

Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Logistická rovnice

Bakalářská práce

Autor: Kristýna Vyhnálková
Studijní program: B 1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika
Vedoucí práce: Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, ze kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne 29. 6. 2016

Kristýna Vyhnálková

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat své vedoucí bakalářské práce Mgr. Jitce Kühnové, Ph.D. za odborné vedení práce, vstřícnost při konzultacích, trpělivost a cenné rady. Také bych ráda poděkovala své rodině a přátelům za podporu a trpělivost při vytváření této práce.

Anotace

VYHNÁLKOVÁ, K. *Logistická rovnice*. Hradec Králové, 2016. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D. 39 s.

Tato bakalářská práce bude pojednávat o logistické diferenční rovnici. Bude zde rozebrán její historický význam, jednotlivé vlastnosti a k nim potřebný matematický aparát. V závěru práce budou uvedeny různé aplikace této rovnice.

Klíčová slova

Logistická rovnice, chaos, rovnovážné body, periodické body a cykly, Malthus, Verhulst, Neumann, Ulam, May, Yorke, Feigenbaum

Annotation

VYHNÁLKOVÁ, K. *Logistic equation*. Hradec Králové, 2016. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D. 39 p.

This thesis will discuss the logistic difference equation. Here will be analyse historical significance, individual properties, and their necessary mathematical tools. At the end of the work will include various applications of this equation.

Keywords

Logistic equation, chaos, equilibrium points, periodic points and cycles, Malthus, Verhulst, Neumann, Ulam, May, Yorke, Feigenbaum

Obsah

Úvod	6
1 Osobnosti	7
1.1 Thomas Robert Malthus	7
1.2 Pierre François Verhulst	9
1.3 John von Neumann	10
1.4 Stanisław Marcin Ulam	11
1.5 Robert May	12
1.6 James Alan Yorke	12
1.7 Mitchell Jay Feigenbaum	13
2 Matematický aparát	15
2.1 Dynamické systémy	15
2.2 Diferenční rovnice	15
2.3 Rovnovážné body	16
2.4 Periodické body a cykly	22
3 Logistická rovnice	25
3.1 Analýza logistické rovnice	25
3.1.1 Rovnovážné body	25
3.1.2 2-cykly	27
3.1.3 Bifurkační diagram	30
3.2 Chaos	30
4 Modely růstu populace	34
4.1 Diskrétní exponenciální růst–Malthusův model	35
4.2 Diskrétní logistický růst–Verhulstův model	35
Závěr	36

Úvod

Logistická rovnice je jednou z nejpoužívanějších rovnic při modelování populačního růstu. Studuje se jak ve formě spojité (diferenciální), tak diskrétní (diferenční). V této práci se budeme zabývat úvodem do dynamických systémů prostřednictvím diferenční logistické rovnice.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole budou představeny osobnosti, které se zabývaly dynamickými systémy, teorií chaosu a nejvíce přispěly k rozvoji logistické diferenční rovnice.

V druhé kapitole zavádíme pojmy týkající se logistické diferenční rovnice, těmi jsou: dynamický systém, diferenční rovnice, rovnovážné body a periodické body a cykly. Tyto pojmy jsou převážně čerpány ze zdrojů [13], [14], [15], [16], [17].

Následující třetí kapitola pojednává o logistické rovnici. Je rozdělena do tří částí. První část se zaměřuje na analýzu logistické rovnice, druhá a třetí část pojednává o bifurkačním diagramu a chaosu.

V poslední kapitole představíme diskrétní modely Malthusův a Verhulstův. Pro zajímavost uvedeme několik příkladů spojitých modelů. Vzhledem k rozsahu této práce jde o prosté uvedení do problému dynamických systémů. Celá práce je sázena pomocí typografického systému L^AT_EX, grafy jsou vytvořeny v matematickém softwaru GeoGebra.

Kapitola 1

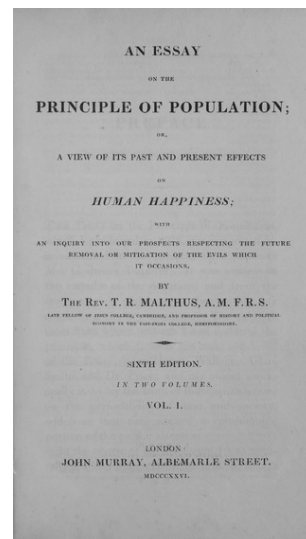
Osobnosti

Cílem této úvodní kapitoly je přiblížit osobnosti, které se zabývaly a přispěly ve zkoumání logistické rovnice a teorie chaosu.

1.1 Thomas Robert Malthus



Obrázek 1.1: Thomas Robert Malthus



Obrázek 1.2: Esej o principu populace

Reverend Thomas Robert Malthus se narodil 13. února 1766 ve Wottonu nedaleko Guildfordu ve Velké Británii, byl dítětem vzdělaných rodičů Daniela Malthuse a jeho ženy, bývalé Henrietty Catheriny Grahamové. Díky vážené a dobře situované rodině se Thomasovi dostalo elitního vzdělání v Cambridge. Při studiích vynikal v latině, angličtině, starořečtině a především matematice. Byl velmi silně duchovně založen a po ukončení studií působil několik let jako anglikánský pastor. Oženil se až ve věku 38 let. Vzal si svou sestřenicí Harriet a měl s ní tři děti. Od roku 1805 působil jako profesor dějin a po-

litické ekonomie na East India College. Podílel se na založení klubu politické ekonomie a Londýnské statistické společnosti. Zemřel 23. prosince 1834 v Bathu ve věku 86 let. Mezi léty 1798 a 1826 publikoval Malthus v několika vydáních svoje nejznámější dílo *Esej o principu populace*. Původně šlo o malý spis, protože autor správně tušil, že jde o sporné a ne příliš populární téma. Esej vyvolala mnoho protestů a odmítání. Avšak našli se i její nadšení příznivci. Úspěch této knihy předstihl očekávání a brzy Malthuse proslavila v Anglii i za jejími hranicemi. S každým novým vydáním přicházely i kritiky, které obohatily vydání další, a tak vznikaly stále nové materiály. Esej napsal v reakci na optimismus svého otce, a jako kritiku názorů anglického filozofa Williama Godwina (1756–1836) a francouzského matematika a osvícenského filozofa Marquise de Condorceta (1743–1794). Goodwin tvrdil, že se lidé mohou sebezdokonalovat tím, že rozvíjí svůj vlastní rozum – to znamená svou inteligenci, a právě ta hraje u člověka největší roli. Malthus s tvrzením, že u člověka hraje největší roli rozum, nesouhlasil, schvaloval, že se člověk může řídit rozumem, ale i když se jím řídí, stále podléhá základnímu přírodnímu zákonu. Podle Mathuse zákon přírody v člověku vyvolává dva základní pudy – potravní a rozmnožovací pud. Tvrdil, že tyto pudy stojí nad rozumem. Dále zkoumal existenci souladu mezi potravním a rozmnožovacím (populačním) motivem. Dospěl k závěru, že soulad mezi motivy není. Tvrdil, že se potraviny zvyšují aritmetickou řadou, tzn. 1, 2, 3, 4, 5, . . . ale populace se zvyšuje geometrickou řadou, tzn. že se čísla násobí 1, 2, 4, 8, 16, . . . V tomto Malthus viděl základní problém: potraviny rostou menší rychlostí než populace, a to způsobuje značné komplikace. Své tvrzení se snažil dokázat na výzkumech v USA i Evropě. Malthusova teorie nebyla nikdy potvrzena. Dalším jeho objevem byl například zákon klesajících výnosů. [1], [2], [3]



Obrázek 1.3: Pierre Franois Verhulst

1.2 Pierre François Verhulst

Pierre François Verhulst se narodil 28. října 1804 v Bruselu v tehdejší francouzské kolonii pozdější části Belgie. Pocházel ze zámožné rodiny, která mu dopřála kvalitní vzdělání. Střední škola Athenaeum v Bruselu měla vynikající pověst a dala Verhulstovi mnohem širší vzdělání, než jiné školy v té době, obzvláště ve výuce přírodovědných předmětů. Verhulst vynikal ve vědě, ale měl i jiné schopnosti, dvakrát vyhrál cenu latinské poezie. Spolu se spolužáky Josephem Plateauem a Guillaume-Adolphem Nerenburgerem získali hlavní cenu v matematice v srpnu 1822. V tomto roce Verhulst přerušil vzdělání v Athenaeu. Byl velmi horlivý, chtěl rychle pokračovat ve studiu na vysoké škole. V září 1822 začal studovat na univerzitě v Gantu obor exaktních věd. Po pouhých 3 letech studia dne 3. srpna 1825 získal doktorský titul za svou práci *De resolutione tum algebraica, tum lineari Aequationum binominalium*¹, ve které studoval snížení stupně binomických rovnic. První zmínka o populačním růstu vedoucí ke vzniku logistické rovnice vznikla v roce 1838 v příspěvku *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*², kde píše:

„Víme, že slavný (Thomas Robert) Malthus ukázal, že lidská populace má tendenci růst geometrickou řadou, tedy tak, že se zdvojnásobí za určité časové období, například každých dvacet pět let. Toto tvrzení je nesporné, pokud budeme ignorovat zvyšující se problém s obstaráním si jídla... Virtuální nárůst populace je proto omezen velikostí a plodností země. Výsledkem je, že populace se dostává blíže a blíže k dosažení rovnovážného stavu...”

