Jihočeská universita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Pohled na elementární funkce z hlediska teorie iterací ve výuce matematiky na středních školách

Martina Amálie Malíková

28. dubna 2011

Anotace

Tato práce se zabývá především představením iteračních systémů a jejich možným začleněním do výuky na středních školách. Rozšiřuje pohled na elementární funkce a hloubku jejich pochopení studenty. K této látce jsou zde připraveny pracovní listy a návrhy motivace pro usnadnění vstupu do problematiky.

Anotation

This thesis deals mainly with introduction to iterations and with implementation possibilities to high-school education. Extends the overview of elementary functions and depth of understanding by students. There are prepared working sheets and propositions of motivation to ease making sense of this area of mathematics.

Poděkování

Chtěla bych poděkovat své rodině a přátelům za podporu a RNDr. Heleně Binterové, Ph.D. za pomoc a trpělivost.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích dne 28. dubna 2011 ....

Obsah

1 Úvod

Matematika je velice zvláštní vědní obor. Někteří lidé, především studenti, ji považují za svůj oblíbený předmět. Ostatní, a těch je bohužel většina, ji nemají rádi a je pro ně naopak nepříjemná a obtěžující. Jak změnit tento stav a přiblížit matematiku studentům je otázka, jíž se zabývalo již mnoho pedagogů. Jednu z cest k jejímu řešení by mohlo nabídnout počítání s iteracemi.

V průběhu celého mého školního vzdělávání jsem zjistila, že zájem o výuku musí v žácích vzbuzovat hlavně vyučující. I sebenepříjemnější látku žáci pojímali snadno, pokud byla podána příjemným, čtivým nebo alespoň zábavným způsobem. S matematikou to nebylo nikdy jinak. Učitelův zájem a zápal často vzbuzoval podobné pocity u studentů.

Když jsem si ale mohla vyzkoušet, jak obtížné je tento zájem a zapálení vzbudit, rozhodla jsem se alespoň částečně pomoci a nabídnout alternativu. Většina učitelů nemá s iterační teorií zkušenosti. Iterace, fraktály a teorie chaosu, tři příbuzné obory matematiky, si však často získají pozornost i laiků. Materiálů k jejich prozkoumání však není mnoho a ani povědomí o jejich existenci není příliš rozšířené.

Proto jsem se rozhodla pro diplomovou práci na toto téma. Jejím cílem bude představit méně známý a neobvyklý obor, který však může být poutavý a zajímavý. Nastínit některé cvičné příklady, které by učitelé svým žákům mohli nabídnout a pomoci začlenit toto odvětví matematiky do výuky.

2 Elementární funkce

Nejprve si zopakujeme a sjednotíme jednotlivé pojmy, kterými se budu dále zabývat a jejichž upřesnění považuji za důležité. Nebude-li řečeno jinak, práce se týká pouze funkcí jedné proměnné a proto je budu označovat krátce „funkce“. Jako první si zadefinujeme pojem funkce a elementární funkce.

Funkce je jednoznačné zobrazení prvků z množiny M_1 do množiny prvků (čísel, vektorů..) M_2. Jeho základní vlastností je, že každému $x \in M_1$ přiřadí právě jeden prvek $y \in M_2$.

Definice 2.0.1. Reálná funkce f jedné reálné proměnné na množině $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ je zobrazení z množiny $D(f)$ do množiny $\mathbb{R}$. Množina $D(f)$ se nazývá *definiční obor funkce*. Množina všech hodnot, kterých funkce f na svém definičním oboru $D(f)$ nabývá, se nazývá *obor hodnot* funkce f a značí se $H(f)$. Je tedy

$$H(f) := \{f(x); x \in D(f)\}.$$

Tato definice funkce nám bude zcela stačit. Funkcemi jinými než reálnými nebo funkcemi více proměnných se zde nebudeme vůbec zabývat, proto od jejich definice upouštím.

Funkce označujeme zpravidla (malými i velkými) písmeny latinské abecedy, nejčastěji ovšem užíváme písmeno f. Označení funkce je třeba důsledně odlišovat od označení *hodnoty funkce* v daném bodě; označení bodu píšeme do závorky za označení funkce, obecně např. $f(x)$. Konkrétně např. $f(4)$ znamená hodnotu funkce f pro $x = 4$; zápis má smysl pouze v případě, že $4 \in D(f)$. [10]

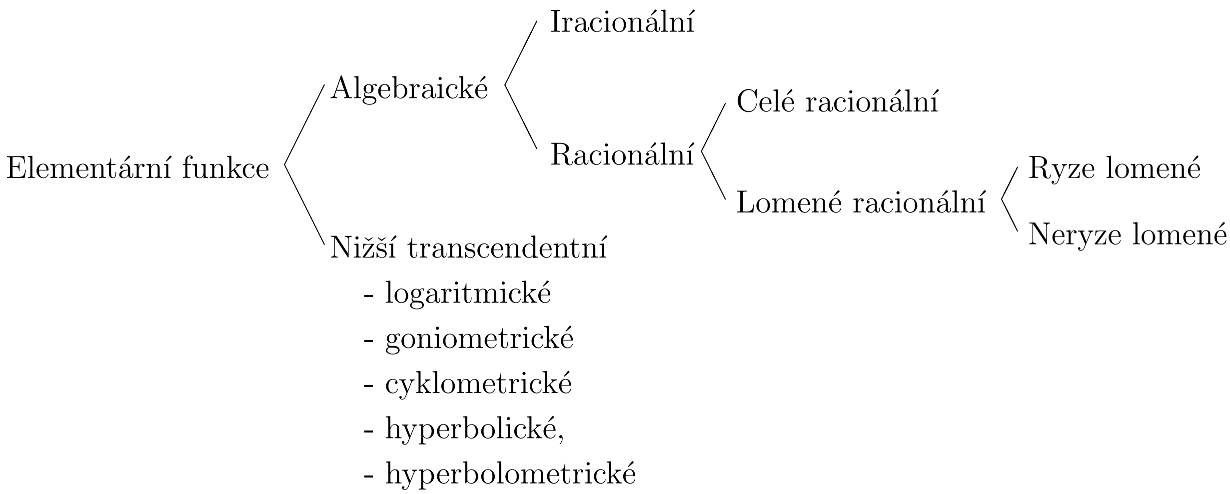
Dovolím si ještě zmínit definici funkce podle N. I. Lobačevského, která se pro funkci jedné nezávislé proměnné definuje:[4]

Definice 2.0.2. Je-li každému prvku x množiny M přiřazen určitý prvek y množiny N, říkáme, že je na množině M definována funkce a píšeme $y = f(x)$. Při tom se nazývají jednotlivé prvky x hodnotami argumentu a prvky y hodnotami funkce.

Funkce se dělí na elementární a vyšší transcendentní. Jako elementární funkce se označují funkce algebraické a nižší transcendentní a všechny takové funkce, které můžeme získat pomocí konečného počtu sčítání, odčítání, dělení a násobení těchto zmíněných funkcí.

Algebraické jsou obecné mocniny pro kladná a záporná k. Mezi nižší transcendentní patří exponenciální, logaritmické, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické funkce. Všechny ostatní funkce se označují jako vyšší transcendentní.

Rozdělení funkcí naznačuje obrázek (obr. 1), další podrobnosti najdete v kapitole Analytické vyjádření elementárních funkcí.



Obrázek 1: Rozdělení elementárních funkcí

Z historického hlediska se jako elementární funkce označují takové funkce, které byly popsány do konce 18. století.

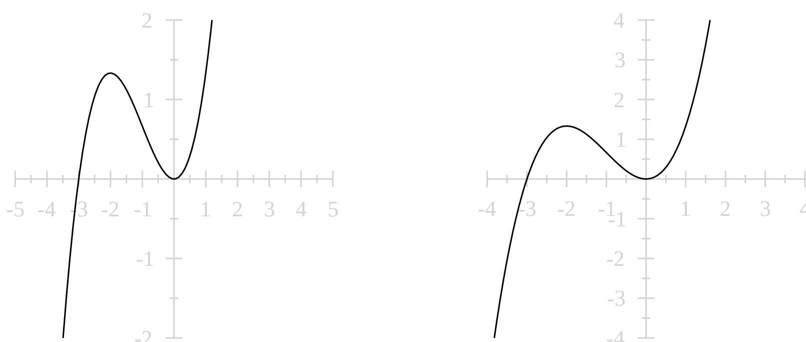
2.1 Vlastnosti funkcí

Abychom si mohli jednotlivé funkce určit, zopakujeme si některé základní definice jejich vlastností. Pro rozšíření a prohloubení tohoto tématu doporučuji [11] nebo [8].

2.1.1 Graf funkce

Graf funkce je s funkci spojen tak úzce, že často oba dva pojmy v naší mysli splývají. [2] Graf je způsob vyjádření funkcí obrazem.

Nejběžnější způsob je zachycení křivky funkce do soustavy dvou na sebe kolmých os označených měřítkem každé z nich. Tomu se říká soustava souřadná. Pokud je navíc zachován poměr měřítek obou os 1:1, hovoříme o kartézské soustavě souřadné.



Obrázek 2: Soustava souřadná (vlevo) a kartézská soustava souřadná pro stejnou funkci.

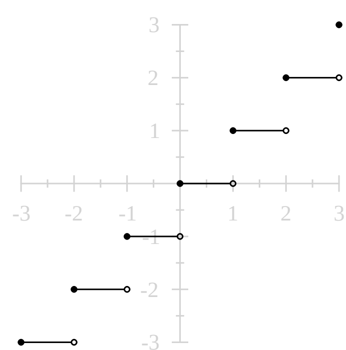
Vodorovnou osu obvykle značíme písmenem x, svislou y. Osa x nám representuje definiční obor funkce$D(f)$, osa y obor hodnot $H(f)$. Obě osy nám dělí plochu na 4 kvadranty, které se značí římskými písmeny. Číslování začíná v pravém horním rohu a pokračuje proti směru hodinových ručiček.

2.1.2 Spojitost

Definice 2.1.1. O funkci $f(x)$ řekneme, že je *spojitá* v bodě a, pokud ke každému libovolně malému číslu $\epsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna x, pro něž platí $|x - a| < \delta$, platí také $f(x) - f(a) < \epsilon$.

Definice 2.1.2. Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu I, jestliže je spojitá zprava ve všech bodech intervalu kromě koncového a zároveň spojitá zleva ve všech bodech intervalu kromě počátečního.

Spojitost bývá často nutnou podmínkou mnoha dalších definicí, například primitivní funkce, derivace a jiných. Zjednodušeně si můžeme spojitou funkci představit jako takovou, kterou jsme schopni nakreslit, aniž bychom museli zvednout tužku z papíru. Jako příklad jedné z nejjednodušších spojitých funkcí na $D(f)$ můžeme uvést $f(x) = x$. Příklad funkce, která není spojitá je funkce celá část $f(x) = [x]$ (obr. 3), která je nespojitá v každém celém čísle.



