mu u_0^3 + 6H^2)}{12L((1 + c\mu_1 u_0^2)Hk + \mu)}$$

$y \in [u_0, H]$:

$$v_1(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} y^2 +$$

$$+ \frac{\Delta p((1 + c\mu u_0^2)(6H^2 k - c\mu k u_0^4) - 4c\mu^2 u_0^3)}{12\mu L((1 + c\mu u_0^2)Hk + \mu)} y +$$

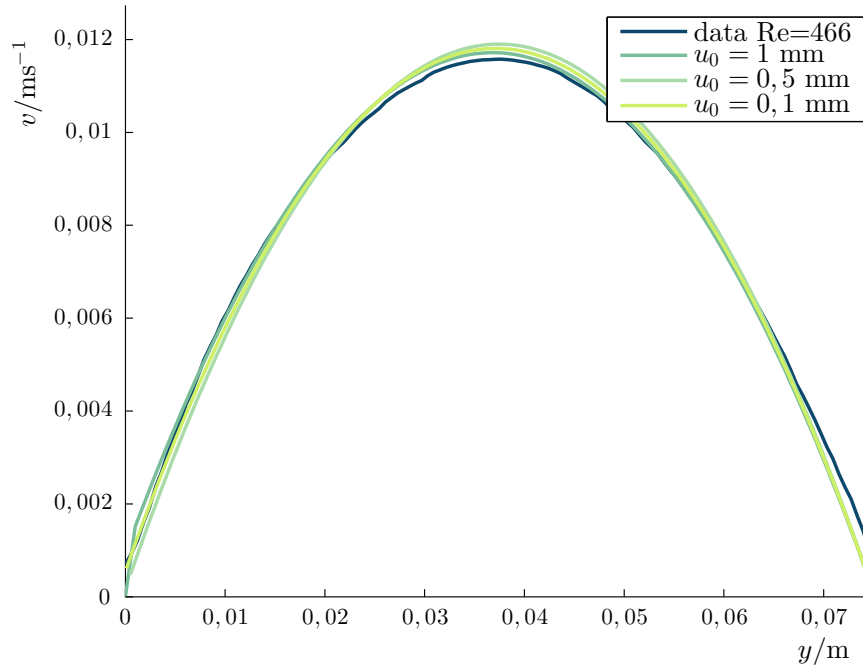
$$+ \frac{\Delta p H((1 + c\mu u_0^2)ck u_0^4 + 4c\mu u_0^3 + 6H)}{12L((1 + c\mu u_0^2)Hk + \mu)}.$$

Numerické profily pro tři různé hodnoty tloušťky mezní vrstvy u_0 jsou vykresleny na obrázku 3.6. Ostatní koeficienty byly opět voleny tak, aby profil co nejlépe odpovídal naměřeným hodnotám rychlostí.

Pro ověření validnosti obdrženého modelu a kontrolu správnosti jeho odvození je možno jej posoudit vůči limitním případům, které lze dobře fyzikálně interpretovat. Budeme uvažovat tři případy extrémních hodnot koeficientů c a k , jelikož přímo ovlivňují velikost prokluzu a tím i tvar výsledného profilu.

1. $c = 0$, $k \rightarrow \infty$. Nulová hodnota prvního koeficientu způsobí, že viskozita v mezní vrstvě nemění svou hodnotu a je rovna materiálové hodnotě. Narůstání adhezního součinitele způsobuje větší tření a snižuje tedy prokluz na stěně. Výsledný profil by se tedy měl limitně blížit analytickému řešení proudění s podmínkou ulpívání (3.6). Tento trend je patrný z obrázku 3.7a, kde je profil vykreslen pro tři různé hodnoty adhezního součinitele.

