UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Bc. Eliška Kočařová

II. ročník – prezenční studium

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Čtyřkrokový proces řešení problémů vedoucích na užití osové a středové souměrnosti

Vedoucí práce: Mgr. David NOCAR Ph.D.

OLOMOUC 2023

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Čtyřkrokový proces řešení problémů vedoucích na užití osové a středové souměrnosti vypracovala pod vedením svého vedoucího práce Mgr. Davida NOCARA Ph.D. samostatně s použitím uvedených zdrojů.

V Olomouci dne

----
podpis

Na tomto místě bych chtěla poděkovat svému vedoucímu diplomové práce Mgr. Davidovi Nocarovi Ph.D. především za trpělivost, cenné rady a připomínky při zpracovávání této práce a jeho odbornému vedení. Chtěla bych také poděkovat svým blízkým za podporu za celou dobu mého studia.

Obsah

Úvod

Cílem práce je představení nového trendu matematického vzdělávání, a to čtyřkrokového procesu. V této době se postupně vše digitalizuje a máme mnohem větší přístup k digitálním technologiím a výpočetní technice. Výuka matematiky však zaostává a je vyučována stejným způsobem, jako před mnoha lety, kdy jsme všechny tyto možnosti ještě neměli, to se může však změnit.

První část této práce je zaměřena na formu současné matematiky, a co by bylo vhodné změnit. Dále jsou představeny a popsány kroky čtyřkrokového systému, kde se žáci nejprve učí definovat problém, poté ho předefinovat do matematického jazyka do vypočitatelné podoby, dále jde o samotný výpočet a nalezení odpovědi, a nakonec její interpretace. Poté jsou rozebrány potřebné změny, které bychom měli učinit ve školství. Jsou zde uvedeny výhody výpočetního předmětu, a to jak pro rozvoj technických oborů, schopnost jedince fungovat v každodenním životě, ale i prostému trénování logického myšlení. Propojení školské matematiky a počítačů může u některých lidí vést k obavám, například, že když budou žáci používat výpočetní techniku, tak se nenaučí základy matematiky, že už tak žáci tráví mnoho času u obrazovek či že matematika má daleko k tomu, aby byla s počítači propojena a jiné.

Dále jsou v této práci uvedené klíčové kompetence pro matematiku a její aplikace. Práce v další části uvádí kompetence matematicky gramotného žáka, jako jsou schopnost matematizovat reálné situace, užívat matematický jazyk, pracovat s problematickými úlohami. Ne každý žák je schopen dosáhnout stejné úrovně matematické gramotnosti, ale je vhodné, aby se přiblížil co nejvíce ideálu. Poté je ukázáno, jak vypadají matematické úlohy ve škole, jaké jsou jejich druhy a jakým způsobem se k nim v současné době přistupuje. Učitelé by měli možnost jim poskytnout jiný pohled na klasickou matematiku s užitím počítačů, kterými by si pomohli s početními operacemi a urychlili jejich proces poznávání.

Práce se zaměřuje na osovou a středovou souměrnost, proto je dále rozebráno, v jakých ročnících je vyučováno učivo osové a středové souměrnosti, a jaké jsou předpoklady na žáka. Obě souměrnosti jsou zde obecně definovány a jsou uvedeny základní poznatky užití při řešení problémů, které se často vyučují na základních školách.

V současné době existuje mnoho aplikací a matematických softwarů, které nám mohou pomoci řešit matematické problémy. Tyto softwary jsou různorodé a záleží na uživateli, který mu vyhovuje nejlépe. V práci jsou uvedeny některé z možností, jako Wolfram Mathematica, GeoGebra, Maple, Cabri, ale existuje jich mnohem více. Postupně dochází o snahy rozšiřování digitální gramotnosti žáků na základních školách a propojení matematiky s počítači by mohlo mnohé z nich motivovat a mohlo by začít docházet ke zlepšení jejich výsledků, jelikož prosté počty by byly přenechány počítačům, a tak by nemuselo docházet tolik ke vzniku numerických chyb.

Jelikož se již dříve lidé snažili najít jiné způsoby, jak řešení matematických problémů zjednodušit, jsou zde také uvedeny jiné druhy čtyřkrokového procesu. Tyto procesy se mírně liší, ovšem jejich základ a účel bude stejný, zjednodušit a zefektivnit řešení matematických problémů a pomoci tak žákům nejen v matematice, ale i běžném životě.

Cílem praktické části je nabídka sbírky úloh využívaných poznatků osové a středové souměrnosti v reálném životě. Tyto úlohy zaměřené na souměrnosti budou ukazovat na její užití buď přímo či nepřímo, ne vždy bude nutné užití těchto funkcí v programech. Řešení těchto úloh se pokusí zapojit kreativní myšlení žáků. Úlohy se budou snažit odlišovat od těch ve školních učebnicích, kde jde často o konstrukční úlohy s jejich řešením popsaným přímo v zadání. Čtyřkrokový proces se snaží o propojení matematiky s výpočetními technologiemi, proto pro jejich řešení bude v práci využito matematických softwarů především programu GeoGebra, ovšem u některých z nich bude ukázána i alternativa při užití programu Wolfram Alpha. Žáci se zde budou učit pracovat v těchto digitálních prostředích při řešení různých problémů. Řešení úloh zde bude popsáno pomocí čtyřkrokového procesu, toto řešení však závisí na jedinci, proto zde bude uvedena možnost, jakým způsobem proces můžeme uchopit.

1. Forma současné matematiky

Kapitola vychází z informací publikovaných v knize Conrada Wolframa *The Math(s) Fix: An Education Blueprint for the AI Age.*

Matematika je bez debat základem školního kurikula. Se vstupem do období umělé inteligence se její důležitost stále zvyšuje. Ačkoliv způsob, jakým je vyučována je poněkud zastaralý a pokud se toto nezmění stane se jednou ze „stojatých vod" pro pár nadšenců, a časem postupně z kurikula vymizí. Tato práce se pokusí ukázat jiný pohled na klasické příklady a způsob, jak umírající vědu oživit, podpořit a doplnit chybějící kontext, kterému se ve školách nedostává, zároveň také jak posilnit postavení matematiky v době umělých inteligencí.

Odpovědí na otázku, proč je jiný přístup pro výuku matematiky důležitý, by mohlo být například to, že pokud budeme matematiku učit stejným způsobem jako do současné doby, spousta studentů nevědomky přijde o příležitost uspět v mnoha oblastech, a to zejména v těch, kde se setkáváme s užitím myšlení podpořeného počítačovými výpočetními technologiemi. Tyto změny musí být provedeny citlivě a postupně, tak aby generace, které těmito změnami projdou nebyly postaveny do nevýhodných pozic vůči těm mladším. Musí být nahlédnuto na to, co je a co představuje matematiku v současné době a jak funguje a na základě toho navrhnout potřebné změny.

Kde se setkáváme s matematikou? Matematika je základem mnoha ostatních věd, a aniž bychom si to chtěli připustit, ovlivňuje naše rozhodování skoro o čemkoliv. Je docela paradoxem, že je pro mnoha lidí nenáviděným předmětem a přináší jim utrpení, a přitom je velmi důležitá.

Matematika v reálném světě je nejúčinnějším lidským systémem řešení problémů. Je to abstraktní myšlenkový systém, který se dá aplikovat na obrovské množství reálných lidských problémů a nabízí lepší odpovědi či jejich řešení. Matematika je univerzální jazykem, nezáleží tak, odkud člověk pochází nebo jaké je jeho vyznání. Mainstreamová matematika se však postupně odkloňuje od širokého využití v reálném světě a stupňující následky tohoto odklonu budou mít dopad na budoucí vztah s umělou inteligencí.

Možná se zdá, že tento problém je komplexní. Bylo provedeno mnoho přezkoumávání po celém světě, a i když došlo ke zlepšení ve způsobu, jakým je učivo matematiky žákům předáváno a více lidí se jí začalo věnovat, tak stále se nám požadavky na matematiku v realitě oddalují. Zaměstnavatelé vyžadují po svých zaměstnancích větší znalost matematiky, vysoké školy přidávají do nabídky potřebné kurzy matematiky, jelikož jinak dobří studenti s ní mívají většinou problémy.

Problém s matematikou by se dal shrnout jednoduše. V reálném světě se o většinu výpočtů starají počítače, ovšem ve školách je tomu naopak a většinu výpočtů provádějí studenti. Matematika vyučovaná na školách je asi 80 % odlišná od té, kterou používáme v reálném světě. Až na elementární a aritmetiku a jednoduché odhady, skoro žádné výpočty nejsou prováděny ručně, využíváme k tomu počítače.

Kurikulum našich škol však zatím předěláno nebylo a nebylo zde zavedeno propojení s počítači, jelikož počítají s tím, že každý student to vše spočítá sám a ve výjimečných případech je mu umožněno užití nějakého přístroje, který mu pomůže s výpočty. Na první pohled se počítání zpaměti či ručně nezdá jako takový problém a jistě je výhodné pro vývoj mozku. Ovšem pokud bychom počítali pouze tímto způsobem může to vést ke katastrofě při špatném odhadu či triviální chybě. Počítače nám za to nabízejí více způsobů a nástrojů pro nalezení řešení problémů.

Ovšem matematika není jediným předmětem, který by se měl změnit, jde o celý systém vzdělávání. Musíme se naučit problémy definovat, převést do abstraktní roviny, najít zde nejlepší odpověď a poté přenést zpět do reality a řešení zde aplikovat.

Řešení problémů tedy bude procházet následujícími kroky:

1) Definovat otázky
2) Předefinovat do vypočitatelné podoby
3) Vypočítat a odpovědět
4) Interpretovat odpovědi

2. Kroky čtyřkrokového systému

Kapitola vychází z informací publikovaných v knize Conrada Wolframa *The Math(s) Fix: An Education Blueprint for the AI Age.*

2.1 Definovat

Definovat znamená najít otázku, na kterou se chceme zeptat, co potřebujeme zjistit. Zda umíme definovat otázku či otázky tak, abychom mohli počítat. Co musíme předpokládat, co nevíme, co může mít vliv na výsledek. V tomto kroku si musíme uvědomit, co je z kontextu důležité a co naopak zanedbatelné, jaké faktory ovlivňují naše výsledky a na co je nutné se soustředit.