Obrázek 3: Graf funkce celá část

2.1.3 Monotonie funkcí

Definice 2.1.3. Funkce f je *rostoucí* na intervalu I, pokud $\forall x_1, x_2 \in I$ platí

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Definice 2.1.4. Funkce f je *klesající* na intervalu I, pokud $\forall x_1, x_2 \in I$ platí

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Definice 2.1.5. Funkce f je *nerostoucí* na intervalu I, pokud $\forall x_1, x_2 \in I$ platí

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

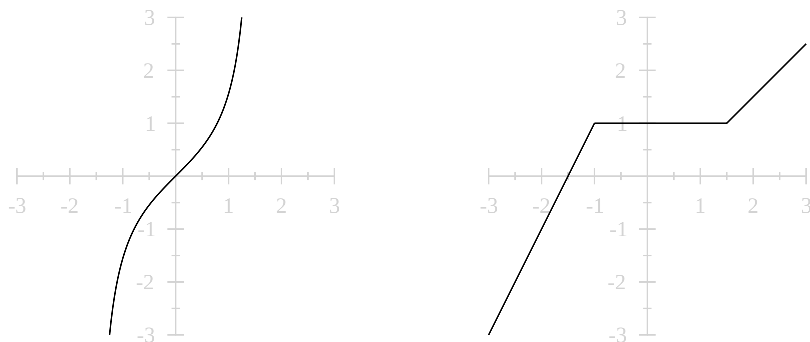
Definice 2.1.6. Funkce f je *neklesající* na intervalu I, pokud $\forall x_1, x_2 \in I$ platí

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

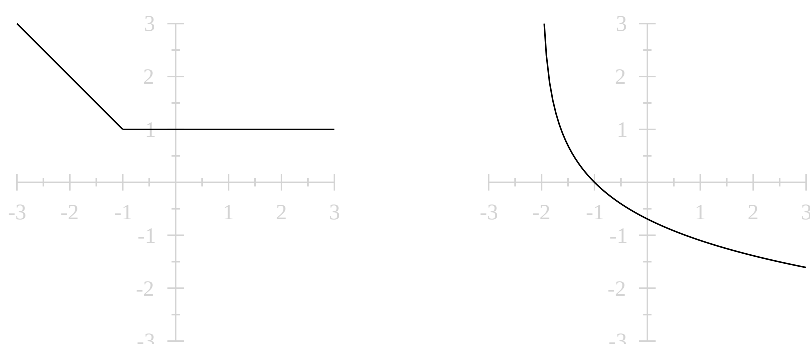
Definice 2.1.7. Funkce f se nazývá *monotónní* na I, pokud je neklesající nebo nerostoucí.

Definice 2.1.8. Funkce f se nazývá *ryze monotónní* na I, pokud je pouze klesající nebo pouze rostoucí.

Snadno můžeme interval I rozšířit na celý definiční obor, pak budeme hovořit o funkci monotónní v celém $D(f)$. Monotonii funkce poznáme nejsnáze z grafu funkce. Na (obr. 4) můžete porovnat rostoucí (vlevo) a neklesající funkci. Na (obr. 5) nerostoucí a klesající.



Obrázek 4: Graf rostoucí a neklesající funkce



Obrázek 5: Graf nerostoucí a klesající funkce

2.1.4 Prostá funkce

Definice 2.1.9. Funkci f nazveme *prostou*, pokud platí

$$\forall x_1, x_2 \in D(f); x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Věta 2.1.1. Nechť je funkce f ve svém D(f) ryze monotónní, pak je prostá.

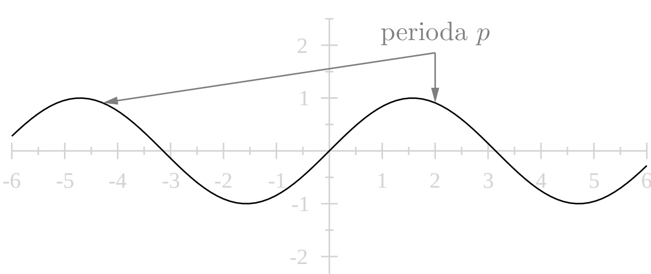
Důkaz: Předpokládejme, že funkce je rostoucí. Vybereme-li x_1, x_2 z $D(f)$ tak, aby splňovaly $x_1 \neq x_2$, znamená to pro nás, že buď $x_1 < x_2$ nebo $x_1 > x_2$. V prvním případě je podle definice 2.1.3 $f(x_1) < f(x_2)$. Ve druhém $f(x_1) > f(x_2)$. Z uvedeného nám plyne, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2.1.5 Periodická funkce

Definice 2.1.10. Funkce f se nazývá *periodická* s periodou $p \in \mathbb{R}^+$, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí

$$(x \pm p) \in D(f) \wedge f(x \pm p) = f(x).$$

Příkladem takové funkce je $y = sin(x)$ s periodou $p = 2\pi$ na (obr. 6).



Obrázek 6: Graf funkce sinus

2.1.6 Omezená funkce, minimum a maximum

Definice 2.1.11. Mějme interval $I \subseteq D(f)$. Funkce f je *omezená shora* na intervalu I, pokud existuje $j \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in I$ platí

$$f(x) \leq j.$$

Definice 2.1.12. Mějme interval $I \subseteq D(f)$. Funkce f je *omezená zdola* na intervalu I, pokud existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in I$ platí

$$f(x) \geq k.$$

Definice 2.1.13. Říkáme, že funkce f je *omezená* na intervalu I, pokud je omezená shora i zdola. To znamená, že existuje $l \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in I$ platí

$$|f(x)| < l.$$

Stejně jako u monotonie, můžeme i zde rozšířit interval I na celý definiční obor. Pak budeme hovořit o funkci omezené shora a nebo zdola na celém definičním oboru.

Definice 2.1.14. Nechť interval $I \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce nabývá v bodě $m \in I$ *maxima*, pokud pro všechna $x \in I$ platí

$$f(x) \leq f(m).$$

Definice 2.1.15. Nechť interval $I \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce nabývá v bodě $i \in I$ *minima*, pokud pro všechna $x \in I$ platí

$$f(x) \geq f(i).$$

2.1.7 Sudá a lichá funkce

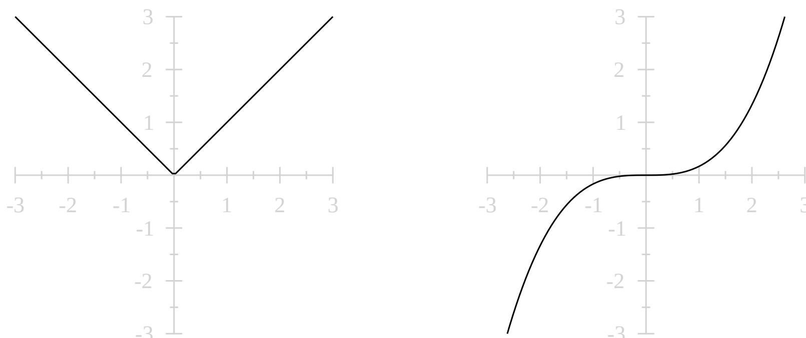
Definice 2.1.16. Funkci f nazveme *sudá*, pokud pro všechna $x \in D(f)$ platí:

$$-x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x).$$

Definice 2.1.17. Funkci f nazveme *lichá*, pokud pro všechna $x \in D(f)$ platí:

$$-x \in D(f) \wedge f(-x) = -f(x).$$

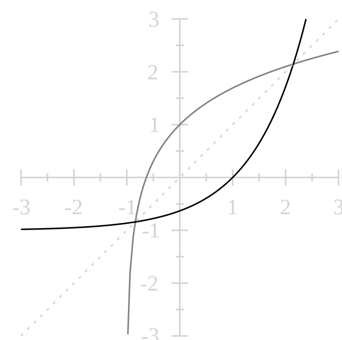
Graf sudé funkce je souměrný podle osy y (obr. 7) vlevo, graf liché funkce je souměrný podle počátku (obr. 7) vpravo.



Obrázek 7: Sudá a lichá funkce

2.1.8 Inverzní funkce

Definice 2.1.18. Nechť funkce $y = f(x)$ je prostá na definičním oboru $D(f)$ s oborem hodnot $H(f)$. Funkci $x = g(y)$ nazveme *inverzní funkcí* k funkci f jestliže platí $D(g) = H(f)$, $H(g) = D(f)$ a $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$. Značíme ji[1] $f_{-1}(x)$.



Obrázek 8: Znázornění inverzní funkce.

Věta 2.1.2. Je-li $f(x)$ rostoucí (klesající), je i $f_{-1}(x)$ rostoucí (klesající).

Důkaz pro funkci rostoucí:

Zvolíme libovolně $x_1, x_2 \in M_f, x_1 < x_2$. Potom existují $y_1, y_2 \in M$ tak, že $x_1 = f(y_1)$, $x_2 = f(y_2)$, $f(y_1) < f(y_2)$. Dále platí $y_1 = f_{-1}(x_1)$, $y_2 = f_{-1}(x_2)$. Je-li f rostoucí v M, pak $y_1 < y_2$ (kdyby platilo $y_1 \geq y_2$, platilo by také $f(y_1) \geq f(y_2)$ a to by byl spor). Tedy f_{-1} je rostoucí v M_f. Obdobně je-li f klesající v M, je $y_1 > y_2$ (případ $y_1 \leq y_2$ vede opět ke sporu), a tedy f_{-1} je klesající v M_f.

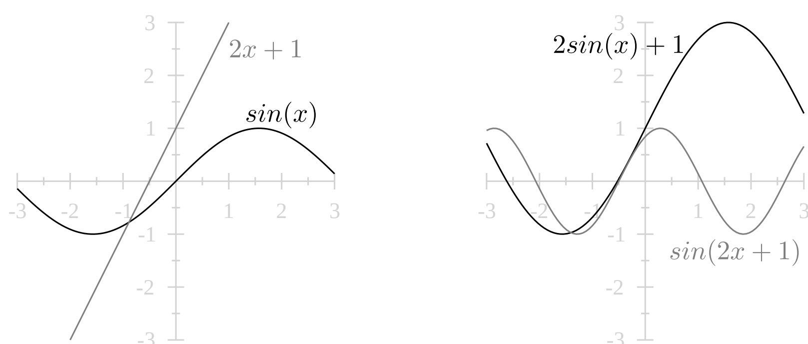
[1] V některé literatuře je inverzní funkce značena $f^{-1}(x)$, ale protože se tento symbol užívá pro převrácenou hodnotu, budeme pro značení inverzní funkce používat spodní index.

2.1.9 Funkce složená

Definice 2.1.19. Nechť máme funkce $z = f(x)$, s definičním oborem $D(f)$ a oborem hodnot$H(f)$, a $y = g(z)$, s definičním oborem $D(g)$ a oborem hodnot $H(g)$. Funkci $y = h(x) = g(f(x))$ nazveme funkcí *složenou*.

Skládání funkcí není komutativní. To znamená, že záleží na pořadí. Uvedeme si pro demonstraci příklad dvou jednoduchých funkcí $f(x) = 2x$ a $g(y) = y + 1$. Pokud zvolíme $y = f(x)$ a dosadíme do funkce $g(y)$, dostaneme novou funkci, kterou nazveme například $k(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = 2x + 1$. Pokud funkce vyměníme a vložíme za $x = g(y)$, dostaneme funkci $l(y) = f(g(y)) = 2g(y) = 2(y + 1) = 2y + 2$.

Složenou funkci můžeme zapsat také jako $h(x) = f(g(x)) = (g \circ f)(x)$, zkráceně pak $h = g \circ f$. Složíme-li dvě stejné funkce f(x), výsledek zapíšeme jako $h(x) = f^2(x)$. Skládat funkce můžeme i opakovaně. Při skládání jedné funkce víckrát se nám pouze zvyšuje stupeň.



Obrázek 9: Dvě původní funkce a dvě funkce z nich složené.

