UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Interpolace racionálními funkcemi

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.
Rok odevzdání: 2010

Vypracovala:
Ivana Stejskalová
MAP, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně za vedení RNDr. Jitky Machalové, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 15. dubna 2010

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala především vedoucí bakalářské práce RNDr. Jitce Machalové, Ph.D. za ochotnou spolupráci, cenné rady i za čas, který mi věnovala při konzultacích. Také bych chtěla poděkovat své rodině a příteli, že mi umožnili studium a podporovali mě po celou dobu.

Obsah

Použité značení

$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{R}^2$	dvourozměrný prostor
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{N}_0$	množina všech přirozených čísel včetně nuly
$[x, y]$	bod v dvourozměrném prostoru
$P^n(x)$	reálný polynom stupně nejvýše n
$D(f)$	definiční obor funkce $f(x)$
$H(f)$	obor hodnot funkce $f(x)$

Úvod

Cílem této bakalářské práce je nastudovat úlohu interpolace racionálními funkcemi a její řešení. K pochopení této problematiky je potřeba, aby čtenář již znal některé pojmy, proto byla zařazena přípravná kapitola. Ta obsahuje základní pojmy týkající se polynomů, racionálních funkcí, atd. včetně příkladů pro lepší porozumnění.

Poté se již budeme věnovat úloze interpolace racionální funkcí. Nejprve bude tato úloha nadefinována a pak budou rozebrány možnosti jejího řešení. Bude ukázáno, že interpolační racionální funkci lze nalézt metodou neurčitých koeficientů. Dále bude čtenář seznámen se dvěma dalšími metodami řešení dané úlohy interpolace racionální funkcí. Je to metoda Newtonova typu a metoda Nevillova typu. Každá z těchto metod řeší danou úlohu jiným způsobem (algoritmem), což bude v práci ukázáno. Každý konkrétní způsob řešení dané úlohy interpolace bude demonstrován na vlastních příkladech.

Dalším úkolem této práce je sestavení programů v softwaru Matlab. Sestavené programy pro metody Newtonova a Nevillova typu, a také příklady jimi řešené budou tedy prezentovány v samostatných podkapitolách.

V posledních již méně rozsáhlých podkapitolách této práce se budeme věnovat vhodné volbě uzlů a srovnání metod Newtonova a Nevillova typu.

V této práci jsou pro označení konce příkladů resp. důkazů použity symboly $\diamondsuit$ resp. $\square$.

1 Přípravná kapitola

V této kapitole jsou uvedeny pojmy, jejichž znalost je potřebná pro pochopení dalšího textu. Budou zde definovány polynom, racionální funkce, inverzní a reciproké diference. Také budou zopakovány pojmy spojitost funkce a bod odstranitelné nespojitosti.

Definice 1.1. Nechť jsou dána čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$, pak funkce

$$P^n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad kde \quad a_n \neq 0,$$

se nazývá **polynom n-tého stupně** v proměnné x s koeficienty $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ z číselného oboru $\mathbb{R}$.

Definice 1.2. Řekneme, že polynomy $P^m(x)$ a $P^n(x)$ jsou **soudělné**, jestliže jsou dělitelné stejným polynomem alespoň prvního stupně. V opačném případě hovoříme o **nesoudělných polynomech**.

Příklad 1.1. Nechť jsou dány polynomy

$$P^2(x) = x^2 - 2x + 1, \quad Q^2(x) = x^2 + x - 6, \quad R^3(x) = x^3 - 5x^2 + 6x.$$

Ukažte dle definice 1.2, že platí následující tvrzení.

(a) Polynomy $P^2(x)$ a $Q^2(x)$ jsou nesoudělné polynomy.

(b) Polynomy $Q^2(x)$ a $R^3(x)$ jsou soudělné polynomy.

(a) Aby toto tvrzení platilo, nesmí existovat polynom stupně alespoň prvního, který dělí současně oba polynomy $P^2(x)$ a $Q^2(x)$. Pokud polynomy upravíme na součin kořenových činitelů dostáváme

$$P^2(x) = (x-1)(x-1) \quad \text{a} \quad Q^2(x) = (x-2)(x+3).$$

Je tedy zřejmé, že neexistuje polynom stupně alespoň prvního, který by dělil současně $P^2(x)$ i $Q^2(x)$ a tudíž jsou tyto polynomy nesoudělné.

(b) Aby toto tvrzení platilo, musíme nalézt polynom stupně alespoň prvního, který dělí současně oba polynomy $Q^2(x)$ a $R^3(x)$. Pokud polynomy upravíme na součin kořenových činitelů dostáváme

$$Q^2(x) = (x-2)(x+3) \quad a \quad R^3(x) = x(x-2)(x-3).$$

Je tedy zřejmé, že polynom $D^1(x) = (x-2)$ je polynom prvního stupně, který dělí současně $Q^2(x)$ i $R^3(x)$ a tudíž jsou tyto polynomy soudělné. $\diamondsuit$

Definice 1.3. **Racionální funkcí** nazýváme každou funkci danou předpisem

$$\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{P^\mu(x)}{Q^\nu(x)} = \frac{a_\mu x^\mu + a_{\mu-1}x^{\mu-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_\nu x^\nu + b_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

kde $\mu, \nu \in \mathbb{N}_0,\ a_\mu, a_{\mu-1}, \ldots, a_1, a_0, b_\nu, b_{\nu-1}, \ldots, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$. Definiční obor funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ je množina všech takových $x \in \mathbb{R}$, pro která platí $Q^\nu(x) \neq 0$.

Je zřejmé, že pro volbu $\nu = 0$ bude racionální funkce $\Phi^{\mu,0}(x)$ z definice 1.3 ve tvaru polynomu stupně μ. Pokud bude zároveň platit $\mu = 0$ a $\nu = 0$, pak bude funkce $\Phi^{0,0}(x)$ ve tvaru konstanty.

Následující definice se týkají racionálních funkcí a jejich vlastností.

Definice 1.4. Řekneme, že racionální funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{P^\mu(x)}{Q^\nu(x)}$ je **v základním tvaru**, jestliže polynomy $P^\mu(x)$ a $Q^\nu(x)$ jsou nesoudělné.

Příklad 1.2. Nechť jsou dány funkce

$$\Phi^{1,1}(x) = \frac{P^1(x)}{Q^1(x)} = \frac{x+1}{x} \quad \text{a} \quad \Phi^{3,2}(x) = \frac{P^3(x)}{Q^2(x)} = \frac{x^3+x}{x^2}.$$

Ukažte, že platí následující tvrzení.
(a) Funkce $\Phi^{1,1}(x)$ je v základním tvaru.
(b) Funkce $\Phi^{3,2}(x)$ není v základním tvaru.

(a) Je zřejmé, že polynomy $P^1(x) = x+1$ a $Q^1(x) = x$ nejsou dělitelné stejným polynomem stupně alespoň prvního. Z definice 1.2 tedy plyne, že $P^1(x)$ a $Q^1(x)$ jsou nesoudělné a tudíž funkce $\Phi^{1,1}(x) = \frac{x+1}{x}$ je v základním tvaru.

(b) Polynomy $P^3(x)$ a $Q^2(x)$ rozložíme na součin kořenových činitelů

$$P^3(x) = x(x^2+1) \quad \text{a} \quad Q^2(x) = x^2.$$

Je zřejmé, že polynomy $P^3(x)$ a $Q^2(x)$ jsou dle definice 1.2 soudělné, neboť jsou oba dělitelné polynomem $D^1(x) = x$. Funkce $\Phi^{3,2}(x) = \frac{x^3+x}{x^2}$ tedy není v základním tvaru. $\diamondsuit$

Definice 1.5. Řekneme, že racionální funkce $\Phi_1^{\mu,\nu}(x) = \frac{P_1^\mu(x)}{Q_1^\nu(x)}$ je **ekvivalentní vyjádření funkce** $\Phi_2^{\kappa,\lambda}(x) = \frac{P_2^\kappa(x)}{Q_2^\lambda(x)}$, což zapisujeme $\Phi_1^{\mu,\nu}(x) \sim \Phi_2^{\kappa,\lambda}(x)$, jestliže platí

$$P_1^\mu(x)Q_2^\lambda(x) = P_2^\kappa(x)Q_1^\nu(x).$$

Někdy také říkáme, že funkce $\Phi_1^{\mu,\nu}(x)$ a $\Phi_2^{\kappa,\lambda}(x)$ **jsou ekvivalentní**.

Příklad 1.3. Nechť jsou dány funkce

$$\widetilde{\Phi}^{1,1}(x) = \frac{\widetilde{P}^1(x)}{\widetilde{Q}^1(x)} = \frac{x+3}{x+2}, \quad \Phi^{2,2}(x) = \frac{P^2(x)}{Q^2(x)} = \frac{x^2+3x}{x^2+2x},$$

$$\Phi^{1,1}(x) = \frac{P^1(x)}{Q^1(x)} = \frac{x+1}{x}.$$

Ukažte, že platí následující tvrzení.

(a) Funkce $\widetilde{\Phi}^{1,1}(x)$ a $\Phi^{2,2}(x)$ jsou ekvivalentní.

(b) Funkce $\widetilde{\Phi}^{1,1}(x)$ a $\Phi^{1,1}(x)$ nejsou ekvivalentní.

(a) Aby funkce $\widetilde{\Phi}^{1,1}(x)$ a $\Phi^{2,2}(x)$ byly ekvivalentní, musí splňovat dle definice 1.5 rovnost $\widetilde{P}^1(x)Q^2(x) = P^2(x)\widetilde{Q}^1(x)$, tj. $(x+3)(x^2+2x) = (x^2+3x)(x+2)$. Po vytknutí x dostáváme $x(x+3)(x+2) = x(x+3)(x+2)$. To znamená, že funkce $\widetilde{\Phi}^{1,1}(x)$ a $\Phi^{2,2}(x)$ jsou ekvivalentní.

(b) Kdyby funkce $\widetilde{\Phi}^{1,1}(x)$ a $\Phi^{1,1}(x)$ byly ekvivalentní, splňovaly by dle definice 1.5 rovnost $\widetilde{P}^1(x)Q^1(x) = P^1(x)\widetilde{Q}^1(x)$, tj. $(x+3)(x) = (x+1)(x+2)$. Když roznásobíme závorky, dostaneme $x^2+3x \neq x^2+3x+2$ a tedy funkce $\widetilde{\Phi}^{1,1}(x)$ a $\Phi^{1,1}(x)$ nejsou ekvivalentní. $\diamondsuit$

Nyní uvedeme příklady „nejjednodušších” racionálních funkcí, jejich definiční obory a obory hodnot. Zjednodušení spočívá v tom, že uvažujeme pouze následující případy tj. $P^\mu(x) = x^\mu$ a zároveň $Q^0(x) \equiv 1$, nebo $P^0(x) \equiv 1$ a zároveň $Q^\nu(x) = x^\nu$. Funkce tedy mají následující tvary

$$\Phi^{\mu,0}(x) = \frac{x^\mu}{1} = x^\mu,\ \mu \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad \Phi^{0,\nu}(x) = \frac{1}{x^\nu},\ \nu \in \mathbb{N}.$$

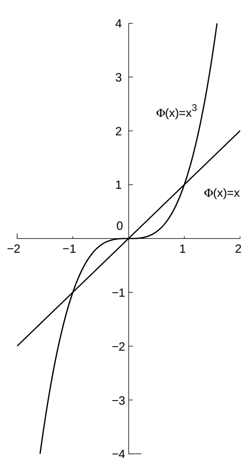
Tyto funkce nazýváme **mocninné funkce** a dle definice 1.3 jsou racionálními funkcemi. Jsou to ale pouze „nejjednodušší” případy. Také zde nepřipouštíme současně rovnost $\mu = 0$ a $\nu = 0$, neboť víme, že funkce $\Phi^{0,0}$ je funkce konstantní.

Obecné racionální funkce jsou mnohem složitější a jejich grafy nelze přímo odhadnout dle určitých pravidel. Jak budou vypadat grafy mocninných funkcí, lze odhadnout z jejich předpisu, přesněji řečeno z hodnoty μ resp. ν. Nyní si tedy uvedeme základní mocninné funkce. $D(\Phi)$ budeme značit definiční obor a $H(\Phi)$ obor hodnot funkce $\Phi(x)$.

(A) Nechť platí $\mu \in \mathbb{N}$ a $Q^0(x) \equiv 1$. Pak graf funkce $\Phi^{\mu,0}(x) = x^\mu$ je znázorněn na obrázku 1. Rozlišujeme μ lichá a sudá.

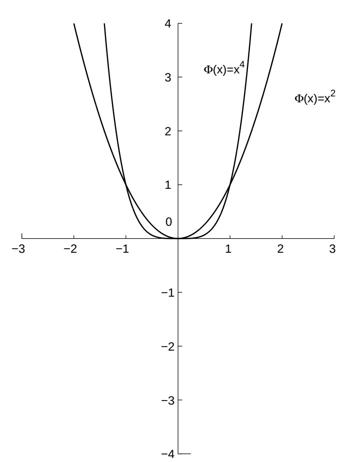
(1) μ je liché

$D(\Phi) = \mathbb{R}, \ \ H(\Phi) = \mathbb{R}$



(2) μ je sudé

$D(\Phi) = \mathbb{R}, \ \ H(\Phi) = [0, +\infty)$



Obrázek 1

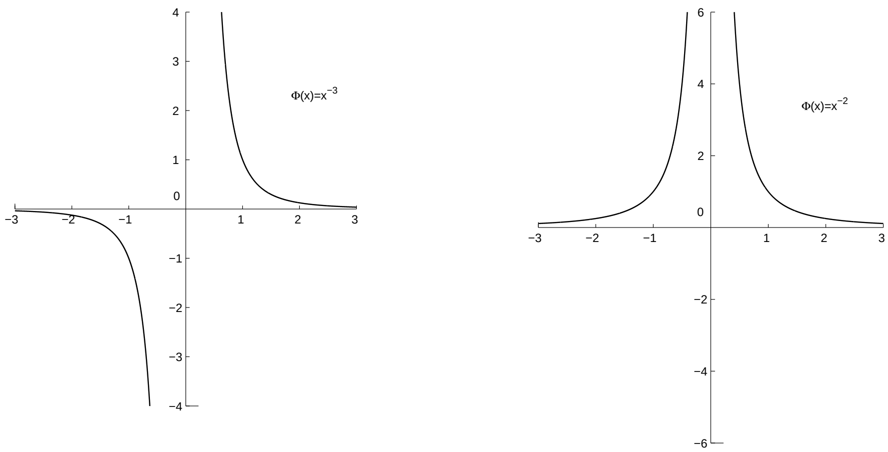
(B) Nechť platí $\nu \in \mathbb{N}$ a $P^0(x) \equiv 1$. Pak graf funkce $\Phi^{0,\nu}(x) = \frac{1}{x^\nu}$ je znázorněn na obrázku 2. Rozlišujeme ν lichá a sudá.

(1) ν je liché

$D(\Phi) = \mathbb{R} - \{0\}, \quad H(\Phi) = \mathbb{R} - \{0\}$

(2) ν je sudé

$D(\Phi) = \mathbb{R} - \{0\}, \quad H(\Phi) = (0, +\infty)$



Obrázek 2

Nyní se podívejme blíže na racionální funkci $\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{P^\mu(x)}{Q^\nu(x)}$. Tuto funkci lze zapsat také takto

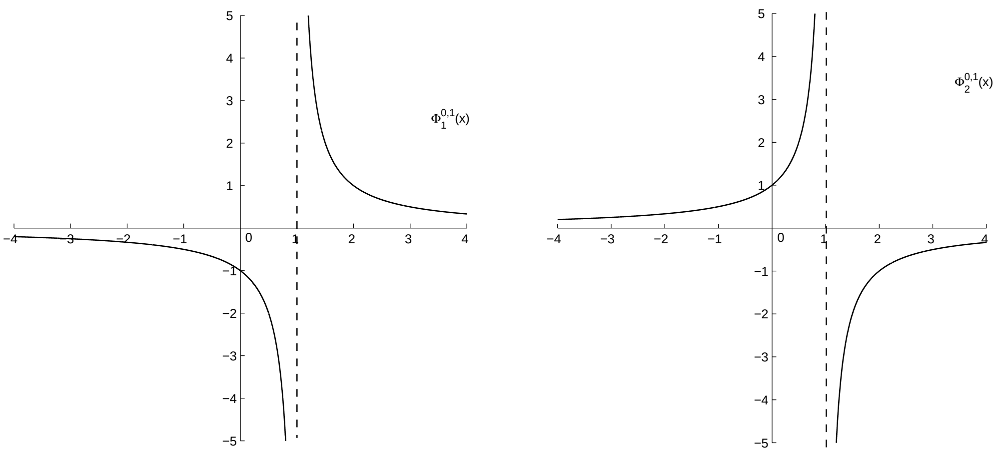
$$\Phi^{\mu,\nu}(x) = P^\mu(x)\frac{1}{Q^\nu(x)}.$$

Víme, že definiční obor $D(\Phi^{\mu,\nu}) = \mathbb{R} - \{$nulové body jmenovatele $Q^\nu(x)\}$. Graf funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{P^\mu(x)}{Q^\nu(x)}$ bude tedy mít asymptoty bez směrnice v bodech x, pro které platí $Q^\nu(x) = 0$. Nyní si ukážeme, jak pro určitou volbu $Q^\nu(x)$ bude vypadat graf funkce $\Phi^{0,\nu}(x) = \frac{1}{Q^\nu(x)}$.

Nechť je dána funkce tvaru $\Phi^{0,\nu}(x) = \frac{1}{Q^\nu(x)}$.

1) Nechť $\nu = 1$, potom $Q^1(x) = a_1 x + a_0$ lze psát ve tvaru součinu kořenových činitelů, tj. $Q^1(x) = a_1(x - x_0)$, kde $x_0 = -\frac{a_0}{a_1}$. Pak funkce $\Phi^{0,1}(x)$ má následující tvar $\Phi^{0,1}(x) = \frac{1}{a_1(x-x_0)}$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$. Je zřejmé, že funkce $\Phi^{0,1}(x)$ není pro $x = x_0$ definována, neboť $\Phi^{0,1}(x_0) = \frac{1}{0}$ a to je nedefinovaný výraz.

Příkladem jsou funkce $\Phi_1^{0,1}(x) = \frac{1}{(x-1)}$, kde $a_1 = 1 > 0$, a $\Phi_2^{0,1}(x) = \frac{1}{-(x-1)}$, kde $a_1 = -1 < 0$. Grafy těchto funkcí jsou vykresleny na obrázku 3. V bodě $x_0 = 1$ mají oba grafy asymptotu bez směrnice, která má rovnici $x = 1$.

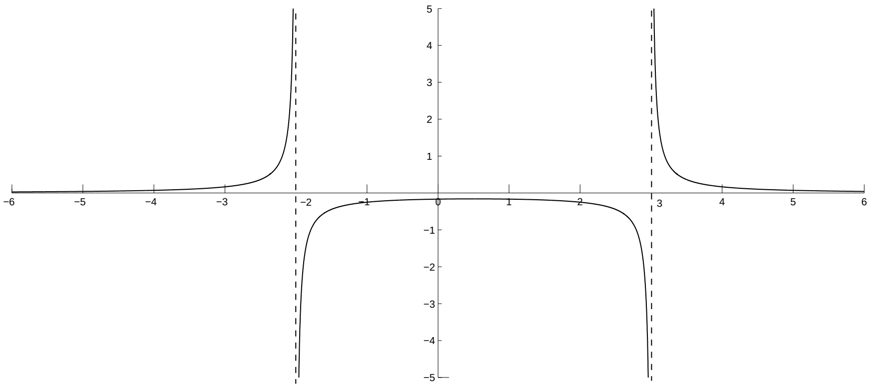


Obrázek 3

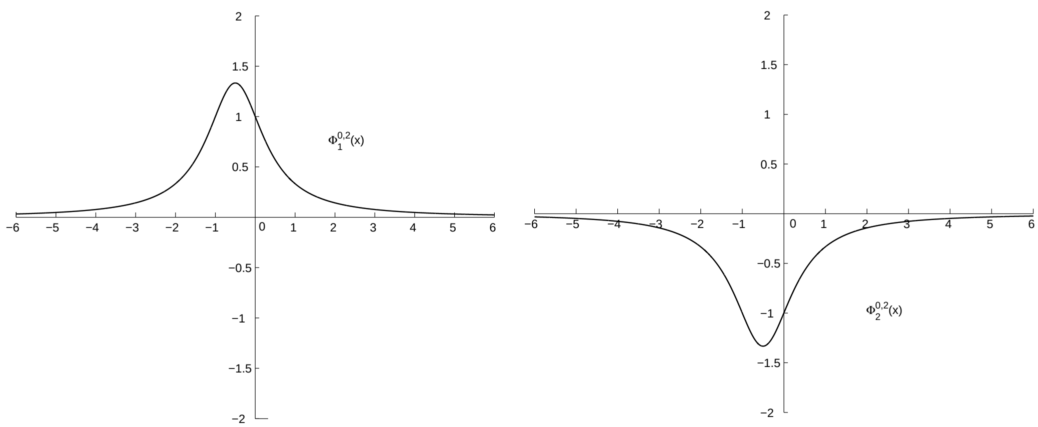
2) Nechť $\nu = 2$, tj. $Q^2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Má-li $Q^2(x)$ reálné kořeny, lze jej psát ve tvaru součinu kořenových činitelů, tj. $Q^2(x) = a_2(x - x_0)(x - x_1)$. Pak funkce $\Phi^{0,2}(x)$ má následující tvar $\Phi^{0,2}(x) = \frac{1}{a_2(x-x_0)(x-x_1)}$, kde $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}$. Je zřejmé, že funkce $\Phi^{0,2}(x)$ není pro $x = x_0$ a $x = x_1$ definována, neboť $\Phi^{0,2}(x_0) = \frac{1}{0}$ a $\Phi^{0,2}(x_1) = \frac{1}{0}$.

Příkladem je funkce $\Phi^{0,2}(x) = \frac{1}{(x+2)(x-3)}$, kde $a_2 = 1 > 0$ a jejíž graf je vykreslen na obrázku 4. V bodech $x_0 = -2$ a $x_1 = 3$ má graf asymptoty bez směrnice, které mají rovnice $x = -2$ a $x = 3$.

Pokud má polynom $Q^2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ dva komplexně sdružené kořeny, platí, že $Q^2(x) \neq 0$, pro $\forall x \in \mathbb{R}$. Graf funkce $\Phi^{0,2}(x) = \frac{1}{a_2x^2+a_1x+a_0}$ tedy nebude mít asymptoty bez směrnice a definiční obor budou tvořit všechna x reálná. Příkladem jsou funkce $\Phi_1^{0,2}(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$, kde $a_2 = 1 > 0$, a $\Phi_2^{0,2}(x) = \frac{1}{-x^2-x-1}$, kde $a_2 = -1 < 0$. Jejich grafy jsou vykresleny na obrázku 5.