V příspěvku Verhulst argumentoval proti modelu populačního růstu a místo toho navrhl model s diferenciální rovnicí, nyní známý jako logistická rovnice ve tvaru

$$x' = rx(1 - x).$$

Další knihu o populačním růstu s názvem *Recherches mathématiques sur la Loi d'accroissement de la population*³ vydal v roce 1844. Není jasné, proč pojmenoval rovnici jako logistickou, Hugo Pastijn se domnívá:

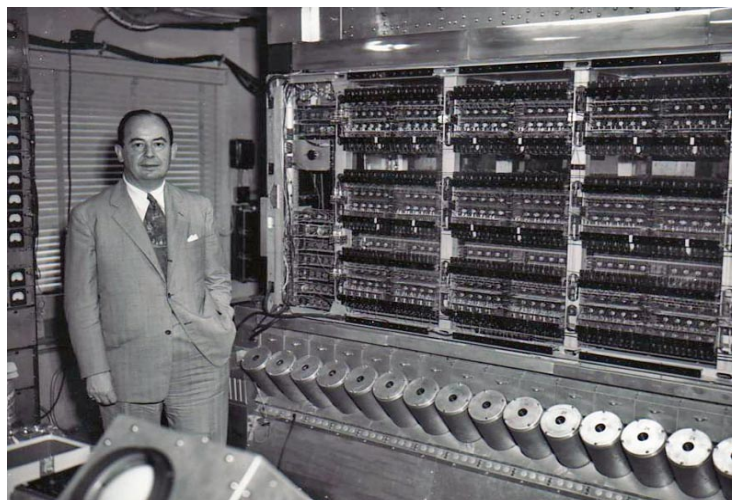
„Není jasné, proč Verhulst ve svém sdělení z listopadu 1844 nazývá tuto křivku A courbe logistique⁴. Dalo by se odhadnout, že se odkazuje na termín logistika, související s přepravou a distribucí v dodavatelském řetězci armády, analogicky k zásobování obživy, to znamená, populace, která se považuje za omezenou. Termín logistika se do jisté míry používal ve vojenském prostředí. Mohl s ním být obeznámen prostřednictvím svých vojenských kontaktů ve Vojenské akademii v Bruselu. Další možné vysvětlení termínu logistiky mohl být francouzský výraz „logis“ (místo k životu), který samozřejmě souvisel s omezenými zdroji pro obživu populace, kterou se Verhulst zabýval ve svém modelu.”

¹Rozlišení a vyřešení algebraických a také lineárních binomických rovnic

²Pokyny k zákonu o růstu populace

³Matematický výzkum zákonu růstu populace

Verhulst byl v roce 1848 zvolen prezidentem Královské akademie pro vědy a umění Belgie. Špatný zdravotní stav, který ho trápil celý život, se zhoršoval a v roce 1849 zemřel. [4], [5], [6]



Obrázek 1.4: John von Neumann

1.3 John von Neumann

Matematik, informatik, chemik, fyzik, inženýr, vynálezce, ekonom, jaderný vědec a vysokoškolský pedagog rodným jménem János Lajos Neumann se narodil 28. prosince 1903 v Budapešti v Maďarsku. Neumann se celosvětově proslavil v roce 1928 jako spoluvůdce matematické teorie her, která se dodnes používá v ekonomice i v politice. V roce 1930 se stal, už jako proslulý vědec, spolu s Albertem Einsteinem zakládajícím členem a vedoucím oddělení matematiky nového "Institut for Advanced Study" v Princetonu. Nejvýznamnější jsou jeho objevy jako průkopníka digitálních počítačů a operační teorie kvantové mechaniky a konceptu celulárního automatu. Spolu s Edwardem Tellerem a Stanislawem Ulamem se zabýval jadernou fyzikou, kde vytvořili základní předpoklady termionukleárních reakcí a vodíkové bomby. V roce 1947 spolu se Stanislawem Ulamem studoval vlastnosti rovnice

$$y_{n+1} = 1 - 2y_n^2,$$

ve která je dnes známá jako Ulamovo zobrazení. Toto zobrazení lze převést na tvar logistické rovnice s parametrem $r = 4$

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n).$$

Zemřel po dlouhém boji s rakovinou 8. února 1957. [7]

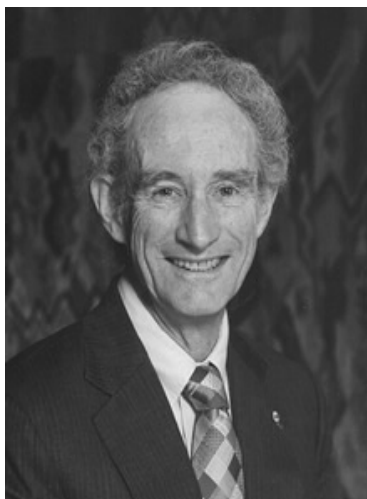
⁴Logistická křivka



Obrázek 1.5: Stanislaw Marcin Ulam

1.4 Stanislaw Marcin Ulam

Stanislaw Marcin Ulam se narodil 13. dubna 1909 ve Lwóvu v tehdejším Rakousku-Uhersku. Byl americký matematik polského a židovského původu. Stal se vynálezcem termonukleární zbraně, rakety na nukleární pohon a představil řadu matematických teorií. Dokonce si nechal patentovat konstrukci atomové bomby. Jak již bylo řečeno, Ulam pracoval s Neumanem na studiu Ulamova zobrazení. V roce 1984 zemřel na srdeční mrtvici v Santa Fe. [8]



Obrázek 1.6: Robert May

1.5 Robert May

Fyzik a ekolog Robert May se narodil 8. ledna 1938 v Sydney v Austrálii. Již od počátku své kariéry se May věnoval populační dynamice zvířat. Na logistickou rovnici narazil při popisu vývoje populace. Zjistil, jak se chová populace při nízkých hodnotách parametru r , také zjistil při jakých hodnotách se populace neustálí. Věděl, co se děje až do hodnoty 3,5699, ale nebylo mu jasné, co za touto hodnotou následuje. Odpověď na tuto záhadu odhalili až jeho doktorandi, James Yorke a Tien-Yien Li, které dnes považujeme za zakladatele teorie Chaosu. V roce 2001 mu byl udělen doživotní titul Lord. May stále ještě učí a sbírá různé ceny za své objevy v oboru populačního vývoje. [9], [10]



Obrázek 1.7: James Alan Yorke

1.6 James Alan Yorke

James Alan Yorke, profesor matematiky a fyziky, bývalý předseda matematiky na University of Maryland, College Park, se narodil 3. srpna 1941 v Plainfieldu v New Jersey ve Spojených státech amerických. Yorkeho snad nejvíce proslavil článek „*Period three implies Chaos*“⁵, na kterém spolupracoval s již zmíněným Tien-Yienem. Článek publikovali v roce 1975 v „*The American Mathematical Monthly*“⁶. Profesor Yorke byl spoluautorem třech knih o chaosu „*Dynamics: Numerical Explorations*“⁷, „*Coping with Chaos*“⁸ a „*Chaos: An*

⁵Perioda tři implikuje chaos

⁶Americký matematický měsíčník

⁷Dynamika: Numerické zkoumání

⁸Jak se vyrovnat s chaosem

*Introduction to Dynamical Systems*⁹ a monografie o kapavce a epidemiologii. V roce 2003 spolu s Beniotym Mandelbrotem dostal japonskou cenu v oblasti vědy a technologie. Yorkeho životopis obsahuje více než 300 publikací a mnohé z nich jsou dostupné online. [11]



Obrázek 1.8: Mitchell Jay Feigenbaum

1.7 Mitchell Jay Feigenbaum

Mitchell Jay Feigenbaum se narodil 19. prosince 1944 ve Filadelfii ve Spojených státech amerických. Feigenbaum je matematický fyzik, jehož práce v teorii chaosu vedla k objevu známé Feigenbaumovy konstanty. V roce 1970 získal doktorát za práci o disperzních vztazích podle Francisova zákona. Pár let působil na Cornellu jako vědecký pracovník, a poté jako postgraduální pracovník na Polytechnickém Institutu ve Virginii. Po dvou letech strávených ve Virginii dostal nabídku na dlouhodobější spolupráci v Los Alamos v Novém Mexiku v Národní laboratoři, kterou přijal. Zapojoval se do Wilsonovy skupiny, jejíž myšlenkou bylo vyřešení půl století starého problému turbulence. Feigenbaum píše:

„Když jsem dorazil do Los Alamos, vedoucí oddělení teorie P. Crruthers cítil, že nastal ten správný čas a já byl vhodný člověk, který by mohl zjistit, jestli Wilsonova skupina renormalizace může vyřešit století a půl starý problém turbulence. Ve zkratce – nemohla, nebo doposud nevyřešila – ale dovedlo mě to k nádherným směrům.“

⁹Chaos: Úvod do dynamických systémů

Do těchto „nádherných směrů“, na které Feigenbaum odkazuje, zahrnuje studii chaosu, ve které vytvořil pozoruhodný objev. Díky pomalým počítačům se mu podařilo zpozorovat všechny mezistupně výpočtu, které mu pomohly při studiu chování diferenční rovnice. V roce 1975 našel konstanty, díky kterým přispěl ke studiu logistické rovnice a teorii chaosu. Tyto konstanty byly po Feigenbaumeovi pojmenovány, tzv. Feigenbaumovy konstanty, vyjadřující poměr rozdílu mezi dvěma následujícími *bifurkačními*¹⁰ body. V dubnu 1976 Feigenbaum dokončil svůj první článek na toto téma a předložil ho časopisu, poté čekal šest měsíců na rozhodnutí, ale bohužel byl odmítnut. V následujících letech byl požádán o kopii článku od více než 1000 vědců. Nakonec se mu podařilo zveřejnit článek v roce 1978. V roce 1982 byl jmenován profesorem. O pár let později získal Wolfovu cenu za fyziku. [12]

¹⁰rozvětujícími se

Kapitola 2

Matematický aparát

V této práci se budeme hlavně zabývat diferenční rovnicí ve tvaru

$$x(n+1) = rx(n)(1-x(n)). \quad (2.1)$$

Tato rovnice se nazývá *diskrétní logistická rovnice* s počáteční podmínkou $x(0)$. V této kapitole jsou čerpány definice z knih [13] částečného překladu [14], [15], [16], [17].

2.1 Dynamické systémy

Vývoj určitých jevů měnících se v čase nazýváme *dynamickými systémy*, tyto systémy používáme tam, kde potřebujeme vyjádřit dynamické chování. Dynamickým chováním máme na mysli určitou změnu stavu systému v čase (např. rok, měsíc, týden, den, ...) Tyto jevy nacházíme například v oblasti ekonomie, statistiky a strojového učení, medicíně či chemii. Nejčastěji jsou tyto jevy spojovány s růstem či poklesem populace, řešení průtoku elektrického proudu v elektrických obvodech či spoření na bankovních účtech. Dynamické systémy lze popsat diferenčními nebo diferenciálními rovnicemi případně jejich soustavami. U dynamických systémů nás zajímá vývoj jevů, často si klademe otázku, jak lze předpovědět stav systémů v budoucnosti a jakých stavů bude systém nabývat.