3. PROUDĚNÍ MEZI PARALELNÍMI DESKAMI



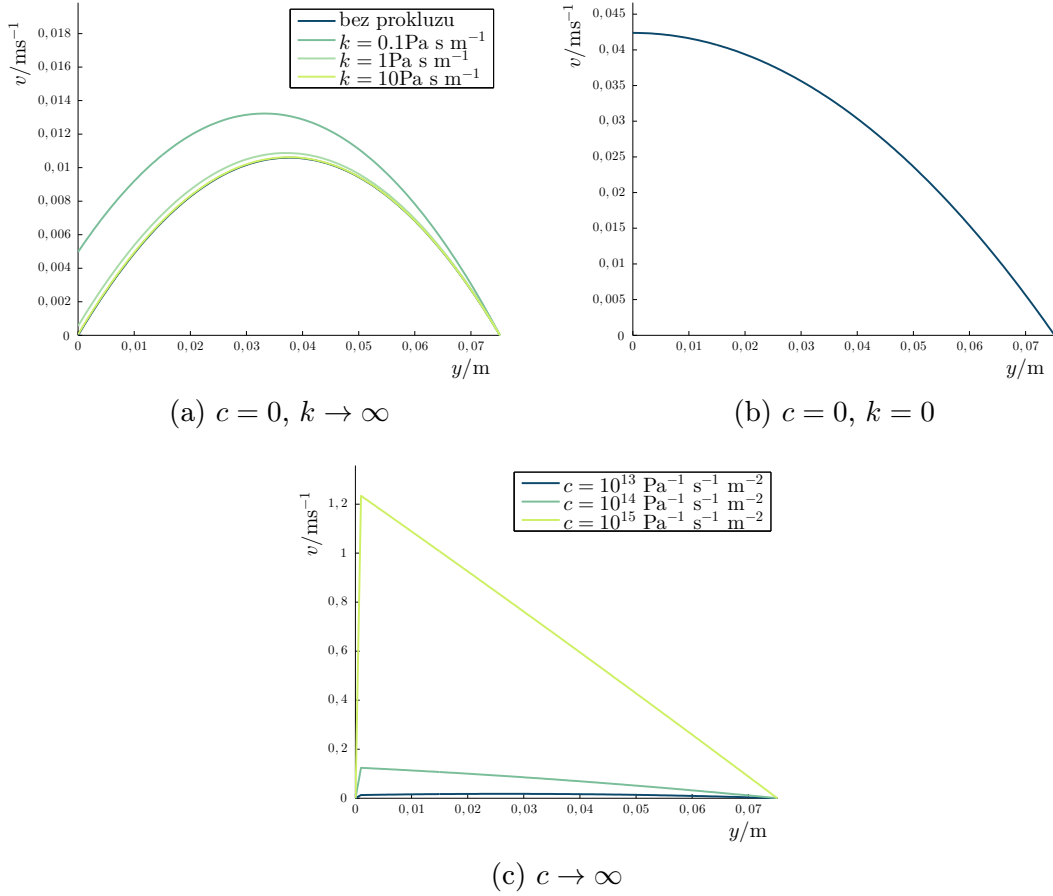
Obrázek 3.6: Proudový profil pro model s okrajovou podmínkou proměnlivé viskozity v mezní vrstvě tloušťky u_0

2. $c = 0, k = 0$. Tato volba opět značí proudění kapaliny s konstantní viskozitou, nulová hodnota adhezního součinitele dává informaci o extrému rychlosti na nesmáčivé stěně, jelikož stěna neklade kapalině žádný odpor. Tvar profilu ilustruje obrázek 3.7b.
3. $c \rightarrow \infty$. Pro velké hodnoty koeficientu c roste jmenovatel ve zlomku (3.11) nade všechny meze a viskozita rapidně klesá k nule. Nulová viskozita značí, že kapalina neklade žádný odpor vůči působení tlakového gradientu a více se urychluje. Obrázek 3.7c potvrzuje, že v blízkosti hydrofobní stěny nacházíme extrém, ten s rostoucí hodnotou c roste.