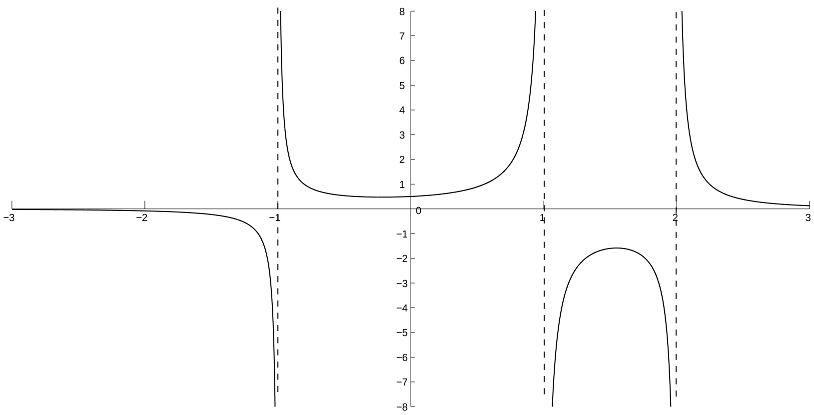
Obrázek 4



Obrázek 5

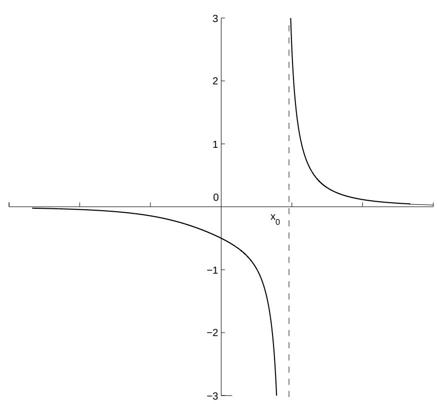
3) Nechť $\nu = 3$, potom $Q_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ lze psát ve tvaru součinu kořenových činitelů, pokud jsou všechny kořeny tohoto polynomu reálné, tj. $Q_3(x) = a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$. Funkce $\Phi^{0,3}(x)$ má následující tvar $\Phi^{0,3}(x) = \frac{1}{a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}$, kde $x_0,\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$. Je zřejmé, že funkce $\Phi^{0,3}(x)$ není pro $x = x_0$, $x = x_1$ a $x = x_2$ definována, neboť $\Phi^{0,3}(x_0) = \frac{1}{0}$, $\Phi^{0,3}(x_1) = \frac{1}{0}$ a $\Phi^{0,3}(x_2) = \frac{1}{0}$.

Příkladem je funkce $\Phi^{0,3}(x) = \frac{1}{x^3-2x^2-x+2}$, kde $a_3 = 1 > 0$. Graf této funkce je vykreslen na obrázku 6. V bodech $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$ má graf asymptoty bez směrnice, které mají rovnice $x = -1$, $x = 1$ a $x = 2$.



Obrázek 6

Může nastat i možnost, že polynom $Q_3(x)$ bude mít jeden reálný kořen a dva komplexně sdružené kořeny. V tomto případě má graf funkce $\Phi^{0,3}(x) = \frac{1}{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0}$ asymptotu bez směrnice v bodě x_0, tj. reálný kořen polynomu $Q_3(x)$. Graf funkce $\Phi^{0,3}(x)$ je vykreslen na obrázku 7. Je zřejmé, že graf je vykreslen pro volbu $x_0 > 0$ a $a_3 > 0$.



Obrázek 7

4) Je zřejmé, že pro libovolnou volbu ν bude mít graf funkce $\Phi^{0,\nu}(x) = \frac{1}{Q^{\nu}(x)}$

asymptot $m \in \mathbb{N}_0$ a to v bodech x_0, $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, tj. v nulových bodech polynomu $Q^\nu(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, které patří do oboru reálných čísel. Číslo m je tedy počet reálných kořenů polynomu $Q^\nu(x)$ počítáno bez násobností, tedy pokud x_j je n_j-násobný kořen polynomu $Q^\nu(x)$, počítá se pouze jako jeden reálný kořen. Je také zřejmé, že platí $m \le \nu$.
Znalost bodů x_0, $x_1, \ldots, x_m$ bude důležitá pro volbu uzlů interpolace viz. podkapitola 3.3.

V dalším textu a také v příkladech se setkáme s nespojitostí a odstranitelnou nespojitostí racionálních funkcí. Proto nyní uvedeme definici spojitosti.

Definice 1.6. Funkce $f(x)$ **je spojitá v bodě** x_0, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funkce $f(x)$ **je spojitá na** $D(f)$, jestliže je spojitá v každém bodě $D(f)$.

Body x, pro které je polynom ve jmenovateli racionální funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ roven nule, jsou její **body nespojitosti**, tj. v těchto bodech není daná racionální funkce spojitá. Existují však i body nespojitosti, z nichž lze vhodným způsobem udělat body spojitosti. Tyto se nazývají **body odstranitelné nespojitosti** a jsou definovány v následující definici.

Definice 1.7. Bod $x_0 \in D(f)$ nazveme **bodem odstranitelné nespojitosti**, jestliže lze nespojitost funkce $f(x)$ v tomto bodě odstranit vhodnou úpravou nebo dodefinováním funkce $f(x)$ v tomto bodě.

Vhodnou úpravou je zde myšleno pro racionální funkce například vytknutí a vykrácení stejného výrazu v polynomech v čitateli a jmenovateli. Pokud lze vytknout a zkrátit výraz $(x - x_0)$, odstraníme tím nespojitost v bodě x_0. Toto je ukázáno v příkladu 1.4.

Příklad 1.4. Nechť je dána racionální funkce $\Phi^{2,3}(x)$ následujícím předpisem

$$\Phi^{2,3}(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 - 5x}.$$

Ukažte, že bod $x = 1$ je bodem odstranitelné nespojitosti a body $x = 0$ a $x = -5$ jsou body nespojitosti.

Nejdříve ověříme užitím definice 1.6, že bod $x = 1$ je bodem nespojitosti. Vypočtěme tedy užitím L'Hospitalova pravidla limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2-5x} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+2}{3x^2+8x-5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

a platí $\Phi^{2,3}(1) = \frac{1+2-3}{1+4-5} = \frac{0}{0}$, tj. nedefinovaný výraz. Bod $x = 1$ je bodem nespojitosti, neboť

$$\lim_{x\to 1} \Phi^{2,3}(x) \neq \Phi^{2,3}(1).$$

Funkci $\Phi^{2,3}(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2-5x}$ lze také zapsat takto $\Phi^{2,3}(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x^2+5x)}$. Vykrácením výrazu $(x-1)$ dostáváme ekvivalentní vyjádření funkce $\Phi^{2,3}(x)$, které zde označíme $\widetilde{\Phi}^{2,3}(x)$, tj.

$$\widetilde{\Phi}^{2,3}(x) = \frac{x+3}{x^2+5x}.$$

Nyní vypočteme $\widetilde{\Phi}^{2,3}(1)$, tj. $\widetilde{\Phi}^{2,3}(1) = \frac{1+3}{1+5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Vypočteme limitu

$$\lim_{x\to 1} \widetilde{\Phi}^{2,3}(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x^2+5x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

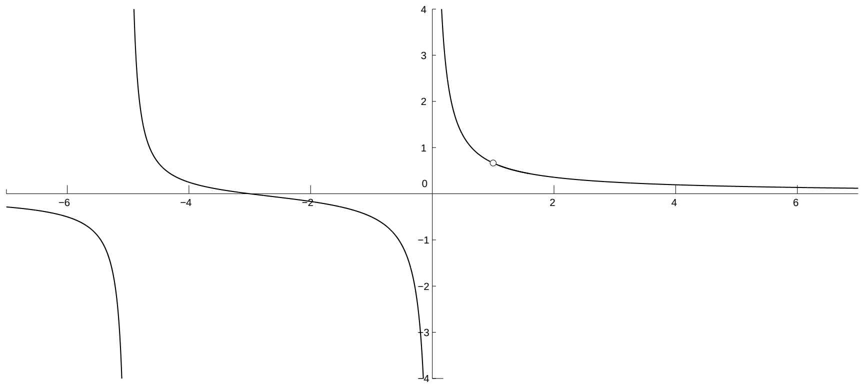
Bod $x = 1$ je tedy bodem odstranitelné nespojitosti, neboť jsme vhodným upravením, tj. vykrácením výrazu $(x-1)$, odstranili nespojitost v tomto bodě.
Nyní ukážeme, že body $x = 0$ a $x = -5$ jsou body nespojitosti. Vypočteme užitím L'Hospitalova pravidla limity pro $x \to 0$ a $x \to -5$ funkce $\Phi^{2,3}(x)$, tj.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+2}{3x^2+8x-5} = -\frac{2}{5}, \quad \lim_{x\to -5} \frac{2x+2}{3x^2+8x-5} = -\frac{8}{30} = -\frac{4}{15}.$$

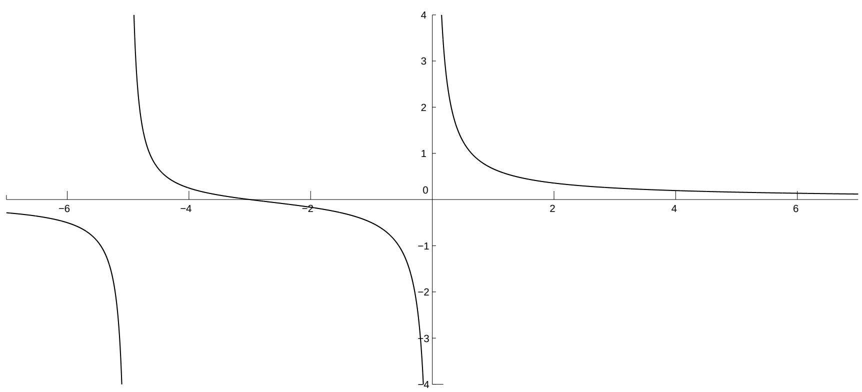
Funkční hodnoty funkce $\Phi^{2,3}(x)$ v těchto bodech nejsou definovány, neboť $\Phi^{2,3}(0) = \frac{-3}{0}$ a $\Phi^{2,3}(-5) = \frac{12}{0}$. Je zřejmé, že

$$\lim_{x\to 0} \Phi^{2,3}(x) \neq \Phi^{2,3}(0) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to -5} \Phi^{2,3}(x) \neq \Phi^{2,3}(-5),$$

a proto jsou body $x = 0$ a $x = -5$ body nespojitosti. Žádnou vhodnou úpravou či dodefinováním funkčních hodnot v těchto bodech nelze odstranit nespojitost. Na obrázku 8 je graf funkce $\Phi^{2,3}(x)$ a na obrázku 9 je graf funkce $\widetilde{\Phi}^{2,3}(x)$.



Obrázek 8



Obrázek 9 $\diamondsuit$

Nyní zadefinujeme inverzní a reciproké diference. Ke každému typu diference uvedeme příklad jejich výpočtu.

Definice 1.8. Nechť jsou dány vzájemně různé body $x_i, i \in \mathbb{Z}$ a nechť je funkce $f(x)$ definovaná v těchto daných bodech, přičemž označíme $f_i = f(x_i)$.
Inverzní diference prvního řádu funkce $f(x)$ v bodech x_i, x_j je definovaná

vztahem

$$\varphi(x_i, x_j) = \frac{x_i - x_j}{f_i - f_j},$$

inverzní diference k-tého řádu funkce $f(x)$ **v bodech** $x_i, \ldots, x_{i+k-2}, x_{i+k-1}, x_j$, $k \in \mathbb{N}, k > 1$ je definována vztahem

$$\varphi(x_i, \ldots, x_{i+k-2}, x_{i+k-1}, x_j) = \frac{x_{i+k-1} - x_j}{\varphi(x_i, \ldots, x_{i+k-2}, x_{i+k-1}) - \varphi(x_i, \ldots, x_{i+k-2}, x_j)}.$$

Poznámka 1.1 Výpočet nejčastěji používaných inverzních diferencí můžeme zapsat do následující přehledné tabulky

i	x_i	f_i			
0	x_0	f_0			
1	x_1	f_1	$\varphi(x_0, x_1)$		
2	x_2	f_2	$\varphi(x_0, x_2)$	$\varphi(x_0, x_1, x_2)$	
3	x_3	f_3	$\varphi(x_0, x_3)$	$\varphi(x_0, x_1, x_3)$	$\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabulka 1

Příklad 1.5. Nechť jsou dány hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, 1, 2, 3$

i	0	1	2	3
x_i	1	2	4	5
f_i	2	4	6	7

Vypočtěte inverzní diference.

Výpočty provedeme dle Definice 1.8.

$$\varphi(x_0, x_1) = \frac{x_0 - x_1}{f_0 - f_1} = \frac{1-2}{2-4} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi(x_0, x_2) = \frac{x_0 - x_2}{f_0 - f_2} = \frac{1-4}{2-6} = \frac{3}{4}$$

$$\varphi(x_0, x_3) = \frac{x_0 - x_3}{f_0 - f_3} = \frac{1-5}{2-7} = \frac{4}{5}$$

$$\varphi(x_0, x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{\varphi(x_0, x_1) - \varphi(x_0, x_2)} = \frac{2-4}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = \frac{-2}{\frac{2-3}{4}} = 8$$

$$\varphi(x_0, x_1, x_3) = \frac{x_1 - x_3}{\varphi(x_0, x_1) - \varphi(x_0, x_3)} = \frac{2-5}{\frac{1}{2} - \frac{4}{5}} = \frac{-3}{\frac{5-8}{10}} = 10$$

$$\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2 - x_3}{\varphi(x_0, x_1, x_2) - \varphi(x_0, x_1, x_3)} = \frac{4-5}{8-10} = \frac{1}{2}$$

Výsledky lze dle Poznámky 1.7 zapsat do tabulky.

i	x_i	f_i	$\varphi(x_0, x_i)$	$\varphi(x_0, x_1, x_i)$	$\varphi(x_0, x_1, x_2, x_i)$
0	1	2			
1	2	4	$\frac{1}{2}$		
2	4	6	$\frac{3}{4}$	8	
3	5	7	$\frac{4}{5}$	10	$\frac{1}{2}$

$\diamondsuit$

Definice 1.9. Nechť jsou dány vzájemně různé body $x_i, i \in \mathbb{Z}$ a nechť je funkce $f(x)$ definovaná v těchto daných bodech, přičemž označíme $f_i = f(x_i)$.

Reciproká diference nultého řádu funkce $f(x)$ **v bodě** x_i je definována vztahem

$$\rho(x_i) = f_i.$$

Reciproká diference prvního řádu funkce $f(x)$ **v bodě** x_i je definována vztahem

$$\rho(x_i, x_{i+1}) = \frac{x_i - x_{i+1}}{f_i - f_{i+1}}.$$

Reciproká diference k-tého řádu funkce $f(x)$ **v bodě** x_i je definována vztahem

$$\rho(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) = \frac{x_i - x_{i+k}}{\rho(x_i, \ldots, x_{i+k-1}) - \rho(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k})} + \rho(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}).$$

Poznámka 1.2 Výpočet reciprokých diferencí můžeme zapsat do následující přehledné tabulky

i	x_i	f_i	$\rho(x_{i-1},x_i)$	$\rho(x_{i-2},x_{i-1},x_i)$	$\rho(x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i)$
0	x_0	f_0			
1	x_1	f_1	$\rho(x_0,x_1)$		
2	x_2	f_2	$\rho(x_1,x_2)$	$\rho(x_0,x_1,x_2)$	
3	x_3	f_3	$\rho(x_2,x_3)$	$\rho(x_1,x_2,x_3)$	$\rho(x_0,x_1,x_2,x_3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabulka 2

Příklad 1.6. Nechť jsou dány hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, 1, 2, 3$

i	0	1	2	3
x_i	1	2	3	4
f_i	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{17}{4}$

Vypočtěte reciproké diference.

Výpočty provedeme dle Definice 1.9.

$$\rho(x_0,x_1) = \frac{x_0-x_1}{f_0-f_1} = \frac{1-2}{2-\frac{5}{2}} = 2$$

$$\rho(x_1,x_2) = \frac{x_1-x_2}{f_1-f_2} = \frac{2-3}{\frac{5}{2}-\frac{10}{3}} = \frac{-1}{\frac{15-20}{6}} = \frac{6}{5}$$

$$\rho(x_2,x_3) = \frac{x_2-x_3}{f_2-f_3} = \frac{3-4}{\frac{10}{3}-\frac{17}{4}} = \frac{-1}{\frac{40-51}{12}} = \frac{12}{11}$$

$$\rho(x_0,x_1,x_2) = \frac{x_0-x_2}{\rho(x_0,x_1)-\rho(x_1,x_2)} + \rho(x_1) = \frac{1-3}{2-\frac{6}{5}} + \frac{5}{2} = \frac{-2}{\frac{4}{5}} + \frac{5}{2} = 0$$

$$\rho(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1-x_3}{\rho(x_1,x_2)-\rho(x_2,x_3)} + \rho(x_2) = \frac{2-4}{\frac{6}{5}-\frac{12}{11}} + \frac{10}{3} = \frac{-2}{\frac{66-60}{55}} + \frac{10}{3} = \frac{-55+10}{3} = -\frac{45}{3}$$

$$\rho(x_0,x_1,x_2,x_3) = \frac{x_0-x_3}{\rho(x_0,x_1,x_2)-\rho(x_1,x_2,x_3)} + \rho(x_1,x_2) = \frac{1-4}{0+\frac{45}{3}} + \frac{6}{5} = \frac{-1+6}{5} = 1$$

Dle Poznámky 1.2 lze výsledky uspořádat do tabulky:

i	x_i	f_i	$\rho(x_{i-1},x_i)$	$\rho(x_{i-2},x_{i-1},x_i)$	$\rho(x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i)$
0	1	2			
1	2	$\frac{5}{2}$	2		
2	3	$\frac{10}{3}$	$\frac{6}{5}$	0	
3	4	$\frac{17}{4}$	$\frac{12}{11}$	$-\frac{45}{3}$	1

$\diamondsuit$

Vztah mezi inverzními a reciprokými diferencemi uvádí následující věta.

Věta 1.1. *Nechť $p \in \mathbb{N}$, pak platí*

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_p) = \rho(x_0, \ldots, x_p) - \rho(x_0, \ldots, x_{p-2}) \tag{1}$$

Pro p=1 klademe $\rho(x_0, \ldots, x_{p-2}) = 0$.

Důkaz: viz [3], strana 66.

Příklad 1.7. Nechť jsou dány hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, 1, 2, 3$ stejné jako v příkladu 1.6, tj.

i	0	1	2	3
x_i	1	2	3	4
f_i	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{17}{4}$

Vypočtěte inverzní diference a ověřte platnost vztahu (1).

Nejprve provedeme výpočet dle definice inverzních diferencí, tj.

$$\varphi(x_0, x_1) = \frac{x_0 - x_1}{f_0 - f_1} = \frac{1-2}{2-\frac{5}{2}} = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2$$

$$\varphi(x_0, x_2) = \frac{x_0 - x_2}{f_0 - f_2} = \frac{1-3}{2-\frac{10}{3}} = \frac{-2}{\frac{-4}{3}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\varphi(x_0,x_3)=\frac{x_0-x_3}{f_0-f_3}=\frac{1-4}{2-\frac{17}{4}}=\frac{-3}{\frac{-9}{4}}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$

$$\varphi(x_0,x_1,x_2)=\frac{x_1-x_2}{\varphi(x_0,x_1)-\varphi(x_0,x_2)}=\frac{2-3}{2-\frac{3}{2}}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$$

$$\varphi(x_0,x_1,x_3)=\frac{x_1-x_3}{\varphi(x_0,x_1)-\varphi(x_0,x_3)}=\frac{2-4}{2-\frac{4}{3}}=\frac{-2}{\frac{2}{3}}=-\frac{6}{2}=-3$$

$$\varphi(x_0,x_1,x_2,x_3)=\frac{x_2-x_3}{\varphi(x_0,x_1,x_2)-\varphi(x_0,x_1,x_3)}=\frac{3-4}{-2+3}=\frac{-1}{1}=-1$$

Nyní ověříme platnost vztahu (1), přičemž využijeme již vypočítaných hodnot reciprokých diferencí z příkladu 1.6

$$\varphi(x_0,x_1)=\rho(x_0,x_1)-0=2$$

$$\varphi(x_0,x_1,x_2)=\rho(x_0,x_1,x_2)-\rho(x_0)=0-2=-2$$

$$\varphi(x_0,x_1,x_2,x_3)=\rho(x_0,x_1,x_2,x_3)-\rho(x_0,x_1)=1-2=-1$$

Je zřejmé, že takto vypočítané hodnoty inverzních diferencí odpovídají hodnotám vypočítaným dle definice inverzních diferencí 1.8 a tudíž vztah (1) platí.$\diamondsuit$

Definice 1.10. Triviálním řešením soustavy m rovnic o n neznámých nazveme vektor, který obsahuje n nul, značíme jej (0,0,. . . ,0), $m,n\in\mathbb{N}$. Pokud není řešení triviální, je **netriviální**.

2 Interpolace

Interpolace je důležitou součástí numerické matematiky. Úloha interpolace se objevuje ve dvou možnostech zadání. V prvním případě máme určenu funkci $f(x)$ složitým předpisem a chceme ji aproximovat funkcí s jednodušším explicitním vyjádřením. Tedy nalezneme tuto „jednodušší" funkci, která má s původní zadanou funkcí stejné hodnoty v určitých bodech, které nazýváme uzly interpolace. V druhém případě máme dány funkční hodnoty funkce $f(x)$, jejíž explicitní vyjádření nemusí být známo, pouze v některých bodech (uzlech). Úkolem je nalézt funkci, která by umožnila odhadnout chování funkce $f(x)$ mimo tyto body, například vypočítat funkční hodnoty v jiných než zadaných bodech, a měla stejné hodnoty s původní funkcí v uzlech interpolace. V obou případech se získaná funkce, která aproximuje funkci $f(x)$, nazývá interpolační funkce. V této bakalářské práci budeme uvažovat úlohu interpolace v $\mathbb{R}^2$. Tedy funkce $f(x)$ i interpolační funkce budou funkcemi jedné proměnné.

Typů interpolace je hned několik. Hojně užívaná je polynomiální interpolace, kdy daná data interpolujeme polynomem. Dalšími typy jsou například trigonometrická interpolace a interpolace racionální funkcí, kterou se tato práce bude zabývat. Tento typ interpolace se využívá v případě, kdy je polynomiální interpolace nedostačující.