2.2 Předefinovat do vypočitatelné podoby

V tomto kroku musíme problém převést do abstraktního jazyka. Ten nemusí být přesně v kontextu s daným problémem, ale je konstruován tak, aby reprezentoval nástroje, kterými budeme problém počítat.

Tedy otázku, kterou si jako lidé položíme, přeložíme do jazyka, který je počítač schopný číst a vyřešit náš problém. V této části se zbavujeme kontextu našeho problému, a to z toho důvodu, že tento proces zpřesní naše řešení. Naším cílem je najít nástroje, které můžeme opakovaně použít pro řešení problémů v různých oblastech, raději než najít více způsobů řešení problémů, které jsou si navzájem podobné. Tímto způsobem dostaneme kolekci nástrojů, které můžou být aplikované na nové postupně se objevující problémy a ty mohou být efektivně řešeny počítači.

V současné době vyžadují počítače kód či občas diagramy, dříve to byly právě matematické formule. Existuje mnoho jazyků a tyto různé jazyky nám nabízejí různé nástroje a pomocí nich hledáme řešení našeho problému. Různé jazyky podmiňují různé způsoby myšlení. Záleží také na hloubce naší znalosti jazyka, který používáme. Tento krok je dosti konceptuální a intelektuální, proto je dobré spoléhat na intuici a již získané zkušenosti.

2.3 Vypočítat a odpovědět

Nyní máme z předchozího kroku problém převeden do abstraktního jazyka a naším cílem tedy je najít abstraktní odpověď na abstraktní otázku. V současné době je většina matematiky zaměřena právě na tento krok, avšak to je špatně. Snaha ovládat malý okruh různých výpočtů, které ani nejsou povětšinou nutné pro reálný život, dávala smysl ovšem v době, kdy ještě nebyly počítače. Tedy pokud člověk dříve neuměl počítat, znamenalo to, že nebyl schopný používat matematiku.

Počítáme s tím, že v současné době tento krok provádějí počítače, které my nastavíme, ale již jednotlivé výpočty neprovádíme. Akce, které provádíme na počítači, se liší od těch, které bychom prováděli ručně. Nejtěžším krokem při nastavování je vědět, kdy pracovat strategicky a kdy naopak být skeptičtí ohledně detailů.

2.4 Interpretovat odpovědi

Po dokončení kroku 3 dostaneme abstraktní odpověď, výsledek získaný pomocí počítače nebo vypočítaný ručně. Může jít o číslo, graf, vzorec nebo interaktivní program. V tomto kroku tuto abstraktní odpověď vezmeme a odpovíme si, co to znamená pro původní otázku, pro skutečnost.

Musíme si položit následující otázky. Jak tomu rozumíme v kontextu? Je to rozumná odpověď? Potřebujeme ještě nějaké další úpravy? Často se stává, že první vytvořená odpověď není dostatečná a musíme následující kroky opakovat znovu. Tedy ve zkratce, hlavním cílem čtvrtého kroku je potvrdit, zda jde o užitečnou a spolehlivou odpověď k otázce definované v kroku 1.

3. Kde je potřebná změna ve školství?

Kapitola vychází z informací publikovaných v knize Conrada Wolframa *The Math(s) Fix: An Education Blueprint for the AI Age.*

Jádro současné mainstreamové matematiky je soustředěno na umění výpočtů, řešení problémů bez kontextu a abstraktní algebře. Zatímco pro zapojení počítačů je užíváno komplexnějších problémů s větším množstvím kontextu. Skoro všude tento mainstreamový předmět je vysoce procedurální a nekonceptuální, zatímco je nepraktický pro přímé užití. Matematika ztrácí mnoho studentů ještě před tím, než se dostanou k vyššímu početnímu myšlení, a tedy nezískají tu potřebnou jiskru získat zájem o matematiku. Místo toho pouze ti, kteří jsou schopni přežít nudné hodiny nebo jsou vzácným případem studentů s vlastním zájmem o matematiku nebo mají vysoce vzdělaného učitele, který soustředí čas navíc, aby vypěstoval zájem ve svých studentech o matematiku, se v konečném výsledku zajímají o matematiku. Zbytek studentů většinou skončí se slabým pochopení konceptu, pár praktickými schopnostmi a skoro žádným nadšením.

Pozornost na tuto změnu je zaměřena na matematiku druhého stupně ne prvního stupně, a to z toho důvodu, že odpojení se od reality je menší. Začáteční matematika, počty a témata působí propojené s realitou. Až později, často ke konci prvního stupně, se od reality odpojuje. Musíme si položit otázku, zda například dělení víceciferným dělitelem je užívané v běžném životě. Ano, ale převážnou ne manuálně, místo ručního počítání využijeme kalkulačky či počítače nebo chytrého telefonu, kteří tyto čísla mezi sebou vydělí mnohem rychleji. Druhou otázkou může být, zda nás schopnost této činnosti obohacuje a zda nám pomůže při moderním řešení problémů pomocí výpočetního myšlení? Jde o úvod do algoritmů a demonstruje, jak může být algoritmus nápomocný. Různé algoritmy mohou být využity v jiných předmětech více propojených s reálným životem, jako například biologie.

3.1 Tři důvody pro povinný výpočetní předmět

3.1.1 Rozvoj technických oborů

Koncem pozdního 20. století došlo k výraznému rozvoji prací s vysokou úrovní porozumění výpočetních operací, tato místa jsou vysoce placena a jsou důležitá pro společnost. V polovině tohoto století většina vedoucích společností byla vyučena v humanitních oborech a právech, ke konci století začíná tento trend mířit spíše k přírodovědným oborům. Tyto obory se nesoustředí jen na individuální výpočty, ale spíše na to, co je možné, jak využít tento proces a jak myslet tvořivě/výpočetně. V poslední době u nových odvětví sociálních médií je právě algoritmický přístup cílem úspěchu. Požadavky na zvýšení počtu lidí se schopností výpočetního myšlení se zvyšují. Je tedy potřeba více matematiky, ale jiným způsobem, než je dosud učena. Postupně vstupujeme do dob umělé inteligence a zde toto myšlení bude čím dál více potřeba.

3.1.2 Každodenní život

U každodenního života je to myšleno jako schopnost se podílet na vývoji společnosti nebo alespoň adekvátně přežívat. V mnoha zemích se nutnost výpočetního myšlení zvyšuje. Objevuje se v možnostech výběru půjčky, zdraví, jídla a diet. Díky tomuto myšlení se učíme možnosti filtrovat a vybírat pro nás ty nejlepší možnosti, jde o jakousi výpočetní gramotnost.

3.1.3 Trénování logického myšlení

Zde jde o schopnost myslet a souvisle zdůvodňovat. Jistě každý předmět vyžaduje určitou úroveň logického myšlení nutné pro jejich analýzu, jejich základem je však matematika. A to například při určování pravdivých tvrzení, hledání jejich důkazů. Je využívána například při hledání odpovědí s více možnostmi.

3.2 Pro a proti

Samozřejmě se najdou skeptici proti využití počítačů ve výuce matematiky.

Často pokládanou otázkou může být získání základů matematiky. Argumentem je, že studenti by nejprve měli získat základy matematiky předtím, než se pustí do užívání výpočetní techniky, počítačů. Ano, je vhodné být schopní vykonávat činnost bez pomoci. Co jsou ale vlastně ty základy? Měl by to být právě čtyřkrokový proces, který aplikujeme na řešení problémů reálného světa. Právě tento proces by nejprve měl být využit při řešení problémů pomocí techniky, se kterou se setkáváme v reálném životě nejčastěji, tedy s pomocí počítače. I pokud bychom se zvlášť učili základy systému matematiky při využití počítače, budeme používat jiný systém algoritmů, než bychom používali při počítání ručně. Právě mnoho lidí, když se řeknou základy matematiky, si představí počítání na papír pomocí papíru a tužky. U matematiky učené na prvním stupni se setkáváme s matematikou, která je využitelná ve skutečném světě. Konec prvního stupně a druhý stupeň se odlišuje.

Dalším názorem by mohlo být, že vlivem počítačů studenti matematiky hloupnou. Je to z toho důvodu, že při využití počítače se ze žáků stávají bezmyšlenkoví mačkači tlačítek, jelikož počítače za ně přebírají intelektuálně náročné úlohy a tím i většinu práce. Zavedení počítačů i do ostatních věd však nezpůsobilo, že by byly méněcenné či nenáročné, spíše to nabídlo více možností. Samozřejmě mnoho prací je nyní díky počítačům jednodušší, jelikož počítače mohou vykonávat lidskou práci, například výpočty. Počítače mohou akorát pomoci žákům ukázat jinou stránku výpočetního myšlení a posunout je dál. Než je počítač schopen provádět akce sám, musel být naprogramován člověkem.

Dalším názorem je, že ruční počítání nám pomáhá k porozumění, porozumění konceptům se nám tímto způsobem vepisuje do paměti. Méně častým názorem bývá, že postupy, které se učíme, nebývají těmi, které potřebujeme a učení se, jak použít metody, kterým nerozumíme a být v tom vytrvalý, je výhodná schopnost, která v nás navíc buduje sebedůvěru. Existují případy, kdy učení se mechanicky a nabývání tak zkušeností a automatizace použití procesu, může později v nás vyvolat zájem se do tématu ponořit hlouběji a případně proces i vylepšit. Při programování je vyžadováno také určité množství disciplíny, když se člověk učí novým operacím a jak používat pravidla, při získání okamžité zpětné vazby, zda jsme uspěli či nikoliv, a tak se můžeme přímo naučit co funguje a co naopak ne.