2.2 Analytické vyjádření elementárních funkcí

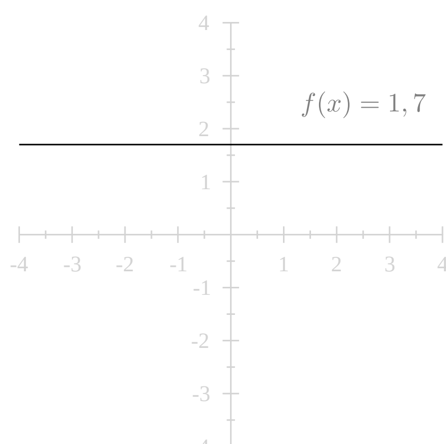
Pomocí vlastností, které jsme nyní zavedli, popíšeme jednotlivé nejzákladnější funkce. Nejdůležitější na této kapitole je pečlivé a podrobné prozkoumání vlivu jednotlivých parametrů funkcí na jejich vlastnosti a grafické znázornění. Budeme se zabývat jen těmi nejzákladnějšími funkcemi.

Algebraickou funkcí se rozumí taková funkce, již lze vytvořit z konstant a z proměnné x konečným počtem algebraických operací (tj. sčítáním, odčítáním, násobením, dělením a umocňováním racionálním exponentem). Každá jiná funkce se nazývá *transcendentní* . [5]

2.2.1 Konstantní funkce

Konstantní funkce má v celém $D(f)$ stejnou (konstantní) hodnotu. Předpis takové funkce je $f(x) = a$, kde a je parametr.

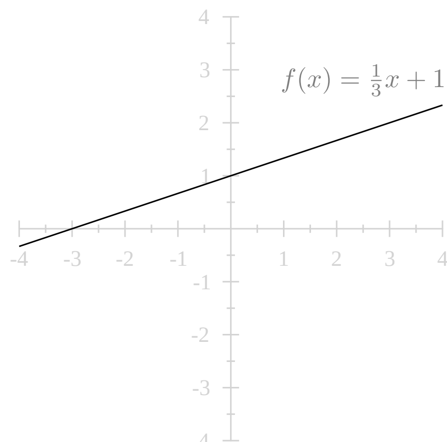
Grafem funkce je přímka rovnoběžná s osou x. $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = a$. Funkce je omezená shora i zdola, není rostoucí ani klesající a je spojitá ve všech bodech $D(f)$.



Obrázek 10: Graf konstantní funkce pro parametr $a = 1,7$

2.2.2 Lineární funkce

Lineární funkce je předpis závislosti přímé úměry. Je to taková funkce, jejíž hodnota v celém $D(f)$ rovnoměrně stoupá nebo klesá. Grafem této funkce je přímka různoběžná s osou x. $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}$. Funkce není omezená shora ani zdola a není periodická. Pro $b = 0$ je lichá. Prostá, pro $a > 0$ rostoucí, pro $a < 0$ klesající. Funkce je spojitá ve všech bodech $D(f)$.



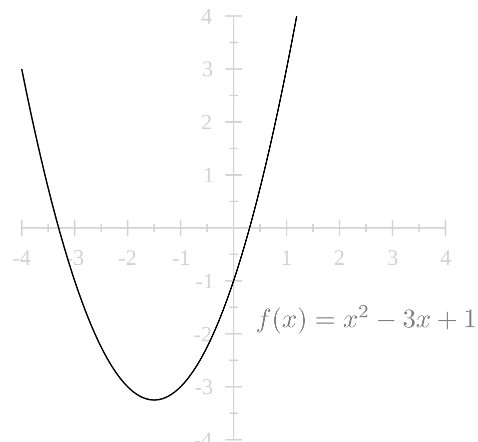
Obrázek 11: Graf lineární funkce

Funkční předpis je $f(x) = ax + b$, kde x je proměnná a a, b jsou parametry. Parametr a určuje úhel, který svírá přímka grafu s osou x. Platí, že pro $a > 0$ je graf funkce rostoucí, pro $a < 0$ klesající. Pro $a = 0$ je funkce konstantní.

Parametr b posouvá průsečík s osou y. Pro $b > 0$ se posune vlevo, pro $b < 0$ vpravo. Je-li $b = 0$, pak funkce prochází počátkem a je lichá.

2.2.3 Kvadratická funkce

Kvadratická funkce zobrazuje druhou mocninu proměnné x. Grafem této funkce je parabola s vrcholem V. $D(f) = \mathbb{R}$. Funkce není periodická a je spojitá ve všech bodech $D(f)$.



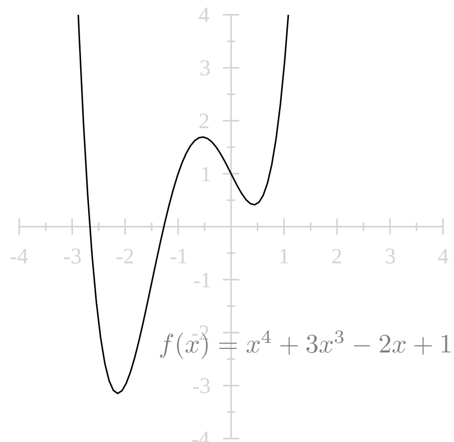
Obrázek 12: Graf kvadratické funkce

Funkční předpis kvadratické funkce je $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde x je proměnná a a, b, c jsou parametry. Je-li parametr $a > 0$, pak je parabola omezená zdola, je-li $a < 0$, pak ze shora. Vzdálenost tohoto parametru od nuly nám mění, jak „úzký“ graf bude. Čím je $|a|$ vyšší, tím strmější jsou ramena paraboly.

Pokud je parametr $b = 0$, pak funkci nazveme ryze kvadratickou. Ryze kvadratická funkce je také sudá.

2.2.4 Polynomy

Polynom je každá funkce ve tvaru $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ pro $n \in \mathbb{N}$, kde x je proměnná a $a_0, ..., a_n$ jsou parametry. Platí, že $a_n \neq 0$. Takový polynom nazveme polynomem n-tého stupně. Mezi polynomy tudíž patří všechny dosud zmíněné funkce. Funkce konstantní má stupeň 0, lineární 1, kvadratická 2, kubická 3, atd.



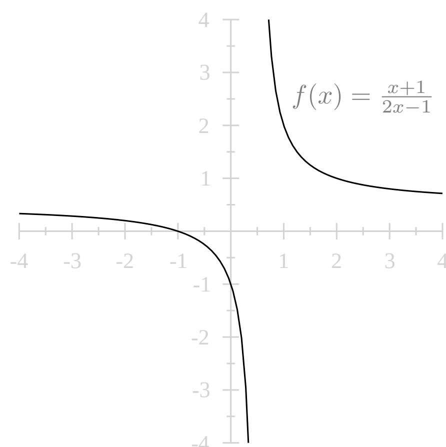
Obrázek 13: Graf polynomické funkce čtvrtého stupně

Kořenem mnohočlenu $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ nazýváme takové číslo α, pro nějž platí $P(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^{n-i}$

Věta 2.2.1. (základní věta algebry) Každý mnohočlen stupně $n \geqq 1$ má aspoň jeden kořen.

2.2.5 Lineární lomená funkce

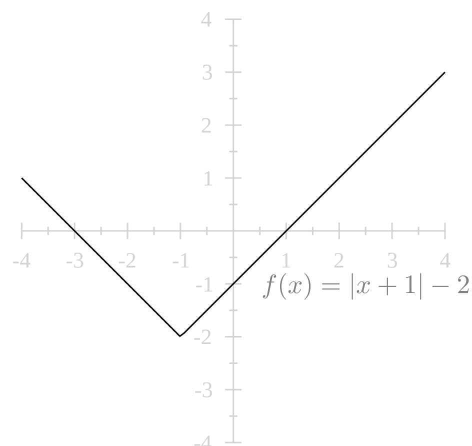
Lineární lomená funkce je funkce zapsaná ve tvaru $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, kde parametry $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a $c \neq 0$. Grafem této funkce je hyperbola se středem v bodě $[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}]$. Asymptoty hyperboly jsou rovnoběžné s osami x a y a procházejí jejím středem. Definiční obor hyperboly je $D(f) = \mathbb{R} - \frac{-d}{c}$, oborem hodnot $H(f) = \mathbb{R} - \frac{a}{c}$.



Obrázek 14: Graf lineární lomené funkce $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$

2.2.6 Funkce s absolutní hodnotou

Absolutní hodnota určuje vzdálenost bodu od počátku. Jako funkce s absolutní hodnotou označujeme jakoukoliv funkci obsahující absolutní hodnotu. Lineární funkce s absolutní hodnotou mohou být ve tvaru $f(x) = |x + a| + b$. Parametr a posunuje graf funkce o hodnotu $-a$ po ose x. Parametr b posouvá graf o hodnotu b po ose y.



Obrázek 15: Graf lineární funkce s absolutní hodnotou $f(x) = |x + 1| - 2$

Protože v té části práce, která se zabývá iteracemi nebudu využívat složitější funkce s absolutní hodnotou, nebudu ani zde hlouběji rozvádět tuto problematiku.

2.3 Didaktika elementárních funkcí

Podle docenta Hejného [3] můžeme ve vývoji funkčního myšlení jednotlivce vyčlenit tři nejdůležitější etapy. Nejprve si dítě, na základě životních zkušeností, tvoří představu kvantitativních vazeb kauzálních jevů. Například posun páčky hlasitosti mění intenzitu zvuku televize, kohoutkem na vodovodu se reguluje proud vody, sešlápnutí plynového pedálu způsobuje zvýšení rychlosti auta.

V [12] se můžeme dočíst, že na vývoji tohoto stádia funkčního myšlení v obecnějším měřítku se podílí rodiče již v raném dětství například důsledností nebo dětskou literaturou, kde zlo nebo neposlušnost jsou zpravidla trestány.

Druhá etapa by se měla vyznačovat intuitivním využíváním získaných zkušeností na řešení některých problémů. U jednoduchých příkladů by měl být schopen najít zobecnění reálných situací. Modelový příklad je nastíněn v [3] na straně 73. Touto etapou prochází žák v průběhu studia na základní škole.

V poslední etapě na střední škole si student osvojuje systematickou práci s funkcemi. Seznámí se s elementárními funkcemi a jejich vlastnostmi, s pojmy jako je derivace, limita a integrál.

Podle bulharského autora Stolajara, citovaného v [8] můžeme formování pojmu funkce rozdělit dokonce do šesti období, začínajících s nástupem do školní docházky. První období neobsahuje žádné definice, ale mnoho příkladů, které poukazují na závislost jedné veličiny na druhé.

Na druhé úrovni se zkoumají funkce zadané pomocí tabulky hodnot, názorně představující závislosti, nebo konečným definičním oborem a pravidlem nalezení hodnot funkce.

I když se na druhé úrovni můžeme obejít bez zavedení proměnných, ale ve třetí úrovni se již objevuje jejich nutnost. Funkce se může zadat pomocí rovnice a její definiční obor je možné vyjádřit buď výčtem prvků nebo pomocí tabulky. Na čtvrté úrovni se rozšiřuje možnost zadání funkce pomocí několika rovnic na různých částech definičního oboru.

Pátá úroveň přechází ke studiu funkcí definovaných na nekonečných množinách a zdůrazní se rozdíl mezi způsobem zadání obou možností. Zároveň je zde nutné rozšířit představu o zadání funkce i o možnosti, kdy ji nelze vyjádřit pomocí algebry. Příkladem může být funkce signum.

Na šesté úrovni by žák měl být schopen nalézt aproximaci funkce na základě konečné množiny jí odpovídajících bodů.