2.1 Obecné vlastnosti interpolace racionální funkcí

Uvažujme druhý případ zadání úlohy interpolace, tj. jsou dány hodnoty

$$\begin{aligned} &(x_i, f_i), \quad pro \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \mu + \nu, \quad \mu, \nu \in \mathbb{N}_0, \\ &x_j \neq x_k \quad pro \quad j \neq k, \quad j, k = 0, 1, 2, \ldots, \mu + \nu. \end{aligned} \tag{2}$$

První případ, v kterém máme zadánu funkci $f(x)$ složitým předpisem a chceme ji aproximovat funkcí s jednodušším explicitním vyjádřením, by se řešil podobně, tj. ze zadaného explicitního vyjádření $f(x)$ bychom získali volbou x_i hodnoty $f_i = f(x_i)$ a další postup by byl stejný.

Nyní řekněme, že bychom chtěli pro interpolaci hodnot (x_i, f_i) použít racionální funkci tvaru

$$\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{P^\mu(x)}{Q^\nu(x)} = \frac{a_\mu x^\mu + a_{\mu-1}x^{\mu-1} + ... + a_0}{b_\nu x^\nu + b_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + b_0}, \tag{3}$$

kde μ je nejvyšší stupeň polynomu v čitateli a ν je nejvyšší stupeň polynomu ve jmenovateli. V racionální funkci $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ se tedy vyskytuje $\mu + \nu + 2$ neznámých parametrů $a_0, a_1, ...a_\mu, b_0, b_1, ...b_\nu$.

O racionální funkci tvaru (3) budeme hovořit jako o **racionální funkci typu** (μ, ν). Aby byla funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ interpolační funkcí funkce $f(x)$, musí splňovat pro hodnoty (x_i, f_i) následující podmínky

$$\Phi^{\mu,\nu}(x_i) = \frac{P^\mu(x_i)}{Q^\nu(x_i)} = f_i \quad pro \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \mu + \nu, \tag{4}$$

tj. chceme, aby platilo

$$\frac{a_\mu x_i^\mu + a_{\mu-1}x_i^{\mu-1} + ... + a_0}{b_\nu x_i^\nu + b_{\nu-1}x_i^{\nu-1} + ... + b_0} = f_i, \quad pro \quad \forall i.$$

Podmínky (4) se nazývají **interpolační podmínky** a je jich $\mu + \nu + 1$. Body x_i nazýváme **uzly interpolace**. Dále pro zjednodušení budeme v celém dalším textu **interpolační funkcí** mínit racionální interpolační funkci.

Je zřejmé, že pro volbu $\nu = 0$ je funkce $\Phi^{\mu,0}(x)$ ve tvaru polynomu. V tomto případě by se tedy jednalo o úlohu interpolace polynomiální funkcí, která je jednoznačně řešitelná, právě tehdy když jsou dány hodnoty (x_i, f_i) pro $i = 0, 1, \ldots, n$ a hledaná interpolační polynomiální funkce je stupně n, tj. hodnoty (x_i, f_i) jsou dány vztahem (2), přičemž $\mu = n$ a $\nu = 0$. Tedy v tomto případě existuje právě jedna polynomiální funkce, která interpoluje zadané hodnoty.

Z interpolačních podmínek (4) vyplývá, že výsledná interpolační funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ musí splňovat následující vztah

$$P^\mu(x_i) = f_i Q^\nu(x_i), \quad pro \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \mu + \nu. \tag{5}$$

Když tento vztah rozepíšeme, dostaneme

pro $\quad i = 0, 1, 2, ..., \mu + \nu$

$$a_\mu x_i^\mu + a_{\mu-1} x_i^{\mu-1} + \cdots + a_0 = f_i (b_\nu x_i^\nu + b_{\nu-1} x_i^{\nu-1} + \cdots + b_0). \tag{6}$$

Po úpravě dostáváme soustavu $\mu + \nu + 1$ rovnic o $\mu + \nu + 2$ neznámých

pro $\quad i = 0, 1, ..., \mu + \nu$

$$x_i^\mu a_\mu + x_i^{\mu-1} a_{\mu-1} + \cdots + a_0 - f_i x_i^\nu b_\nu - f_i x_i^{\nu-1} b_{\nu-1} - \cdots - f_i b_0 = 0. \tag{7}$$

Soustava (7) má tedy méně rovnic, než je počet neznámých. To znamená, že existuje netriviální (nenulové) řešení této soustavy. Na první pohled by se tedy zdálo, že pro každou úlohu interpolace racionální funkcí existuje interpolační funkce, která interpoluje dané hodnoty (x_i, f_i), i=0,1,2,. . . , $\mu + \nu$, protože vždy lze ze soustavy (7) výpočtem získat hodnoty $a_\mu, a_{\mu-1}, ..., a_0, b_\nu, b_{\nu-1}, ..., b_0$. Tato úvaha však není správná. Ne vždy má úloha interpolace řešení. Toto si ukážeme na následujících příkladech. Nejdříve však uvedeme dvě věty, které se nám budou hodit k lepšímu pochopení příkladů.

Vyjádřením, že $\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{P^\mu(x)}{Q^\nu(x)} = \frac{a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} ... + a_0}{b_\nu x^\nu + b_{\nu-1} x^{\nu-1} ... + b_0}$ je řešením soustavy rovnic (7), budeme dále rozumět, že hodnoty jejích koeficientů $a_\mu, a_{\mu-1}, \ldots, a_0, b_\nu$, $b_{\nu-1}, ..., b_0$ vyhovují soustavě (7).

Věta 2.1. *Pro každé řešení* $\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{P^\mu(x)}{Q^\nu(x)}$ *soustavy rovnic (7) platí, jestliže* $Q^\nu(x)$ *není identicky rovno nule, pak* $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ *určuje racionální funkci.*

Důkaz: viz [3], strana 60.

Z této věty vyplývá, že budeme uvažovat pouze netriviální řešení soustavy (7). Kdybychom uvažovali řešení triviální, tj. $a_\mu = 0, a_{\mu-1} = 0, ..., a_0 = 0, b_\nu = 0$, $b_{\nu-1} = 0, ..., b_0 = 0$ a tedy $P^\mu(x) \equiv 0$ a zároveň i $Q^\nu(x) \equiv 0$, po dosazení do (3) bychom získali $\Phi^{\mu,\nu}(x) \equiv \frac{0}{0}$ a to je nedefinovaný výraz.

Věta 2.2. *Jestliže* $\Phi_1^{\mu,\nu}(x)$ *a* $\Phi_2^{\kappa,\lambda}(x)$ *jsou netriviální řešení soustavy (7), pak jsou tato řešení ekvivalentní. To znamená, že určují stejnou racionální funkci.*

Důkaz: viz [3], strana 60.

Tato věta nám zaručuje, že ať vezmeme jakékoliv libovolné řešení soustavy rovnic (7), tak hodnoty $a_\mu, a_{\mu-1}, \dots, a_0, b_\nu, b_{\nu-1}, ..., b_0$ budou určovat stejnou racionální funkci.

Příklad 2.1. Mějme dány hodnoty (x_i, f_i) pro funkci $f(x)$ následující tabulkou

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 2 & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} \end{array}.$$

Nalezněte interpolační funkci $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ funkce $f(x)$.

Protože jsou zadány tři hodnoty (x_i, f_i), platí $\mu + \nu = 2$, můžeme hledat interpolační funkci typu $(1,1)$, $(0,2)$ nebo $(2,0)$. Funkce typu $(2,0)$ je funkce polynomiální. Tuto úlohu polynomiální interpolace již v dalších příkladech uvažovat nebudeme. Zde si ale zkusíme nalézt řešení.

1) Nejprve uvažujme volbu $\mu = 1, \quad \nu = 1$.
Hledaná funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ bude v následujícím tvaru

$$\Phi^{1,1}(x) = \frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0} \tag{8}$$

a musí splňovat následující interpolační podmínky

$$\Phi^{1,1}(x_i) = \frac{a_1 x_i + a_0}{b_1 x_i + b_0} = f_i \quad pro \quad i = 0, 1, 2. \tag{9}$$

Po roznásobení dostáváme

$$a_1 x_i + a_0 = f_i(b_1 x_i + b_0).$$

Po úpravě a dosazení hodnot (x_i, f_i) dostáváme soustavu tří rovnic o čtyřech neznámých

$$\begin{aligned} a_1 + a_0 - 2b_1 - 2b_0 &= 0 \\ 2a_1 + a_0 - 3b_1 - \frac{3}{2}b_0 &= 0 \\ 3a_1 + a_0 - 4b_1 - \frac{4}{3}b_0 &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

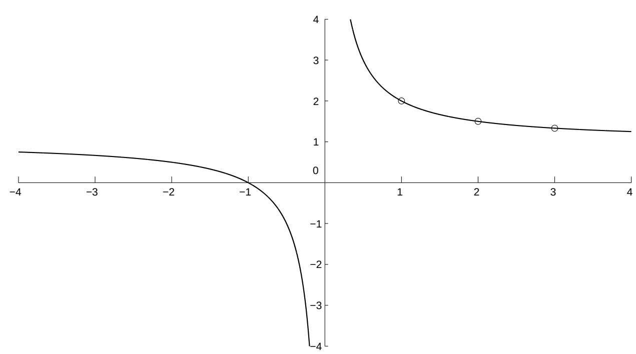
Protože je počet neznámých větší než počet rovnic, existuje netriviální řešení soustavy. Ekvivalentními úpravami soustavy (10) dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 + a_0 - 2b_1 - 2b_0 &= 0 \\ 2a_0 - 2b_1 - 5b_0 &= 0 \\ b_0 &= 0. \end{aligned}$$

Odtud již dostáváme, že $b_0 = 0$ a $a_1 = a_0 = b_1$. Tedy funkce $\Phi^{1,1}(x)$ bude tvaru

$$\Phi^{1,1}(x) = \frac{a_1 x + a_1}{a_1 x}. \tag{11}$$

Z věty 2.2 je zřejmé, že různou volbou a_1, dostaneme pokaždé jiné ekvivalentní vyjádření stejné funkce. Získali jsme tedy třídu racionálních funkcí, které jsou vzájemně ekvivalentní a určují stejnou funkci. Tato funkce má tvar $\Phi^{1,1}(x) = \frac{x+1}{x}$ a získali jsme ji vykrácením a_1. Tato funkce splňuje interpolační podmínky (9) a je funkcí interpolující zadané hodnoty (x_i, f_i). Na obrázku 10 jsou zobrazeny interpolované body a interpolační funkce $\Phi^{1,1}(x) = \frac{x+1}{x}$.



Obrázek 10

2) Nyní uvažujme volbu $\mu = 0, \quad \nu = 2$.

Hledaná funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ bude v následujícím tvaru

$$\Phi^{0,2}(x) = \frac{a_0}{b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \tag{12}$$

a musí splňovat následující interpolační podmínky

$$\Phi^{0,2}(x_i) = \frac{a_0}{b_2 x_i^2 + b_1 x_i + b_0} = f_i \quad pro \quad i = 0, 1, 2. \tag{13}$$

Stejným postupem jako v předchozí volbě parametrů μ, ν dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_0 - 2b_2 - 2b_1 - 2b_0 &= 0 \\ a_0 - 6b_2 - 3b_1 - \frac{3}{2}b_0 &= 0 \\ a_0 - 12b_2 - 4b_1 - \frac{4}{3}b_0 &= 0, \end{aligned}$$

kterou ekvivalentními úpravami upravíme takto

$$\begin{aligned} a_0 - 2b_2 - 2b_1 - 2b_0 &= 0 \\ 8b_2 + 2b_1 - b_0 &= 0 \\ 6b_1 - 7b_0 &= 0. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme $b_1 = \frac{7}{6}b_0$, $b_2 = -\frac{1}{6}b_0$, $a_0 = 4b_0$. Tedy funkce $\Phi^{0,2}(x)$ bude tvaru

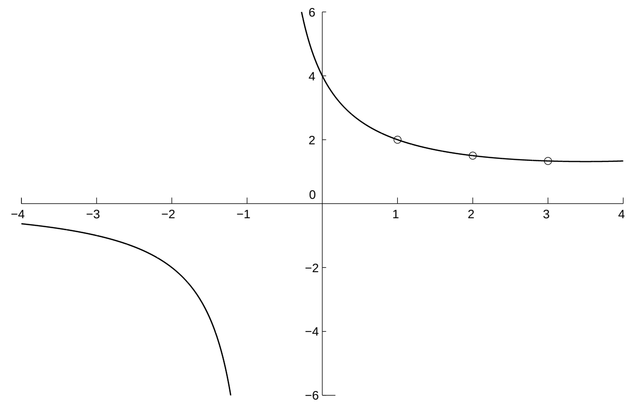
$$\Phi^{0,2}(x) = \frac{4b_0}{-\frac{1}{6}b_0 x^2 + \frac{7}{6}b_0 x + b_0}.$$

Stejně jako v předchozí volbě parametrů μ a ν jsme získali třídu racionálních funkcí, které jsou vzájemně ekvivalentní a určují stejnou funkci. Tato funkce má tvar $\Phi^{0,2}(x) = \frac{4}{-\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + 1}$ a získali jsme ji vykrácením b_0. Tato funkce splňuje interpolační podmínky (13) a je tedy funkcí interpolující dané hodnoty (x_i, f_i). Abychom koeficienty neměli ve tvaru zlomků, můžeme vynásobit čitatel i jmenovatel získané funkce číslem -6, to je stejné jako volba $b_0 = -6$ a dostaneme

$$\Phi^{0,2}(x) = \frac{-24}{x^2 - 7x - 6}.$$

Toto je pouze ekvivalentní vyjádření interpolační funkce $\Phi^{0,2}(x) = \frac{4}{-\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + 1}$ takové, že koeficienty nejsou ve tvaru zlomků.

Na obrázku 11 je vykreslena interpolační funkce $\Phi^{0,2}(x) = \frac{4}{-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{6}x+1}$.



Obrázek 11

3) Uvažujme volbu $\mu = 2, \quad \nu = 0$.

Hledaná funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ bude v následujícím tvaru

$$\Phi^{2,0}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{14}$$

a musí splňovat následující interpolační podmínky

$$\Phi^{2,0}(x_i) = a_2x_i^2 + a_1x_i + a_0 = f_i \quad pro \quad i = 0, 1, 2. \tag{15}$$

Stejným postupem jako v 1) dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_2 + a_1 + a_0 &= 2 \\ 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= \frac{3}{2} \\ 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

kterou ekvivalentními úpravami upravíme takto

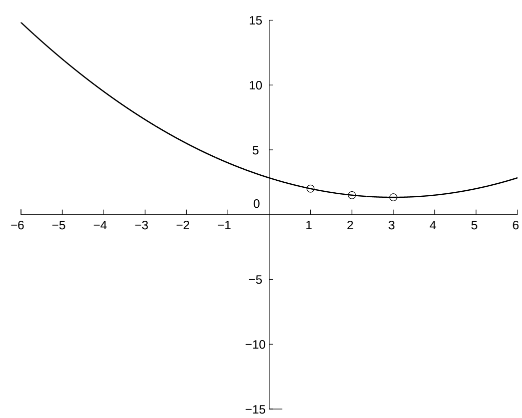
$$\begin{aligned} a_2 + a_1 + a_0 &= 2 \\ 4a_1 + 6a_0 &= 13 \\ 6a_0 &= 17. \end{aligned}$$

Získali jsme tedy regulární soustavu tří rovnic o třech neznámých. Odtud již dostáváme, že $a_0 = \frac{17}{6}$, $a_1 = \frac{13-17}{4} = -1$ a $a_2 = \frac{1}{6}$. Funkce $\Phi^{2,0}(x)$ tudíž bude tvaru

$$\Phi^{2,0}(x) = \frac{1}{6}x^2 - x + \frac{17}{6}. \tag{16}$$

Tedy výsledkem je jediná funkce a to $\Phi^{2,0}(x) = \frac{1}{6}x^2 - x + \frac{17}{6}$. Tato funkce splňuje interpolační podmínky (15) a je funkcí interpolující zadané hodnoty (x_i, f_i).
V předchozích volbách μ a ν jsme vždy získali třídu vzájemně ekvivalentních funkcí. Zde jsme ale získali konkrétní funkci, protože úloha polynomiální interpolace je v tomto případě jednoznačně řešitelná, neboť stupeň hledané polynomiální funkce byl roven $\mu = 2$ a měli jsme dány hodnoty (x_i, f_i) pro $i = 0, 1, 2$. Jednoznačnost řešení plynula již z toho, že jsme dostali regulární soustavu tří rovnic o třech neznámých.

Funkce $\Phi^{2,0}(x) = \frac{1}{6}x^2 - x + \frac{17}{6}$ je vykreslena na obrázku 12.



Obrázek 12 $\diamondsuit$

Podívejme se na následující příklad, v němž bude mít soustava rovnic

$$x_i^\mu a_\mu + x_i^{\mu-1} a_{\mu-1} + \cdots + a_0 - f_i x_i^\nu b_\nu - f_i x_i^{\nu-1} b_{\nu-1} - \cdots - f_i b_0 = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, \mu+\nu$$

řešení určující racionální funkci $\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} + \ldots + a_0}{b_\nu x^\nu + b_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + b_0}$, která ale nebude interpolační funkcí zadaných hodnot (x_i, f_i) *pro* $\forall i$.

Příklad 2.2. Mějme dány hodnoty (x_i, f_i) pro funkci $f(x)$ následující tabulkou

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_i & 1 & 1 & 3 \end{array}.$$

Nalezněte interpolační funkci $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ interpolující dané hodnoty.

Opět budeme hledat interpolační funkci typu $(1,1)$ a $(0,2)$, protože platí $\mu + \nu = 2$.

1) Nejprve uvažujme volbu $\mu = 1, \quad \nu = 1$.

Hledaná interpolační funkce bude tedy ve tvaru $\Phi^{1,1}(x) = \frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0}$ stejně jako v příkladu 2.1 1). Dále musí funkce $\Phi^{1,1}(x)$ splňovat interpolační podmínky (9). Úpravou a dosazením zadaných hodnot dostáváme soustavu rovnic.

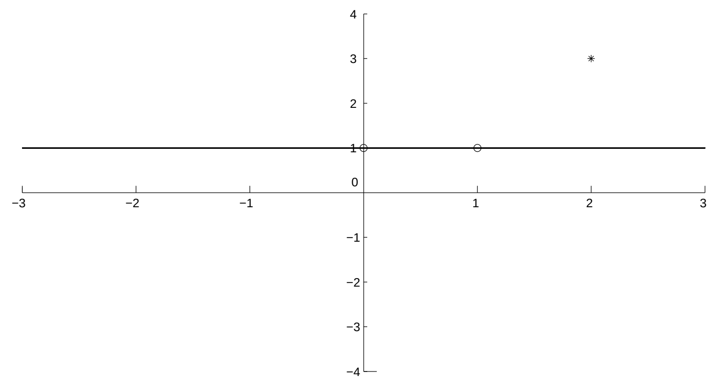
$$\begin{aligned} a_0 - b_0 &= 0 \\ a_1 + a_0 - b_1 - b_0 &= 0 \\ 2a_1 + a_0 - 6b_1 - 3b_0 &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Z první a druhé rovnice soustavy (17) dostaneme $a_0 = b_0$ a $b_1 = a_1$. Odtud pak z dosazení do třetí rovnice soustavy získáme vztah $a_0 = -2a_1$. Tedy funkce $\Phi^{1,1}(x)$ bude tvaru

$$\Phi^{1,1}(x) = \frac{a_1 x - 2a_1}{a_1 x - 2a_1}.$$

Opět jsme získali třídu vzájemně ekvivalentních funkcí viz. věta 2.2. Různou volbou a_1 dostaneme pokaždé jiné ekvivalentní vyjádření stejné funkce. Tato funkce má tvar $\Phi^{1,1}(x) = \frac{x-2}{x-2}$. Je zřejmé, že pro $x = 2$ není funkce $\Phi^{1,1}(x) = \frac{x-2}{x-2}$ definovaná, neboť $\Phi^{1,1}(2) = \frac{0}{0}$. Bod 2 je bod odstranitelné nespojitosti. Tím, že jsme pokrátili $(x-2)$ a získali $\Phi^{1,1}(x) = 1$, jsme odstranili nespojitost v tomto bodě. Získaná funkce $\Phi^{1,1}(x) = 1$ však nesplňuje všechny interpolační podmínky. Bod [2,3] není bodem funkce $\Phi^{1,1}(x) = 1$.

Na obrázku 13 jsou vykresleny interpolované body a hledaná interpolační funkce $\Phi^{1,1}(x) = 1$.



Obrázek 13

2) Nyní uvažujme volbu $\mu = 0, \quad \nu = 2$.

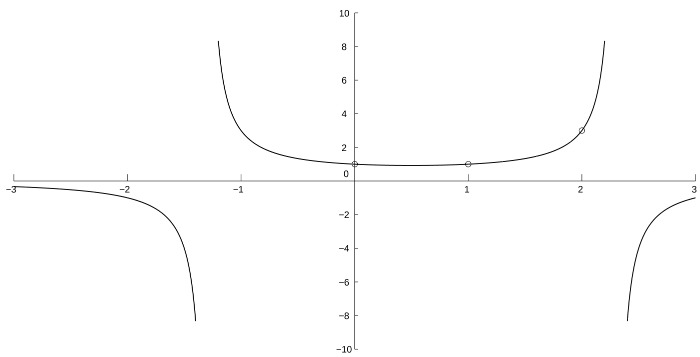
Hledáme funkci tvaru $\Phi^{0,2}(x) = \frac{a_0}{b_2x^2+b_1x+b_0}$, která splňuje interpolační podmínky $\Phi^{0,2}(x_i) = \frac{a_0}{b_2x_i^2+b_1x_i+b_0} = f_i \quad pro \quad \forall i$. Stejným postupem získáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_0 - b_0 &= 0 \\ a_0 - b_2 - b_1 - b_0 &= 0 \\ a_0 - 12b_2 - 6b_1 - 3b_0 &= 0. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic dostáváme $a_0 = b_0 = 3b_1$ a $b_2 = -b_1$. Výsledná funkce má tedy tvar

$$\Phi^{0,2}(x) = \frac{3b_1}{-b_1x^2 + b_1x + 3b_1} = \frac{3}{-x^2 + x + 3}.$$

Na obrázku 14 jsou vykresleny interpolované body a hledaná interpolační funkce $\Phi^{0,2}(x) = \frac{-3}{x^2-x-3}$.



Obrázek 14

Je zřejmé, že funkce $\Phi^{1,1}(x) = 1$ není interpolační funkcí zadaných hodnot, zatímco funkce $\Phi^{0,2}(x) = \frac{-3}{x^2-x-3}$ zadané hodnoty interpoluje. $\diamondsuit$

Na první pohled se zdálo, že k řešení úlohy interpolace racionální funkcí stačí, když si určíme, jaký bude mít interpolační funkce tvar, a vyřešíme soustavu (7). Příklad 2.2 však ukázal, že toto není možné. Úloha interpolace racionální funkcí nemusí mít pro každé zadané hodnoty a každou volbu μ, ν řešení. V příkladě 2.2 v 1) získaná konstantní funkce $\Phi^{1,1}(x) = 1$ neprochází bodem [2,3]. Uzel interpolace 2 nazveme **nepřípustným uzlem** a stejně tak nazveme i bod [2,3] **nepřípustným bodem**. Je vykreslen na obrázku 13 hvězdičkou. Ostatní body $[x_i, f_i]$, které interpoluje funkce $\Phi^{1,1}(x) = 1$, nazveme **přípustnými** a x_i nazveme **přípustné uzly**.