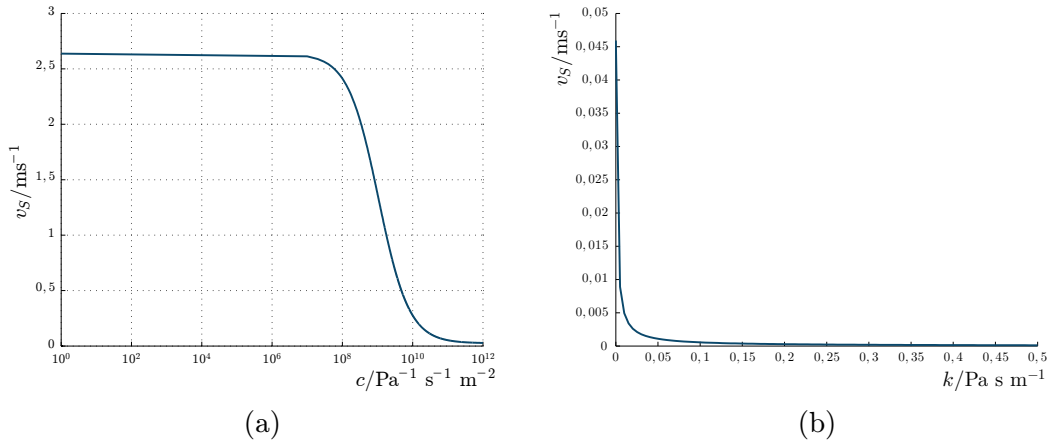
Poslední člen v rovnici popisující proudění u nesmáčivé stěny představuje prokluz rychlosti na stěně $y = 0$ m. Velikost prokluzu přímo ovlivňují hodnoty neznámých koeficientů c a k . Uvážíme-li tvar mezní vrstvy (3.11), koeficient c říká o kolik se sníží hodnota viskozity na nesmáčivé stěně. Vzhledem k ostatním členům v rovnici lze předpokládat, že c bude v řádech $10^{10} \text{ Pa}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-2}$, pokud má být jeho vliv na prokluz patrný. Pro lepší představu závislosti prokluzu na hodnotě koeficientu c byl vykreslen graf pro konkrétní hodnoty ostatních proměnných. Rovněž pro koeficient k byla podobná závislost vykreslena graficky.

S využitím linearit integrálu byl opět odvozen analytický vztah pro výpočet objemového průtoku pro tento model:

3.3. MODELÝ OKRAJOVÝCH PODMÍNEK



Obrázek 3.7: Tvary profilů modelu s mezní vrstvou proměnlivé viskozity pro limitní případy součinitelů c a k .



Obrázek 3.8: Závislost prokluzu na koeficientech modelu s mezní vrstvou proměnlivé viskozity

$$Q = \frac{D\Delta p(-2Hc^2\mu^2ku_0^7 + 5H^2c^2\mu^2ku_0^6 - 2c\mu(Hk + \mu)u_0^5 + 5H^2c\mu ku_0^4)}{120\mu L((1 + c\mu_1 u_0^2)Hk + \mu)} + \frac{D\Delta p(20H^2c\mu^2u_0^3 + 10H^4c\mu ku_0^2 + 10H^4k + 40H^3\mu)}{120\mu L((1 + c\mu_1 u_0^2)Hk + \mu)}.$$

3.3.4. Model s mezní vrstvou proměnlivé viskozity při zadané hodnotě smykového napětí na stěně

Kombinací dvou předchozích modelů byl získán poslední, nejobecnější model pro popis laminárního rovinného proudění v kanále. Předpokládáme tedy opět proměnlivou viskozitu v mezní vrstvě v blízkosti nesmáčivé stěny, avšak na stěně nezadááme hodnotu prokluzu, nýbrž smykové napětí. Ostatní okrajové podmínky odpovídají předchozímu modelu, tedy:

pro $y = 0$:

$$\left. \frac{dv}{dy} \right|_{y=0} = A = \frac{\tau_0}{\mu_0(0)} = \frac{\tau_0(1 + c\mu u_0^2)}{\mu}.$$

Získané pohybové rovnice:

$y \in [0, u_0]$:

$$v_0(y) = -\frac{\Delta p c}{12L} y^4 + \frac{\Delta p c u_0}{3L} y^3 - \frac{\Delta p(1 + c\mu u_0^2)}{2\mu L} y^2 + \frac{\tau_0(1 + c\mu u_0^2)}{\mu} y + \frac{(1 + c\mu u_0^2)(-12HL\tau_0) + (4H - u_0)c\mu\Delta p u_0^3 + 6H^2\Delta p}{12\mu L}$$