2.3.1 Zavedení pojmu funkce

Podle doc. Hejného [3] existují dva způsoby zavedení funkcí. Prvním z nich je klasický způsob. Nejprve si studenti připomenou příklady funkčních závislostí zadaných různým způsobem, například tabulkou nebo grafem, které znají z dřívějška z matematiky nebo i jiných předmětů. Měli by se zabývat konkrétními situacemi, které je přesvědčí o účelnosti studia funkcí.

Na základě získaných zkušeností by si měli studenti uvědomit změnu vstupních hodnot, značených jako x, ve vztahu k výstupním, označovaným za y. Postupně přejít k poznání, co je funkční závislost, jak fungují parametry, které se vyskytují v rovnici a získat představu o charakteristických vlastnostech funkcí. Na konec by se měli seznámit s dalšími pojmy jako definiční obor, obor hodnot, graf, funkční předpis.

Na základních školách se většina vlastností určuje právě z grafů, aby studenti získali představu. S rozšiřujícími se znalostmi se přechází na rozpoznávání vlastností funkce z předpisu a zde se využívá diferenciálního počtu.

Druhý je takzvaný modernizační postup, kde se nejprve zavede pojem kartézského součinu množin A, B a pojem relace. Ve druhém kroku se zkoumají vlastnosti relací, díky nimž se zavede zobrazení z A na B jako relaci konkrétních vlastností a až nakonec se zadefinuje funkce jako zobrazení v $\mathbb{R}$.

O vhodnosti použití jednotlivých postupů se dá jistě diskutovat, ale obecně platí, že vhodnějším se zdá být postup klasický, který odráží přirozený vývoj chápání funkce a zároveň dodržuje sled jednotlivých částí poznávacího procesu. Pojem relací je naopak často přijímán spíše formálně a velice rychle zaniká po zadefinování funkcí.

2.4 Funkce v diskrétní matematice

Následující část textu je převzata z dizertační práce H. Binterové „Charles Babbage a teorie iterací“ [1]. Zpracování definic mi totiž přišlo srozumitelné a jejich citace lepším řešením než zanášení nejasností vlastním přepisem.

V iterační teorii funkcí jsou obvykle elementární funkce popisovány jako algebry s jednou unární operací. Příslušnou monounární algebru budeme nazývat *unarem*. Pro popsání unaru můžeme volit alternativní popisy. Lze je např. považovat za množinu s jednou binární operací nebo je chápat jako orientované grafy.

Definice 2.4.1. Unar(A, f) se nazývá *souvislý*, jestliže pro každé dva prvky $a, b \in A$ existuje dvojice přirozených čísel $m, n \in \mathbb{N}_0$ s vlastností $f^n(a) = f^m(b)$. V opačném případě se unar nazývá *nesouvislý*.

Definice 2.4.2. Unar (B, g) nazveme *podunarem* unaru (A, f), jestliže $\emptyset \neq B \subseteq A$ a zobrazení g je zúžením zobrazení f na množinu B.

Na systému všech podunarů unaru (A, f) lze zřejmě definovat relaci uspořádání $\leq$ takto: pro podunary (K, g), (L, h) unaru (A, f) platí vztah $(K, g) \leq (L, h)$, právě když $K \subseteq L$.

Definice 2.4.3. Maximální souvislý podunar ve smyslu uvedené relace se nazývá *komponenta* unaru (A, f).

Je zřejmé, že souvislý unar je tvořený jedinou komponentou.

Definice 2.4.4. Minimální podunar (pokud existuje) dané komponenty se nazývá *cyklus*. *Cyklus řádu* $k > 0$, krátce *k-cyklus* zobrazení $f : A \to A$ je množina $\{x_0, x_1, ..., x_{k-1}\}$ prvků množiny A, pro které platí $f(x_m) = x_{m+1}$ pro $0 \leq m < k - 1$ a $f(x_{k-1}) = x_0$.

Komponenta se nazývá *cyklická* nebo *acyklická* podle toho, zda obsahuje nebo neobsahuje cyklus. Cyklus řádu 1 (tj. platí $f(x) = x$) se nazývá *pevný bod* zobrazení f. Každá komponenta unaru zřejmě obsahuje nejvýše jeden cyklus. Nosiče komponent unaru (A, f) se nazývají *orbity* funkce f. Každá konečná orbita je cyklická.

Nechť (A, f) je unar. Definujeme-li na A relaci $a \approx_f b$ právě když existují $m, n \in \mathbb{N}_0$ takové, že $f^m(a) = f^n(b)$, je relace $\approx_f$ zřejmě ekvivalencí na A a bloky příslušného rozkladu jsou orbity funkce f.

Jak jsme již uvedli, lze unary považovat za speciální případy množin s jednou binární relací. Je-li $A \neq \emptyset$ množina a α binární relace na A, lze dvojici (A, α) interpretovat jako orientovaný graf. Prvky množiny A se nazývají *vrcholy* nebo také *uzly*, dvojice $(a, b) \in \alpha$ se nazývají *orientované hrany*; vrchol a se nazývá *počáteční* a vrchol b *koncový* uzel hrany (a, b). Mezi dvěma různými vrcholy tak existují nejvýše dvě vzájemně opačně orientované hrany (a, b), (b, a). Nechť je dán orientovaný graf (A, α) a (A, H) nechť značí příslušný neorientovaný graf (tj. zruší se orientace hran a případná dvojice opačně orientovaných hran mezi dvěma uzly se nahradí jednou neorientovanou hranou). Je-li (A, H) souvislý, nazývá se (A, α) *slabě souvislý*.

Buďte (A, α), (B, β) orientované grafy. Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá homomorfismus grafu (A, α) do grafu (B, β), jestliže pro každou hranu $(a, b) \in \alpha$ je $(f(a), f(b)) \in \beta$ (tedy f je obvyklým relačním homomorfismem).

Definice 2.4.5. Je-li relace α zobrazením množiny A do sebe, tj. (A, α) je unar, nazývá se příslušný orientovaný graf *funkcionální*, případně *uzlový* graf zobrazení. V tom případě je zřejmě každý prvek $x \in A$ počátečním vrcholem právě jedné hrany. Orbity daného unaru jsou maximální slabě souvislé podgrafy příslušného uzlového grafu.

Jak v dalším uvidíme, lze zkoumáním uzlových grafů unarů řešit i problémy, jejichž formulace bývá často jednoduchá, řešení však vyžaduje konstrukce charakteristické pro zkoumání funkcionálních rovnic.

Nechť (A, f), (B, g) jsou funkcionální grafy, $h : (A, f) \to (B, g)$ homomorfismus. Pak pro každou dvojici $(x, y) \in f$ (tj. $y = f(x)$), platí $(h(x), h(y)) \in g$, tedy $h(y) = g(h(x))$. Uvedenou podmínku lze tedy stručně zapsat takto: pro každý prvek $x \in A$ platí $h(f(x)) = g(h(x))$, což znamená, že $h : A \to B$ je, z hlediska teorie obecných algeber, homomorfismus unaru (A, f) do unaru (B, g).

Definice 2.4.6. Homomorfismus unaru (A, f) do sebe se nazývá *endomorfismus*. V případě, že $h : A \to B$ je homomorfismus unaru (A, f) do unaru (B, g), $h^{-1} : B \to A$ homomorfismus unaru (B, g) do unaru (A, f) a současně je h bijekcí, nazývá *izomorfismus*. Unary (A, f), (B, g) se nazývají *izomorfní*, když mezi nimi existuje alespoň jeden izomorfismus.

Jsou-li (A, f), (B, g) unary a $h : A \to B$ izomorfismus, platí pro každé dva prvky $x, y \in A$ vztah: $f^m(x) = f^n(y)$ právě tehdy, když $g^m[h(x)] = g^n[h(y)]$.

V dalším textu bude hrát klíčovou roli pojem konjugace funkcí. K tomuto pojmu se v jisté formě dopracoval již Charles Babbage, když se zabýval problematikou diferenčních rovnic. Zjistil, že pokud ψ_1 je řešením rovnice (1) na $\mathbb{R}$ a funkce ψ_2 je definována předpisem

$$\psi_2 = f^{-1} \circ \psi_1 \circ f,$$

kde f je invertovatelná funkce, pak funkce ψ_2 je také řešením rovnice (1). Tím dospěl k jisté relaci ekvivalence na vhodné třídě funkcí, nazývané *konjugace*. Formálně přesná definice je následující:

Definice 2.4.7. Nechť (A, f), (B, g) jsou unary. Funkce f, g se nazývají *konjugované*, když existuje bijekce $h : A \to B$, taková, že $f = h^{-1} \circ g \circ h$.

Uvažujeme-li například funkce $g(x) = 2x(1 - x)$, $h(x) = x^2$ definované na množině $\mathbb{R}$, pak tyto funkce tvoří dvojici konjugovaných funkcí, neboť pro funkci$f(x) = 1 - 2x$ platí

$$g = f^{-1} \circ h \circ f.$$

Z předcházejících úvah, především pak z definice 6 a 7 je zřejmé, že platí následující tvrzení.

Věta 2.4.1. Jsou-li (A, f), (B, g) unary, jsou funkce f, g konjugované právě tehdy, když jsou dané unary (A, f), (B, g) izomorfní, tj. právě tehdy, když jsou izomorfní uzlové grafy těchto unarů.

Uvedené tvrzení nám umožní efektivně studovat konkrétní systémy unarů.

3 Iterace

3.1 Definice pojmu iterace

Slovo iterace je latinského původu (lat.*iterum* - ještě jednou). Pro matematiku to znamená opakované použití jedné funkce f:

$$f(x) = y$$

Dalším krokem je

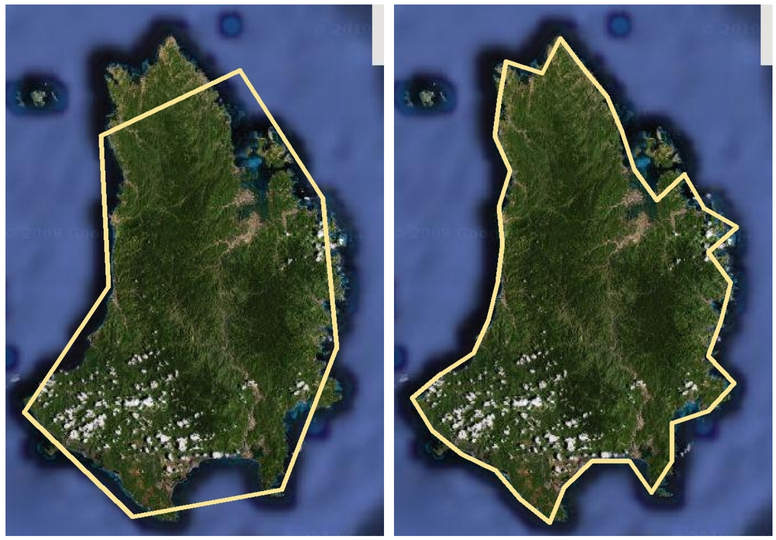
$$f(y) = z$$

Na rozdíl od informatiky, kde iterace (obecněji rekurze) musí mít ukončovací krok, v matematice nikoliv. Naopak matematika často zkoumá, kam námi vytvořené řady směřují a jak se chovají v nekonečnu.

Teorie iterací, jejíž základy položil především anglický matematik Charles Babbage, a s ní příbuzná fraktální geometrie pomáhá některé jevy, jako například populační růst nebo vývoj na burze, modelovat mnohem výstižněji než běžně používaná matematika, která si s nimi mnohdy ani neumí poradit. Stejně tak nám klasická matematika moc nepomůže v modelování objektů z reálného prostředí. Hora totiž není kužel,řeky netečou po přímkách.