Všimněme si nyní souvislosti mezi řešením úlohy interpolace a soustavy rovnic pro $i = 0, 1, \ldots, \mu + \nu$

$$x_i^{\mu} a_{\mu} + x_i^{\mu-1} a_{\mu-1} + \cdots + a_0 - f_i x_i^{\nu} b_{\nu} - f_i x_i^{\nu-1} b_{\nu-1} - \cdots - f_i b_0 = 0. \qquad (18)$$

Z předchozích úvah je zřejmé, že pokud $\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{P^{\mu}(x)}{Q^{\nu}(x)}$ je výslednou interpolační funkcí úlohy interpolace, pak $\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{P^{\mu}(x)}{Q^{\nu}(x)}$ je řešením příslušné soustavy rovnic (18).

Naopak tato úvaha však neplatí viz příklad 2.2 volba 1), v kterém jsme řešením příslušné soustavy rovnic získali hodnoty a_1, a_0, b_1, b_0, které určovaly konstantní funkci $\Phi^{1,1}(x) = 1$. Tedy $\Phi^{1,1}(x) = 1$ byla řešením příslušné soustavy, ale nebyla interpolační funkcí úlohy interpolace, protože neprocházela bodem [2,3]. Úloha interpolace racionální funkcí v tomto případě nebyla řešitelná.

Pokud je úloha interpolace racionální funkcí neřešitelná, znamená to, že v zadaných datech je obsažen jeden či více nepřípustných bodů, viz příklad 2.2 a bod [2,3]. Lze tedy říci, že úloha interpolace racionální funkcí typu (μ, ν) je řešitelná, pokud v zadání nejsou žádné nepřípustné body.

Pro zadaná x_i mohou nastat dva případy. Buď $Q^\nu(x_i) \neq 0$ nebo $Q^\nu(x_i) = 0$. Pokud nastane $Q^\nu(x_i) = 0$ musí platit i $P^\mu(x_i) = 0$, protože jinak by nebyla splněna rovnice $P^\mu(x_i) = f_i Q^\nu(x_i), \quad \text{pro} \quad \forall i$. Právě takové uzly x_i jsou nepřípustné. Víme tedy, že pro nepřípustné uzly x_i platí $Q^\nu(x_i) = 0$ a $P^\mu(x_i) = 0$. To znamená, že lze z $Q^\nu(x)$ i $P^\mu(x)$ vytknout výraz $(x - x_i)$. Tedy $P^\mu(x)$ i $Q^\nu(x)$ obsahují stejný výraz $(x - x_i)$. Z definice 1.4 je zřejmé, že taková racionální funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{P^\mu(x)}{Q^\nu(x)}$ není v základním tvaru. Toto je ukázano v příkladu 2.2, kde bod [2,3] je nepřípustný, protože před vykrácením měla funkce $\Phi^{1,1}(x)$ tvar $\Phi^{1,1}(x) = \frac{P^\mu(x)}{Q^\nu(x)} = \frac{x-2}{x-2}$ a tedy nebyla v základním tvaru. Skutečně zde platilo $P^\mu(2) = 0$ a $Q^\nu(2) = 0$
Z těchto úvah vyplývají následující věty.

Věta 2.3. *Jestliže soustava rovnic (7) má řešení $\Phi^{\mu,\nu}(x)$, které je v základním tvaru, pak nejsou v zadání úlohy racionální interpolace obsaženy nepřípustné body $[x_i, f_i]$, tj. úloha interpolace racionální funkcí je řešitelná a výslednou interpolační funkcí je $\Phi^{\mu,\nu}(x)$.*

Důkaz: Důkaz provedeme nepřímo. Dokážeme-li následující tvrzení, které je tzv. obměnou tvrzení původního, dokážeme i tvrzení původní.
„Jestliže je v zadání úlohy obsažen alespoň jeden nepřípustný bod $[x_i, f_i]$, pak soustava rovnic (7) nemá řešení v základním tvaru."
Z úvah uvedených před větou 2.3 je zřejmé, že je-li $\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{P^\mu(x)}{Q^\nu(x)}$ řešením soustavy (7), pak pro nepřípustný bod $[x_i, f_i]$ platí, že $P^\mu(x_i) = 0$ a $Q^\nu(x_i) = 0$. Dále víme, že lze z $P^\mu(x)$ i $Q^\nu(x)$ vytknout výraz $(x - x_i)$. Čitatel i jmenovatel

funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ tedy obsahuje výraz $(x - x_i)$ a tedy dle definice 1.4 není $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ v základním tvaru a tím je tvrzení dokázáno. $\square$

Z této věty plyne následující.

Věta 2.4. *Nechť funkce $\Phi_1^{\mu,\nu}(x)$ je řešením soustavy rovnic (7). Nechť $\Phi_2^{\mu,\nu}(x)$ je ekvivalentním vyjádřením $\Phi_1^{\mu,\nu}(x)$ a je v základním tvaru. Nechť $\Phi_1^{\mu,\nu}(x)$ i $\Phi_2^{\mu,\nu}(x)$ jsou funkce typu (μ, ν). Pak příslušná úloha interpolace racionální funkcí je řešitelná a $\Phi_1^{\mu,\nu}(x)$ je jejím řešením právě tehdy, když $\Phi_2^{\mu,\nu}(x)$ je řešením soustavy rovnic (7).*

Důkaz: Dokážeme oba směry ekvivalence.

Nejdříve dokažme implikaci „$\Rightarrow$". Tedy úloha interpolace je řešitelná a $\Phi_1^{\mu,\nu}(x)$ je jejím řešením. Z toho plyne, že $\Phi_1^{\mu,\nu}(x)$ musí splňovat rovnice $P_1^\mu(x_i) = f_i Q_1^\nu(x_i)$ pro $\forall i$. Tento zápis je pouze jednodušší zápis soustavy (7). Dále nechť $\Phi_1^{\mu,\nu}(x)$ a $\Phi_2^{\mu,\nu}(x)$ jsou ekvivalentní. Z ekvivalentnosti funkcí $\Phi_1^{\mu,\nu}(x)$ a $\Phi_2^{\mu,\nu}(x)$ plyne, že platí

$$P_1^\mu(x) Q_2^\nu(x) = P_2^\mu(x) Q_1^\nu(x).$$

Tato rovnost platí pro každé x z průniku definičních oborů funkcí $\Phi_1^{\mu,\nu}(x)$ a $\Phi_2^{\mu,\nu}(x)$, a tedy i pro každé x_i, neboť předpokládáme řešitelnost úlohy. Píšeme tedy

$$P_1^\mu(x_i) Q_2^\nu(x_i) = P_2^\mu(x_i) Q_1^\nu(x_i), \quad pro \quad \forall i.$$

Když nyní dosadíme za $P_1^\mu(x_i) = f_i Q_1^\nu(x_i)$ dostaneme pro $\forall i$

$$f_i Q_1^\nu(x_i) Q_2^\nu(x_i) = P_2^\mu(x_i) Q_1^\nu(x_i),$$

tj.

$$P_2^\mu(x_i) = f_i Q_2^\nu(x_i), \quad pro \quad \forall i.$$

Tedy platí, že $\Phi_2^{\mu,\nu}(x)$ je řešením (7).

Nyní dokážeme implikaci „$\Leftarrow$". Funkce $\Phi_2^{\mu,\nu}(x)$ je řešením soustavy (7) a je dle předpokladů věty v základním tvaru. Z věty 2.3 tedy plyne, že úloha racionální interpolace je řešitelná a $\Phi_2^{\mu,\nu}(x)$ je jejím řešením. Díky ekvivalenci funkcí $\Phi_1^{\mu,\nu}(x)$

a $\Phi_2^{\mu,\nu}(x)$ platí, že i $\Phi_1^{\mu,\nu}(x)$ je řešením úlohy interpolace, neboť $\Phi_1^{\mu,\nu}(x)$ a $\Phi_2^{\mu,\nu}(x)$ určují stejnou racionální funkci.
Tímto je důkaz hotov. □

V následujícím příkladě bude použita věta 2.4 k nalezení interpolační funkce $\Phi_1^{\mu,\nu}(x)$ daných hodnot, která nebude v základním tvaru, za předpokladu, že známe interpolační funkci daných hodnot v základním tvaru, tj. $\Phi_2^{\mu,\nu}(x)$.

Příklad 2.3. Nechť jsou dány stejné hodnoty jako v příkladu 2.1, tj.

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 2 & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} \end{array}.$$

Interpolační funkce těchto hodnot je $\Phi_2^{1,1}(x) = \frac{x+1}{x}$, viz příklad 2.1 1). Uvažujeme tedy $\mu = \nu = 1$. Tato funkce je řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a_1 + a_0 - 2b_1 - 2b_0 &= 0 \\ 2a_1 + a_0 - 3b_1 - \frac{3}{2}b_0 &= 0 \\ 3a_1 + a_0 - 4b_1 - \frac{4}{3}b_0 &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Protože je funkce $\Phi_2^{1,1}(x) = \frac{x+1}{x}$ v základním tvaru a je řešením soustavy (19), dle věty 2.4 je každá funkce $\Phi_1^{1,1}(x)$, která je řešením soustavy (19) a je ekvivalentní s $\Phi_2^{1,1}(x) = \frac{x+1}{x}$, řešením úlohy racionální interpolace. Nalezněte libovolnou $\Phi_1^{1,1}(x)$ a ukažte, že je opravdu řešením úlohy racionální interpolace, tj., že interpoluje zadané hodnoty.

Z příkladu 2.1 1) víme, že řešení soustavy (19) je tvaru $\Phi_2^{1,1}(x) = \frac{a_1x+a_1}{a_1x}$. Pokud položíme $a_1 = 2$, získáme funkci $\Phi_1^{1,1}(x) = \frac{2x+2}{2x}$, která je řešením soustavy (19), neboť pro řešení platí $b_0 = 0$ a $a_1 = a_0 = b_1$, viz. příklad 2.1 1).
Tato funkce je také ekvivalentní vyjádření $\Phi_2^{1,1}(x) = \frac{x+1}{x}$, neboť platí
$P_2^1(x)Q_1^1(x) = P_1^1(x)Q_2^1(x)$, tj. $(x+1)2x = (2x+2)x$. Nyní ukážeme, že funkce

$\Phi_1^{1,1}(x) = \frac{2x+2}{2x}$ interpoluje zadané hodnoty, tj. že splňuje interpolační podmínky. Dosazením zadaných hodnot dostáváme

$$\Phi_1^{1,1}(1) = \frac{2+2}{2} = 2, \quad \Phi_1^{1,1}(2) = \frac{4+2}{4} = \frac{3}{2}, \quad \Phi_1^{1,1}(3) = \frac{6+2}{6} = \frac{4}{3}.$$

Funkce $\Phi_1^{1,1}(x) = \frac{2x+2}{2x}$ je tedy opravdu interpolační funkce zadaných hodnot. $\diamondsuit$

Definice 2.1. Nechť jsou dány hodnoty (x_i, f_i), i=0,1,2,3,…, $\mu + \nu$. Řekneme, že hodnoty (x_i, f_i) **jsou ve speciální pozici**, jestliže je lze interpolovat funkcí $\Phi^{\kappa,\lambda}(x)$ a zároveň platí $\kappa + \lambda < \mu + \nu$. Čísla $\kappa, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{N}_0$.

Příklad 2.4. Jsou dány hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, 1, 2, 3, 4$ následující tabulkou

i	0	1	2	3	4
x_i	-1	0	1	2	3
f_i	1	0	1	4	9

Ověřte, zda zadané hodnoty (x_i, f_i) jsou ve speciální pozici, když víme, že interpolační funkce těchto hodnot je tvaru $\Phi^{2,0}(x) = x^2$.

Budeme vycházet z definice 2.1. Je zřejmé, že $\mu + \nu = 4$, $\kappa = 2$ a $\lambda = 0$. Platí tedy vztah $\kappa + \lambda < \mu + \nu$ a tudíž zadané hodnoty jsou ve speciální pozici. $\diamondsuit$

Věta 2.5. *Přípustné body neřešitelné úlohy interpolace racionální funkcí jsou ve speciální pozici.*

Důkaz: viz [3], strana 62.

Z předchozího tedy plyne, že úpravou či vynecháním nepřípustných bodů, lze dosáhnout řešitelnosti úloh původně neřešitelných. Ovšem vynechání těchto bodů vede k degeneraci úlohy. Viz příklad 2.2 volba 1), kde výsledná funkce interpoluje pouze dva ze tří zadaných bodů a není typu $(1, 1)$, ale $(0, 0)$. Přípustné body této úlohy jsou ve speciální pozici, neboť $0 + 0 < 2$.

Pokud je zadáno explicitní vyjádření funkce $f(x)$, lze uzly interpolace změnit tak, aby úloha interpolace měla řešení. Tím se budu zabývat v jedné z následujících kapitol.

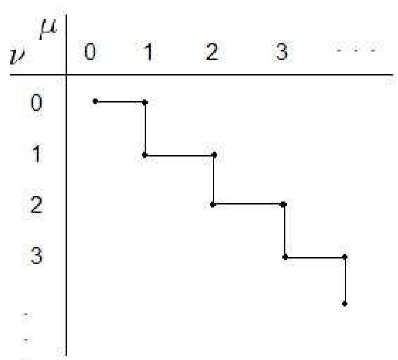
3 Metody řešení nedegenerovaných úloh racionální interpolace

Nedegenerovanou úlohou označíme úlohu, která ve svém zadání neobsahuje nepřípustné body. Pro řešení takovéto úlohy jsou známy dvě metody, které jsou analogické k Newtonově a Neville-Aitkenově metodě pro polynomiální interpolaci.

3.1 Metoda Newtonova typu

Tato metoda ve svém algoritmu využívá inverzních diferencí, které lze nahradit diferencemi reciprokými dle věty 1.1. S pomocí těchto diferencí je odvozen vztah pro přímý výpočet interpolační funkce.

Vlastní výpočet interpolační funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ u metody Newtonova typu vypadá tedy tak, že se z předepsaného vztahu, který je uveden ve větě 3.1, přímo vypočítá tato interpolační funkce. Následující tabulka určuje nejvyšší možné stupně polynomů v čitateli a jmenovateli interpolační funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x)$, která interpoluje hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, 1, 2 \ldots \mu + \nu$ a kterou získáme metodou Newtonova typu.



Tabulka 3

Každá černá tečka v tabulce určuje jednu zadanou hodnotu (x_i, f_i). Tedy například pokud jsou zadány hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, 1, 2, 3$, postoupíme od shora vyznačenou cestou na čtvrtou (počet zadaných hodnot) černou tečku a z tabulky vyčteme, že μ se rovná dvěma a ν jedné pro tento počet zadaných hodnot.

Následující věta již obsahuje přímo vztah pro výpočet interpolační funkce.

Věta 3.1. *Nechť jsou dány hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, 1, \ldots, \mu + \nu$, pak racionální funkce, která interpoluje tyto hodnoty, je tvaru*

$$\Phi^{\mu,\nu}(x) = f_0 + \cfrac{x - x_0}{\varphi(x_0, x_1) + \cfrac{x - x_1}{\varphi(x_0, x_1, x_2) + \cfrac{x - x_2}{\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3) + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{x - x_{\mu+\nu-2}}{\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{\mu+\nu-1}) + \cfrac{x - x_{\mu+\nu-1}}{\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{\mu+\nu})}}}}}} \tag{20}$$

Důkaz: Funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ jako interpolační funkce zadaných hodnot musí splňovat interpolační podmínky

$$\Phi^{\mu,\nu}(x_i) = f_i, \quad pro \quad i = 0, 1, \ldots, \mu + \nu.$$

Toto lze ověřit jednoduchým dosazením do $\Phi^{\mu,\nu}(x_i)$ za všechna i.
Pro $i = 0$ platí

$$\Phi^{\mu,\nu}(x_0) = f_0 + \frac{x_0 - x_0}{\varphi(x_0, x_1) + \ldots} = f_0 + 0 = f_0.$$

Pro $i = 1$ platí

$$\Phi^{\mu,\nu}(x_1) = f_0 + \cfrac{x_1 - x_0}{\varphi(x_0, x_1) + \cfrac{x_1 - x_1}{\varphi(x_0, x_1, x_2) + \ldots}} = f_0 + \frac{x_1 - x_0}{\varphi(x_0, x_1)} =$$

$$= f_0 + \frac{x_1 - x_0}{\frac{x_0 - x_1}{f_0 - f_1}} = f_0 + \frac{x_1 - x_0}{\frac{x_1 - x_0}{-f_0 + f_1}} = f_0 - f_0 + f_1 = f_1.$$

Pro $i = n$, $n \in \mathbb{N}$ a $n \leq \mu + \nu$ platí

$$\Phi^{\mu,\nu}(x_n) = f_0 + \cfrac{x_n - x_0}{\varphi(x_0,x_1) + \cfrac{x_n - x_1}{\varphi(x_0,x_1,x_2) + \cfrac{\vdots}{+\cfrac{x_n - x_{n-2}}{\varphi(x_0,x_1,\dots,x_{n-1}) + \frac{x_n - x_{n-1}}{\varphi(x_0,x_1,\dots,x_n)}}}}}.$$

Dosazením vztahu $\varphi(x_0,x_1,\dots,x_n) = \frac{x_{n-1}-x_n}{\varphi(x_0,x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1})-\varphi(x_0,x_1,\dots,x_{n-2},x_n)}$ do předchozí rovnosti dostáváme

$$\Phi^{\mu,\nu}(x_n) = f_0 + \cfrac{x_n - x_0}{\varphi(x_0,x_1) + \cfrac{x_n - x_1}{\varphi(x_0,x_1,x_2) + \cfrac{\vdots}{+\cfrac{x_n - x_{n-2}}{\varphi(x_0,x_1,\dots,x_{n-1}) + \frac{x_n - x_{n-1}}{\frac{x_{n-1}-x_n}{\varphi(x_0,x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1})-\varphi(x_0,x_1,\dots,x_{n-2},x_n)}}}}}}.$$

Po vykrácení $(x_n - x_{n-1})$ a odečtení diferencí dostáváme

$$\Phi^{\mu,\nu}(x_n) = f_0 + \cfrac{x_n - x_0}{\varphi(x_0,x_1) + \cfrac{x_n - x_1}{\varphi(x_0,x_1,x_2) + \cfrac{\vdots}{+\cfrac{x_n - x_{n-3}}{\varphi(x_0,x_1,\dots,x_{n-2}) + \frac{x_n - x_{n-2}}{\varphi(x_0,x_1,\dots,x_{n-2},x_n)}}}}}.$$

Opakováním stejného postupu, tj. dosazením za diference, vykrácením rozdílu $(x_n - x_j)$ a odečtením diferencí dostaneme nakonec

$$\Phi^{\mu,\nu}(x_n) = f_0 + \frac{x_n - x_0}{\varphi(x_0,x_1) + \frac{x_n - x_1}{\varphi(x_0,x_1,x_n)}}.$$

Pokračujeme stejným postupem a získáváme

$$\Phi^{\mu,\nu}(x_n) = f_0 + \frac{x_n - x_0}{\varphi(x_0,x_n)} = f_0 + \frac{x_n - x_0}{\frac{x_0 - x_n}{f_0 - f_n}} = f_0 - f_0 + f_n = f_n.$$

Tímto je platnost věty dokázána. $\square$

Nyní si ukážeme odvození tvaru interpolační funkce (20) z věty 3.1. Toto odvození je převzato z [3]. Pro názornost si jej uvedeme pouze pro interpolační funkci $\Phi^{1,1}(x)$. Interpolační funkce je tedy tvaru

$$\Phi^{1,1}(x) = \frac{P^1(x)}{Q^1(x)} = \frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0}. \tag{21}$$

Funkce $\Phi^{1,1}(x)$ musí splňovat interpolační podmínky

$$\Phi^{1,1}(x_i) = \frac{P^1(x_i)}{Q^1(x_i)} = f_i, \quad pro \quad i = 0, 1, 2. \tag{22}$$

Nyní přistoupíme k samotnému odvození. Uvažujme vztah

$$\frac{P^1(x)}{Q^1(x)} = f_0 + \frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0} - \frac{a_1 x_0 + a_0}{b_1 x_0 + b_0}.$$

Je zřejmé, že tento vztah platí, protože $\frac{P^1(x_0)}{Q^1(x_0)} = \frac{a_1 x_0 + a_0}{b_1 x_0 + b_0} = f_0$. Dále převedeme dva poslední výrazy v součtu na stejný jmenovatel, tj.

$$\frac{P^1(x)}{Q^1(x)} = f_0 + \frac{a_1 b_1 x_0 x + a_0 b_1 x_0 + a_1 b_0 x + a_0 b_0 - a_1 b_1 x_0 x - a_0 b_1 x - a_1 b_0 x_0 - a_0 b_0}{(b_1 x + b_0)(b_1 x_0 + b_0)}.$$

Další úpravou dále dostáváme

$$\frac{P^1(x)}{Q^1(x)} = f_0 + \frac{a_0 b_1 (x_0 - x) + a_1 b_0 (x - x_0)}{b_1^2 x_0 x + b_0 b_1 x + b_0 b_1 x_0 + b_0^2},$$

tj.

$$\frac{P^1(x)}{Q^1(x)} = f_0 + \frac{(a_1 b_0 - a_0 b_1)(x - x_0)}{(b_1^2 x_0 + b_0 b_1) x + b_0 b_1 x_0 + b_0^2}.$$