$y \in [u_0, H]$:

$$v_1(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} y^2 + \frac{(1 + c\mu u_0^2)3L\tau_0 - c\mu\Delta p u_0^3}{3\mu L} y + \frac{H((1 + c\mu u_0^2)(-6L\tau_0) + 2c\mu\Delta p u_0^3 + 3H\Delta p)}{6\mu L}.$$

Z posledního členu rovnice popisující proudění u nesmáčivé stěny znovu získáme vztah pro hodnotu kritického smykového napětí, při kterém bude kapalina ulpívat na stěně umístěné v $y = 0$:

$$\tau_{\text{krit}} = \frac{\Delta p((4H - u_0)c\mu u_0^3 + 6H^2)}{12LH(1 + c\mu u_0^2)}.$$

Graf rychlostního pole je opět vyneseno pro různé hodnoty smykového napětí vztahující ke kritické hodnotě.

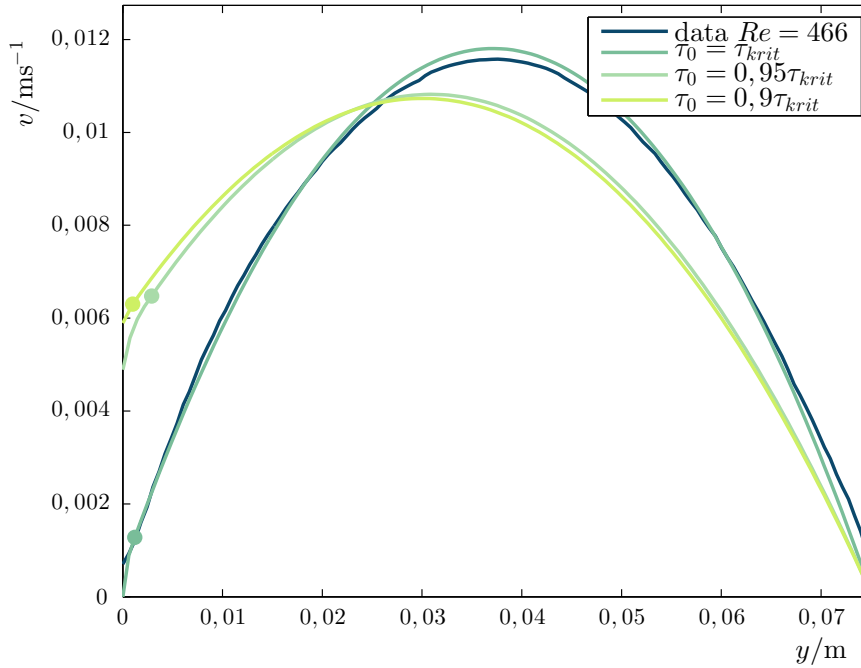
Objemový průtok pro případ posledního modelu:

$$Q = D \left[-\frac{\Delta p c}{60L} u_0^5 + \frac{\Delta p c H^2}{6L} u_0^3 - \frac{1}{2} H^2 c \tau_0 u_0^2 - \frac{H^2 \tau_0}{2\mu} + \frac{\Delta p H^3}{3\mu L} \right].$$

Z uvedených modelů a grafických srovnání je možné konstatovat, že první model nabízí zajímavý pohled na chování mezní vrstvy proudění v blízkosti hydrofobního povrchu. Tvar profilu získaných dat však nenaznačuje žádný zlom a je tedy nepravděpodobné, že by viskozita v mezní vrstvě skokově měnila svou hodnotu. Model nicméně představuje první přiblížení a může být přínosný pro další zkoumání.

Druhý model udává vztah rychlosti a hodnoty smykového napětí na stěně. Smykové napětí, jak je patrné z kapitoly 2, je základní veličinou pro zkoumání proudění v blízkosti

3.3. MODEL Y OKRAJOVÝCH PODMÍNEK



Obrázek 3.9: Proudové profily pro model s mezní vrstvou proměnlivé viskozity u_0 a smykovým napětím zadaným na stěně τ_0 . Tečky značí hranice mezních vrstev.

pevných překážek a motivací pro vznik druhého modelu je využít závislosti pro zkoumání vlastností proudění po nesmáčivých površích. Vzhledem k faktu, že model popisuje naměřený profil na celém definičním oboru polynomem druhého stupně, jsou jeho tvarové možnosti omezené.