Mezi jiné argumenty patří, že výpočetní myšlení je spojené s počítači, ale dnešní matematika je daleko od propojení s počítači. Skoro všechny výpočty jsou prováděny v realitě na počítačích, výjimkou je matematika ve vzdělávání. Výjimkou mohou být místa bez elektřiny a počítačů či velmi specifických prací jako například hráči blackjacku, kde je ruční počítání nutností. Avšak u čehokoliv více komplexního, mainstreamového převažují právě počítače. Tak jako dříve patřila latina mezi intelektuální předměty a byla součástí kurikula na akademických školách, nyní je vymřelým jazykem a učí se výjimečně. Byla základem pro učení se něčeho jiného. Pro rodilé mluvčí anglického jazyka mohla být například zdrojem pro gramatiku. Tedy klasická matematika může být prostředkem právě pro učení se třeba zmíněného programování. Tvrzení, že většinou ti žáci, kteří jsou dobří ve školní matematice poté často skončí u technických prací či výzkumů, že vynikání ve školské matematice a matematice vysokoškolské je ukazatelem úspěchu v pozdějším životě, nemají žádný podklad v realitě. Neexistuje totiž žádné měřítko úspěchu. Důvodem pro technicky založené práce je spíše motivace a zájem o technické obory, ti jedinci jsou často nuceni pracovat s matematikou. Matematika ve většině případů nenaplňuje potřeby jedinců pro reálný život.

Existuje tvrzení, že dnešní matematika procvičuje jedincovu mysl, což je určitě pravda, záleží však v jakém směru. Učí nás základy a logiku nejrůznějších důkazů, ovšem pokud hledáme činnosti cvičící mozek jako aktivitu pro všechny účastníky učebního procesu, najdou se jistě vhodnější aktivity než důkazy a teorémy. Výpočetní myšlení vykazuje vysokou schopnost porozumění. Programování vyžaduje konceptuální myšlení z pohledu algoritmizace. Nabízí různé druhy jazyka, různé druhy programů a také z čeho se programy skládají. Programování nám ihned dává zpětnou vazbu a tím nabízí okamžitou opravu nedostatků.

Největší obavu mají dnešní rodiče z toho důvodu, jak moc a silně jsou jejich děti závislé na obrazovkách výpočetních zařízení, a to nejčastěji ve formě chytrých telefonů či tabletů. Závislost na těchto neobyčejných nových technologiích má na mnoho lidí škodlivé účinky a není to limitováno pouze na děti. Jelikož Mat Fix nabízí propojení matematiky s počítačem, může být právě čas u obrazovek jedním z odrazujících důvodů. Jaké může mít tedy následky? Můžeme rozlišit více kategorií; fyzická újma způsobena zařízením (poškození zraku, vliv rádiových vln atd.), zhoršení vystupování ve společnosti z důvodu sníženého kontaktu s lidmi, nátlak sociálních médií, zhoršení pozornosti a zvýšená pasivita, kompulzivní chování. Ale počítače nemají jen nevýhody, ale i spoustu možností, které nám nabízí, jako schopnost mít přístup k nejrůznějším informacím, rozšiřování obzorů pomocí her a simulací, lehce dosažitelné a široce rozsáhlé způsoby, jak se kreativně vyjádřit. Tak jako s každými novými technologiemi, časem je postupně vylepšujeme a rizika snižujeme. Cílem této změny v matematice je prezentovat informace lépe, než by to dokázala kniha, jelikož žáci provádí aktivně v obsahu změny. Tyto aktivity povzbuzují rozvoj spolupráce jak s učitelem, tak i se spolužáky oproti klasické matematice. Žák používá počítač jako časově neomezený nástroj pro řešení problémů. Začíná s prázdnou stránkou a poté aktivně využívá vlastní zkušenosti, úsilí a intelekt k rozhodování, kam se pohnout dál v prostoru mnoha výkonných schopností, ke kterým máme přístup.

Je nutné znát, jak počítač funguje před tím, než mu začneme věřit? Na úrovni matematického softwaru je výhodou před použitím funkce mít představu, jak konkrétní funkce funguje, ale určitě nebudeme schopni říct, jakým způsobem je tato funkce naprogramovaná na počítači. Většinu problémů však nemůžeme zkontrolovat ručně, jelikož výsledky jsou příliš velké, řešení příliš komplexní a mimo naše schopnosti. Důvodem mnoha chyb je užívání špatných nástrojů, limitovaných a přednastavených nástrojů. Tedy způsob, jak se vyhnout chybování je naučit se, jakým způsobem ověřit výsledky, a to spíše než se učit řešení ručně, se naučit, jak dojít k řešení více cestami. Je vhodné také získávat zkušenosti s tím, co se nepovede, zlepšujeme se tak v jejich nacházení v procesu a opravování.

Dalším argumentem je, že tato změna by byla moc riskantní, a proto nemůže být provedena. Byla by moc riskantní pro budoucí život studentů, ekonomiku a vlády našich zemí. Čím déle budeme tuto změnu odkládat, tím ráznější poté bude až konečně nastane.

Někteří říkají, že potřebujeme dostatečnou evidenci, před tím, než začneme s inovacemi. Ano, evidence je jistě důležitá. Můžeme se na ni ale dívat dvěma pohledy. Jednou z nich je inovací řízená evidence a druhou evidencí řízená inovace. Tedy jestli nejprve zavedeme změnu a sledujeme její následky, nebo jestli hledáme možné následky před tím, než je změna zavedena. Máme však evidenci, zda současný způsob vyučování matematiky je nejlepší?

4. Matematika a její aplikace – klíčové kompetence

V rámci učiva základní školy pro využití čtyřkrokového řešení problémů bude nejčastěji zastoupena Kompetence k řešení problémů, jelikož žák musí problém rozpoznat a pochopit, vlastním úsudkem si promyslet a naplánovat jeho řešení, případně najít vhodné varianty řešení, ověřit správnost a možnost užití řešení pro podobné problémy a poté kriticky rozhodnout a obhájit odpověď. Tento set kompetencí se prolíná postupně všemi kroky čtyřkrokového systému. [2]

V neposlední řadě s rozvojem výuky informatiky na školách, jelikož postupně vše přechází do digitální podoby a místo mechanického počítání, se začínáme více přiklánět k užití počítačů, tak i Kompetenci digitální. To znamená využití digitálních zařízení a aplikací pro usnadnění práce, zautomatizování a jejího zkvalitnění. [2]

Rozvoj cílových kompetencí v této vzdělávací oblasti, které souvisí s čtyřkrokovým procesem řešení problémů, vede žáka k rozvíjení jeho logického myšlení, kritickému usuzování, musí také zvládat srozumitelně a věcně argumentovat. Soustředí se na schopnost abstraktního a exaktního myšlení. Poté je důležité provádět rozbor a vytvářet plán jeho řešení, odhadovat výsledky, hledat a volit správný postup řešení atd. [2]

5. Matematická gramotnost žáků základního vzdělávání

Schopnosti matematicky gramotného žáka:

Schopnost matematizovat reálné situace

Žák je schopný analyzovat reálnou situaci a formulovat řešení pomocí matematického aparátu. Jde o převedení reálného problému postupným oprošťováním se od reality na problém matematický, jeho řešení a poté využití kritického myšlení k určení smyslu řešení a jeho ověření. Tato kompetence matematické gramotnosti se odborně nazývá modelování. [3]

Používání správné terminologie

Součástí používání správné terminologie je kompetence zvaná matematická komunikace, kde jde o porozumění jak písemným, tak i ústním matematickým sdělením a schopnost se k nim vyjádřit opět pomocí matematického jazyka. Při výuce s aktivní činností žáka pobíhá komunikace mezi žákem a učitelem, mezi spolužáky, a to jak přímá, tak i nepřímá. Úkolem učitele je vést žáky k popisování situací, hodnocení efektivity postupů a vlastního přesvědčení o vhodném řešení, diskusi a hodnocení. Užívání matematického jazyka je další z kompetencí, kde žák je schopen dekódovat a znovu interpretovat symboly užívané v matematice a používat terminologii. S tímto označováním je schopen pracovat při řešení problémů. Učitelé matematiky by neměli začínat definicemi, ale měl by to být jejich cíl. Žáci by neměli být zahlceni symbolikou, jejich užívání by mělo být přirozené. [3]

Řešení problémových úloh

Vymezování problémů a jejich řešení znamená užití zkušeností k rozpoznání a formulace matematických problémů, schopnost aplikovat různé postupy jejich řešení. Při řešení problémů žák objevuje, hledá, užívá své tvořivé myšlení, rozvíjí své poznávání, které mu pomohou hledat způsoby řešení problémů i mimo školní prostředí. Vhodná metoda, kterou můžeme podněcovat tvořivé myšlení žáků je dialog, kdy jim pokládáme otázky, díky kterým žáci nad problémem aktivně uvažují. Otázkami postupně žáky přivádíme na správný postup. Jak tedy postupovat při řešení problémových úloh? Nejprve si musíme ujasnit co víme, a k čemu se musíme dopracovat, co potřebujeme zjistit. Poté pomocí známých informací problém rozebereme a naplánujeme si možný postup jeho řešení. Problém pak tedy řešíme a v konečném kroku musíme ověřit jeho správnost. Rozvíjená kompetence zde je matematické uvažování, kde jde o schopnost pokládat vhodné otázky a hledat vhodné odpovědi z možností, hledat vztahy mezi složkami problému. Měli bychom se snažit žáky přimět k přemýšlení nad problémy, přeformulovat myšlenky a učit je schopnosti odůvodňování. Učit žáky, že není vždy jen jeden způsob řešení. Žáci by se měli naučit pochybovat a ověřovat řešení. [3]

Praktické využití poznatků z matematiky

Vyšší úroveň matematické gramotnosti může být zřetelná později, kdy žáci jsou schopni využívat matematiku i v situacích, kde není na první pohled zřetelné, že je nutné užít matematiku. Může jít od každodenních situacích až k složitějším problémům. Využijeme matematiku tedy například i u cestování, podnikání, hudbě a tak dále. [3]