2.2 Diferenční rovnice

Diferenční rovnice obvykle popisují vývoj určitého jevu v průběhu času, pokud chápeme čas v diskrétních krocích. Například máme populaci v čase $(n+1)$, jejíž velikost $x(n+1)$ je funkcí n -té generace $x(n)$. Tento vztah vyjádříme pomocí *diferenční rovnice*, kde n značí časovou jednotku

$$x(n+1) = f(x(n)) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Tato diferenční rovnice se nazývá *autonomní* neboli nezávislá na čase. Pokud bychom měli daný počáteční bod x_0 , můžeme generovat posloupnost

$$\begin{aligned}x_0 &= x(0), \\x_1 &= x(1) = f(x(0)) = f(x_0), \\x_2 &= x(2) = f(x(1)) = f(f(x_0)) = f^2(x_0), \\x_3 &= x(3) = f(x(2)) = f(f(f(x_0))) = f^3(x_0), \\&\vdots \\x_n &= x(n) = f^n(x_0).\end{aligned}$$

Kde f je *iterační funkcí*, bod x_0 je *počáteční iterací* a složená funkce f^n , pro kterou platí

$$\begin{aligned}f^1(x_0) &= f(x_0), \\f^{n+1}(x_0) &= f(f^n(x_0)) \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots,\end{aligned}$$

se nazývá *n-tá iterace* bodu x_0 , viz Obrázek 2.1.

2.3 Rovnovážné body

Definice 2.1. Nechť je dáno zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Bod x^* z definičního oboru f budeme nazývat *rovnovážný bod* diferenční rovnice

$$x(n+1) = f(x(n)), \tag{2.3}$$

jestliže je pevným bodem zobrazení f , tj. $f(x^*) = x^*$.

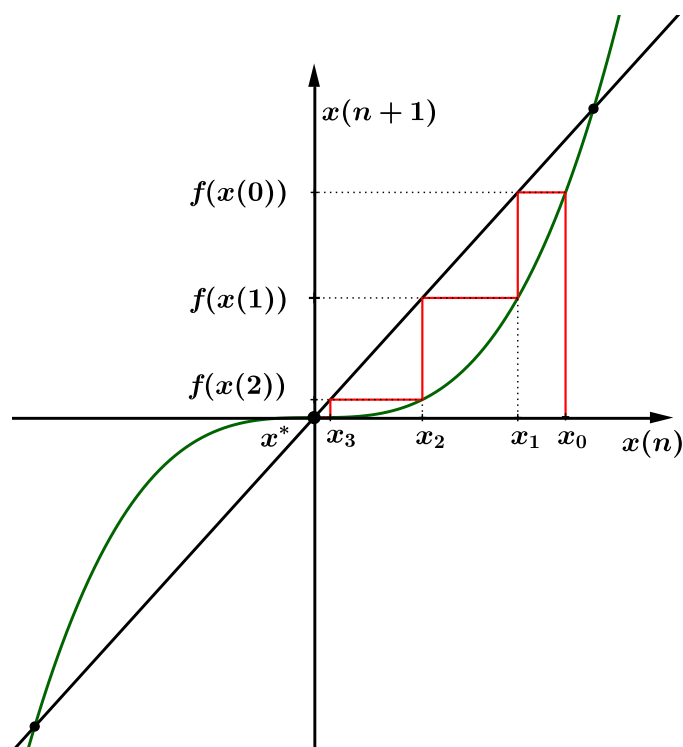
Pokud budeme rovnovážný bod x^* sledovat v čase, pak $x^* = x^*(n)$ můžeme chápat jako konstantní funkci $y = x^*$, neboť jestliže $x(0) = x^*$ je počátečním bodem, potom platí

$$\begin{aligned}x(1) &= f(x^*) = x^* \\x(2) &= f(x(1)) = f(x^*) = x^* \\x(3) &= f(x(2)) = f^2(x^*) = x^* \\&\vdots \\x(n) &= f(x)^{n-1} = f^n(x^*) = x^*.\end{aligned}$$

Graficky rovnovážným bodem je x -ová souřadnice průsečíku grafu funkce $f(x)$ s grafem funkce $y = x$. Obrázek 2.1 znázorňuje situaci pro funkci

$$x(n+1) = x^3(n),$$

kde $f(x) = x^3$, má tři rovnovážné body. K nalezení těchto bodů položíme $f(x^*) = x^*$, čili dostáváme rovnici $x^3 = x$, kterou když vyřešíme, dostaneme x -ové souřadnice jednotlivých



Obrázek 2.1: Graf funkce $f(x) = x^3$ [vlastní tvorba]

rovnovážných bodů: $x_0^* = -1$, $x_1^* = 0$ a $x_2^* = 1$.

Obrázek 2.2 ilustruje jiný příklad, kdy

$$f(x) = x^2 - x + 1.$$

a tedy, když položíme funkci $f(x) = x^2 - x + 1 = x$ získáme jen jeden rovnovážný bod $x^* = 1$.

Definice 2.2. Necht' x je bodem definičního oboru zobrazení f . Jestliže existuje kladné celé číslo n a rovnovážný bod x^* rovnice (2.3) takový, že $f^n(x) = x^*$, $f^{n-1}(x) \neq x^*$, potom x nazýváme *eventuálně rovnovážným bodem*.

Příklad 2.1. (Stanové zobrazení). Uvažujeme rovnici

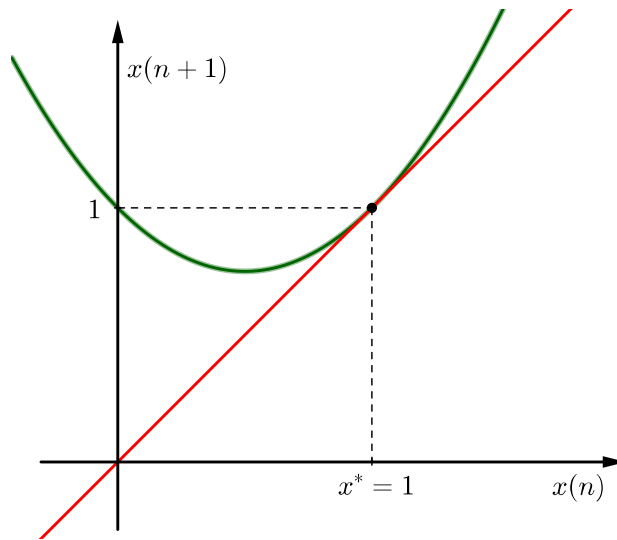
$$x(n+1) = T(x(n)),$$

kde

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Tato rovnice má dva rovnovážné body 0 a $\frac{2}{3}$, viz Obrázek 2.3.

$$T(0) = 2 \cdot 0 = 0,$$



Obrázek 2.2: Rovnovážný bod $f(x) = x^2 - x + 1$ [vlastní tvorba]

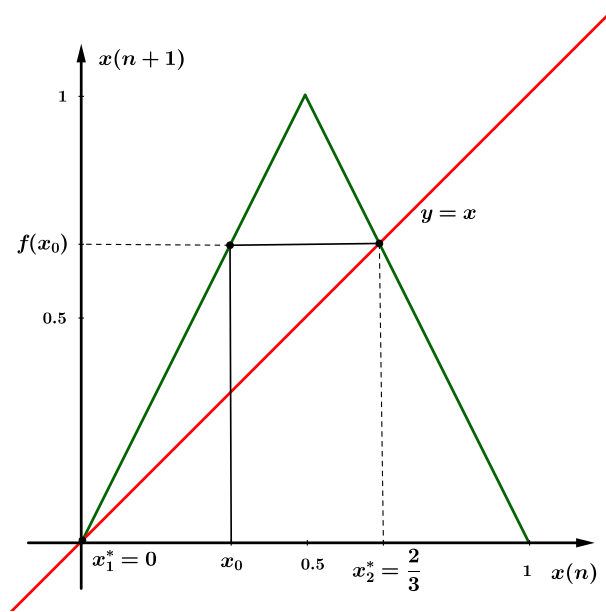
$$T\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Nyní si ukážeme několik příkladů eventuálně rovnovážných bodů. Například posloupnost:

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{2}{3}, \\ T\left(\frac{1}{6}\right) &= \frac{1}{3}, & T^2\left(\frac{1}{6}\right) &= T\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}, \\ T\left(\frac{1}{12}\right) &= \frac{1}{6}, & T^2\left(\frac{1}{12}\right) &= \frac{1}{3}, & T^3\left(\frac{1}{12}\right) &= \frac{2}{3}, \\ T\left(\frac{1}{3 \cdot 2^n}\right) &= \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}, & T^2\left(\frac{1}{3 \cdot 2^n}\right) &= \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}}, & \dots, & T^n\left(\frac{1}{3 \cdot 2^n}\right) &= \frac{1}{3}, & T^{n+1}\left(\frac{1}{2^n}\right) &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

To znamená, že rovnovážný bod $\frac{2}{3}$ je dosažitelný z každého bodu tvaru $\frac{1}{3 \cdot 2^n}$, tedy posloupnost těchto bodů tvoří eventuálně dosažitelných bodů. Obdobně můžeme nalézt posloupnost:

$$T\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad T^2\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^{n-2}}, \quad \dots, \quad T^n\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}, \quad T^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad T(1) = 0.$$



Obrázek 2.3: Rovnovážné body stanového (z anglického tent) zobrazení [vlastní tvorba]

Definice 2.3. Nechť x^* je rovnovážný bod diferenční rovnice (2.2). Pak:

1. x^* nazveme *stabilní* (viz Obr. 2.4), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každou počáteční iteraci x_0 , jež splňuje nerovnost $|x_0 - x^*| < \delta$, platí $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$, a to pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Jestliže x^* není stabilní, pak se nazývá *nestabilní* (viz Obr. 2.5).
2. Řekneme, že bod x^* je *atraktivní (přitažlivý)*, jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé x_0 splňující

$$|x(0) - x^*| < \eta \quad \text{platí} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*.$$