Zkráceně lze psát

$$\frac{P^1(x)}{Q^1(x)} = f_0 + (x - x_0)\frac{P^0(x)}{Q^1(x)} = f_0 + \frac{(x - x_0)}{Q^1(x)/P^0(x)}, \tag{23}$$

kde $\frac{P^0(x)}{Q^1(x)} = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{(b_1^2 x_0 + b_0 b_1) x + b_0 b_1 x_0 + b_0^2}$. Je tedy zřejmé, že $P^0(x)$ a $Q^1(x)$ jsou jiné polynomy než původní, protože obsahují jiné koeficienty. Kvůli zjednodušení ale ponecháme původní značení. Nyní ukážeme, že platí rovnost

$$\frac{Q^1(x_i)}{P^0(x_i)} = \frac{x_i - x_0}{f_i - f_0}. \tag{24}$$

Z Definice 1.8 je zřejmé, že jde o inverzní diferenci $\varphi(x_0, x_i)$. Platnost rovnosti (24) získáme, pokud dosadíme do pravé strany (ozn. P) rovnosti za f_i výraz $\frac{P^1(x_i)}{Q^1(x_i)}$ a za f_0 výraz $\frac{P^1(x_0)}{Q^1(x_0)}$, viz interpolační podmínky (22). Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}
P &= \frac{x_i - x_0}{\frac{P^1(x_i)}{Q^1(x_i)} - \frac{P^1(x_0)}{Q^1(x_0)}} = \frac{x_i - x_0}{\frac{a_1x_i+a_0}{b_1x_i+b_0} - \frac{a_1x_0+a_0}{b_1x_0+b_0}} = \\
&= \frac{x_i - x_0}{\frac{a_1b_1x_ix_0+a_1b_0x_i+a_0b_1x_0+a_0b_0-a_1b_1x_ix_0-a_1b_0x_0-a_0b_1x_i-a_0b_0}{(b_1^2x_0+b_1b_0)x_i+(b_0b_1x_0+b_0^2)}} = \\
&= \frac{x_i - x_0}{\frac{a_1b_0x_i+a_0b_1x_0-a_1b_0x_0-a_0b_1x_i}{(b_1^2x_0+b_1b_0)x_i+(b_0b_1x_0+b_0^2)}} = \frac{x_i - x_0}{\frac{(a_1b_0-a_0b_1)x_i+(a_0b_1-a_1b_0)x_0}{(b_1^2x_0+b_1b_0)x_i+(b_0b_1x_0+b_0^2)}} = \\
&= \frac{x_i - x_0}{\frac{(a_1b_0-a_0b_1)(x_i-x_0)}{(b_1^2x_0+b_1b_0)x_i+(b_0b_1x_0+b_0^2)}} = \frac{(b_1^2x_0+b_1b_0)x_i+(b_0b_1x_0+b_0^2)}{(a_1b_0-a_0b_1)} = \frac{Q^1(x_i)}{P^0(x_i)}.
\end{aligned}$$

Pokračujeme v odvozování za použití vztahu (24) pro $i = 1$, tedy

$$\frac{Q^1(x_1)}{P^0(x_1)} = \frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0} = \varphi(x_0, x_1)$$

a proto lze psát

$$\begin{aligned}
\frac{Q^1(x)}{P^0(x)} &= \varphi(x_0, x_1) + \frac{Q^1(x)}{P^0(x)} - \frac{Q^1(x_1)}{P^0(x_1)} = \\
&= \varphi(x_0, x_1) + \frac{(b_1^2x_0 + b_0b_1)x + b_0b_1x_0 + b_0^2 - (b_1^2x_0 + b_0b_1)x_1 - b_0b_1x_0 - b_0^2}{a_1b_0 - a_0b_1} = \\
&= \varphi(x_0, x_1) + \frac{(x - x_1)(b_1^2x_0 + b_0b_1)}{a_1b_0 - a_0b_1}.
\end{aligned}$$

Tento vztah lze opět zapsat takto

$$\frac{Q^1(x)}{P^0(x)} = \varphi(x_0, x_1) + \frac{x - x_1}{P^0(x)/Q^0(x)}, \tag{25}$$

kde $\frac{P^0(x)}{Q^0(x)} = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_1^2 x_0 + b_0 b_1}$. Nyní stejným postupem, jaký jsme použili k získání vztahu (24) dostaneme

$$\frac{P^0(x_i)}{Q^0(x_i)} = \frac{x_i - x_1}{\varphi(x_0, x_i) - \varphi(x_0, x_1)} = \varphi(x_0, x_1, x_i). \tag{26}$$

Tedy celkově ze vztahů (23), (24), (25) a (26) po vhodném dosazení dostáváme výsledný vztah

$$\Phi^{1,1}(x) = \frac{P^1(x)}{Q^1(x)} = f_0 + \cfrac{x - x_0}{\varphi(x_0, x_1) + \cfrac{x - x_1}{\varphi(x_0, x_1, x_2)}}.$$

Pro $\mu > 1$ a $\nu > 1$ by se odvození dělalo analogicky a získali bychom vztah (20).

Nyní si uvedeme příklad, na kterém ukážeme, jak výše získaný algoritmus pracuje.

Příklad 3.1. Vypočtěte inverzní diference a určete racionální funkci interpolující dané hodnoty.

i	0	1	2	3
x_i	-1	1	2	3
f_i	-2	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{3}$

Inverzní diference vypočítáme dle definice 1.8 a zapíšeme do tabulky.

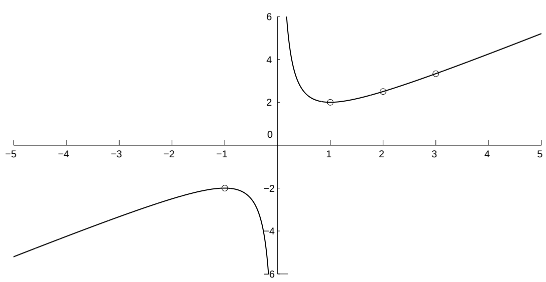
i	x_i	f_i	$\varphi(x_0, x_i)$	$\varphi(x_0, x_1, x_i)$	$\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3)$
0	-1	-2			
1	1	2	$\frac{1}{2}$		
2	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{3}$	6	
3	3	$\frac{10}{3}$	$\frac{3}{4}$	8	$\frac{1}{2}$

Je zřejmé, že $\mu+\nu = 3$, tedy dle tabulky 3 bude interpolační funkce typu (2,1). Nyní dosadíme získané hodnoty do vzorce pro výpočet interpolační funkce dle Newtonovy metody, tj. dostáváme

$$\Phi^{2,1}(x) = f_0 + \cfrac{x-x_0}{\varphi(x_0,x_1) + \cfrac{x-x_1}{\varphi(x_0,x_1,x_2) + \cfrac{x-x_2}{\varphi(x_0,x_1,x_2,x_3)}}} =$$

$$= -2 + \cfrac{x-(-1)}{\frac{1}{2} + \cfrac{x-1}{6+\cfrac{x-2}{\frac{1}{2}}}} = \frac{x^2+1}{x}.$$

Funkce $\Phi^{2,1} = \frac{x^2+1}{x}$ je výslednou interpolační funkcí. Tato funkce a interpolované body jsou vykresleny na obrázku 15.



Obrázek 15 ♢

3.1.1 M-soubor pro metodu Newtonova typu

Nalézt interpolační funkci pomocí metody Newtonova typu lze nejen ručním výpočtem, ale také pomocí jednoduchého programu vytvořeného v matematickém softwaru Matlab. Nyní si uvedeme m-soubor tohoto programu, který jsem sama vytvořila, a na příkladech si ukážeme, jak se s daným programem pracuje. Výstupem budou vektory obsahující koeficienty polynomu v čitateli resp. ve jmenovateli výsledné interpolační funkce seřazené od nejvyšší mocniny. Výstupem bude také racionální interpolační funkce Phi, se kterou může uživatel dále libovolně pracovat tj. počítat funkční hodnoty, vykreslit graf, zjistit předpis této funkce, atd. Tento m-soubor přímo i vykreslí graf interpolační funkce Phi a body interpolace.

Text m-souboru newton.m:

```
function [a,b,Phi]= newton(xi,fi)
% vstup  xi...vektor hodnot xi
%        fi...vektor odpovídajích hodnot fi
% výstup a...vektor koeficientů polynomu v čitateli výsledné
%            interpolační funkce seřazených od nejvyšší mocniny
%        b...vektor koeficientů polynomu ve jmenovateli výsledné
%            interpolační funkce seřazených od nejvyšší mocniny
%        Phi...výsledná interpolační funkce

syms x phi p; % zavedení symbolických proměnných
% zavedeme posun, protože určité diference již nelze spočítat
posun=0;
pocetuzlu=length(xi);
%kontrola správnosti zadání uzlů interpolace
nejsouruzne=0;
for i=1:pocetuzlu
    for j=i+1:pocetuzlu
        if xi(i)==xi(j)
           disp('Chyba! Uzly interpolace musí být vzájemně různé.');
           nejsouruzne=1;
           break;
        end
    end
    if nejsouruzne
        break;
    end
end
```

```
if pocetuzlu~=length(fi)
    disp('Chyba! Délky vektorů xi a fi musí být stejné.');
end

% výpočet inverzních diferencí i:= řád diference,
% j:=index posledního xj,
% když fi(x1,x2,...,xj)
for i=1:pocetuzlu
    for j=2+posun:pocetuzlu
        if i==1
            idif(i,j)=(xi(i)-xi(j))/(fi(i)-fi(j));
        else
            idif(i,j)=(xi(i)-xi(j))/(idif(i-1,i)-idif(i-1,j));
        end
    end
    posun=posun+1;
end

% vlastní výpočet interpolační funkce
p=0;
for i=(pocetuzlu):-1:2
p=idif(i-1,i)+p;
p=(x-xi(i-1))/p;
end

% simplify() upravuje výslednou interpolační funkci
% na ,,nejjednodušší" tvar
phi=simplify(fi(1)+p);
[citatel,jmenovatel]=numden(phi);
a=sym2poly(citatel);
```

```
b=sym2poly(jmenovatel);

% úpravy potřebné k získání funkce Phi, s kterou může uživatel
% pracovat (počítat funkční hodnoty, vykreslit graf, atd.)
c=char(poly2sym(a,x));
j=char(poly2sym(b,x));
c=strrep(c,'/','./');
c=strrep(c,'^','.^');
c=strrep(c,'*','.*');
j=strrep(j,'/','./');
j=strrep(j,'^','.^');
j=strrep(j,'*','.*');
Phi=inline(strcat('(',c,')./(',j,')'));

% vykreslení grafu hledané interpolační funkce
plot(xi,fi,'ko');
hold on;
x1=[-max(abs(xi))-1:0.001:max(abs(xi))+1];
plot(x1,Phi(x1),'k','LineWidth',1);
hold off;
```

Příklad 3.2. Pomocí výše uvedeného m-souboru nalezněte v Matlabu racionální interpolační funkce zadaných hodnot.

1) Nechť jsou dány hodnoty následující tabulkou

i	0	1	2	3
x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	1	2
f_i	-2	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

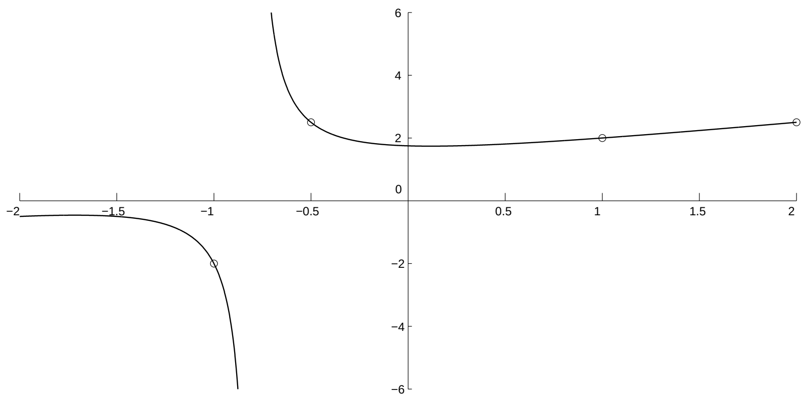
V příkazovém okně Matlabu zadáme:

```
xi=[-1 -1/2 1 2];
fi=[-2 5/2 2 5/2];
[a,b,Phi]=newton(xi,fi)
```

Stisknutím tlačítka Enter dostaneme

```
a =     3     8     7

b =     5     4

Phi =

     Inline function:

     Phi(x) = (7+8.*x+3.*x.^2)./(4+5.*x)
```

a graf funkce Phi spolu s body interpolace viz. obrázek 16.



Obrázek 16

2) Nechť jsou dány hodnoty následující tabulkou

i	0	1	2	3	4
x_i	-4	-2	0	2	3
f_i	$\frac{17}{15}$	$\frac{5}{3}$	-1	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$

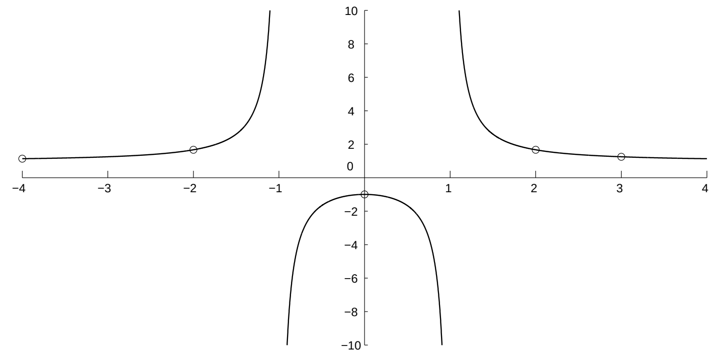
V příkazovém okně Matlabu zadáme:

```
xi=[-4 -2 0 2 3];

fi=[17/15 5/3 -1 5/3 5/4];

[a,b,Phi]=newton(xi,fi)
```

Stisknutím tlačítka Enter dostaneme

```
a =     1     0     1

b =     1     0    -1

Phi =

     Inline function:

     Phi(x) = (1+x.^2)./(-1+x.^2)
```

a graf funkce Phi spolu s body interpolace viz. obrázek 17.



Obrázek 17

3) Nechť jsou dány hodnoty následující tabulkou

$$\begin{array}{c|cccc} i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ f_i & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{3}{13} \end{array}.$$

V příkazovém okně Matlabu zadáme:

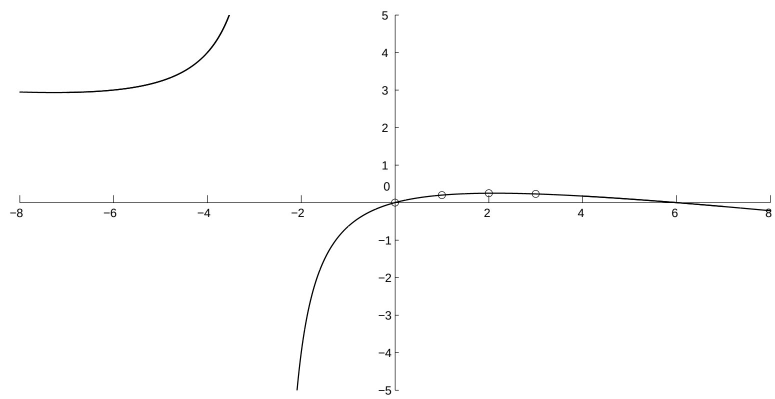
```
xi=[0 1 2 3];

fi=[0 1/5 1/4 3/13];

[a,b,Phi]=newton(xi,fi)
```

Stisknutím tlačítka Enter dostaneme

```
a =    -1     6     0

b =     7    18
```

```
Phi =

     Inline function:

     Phi(x) = (6.*x-x.^2)./(18+7.*x)
```

a graf funkce Phi spolu s body interpolace viz. obrázek 18.



Obrázek 18 $\diamond$

3.2 Metoda Nevillova typu

Tato metoda stejně jako Nevillova metoda pro polynomiální interpolaci využívá postupných výpočtů dle daného algoritmu. V tomto algoritmu se bude užívat tzv. částečných interpolačních funkcí, které budou vždy interpolovat pouze část zadaných hodnot. Poslední částečná interpolační funkce bude výslednou funkcí a bude interpolovat všechny hodnoty. Nyní si tedy uvedeme definici částečné interpolační funkce a dále pak věty potřebné k odvození samotného algoritmu.

Definice 3.1. Nechť jsou dány hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, \ldots, k$. Pak funkci

$$\Phi_s^{m,n}(x) = \frac{P_s^{m,n}(x)}{Q_s^{m,n}(x)}, \tag{27}$$

kde $k, m, n, s \in \mathbb{N}_0$ jsou takové, že platí $s + m + n \leq k$, nazýváme **částečnou interpolační funkcí hodnot** (x_i, f_i), pro $i = s, \ldots, s + m + n$, jestliže platí

$$\Phi_s^{m,n}(x_i) = \frac{P_s^{m,n}(x_i)}{Q_s^{m,n}(x_i)} = f_i, \quad pro \quad i = s, \ldots s + m + n.$$

Užití horních indexů m a n u polynomů $P_s^{m,n}(x)$ a $Q_s^{m,n}(x)$ ve vztahu (27) je potřebné pro pochopení a zapsání následujících vět, ve kterých se budou vyskytovat polynomy $P_s^{m,n}(x)$, $Q_s^{m,n}(x)$ a jejich koeficienty vždy v souvislosti s konkrétní racionální funkcí $\Phi_s^{m,n}(x)$. Tedy například $P_s^{m,n}(x)$ a $P_s^{m,n-1}(x)$ budou různé polynomy v čitateli dvou různých racionálních funkcí a to $\Phi_s^{m,n}(x)$ a $\Phi_s^{m,n-1}(x)$. Budou nejvýše stupně m. Index s značí hodnotu indexu i, od kterého jsou dané hodnoty (x_i, f_i) interpolovány částečnou interpolační funkcí $\Phi_s^{m,n}(x)$. Součet $s+m+n$ určuje hodnotu indexu i, kdy pro větší i již nejsou hodnoty (x_i, f_i) částečnou interpolační funkcí interpolovány. Tedy částečná funkce $\Phi_s^{m,n}(x)$ interpoluje hodnoty (x_i, f_i) pro $i = s, s + 1, \ldots, s + m + n$.

Pro zjednodušení budeme používat následující značení

$$\alpha_i(x) = x - x_i.$$

Dále $p_s^{m,n}$ bude značit koeficient u nejvyšší mocniny x polynomu $P_s^{m,n}(x)$, tj. u x^m. Stejně tak koeficient u nejvyšší mocniny x polynomu $Q_s^{m,n}(x)$ označíme $q_s^{m,n}$, tj. koeficient u x^n.

Následující věta uvádí vztahy, které platí mezi částečnými interpolačními funkcemi a které využijeme v dalším textu k důkazu vět vedoucích k odvození algoritmu metody Nevillova typu.

Věta 3.2. *Nechť jsou dány hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, 1, \ldots, \mu + \nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}_0$ a $m, n, s \in \mathbb{N}_0$ takové, že $s + m + n \leq \mu + \nu$. Dále nechť $P_s^{0,0}(x) = f_s$, $Q_s^{0,0}(x) = 1$ pro $s = 0, 1, \ldots, \mu + \nu$. Pak vždy platí jeden z následujících vztahů*

$$\begin{aligned} P_s^{m,n}(x) &= \alpha_s q_s^{m-1,n} P_{s+1}^{m-1,n}(x) - \alpha_{s+m+n} q_{s+1}^{m-1,n} P_s^{m-1,n}(x), \\ Q_s^{m,n}(x) &= \alpha_s q_s^{m-1,n} Q_{s+1}^{m-1,n}(x) - \alpha_{s+m+n} q_{s+1}^{m-1,n} Q_s^{m-1,n}(x), \end{aligned} \tag{28}$$

nebo

$$\begin{aligned} P_s^{m,n}(x) &= \alpha_s p_s^{m,n-1} P_{s+1}^{m,n-1}(x) - \alpha_{s+m+n} p_{s+1}^{m,n-1} P_s^{m,n-1}(x), \\ Q_s^{m,n}(x) &= \alpha_s p_s^{m,n-1} Q_{s+1}^{m,n-1}(x) - \alpha_{s+m+n} p_{s+1}^{m,n-1} Q_s^{m,n-1}(x). \end{aligned} \tag{29}$$

Důkaz: viz [3], strana 68.

Vztahy uvedené ve větě 3.2 sice platí, ale k výpočtu interpolační funkce nevedou přímo. Není nám známo, jak částečné interpolační funkce získat, ani jaké budou jejich hodnoty μ a ν, věta pouze uvádí jaké vztahy mezi nimi budou platit. Je tedy zřejmé, že větu 3.2 nelze použít k nalezení interpolační funkce přímo jedním dosazením, neboť v rekurentních vztazích (28) a (29) jsou obsaženy polynomy částečných interpolačních funkcí, které obecně neznáme. Šlo by však postupovat tak, že bychom částečné interpolační funkce hledali postupně vždy pro určitou část zadaných hodnot.

Nyní si přiblížíme tento postup. Nechť jsou tedy dány hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, 1, \ldots, n$. Nejdříve nalezneme částečné interpolační funkce každé dvojice hodnot (x_i, f_i), pro $i = k, k+1$, kde $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Poté ze získaných částečných interpolačních funkcí získáme další částečné interpolační funkce, které již interpolují trojice hodnot (x_i, f_i), pro $i = k, k+1, k+2$, kde $k = 0, 1, \ldots, n-2$, atd. Tento postup je ale velmi složitý. Navíc samotná volba stupňů polynomů v částečných racionálních funkcích může činit problém. Nikde není dáno, jak postupně tyto stupně zvyšovat. Bylo by však možné postupovat při této volbě metodou pokus-omyl a tím nakonec najít výslednou interpolační funkci.

Samotný algoritmus metody Nevillova typu bude pracovat na tomto principu postupného získávání částečných interpolačních funkcí. Dojde ale ke zjednodušení jak značení, tak i výpočtu. Také v tomto algoritmu nebudou řešeny zvlášť polynomy v čitateli a jmenovateli získávaných racionálních funkcí.

Předtím než si uvedeme algoritmus metody Nevillova typu, uvedeme ještě příklad, v němž budeme určité částečné interpolační funkce již znát a využijeme vztahů z věty 3.2 k výpočtu výsledné interpolační funkce.

Příklad 3.3. Nechť jsou dány hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, 1, 2$ následující tabulkou

i	0	1	2
x_i	2	4	6
f_i	1	2	3

Dále nechť funkce $\Phi_0^{0,1}(x) = \frac{4}{-x+6}$ interpoluje hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, 1$ a funkce $\Phi_1^{0,1}(x) = \frac{12}{-x+10}$ interpoluje hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 1, 2$. Pomocí vztahu (28) z věty 3.2 vypočítejte výslednou interpolační funkci $\Phi_0^{1,1}(x)$, která již bude interpolační funkcí všech zadaných hodnot, tj. (x_i, f_i), pro $i = 0, 1, 2$.