Formování občasného kritického myšlení

Kritické myšlení je schopnost si tvořit vlastní úsudek na základě podkladů. Jde o uvažování nad pravdivostí tvrzení, hledání informací. Matematická argumentace znamená, že žáci jsou schopni tvorby matematických argumentů, sledovat je a hodnotit. [3]

Práce s chybou

Práce s chybou je důležitou činností žáka. Není vhodné ji chápat jen jako nežádoucí, jelikož by měla být takovým odrazovým bodem pro vlastní zlepšení. Záleží na tom, jaký postoj žák, ale i učitel zaujme, pokud chyba nastane. Neměli bychom se bát chybovat, zjistit jakých chyb se žáci nejčastěji dopouští a u různých chyb hledat různé způsoby, kterým i učitel může žákovi pomoci. [3]

Odhad výsledku

Tvoření odhadu je běžná činnost našeho života, odhadujeme čas, vzdálenost, ceny. Ve škole nejčastěji dochází v matematice k odhadu při řešení slovních úloh. K řešení je užit matematický model a nutné mít nějakou představu o hledaném výsledku. Stejně bychom měli činit i při použití kalkulačky nebo příklad pro jistotu zde spočítat dvakrát, kdyby náhodou došlo ke stlačení jiného čísla. [3]

Informační gramotnost

Je vhodné, aby měl žák jakýsi přehled o různých pomůckách a nástrojích jejichž užíváním si může zjednodušit řešení matematických problémů. Je si vědom možností využití těchto prostředků, a to právě i výpočetní techniky. Tyto prostředky chápeme jako didaktické a mohou je využívat, jak žáci, tak i učitel. Možnosti počítače nám nabízí kromě počítání i různá vykreslování, zobrazování, znázorňování, je zdrojem informací a dalších materiálů pro výuku. [3]

Z pohledu učitele také:

Kvalifikovanost učitelů

Učitelé matematiky spadají pod Zákon o pedagogických pracovnících č. 563/2004 Sb. a musí získat magisterské vysokoškolské vzdělání. Během studia musí získat odborný základ a být schopni užívat „odborný nadhled" strukturách kvantity, prostoru a tvaru, změnách a vztazích, neurčitosti. Učitel by se měl snažit motivovat žáka pro matematiku, předkládat reálné problémy, aktivně žáka zapojovat, pracovat s chybami, snažit se, aby žáci učivu porozuměli, než aby roboticky opakovali postup. Mnohé školy také umožňují účast pedagogických pracovníků v rozvojových projektech. [3]

6. Matematické úlohy

Kapitola vychází z informací publikovaných v knize Františka Kuřiny *Matematika a řešení úloh.*

Úkolem úlohy je nás vyzvat k činnosti a u těch matematických specificky k matematické činnosti. Matematické úlohy jsou povětšinou určovací (kalkulativní, rozhodovací, určovací, konstrukční či důkazové). Pro jejich obměnu je můžeme různě modifikovat, a tak vyžadovat po žácích různé další úkoly před tím, než se dostanou ke konečné odpovědi.

Z hlediska vzdělávacího procesu rozlišujeme úlohy: motivační, ilustrační, procvičovací, diagnostické, kontrolní. Ty slouží jak k rozvoji žákových schopností, tak i k diagnóze úrovně schopností žáka.

Náročnost řešení úloh pro studenta je dělí do tří kategorií: cvičení, úlohy a problémy. Postup řešení u cvičení je obvykle slovně zadán. Úlohy bývají řešeny pomocí jednoho či více algoritmů. Žák schopen řešit úlohy je matematicky gramotný. Posledním typem jsou úlohy problémové, jejichž řešení vyžaduje nějakou formu tvořivého myšlení žáka. Postupem není obvykle naučený algoritmus a žák si musí poradit originálně. Ovšem toto rozdělení úloh není univerzální. Jelikož co jeden žák vidí jako úlohu, kterou řeší pomocí algoritmu, může jiný žák vidět jako problémovou úlohu, kde musí zapojit svou kreativitu. Právě u problémových úloh očekáváme, že žák se bude hluboce soustředit, bude zapojena intervence a vzhledem k obtížnosti bude mít dostatek času na jejich řešení. Problematické úlohy by měli být součástí vyučování matematiky, ale neměly by sloužit ke kontrole úrovně žákových schopností. Žáci se často s takovými úlohami setkávají jako součást matematických olympiád. Problematické úlohy jsou analogií problémů vědeckých. V literatuře bývají tyto úlohy označovány například jako: problémy, netradiční úlohy či zajímavé úlohy. Ve školské matematice pro tyto úlohy ovšem nenalezneme jednotný termín.

6.1 Řešení úloh

Jakým způsobem jsou řešeny úlohy ve školské matematice? Pojetí řešení úloh, a to především těch konstrukčních, je rozděleno do čtyř fází; rozbor, konstrukce, důkaz a diskuse. U rozboru předpokládáme, že útvar existuje. Součástí rozboru bývá většinou náčrt, kde si vyznačíme, co známe a co naopak hledáme, snažíme se pomocí něj najít různé souvislosti.

Řešení úloh se většinou neřídí jasnými pravidly a není zde přesný algoritmus, který používáme pro jejich řešení. Již v 19. a 20. století významné osobnosti formovali, jakýsi čtyřkrokový proces, jako postup tvůrčího myšlení, a to jako preparaci, inkubaci, iluminaci a verifikaci. Ve fázi preparace bylo očekáváno studium souvislostí a definování vztahů. Tato část byla individuální pro každého řešitele a pro nalezení nápadu pro možné řešení pomáhaly zkušenosti a intuice. Nápad musel být logicky zanalyzován. Ovšem ve školním prostředí toto často z časového hlediska není možné proto na místě rozboru, dostávají studenti návod k řešení, aby se v hodinách ušetřil čas. Učení se řešení nazpaměť nemá prakticky velký význam, je totiž vhodné získat vlastní přípravu a být schopen odhadnout obtížnost. Významnou součástí řešení problémů je rozhodně vlastní myšlení.

Problém řešení úloh v současné matematice je demotivace žáků. Žákům nejsou prezentovány atraktivní úlohy. Tedy aby se něčemu naučili, musíme mít zájem o učení.

6.2 Školní matematika

Čím může školní matematika odrazovat? Na tuto otázku jsou časté tři odpovědi, jazyk matematiky, matematické pojmy a její logická struktura. Jde o provázanost mezi těmi problematickými složkami, pojmy jsou součástí definic, souvislosti v matematice jsou vždy věcí logiky. Matematika se liší od běžného života, ve kterém se s definicemi často nesetkáváme a souvislosti jsou daleko provázanější a nesouvisí tak často s logikou.

Kdy bychom měli začít vést děti k matematice? Měli bychom se snažit probudit zájem děti o matematiku v brzkém věku, tedy útlém mládí. Matematika, kterou bychom jim měli prezentovat by měla být zajímavá a neměla být nucená, spíše přirozená. Kuřina uvádí, že matematika by měla obsahovat takzvaných Pět P: pamatovat si, počítat, přemýšlet, porozumět, použít. Matematika by měla být soustředěna na rozvoj myšlení.

„Moderní" autoři roli paměti ve vyučování matematiky často zlehčují, avšak jde o důležitou složku. Žijeme ve světě, kde máme přístup k nejrůznějším informacím, které můžeme nalézt snadno a rychle, jsme také schopni si mnoho věcí odvodit. Bez paměti by ovšem bylo problémů a úloh velmi složité, bez ní bychom totiž nebyli schopni se orientovat v souvislostech. Mnoho těchto úloh nám nabízí možnost trénování paměti. Učení se bez souvislostí nedává smysl. Mezi základní složky matematiky patří počítání. V současné době na ni již není takové zaměření. Je užíváno kalkulátorů či počítačů pro numerické výpočty.

Matematika nabízí možnosti rozvoje myšlení, v mnoha případech jde o více příležitostí tohoto rozvoje než v ostatních školních předmětech. Matematikou rozumíme systém, který se skládá z dedukcí, provázaných definic, vět a jejich důkazů. Toto se dá naučit zpaměti a jednoduše pomocí paměti reprodukovat. Ovšem pokud se něco učíme zpaměti, nijak nás to nerozvíjí a z dlouhodobého hlediska tyto definice často bez kontextu zapomeneme.

Pokud to čas umožňuje, je vhodné k matematice přistupovat induktivně, žákům pokládat otázky a předkládat problémy, oni se pak mohou pokoušet nacházet své vlastní způsoby řešení.

6.3 Matematická kultura

Matematikou kulturu nejsme schopni jednoznačně definovat. Jde o matematickou gramotnost, ovládání oblastí matematicky včetně pojmů a jejích metod, o schopnost ovládání různých matematických jazyků. Člověk s matematickou kulturou je schopen vidět souvislosti mezi pojmy a propojovat různé oblasti matematiky.

Je matematická kultura studenta měřitelná? Úroveň matematické kultury lze sledovat pomocí úrovní metod, které student používá k řešení problémů. Schopnost řešit úloh, které jsou součástí například matematických olympiád vyžadují vysokou úroveň matematické kultury.

K rozvoji matematické kultury může žáky vést jak učitel v první třídě, tak i vysokoškolský pedagog. Učíme žáky hledat souvislosti mezi reálným životem a matematikou. Jsou vedeni k pochopení matematických pojmů a schopnosti ji aplikovat v realitě.

Na různých úrovních vzdělání vykazujeme jinou úroveň matematické kultury, a určitou úroveň matematické kultury má již absolvent základní školy, stejně tak různá povolání vyžadují různé úrovně. Nemá smysl tyto úrovně srovnávat. Každé matematické vzdělávání by se však mělo soustředit na rozvoj úrovně matematické kultury jeho absolventů. Matematicky gramotný žák rozumí a je schopen demonstrovat základní učivo jeho ročníku.