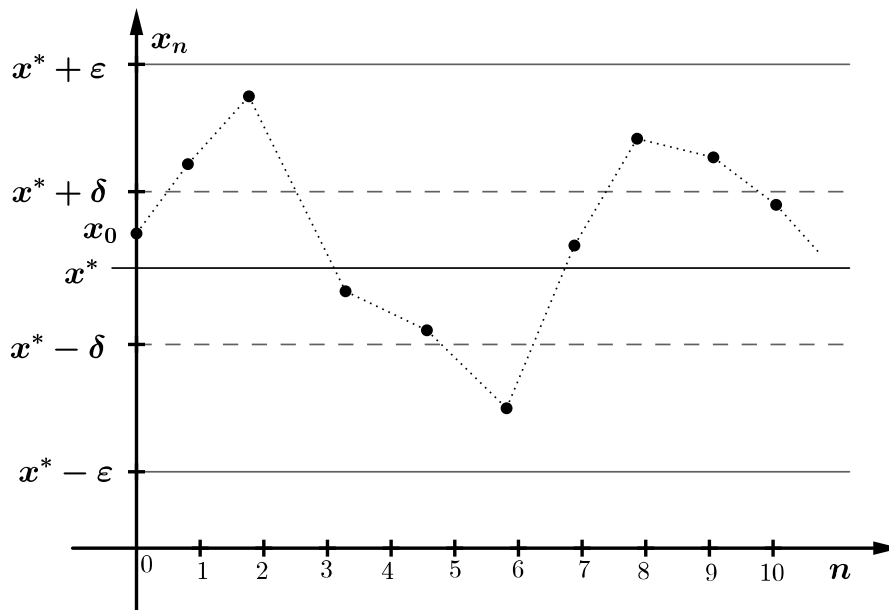
Jestliže $\eta = \infty$, potom se bod x^* nazývá *globálně přitahující (atraktivní) rovnovážný bod* nebo *globální atraktor*.

Naopak řekneme, že bod x^* je *odpuzující (repulzivní)*, jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $x_0 \neq x^*$ splňující $|x_0 - x^*| < \eta$ existuje takové $n \in \mathbb{N}$, že $|f^n(x_0) - x^*| > \eta$.

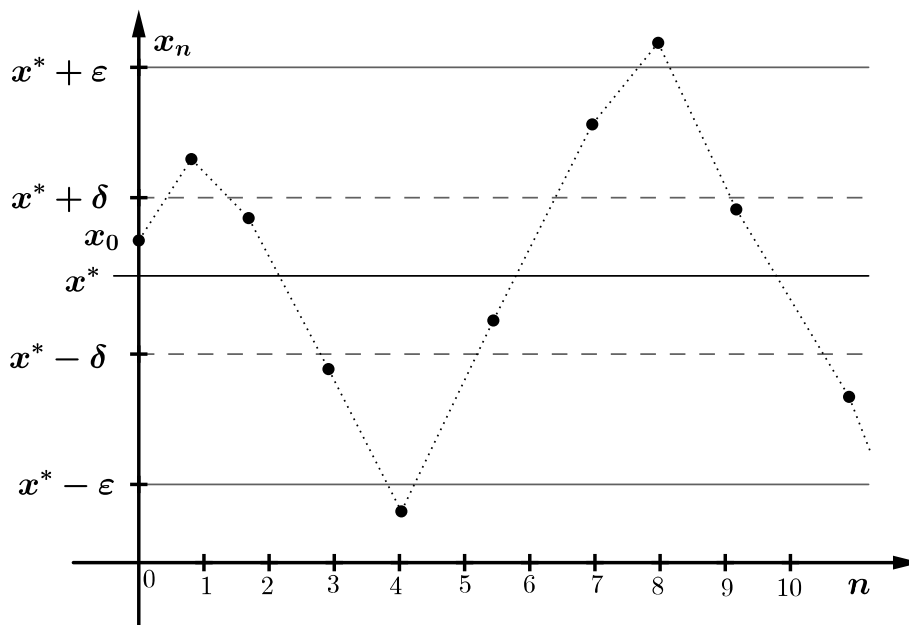
3. Bod x^* je *asymptoticky stabilní rovnovážný bod* (viz Obr. 2.6), jestliže je stabilní a přitažlivý. Jestliže $\eta = \infty$, potom bod x^* nazýváme *globálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod*.

V následujících větách si uvedeme důležité kritérium asymptotické stability či nestability rovnovážných bodů.

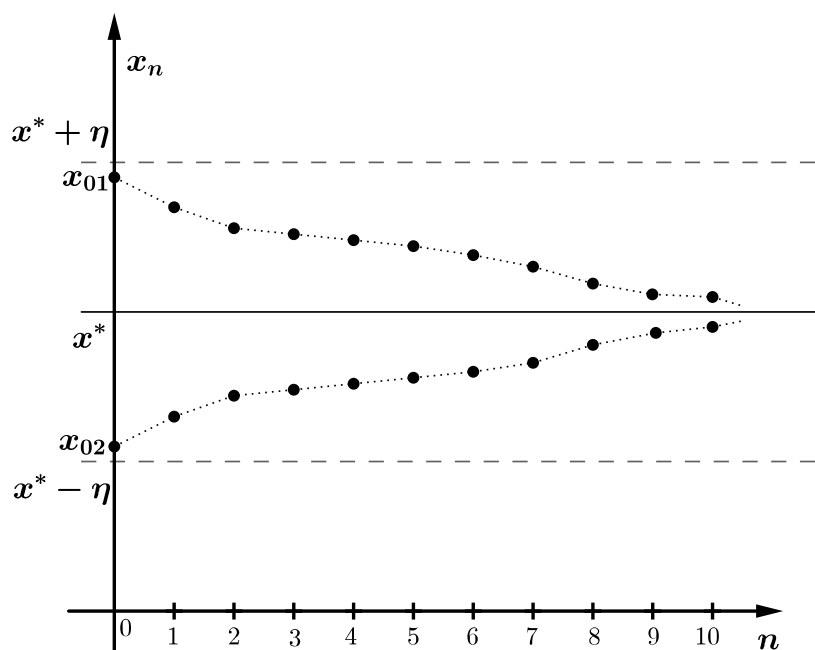
Věta 2.1. Nechť x^* je rovnovážným bodem diferenční rovnice (2.2), kde f je spojitě diferencovatelná v x^* . Potom jsou pravdivé následující výroky:



Obrázek 2.4: Stabilní rovnovážný bod x^* . Pokud se x_0 nachází v δ -okolí bodu x^* , pak je x_n v ε -okolí x^* pro všechna $n > 0$. [vlastní tvorba]



Obrázek 2.5: Nestabilní rovnovážný bod x^* . Existuje takové $\varepsilon > 0$, že pro každé x_0 splňující $|x_0 - x^*| < \delta$ pro každé $\delta > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$, pro které $x_n = f^n(x_0)$ neleží v ε -ovém okolí bodu x^* . [vlastní tvorba]



Obrázek 2.6: Asymptoticky stabilní rovnovážný bod x^* . Je stabilní a zároveň platí: jestliže x_0 je v η -okolí x^* , pak $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x^*$. [vlastní tvorba]

- a) Jestliže $|f'(x^*)| < 1$, potom je x^* asymptoticky stabilní.
- b) Jestliže $|f'(x^*)| > 1$, potom je x^* nestabilní.

Věta 2.2. Předpokládáme, že pro rovnovážný bod x^* diferenční rovnice (2.2) má $f'(x^*) = 1$. Potom platí následující tvrzení:

- a) Jestliže $|f''(x^*)| \neq 0$, potom je x^* nestabilní.
- b) Jestliže $|f''(x^*)| = 0$ a $f'''(x^*) > 0$, potom je x^* nestabilní.
- c) Jestliže $|f''(x^*)| = 0$ a $f'''(x^*) < 0$, potom je x^* asymptoticky stabilní.

Důkaz. Viz použitá literatura [13].

Nyní budeme uvažovat Schwarzovu derivaci funkce.

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2.$$

Konkrétně pro případ kdy $f'(x^*) = -1$, je

$$Sf(x^*) = -f'''(x^*) - \frac{3}{2}(f''(x^*))^2.$$

Věta 2.3. Předpokládáme, že rovnovážný bod x^* diferenční rovnice (2.2) má $f'(x^*) = -1$. Potom platí následující tvrzení:

- a) Jestliže $Sf(x^*) < 0$, potom je x^* asymptoticky stabilní.
- b) Jestliže $Sf(x^*) > 0$, potom je x^* nestabilní.

2.4 Periodické body a cykly

Definice 2.4. Nechť x_0 leží v definičním oboru zobrazení f . Potom:

1. x_0 nazýváme *periodický bod* zobrazení f nebo (2.2), jestliže pro nějaké přirozené k je $f^k(x_0) = x_0$ a $f^i(x_0) \neq x_0$ pro $i = 1, 2, \dots, k-1$. To znamená, že bod je k -periodický, jestliže je pevným bodem f^k , tj. jestliže je rovnovážným bodem diferenční rovnice

$$x(n+1) = g(x(n)), \quad (2.4)$$

kde $g = f^k$. Periodická orbita bodu x_0 ,

$$O(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\},$$

je často nazývána *k-cyklos*.