Známým příkladem takového špatně popsatelného útvaru je například pobřeží ostrova. Pokud budeme měřit jeho délku, můžeme to zkusit nejprve na mapě s měřítkem 1:1 000 000. Použijeme-li k měření pevnou míru, třeba pomocí kružítka se vzdáleností hrotů 1 cm, každý krok, který učiníme bude ve skutečnosti měřit 10 km. Vznikne nám pak mnohoúhelník velice zhruba odpovídající tvaru ostrova, jehož obvod je však již spočítatelný.

Zvětšíme-li měřítko mapy, každý krok kružítka nám bude představovat menší a tudíž přesnější krok ve skutečnosti. Délka pobřeží se nám tudíž bude jevit mnohem delší, protože do měření zahrneme více detailů. Při stálém zdrobňování měřených úseků se bude délka stále prodlužovat. Pokud použijeme úseky, jejichž velikost se limitně blíží nule, délka pobřeží se nám naopak bude přibližovat nekonečnu.



Obrázek 16: Model ostrova

Modelovou situaci nám nastiňuje (obr. 16). Vybrala jsem ostrov v severním Pacifiku z filipínského souostroví z internetového portálu google.maps.com. Měřítko je 1 : 1 000 000. První obrázek je měřen úseky dlouhými 20 km a jeho obvod vychází na 160 km. Druhý je měřen po 5 km a délka obvodu se prodloužila na 190km.

Podobně na tom jsou i jiné přírodní předměty. Například kapradina, jejíž každý lístek připomíná zmenšenou kopii celého listu. Běžnou matematikou je velice obtížně popsatelná, avšak pro iterační počítání jako stvořená. Dalším pro iterační postupy velice oblíbenou přírodninou je sněhová vločka modelovaná pomocí takzvané Kochovy vločky.

Obrázek 17: List kapradiny vytvořený pomocí iterací v programu logo.

3.2 Iterace v praxi

Následující text je převzat a upraven z článku Iterace z časopisu Automatizace, leden 2009. [6] V praxi iterace znamená postupné vylepšování stávajícího odhadu řešení nějaké úlohy s cílem se jednoduše, ale postupně dostat k řešení stále lepšímu, a tak konečně dosáhnout řešení téměř dokonalého.

3.2.1 Motivační příběh

Na jednom ostrově byl zakopán poklad na neznámém místě. Ostrov byl obydlen místními domorodci, kteří měli následující tři vlastnosti: věděli, kde přesně poklad je, odmítali toto místo sdělit cizincům a byli ješitní. Ješitnost se jim projevovala tak, že když jim cizinec řekl, že jejich soused si myslí, že poklad je na nějakém místě, pak se snažili svého souseda přetrumfnout tím, že uvedou přesnější lokalizaci při dodržení podmínek utajení přesného místa pokladu.

Otázkou je, jak uvedené skutečnosti může využít cizinec k nalezení pokladu. Stačí, když se postaví do libovolného bodu na ostrově a přivolá domorodce řka: „Tvůj soused si myslí, že poklad je přesně pode mnou.“ Bodu, ve kterém cizinec stojí, se při popisu iteračních postupů říká počáteční odhad.

Přivolaný ješitný domorodec, který respektuje tabu (má zakázáno říci, kde je poklad), to nevydrží a stoupne si do jiného bodu s tím, že si myslí, že je to tam. Tomuto postupu se říká jeden krok iterace. Bylo by však příliš naivní v tomto druhém bodě kopat, protože nám nikdo nesmí říct, kde to přesně je. V takové situaci není nic rozumnějšího, než se postavit do nového bodu a přivolat jiného domorodce.

Pokud jsou na ostrově alespoň dva domorodci, pak se naše vzdálenost od pokladu krok za krokem zmenšuje. Opakováním uvedeného postupu vzniká posloupnost dílčích mezivýsledků, která se za určitých omezujících podmínek blíží k řešení problému. Přitom je zbytečné usilovat o to, aby po konečném počtu kroků bylo nalezeno zcela přesné řešení.

Místo toho obvykle hledáme řešení jen s určitou přesností, která v dané aplikaci zcela vyhovuje.

Největší potíže při iteračních metodách způsobuje chování jednoho „vylepšovacího“ kroku. V ideálním případě čekáme, že se chyba nového mezivýsledku v porovnání s předchozím výrazně zmenší, např. geometrickou řadou s dostatečně malým kvocientem. Celá řada iteračních metod však bohužel tuto vlastnost nemá, a někdy dokonce není ani zajištěno, aby chyba v průběhu iterací klesala. K tomuto jevu dochází zejména tehdy, pokud jsme navrhli iterační krok nevhodně a byli jsme málo ješitní na to, že za všech okolností poskytujeme cestu ke zlepšení řešení.

3.2.2 Historická poznámka

První zmínka o iteračním postupu pochází od Herona Alexandrijského, který uměl iteračně počítat délku hrany čtverce, jehož plocha byla zadána. Jeho postup byl velmi jednoduchý. V první fázi čtverec nahradil obdélníkem a odhadl „rozumně“ délku jedné jeho strany. Dopočet strany druhé pomocí obyčejného dělení nečinil žádné obtíže.

Heron si všiml toho, že pokud první stranu podhodnotí, pak je druhá strana obdélníku nadhodnocena. Dostal geniální nápad hledat pravdu o straně čtverce někde uprostřed a použil k tomu obyčejný aritmetický průměr délek obou stran. Zároveň si všiml, že postup je úspěšnější, pokud začne z nadhodnoceného odhadu. Jeho současníci byli překvapeni, jak elegantně takový postup funguje. Obvykle stačí použít méně než deset iteračních kroků a docílíme přesnosti na více než deset platných cifer.

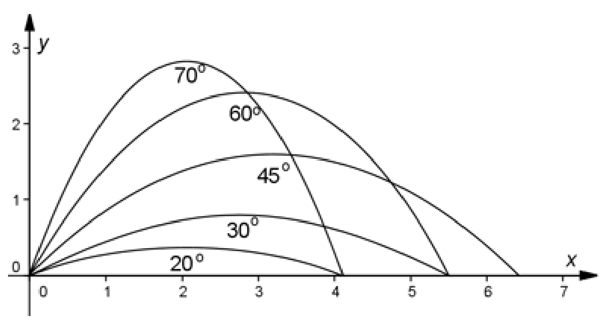
Později bylo dokázáno, že jeho postup má zajímavou vlastnost: v každém kroku se zdvojnásobuje počet platných cifer výsledku, takže velmi brzy dosáhneme přesného řešení. Uvedená geometrická představa nás dostatečně motivuje k využívání Heronovy metody pro výpočet druhé odmocniny libovolného kladného čísla. Stejný postup používáme při výpočtu třetí odmocniny dodnes. Pravý rozmach iteračních metod pochází až od Newtona, který publikoval metodu využívající směrnice tečny k řešení libovolné nelineární rovnice.

3.2.3 Využití v armádě

V některých situacích je třeba se rychle rozhodnout na základě co nejpřesnějšího, ale zároveň rychlého výsledku. Příkladem takové situace je vojenství. Při střelbě klasickým kanonem nebo minometem nečiní potíže nastavení horizontální roviny ani určení směru střelby. Velkým problémem je určení elevačního úhlu, pod kterým je třeba vypálit.

V bojové situaci není čas přesně zjišťovat tento úhel a je třeba jednat. Proto se málokdy stane, že zasáhneme cíl první ranou. Většinou zjistíme, že je třeba úhel zvýšit nebo snížit. Protivník na druhé straně zjistí, že střílíme a někdy i odkud. Po změně úhlu obvykle nastane druhý extrém, kdy dojde k „zarámování“ cíle a třetí rána již jde najisto s využitím lineární interpolace. Otázkou potom je, zda protivník vydržel tak dlouho čekat.

Moderní raketové systémy s automatickou navigací tento problém již „řeší samy“, a tak se zdá, že moderní doba už iterace zase nepotřebuje. To je ovšem laický pohled zaměřující se na povrch problému. Ve skutečnosti se iterační metody používají uvnitř navigačních systémů, čímž se zvyšuje jejich rychlost a odstraňuje lidský faktor.



Obrázek 18: Elevační úhel děla při vakuu. [14]

3.2.4 Spirála

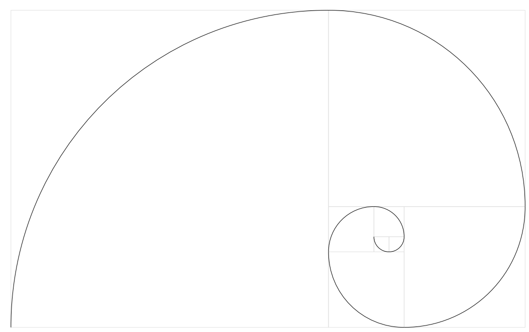
Pro seznámení studentů s iteracemi jsem jako jeden z možných motivačních příkladů vybrala postup kreslení Fibonacciho spirály. Spirála odráží některé přírodní předměty jako například ulitu plžů, tvar galaxií nebo vzdušných vírů. Toho se dá využít při motivaci.

Obrázek 19: Spirály v přírodě

Fibonacciho spirála je velice blízká takzvané zlaté spirále a nabízí pomocí iterativních kroků snadný způsob narýsování pomocí základních geometrických pomůcek jako je pravoúhlý trojúhelník a kružítko. Navíc může tento postup kromě představení iterací oživit hodiny na školách technického typu, kde je geometrie častější.

Protože nám zde nezáleží tolik na přesnosti jako na názornosti, pro zjednodušení a urychlení tohoto příkladu doporučuji použít klasický čtverečkovaný papír s mřížkou 0,5 cm. Dokonce pak odpadá nutnost použití trojúhelníku s ryskou, ale postačí klasické pravítko.

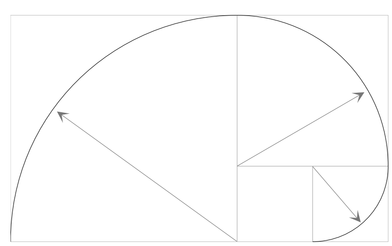
Prvním krokem k vytvoření spirály je narýsování dvou stejně velkých čtverců vedle sebe s délkou hrany 1. V horním společném bodě těchto čtverců bude spočívat střed jednotkové



Obrázek 20: Fibonacciho spirála

kružnice. Pro spirálu je důležitá ta čtvrtina kružnice, která prochází pravým z těchto čtverců.

Nad oba čtverce nakreslíme další čtverec, jehož hrana je součtem hran obou menších čtverců, tedy 2. V levé spodní hraně tohoto čtverce bude ležet střed další kruhové výseče, která bude mít poloměr stejný, jako délka hrany čtverce, ve kterém se nachází. Obě již narýsované kruhové oblouky by na sebe měly navazovat.



Obrázek 21: První tři kroky při vytváření Fibonacciho spirály

Postupně budeme proti směru hodinových ručiček přidávat další čtverce, jejichž délka hrany odpovídá součtu délky hran čtverců, kterých se dotýká. Platí, že velikosti těchto hran tvoří Fibonacciho posloupnost[2]. Do každého z těchto čtverců postupně narýsujeme příslušný kruhový oblouk. Iterováním tohoto kroku dosáhneme libovolně dlouhé spirály.

[2]Fibonacciho posloupnost je nekonečná posloupnosti přirozených čísel začínajících 0 a 1. Každé další číslo je rovnou součtu dvou předchozích.