Matematická kultura se v práci učitele projevuje jako prezentace nového učiva žákům v přirozeném zařazení nových pojmů do výuky. Matematickou kulturu obsahují i učebnice, proto musíme pečlivě vybrat, které budou na školách užívány.

Elementární matematika vychází z reálného světa, a tak by ji měl žák i poznat, ne jako nesrozumitelný uměle vytvořený předmět užívající cizího jazyka. [4]

V České republice užíváme hledisko strukturální, související většinou se sadou učebnic. Zajímavý je zmínit přístup singapurských škol k matematické kultuře, kde k řešení problémů užívají pěti složek, procesů, pojmů, dovedností, přístupů a metakognice.

7. Osová a středová souměrnost

7.1 Osová a středová souměrnost jako učivo základní školy

Učivo osové a středové souměrnosti se řadí do vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace do oboru Geometrie v rovině a v prostoru. [5, 6]

V rámci druhého období první stupně mezi očekáváné výstupy patří: *M-5-3-05 rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním* jehož minimální doporučená úroveň je definovaná jako

M-5-3-05p určí osu souměrnosti překládáním papíru. Učivo je zde doporučeno prezentovat prostřednictvím manipulativních činností – tedy skládačkami, užitím stavebnic či papíru. U osové souměrnosti je vhodné využít reálných předmětů, např. dopravních značek. [5]

Očekávaným výstupem pro osovou a středovou souměrnost Geometrie v rovině a v prostoru pro 2. stupeň je: *M-9-3-08 načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově a středově souměrný útvar*, jehož minimální doporučená úroveň pro úpravy očekávaných výstupů v rámci podpůrných opatření je definována jako: *M-9-3-08p sestrojí základní rovinné útvary ve středové a osové souměrnosti.* Je doporučeno, aby geometrické útvary rýsované v osové či středové souměrnosti byly přizpůsobeny možnostem žáků. [6]

Úspěšný žák je tedy schopen rozhodnout o osové souměrnosti útvaru, najít osy tohoto útvaru, rozhodnout o osové souměrnosti útvaru, určit jeho střed souměrnosti, načrtnout a sestrojit obraz rovinného útvaru pomocí obou zmíněných souměrností. [6]

V učebních osnovách je nejčastěji osová souměrnost jako taková zařazena do 6. ročníku. Žák by měl zvládnout rozlišit osově souměrné útvary, načrtnout a sestrojit obraz rovinného útvaru v osové souměrnosti a porozumět pojmu samodružný bod.

Středová souměrnost se probírá často o rok později, a to v 7. ročníku. Žák by měl být schopen popsat vztah mezi vzorem, obrazem a středem souměrnosti, zobrazit rovinný útvar ve středové souměrnosti, poznat středově souměrný útvar a označit jeho střed souměrnosti, sestrojit základní rovinné útvary ve středové souměrnosti.

Poté některé úlohy související jak s osovou, tak i středovou souměrností se vyskytují v okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy. [7]

7.2 Definice

7.2.1 Osová souměrnost

Souměrnost podle osy o (neboli osová souměrnost s osou o) v rovině je nepřímá shodnost, která každému X roviny přiřazuje takový obraz X', že platí:

a) *bod X' leží na kolmici k ose o vedené bodem X*

b) $|PX| = |PX'|$*, kde P je pata této kolmice na ose o*

Osová souměrnost je jednoznačně určená osou souměrnosti o.

Samodružnými body osové souměrnosti jsou právě jen všechny body osy o. Jejími samodružnými přímkami jsou v dané rovině osa o a všechny přímky k ní kolmé. [8]

Příklady:

- Útvar je souměrný podle osy, jestliže je v nějaké osové souměrnosti sám sobě obrazem
- Úsečka má pouze jednu osu souměrnosti, která vede jejím středem
- Aby byl trojúhelník osově souměrný musí být rovnoramenný
- Pravidelné mnohoúhelníky jsou osově souměrné, počet vrcholů určuje počet os souměrnosti
- Kruh má nekonečně mnoho os souměrnosti [9]

7.2.2 Středová souměrnost

Souměrnost podle středu S (středová souměrnost se středem S) v rovině je přímá shodnost, která přiřazuje středu souměrnosti S týž bod $S' = S$ a každému bodu $X \neq S$ roviny přiřazuje takový obraz X', že platí,

a) *bod X' leží na polopřímce opačné k polopřímce SX*

b) $|SX| = |SX'|$

Středová souměrnost je speciálním případem otočení o úhel velikosti $\alpha = 180°$.

Je jednoznačně určena středem souměrnosti S.

Samodružným bodem středové souměrnosti je právě jen střed souměrnosti S. Jejími samodružnými přímkami jsou všechny přímky procházející tímto bodem S. [8]

Příklady:

- Útvar je souměrný podle středu, jestliže je v nějaké středové souměrnosti sám sobě obrazem

- Útvary středově souměrné: úsečka, čtverec, obdélník, kosočtverec, pravidelný šestiúhelník, kruh
- Trojúhelníky nejsou středově souměrné [10]

8. Programy a aplikace vhodné pro vyučování osové a středové souměrnosti

8.1 Aplikace Wolfram Research

Společnost Wolfram Research byla založena roku 1987 Stephenem Wolframem. Je to jedna z nejvýznamnějších světových počítačových, webových a cloudových softwarových společností na světě. Jde o silnou společnost vědecké a technické inovace. Jejich cílem je vyvinou technologie a nástroje, které zjednoduší počítání. Roku 1988 vydali jejich první software zvaný Mathematica, kterým si získali mnoho technických a vzdělávacích společností s miliony oddaných uživatelů po celém světě. Na základě unikátního jazyka Wolframu byl roku 2009 přestaven software Wolfram Alpha. Tento systém je denně využíván miliony uživatelů jak na webových stránkách, tak pomocí mobilních aplikací atd. [11]

Wolfram Research nabízí hned několik druhů produktů. Některé jsou placené, jiné můžeme používat zadarmo. Pro školní prostředí by to byl právě software Wolfram Alpha Pro, kde pořizovací cena začíná na cca 120 Kč za měsíc. Jeho neplacenou verzi Wolfram Cloud po založení účtu mohou používat žáci kdekoliv, a to jak na školních počítačích, tak i doma. Wolfram Cloud má omezené množství možností, ovšem pro využití

ve školním prostředí je naprosto dostačující. Wolfram Cloud nabízí také mobilní aplikaci, která je přístupná jak pro operační systém Android i iOS. [12]

8.2 Geogebra

Geogebra je matematický software vhodný pro všechny úrovně vzdělávání. Propojuje geometrii, algebru, tabulkový editor, statistiku a počty v jednom systému. Geogebra nabízí online platformu s již přes milion vytvořených materiálů jejich uživateli. Tyto materiály se dají pomocí Geogebry sdílet a práci studentů lze pozorovat v reálném čase. Je jedním z významných poskytovatelů matematických softwarů, který podporuje vědu, technologie a inženýrství, matematické vzdělávání a inovace ve vzdělávání po celém světě. Tyto systémy podporují mnoho stránek pro vzdělávání, a to jakožto jednoduché demonstrace či celé online hodnotící systémy. Důležité je zmínit, že Geogebra je pro všechny uživatele zdarma. Oproti jiným programům podporuje různé jazyky a nalezneme zde například i češtinu. Lze ji využívat v prohlížeči, ale je možné si ji stáhnout i jako aplikaci a využívat off-line. [13]

8.3 Maple

Dalším matematickým softwarem může být například Maple. Maple je matematický software, který kombinuje matematiku s počítačovým rozhraním, které umožňuje matematické problémy analyzovat, zkoumat, vizualizovat a řešit. Řeší problémy jednoduše, správně a rychle. Zabývá se širokým rozhraním druhů matematiky a okruhů souvisejících s matematikou jako jsou počty, algebra, diferenciální počet, statistika, lineární algebra, fyzika, teorie grup atd. Pracuje v 2D a 3D prostředí. Tento software nabízí 15 dní zdarma na vyzkoušení, poté licence stojí cca 3 300 Kč. Program nepodporuje český jazyk. [14]

8.4 Cabri

Jiným matematickým softwarem je například Cabri. Cabri se snaží matematiku zjednodušit a předejít akademickému nezdaru. Nabízí digitální materiály a softwarové nástroje. Učitelé tvrdí, že Cabri je nejjednodušší na naučení a díky Cabri jsou schopni zapojit studenty do práce s matematickými softwary. Pro jednotlivce nabízí Cabri licenci pro jeden počítač s neomezeným užitím, či licenci na 1 rok, licenci pro třídy nebo studentskou licenci. Ceny se pohybují od cca 660 Kč. Cabri nepodporuje český jazyk.[15]

9. Jiné druhy čtyřkrokového procesu:

Čtyřkrokový proces byl uveden již dříve a lidé se snažili vytvořit jakýsi postup řešení problémů.