2. x_0 nazveme *eventuálně k-periodickým*, jestliže pro nějaké přirozené číslo m je $f^m(x_0)$ k -periodickým bodem. Jinými slovy, x_0 je eventuálně k -periodické, jestliže

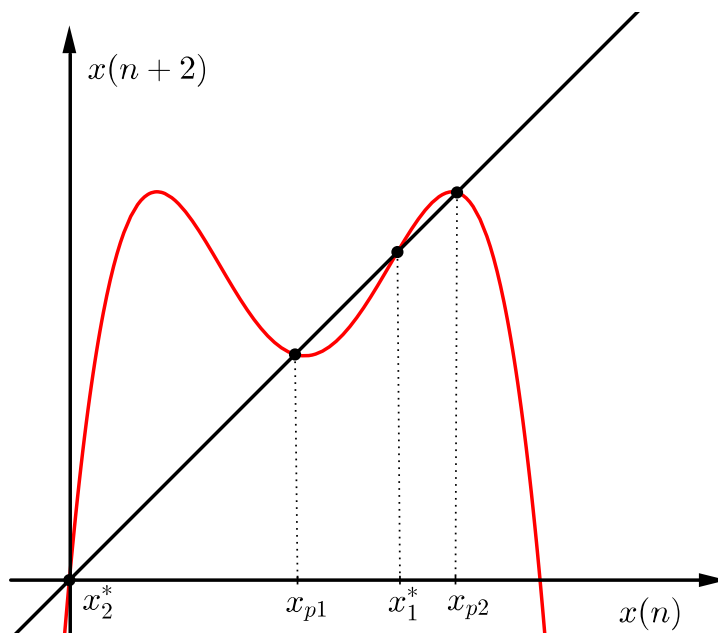
$$f^{m+k}(x_0) = f^m(x_0).$$

Na Obrázku 2.7 můžeme vidět čtyři pevné body grafu funkce f^2 , kde f je tzv. *logistická funkce*. Z již zmíněných čtyřech pevných bodů, jsou dva (x_1^*, x_2^*) pevnými body funkce f (viz Obr. 2.8). Body (x_{p1}, x_{p2}) tvoří 2-cyklos.

Definice 2.5. Nechť bod x_0 je k -periodickým bodem zobrazení f . Pak řekneme, že bod x_0 je:

1. *stabilní*, jestliže je stabilním pevným bodem zobrazení f^k ,
2. *asymptoticky stabilní*, jestliže je asymptoticky stabilním pevným bodem zobrazení f^k ,
3. *nestabilní*, jestliže je nestabilním pevným bodem zobrazení f^k .

Poznámka 2.1. Z definice (2.5) vyplývá, že pokud je jeden bod nějakého k -cyklu stabilní, pak jsou stabilní i ostatní body tohoto cyklu. Toto tvrzení platí i pro nestabilitu bodů, tudíž jestliže je jeden bod nějakého k -cyklu nestabilní, pak jsou nestabilní i ostatní body tohoto cyklu. Proto mluvíme o stabilitě, případně nestabilitě celého periodického orbitu.



Obrázek 2.7: Graf funkce f^2 , kde $f(x) = 3, 3x(1 - x)$ [vlastní tvorba]

Dále si uvedeme kritéria stability cyklů, neboli kritéria stability pevných bodů funkce f^k , tato kritéria zkoumáme podobně jako u pevných bodů funkce f .

Věta 2.4. *Nechť $O(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ je k -cyklus funkce f , která je spojitě diferencovatelná. Pak:*

a) k -cyklus $O(x_0)$ a tedy i každý jeho bod je asymptoticky stabilní, jestliže platí

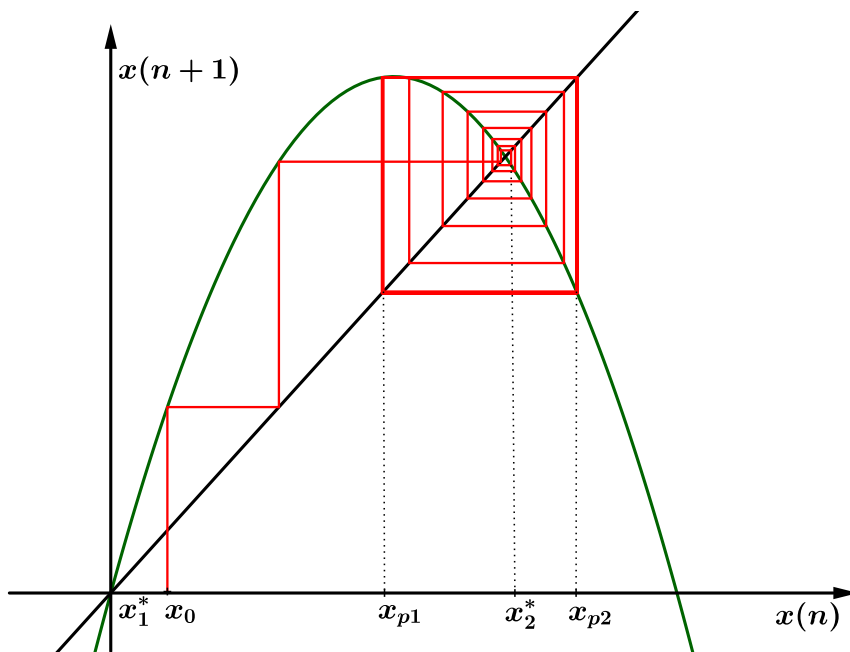
$$|f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdot \dots \cdot f'(x_{k-1})| < 1,$$

b) k -cyklus $O(x_0)$ a tedy i každý jeho bod je nestabilní, jestliže platí

$$|f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdot \dots \cdot f'(x_{k-1})| > 1,$$

Důkaz. Podle věty (2.4) je x stabilní $|f'(x)| < 1$ a nestabilní $|f'(x)| > 1$. Podle věty o derivaci složené funkce platí, že

$$\begin{aligned} [f^k(x_0)]' &= [f(f^{k-1}(x_0))]' = f'(f^{k-1}(x_0)) \cdot [f^{k-1}(x_0)]' = \\ &= f'(x_{k-1}) \cdot [f^{k-1}(x_0)]' = \dots = f'(x_{k-1}) \cdot \dots \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$



Obrázek 2.8: Graf funkce $f(x) = 3,3x(1 - x)$, kde bod x_0 je skoro periodický bod a body x_{p1} a x_{p2} jsou periodické. [vlastní tvorba]

Kapitola 3

Logistická rovnice

V této kapitole rozebereme rovnici (3.1). Začneme rovnovážnými body a přes cykly se dostaneme až k chaosu. [18]

Máme tedy logistickou diferenční rovnici

$$x(n+1) = rx(n)(1-x(n)), \quad (3.1)$$

která se váže k iterování funkce

$$F_r(x) = rx(1-x), \quad x \in [0, 1], \quad r \in [0, 4].$$

3.1 Analýza logistické rovnice

Dále budeme používat označení pro rovnici

$$F_r(x) = rx(1-x).$$

3.1.1 Rovnovážné body

Abychom dostali rovnovážný bod funkce F_r musíme položit

$$F_r(x) = x,$$

tj.

$$rx(1-x) = x.$$

Řešíme tedy kvadratickou rovnici

$$rx^2 + (1-r)x = 0, \quad (3.2)$$

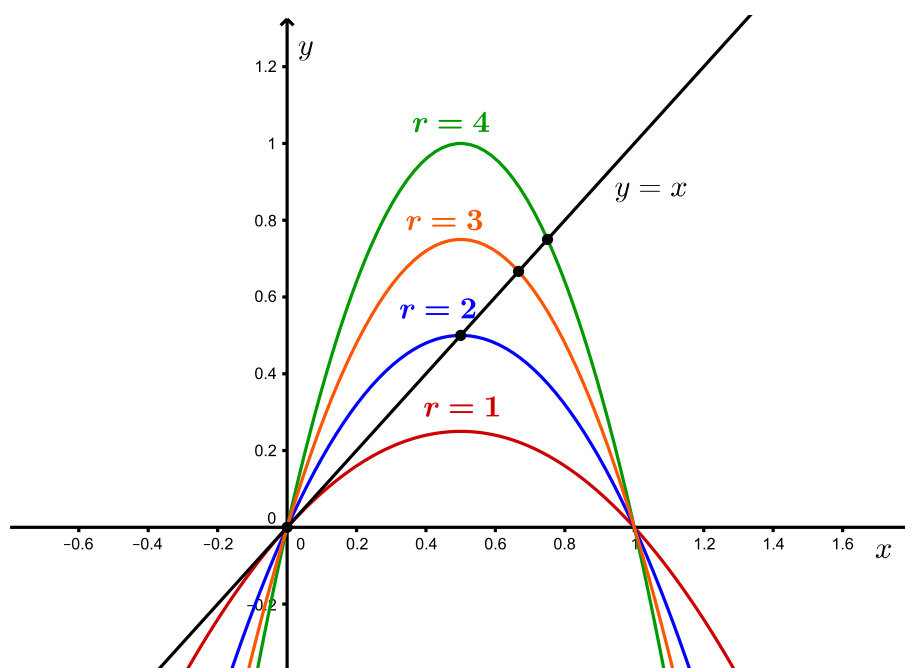
jejímiž kořeny jsou

$$x_1 = 0 \quad a \quad x_2 = 1 - \frac{1}{r}.$$

V některých případech jsou oba tyto kořeny rovnice zároveň pevnými body funkce F_r , které označujeme

$$x_1^* = 0 \quad a \quad x_2^* = 1 - \frac{1}{r}.$$

Počet pevných bodů funkce F_r závisí na hodnotě parametru r . Obrázek 3.1 znázorňuje rovnovážné body logistického zobrazení F_r . Nyní vyšetříme stabilitu každého rovnovážného bodu v závislosti na hodnotách parametru $r \in \langle 0, 4 \rangle$. Uvažujeme definiční obor funkce F_r pro interval $\langle 0, 1 \rangle$



Obrázek 3.1: Graf funkce F_r pro různé hodnoty parametru r [vlastní tvorba]

1. Bod rovnováhy $x_1^* = 0$ je pevným bodem funkce F_r na celém jejím definičním oboru pro všechny hodnoty parametru r .

a) Pro $0 < r < 1$, je za podmínky

$$|F_r'(x_1^*)| < 1,$$

tj.

$$|r - 2r(x_1^*)| < 1,$$

bude podle věty 2.1 pevný bod $x^* = 0$ asymptoticky stabilní. Ověříme si dosažením $x_1^* = 0$, pak

$$|r| < 1.$$

A tento bod $x_1^* = 0$ je jediným pevným bodem funkce F_r pro $r \in \langle 0, 1 \rangle$. Graf funkce na tomto intervalu leží pod přímkou $y = x$, viz Obrázek 3.1.

b) Příklad pro $r = 1$ si žádá speciální pozornost. Protože $F_1'(0) = 1$ a $F_1''(0) = -2$ z věty 2.2 plyne, že 0 je nestabilní. To je jistě pravda, když uvažujeme pravé i levé okolí nuly. Pokud se podíváme blíže, zjistíme, že stabilita je porušena pouze zleva, zatímco zprava lze bod 0 označit za asymptoticky stabilní. Levé okolí ovšem nepatří do definičního oboru funkce F_r , a tak bod nula je pro naši rovnici asymptoticky stabilní na celém intervalu $[0, 1]$.

c) Pro $r > 1$ je $x_1^* = 0$ podle věty 2.2 nestabilním pevným bodem.