3.3 Iterační vyjádření funkcí

Pro iterační vyjádření funkcí budeme používat převážně příkladů polynomů 1. stupně nebo zobrazení zadaná pomocí tabulky. Předpoklad je, že studenti znají elementární funkce a jejich vlastnosti, z nichž většina je uvedena v úvodní části této práce. U lineárních funkcí je důležité, aby studenti věděli, co se s funkcí stane při změně parametrů, kde se nachází kořen funkce, jak najít hodnotu průsečíků s osami nebo jinými funkcemi.

Postupně se zde seznámíme s funkcí $f(x) = 2x - 2$. Rozebereme ji ve všech částech potřebných pro iterování a pokusíme se odhalit její vlastnosti. Schválně jsem nevybrala jednodušší lineární funkci, protože v jejím případě by vlastnosti ztrácely na své jednoznačnosti.

Tuto funkci si nejprve ukážeme na klasickém analytickém grafu. Ten budeme využívat jen jako podpůrný, protože je pevně spjat s představou funkce jako takové. Prvním krokem, který se přímo týká iterací, bude vytvoření tabulky funkčních hodnot. To je také krok, který studenti již znají. U obou těchto částí je důležité, aby z nich byli studenti schopni vyčíst, zda se jedná o funkci či nikoliv.

Následovat bude uzlový graf. Zde bych ráda ukázala, jak zakreslit funkci a jaká pravidla se k tomuto typu grafu vztahují. Jednotlivé části grafu budou pojmenovány a vysvětleny v následující kapitole. Bližšímu ujasnění podlehnou již dříve zadefinované pojmy. Pokusíme se je přirovnat k již známým obrazům. Vysvětlíme si, jak se s nimi dá počítat a jakým způsobem ovlivňují iterace.

3.3.1 Motivace

Před zavedením iterací by studenti měli znát elementární funkce, rozumět jejich vlastnostem a měli by umět číst z grafu. Ke zopakování některých těchto dovedností slouží první 4 pracovní listy (viz příloha). Doporučuji zopakování této látky před snahou zavést iterace, aby si studenti znalosti osvěžili a utříbili.

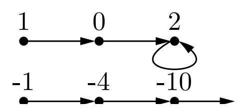
Mnoho studentů přijímá učivo pasivně a novou látku se učí jen velice neradi. Důležité je tudíž využít motivace, kterou tato látka nabízí. U iterací by k tomuto účelu mohly soužit ne tak vzdálené fraktály, které bývají přitažlivé z grafického hlediska. Na fraktály je mnoho odkazů na internetu i v jiných pracích, proto jen později stručně připomenu, jakým způsobem se fraktály iterací dotýkají.

Dalším možným lákadlem této látky je využití v praxi, jak je popsáno v kapitole 3.2.1 Motivační příběh nebo příklady přírodních předmětů převedených do matematiky. Jako zástupce uvedu příklad šnečí ulity representované Fibonacciho spirálou, u které se postupně zvyšují vzdálenosti mezi jednotlivými vrstvami. Tento příklad jsem nechala nakonec spíš jako zajímavost nebo inspiraci.

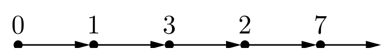
3.4 Opakování pojmů diskrétní matematiky

Nyní bychom si mohli ozřejmit některé z pojmů, které jsme si zadefinovali v kapitole 2.4 Funkce v diskrétní matematice. Prvním termínem, se kterým se zde setkáváme je *unar*. Unar je zobrazení množiny A do sebe. Jednu takovou ukázku nám může representovat funkce kterou jsme právě sledovali v příkladu. Unarem nazveme celý graf, který jde z dané funkce vytvořit.

Funkci definovanou na množině A jsme ale schopni graficky znázornit celou pouze pro konečnou množinu A, která neobsahuje mnoho prvků. Pro příliš velké množiny je důležité správně vybrat tu část, která nám bude graf dostatečně názorně representovat. Jako nejvhodnější se v tomto ohledu u lineárních funkcí jevily body v okolí pevného bodu nebo bodu, který protíná osu I. a III. kvadrantu kartézské soustavy souřadné.



Obrázek 22: Příklad nesouvislého grafu

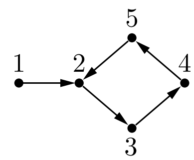


Obrázek 23: Příklad souvislého grafu

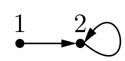
První vlastností unaru je *souvislost*. Unar je souvislý, pokud jsme schopni najít cestu o n krocích mezi dvěma libovolnými body. Graf na obrázku 22 nám zobrazuje nesouvislý unar. Nejsme totiž schopni se dostat z bodu 2 do bodu 5 nebo z bodu -10 do bodu 6. Naopak obrázky (obr. 23), (obr. 24) a (obr. 25) nám zobrazují unary souvislé.

Rozložením unaru na souvislé bloky vzniknou části, které každou zvlášť nazveme *orbita*. Orbita může být *cyklická* nebo *acyklická*. Cyklická orbita je taková, která je zakončena cyklem.

Podle počtu prvků k, které se v cyklu nacházejí nazveme cyklus řádu k, nebo také k-cyklus. Nejmenší možný cyklus je tedy ten, kdy šipka směřuje do toho samého bodu - pevný bod. Je to cyklus řádu 1.



Obrázek 24: Orbita zakončená cyklem řádu 4



Obrázek 25: Pevný bod - cyklus řádu 1.

Příklad konečné orbity zakončené cyklem je znázorněn na obrázku 24. Dalším příkladem cyklické orbity je pevný bod nebo jakákoliv orbita do pevného bodu směřující (obr. 25). Platí, že každá konečná orbita je konečná (def. 2.4.4). A protože platí, že každý bod musí mít svého následovníka, jsou acyklické orbity nekonečné.

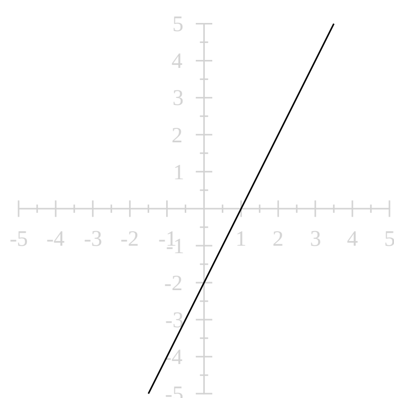
3.5 Vzorový příklad

V tomto vzorovém příkladu budeme postupovat od věcí známých, za které považuji klasický graf funkce a tabulku funkčních hodnot, k něčemu novému, což je představení funkce jako unaru a vytvoření uzloého grafu.

3.5.1 Analytický graf

Běžně bychom v teorii iterací tento druh grafu nepotřebovali, ale pro výuku a představu bude lepší pracovat i s ním. Většina z nás má vžitou představu tohoto grafu a proto je jeho vypovídající hodnota poměrně vysoká. I nám bude pomáhat v dotvoření představy toho, co se s funkcemi děje a jak se chovají jejich hodnoty.

Výhodné je u tohoto grafu využívat barevné značení. Při určování vlastností iteračních grafů se budeme snažit odhalit souvislosti mezi jednotlivými hodnotami funkce a změnou iteračního grafu. K tomu by nám barvy svou názorností mohly napomoci. Podmínkou ovšem zůstává, že funkce, kterou budeme zkoumat takovýmto grafem disponuje. V prvotních příkladech tomu tak bude, později si ukážeme i zadání pomocí tabulky bez funkčního předpisu a souvislého grafu.



Obrázek 26: Graf funkce $f(x) = 2x - 2$

Na obrázku (obr. 26) máme analytický graf funkce $f(x) = 2x - 2$ použité pro vzorový příklad. Průsečík s osou x je v bodě 0,5 a s osou y v bodě -1. Funkce je rostoucí na celém $D(f) = \mathbb{R}$ a platí, že $H(f) = \mathbb{R}$.

3.5.2 Tabulka funkčních hodnot

Tato tabulka v prvním řádku obsahuje hodnoty proměnné x a v řádku druhém hodnoty, jichž daná proměnná dosahuje. Pomocí této tabulky se snáze formuje analytický graf neznámé funkce. Její využití je velmi důležité i pro tvorbu grafu uzlového. Některá zobrazení nemusí být zadána pomocí funkčního předpisu, ale pouze tabulkou.

Vrátíme se k našemu příkladu a sestrojíme tabulku pro funkci $f(x) = 2x - 2$. Využijeme množinu třinácti čísel $M = \langle -6; 6 \rangle$ pro $M \in \mathbb{C}$. Na stejných číslech ukážeme i tvorbu uzlového grafu.

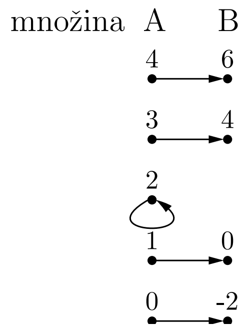
x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10

Tabulka 1: Tabulka hodnot funkce $f(x) = 2x - 2$

3.5.3 Uzlový graf

Funkci chápeme jako zobrazení množiny A do množiny B. V iteracích používaný unar je velice podobné zobrazení. Jeho podmínkou ovšem je, že zobrazuje množinu A samu do sebe. To pro nás znamená, že abychom funkci byli schopni popsat pomocí uzlového grafu, je nezbytné, aby množina B nazývaná oborem hodnot byla podmnožinou množiny A, nazývané definičním oborem.

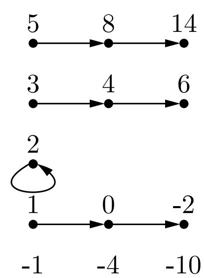
Uzlový graf je možné sestavit pouze pro konečnou množinu A s omezeným počtem prvků. V ostatních případech se musíme spolehnout na representativní vzorek. Je také grafem nesouvislým. Proto nedokáže znázornit spojitou funkci na celém intervalu, ale pouze jednotlivé prvky. Tyto prvky nazýváme vrcholy nebo také uzly. Podle toho se graf nazývá uzlový. Jednotlivé body jsou navzájem spojeny šipkou - orientovanou hranou.



Obrázek 27: Spojení dvou množin pomocí šipek

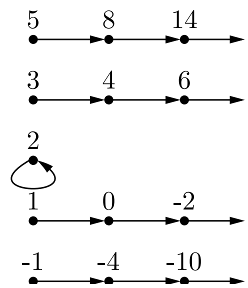
Na modelovém příkladu je jako množina A označena množina vstupních proměnných ($D(f)$). Množina B pak zahrnuje jejich funkční hodnoty ($H(f)$). Každá proměnná je se svým výsledkem spojena šipkou. Pokud má funkce stejnou vstupní a výstupní hodnotu, nakreslíme šipku kolem bodu, který tuto hodnotu representuje. Tento bod budeme nadále nazývat *pevný bod.*

Nyní přejdeme k iteraci. Jak je uvedeno v předchozím textu, iterace znamená opakování nějakého vzoru, struktury nebo postupu. Použijeme nyní znovu funkci f na množinu výsledků. Vznikne nám složená funkce $h = f \circ f = f(f) = f^2$ (obr.28).



Obrázek 28: Zobrazení f^2

Jistě si každý všimne, že od chvíle, kdy se nějaký prvek z množiny A shodne s výsledkem, pokračující iterace je rovněž totožná. Této vlastnosti využijeme a graf zjednodušíme vynecháním duplicitních částí. Ve chvíli, kdy dosáhneme nejvyššího možného zjednodušení, získáme *uzlový graf* (obr. 29). N-tým opakováním tohoto kroku získáme funkci f^n.