Cypress Farirbanks Independent School District má čtyřkrokový plán, který pomáhá studentům prvního stupně zapojit jejich logické myšlení a vyvíjet jejich matematický jazyk právě během užívání tohoto procesu. Jednotlivé kroky mají následující názvy: detail, hlavní nápad, strategie a jak. Jak studenti procházejí jednotlivými kroky, mohou si užít grafické reprezentace k uspořádání jejich nápadů, slouží jako doložka matematického myšlení a ukazují strategii vedoucí k řešení. [16]

V části hlavního nápadu je student čtenářem, který přemýšlí a analyzuje. Problém si přečte nejméně dvakrát a snaží se jej shrnout nebo nějakým způsobem vizualizovat, co se děje. Jakmile je problém identifikován, snaží se jej popsat. Mohou mu pomoci následující otázky: Jaký je hlavní důvod otázky v tomto problému? Co hledáme? Co chceme najít? [16]

Poté se studenti zaměří na detaily. Pomalu si student přečte zadání problému a identifikuje detaily pomocí čísel, slov a frází. Hledá informace navíc, hledá schovaná čísla, která mohou být vyjádřena ne úplně viditelně. Otázky v této části jsou následující: Jaké detaily jsou nutné pro zodpovězení otázky? Co je důležité? Co potřebuji? Co mi pomůže při zodpovídání otázky? [16]

Student si poté zvolí matematickou strategii k hledání řešení problému a užije ji k zodpovězení otázek. Možnými strategiemi (nejen matematickými) mohou být: užití nebo nakreslení obrázku, hledání motivu, číselné věty, vytvoření operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení), tvoření nebo užití tabulky nebo seznamu, zjednodušení problému atd. Otázky v této části jsou: Co musím udělat, abych vyřešil tento problém? Jakou mám strategii? Co dělám s detaily, abych dostal odpověď? [16]

A konečně se dostáváme k části „Jak?“, kde zjišťujeme, zda je naše odpověď rozumná. Studenti užívají slovních odpovědí k popsání jejich řešení. Otázky k této části jsou: Jak jsem vyřešil problém? Kterou strategii jsem použil? Jaké byly mé kroky? Studenti musí v tomto kroku vysvětlit, proč zvolili strategii, kterou zvolili. Odůvodňují zde své myšlení, a komunikují jejich pochopení problému. [16]

Jaké jsou výhody této metody? Tato metoda nutí studenty přemýšlet na vyšší úrovni. Podle popisu myšlení Bloomovou taxonomií se učitelé snaží dostat právě přes její nižší úrovně a dovést své žáky k těm vyšším stupňům. Provádění této více krokové metody vyžaduje zaznačování myšlení studentů v alespoň třech těchto krocích kromě vypracovávání právě zadaného problému. Další výhodou je rozšíření procesu ze tří na čtyři kroky, které způsobí, že studenti si na těchto úrovních prohloubí jejich porozumění matematice a zlepší jejich plynulost užívání matematického jazyka. V krátkém období se zlepší jejich činnost při stanovování výsledků a stejně tak poroste jejich sebevědomí při užívání matematiky. Z dlouhodobého hlediska budou studenti lépe připraveni na přechod z prvního stupně na úroveň matematiky na druhém stupni. Pro učitele je výhodou užití této metody v tom, že budou schopni jednodušeji identifikovat specifické problémy žáků a na základě toho jim dá lepší zpětnou vazbu. Sepisování poznatků a postupu by také mělo studentům v budoucnu pomoci u testování. [16]

Hlavní cíle a standardy vyplývající z tohoto procesu jsou následující: učitelé musí zkoumat, jak žáci přicházejí na jejich odpovědi, jelikož správné odpovědi neznamenají vždy správný myšlenkový proces; žáci musí zkoumat různé způsoby, jak přemýšlet o matematických problémech a jejich řešení; žáci se musí naučit analyzovat a řešit své vlastní problémy; školská matematika by se měla více soustředit na jejich přemýšlení zároveň, co řeší nějaký problém.[16]

I když elementární matematika nezmiňuje grafickou organizaci při řešení problémů, je žákům doporučováno používat matematiku k řešení problémů souvisejícím s každodenními situacemi a aktivitami ve škole i mimo ni. Problém identifikují, pochopí, vytvoří plán, který zprovozní a zhodnotí, zda jejich řešení dává smysl. Časem si vyberou či vyvinou vhodný plán či strategii pro řešení problémů. Ta může obsahovat kreslení obrázku, hledání motivu, systematické tipování a kontrolu, vytváření tabulky, převádění na jednodušší problém, dopracování se zpětně k řešení problému. V neposlední řadě se také učí užívat nejrůznější nástroje a technologie k řešení problémů. Žáci komunikují v matematice neformálním jazykem. Vysvětlují a zapisují poznatky pomocí objektů, slov, obrázků, čísel atd. Přeformulovávají neformální jazyk do jazyka matematického a užívají symboliky. Žáci používají logické zdůvodňování, vytvářejí generalizace z motivů nebo příkladů, odůvodňují jejich odpovědi a vysvětlují řešení. [16]

Techniky, které učitelé používají pro čtyřkrokový proces jsou následující. Na začátku ukážou model s grafickou reprezentací, jak postupovat při užívání čtyřkrokového procesu. Používají metodu, při které přemýšlí nahlas, aby studentů představili jejich uvažování. Dotazují se studentů tak, aby studenty povzbudili ve správném přemýšlení nad problémy a vedli je správnou cestou. Diskutují s celou třídou, či nechávají žáky diskutovat mezi sebou. Aby tato metoda byla úspěšná, měla by převažovat debata nad psaním. Studenti si zjistí, jak propojit matematiku s jazykem, a tak budou schopni popsat své řešení pomocí logiky a vhodných matematických termínů. Jamile se toto naučí řešit s učitelem a svými spolužáky, budou schopni vést vnitřní rozhovor sami se sebou a řešit tyto problémy samostatně. [16]

Jak může být tento proces zapojen do hodin? Studenti se mohou zapojovat do diskuse a řešení čtyřkrokového procesu, zatímco učitel vysvětluje problém třídě. Ve třídě může být umístěný plakát s popisem jednotlivých kroků. Studenti mohou pracovat v párech nebo skupinách, tak si mohou také procvičovat užívání matematického jazyka. Dále by měli studenti vypracovávat samostatně úkoly, a tak si procvičovat užívání jednotlivých kroků. Měli by tento proces užívat především pro řešení slovních úloh. Měl by být omezen počet úkolů, který studenti dostávají. Jejich tempo se postupně pomocí této rutiny zrychlí a budou konzistentní při řešení problémů. [16]

Podobný proces popisuje také Ed Latimore. Skládá se ze čtyř otázek. Jaký je problém? Pokud nevíme, co je problémem, nejsme schopni přijít s řešením. Indikuje nám, že něco je špatně. Co s tím uděláme, je základem a motivací zbylých kroků. Co potřebujeme zjistit? Jde o důležitou část problému. Co už víme? Jde o všechny věci související s problémem, které by nám mohly pomoci s jeho řešením. Nejde však vždy o očividné věci. Jaké jsou mezi nimi souvislosti? V tomto posledním kroku jde hlavně o brainstorming, kde použijeme naše schopnosti a s pomocí odpovědí, které nám vznikly z předchozích kroků, vybereme tu nejvhodnější. Tento postup využíval především k učení matematiky a fyziky, ovšem tato metoda je vhodná pro jakýkoliv problém, nezáleží jak komplexní a složitý. Obecně, pokud nejsme schopni problém vyřešit, je to často kvůli neschopnosti řešit třetí nebo čtvrtý krok, a to buď, protože nemáme dostatek informací nebo jsme si nevšimli nějaké vazby. [17]

Častým problémem v matematice bývají slovní problémy, jelikož u nich ne vždy bývá na první pohled jasné, co má být řešeno. Pokud však rozumíme problému, je hledání řešení jednodušší. Porozumění je právě ironicky největším problémem. Učení se je vlastně hledání řešení a člověk se dokáže učit rychleji, pokud to vidí tímto způsobem. Co bylo komplikované se stane jednodušším, co bylo spletité se stane jasným. [17]

10. Sbírka úloh

Ačkoliv tento čtyřkrokový postup řešení problémů je dílem autorů programu Wolfram Mathematica, v této práci je především uvedeno řešení pomocí GeoGebry. V programu Wolfram Mathematica by žáci museli užívat analytický zápis pro vykreslení jednotlivých úloh, a proto je jednodušší užití programu GeoGebra, jelikož zápis více připomíná školní matematiku a pochopení rýsování je zde jednodušší.

V následujících úlohách se tato práce snaží o propojení osové a středové souměrnosti s reálným životem. Situace jsou povětšinou modelové, jelikož realitu ovlivňují i další faktory, jako například působení různých sil na těleso, rychlost, materiály atd. Objevuje se tu také propojení více tematických celků z matematiky, jako jsou například úhly, obsah, počítáme tu vzdálenost a další. Zadání úloh se snaží být obsáhlé, aby se žáci naučili filtrovat informace.

Cílem těchto úloh je ukázat žákům, že osová a středová souměrnost se vyskytuje i v úlohách, kde by to na první pohled nečekali. Musí zde zapojovat tvořivé myšlení, jelikož některé hodnoty nejsou pevně dané. Matematické softwary jsou dynamické, proto při změnách a úpravách mohou žáci sledovat, co se děje v reálném čase.

Sbírka úloh představuje sadu osmi příkladů, kde u některých využíváme objekty reálného života a snažíme se vyřešit problém za užití osové či středové souměrnosti nebo příkladů, kde používáme kreativitu k vytváření objektů z reálného života s užitím souměrností. Žáci zde mohou zapojovat tvořivé myšlení, aby se dostali k výsledku. Používají přednastavené funkce uvedených programů nebo si funkce pro řešení mohou vytvářet. Vzhledem k tomu, že úlohy jsou směřovány na druhý stupeň základní školy u programovacího jazyka Wolframu by bylo vhodné jim hotové funkce představit a spíše jim ukázat, jakým způsobem je vhodné je používat, případně, kde a jak hledat chyby, pokud nám aplikace vyhodí chybovou zprávu.

V učebnicích se většinou setkáme s konstrukčními úlohami. Nevýhoda těchto úloh je, že často nám stačí postupovat podle jejich zadání, jelikož jejich konstrukce je přímo popsaná právě v zadání a nemusíme tak nad úlohou více přemýšlet. Proto úlohy, které byly vytvořeny v této práci se snaží o zapojení přemýšlení nad problémy i u konstrukčních úloh.

Postup řešení úloh zde je popsán univerzálně, kdy jednotky si zde můžeme dosadit sami, spíše je ukázáno, pomocí kterých nástrojů bychom mohli problém řešit. Spousta úloh nabízí více řešení.