Protože známe tvary $P_1^{0,1}(x)$, $P_0^{0,1}(x)$, $Q_1^{0,1}(x)$ a $Q_0^{0,1}(x)$, tj.

$$P_1^{0,1}(x) = 12, \quad P_0^{0,1}(x) = 4, \quad Q_1^{0,1}(x) = -x + 10, \quad Q_0^{0,1}(x) = -x + 6,$$

můžeme použít vztah (28). Také víme, že $q_0^{0,1} = -1$ a $q_1^{0,1} = -1$. Pro výpočet interpolační funkce všech zadaných hodnot dosadíme do vztahu (28) hodnoty

$s=0$, $m=1$ a $n=1$. Tedy po dosazení dostáváme

$$P_0^{1,1}(x) = (x-x_0)q_0^{0,1}P_1^{0,1}(x) - (x-x_2)q_1^{0,1}P_0^{0,1}(x) =$$
$$= (x-2)(-1)12 - (x-6)(-1)4 = -12x + 24 + 4x - 24 = -8x,$$
$$Q_0^{1,1}(x) = (x-x_0)q_0^{0,1}Q_1^{0,1}(x) - (x-x_2)q_1^{0,1}Q_0^{0,1}(x) =$$
$$= (x-2)(-1)(-x+10) - (x-6)(-1)(-x+6) =$$
$$= x^2 - 12x + 20 - x^2 + 12x - 36 = -16$$

Výsledná racionální funkce $\Phi_0^{1,1}(x)$ je tedy tvaru

$$\Phi_0^{1,1}(x) = \frac{-8x}{-16} = \frac{x}{2}.$$

Jednoduchým dosazením lze ověřit, že interpolační podmínky platí pro všechny zadané hodnoty a tedy funkce $\Phi_0^{1,1}(x) = \frac{x}{2}$ je opravdu interpolační funkcí daných hodnot. $\diamondsuit$

Nyní si uvedeme dvě věty, které přímo povedou k odvození algoritmu metody Nevillova typu. Tvrzení těchto vět využijeme k určení vztahu pro výpočet částečných interpolačních funkcí a tím i výsledné interpolační funkce nedegenerované úlohy racionální interpolace. Tento vztah bude důležitý a bude plně využit v algoritmu metody Nevillova typu.

Věta 3.3. *Nechť jsou dány hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, 1, \ldots, \mu+\nu$ a $\mu, \nu, m, n, s \in \mathbb{N}_0$, $s+m+n \le \mu+\nu$. Pak platí následující vztahy.*

$$\Phi_s^{m-1,n}(x) - \Phi_{s+1}^{m-1,n-1}(x) = \tag{30}$$
$$= -p_{s+1}^{m-1,n-1}q_s^{m-1,n}\frac{(x-x_{s+1})\ldots(x-x_{s+m+n-1})}{Q_s^{m-1,n}(x)Q_{s+1}^{m-1,n-1}(x)}$$

$$\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \Phi_{s+1}^{m-1,n-1}(x) = \tag{31}$$
$$= -p_{s+1}^{m-1,n-1}q_{s+1}^{m-1,n}\frac{(x-x_{s+1})\ldots(x-x_{s+m+n-1})}{Q_{s+1}^{m-1,n}(x)Q_{s+1}^{m-1,n-1}(x)}$$

Důkaz: viz [3], strana 69.

Věta 3.4. *Nechť jsou dány hodnoty* (x_i, f_i), *pro* $i = 0, 1, \dots, \mu + \nu$ *a* $\mu, \nu, m, n, s \in \mathbb{N}_0$, $s + m + n \leq \mu + \nu$. *Pro* $m \geq 1$ *a* $n \geq 1$ *platí:*

$$\Phi_s^{m,n}(x) = \Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) + \frac{\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \Phi_s^{m-1,n}(x)}{\frac{\alpha_s}{\alpha_{s+m+n}}\left[1 - \frac{\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \Phi_s^{m-1,n}(x)}{\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \Phi_{s+1}^{m-1,n-1}(x)}\right] - 1} \tag{32}$$

$$\Phi_s^{m,n}(x) = \Phi_{s+1}^{m,n-1}(x) + \frac{\Phi_{s+1}^{m,n-1}(x) - \Phi_s^{m,n-1}(x)}{\frac{\alpha_s}{\alpha_{s+m+n}}\left[1 - \frac{\Phi_{s+1}^{m,n-1}(x) - \Phi_s^{m,n-1}(x)}{\Phi_{s+1}^{m,n-1}(x) - \Phi_{s+1}^{m-1,n-1}(x)}\right] - 1} \tag{33}$$

Důkaz: Dokážeme pouze vztah (32), vztah (33) by se dokázal analogicky. Důkaz povedeme tak, že si nejdříve $\Phi_s^{m,n}(x)$ vyjádříme pomocí vztahů z věty 3.2 a poté vhodně vynásobíme, abychom mohli použít vztah z věty 3.3 a poté upravit na dokazovaný výraz.

Podle vztahu (28) z věty 3.2 platí

$$\Phi_s^{m,n}(x) = \frac{P_s^{m,n}(x)}{Q_s^{m,n}(x)} = \frac{\alpha_s q_s^{m-1,n} P_{s+1}^{m-1,n}(x) - \alpha_{s+m+\nu} q_{s+1}^{m-1,n} P_s^{m-1,n}(x)}{\alpha_s q_s^{m-1,n} Q_{s+1}^{m-1,n}(x) - \alpha_{s+m+n} q_{s+1}^{m-1,n} Q_s^{m-1,n}(x)}$$

Využíváme vztahu (28) z věty 3.2, neboť užitím vztahu (29) z věty 3.2 by se dokazoval vztah (33). Nechť $p_{s+1}^{m-1,n-1} \neq 0$. Dále roznásobíme čitatel i jmenovatel funkce $\Phi_s^{m,n}(x)$ výrazem

$$\frac{-p_{s+1}^{m-1,n-1}(x - x_{s+1})(x - x_{s+2}) \dots (x - x_{s+m+n-1})}{Q_{s+1}^{m-1,n}(x) Q_s^{m-1,n}(x) Q_{s+1}^{m-1,n-1}(x)}$$

a použijeme tvrzení věty 3.3. Tedy dostáváme

$$\Phi_s^{m,n}(x) = \frac{\alpha_s [a] \Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \alpha_{s+m+n} [b] \Phi_s^{m-1,n}(x)}{[c]},$$

kde

$$[a] := \Phi_s^{m-1,n}(x) - \Phi_{s+1}^{m-1,n-1}(x),$$

$$[b] := \Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \Phi_{s+1}^{m-1,n-1}(x),$$

$$[c] := \alpha_s [a] - \alpha_{s+m+n} [b].$$

A dále upravujeme tak, abychom dostali požadovaný výraz, tj. začneme tak, že vytkneme výraz $[\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) + \Phi_s^{m-1,n}(x)]$, upravíme a dostaneme

$$\Phi_s^{m,n}(x) = \frac{[\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) + \Phi_s^{m-1,n}(x)][c] + \alpha_{s+m+n}[b]\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \alpha_s[a]\Phi_s^{m-1,n}(x)}{[c]}.$$

Dále dostaneme

$$\Phi_s^{m,n}(x) = \Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) + \frac{\Phi_s^{m-1,n}(x)[c] + \alpha_{s+m+n}[b]\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \alpha_s[a]\Phi_s^{m-1,n}(x)}{[c]}.$$

Další úpravou dostaneme

$$\Phi_s^{m,n}(x) = \Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) + \frac{\alpha_{s+m+n}[b][\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \Phi_s^{m-1,n}(x)]}{[c]}.$$

Dále podělíme čitatel i jmenovatel zlomku výrazem $\alpha_{s+m+n}[b]$ a dostaneme

$$\Phi_s^{m,n}(x) = \Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) + \frac{\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \Phi_s^{m-1,n}(x)}{\frac{\alpha_s[a] - \alpha_{s+m+n}[b]}{\alpha_{s+m+n}[b]}},$$

tj.

$$\Phi_s^{m,n}(x) = \Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) + \frac{\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \Phi_s^{m-1,n}(x)}{\frac{\alpha_s}{\alpha_{s+m+n}}\left[\frac{\Phi_s^{m-1,n}(x) - \Phi_{s+1}^{m-1,n-1}(x)}{\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \Phi_{s+1}^{m-1,n-1}(x)}\right] - 1}.$$

Úpravou nakonec dostáváme

$$\Phi_s^{m,n}(x) = \Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) + \frac{\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \Phi_s^{m-1,n}(x)}{\frac{\alpha_s}{\alpha_{s+m+n}}\left[\frac{\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \Phi_{s+1}^{m-1,n-1}(x) + \Phi_s^{m-1,n}(x) - \Phi_{s+1}^{m-1,n}(x)}{\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \Phi_{s+1}^{m-1,n-1}(x)}\right] - 1},$$

tj.

$$\Phi_s^{m,n}(x) = \Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) + \frac{\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \Phi_s^{m-1,n}(x)}{\frac{\alpha_s}{\alpha_{s+m+n}}\left[1 - \frac{\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \Phi_s^{m-1,n}(x)}{\Phi_{s+1}^{m-1,n}(x) - \Phi_{s+1}^{m-1,n-1}(x)}\right] - 1}$$

a tím je důkaz hotov. $\square$

Zvyšování stupňů m a n polynomů v čitateli a jmenovateli částečných interpolačních funkcí během výpočtu metodou Nevillova typu je znázorněno na obrázku 19.

$$(0,0) \to (0,1) \to (1,1) \to (1,2) \to (2,2) \to (2,3) \to \dots$$

Obrázek 19

Tedy v prvním kroku získáme částečné interpolační funkce typu $(0,0)$, tyto funkce budou rovny zadaným funkčním hodnotám f_i pro $\forall i$ dle definice vztahů $P_s^{0,0}(x)$ a $Q_s^{0,0}(x)$ ve větě 3.2. V druhém kroku již získáme částečné interpolační funkce typu $(0,1)$, atd.

Nyní když víme, jak se v každém kroku metody zvyšují stupně m a n částečných interpolačních funkcí, lze provést přeznačení těchto funkcí a tím i zjednodušení zápisu. Použijeme tedy následující značení

$$T_{ik}(x) = \Phi_s^{m,n}(x), \quad kde \quad i = s + m + n, \quad k = m + n.$$

Tyto funkce $T_{ik}(x)$ jsou tedy pouze jiným označením pro částečné interpolační funkce. Nechť jsou dány hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, 1, \dots,\ l$.

Pak **algoritmus metody Nevillova typu** vypadá takto:

1) Položme pro $\forall i = 0, \dots,\ l,\ i,\ l \in \mathbb{N}$

$$T_{i0}(x) = f_i$$
$$T_{i,-1}(x) = 0$$

2) Pro $k = 1, \dots,\ l$ a $k \leq i \leq l$, $k \in \mathbb{N}$ vypočteme

$$T_{ik}(x) = T_{i,k-1}(x) + \frac{T_{i,k-1}(x) - T_{i-1,k-1}(x)}{\frac{x-x_{i-k}}{x-x_i}\left(1 - \frac{T_{i,k-1}(x)-T_{i-1,k-1}(x)}{T_{i,k-1}(x)-T_{i-1,k-2}(x)}\right) - 1}$$

Funkce $T_{ll}(x)$ je výslednou interpolační funkcí zadaných hodnot.

Do následující tabulky lze přehledně zapsat výpočty.

(m,n)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(1,2)$
	$f_0 = T_{00}(x)$			
		$T_{11}(x)$		
	$f_1 = T_{10}(x)$		$T_{22}(x)$	
		$T_{21}(x)$		$T_{33}(x)$
	$f_2 = T_{20}(x)$		$T_{32}(x)$	$\vdots$
		$T_{31}(x)$	$\vdots$	
	$f_3 = T_{30}(x)$	$\vdots$		
	$\vdots$			

Tabulka 4

Kdyby byly například zadány hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, 1, 2, 3$, funkce $T_{33}(x)$ by byla již výslednou interpolační funkcí.

Na následujícím příkladě si ukážeme, jak daný algoritmus pracuje.

Příklad 3.4. Nechť jsou dány hodnoty (x_i, f_i), pro $i = 0, 1, 2$ následující tabulkou

$$\begin{array}{c|ccc} i & 0 & 1 & 2 \\ \hline x_i & 2 & 4 & 6 \\ f_i & 1 & 2 & 3 \end{array}.$$

Nalezněte interpolační funkci pro zadané hodnoty.

Nyní provedeme výpočty funkcí $T_{ik}(x)$ dle algoritmu metody Nevillova typu.

$$T_{11}(x) = 2 + \frac{2-1}{\frac{x-2}{x-4}\left(1 - \frac{2-1}{2-0}\right) - 1} = 2 + \frac{1}{\frac{x-2-2x+8}{2x-8}} = 2 + \frac{2(x-4)}{-x+6} = \frac{4}{-x+6}$$

$$T_{21}(x) = 3 + \frac{3-2}{\frac{x-4}{x-6}\left(1 - \frac{3-2}{3-0}\right) - 1} = 3 + \frac{1}{\frac{2x-8-3x+18}{3x-18}} = 3 + \frac{3x-18}{-x+10} = \frac{12}{-x+10}$$

$$T_{22}(x) = \frac{12}{-x+10} + \frac{\frac{12}{-x+10} - \frac{4}{-x+6}}{\frac{x-2}{x-6}\left(1 - \frac{\frac{12}{-x+10} - \frac{4}{-x+6}}{\frac{12}{-x+10} - 2}\right) - 1} = \frac{12}{-x+10} + \frac{\frac{-8x+32}{(-x+10)(-x+6)}}{\frac{x-2}{x-6}\left(\frac{x-10}{x-6}\right) - 1} =$$

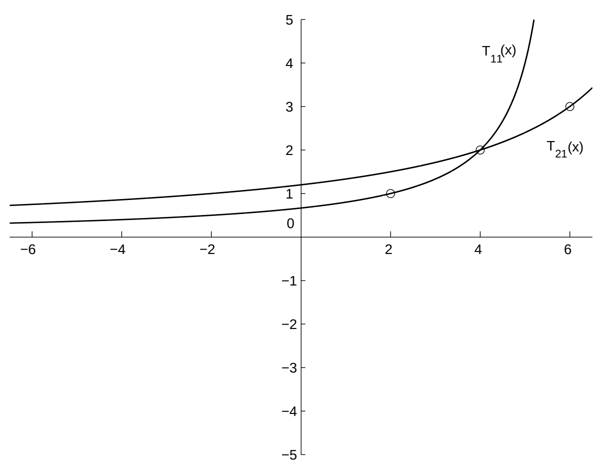
$$= \frac{12}{-x+10} + \frac{(x-4)(x-6)}{(-x+10)(-2)} = \frac{x^2-10x}{2(x-10)} = \frac{x}{2}$$

Získané funkce lze zapsat do následující tabulky.

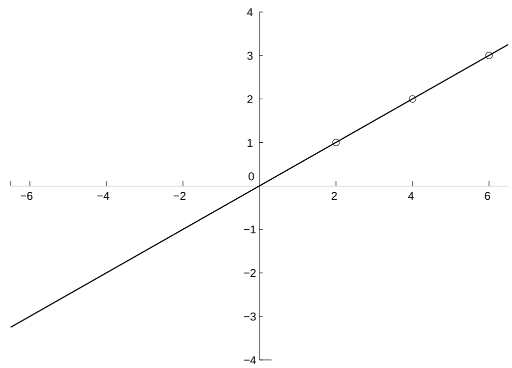
(m,n)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
	$T_{00}(x)=1$ $T_{10}(x)=2$ $T_{20}(x)=3$	$T_{11}(x)=\frac{4}{-x+6}$ $T_{21}(x)=\frac{12}{-x+10}$	$T_{22}(x)=\frac{x}{2}$

Funkce $T_{11}(x) = \frac{4}{-x+6}$ interpoluje body [2,1] a [4,2]. Funkce $T_{21}(x) = \frac{12}{-x+10}$ interpoluje body [4,2] a [6,3]. Funkce $T_{22}(x) = \frac{x}{2}$ interpoluje již všechny body [2,1],[4,2] a [6,3]. Navíc je funkce $T_{22}(x) = \frac{x}{2}$ ve tvaru polynomu, k čemuž při určitých zadáních výchozích hodnot může dojít. Toto však není na škodu. Jde pouze o to, že dané hodnoty lze polynomiální funkcí (tj. zvláštní případ racionální funkce) interpolovat a toto je pro určitá zadání hodnot metodou preferováno.

Částečné interpolační funkce $T_{11}(x)$ a $T_{21}(x)$ jsou vykresleny spolu se zadanými hodnotami na obrázku 20. Výsledná interpolační funkce $T_{22}(x) = \frac{x}{2}$ je vykreslena na obrázku 21.



Obrázek 20



Obrázek 21 ♢

3.2.1 M-soubor pro metodu Nevillova typu

Nalézt interpolační funkci pomocí metody Nevillova typu lze nejen ručním výpočtem, ale také pomocí jednoduchého programu vytvořeného v matematickém softwaru Matlab. Nyní si uvedeme m-soubor tohoto programu, který jsem sama vytvořila, a na příkladech si ukážeme, jak se s daným programem pracuje. Výstupem budou opět stejně jako v m-souboru newton.m vektory obsahující koeficienty polynomu v čitateli resp. ve jmenovateli výsledné interpolační funkce Phi seřazené od nejvyšší mocniny. Výstupem bude také racionální interpolační funkce Phi, s kterou může uživatel dále libovolně pracovat tj. počítat funkční hodnoty, vykreslit graf, zjistit předpis této funkce, atd. Tento m-soubor také přímo i vykreslí graf interpolační funkce Phi a body interpolace.

Ještě než si tento m-soubor uvedeme, chtěla bych upozornit, že některé příkazy, které v Matlabu musí být na jednom řádku, se nevejdou na šířku stránky, proto jsou v tomto textu rozčleněny na více řádků.
Text m-souboru nevill.m:

```
function [a,b,Phi] = nevill(xi,fi)
% vstup  xi...vektor hodnot xi
%        fi...vektor odpovídajích hodnot fi
```

```
% výstup a...vektor koeficientů polynomu v čitateli výsledné
%            interpolační funkce seřazených od nejvyšší mocniny
%        b...vektor koeficientů polynomu ve jmenovateli výsledné
%            interpolační funkce seřazených od nejvyšší mocniny
%        Phi...výsledná interpolační funkce

syms x phi T  % zavedení symbolických proměnných
posun=0; % nastavení výchozí hodnoty posunu
pocetuzlu=length(xi);
%kontrola správnosti zadání uzlů interpolace
nejsouruzne=0;

for i=1:pocetuzlu
    for j=i+1:pocetuzlu
        if xi(i)==xi(j)
           disp('Chyba! Uzly interpolace musí být vzájemně různé.');
           nejsouruzne=1;
           break;
        end
    end
    if nejsouruzne
        break;
    end
end

if pocetuzlu~=length(fi)
    disp('Chyba! Délky vektorů xi a fi musí být stejné.');
end

% vlastní algoritmus
```

```
for i=1:pocetuzlu
    T(i,2)=fi(i);
    T(i,1)=0;
end
for k=3:pocetuzlu+1
    for i=(2+posun):(pocetuzlu)

        T(i,k)=simplify(T(i,k-1)+(T(i,k-1)-T(i-1,k-1))/
                          (((x-xi(i-k+2))/(x-xi(i)))*
             (1-((T(i,k-1)-T(i-1,k-1))/(T(i,k-1)-T(i-1,k-2))))-1));
% simplify() upravuje získané částečné interpolační
% funkce na ,,nejjednodušší" tvar
    end
    posun=posun+1;
end

phi=simplify(T(pocetuzlu,pocetuzlu+1));
% Matlab vyhodnocuje výraz 1/0 jako Inf - nekonečno,
% může se stát, že ve vyjádření funkce Matlab použije Inf a
% vůbec toto nevyhodnotí jako problém.
% Při výpočtu T(i,k) může vyjít Inf, proto když tato
% situace nastane, vypíšeme následující hlášení
phitest=char(collect(phi,x));
nekonecno=findstr(phitest,'Inf');
if(length(nekonecno)~=0)
  disp('Nelze najít interpolační funkci. Ve vzorci pro výpočet T(i,k)
        nastává dělení nulou a Matlab');
  disp('toto vyhodnocuje jako Inf - nekonečno.');

end
```

```
[citatel,jmenovatel]=numden(phi);
a=sym2poly(citatel);
b=sym2poly(jmenovatel);


% úpravy potřebné k získání funkce Phi, s kterou může uživatel
% pracovat (počítat funkční hodnoty, vykreslit graf, atd.)

c=char(poly2sym(a,x));
j=char(poly2sym(b,x));
c=strrep(c,'/','./');
c=strrep(c,'^','.^');
c=strrep(c,'*','.*');
j=strrep(j,'/','./');
j=strrep(j,'^','.^');
j=strrep(j,'*','.*');
Phi=inline(strcat('(',c,')./(',j,')'));

% vykreslení grafu hledané interpolační funkce
plot(xi,fi,'ko');
hold on;
x1=[-max(abs(xi))-1:0.001:max(abs(xi))+1];
plot(x1,Phi(x1),'k','LineWidth',1);
hold off;
```

Je zřejmé, že hodnoty, kterých nabývají i a k, musely být upraveny, protože software Matlab indexuje pole a matice od počátečního indexu 1. Tedy i a k nemohou nabývat hodnot -1 ani 0, jak požaduje původní algoritmus metody Nevillova typu. Proto byly hodnoty i a k upraveny.

Příklad 3.5. Pomocí výše uvedeného m-souboru nalezněte v Matlabu racionální interpolační funkce zadaných hodnot.

1) Nechť jsou dány hodnoty následující tabulkou

i	0	1	2	3	4
x_i	-4	-2	0	2	3
f_i	$\frac{17}{15}$	$\frac{5}{3}$	-1	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$

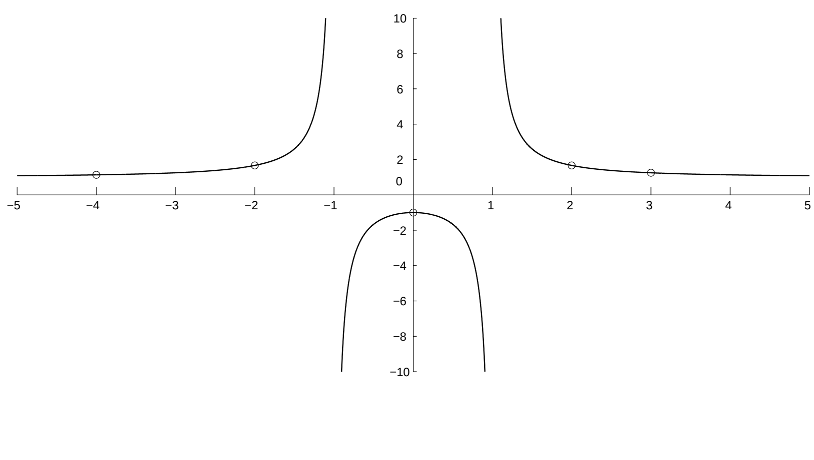
V příkazovém okně Matlabu zadáme:

```
xi=[-4 -2 0 2 3];
fi=[17/15 5/3 -1 5/3 5/4];
[a,b,Phi]=nevill(xi,fi)
```

Stisknutím tlačítka Enter dostaneme

```
a =     1     0     1
b =     1     0    -1
Phi =
     Inline function:
     Phi(x) = (1+x.^2)./(-1+x.^2)
```

a graf funkce Phi spolu s body interpolace viz. obrázek 22.



Obrázek 22

2) Nechť jsou dány hodnoty následující tabulkou

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
f_i	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{13}$

.