Obrázek 29: Uzlový graf pro funkci $f(x) = 2x - 2$

Vytvoření uzlového grafu si můžeme usnadnit tím, že vybereme úvodní prvek a pokračujeme v jeho rozvoji dokud následující prvky stále spadají do vzorové množiny. Následně vybereme další prvek ze vzorové množiny a opakujeme postup, dokud ji nevyčerpáme.

Vždy si musíme dobře rozmyslet, jaká bude vstupní množina a kterým prvkem bychom měli začít. Stejně jako u tvorby analytického grafu i tady je třeba získat určitou zkušenost, nezbytně potřebnou k odhadu nejkritičtějších míst iterace.

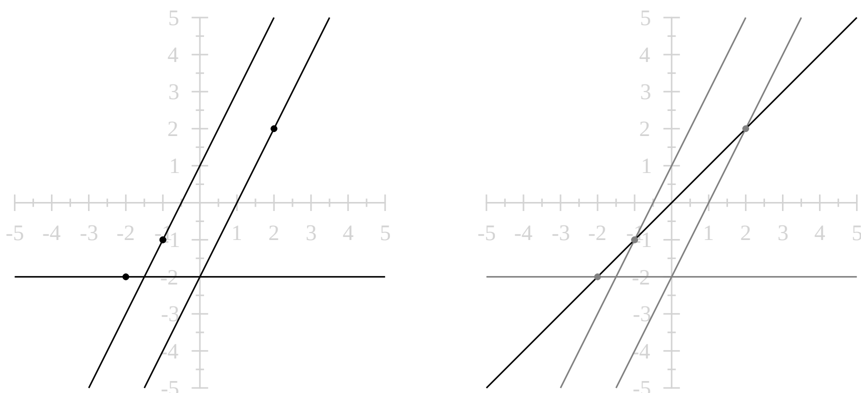
Podle [7] vytvoříme uzlový graf unaru (A, f) tak, že všechny prvky množiny A zobrazíme jako body v rovině. Potom vedeme šipku z prvku x do prvku y, právě když $y = f(x)$. Je-li x pevným bodem funkce f, vedeme kolem bodu x smyčku. Tento popis opomíjí onu iterativnost tvorby grafu, je ale mnohem jednodušší a elegantnější. Při běžném vytváření grafu jej tudíž doporučuji.

Platí pravidlo, že při tvorbě grafu bychom se měli vždy snažit umístit body tak, aby bylo možné je spojit hranami bez jejich křížení. Na procvičení tvorby uzlového grafu jsou připraveny pracovní listy 5 a 6. Zároveň je zde několik otázek, které opakováním upevňují teoretické znalosti o unaru.

3.6 Další možnosti zkoumání iterovaných funkcí

3.6.1 Pevné body

Nyní by již studenti měli mít dostatek podkladových příkladů a mohli bychom s nimi objevit některé společné znaky. Využijeme k tomu analytický graf, do kterého zakreslíme všechny tři probrané funkce. U každé funkce vyznačíme její pevné body a necháme studenty, aby odhadli, které množině tyto body náleží.

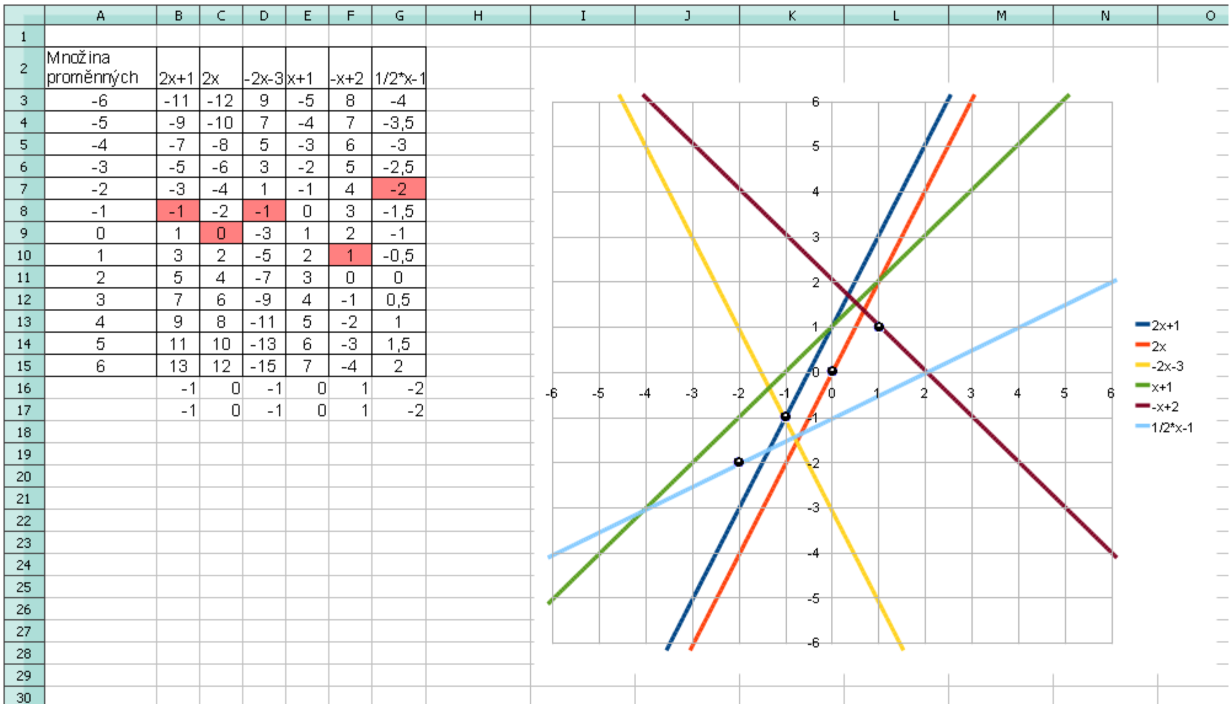


Obrázek 30: Tři probrané funkce vložené do jediného grafu s vyznačením pevných bodů.

Přesto, že by měly tři funkce být dostatečně názorné, je lepší v případě nejasností přidat několik funkcí, aby studenti snáze objevili řešení, než jim výsledek prozrazovat. Tím, že je necháme, aby nové věci objevili sami, jim umožníme získat sebevědomí při řešení náročnějších úkolů.

Pokud má učitel k dispozici počítačovou učebnu, může si ulehčit a zrychlit práci pomocí programu MS Excel, Open Office Calc nebo podobnou kancelářskou aplikací, které bývají na školních počítačích obvykle nainstalovány. Podmínkou ovšem je, že studenti umějí použitý program ovládat.

Potřebné dovednosti studentů jsou vytváření vzorců, hromadné kopírování čísel a vzorců do buněk pomocí přetažení i klasickým kopírováním, vytváření grafů z tabulky. Výhodné je také podmíněné formátování.



Množina proměnných	2x+1	2x	-2x-3	x+1	-x+2	1/2*x-1
-6	-11	-12	9	-5	8	-4
-5	-9	-10	7	-4	7	-3,5
-4	-7	-8	5	-3	6	-3
-3	-5	-6	3	-2	5	-2,5
-2	-3	-4	1	-1	4	-2
-1	-1	-2	-1	0	3	-1,5
0	1	0	-3	1	2	-1
1	3	2	-5	2	1	-0,5
2	5	4	-7	3	0	0
3	7	6	-9	4	-1	0,5
4	9	8	-11	5	-2	1
5	11	10	-13	6	-3	1,5
6	13	12	-15	7	-4	2
	-1	0	-1	0	1	-2
	-1	0	-1	0	1	-2

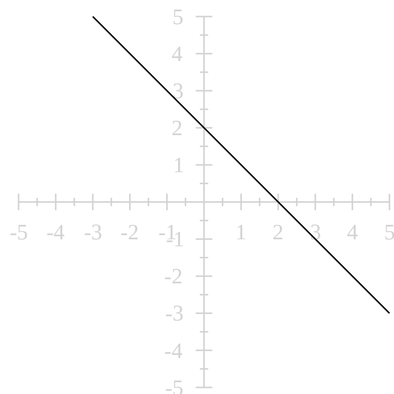
Obrázek 31: Ukázka příkladu řešeného v programu Open Office Calc.

Využitím počítačů se výrazně urychlí práce a protože se odstraní monotónní počítání jednoduchých funkcí, zároveň se výuka stane příjemnější. Bez potřebných znalostí by však použití informační techniky bylo bohužel naopak zdržující, protože by učitel musel vysvětlovat látku s matematikou nesouvisející. Při správné domluvě může tato látka vést k mezipředmětovému zpestření výuky.

V tomto příkladu by studenti měli být schopni odhalit, že všechny pevné body se nacházejí na ose I. a III. kvadrantu.

3.6.2 Dvojcykly

Zajímavým pokračováním a rozvinutím této látky je zadat studentům vytvoření uzlového grafu jedné z lineárních funkcí kolmých na osu I. a III. kvadrantu. Jako příklad jsem zvolila funkci $f(x) = -x + 2$.



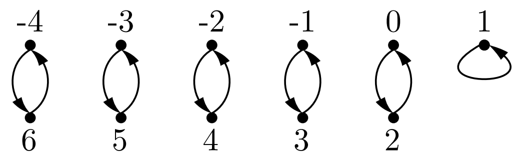
Obrázek 32: Analytický graf funkce $f(x) = -x + 2$.

Nyní necháme studenty samostatně vytvořit iterace. Měli by udělat tabulku jako je v tabulce 2. Vytvoření grafu však může některé z nich zmást. Učitel by měl chválit každou snahu o postup správným směrem, případně poradit, jak dvojcykly zakreslit. Nakonec by studenti měli vytvořit graf jako je na obrázku (obr. 33).

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Tabulka 2: Tabulka hodnot funkce $f(x) = -x + 2$.

Společně by měli studenti i učitel vyslovit teorii o tom, jaké grafy tvoří dvojcykly. V tabulce si studenti najdou dvojice čísel, která jsou vzájemně propojena a měli by si uvědomit, že pokud f(x)=y, pak i f(y)=x. Konkrétně to znamená, že když funkční hodnota například čísla -2 je 4, pak i funkční hodnota čísla 4 je -2.



Obrázek 33: Uzlový graf funkce $f(x) = -x + 2$ tvořený dvojcykly.

Sice se až doteď studenti nesetkali s žádnou jinou funkcí popsanou iteracemi, ale po předchozích zkušenostech by to pro ně neměl být výrazný problém. Jako další funkci bych doporučila prozkoumat lomenou funkci $f(x) = -\frac{1}{x}$ (pracovní list 8). Její záludností je, že u ní nemůžeme počítat pouze s celými čísly, jak jsme byli dosud zvyklí.

Pro tento příklad jsem vytvořila pracovní list s návrhem bodů pro výpočet. I v tomto příkladě studenti získají graf složený z dvojcyklů. Obě funkce, přestože mají podobné uzlové grafy, jsou v kartézské soustavě velice rozdílné.

Zajímavým zpestřením této látky by mohlo být otočení postupu a začít vytvořením uzlového grafu. Každý ze studentů ze zadané množiny čísel vytvoří graf a tabulku (pracovní list 9). Potom vytvoří kartézský graf. Bylo by výhodné společně vybrat několik studentů, kteří své grafy zakreslí na tabuli do jednoho obrázku. K tomu se dá opět využít některý tabulkový editor.

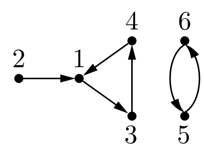
Učitel by si měl dát záležet, aby několik funkcí bylo souměrných podle osy I. a III. kvadrantu pro názornost. Pokud bychom podobné příklady zkoumali dál, dojdeme ke zjištění, že funkce, které jsou osově souměrné podle osy I. a III. kvadrantu, tvoří dvojcykly vždy. Ale dvojcykly nemusí vždy tvořit osově souměrné funkce.