Třetí model naopak tvarově nejlépe odpovídá naměřeným datům pro všechny zvolené hodnoty tloušťky mezní vrstvy, do rovnic však vnáší další neznámou, konstantu c , kterou je třeba určit. O možnostech určení konstanty pojednává další kapitola. Získané pohybové rovnice jsou poměrně složité, na druhou stranu však dávají více informací o tvaru proudění v blízkosti nesmáčivé stěny.

Poslední model opět udává vztah rychlosti proudění a smykového napětí na nesmáčivé stěně. Nabízí přitom stejné tvarové možnosti jako předchozí model, což je opět vykoupeno přítomností neznámé konstanty a složitostí výsledných pohybových rovnic.

3.4. Hydraulické ztráty v potrubí

Základní motivací pro studium nesmáčivých povrchů je jejich široké použití v technické praxi. Povrchová úprava, případně povrch z materiálu vykazující hydrofobní vlastnosti, dokáží snižovat třecí ztráty v potrubí. Hodnota tlakové ztráty způsobené třením v kruhovém potrubí délky L a průměru D je dána vztahem:

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2} \rho, \quad (3.12)$$

kde λ je tzv. součinitel hydraulického tření (také odporový součinitel) a \bar{v} značí střední rychlost proudění v potrubí. Součinitel λ je pro ustálené laminární proudění dán analytickým vztahem (3.13), pro turbulentní proudění jsou vztahy pro koeficient složitější a proto se odečítají z tzv. Nikuradzeho diagramu, v závislosti na materiálu potrubí a jeho rozměrech.

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (3.13)$$

Jednoduchou úpravou vztahu (3.12) získáme:

$$\frac{\Delta p}{Q} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2S} \bar{v}.$$

Na levé straně rovnosti vystupuje směrnice závislosti tlakových ztrát na objemovém průtoku (ta je lineární) a na pravé straně se nachází geometrické parametry potrubí, střední rychlost proudění, která je pro oba typy povrchů stejná a koeficient λ . Očekáváme tedy, že součinitel tření λ bude pro nesmáčivý materiál nižší, což je logický předpoklad, vzhledem k tomu, že na nesmáčivé stěně dochází k prokluzu. Můžeme tedy konstatovat, že očekáváme menší hodnotu směrnice a tedy i ztrát pro nesmáčivé povrchy, nicméně na základě experimentu, který byl proveden na OFIVK, bylo navzdory očekávání zjištěno, že ztráty v potrubí s hydrofobní povrchovou úpravou jsou vyšší než u potrubí ze smáčivého materiálu.[9]

Pokud vyjádříme hodnotu směrnice tlakových ztrát pro proudění v kanále pro okrajové podmínky smáčivosti (integrací a úpravou rovnice (3.6)), dostaneme vztah:

$$\frac{\Delta p}{Q} = \frac{12\mu L}{DH^3}.$$

Pro jednoduchý model uvažující pouze Navierovu podmínku prokluzu můžeme podobný vztah získat rovnou z (3.7):