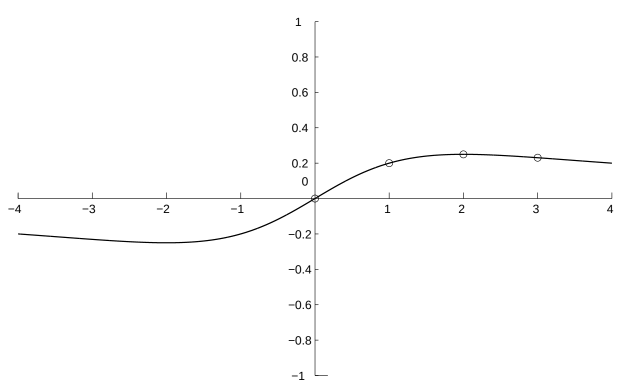
V příkazovém okně Matlabu zadáme:

```
xi=[0 1 2 3];
fi=[0 1/5 1/4 3/13];
[a,b,Phi]=nevill(xi,fi)
```

Stisknutím tlačítka Enter dostaneme

```
a =     1     0
b =     1     0     4
Phi =
     Inline function:
     Phi(x) = (x)./(x.^2+4)
```

a graf funkce Phi spolu s body interpolace viz. obrázek 23.



Obrázek 23

3) Nechť jsou dány hodnoty následující tabulkou

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-3	-2	$\frac{1}{2}$	2	3	4
f_i	$-\frac{9}{26}$	$-\frac{4}{7}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{16}{65}$

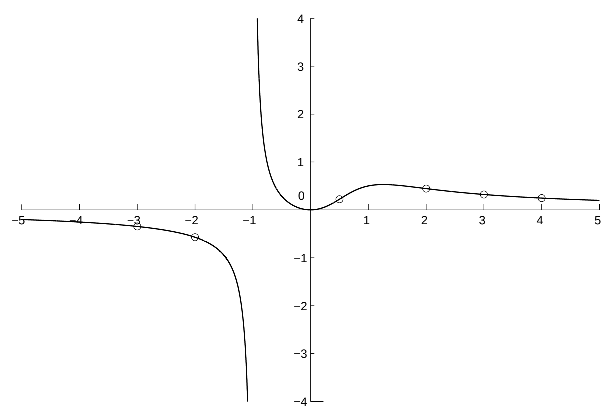
V příkazovém okně Matlabu zadáme:

```
xi=[-3 -2 1/2 2 3 4];

fi=[-9/26 -4/7 2/9 4/9 9/28 16/65];

[a,b,Phi]=nevill(xi,fi)
```

Stisknutím tlačítka Enter dostaneme

```
a =     1     0     0

b =     1     0     0     1

Phi =

     Inline function:

     Phi(x) = (x.^2)./(x.^3+1)
```

a graf funkce Phi spolu s body interpolace viz. obrázek 24.



Obrázek 24 ♢

3.3 Vhodná volba uzlů interpolace

V této kapitole blíže rozebereme případ, kdy máme dánu funkci $f(x)$ složitým explicitním vyjádřením a chceme ji interpolovat funkcí $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ s „jednodušším" explicitním vyjádřením. Abychom mohli interpolační funkci funkce $f(x)$ nalézt, je třeba zvolit uzly interpolace x_i a dopočítat funkční hodnoty funkce $f(x)$ v těchto bodech. Tím získáme hodnoty (x_i, f_i), které budeme interpolovat a poté získáme hledanou interpolační funkci.

Pro zjednodušení budeme v následujícím textu **asymptotickým bodem** nazývat bod, v němž má funkce $f(x)$ asymptotu bez směrnice.

Při volbě uzlů interpolace se zaměříme na to, aby graf výsledné interpolační funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ měl asymptoty přibližně ve stejných bodech jako funkce $f(x)$. V tomto případě předpokládáme, že známe tyto asymptotické body funkce $f(x)$. Zabývat se volbou uzlů, která by zaručila co nejmenší chybu interpolace, by bylo nad rámec této práce, neboť tuto chybu nelze tak jednoduše vyjádřit jako například v případě polynomiální interpolace.

Na následujícím příkladě si ukážeme, jak bude vypadat výsledná interpolační funkce $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ při různé volbě uzlů interpolace. V tomto příkladě je explicitní vyjádření funkce $f(x)$ ještě relativně „jednoduché". Ve skutečnosti může být explicitní vyjádření o hodně složitější.

Příklad 3.6. Mějme dánu funkci

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{sin\ x}.$$

Nechť jsou dány uzly interpolace:

a) $x_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_1 = -\frac{\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \frac{\pi}{2}$

b) $x_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_1 = -\frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{1}{5}, \quad x_3 = \frac{\pi}{3}$

c) $x_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_1 = -\frac{\pi}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{5}, \quad x_3 = \frac{1}{6}, \quad x_4 = \frac{1}{5}, \quad x_5 = \frac{\pi}{3}, \quad x_6 = \frac{\pi}{2}$

Dopočítejte k nim příslušné funkční hodnoty f_i. Poté pomocí m-souborů newton.m a nevill.m nalezněte koeficienty výsledných interpolačních funkcí získaných těmito metodami a porovnejte jejich grafy s grafem funkce $f(x)$.

Poznamenejme, že všechny uzly interpolace jsou voleny v intervalu $(-2, 2)$, neboť se zaměříme na interpolaci funkce $f(x)$ pouze na tomto intervalu.

V příkazovém okně Matlabu zadáme nejdříve funkci $f(x)$ takto

```
f=@(x) (2.*x.^2+1)./sin(x)
```

a) Zvolíme x_i a vypočteme k nim f_i napsáním

```
xi=[-pi/2 -pi/3 pi/4 pi/2];
fi=f(xi);
```

a1) Nejprve nalezneme koeficienty interpolační funkce metodou Newtonova typu, tj. m-souborem newton.m takto

```
[a,b]=newton(xi,fi)
```

a stisknutím tlačítka Enter dostaneme

```
a =
  1.0e+061 *
    1.2856    4.4405    0.3765
b =
  1.0e+061 *
    0.3806    1.1753
```

Výsledky interpretujeme tak, že např. číslo 1.0e+061 * 1.2856 $= 1.2856 * 10^{61}$. Na obrázku 25 je výsledná interpolační funkce získaná metodou Newtonova typu a čárkovaně vykreslena funkce $f(x)$.

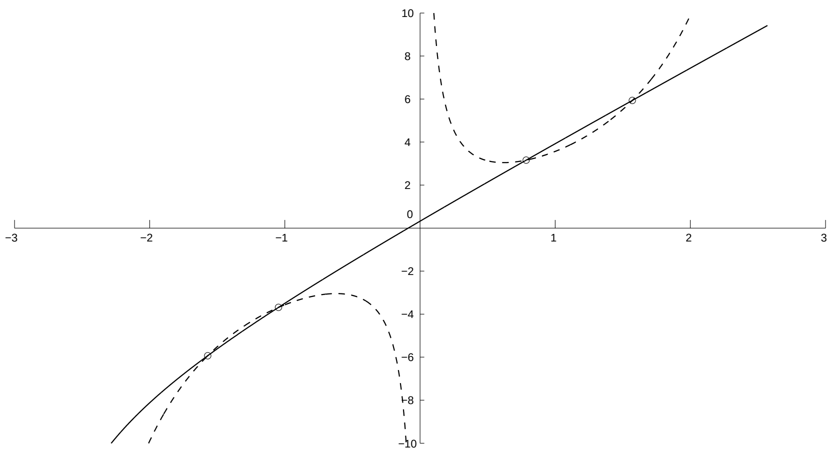
a2) Nyní nalezneme koeficienty interpolační funkce metodou Nevillova typu, tj. m-souborem nevill.m zadáním

```
[a,b]=nevill(xi,fi)
```

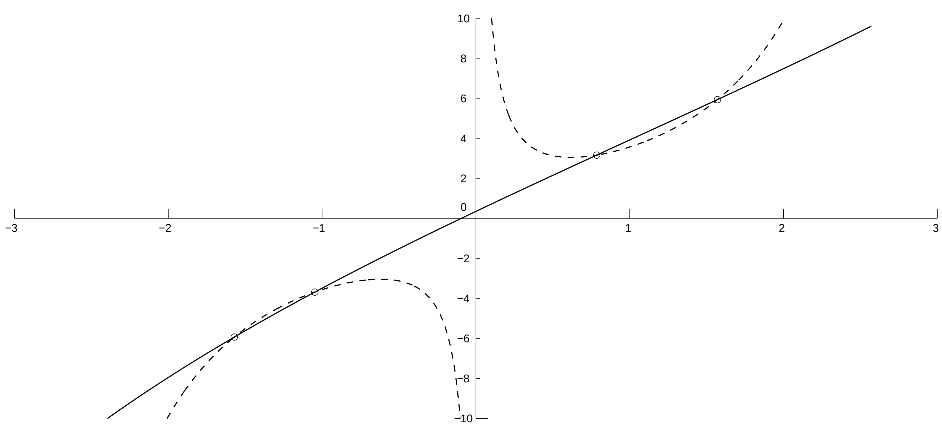
a stisknutím tlačítka Enter dostaneme

```
a =

  1.0e+048 *

   -1.0274   -0.0969

b =

  1.0e+047 *

    0.0326   -0.1039   -2.7995
```

Na obrázku 26 je výsledná interpolační funkce získaná metodou Nevillova typu a čárkovaně vykreslena funkce $f(x)$.



Obrázek 25



Obrázek 26

Z obrázků 25 a 26 je zřejmé, že pro tuto relativně náhodnou volbu uzlů nebyla ani jednou metodou nalezena interpolační funkce, která by měla asymptotu v bodě 0 stejně jako funkce $f(x)$.

b) Zvolíme x_i a vypočteme k nim f_i napsáním

```
xi=[-pi/2 -1/5 1/5 pi/3];
fi=f(xi);
```

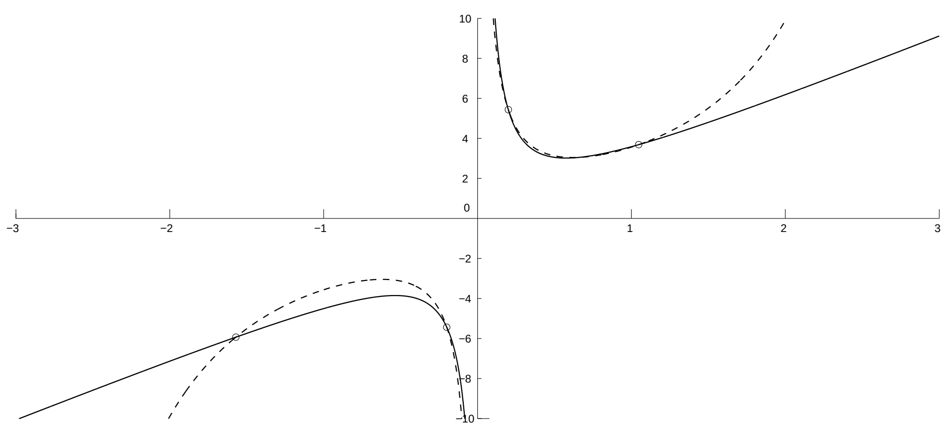
b1) Nalezneme koeficienty interpolační funkce metodou Newtonova typu zadáním

```
[a,b]=newton(xi,fi)
```

a stisknutím Enter získáme

```
a =
  1.0e+062 *
    2.5711   -0.4494    0.8014
b =
  1.0e+061 *
    8.3166   -0.1653
```

Na obrázku 27 je výsledná interpolační funkce získaná metodou Newtonova typu a čárkovaně vykreslena funkce $f(x)$.



Obrázek 27

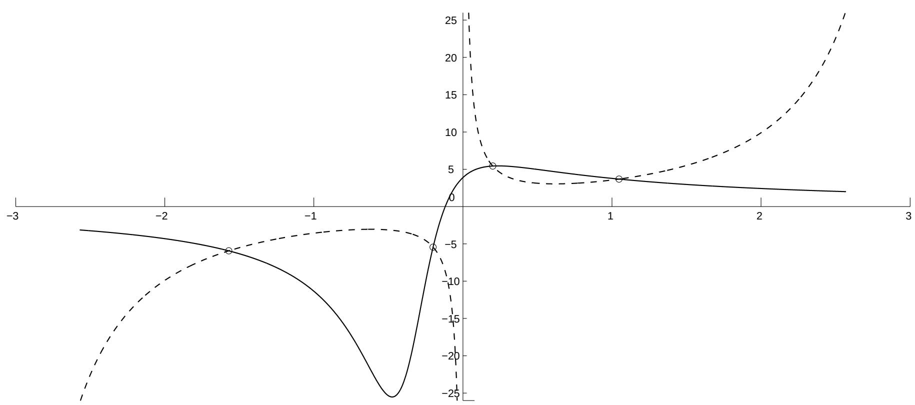
b2) Nalezneme koeficienty interpolační funkce metodou Nevillova typu zadáním

```
[a,b]=nevill(xi,fi)
```

a stisknutím Enter získáme

```
a =
  1.0e+050 *
    4.1925    0.4974
b =
  1.0e+049 *
    6.5514    4.5753    1.2804
```

Na obrázku 28 je výsledná interpolační funkce získaná metodou Newtonova typu a čárkovaně vykreslena funkce $f(x)$.



Obrázek 28

Z obrázků 27 a 28 je zřejmé, že pro tuto volbu uzlů metoda Nevillova typu (obr.28) opět „selhala", tj. ignoruje asymptotu v bodě 0. Naopak interpolační funkce získaná metodou Newtonova typu (obr.27) již má asymptotu přibližně v bodě 0 a na intervalu (0,1) je velmi „podobná" funkci $f(x)$.

V tomto případě byly uzly voleny tak, aby dva byly v blízkosti asymptotického bodu 0 a další dva potom ve větší vzdálenosti od něj. Je zřejmé, že metoda Newtonova typu na tuto změnu volby uzlů kladně zareagovala.

c) Zvolíme x_i a vypočteme k nim f_i napsáním

```
xi=[-pi/2 -pi/3 -1/5 1/6 1/5 pi/3 pi/2];
fi=f(xi);
```

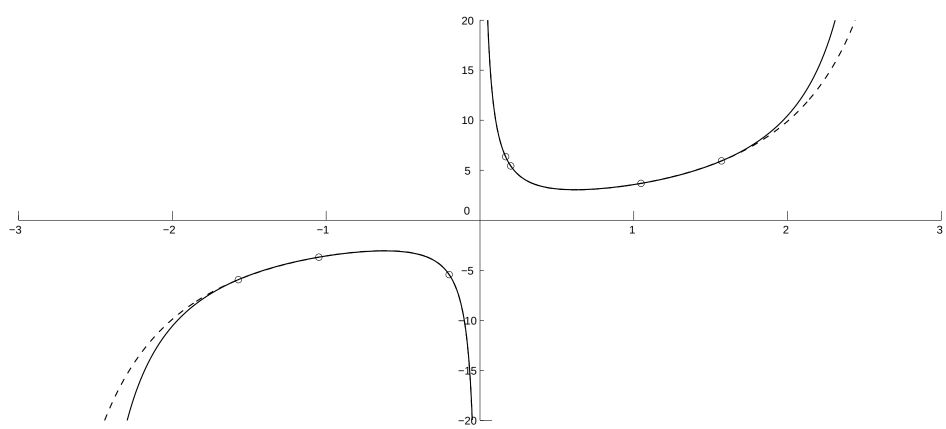
c1) Nalezneme koeficienty interpolační funkce metodou Newtonova typu zadáním

```
[a,b]=newton(xi,fi)
```

a stisknutím Enter získáme

```
a =
  1.0e+112 *
   -0.0847   -9.4019    0.0151   -4.5314
b =
  1.0e+112 *
    0.6341   -0.0213   -4.5391    0.0013
```

Na obrázku 29 je výsledná interpolační funkce získaná metodou Newtonova typu a čárkovaně vykreslena funkce $f(x)$.



Obrázek 29

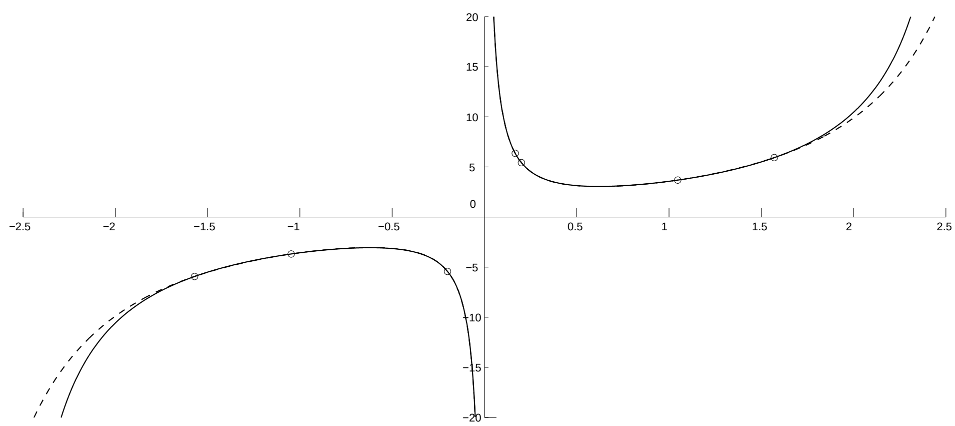
c2) Nalezneme koeficienty interpolační funkce metodou Nevillova typu zadáním

```
[a,b]=nevill(xi,fi)
```

a stisknutím Enter získáme

```
a =
  1.0e+070 *
   -0.0215   -2.3838    0.0038   -1.1489
b =
  1.0e+070 *
    0.1608   -0.0054   -1.1509    0.0003
```

Na obrázku 30 je výsledná interpolační funkce získaná metodou Newtonova typu a čárkovaně vykreslena funkce $f(x)$.



Obrázek 30

Obrázky 29 a 30 ukazují, že pomocí obou metod byly nalezeny interpolační funkce, jejichž grafy jsou velmi „podobné" grafu funkce $f(x)$. Tedy pro volbu uzlů, kdy byly tři uzly zvoleny blízko asymptotického bodu 0 a zbývající rovnoměrně ve větší vzdálenosti od něj, byly obě metody velmi úspěšné.

$\diamondsuit$

Shrnutí: V příkladě 3.6 byly různými způsoby voleny uzly interpolace. Nejméně se osvědčila náhodná volba uzlů a), kde nebyl zohledňován asymptotický bod 0. V tomto případě jsme oběma metodami získali interpolační funkce, které neměly asymptoty.

Při volbě uzlů interpolace blíže asymptotickému bodu viz. příklad 3.6 volba b), byly výsledky již lepší. Při volbě dvou uzlů relativně blízko asymptotickému bodu 0 měla interpolační funkce získaná metodou Newtonova typu již asymptotu přibližně v bodě 0. Metoda Nevillova typu nedodržela monotonii funkce $f(x)$ a opět neměla asymptotu.

Protože volba b) příkladu 3.6 v případě metody Nevillova typu „selhala", bylo při volbě c) zvoleno více uzlů relativně blízko asymptotickému bodu a byly přidány i další uzly pro větší přesnost interpolace. Toto se ukázalo jako dobré řešení. Při této volbě uzlů byly grafy interpolačních funkcí získaných oběma metodami velmi „podobné" grafu funkce $f(x)$.

Z tohoto rozboru plyne, že volba uzlů blízko asymptotických bodů funkce $f(x)$ je velmi důležitá, neboť ovlivňuje chování výsledných interpolačních funkcí v okolí těchto asymptotických bodů, tj. touto volbou je možné dosáhnout toho, aby výsledné interpolační funkce měly asymptoty přibližně nebo přesně v asymptotických bodech funkce $f(x)$. Je zřejmé, že v tomto případě předpokládáme, že asymptotické body funkce $f(x)$ známe.

Volba zbylých uzlů je ale také důležitá viz. obrázek 27. Na tomto obrázku je vidět rozdíl v chování získané interpolační funkce na intervalech (-2,0) a (0,2). Je jasně patrné, že volba uzlu $x_3 = \frac{\pi}{3}$ na intervalu (0,2) byla z hlediska podobnosti grafu funkce $f(x)$ a grafu výsledné interpolační funkce vhodnější než volba uzlu $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ na intervalu (-2,0).

3.4 Porovnání metody Newtonova a Nevillova typu

V předchozích podkapitolách jsme si uvedli dvě metody pro řešení nedegenerovaných úloh. Tyto metody jsou zcela odlišné ve způsobu výpočtu, ale také ve tvaru výsledné interpolační funkce. Každá z těchto metod volí hodnoty μ a ν jinak, viz. tabulka 3 a obrázek 19. Proto interpolační funkce zadaných hodnot získaná metodou Newtonova typu nemusí být stejná jako funkce získaná metodou Nevillova typu. Otázkou tedy je, jestli některá z těchto metod je „efektivnější" a jestli by tedy bylo vhodné tuto metodu při řešení úlohy racionální interpolace preferovat. Zaměříme se tedy na tvar výsledné interpolační funkce u obou metod. K tomuto porovnání využijeme již sestrojených m-souborů.

Nejprve se budeme zabývat případem, kdy máme zadány pouze hodnoty (x_i, f_i) pro $\forall i$. Následující příklady se budou zabývat porovnáním obou metod právě při tomto zadání úlohy.

Příklad 3.7. Mějme dány hodnoty (x_i, f_i) následující tabulkou

x_i	-2	-1	3	4
f_i	$-\frac{13}{2}$	-$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{7}$	5

Pomocí m-souborů newton. a nevill.m nalezněte koeficienty výsledných interpolačních funkcí získaných těmito metodami a porovnejte jejich grafy.

V příkazovém okně Matlabu zadáme hodnoty x_i a f_i takto

```
xi=[-2 -1 3 4];
fi=[-13/2 -2/3 16/7 5];
```

a) Nalezneme koeficienty interpolační funkce metodou Newtonova typu, tj.
m-souborem newton.m takto

```
[a,b]=newton(xi,fi)
```

a stisknutím tlačítka Enter dostaneme

```
a =

  1.0e+021 *

    0.5397   -0.6854   -1.1256

b =

  1.0e+020 *

    2.2058    0.7130
```

Na obrázku 31 je výsledná interpolační funkce získaná metodou Newtonova typu.