2. Bod rovnováhy $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$, $r \neq 1$. Aby platilo $x^* \in \langle 0, 1 \rangle$, musí být $r > 1$. Jelikož platí

$$\begin{aligned} F'(x) &= r - 2rx, \\ F'\left(1 - \frac{1}{r}\right) &= r - 2r\left(1 - \frac{1}{r}\right), \\ F'\left(1 - \frac{1}{r}\right) &= r - 2r + 2, \end{aligned}$$

pak s využitím vět 2.1 a 2.3 dostaneme:

a) pro $1 < r < 3$ je x^* asymptoticky stabilní,

b) pro $r = 3$ je x^* nestabilní,

c) pro $r > 3$ je x^* nestabilní.

3.1.2 2-cykly

Abychom našli 2-cykly, musíme řešit rovnici $F_r^2(x) = x$, tedy

$$r^2x(1-x)[1-rx(1-x)] = x, \quad (3.3)$$

roznásobíme

$$-r^3x^4 + 2r^3x^3 - r^3x^2 - r^2x^2 + r^2x = x,$$

upravíme

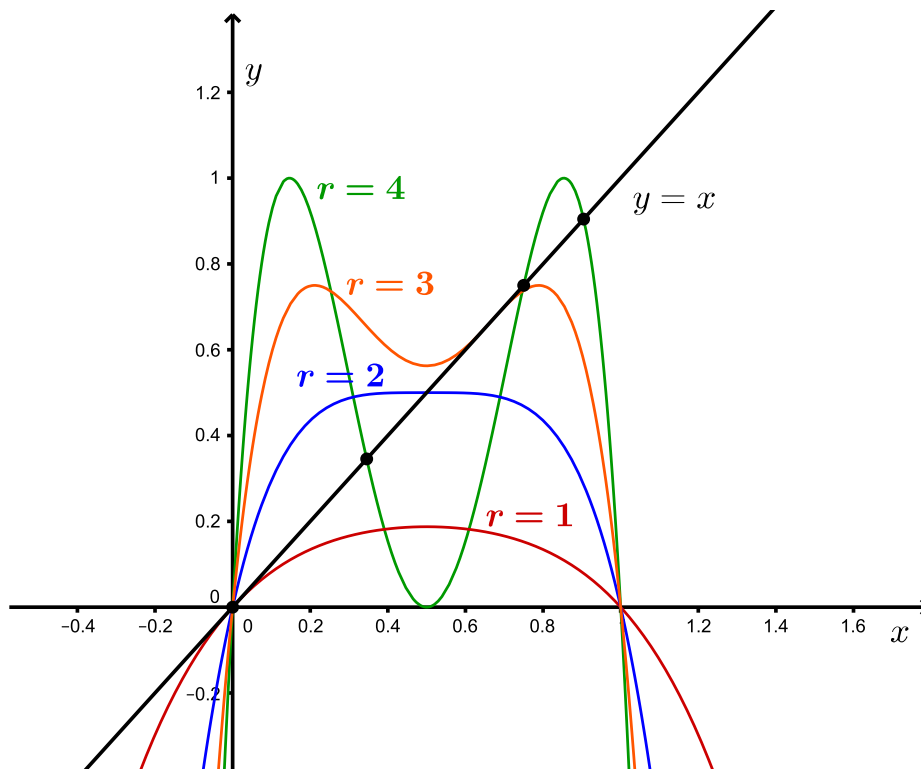
$$r^3x^4 - 2r^3x^3 + (r^3 + r^2)x^2 - (r^2 - 1)x = 0, \quad (3.4)$$

a dostaneme rovnici čtvrtého stupně, která má nejvýše čtyři reálné kořeny. Mezi kořeny rovnice (3.3) patří i pevné body $x_1^* = 0$ a $x_2^* = \frac{r-1}{r}$, abychom tyto body vyloučili, vydělíme rovnici (3.4) polynomem $(x - x_1^*)(x - x_2^*)$ tj. $x(x - \frac{r-1}{r})$. Získáme kvadratickou rovnici ve tvaru

$$r^2x^2 - r(r+1)x + (r+1) = 0. \quad (3.5)$$

Diskriminant této kvadratické rovnice je

$$D = (-(r^2 + r))^2 - 4r^2(r + 1),$$



Obrázek 3.2: Graf funkce F_r^2 pro různé hodnoty parametru r [vlastní tvorba]

po úpravě máme

$$D = r^4 - 2r^3 - 3r^2 = r^2(r - 3)(r + 1).$$

Řešeními jsou body 2-cyklu

$$x_3^* = \frac{r + 1 - \sqrt{(r - 3)(r + 1)}}{2r},$$

$$x_4^* = \frac{r + 1 + \sqrt{(r - 3)(r + 1)}}{2r}.$$

Z definičního oboru těchto řešení je zřejmé, že 2-cyklus existuje pouze pro $r > 3$. Jestliže je parametr $r = 3$ diskriminant $D = 0$ a jediným kořenem je pevný bod $x^* = \frac{2}{3}$, pro lepší představu viz Obrázek 3.2. Pokud r přesáhne tuto kritickou hodnotu 3 a zároveň $D > 0$, pak vzniknou dva různé reálné kořeny odpovídající cyklu délky 2. Podle věty 2.4 je 2-cyklus asymptoticky stabilní, když

$$|F_r'(x(0))F_r'(x(1))| < 1,$$

tedy přesněji pokud

$$-1 < r^2 \left(1 - 2 \frac{r + 1 - \sqrt{(r - 3)(r + 1)}}{2r} \right) \left(1 - 2 \frac{r + 1 + \sqrt{(r - 3)(r + 1)}}{2r} \right) < 1,$$

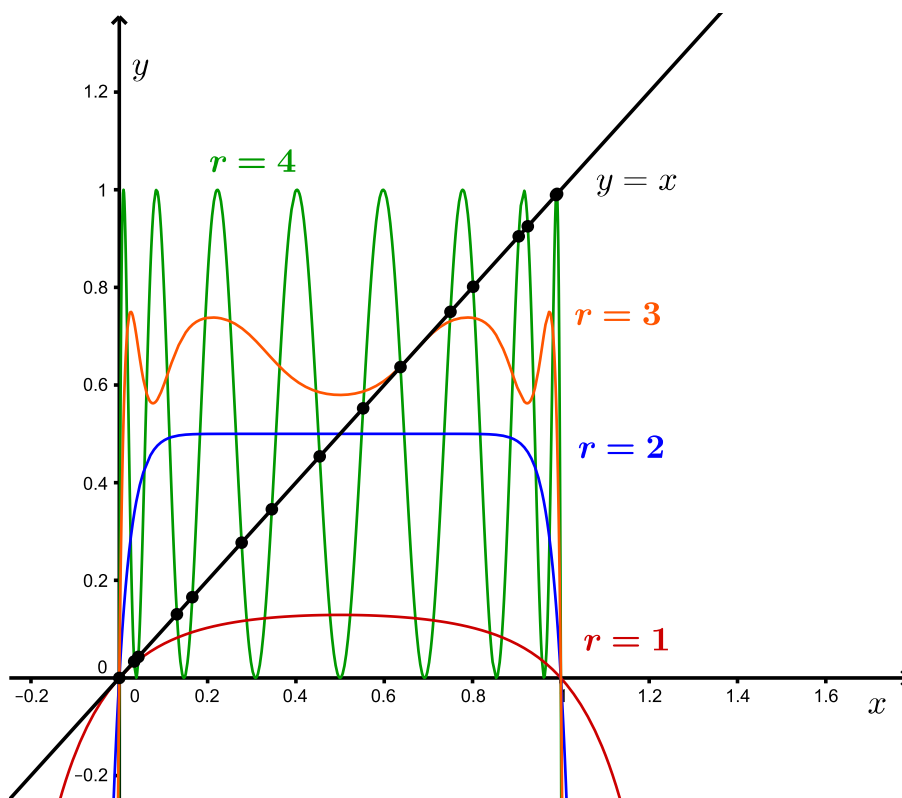
$$-1 < 1 - (r - 3)(r + 1) < 1.$$

To je splněno pro

$$r < 1 + \sqrt{6} \approx 3,44949.$$

Zkoumaný 2-cyklus je asymptoticky stabilní pro $3 < r < 3,44949$, za touto hodnotou se stává nestabilní.

Jelikož jsou výpočty následujících cyklů náročné, nebudeme se jimi více zabývat. Pro představu 4-cyklu uvádíme Obrázek 3.3. Výpočty pro 4-cykl viz zdroj [13].



Obrázek 3.3: Graf funkce F_r^4 pro různé hodnoty parametru r [vlastní tvorba]

Věta 3.1. (Šarkovského věta) Nechť f je spojitá funkce z intervalu I do I . Na množině všech přirozených čísel zavedme nové uspořádání definované následovně:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec \dots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 7 \prec \dots \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 7 \prec \dots$$

$$\dots \prec 2^n \cdot 3 \prec 2^n \cdot 5 \prec 2^n \cdot 7 \prec \dots \prec 2^n \dots \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

Nejprve jsou všechna lichá čísla různá od 1 v přirozeném uspořádání, pak jejich dvojnásobky, dále jejich čtyřnásobky atd. a u uspořádání se ukončí mocnina čísla 2 v sestupném pořadí. Má-li funkce f cyklus řádu m , kde $m \prec n$, tak f má i cyklus řádu n .