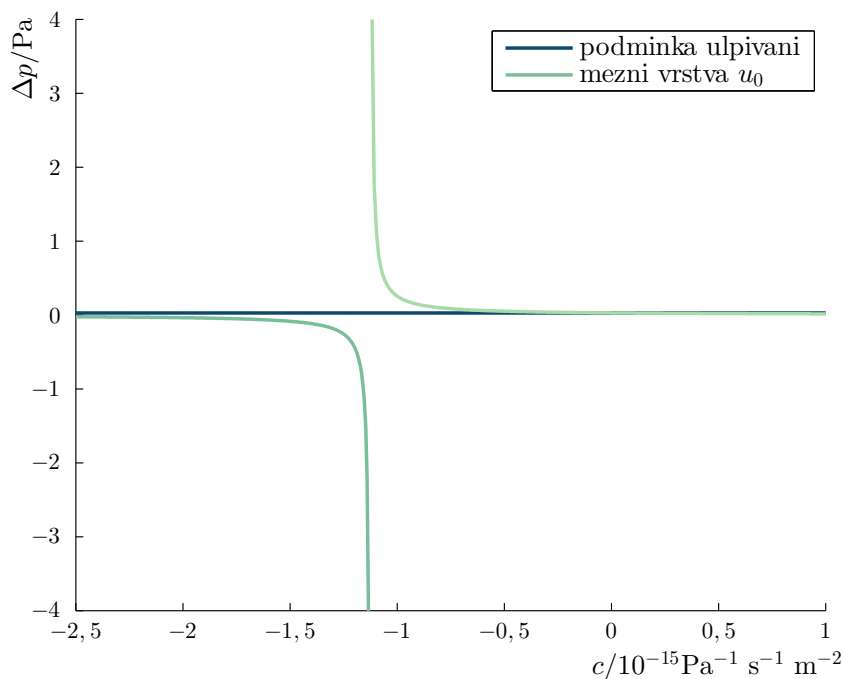
$$\frac{\Delta p}{Q} = \frac{12\mu L}{DH^3} \frac{Hk + \mu}{Hk + 4\mu}$$

Ze srovnání obou vztahů je nabíledni, že směrnice závislosti, potažmo tlaková ztráta samotná bude pro jednoduchý model uvažující pouze podmínku prokluzu vždy nižší, což odporuje experimentálně získaným závěrům.

Pokud však budeme uvažovat odvozený model interakce s mezní vrstvou proměnlivé viskozity, dostaneme pro určité hodnoty součinitele c tlakové ztráty větší než v případě proudění s podmínkou ulpívání¹. Uvedenou skutečnost demonstruje graf 3.10, v němž je vynesena tlaková ztráta Δp v závislosti na hodnotě součinitele c . Stojí za povšimnutí, že průsečík se

3.4. HYDRAULICKÉ ZTRÁTY V POTRUBÍ

ztrátou pro podmínku ulpívání nastává pro záporné hodnoty koeficientu, což znamená, že viskozita kapaliny při nesmáčivé stěně je naopak větší než viskozita mimo mezní vrstvu.



Obrázek 3.10: Srovnání tlakových ztrát pro analytické rovnice proudění s podmínkou ulpívání a pro model s mezní vrstvou proměnlivé viskozity v závislosti na součiniteli modelu viskozity c . Ostatní proměnné byly dosazeny s hodnotami z tabulky 4.1.

¹Analytický vztah pro směrnici je vzhledem ke své složitosti uveden v Příloze 2. na straně 29.

4. Metody určení neznámých koeficientů

Odvozené pohybové rovnice jednotlivých modelů interakce závisí na několika koeficientech, které je z hlediska ověření správnosti modelu třeba určit pomocí experimentálních výsledků. Kapitola zavádí možnou metodiku zjištění některých koeficientů získaných modelů.

Způsoby určení adhezního součinitele se již dlouho intenzivně věnují na OFIVK, metodika je popsána v [13]. Pro vybraný model interakce, který uvažuje mezní vrstvu s proměnlivou viskozitou je tedy třeba určit především koeficienty c a u_0 , zbylé jsou dány geometrií průtočného kanálu, typem protékající kapaliny nebo se dají měřením jednoduše zjistit. Jelikož je pohybová rovnice popisující proudění v mezní vrstvě polynomem čtvrtého stupně v proměnné y , nabízí se otázka, zda se na intervalu $[0, u_0]$ nenachází inflexe, která by mohla poskytnout nějakou informaci o neznámých. Položíme-li druhou derivaci podle y rovnu nule získáme rovnici:

$$-\frac{\Delta p c}{L} y^2 + \frac{2\Delta p c u_0}{L} y - \frac{\Delta p (c\mu u_0^2 + 1)}{\mu L}.$$