3.6.3 Funkce zadané pomocí tabulky

Tato látka by pro studenty měla být velice jednoduchá. Pouze vytvoříme několik grafů, aby si studenti uvědomili, že každá orbita, která je končená, musí být ukončena cyklem. Toto vědomí jde ruku v ruce s poznáním, že každý bod musí mít svého následovníka, i kdyby měl následovat sám do sebe.

x	1	2	3	4	5	6
y	3	1	4	1	6	5

Tabulka 3: Zadání vzorového příkladu zadaného tabulkou.



Obrázek 34: Řešení vzorového příkladu zadaného tabulkou.

Pracovní list 10 je cvičením nabízejícím další dva příklady konečných grafů. Jako doplnění je zde několik otázek, na které je vhodné nechat studenty odpovědět i u vzorového příkladu. Většina otázek v pracovních listech se neustále opakuje, aby jejich absence nevedla studenty k pouhému odhadu správné odpovědi.

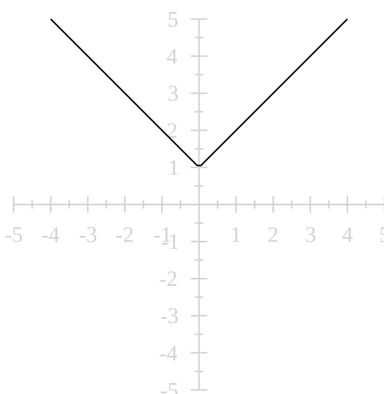
Jako další příklad bych ráda uvedla složení funkcí zadaných tabulkou. Jen početní příklady jsou uvedeny v pracovním listu 4. Nyní by mohla být vhodná příležitost. Na pracovním listu 11 je zadána jedna z funkcí f, pro kterou nyní studenti vypracují iterační graf. Zároveň vytvoří graf pro funkci složenou $h = f^2$. Funkce f se bude nazývat druhý iterativní kořen funkce h nebo také iterativní kořen řádu 2.

Pro další prohloubení tématu skládání a rozkládání funkcí bych doporučila [7], kde je podrobně popsán rozklad na iterativní kořeny funkce a problematika m-propojitelnosti.

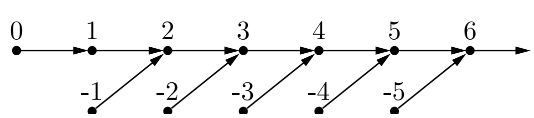
3.6.4 Složitější funkce

Zatím jsme se zabývali pouze lineárními funkcemi a jednoduchými předpisy zadanými pomocí tabulky. Nyní si pomocí iterací představíme některé další funkce. Tato látka se dá neustále prohlubovat, ať už převedením funkcí do oboru komplexních čísel, zvýšením složitosti funkcí nebo jejich skládáním. Při každém tomto kroku je velice zajímavé sledovat, jak se mění jejich vlastnosti.

Jako první příklad uvedu příklad lineární funkce s absolutní hodnotou. V našem případě použijeme funkci $f(x) = |x|+1$. Na analytickém grafu (obr. 36) vidíme, že funkce je sudá. S orbitou, jakou funkce vytvoří, se studenti v tomto příkladě setkávají poprvé, ale na základě zkušeností z předchozích příkladů by to pro ně neměl být problém.

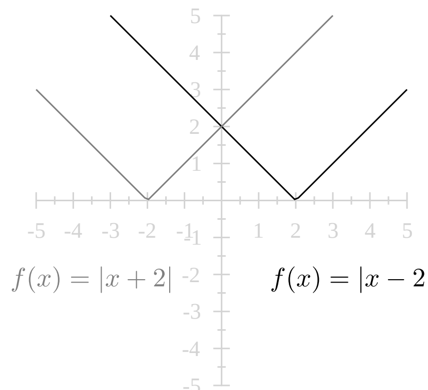


Obrázek 35: Kartézský graf funkce $f(x) = |x| + 1$.



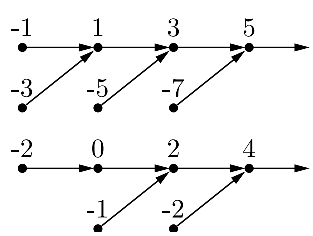
Obrázek 36: Uzlový graf funkce $f(x) = |x| + 1$

Další příklad lineární funkce s absolutní hodnotou je zadán v pracovním listu 12. I když se graf posune pouze o konstantu, jeho uzlový graf se výrazně změní. Dalšímu zkoumání by mohlo podlehnout i posunutí pomocí parametru a. Zadáme dvě funkce s velmi podobným funkčním předpisem, které se liší na analytickém grafu pouze v horizontálním posunutí (obr. 37).

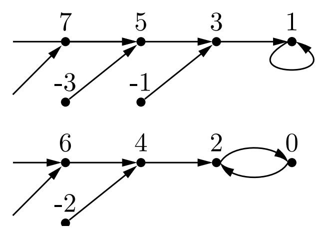


Obrázek 37: Kartézský graf funkcí $f(x) = |x + 2|$ a $f(x) = |x - 2|$.

Na obrázcích (obr. 38) a (obr. 39) je vidět, jak rozdílné jsou iterace dvou tak podobných funkcí. Funkce $f(x) = |x+2|$ začíná v bodech -1, -2 a -3 a pokračují do nekonečna. Orbity graf funkce $f(x) = |x - 2|$ jsou naopak ukončeny cykly. Jedna orbita je ukončena cyklem řádu dvě obsahujícím body 0 a 2 a druhá končí pevným bodem v bodě 1.



Obrázek 38: Uzlový graf funkce $f(x) = |x + 2|$.



Obrázek 39: Uzlový graf funkce $f(x) = |x - 2|$.

Učitel může dle svého vlastního uvážení pokračovat ve výzkumu dalších druhů funkcí. Například kvadratické funkce nabízejí rozsáhlé pole možností. Úvod do problematiky kvadratických funkcí je popsán v [1].

4 Praxe

Nyní bych chtěla jen krátce přiblížit uvedení některých pracovních listů do praxe. Bohužel jsem měla pouze dvě vyučovací hodiny na pokus se studenty informatiky na střední škole v Hustopečích u Brna. Zadala jsem jim opakování vlastností funkcí a tři iterační příklady, z toho jeden vzorový. Přiložené CD obsahuje výsledky snažení studentů.

4.1 První hodina

Protože jsem předpokládala, že většinu elementárních funkcí mají studenti již probranou, rozhodla jsem se pro zopakování poznatků studentům zadat k samostatnému vyplnění první pracovní list. Pouze v případě konkrétních dotazů jsem nabídla pomoc.

Vlastnosti funkcí byl mnohem větší problém, než jsem čekala. Už jen uvědomit si, co funkce není, bylo pro některé studenty velice náročné. S takovou otázkou se předtím nesetkali. Protože ještě neprobírali s goniometrické funkce, velice často je vyloučili. Správně často neoznačili ani funkce omezené. Naopak kružnici zapsanou v soustavě souřadné rádi mezi funkce zařadili.

Velice špatně dopadlo zkoumání vlastností funkcí. Studenti si nepamatovali význam pojmů a pletli si sudost a lichost. Někteří také určovali vlastnosti u grafů, které nepředstavovaly funkci. Přesto, že jsem nepředpokládala u tohoto cvičení problémy, ani výrazné zdržení, studentům práce zabrala téměř celou hodinu.

Protože další hodina následovala ještě ten samý den jen o jednu hodinu později, dovolila jsem si proti konvencím začít s iteracemi ještě po ukončení cvičení. Studentům jsem představila pojem iterace a přečetla motivační příklad. Závěr hodiny jsem nechala diskusi, co vše je možné zařadit do iterací.

4.2 Druhá hodina

V čase, který jsem měla mezi oběma hodinami jsem studentům jejich práce opravila. Na začátku hodiny jsme si zběžně prošli nejčastější chyby. K určitému zlepšení chápání pojmu funkce obecně by mělo dojít právě díky setkání s iteracemi. Přesto jsem se musela vrátit k definici funkce a rozebrat se studenty, co to vlastně znamená. Je důležité, aby chápali, že každý bod definičního oboru má právě jeden obraz. Co to pro ně znamená v grafu a co v tabulce funkčních hodnot.

Po tomto úvodu jsme se již plně začali věnovat iteracím. Ve vzorovém příkladu jsem jim představila i základní pojmy jako je pevný bod a orbita. Další dva pracovní listy sloužily pro upevnění znalostí. První iterační příklad tvořili studenti převážně samostatně. U druhého jsem jim dala možnost tvorby ve dvojicích. Pro kontrolu jsem jim na konci promítla správné řešení příkladů

Při představení iterací někteří studenti aktivně spolupracovali a pokládali dotazy, ale někteří brali látku jen jako oproštění od běžné výuky. I přes tak malou časovou dotaci studenti rychle pochopili sestavování uzlových grafů, dokázali se orientovat v nových termínech a rozšířili a upřesnili si chápání pojmu funkce, který se pro ně stal mnohem konkrétnějším.

5 Závěr

Studium iterací otevírá další možnost, jak oživit výuku a představit studentům něco, s čím se běžně nesetkají. Dává nový úhel pohledu na funkce, který konvenční výuka funkcí nenabízí. Tento nový pohled může pomoci k hlubšímu pochopení funkcí a oproštění se běžnému, formálnímu pohledu.

Iterace nabízejí bohatou škálu možností, kterými se může učitel se svými žáky vydat. Může srovnávat souměrnost grafů nebo se snažit přiblížit k fraktálům. Nabízí se možnost vzájemného porovnávání kartézských a uzlových grafů. Může jít cestou skládání nebo rozkládání grafů a jejich propojitelnosti, ale to považuji pro středoškolské studium za velice náročné.

Ať se vydá jakoukoliv cestou vždy prohloubí znalosti studentů ohledně funkcí. Pevně věřím, že mé pracovní listy alespoň částečně pomohou této snaze zpestřit hodiny matematiky.

Reference

[1] *Binterová, H.:*

Charles Babbage a teorie iterací

[2] *Gábor, O., Kopanev, O., Križalkovič, K.:*

Teória vyučovania mathematiky na střední škole I

[3] *Hejný, M. a kolektiv:*

Teória vyučovania mathematiky na střední škole II

[4] *Bradis, V. M.:*

Methodika vyučování matematice na střední škole

[5] *Prof. RNDr. Rektorys, K. DrSc. a kolektiv:*

Přehled užité matematiky

[6] *Iterace*

`http://www.automatizace.cz/article.php?a=2413`

[7] *Beránek, J.:*

Iterativní teorie funkcí v úlohách

[8] *Květoň, P., Burian, K., Šimon, J.:*

Kapitoly z didaktiky matematiky I, II, III

[9] *Funkce jedné proměnné*

`http://kma.me.sweb.cz/funkce.pdf`

[10] *Voženílek, J.:*

`http://jan.gfxs.cz/studium/mater_m.htm`

[11] *Petrášková, V., Zmeškalová, E.:*

Algebraické funkce

[12] *A. Kopáčková*

Didaktika matematiky 2

http://kmd.fp.tul.cz/lide/kopackova/DM2_funkcni_mysleni_uvod.pdf

[13] *Root.cz*

http://www.root.cz/

[14] *techmania.cz*

http://www.techmania.cz/edutorium/art_exponaty.php?key=239