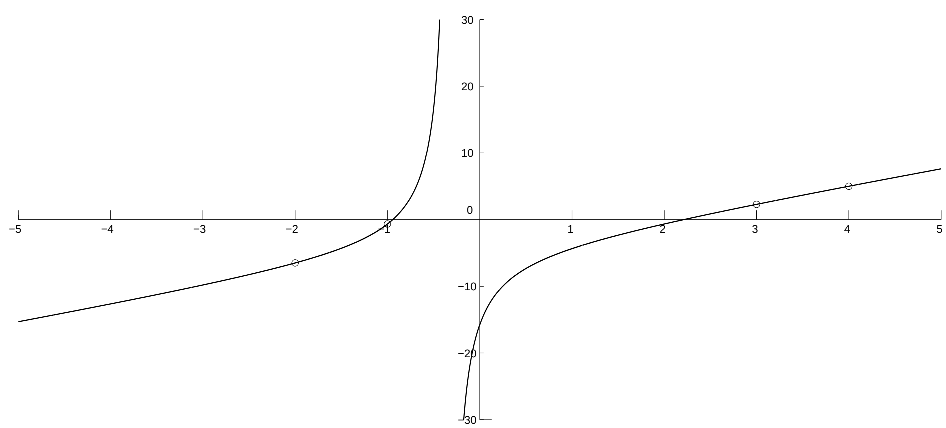
b) Nalezneme koeficienty interpolační funkce metodou Nevillova typu, tj. m-souborem nevill.m takto

```
[a,b]=nevill(xi,fi)
```

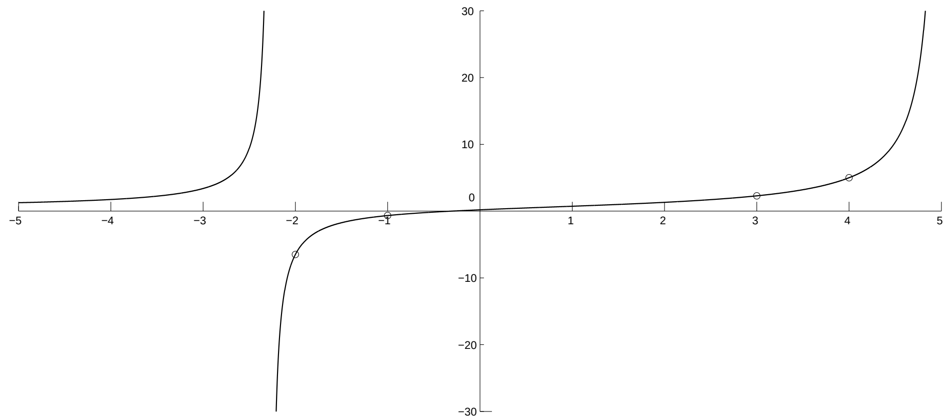
a stisknutím tlačítka Enter dostaneme

```
a =

      -53090       -16090

b =

        7267       -19839       -82606
```

Na obrázku 32 je výsledná interpolační funkce získaná metodou Newtonova typu.



Obrázek 31



Obrázek 32

Z obrázků 31 a 32 je jasně patrné, že grafy výsledných interpolačních funkcí získaných oběma metodami jsou různé a mají asymptoty v různých bodech. Je zde také patrný velký rozdíl v hodnotách získaných koeficientů. Metoda Nevillova typu dává koeficienty v podstatně nižších řádech než metoda Newtonova typu. $\diamondsuit$

V příkladu 3.7 byly dány pouze čtyři hodnoty (x_i, f_i). Podívejme se nyní na následující příklad, v které bude zadaných hodnot sedm.

Příklad 3.8. Mějme dány hodnoty (x_i, f_i) následující tabulkou

x_i	-6	-4	-3	0	$\frac{1}{2}$	2	5
f_i	-3	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	3	4	-7

Pomocí m-souborů newton. a nevill.m nalezněte koeficienty výsledných interpolačních funkcí získaných těmito metodami a porovnejte jejich grafy.

V příkazovém okně Matlabu zadáme hodnoty x_i a f_i takto

```
xi=[-6 -4 -3 0 1/2 2 5];

fi=[-3 -1 -3/2 -2 3 4 -7];
```

a) Nalezneme koeficienty interpolační funkce metodou Newtonova typu, tj. m-souborem newton.m takto

```
[a,b]=newton(xi,fi)
```

a stisknutím tlačítka Enter dostaneme

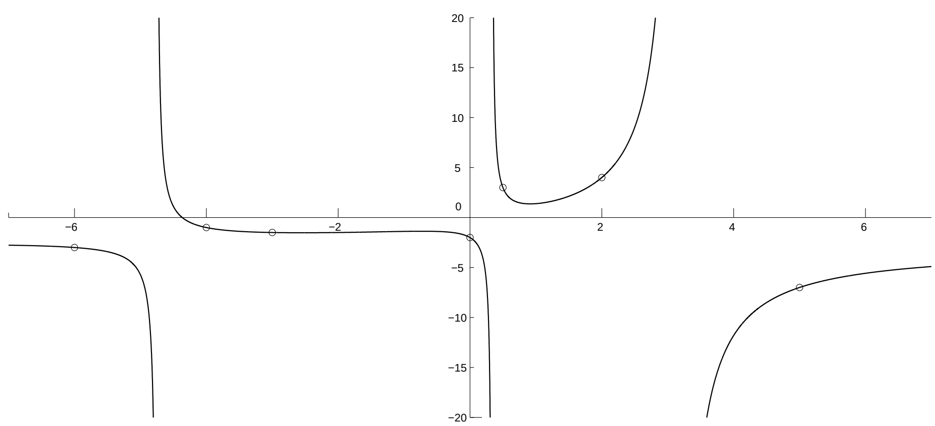
```
a =
  1.0e+034 *
   -1.2437   -4.1269    4.7559   -4.0295
b =
  1.0e+034 *
    0.4049    0.5163   -6.2813    2.0147
```

b) Nalezneme koeficienty interpolační funkce metodou Nevillova typu, tj. m-souborem nevill.m takto

```
[a,b]=nevill(xi,fi)
```

a stisknutím tlačítka Enter dostaneme

```
a =
    -1415667    -4697571     5413554    -4586688
b =
      460879      587663    -7149914     2293344
```



Obrázek 33

Na obrázku 33 jsou vykresleny výsledné interpolační funkce získané oběma metodami. Jejich grafy natolik splývají, že je od sebe na obrázku nerozeznáme, tj. grafy těchto funkcí jsou téměř totožné. Pokud porovnáme koeficienty získané oběma metodami, zjistíme, že metoda Newtonova typu opět dává koeficienty vyšších řádů než metoda Nevillova typu. Vzhledem k tomu, že obě interpolační funkce mají téměř stejné grafy a rozdíl v řádech koeficientů je velmi výrazný, jeví se použití metody Nevillova typu jako vhodnější. $\diamondsuit$

V příkladu 3.8 bylo dáno více hodnot (x_i, f_i) než v příkladu 3.7 a grafy získaných interpolačních funkcí byly téměř stejné. V dalších příkladech, které jsem řešila, byly grafy výsledných interpolačních funkcí získaných oběma metodami velmi podobné, pokud bylo dáno více hodnot (x_i, f_i), tj. například šest a více, ale přesný počet nelze jednoznačně určit. Dále byly koeficienty získané metodou Nevillova typu vždy podstatně nižší než u metody Newtonova typu.

Nyní se budeme zabývat případem, kdy známe explicitní vyjádření funkce $f(x)$ a uzly interpolace volíme. Opět porovnáme obě metody. K tomuto porovnání využijeme příkladu 3.6. Všimneme si volby c), kde byly uzly vhodně zvoleny tak, že interpolační funkce získané oběma metodami vhodně interpolovaly funkci $f(x)$, tj. obě měly asymptotu přibližně v bodě nula. Z obrázků 29 a 30 je zřejmé, že grafy obou získaných interpolačních funkcí si byly hodně podobné, ale jejich koeficienty se od sebe hodně lišily, tj. zatímco koeficienty získané metodou Nevillova typu byly přibližně v řádech 10^{70}, koeficienty získané metodou Newtonova typu byly v řádech 10^{112}. Toto je obrovský rozdíl vzhledem k tomu, že obě získané interpolační funkce měly velmi podobné grafy. Tedy při vhodné volbě uzlů je jistě vhodnější použít metodu Nevillova typu, neboť koeficienty interpolační funkce získané touto metodou jsou podstatně menší. K tomuto závěru jsem došla i při řešení dalších příkladů.

Shrnutí: Při „větším" počtu zadaných hodnot (x_i, f_i), pokud máme zadány pouze tyto hodnoty, a při vhodné volbě uzlů, pokud máme dáno explicitní vyjádření $f(x)$ a známe asymptotické body funkce $f(x)$, je vhodnější použít metodu Nevillova typu, neboť interpolační funkce jí získaná má koeficienty podstatně nižších řádů než interpolační funkce získaná metodou Newtonova typu a přitom grafy obou těchto funkcí si jsou velmi podobné.

Pokud máme dáno „méně” hodnot (x_i, f_i) nebo uzly interpolace nelze vhodně zvolit, protože neznáme asymptoty funkce $f(x)$, nelze jednoznačně říci, která metoda je vhodnější. Řešením dalších příkladů bylo pouze zjištěno, že i v těchto případech dává metoda Nevillova typu koeficienty nižších nebo přibližně stejných řádů jako metoda Newtonova typu. To však neznamená, že zde bude interpolační funkce získaná metodou Nevillova typu vhodnějším řešením zadané úlohy interpolace z hlediska asymptotických bodů nebo chyby interpolace.

Nyní se zaměříme na porovnání obou metod z hlediska ručního výpočtu. V následujícím příkladě bude ukázáno, že ruční výpočet interpolační funkce metodou Nevillova typu je zdlouhavější a náročnější než metodou Newtonova typu. Je to dáno tím, že vzorec pro výpočet částečných interpolačních funkcí $T_{ik}(x)$ v algoritmu metody Nevillova typu je relativně složitý pro počítání ručně.

Příklad 3.9. Mějme dány hodnoty (x_i, f_i) následující tabulkou

i	0	1	2
x_i	-1	1	2
f_i	-2	2	$\frac{5}{2}$

.

Nalezněte interpolační funkci pro zadané hodnoty metodami Newtonova a Nevillova typu.

a) Nalezneme interpolační funkci metodou Newtonova typu. Nejdříve tedy vypočteme potřebné inverzní diference. Využijeme přitom výpočtů z příkladu 3.1, neboť zadané hodnoty (x_i, f_i) jsou téměř stejné, tj. dostáváme

$\varphi(x_0, x_1) = \frac{1}{2}, \quad \varphi(x_0, x_2) = \frac{2}{3}, \quad \varphi(x_0, x_1, x_2) = 6.$

Nyní dosadíme získané hodnoty do vzorce (20) pro výpočet interpolační funkce dle Newtonovy metody, tj. dostáváme

$$\Phi^{1,1}(x) = -2 + \frac{x+1}{\frac{1}{2} + \frac{x-1}{6}} = -2 + \frac{x+1}{\frac{x+2}{6}} = -2 + \frac{6x+6}{x+2} = \frac{4x+2}{x+2}.$$

b) Nalezneme interpolační funkci metodou Nevillova typu. Tedy provedeme výpočty částečných interpolačních funkcí $T_{ik}(x)$ dle nám známého algoritmu.

$$T_{11}(x) = 2 + \frac{2+2}{\frac{x+1}{x-1}\left(1 - \frac{2+2}{2-0}\right) - 1} = 2 + \frac{2x-2}{-x} = \frac{2x-2x+2}{x} = \frac{2}{x}$$

$$T_{21}(x) = \frac{5}{2} + \frac{\frac{5}{2}-2}{\frac{x-1}{x-2}\left(1 - \frac{\frac{5}{2}-2}{\frac{5}{2}}\right) - 1} = \frac{5}{2} + \frac{5(x-2)}{-2(x-6)} =$$

$$= \frac{-5x+30+5x-10}{-2(x-6)} = -\frac{10}{x-6}$$

$$T_{22}(x) = -\frac{10}{x-6} + \frac{-\frac{10}{x-6} - \frac{2}{x}}{\frac{x+1}{x-2}\left(1 - \frac{-\frac{10}{x-6}-\frac{2}{x}}{-\frac{10}{x-6}-2}\right) - 1} =$$

$$= -\frac{10}{x-6} + \frac{(4x-4)(x-2)}{(x+2)(x-6)} = \frac{4x^2-22x-12}{(x-6)(x+2)} = \frac{4x+2}{x+2}$$

Interpolační funkce je tedy tvaru $\Phi^{1,1}(x) = \frac{4x+2}{x+2}$, tj. má stejný tvar jako interpolační funkce získaná metodou Newtonova typu. Poznamenejme, že zápisy výpočtů částečných interpolačních funkcí $T_{ik}(x)$ byly výrazně zkráceny, tj. byly zde zapsány pouze určité mezikroky. $\diamondsuit$

V příkladu 3.9 bylo ukázáno, že výpočet částečných interpolačních funkcí $T_{ik}(x)$ v případě metody Nevillova typu je podstatně složitější než výpočet inverzních diferencí a dosazení do vzorce (20) při použití metody Newtonova typu. Následující příklad tuto hypotézu také potvrdí. Přidáme v něm hodnotu (x_3, f_3) a využijeme výpočtů z příkladu 3.9 k získání interpolační funkce. Zaměříme se tedy na případ, kdy již máme spočtenu interpolační funkci pro dané hodnoty a chceme další hodnotu přidat.

Příklad 3.10. Mějme dány hodnoty (x_i, f_i) následující tabulkou

i	0	1	2	3
x_i	-1	1	2	4
f_i	-2	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{4}$

Nalezněte interpolační funkci pro zadané hodnoty metodami Newtonova a Nevillova typu. Využijte přitom výpočtů z příkladu 3.9.

a) Nalezneme interpolační funkci metodou Newtonova typu. Nejdříve tedy dopočteme potřebné inverzní diference.

$$\varphi(x_0, x_3) = \tfrac{-1-4}{-2-\frac{17}{5}} = \tfrac{4}{5}$$
$$\varphi(x_0, x_1, x_3) = \tfrac{1-4}{\frac{1}{2}-\frac{4}{5}} = 10$$
$$\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \tfrac{2-4}{6-10} = \tfrac{1}{2}$$

Nyní dosadíme získané hodnoty do vzorce (20) pro výpočet interpolační funkce dle Newtonovy metody, tj. dostáváme

$$\Phi^{1,1}(x) = -2 + \frac{x+1}{\frac{1}{2} + \frac{x-1}{6+\frac{x-2}{\frac{1}{2}}}} = -2 + \frac{x+1}{\frac{1}{2} + \frac{x-1}{2(x+1)}} = -2 + \frac{(x+1)^2}{x} =$$

$$= \frac{-2x + x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{x^2+1}{x}.$$

b) Nalezneme interpolační funkci metodou Nevillova typu. Tedy provedeme výpočty zbylých částečných interpolačních funkcí $T_{ik}(x)$ dle nám známého algoritmu.

$$T_{31}(x) = \frac{17}{4} + \frac{\frac{17}{4} - \frac{5}{2}}{\frac{x-2}{x-4}\left(1 - \frac{\frac{17}{4}-\frac{5}{2}}{\frac{17}{4}}\right) - 1} = \frac{17}{4} + \frac{119(x-4)}{4(-7x+48)} =$$

$$= \frac{-119x + 816 + 119x - 476}{4(-7x+48)} = -\frac{85}{7x-48}$$

$$T_{32}(x) = -\frac{85}{7x-48} + \frac{-\frac{85}{7x-48} + \frac{10}{x-6}}{\frac{x-1}{x-4}\left(1 - \frac{-\frac{85}{7x-48}+\frac{10}{x-6}}{-\frac{85}{7x-48}-\frac{5}{2}}\right) - 1} =$$

$$= -\frac{85}{7x-48} + \frac{\frac{-15x+30}{(7x-48)(x-6)}}{\frac{x-1}{x-4}(1 - \frac{6x-12}{(x-6)(7x-14)}) - 1} =$$

$$= -\frac{85}{7x-48} - \frac{(x-4)(7x-14)}{(7x-48)(x-8)} = \frac{-x-13}{x-8}$$

$$T_{33}(x) = \frac{-x-13}{x-8} + \frac{\frac{-x-13}{x-8} - \frac{4x+2}{x+2}}{\frac{x+1}{x-4}\left(1 - \frac{\frac{-x-13}{x-8}-\frac{4x+2}{x+2}}{\frac{-x-13}{x-8}+\frac{10}{x-6}}\right) - 1} = \frac{-14x-12}{x^2-6x-8}$$

Interpolační funkce je tedy tvaru $\Phi^{1,2}(x) = \frac{-14x-12}{x^2-6x-8}$. Opět byly zápisy výpočtů částečných interpolačních funkcí $T_{ik}(x)$ výrazně zkráceny. Například u výpočtu funkce $T_{33}(x)$ jsem uvedla pouze výsledek, neboť zápis výpočtu by byl příliš dlouhý a není pro nás až tak důležitý. $\diamondsuit$

V příkladu 3.10 bylo ukázáno, že pokud přidáme další hodnotu (x_i, f_i) k hodnotám, pro které byla již interpolační funkce získána určitou metodou, nemusíme počítat znovu od začátku, ale můžeme využít již získaných výpočtů. Toto platí pro obě metody. V případě metody Newtonova typu dopočítáme potřebné inverzní diference a dosadíme do vzorce (20), tj. tento výpočet již musíme provést celý znovu. U metody Nevillova typu pouze dopočítáme chybějící částečné interpolační funkce a tím získáme výslednou interpolační funkci. Ovšem tento výpočet je složitější než opětovný výpočet ze vzorce (20) při použití metody Newtonova typu.

Uvažujme dále případ, kdy nepotřebujeme znát předpis interpolační funkce, ale chceme pouze spočítat její funkční hodnotu v bodě různém od uzlu. Postup výpočtu si ukážeme v následujícím příkladu 3.11. Všimneme si, že v tomto příkladu jsou zadány stejné hodnoty (x_i, f_i) jako v příkladu 3.9, kde interpolační funkce získané oběma metodami byly stejné. Měla by nám tudíž vyjít stejná funkční hodnota v zadaném bodě různém od uzlu. Obecně toto však neplatí, protože interpolační funkce získané oběma metodami mohou být různé. Pro porovnání obou metod je ale tato volba vhodná. Ukáže se, že výpočet provedený metodou Newtonova typu je výrazně kratší a jednodušší než výpočet pomocí metody Nevillova typu.

Příklad 3.11. Mějme dány hodnoty (x_i, f_i) následující tabulkou

i	0	1	2
x_i	-1	1	2
f_i	-2	2	$\frac{5}{2}$

Vypočtěte hodnotu interpolační funkce v bodě $x = 3$, je-li tato funkce dána předchozí tabulkou.

a) K výpočtu použijeme metodu Newtonova typu. Při dosazování do vzorce (20) využijeme již spočtených inverzních diferencí z příkladu 3.9. Postupujeme stejně jako při výpočtu interpolační funkce s tím rozdílem, že dosadíme $x = 3$, tj.

$$\Phi^{1,1}(3) = -2 + \frac{3+1}{\frac{1}{2} + \frac{3-1}{6}} = -2 + \frac{4}{\frac{3+2}{6}} = \frac{-10+24}{5} = \frac{14}{5}.$$

Získáváme tedy výsledek $\Phi^{1,1}(3) = \frac{14}{5}$.

b) K výpočtu použijeme metodu Nevillova typu. Postupujeme obdobně jako v předchozím případě, tj. jako bychom chtěli získat interpolační funkce, ale dosadíme $x = 3$.

$$T_{11}(3) = 2 + \frac{2+2}{\frac{3+1}{3-1}\left(1-\frac{2+2}{2}\right)-1} = 2 + \frac{4}{-2-1} = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$T_{21}(3) = \frac{5}{2} + \frac{\frac{5}{2}-2}{\frac{3-1}{3-2}\left(1-\frac{\frac{5}{2}-2}{\frac{5}{2}}\right)-1} = \frac{5}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2\left(1-\frac{1}{5}\right)-1} = \frac{5}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{10-2-5}{5}} = \frac{5}{2} + \frac{5}{6} = \frac{10}{3}$$

$$T_{22}(3) = \frac{10}{3} + \frac{\frac{10}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{3+1}{3-2}\left(1-\frac{\frac{10}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{10}{3}-2}\right)-1} = \frac{10}{3} + \frac{\frac{8}{3}}{4\left(1-\frac{8}{4}\right)-1} = \frac{10}{3} - \frac{8}{15} = \frac{42}{15} = \frac{14}{5}$$

Získáváme tedy výsledek $\Phi^{1,1}(3) = T_{22}(3) = \frac{14}{5}$. $\diamondsuit$

Shrnutí: Pro ruční výpočet interpolační funkce se více hodí metoda Newtonova typu a to i v případě, že pouze chceme přidat další hodnotu (x_i, f_i). Je to způsobeno relativně složitým vzorcem pro výpočet částečných interpolačních funkcí v metodě Nevillova typu. Použití metody Newtonova typu je vhodnější i v případě, že nás nezajímá tvar výsledné interpolační funkce, ale chceme pouze znát její funkční hodnotu v bodě různém od x_i pro $\forall i$. Toto platí opět ze stejného důvodu, tj. složitost vzorce v metodě Nevillova typu.

Závěr

Cílem této práce bylo nastudovat úlohu interpolace racionálními funkcemi a její řešení, dále pak sestavit vlastní programy v Matlabu a doplnit text vlastními příklady. Dle mého názoru bylo tohoto cíle dosaženo. Byla definována úloha racionální interpolace a byly prezentovány i různé způsoby jejího řešení. Tyto metody řešení byly doplněny o mé vlastní příklady nejprve ručně řešené a poté byly přidány také m-soubory vytvořené v Matlabu. Vyskytl se zde problém v podobě nepřípustných bodů. To jsou body, které při řešení úlohy racionální interpolace jsou vynechány a výsledná interpolační racionální funkce získaná výpočtem jimi neprochází. Proto jsem při zkoumání metod Newtonova a Nevillova typu předpokládala, že v zadání úlohy nejsou nepřípustné body obsaženy, tj. úloha racionální interpolace je nedegenerovaná. Učinila jsem tak proto, neboť zabývat se tématem volby uzlů, která by zamezila tomu, aby v zadání byly obsaženy nepřípustné body, by bylo velmi složité. Navíc při testování metod bylo zjištěno viz. podkapitola o vhodné volbě uzlů a také další příklady ručně i softwarem řešené, že situace, při které je v zadání obsažen nepřípustný bod resp. nepřípustné body, nastává velmi zřídka.

Při psaní této práce jsem získala spoustu nových znalostí a zkušeností. Naučila jsem se, jak je definovaná úloha racionální interpolace a jak tuto úlohu řešit různými metodami. Tyto metody jsem mezi sebou v rámci možností i částečně porovnala. Zabývala jsem se i vhodnou volbou uzlů interpolace, což byla velmi zajímavá zkušenost. Také jsem se zlepšila v práci s matematickým softwarem Matlab a typografickým softwarem TEX.

Literatura

[1] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky*, Prometheus, Praha, 1991.

[2] Přikryl, P., Brandner, M.: *Numerické metody 2*, Západočeská univerzita v Plzni, 2001.

[3] Stoer, J., Burlisch, R.: *Introduction to numerical analysis.* Springer-Verlag, New York, 1993.