10.1 Osová a Středová souměrnost pomocí Wolfram Alpha

Program Wolfram Alpha v současné době nemá naprogramované žádné funkce, které by umožňovaly překreslení bodů či funkcí v osové či středové souměrnosti. Osovou či středovou souměrnost je možné v programu řešit analyticky. Abychom práci žákům ulehčili, musíme si vytvořit v programu funkce, které nám budou jednotlivé body převádět pomocí zmíněných souměrností.

Analytické zadání středové souměrnosti:

Pro vypočítání souřadnic obrazu bodu $B = [x, y]$ *ve středové souměrnosti se středem* $S = [s_1, s_2]$ *vypadá analytické vyjádření následovně:* [18]

$$x' = -x + 2s_1$$
$$y' = -y + 2s_2$$

Pomocí tohoto vyjádření si užitím jazyka Wolfram vytvoříme funkci:

stredovasoumernost[Bod_,Stred_]:={-Bod[[1]]+2*Stred[[1]],-Bod[[2]]+2*Stred[[2]]}

Pro zadávání vstupu do této funkce budeme používat množinové vyjádření:

stredovasoumernost[{x,y},{s_1,s_2}]

Výstup:

{x′,y′}

Tedy souřadnice obrazu bodu B budou $B' = [x', y']$

Ukázka pro zadání vstupu:

stredovasoumernost[{1,2},{3,4}]

{5,6}

Analytické zadání osové souměrnosti:

Pro vypočítání souřadnic obrazu bodu $B = [x, y]$ *v osové souměrnosti s osou* $o: ax + by + c = 0$ *vypadá analytické vyjádření následovně:* [19]

$$x' = x - \frac{2a}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$
$$y' = y - \frac{2b}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$

Pomocí tohoto vyjádření vytvoříme užitím jazyka Wolfram funkci:

osovasoumernost[Bod_,Osa_]:={Bod[[1]]-(2*Osa[[1]]/((Osa[[1]])^2+(Osa[[2]])^2))*(Osa[[1]]*Bod[[1]]+Osa[[2]]*Bod[[2]]+Osa[[3]]),Bod[[2]]-(2*Osa[[2]]/((Osa[[1]])^2+(Osa[[2]])^2))*(Osa[[1]]*Bod[[1]]+Osa[[2]]*Bod[[2]]+Osa[[3]])}

Pro zadání vstupu do funkce budeme používat množinové vyjádření vypadající následovně:

osovasoumernost[{x,y},{a,b,c}]

{x′,y′}

Tedy souřadnice obrazu bodu B budou $B' = [x', y']$

Ukázka pro zadání vstupu:

osovasoumernost[{1,4},{2,-2,2}]

{3,2}

Pár tipů k užití programů od Wolfram Research:

- Při zadávání vlastní funkce může funkce začínat malým písmenem
- Funkce naprogramované v programu Wolfram Alpha se zadávají velkým počátečním písmenem
- Aby funkce fungovala musíme stisknout klávesy Shift + Enter nebo užitím klávesy Enter v numerické části klávesnice
- Pro psaní hranatých závorek použijeme klávesy pravý Alt + F nebo G
- Pro psaní složených závorek použijeme klávesy pravý Alt + B nebo N

Úloha 1

Po smrti dědečka dle jeho závěti si jeho vnuci mají mezi sebou rozdělit pozemek, který po sobě zanechal. Dohodli se, že pozemek rozdělí na dva rovné díly a že jej rozdělí plotem. Chtějí, aby jejich poloviny byly shodné výměrou i tvarem a plot byl rovný a tvořil rovnou čáru mezi pozemky, tedy bez jakýkoliv zákoutí. Hranice všech pozemků musí být vůči sobě rovnoběžné či kolmé. Zároveň se jeden z vnuků rozvádí s manželkou a dle jejich smlouvy jí má připadnout polovina jeho části pozemku. Rozdělení mají dohodnuto opět stejným způsobem, jak má se svým bratrem. Pozemek se nachází na vesnici v klidné oblasti, má 400 m na délku a 350 m na šířku. Z žádné strany nehraničí s jinými pozemky, okolo něj je pouze cesta.

1. **Definovat otázky**

   Jaká bude stejná polovina? Máme více možností?

   Jak si pozemek rozdělí? Jak velké budou pozemky?

2. **Předefinovat do vypočitatelné podoby**

   Jak rozdělíme obdélník na půl? Kolika způsoby můžeme rozdělit obdélník na polovinu? Velikost pozemku se udává v jednotkách čtverečných, jak spočítat obsah?

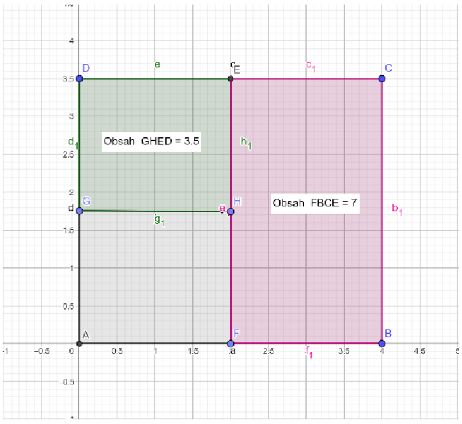
   Pozemek o tvaru obdélníku rozdělíme na polovinu pomocí osové souměrnosti, po prvním rozdělení budeme mít dvě možnosti řešení. Poté jednu z polovin ještě rozdělíme na polovinu opět pomocí osové souměrnosti, tím dostaneme další dvě možnosti řešení.

3. **Vypočítat**

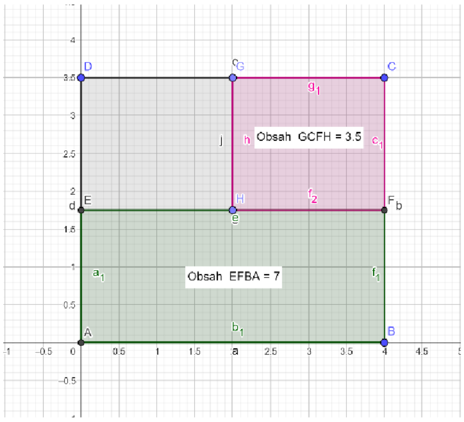
   <u>Program GeoGebra</u>

   Nejprve si vykreslíme útvar, v tomto případě jde o obdélník o délkách stran 400 m a 350 m. Pro naše účely budeme používat velikosti 4 cm a 3,5 cm, dle měřítka 1:100. Pro řešení tohoto problémů nemůžeme užít funkci Osová souměrnost, jelikož by nám vykreslila útvar osově souměrný tomu, který již máme. Použijeme funkci Osu úsečky pro stranu délky 4 cm k nalezení osy souměrnosti této úsečky, tak se nám rozdělí útvar na polovinu. Dále rozdělíme jednu z těchto polovin opět Osou úsečky, a to buď stranu o délce 3,5 cm nebo nově vzniklou stranu o délce 2 cm, pomocí nově vzniklé osy souměrnosti těchto stran dostaneme další oblasti. Nově vytvořené plochy poté pomocí funkce Mnohoúhelník ohraničíme, abychom mohli použít funkci Obsah. Pro vypočítání vzniklých ploch použijeme tuto funkci a GeoGebra nám vypočítá velikosti vzniklých ploch. Abychom získali další možnosti narýsujeme Osu úsečky procházející stranou o délce 3,5 cm, tato osa souměrnosti nám rozdělí obdélní podélně. Pro vytvoření dalších oblastí budeme rýsovat Osu úsečky procházející stranou 4 cm nebo nově vzniklou stranou 1,75 cm.

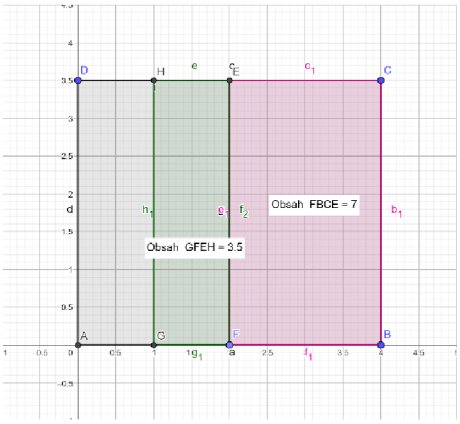
Možnosti:



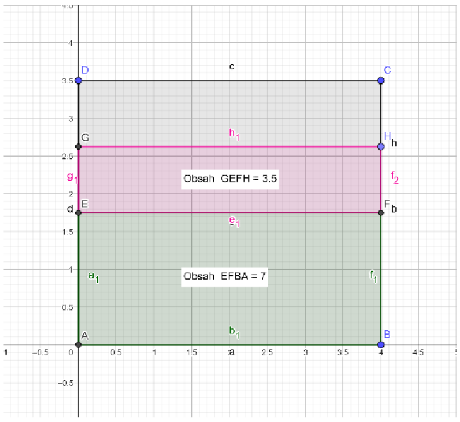
Obrázek 1. Pozemek 1 (Zdroj: autor)



Obrázek 2. Pozemek 2 (Zdroj: autor)



Obrázek 3. Pozemek 3 (Zdroj: autor)



Obrázek 4. Pozemek 4 (Zdroj: autor)

Podrobný postup rýsování pomocí GeoGebry – první případ:

$A = (0,0)$

$B = (4,0)$

$C = (4,3.5)$

$D = (0,3.5)$

$ct1 = Mnohouhlenik(A, B, C, D)$

$a = Usecka(A, B, ct1)$

$b = Usecka(B, C, ct1)$

$c = Usecka(C, D, ct1)$

$d = Usecka(D, A, ct1)$

$f: OsaUsecky(a)$

$E = Prusecik(f, c)$

$F = Prusecik(f, a)$

$g = Usecka(E, F)$

$h: OsaUsecky(d)$

$G = Prusecik(d, g)$

$H = Prusecik(g, f)$

$j = Usecka(G, H)$

$ct2 = Mnohouhlenik(G, H, E, D)$

$d1 = Usecka(D, G, ct2)$

$e = Usecka(E, Dct2)$

$g1 = Usecka(G, H, ct2)$

$h1 = Usecka(H, E, ct2)$

$ct3 = Mnohouhlenik(F, B, C, E)$

$b1 = Usecka(B, C, ct3)$

$c1 = Usecka(C, E, ct3)$

$e1 = Usecka(E, F, ct3)$

$f1 = Usecka(F, B, ct3)$

Funkce Obsah – klikneme na vybrané mnohoúhelníky

4. **Interpretovat výsledky – odpověď**

   Z našich obrázků nám vyplývá, že máme 4 možné rozdělení pozemku, které mohou mít ještě další možnosti uspořádání. Obsah velkého pozemku nám dle zvoleného měřítka měří 7 cm², což bude v realitě 70 000 m² a rozměry malých pozemků budou 35 000 m².