Následující tabulka shrnuje hodnoty nástupu 2^n -cyklu.

n	cyklus (2^n)	r_{2^n}
1	2	3
2	4	3.449490
3	8	3.544090
4	16	3.564407
5	32	3.568750
6	64	3.569690
7	128	3.569890
8	256	3.569934
9	512	3.569943
10	1024	3.569945
11	2048	3.569946
∞	limitní bod	3.569947

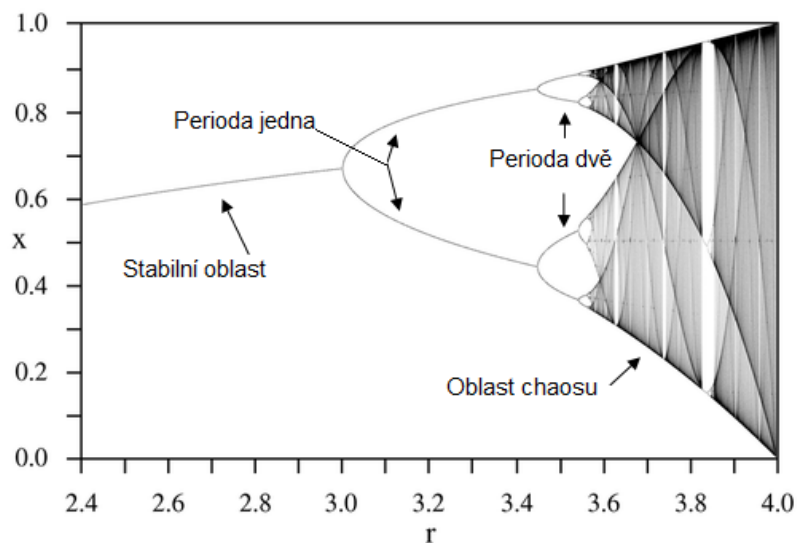
Tabulka 3.1: cyklus 2^n [19]

3.1.3 Bifurkační diagram

Teorie bifurkace se nejčastěji aplikuje v dynamických systémech. K bifurkaci dochází při malých změnách parametru r . Bifurkace značí kvantitativní nebo kvalitativní změnu rovnovážných bodů. Pro většinu hodnot r větších než 3,57 se systém stává chaotickým, nicméně i po této hodnotě můžeme najít oblasti, ve kterých se systém ustálí. Systém způsobuje neočekávané změny chování. Na grafu logistické funkce není zcela jasné, při jakých počátečních podmínkách je systém stabilní, kdy dochází ke zdvojování period nebo pro jaké hodnoty nastává chaotické chování systému. *Bifurkační diagram* nám pomáhá k představení si detailů chování systému. Na tomto zobrazení nalezneme na horizontální ose hodnoty vstupního parametru. V naší práci se jedná o parametr r . Na vertikální ose se zobrazí $x(n)$ pro $n > n_0$ (po odeznění počátečního stavu) najdeme rovnovážné body dynamického systému. Na Obrázku 3.4 vidíme, že $r_\infty < r \leq 4$ existuje velké množství malých oken, kde přitažlivou množinou je asymptoticky stabilní cyklus. Největší takové „okno“ je kolem hodnoty $r = 3,828427\dots (r = 1 + \sqrt{8})$, kde máme přitažlivý 3-cykl. Ve skutečnosti zde máme k -cykly pro všechna přirozená k , ale jejich „okna“ jsou příliš malá na to, abychom je mohli bez příslušného zvětšení vidět. Mimo tato „okna“ obrázek vypadá chaoticky. Celý proces větvení je vidět na Obrázku 3.8. Pro situaci znázorněnou na Obrázku 2.8 si ukážeme graf posloupností pro $r = 3,3$ (viz Obr. 3.5). [20]

3.2 Chaos

Zmatek, nepořádek, nebo stav s vysokou neuspořádaností, to jsou významy slova, kterým se budeme v této podkapitole zabývat. Ovšem není chaos jako chaos. Chaos, který máme



Obrázek 3.4: Bifurkační diagram logistické rovnice [21]

na mysli pojednává o deterministickém chaosu. Z časového hlediska je to budoucí stav, který není předvídatelný při neznámé počáteční hodnotě. Může nastat v systému, který má více než dvě stavové proměnné, tedy například trojdimenzionálním prostoru. V diskrétních procesech existuje i jednorozměrný chaos, který nastává právě u Logistické rovnice.

Jak jsme si již řekli v první kapitole, v roce 1975 T. Li a J. Yorke publikovali článek „Perioda tři implikuje chaos“, v němž se zabývají cykly. Nyní si uvedeme dvě základní věty z tohoto článku. [22]

Věta 3.2. (T. Li - J. Yorkeho věta). *Uvažujeme spojitě zobrazení $f : I \rightarrow I$, které má cyklus délky tři. Pak f má cykly délky $n \geq 1$.*

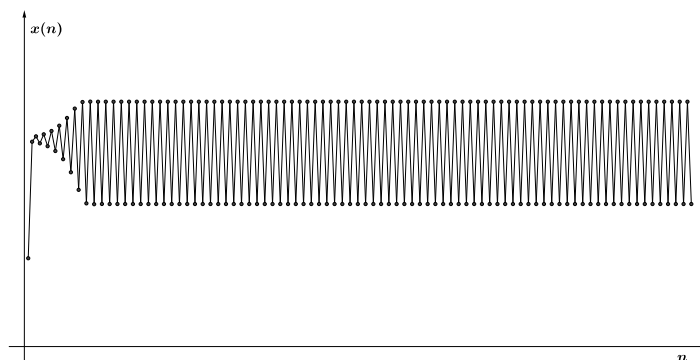
Věta 3.3. (T. Li - J. Yorke). *Nechť $f : I \rightarrow I$ je spojitá funkce, která má 3-cyklus. Potom existuje nespočetná množina $B \subset I$ s těmito vlastnostmi: Pro každé $x, y \in B$, $x \neq y$, a pro libovolný bod q , který generuje nějaký cyklus platí*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \|f^n(x) - f^n(y)\| > 0,$$

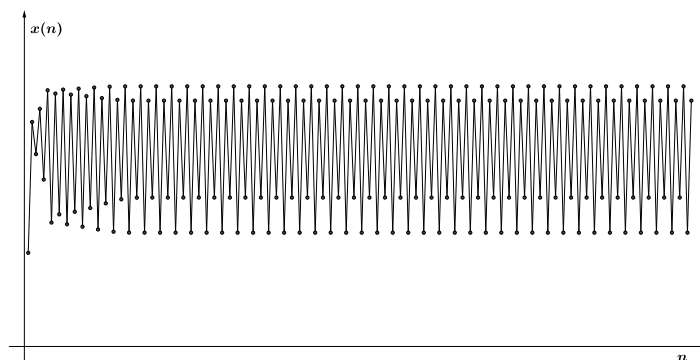
$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \|f^n(x) - f^n(y)\| = 0,$$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \|f^n(x) - f^n(q)\| > 0.$$

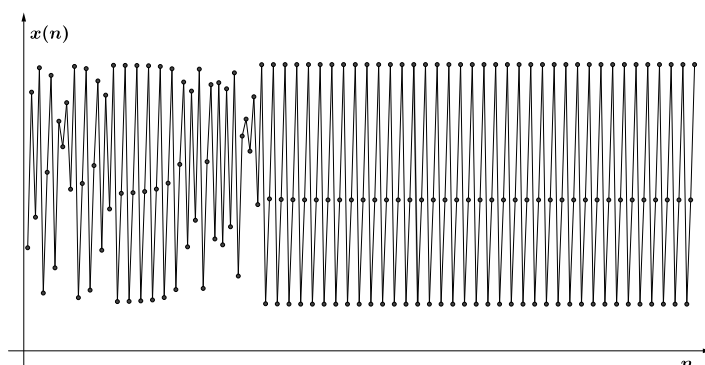
Funkci s vlastnostmi uvedené v této větě nazýváme chaotickou funkcí a množinu B chaotickou množinou funkce f .



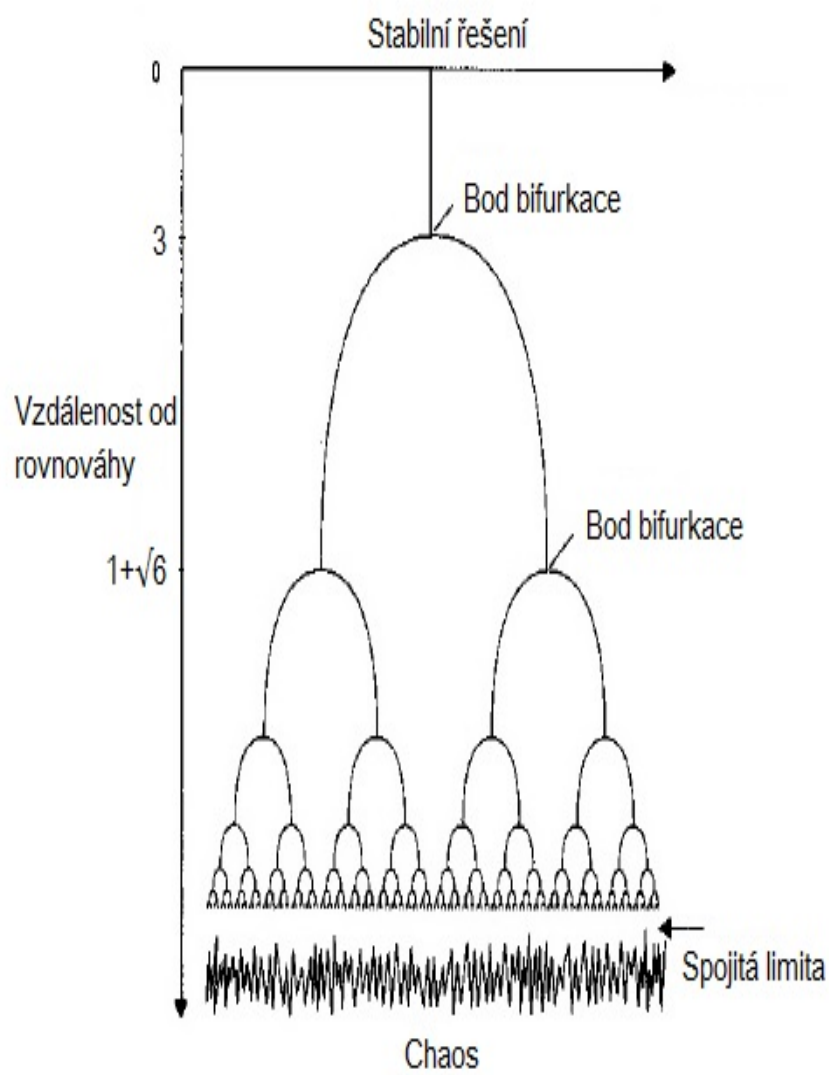
Obrázek 3.5: Graf posloupnosti x_n pro $r = 3,3$ s počáteční hodnotou $x_0 = 0,1$ [vlastní tvorba]