Řešením kvadratické rovnice dostáváme kořeny:

$$y_1 = \frac{u_0 \sqrt{-c\mu} - 1}{\sqrt{-c\mu}}, y_2 = \frac{u_0 \sqrt{-c\mu} + 1}{\sqrt{-c\mu}},$$

uvedené hodnoty postrádají smysl, pokud uvažujeme $c \geq 0$, nicméně pro $c < 0$ představují reálné hodnoty, které však mohou padnout mimo definiční obor pohybové rovnice. Pokud by však vlivem hydrofobního povrchu docházelo v mezní vrstvě ke změně viskozity, projevil by se to na tvaru křivky, která by v mezní vrstvě nemusela mít konstantní hodnotu křivosti. Pro její hodnotu navíc v bodě $y = 0$ platí:

$$\left. \frac{d^2 v_0}{dy^2} \right|_{y=0} = -\frac{\Delta p (c\mu u_0^2 + 1)}{\mu L},$$

což poskytuje informaci o vztahu koeficientů c a u_0 .

Z naměřeného profilu jde také možno snadno odečíst hodnotu tečny na nesmáčivé stěně:

$$\left. \frac{dv_0}{dy} \right|_{y=0} = \frac{\Delta p k (c\mu u_0^2 + 1) ((4H - u_0) c\mu u_0^3 + 6H^2)}{12\mu L ((c\mu k u_0^2 + 1) H k)},$$

z čehož lze získat další vztahy pro koeficienty c a u_0 . Také hodnota prokluzu je poměrně dobře čitelná z naměřených dat a může posloužit k dalšímu rozboru hledaných koeficientů.

Jelikož veškeré odvozené rovnosti vycházejí z vlastností přesného analytického řešení, je žádoucí, aby naměřená data byla ve vysokém rozlišení. Měření rychlostního pole kanálu se provádí metodou PIV, která sleduje pohyb kontrastních částic v proudící kapalině. Proto je vysoké rozlišení podmíněno dostatečným množstvím kontrastních částic, které však zase mohou ovlivnit proudění. Pro malé rozměry a proudění v kapilárách byla vyvinuta metoda mikro LDA, která je schopna dosáhnout prostorového rozlišení $30\mu\text{m}$, podél měřeného objemu o délce 6 mm. Charakteristikou doplerovských optických metod je, že

dokáží měřit rychlost proudění přesněji než PIV a s velkým rozlišením, avšak pouze v malém kontrolním objemu. [3]

Technická univerzita v Liberci disponuje mikro PIV měřicí aparaturou, která také dosahuje většího rozlišení, avšak je schopna měřit celý proudový profil najednou.

Závěr

Cílem bakalářské práce *Tvůrba matematického modelu interakce tekutiny s hydrofobním povrchem* bylo vytvořit model okrajové úlohy proudění v kanále s nesmáčivou stěnou a umožnit tak lepší pochopení podstaty studovaného problému.

V práci byly odvozeny čtyři modely laminárního proudění mezi paralelními deskami, jejichž podstata je motivována experimentálními výsledky získanými v průběhu dlouhodobého výzkumu na OFIVK VUT v Brně. Pro každý model byly sestaveny pohybové rovnice a vykreslen proudový profil, který byl následně porovnán s experimentálními daty získanými na TU v Liberci. Pro model mezní vrstvy s proměnlivou viskozitou byl diskutován význam neznámých koeficientů a vykresleny závislosti s parametry proudění. Podstata tohoto modelu byla dále demonstrována pro problematiku hydraulických ztrát v potrubí. Poslední kapitola obsahuje popis možné metodiky získání či přiblížení neznámých součinitelů.

Pro lepší pochopení problematiky a hlubší znalost odvozených modelů by bylo potřeba získat větší objem naměřených dat společně s parametry experimentu. Obsah práce by bylo možno do budoucna také rozšířit na popis turbulentního proudění, pro nějž je dostupné větší množství dat. Pro tyto modely by pak bylo vhodné vyvinout důmyslnější optimalizační algoritmus, který by vypočtená data srovnával s naměřenými profily.

Příloha 1.

Není-li v popisku grafu uvedeno jinak, jsou pro vykreslování závislostí proměnných použity v modelech následující hodnoty koeficientů:

Tabulka 4.1: Hodnoty proměnných¹

X^2	$\{X\}$	$[X]$
H	0,075	m
D	0,075	m
L	1	m
Δp	0,015	Pa
μ	0,001	Pa s
k	0,2	Pa s m ⁻¹
u_0	0,001	m
c	10 ¹⁰	Pa ⁻¹ s ⁻¹ m ⁻²
k	0,2	Pa s m ⁻¹

¹Hodnoty byly zvoleny tak, aby odpovídaly provedenému experimentu.

²Význam jednotlivých symbolů je uveden v Seznamu použitých zkratk a symbolů na straně 2.

Příloha 2.

Analytický vztah pro směrnici závislosti tlakové ztráty na objemovém průtoku:

$$\frac{\Delta p}{Q} = \frac{120\mu L((Hcku_0^2 + 1)\mu + Hk)}{(5H^2ku_0^6 - 2Hku_0^7)\mu^2c^2 + ((10H^4ku_0^2 + 5H^2ku_0^4 - 2Hku_0^5)\mu + (20H^2u_0^3 - 2u_0^5)\mu^2)c + 10H^4k + H^3\mu}$$

Literatura

- [1] BERGLUND, S. *Modeling Channel Flow over Superhydrophobic Surfaces*. Providence, Rhode Island, 2010. Diplomová práce.
- [2] BRDIČKA, M., L. SAMEK a B. SOPKO. *Mechanika kontinua*. Vyd. 2., opr. Praha: Academia, 2000. Gerstner. ISBN 80-200-0772-5.
- [3] CZARSKE, J., L. BÜTTNER, T. RAZIK a H. MÜLLER. Boundary layer velocity measurements by a laser Doppler profile sensor with micrometre spatial resolution. *Measurement Science and Technology*. 2002, **13**(12), 1979-1989. DOI: 10.1088/0957-0233/13/12/324. ISSN 0957-0233. Dostupné také z: <http://stacks.iop.org/0957-0233/13/i=12/a=324?key=crossref.5a538846662c9b099e78104fa48a32fb>
- [4] FIALOVÁ, S. a M. HUDEC. Experimental Verification of the Use of Ultra Hydrophobic Materials for Water Aeration. *International Journal of Advancements in Technology*. 2015, **06**(02), -. DOI: 10.4172/0976-4860.1000147. ISSN 09764860. Dostupné také z: <http://www.omicsonline.org/open-access/experimental-verification-of-the-use-of-ultra-hydrophobic-materials-forwater-aeration-0976-4860-1000147.php?aid=62486>
- [5] FIALOVÁ, Simona. *Identifikace vlastností hydrofobních vrstev a jejich využití v technické praxi*. Brno, 2015. Habilitační práce.
- [6] GAŽO, J. *Všeobecná a anorganická chemia*. 3. Bratislava: ALFA, 1981.
- [7] CHANDLER, L., D. Explained: Hydrophobic and hydrophilic: Better understanding of how surfaces attract or repel water could improve everything from power plants to ketchup bottles. In: *MIT News* [online]. Massachusetts, 2013 [cit. 2016-05-27]. Dostupné z: <http://news.mit.edu/2013/hydrophobic-and-hydrophilic-explained-0716>
- [8] MACUR, M. *Úvod do analytické mechaniky a mechaniky kontinua*. V Brně: VUTUM, 2010. ISBN 978-80-214-3944-3.
- [9] PIVOŇKA, J. *Tekutinové mechanismy*. 1. SNTL - Nakladatelství technické literatury: SNTL, 1987.
- [10] POCHYLÝ, F., S. FIALOVÁ, V. HABÁN a L. RINKA. Praktičeskoje ispolzovanie smačivajemosti. In: *PCVEXPO 08*. Moskva: MGTU im. N.E.Baumana, 2008, s. 40-41. ISBN 978-5-7038-3214-1.
- [11] *Fundamentals of Surface Tension/Wettability* [online]. Massachusetts [cit. 2016-05-27]. Dostupné z: <http://web.mit.edu/nmf/education/wettability/index1.html>
- [12] *The USGS Water Science School* [online]. 2016 [cit. 2016-05-27]. Dostupné z: <http://water.usgs.gov/edu/>
- [13] ŽÁK, R. *Experimentální stanovení adhezního součinitele pro materiály s povrchovou úpravou TC1191, TC3072 a TC4111*. Brno, 2013.