Obrázek 3.6: Graf posloupnosti x_n pro $r = 3,5$ s počáteční hodnotou $x_0 = 0,1$ [vlastní tvorba]



Obrázek 3.7: Graf posloupnosti x_n pro $r = 3,83$ s počáteční hodnotou $x_0 = 0,1$ [vlastní tvorba]



Obrázek 3.8: Bifurkační kaskáda mívící k chaosu [23]

Kapitola 4

Modely růstu populace

Jak jsme se již zmínili logistická rovnice lze studovat ve spojitě i diskrétní formě. Pro zajímavost a přehled si uvedeme nejznámější příklady spojitého logistického růstu. [18], [24]

Uvažujme obecný model růstu populace

$$x' = r(n, x)x,$$

kde $r(n, x)$ je míra růstu populace funkcí času a velikosti populace. Výběrem $r(n, x)$ dostáváme následující rovnice populačního růstu:

1. logistická Verhulstova rovnice

$$r(n, x) = r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

2. Richardsova rovnice

$$r(n, x) = r_0 \left(1 - \left(\frac{x}{K}\right)^\beta\right), \quad \beta > 0,$$

3. Smithova rovnice

$$r(n, x) = r_0 \frac{1 - \frac{x}{K}}{1 + c \frac{x}{K}}, \quad c > 0$$

4. Gompertzova rovnice

$$r(n, x) = r_0 \ln \left(\frac{K}{x}\right),$$

atd. Všechny uvedené rovnice jsou autonomní. $K > 0$ je tzv. kapacita prostředí.

4.1 Diskrétní exponenciální růst–Malthusův model

V první kapitole uvádíme, že Thomas Robert Malthus v roce 1798 vydal ekonomickou úvahu *Esej o principu populace*, kterou ovlivnil spoustu vědců. Nyní si představíme Malthusův model. V modelu může jít o jakoukoliv populaci např. populaci ryb, rostlin nebo peněz. Malthusovským modelem rozumíme

$$x_{n+1} = rx,$$

kde x_n označujeme velikost populace v čase n , pak populaci v následujícím čase značíme $n + 1$ a parametr r je konstantní růst populace. Řešením je exponenciální funkce

$$x_n = x_0 r^n.$$

Tato rovnice modelu je kladnou mírou růstu parametru r exponenciálně rostoucí populace. Pokud

1. $r < 1$ populace vymře (rovnovážný stav $x_n = 0$, je stabilní),
2. $r > 1$ populace bude růst nade všechny meze (rovnovážný stav $x_n = 0$, je nestabilní).

4.2 Diskrétní logistický růst–Verhulstův model

Nyní uvažujeme takovou modifikaci předchozího modelu, že míra růstu parametru r bude lineárně klesat v závislosti na velikosti populace x_n . Jestliže dosáhneme určité velikosti populace K , kterou nazýváme kapacitou prostředí, bude míra růstu $r = 0$. Pokud kapacitu K překročíme, bude velikost populace klesat. Tj.

$$x_{n+1} = r \left(1 - \frac{x_n}{K}\right) x_n.$$

Závěr

Cílem této práce bylo provést analýzu logistické diferenční rovnice, rozebrat jednotlivé vlastnosti a k nim potřebný matematický aparát. Vytvořený text má sloužit k rozšíření vědomostí týkajících se dynamických systémů prostřednictvím diferenční rovnice.

První část práce je věnována významným osobnostem, které přispěly k rozvoji logistické rovnice. Slouží tak, jako úvod do problematiky rovnice. Následuje kapitola definice, pojednává o dynamickém systému, diferenční rovnici, nejdůležitějších definicích a větách, které jsou potřebné k určení vlastností logistické rovnice. Nejvíce jsme se zaměřili na výpočet pevných bodů a jejich stabilitu pro různé hodnoty parametru r . Rozebrali jsme rovnici 2-cyklu a našli její body cyklu x_3^* a x_4^* . Dále jsme představili Bifurkační diagram a chaos. V poslední kapitole jsme se zaměřili na logistický růst.

Celá práce je sázena \LaTeX , grafy jsou vykresleny v programu GeoGebra.

Literatura

- [1] HOLAM, Robert. *Dějiny ekonomického myšlení*. Nakladatelství C.H. Beck, 2005, ISBN 978-80-7179-380-9.
- [2] LYSÝ, Ján. *Ekonomické názory T. R. Malthuse*. [online], [cit. 2016-04-20].
Dostupné z: <http://is.muni.cz/elportal/estud/esf/js08/dejiny/web/ch06s02.html#d0e2549>
- [3] ŠEBESTÍK, Ivo. *Esej o principu populace*. Nakladatelství Zvláštní vydání, 2002, ISBN 80-85436-80-9.
- [4] UNIVERSITY of St Andrews, Scotland, School of Mathematics and Statistics. *Pierre François Verhulst*. [online], [cit. 2016-04-23].
Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Verhulst.html>
- [5] AUSLOOS, Marcel, DIRICKX Michel. *The Logistic Map and the Route to Chaos*. [online], [cit. 2016-04-28].
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2006, ISBN 978-3-540-32023-4.
Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=_ab_bfnUtNIC&dq=The+Logistic+Map+and+the+Route+to+Chaos+online+book&hl=cs&sa=X&ved=0ahUKewjyyK3P-sLMAhUEWhQKHdb5ArEQ6AEIGzAA#v=onepage&q&f=true
- [6] BACAËR, Nikolas. *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. [online], [cit. 2016-04-21]. Springer-Verlag London Dordrecht Heidelberg New York, 2011, ISBN 978-0-85729-115-8.
Dostupné z: https://books.google.cz/books?hl=cs&lr=&id=a1l6VDT5eyMC&oi=fnd&pg=PP6&dq=A+short+history+of+mathematical+population+dynamics&ots=xFmMDEaYUv&sig=J15uY2ezUvQQFlhIoXy5-qcOazo&redir_esc=y#v=onepage&q=Verhulst&f=false
- [7] MORAVEC, Zdeněk. *John von Neumann*. Programuj.com. [online], [cit. 2016-04-20].
Dostupné z: <http://http://programujte.com/clanek/2010080700-john-von-neumann/>
- [8] UNIVERSITY of St Andrews, Scotland, School of Mathematics and Statistics. *Stanislaw Marcin Ulam*. [online], [cit. 2016-04-25].
Dostupné z: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Ulam.html>
- [9] AUSTRALIAN ACADEMY OF SCIENCE. *Lord Robert May*. [online], [cit. 2016-03-15].
Dostupné z: <http://www.sciencearchive.org.au/scientists/interviews/m/may.html>

- [10] UNIVERSITY OF OXFORD. *Lord Robert May*. [online], [cit. 2016-03-25].
Dostupné z: http://www.zoo.ox.ac.uk/people/view/may_r.htm
- [11] YORKE, James A. *In: Chaos.umd* [online], [cit. 2016-04-28].
Dostupné z: <http://www.chaos.umd.edu/yorke/>
- [12] UNIVERSITY of St Andrews, Scotland, School of Mathematics and Statistics. *Mitchell Jay Feigenbaum*. [online], [cit. 2016-03-25].
Dostupné z: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Feigenbaum.html>
- [13] ELAYDI, Saber. *An introduction to difference equations*. Springer Science & Business Media, 2005, ISBN 0-387-23059-9.
- [14] FISHER, Jiří, *Diskrétní dynamické systémy*. [online], [cit. 2016-04-10].
Dostupné z: <http://aix-slx.upol.cz/fiser/DDS/DDS.pdf>
- [15] ALLIGOOD, Kathleen T., Tim D. SAUER a James A. YOE. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. xvii. New York: Springer, 2005, ISBN 0-387-94677-2.
- [16] PRÁGEROVÁ, Alena. *Diferenční rovnice*. Praha: Polytechnická knihnice, 1971, ISBN 04-018-71.
- [17] ŠKRÁŠEK, Josef, TICHÝ Zdeněk. *Základy aplikované matematiky II*. SNTL Praha, 1986, ISBN 04-513-86.
- [18] PŘIBILOVÁ, Lenka, Masarykova Univerzita Brno. *Nelineární dynamika a její aplikace*. [online], [cit. 2016-06-10].
Dostupné z: <http://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/dynamika/publikace/baknelindyn.pdf>
- [19] WOLFRAM ALPHA. *Tabulka cyklů 2^n* . [online], [cit. 2016-06-29].
Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/LogisticMap.html>
- [20] DURŠPEK, Jan. *Bifurkace*. [online], [cit. 2016-06-29].
Dostupné z: <http://www.jandur.cz/termodynamics/v1/v12.htm>
- [21] MYEGO. *Bifurkavní diagram*. [online], [cit. 2016-06-29].
Dostupné z: <http://myego.cz/item/teorie-chaosu-v-ekonomii>
- [22] LI, T., YORKE J. *Period three implies chaos*. The American Mathematical Monthly 82, Prosinec 1975, s. 985-992.
- [23] DURŠPEK, Jan. *Bifurkavní kaskáda*. [online], [cit. 2016-06-29].
Dostupné z: <http://www.jandur.cz/termodynamics/v1/v12.htm>

[24] HOLČÍK, Jiří, KOMENDA, Martin (eds.) a kol. Matematická biologie: e-learningová učebnice online. *Nelineární dynamika a její aplikace* . [online], [cit. 2016-06-21], ISBN 978-80-210-8095-9.

Dostupné z: <http://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=analyza-a-modelovani-dynamickych-biologickych-dat-spojite-deterministicke-modely-i-zakladni-modely-populacni-dynamiky-malthusovsky-model-rustu-populace-ulohy-k-procviceni>