   Každý z vnuků dle závěti dostal od zesnulého dědečka pozemek o velikosti 70 000 m². Po rozdělení své části jednomu z vnuků a jeho bývalé manželce zůstalo každému 35 000 m².

Komentář:

Tento příklad je vhodnou ukázkou ze života, vychází z reality. Obsahuje i nepodstatné informace a úkolem žáka je posoudit, které z informací potřebuje. Jako modifikace bychom mohli přidat například ještě příjezdovou cestu, a tedy bychom se snažili pozemek rozdělit tak, aby všichni vlastníci k ní měli přístup, a tak by se nám možnosti více omezily.

Tento úkol je vhodné užít jako jeden z úvodních příkladů, kde již žáci mají vysvětlené základní vlastnosti geometrických útvarů. Můžeme po žácích chtít najít jedno řešení nebo je můžeme nechat hledat všechny kombinace. Žáci si zde tedy mohou procvičit jak rýsování, tak i vyzkoušet kombinatoriku. Mohou či nemusí užít měřítko. Příklad se také hodí pro úvod při užívání matematického softwaru, právě v GeoGebře pro žáky bude nejjednodušší vytvořit řešení a funkce pro hledání řešení jsou základní, a tak si žáci alespoň budou moci s programem seznámit svým vlastním tempem.

Kromě rozdělování útvaru na dva souměrné si v této úloze žáci procvičí i měřítko a také počítání obsahu. Tato úloha není přímo zaměřená na osovou souměrnost, útvary mají být souměrné podle osy. Avšak pro rozdělení těchto úseček budeme používat funkci osa úsečky.

Úloha 2

Kamarádi Pavel, David a Marek se učí hrát kulečník. Dle pravidel se hráči nejčastěji střídají poté, co jeden z nich buď netrefí kouli nebo se trefí do černé či soupeřovy. Aby hráči mohli trefit kouli, kterou potřebují, mohou využívat stěn herní plochy (mantinely). V každém kole se snaží hráč trefit bílou koulí do své.

Každému hráči již zůstala na hrací ploše jen jedna koule. Další v pořadí je Pavel. Jakým způsobem musí poslat bílou kouli, tak aby se trefil do červené, a tak ji na hrací ploše posunul (nemusí se trefit do jamky)? Může kouli odrazit od tří stěn (mantinelů)?

1. **Definovat otázky**

   Jakým směrem musí poslat bílou kouli? Jak bude úloha vypadat při užití jedné, dvou či tří stěn (mantinelů)?

2. **Předefinovat do vypočitatelné podoby**

   Jakou dráhu musíme narýsovat? Kolikrát využijeme osové souměrnosti?

3. **Vypočítat**

   <u>Program GeoGebra</u>

   V následujících ukázkách bude popis uveden obecně, je na žákovi, jakým způsobem si umístí body.

   V tomto případě budeme využívat pravidla, že úhel odrazu se rovná úhlu dopadu. Nejprve si narýsujeme libovolný obdélník a do jeho vnitřní části umístíme dva body, je vhodné body barevně rozlišit. V ukázkovém příkladu volíme následující barvy, světle modrou označíme kouli, kterou budeme střílet a červenou tu, kterou musíme trefit.

   V případě užití jedné stěny pro odraz bude postup následující: Nejprve si pomocí funkce Osová souměrnost sestrojíme obraz červeného bodu. Vybereme funkci Osová souměrnost a označíme si červený bod jako vzor a jako osu si zvolíme libovolnou stranu v našem případě stranu a. Na protější straně nám vznikne obraz, ten spojíme úsečkou s modrým bodem. V místě, kde se nám tato úsečka protne s jednou ze stěn, nám vznikne průsečík. Pro vykreslení celkové dráhy spojíme modrý bod s nově vzniklým průsečíkem a průsečík s bodem červeným.

Podrobný postup rýsování pomocí GeoGebry – první případ:

Počítáme s tím, že již máme sestrojený obdélník se stranami a, b, c, d a uvnitř umístěné dva body; modrý Ma červený C

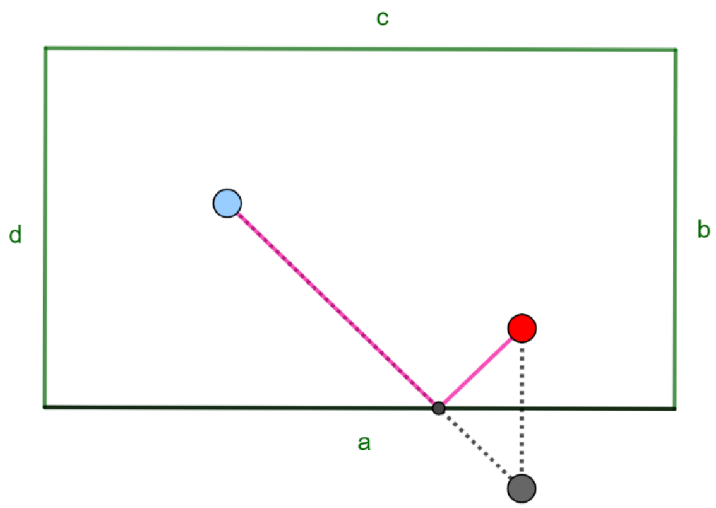
$C' = Soumernost(C, a)$

$f = Usecka(M, C')$

$P = Prusecik(a, f)$

$g = Usecka(M, P)$

$h = Usecka(P, C)$



Obrázek 5. Kulečník 1 (Zdroj: autor)

V případě, že bychom použili k odrazu dvě stěny, bude řešení vypadat následovně:

Nyní budeme chtít sestrojit odraz od stěn c a b. Nejprve si sestrojíme obraz červeného bodu podle osy b. Vybereme funkci Osová souměrnost a zvolíme červený bod jako vzor a stranu b jako osu souměrnosti. Nyní uděláme další osovou souměrnost, tentokrát pro nově vzniklý bod. Zvolíme si nově vzniklý bod jako vzor a stranu c jako osu souměrnosti. Tento bod poté spojíme úsečkou s modrým bodem. Uděláme rovnoběžku s touto úsečkou procházející červeným bodem. Vytvoříme si průsečík úsečky se stranou c a průsečík se stranou b. Spojíme úsečkami modrý bod s průsečíkem na straně c a ten poté s průsečíkem na straně b a nakonec s červeným bodem.

Podrobný postup rýsování pomocí GeoGebry – druhý případ:

Počítáme s tím, že již máme sestrojený obdélník se stranami a, b, c, d a uvnitř umístěné dva body; modrý Ma červený C

$C' = Soumernost(C, b)$

$C'' = Soumernost(C', c)$

$f = Usecka(M, C'')$

$P = Prusecik(c, f)$

$l: Primka(M, P)$

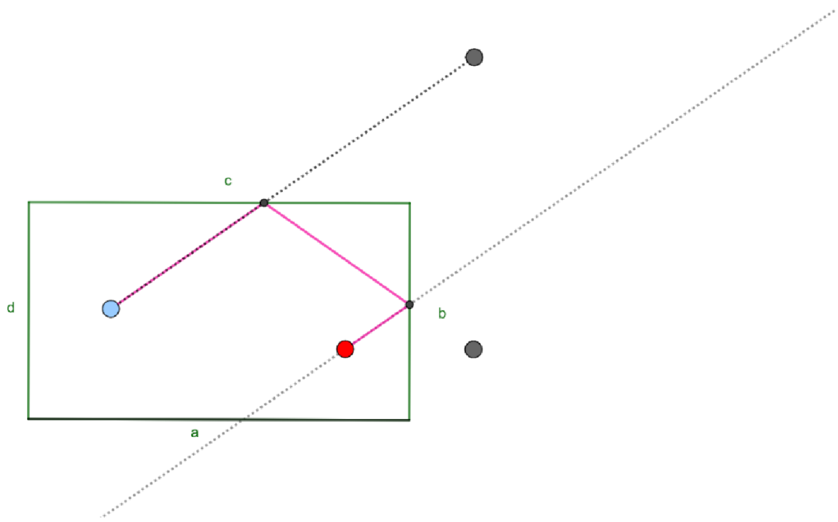
Funkce rovnoběžka: $m: Primka(C, l)$

$P' = Prusecik(m, b)$

$g = Usecka(M, P)$

$h = Usecka(P, P')$

$i = Usecka(P', C)$



Obrázek 6. Kulečník 2 (Zdroj: autor)

A jako poslední si uvedeme, jak by řešení vypadalo v případě užití tří stěn. Nejprve si uděláme obraz červeného bodu pomocí strany a. Použijeme funkci Osová souměrnost, jako vzor zvolíme červený bod a osou souměrnosti bude strana a. Tento vzniklý bod poté použijeme jako nový vzor. Využijeme opět funkci Osová souměrnost, nově vzniklý bod si označíme jako vzor a jako osu zvolíme stranu c. Nyní s nově vzniklým bodem uděláme další osovou souměrnost, bod si zvolíme jako vzor a osou bude strana a. Vznikne nám tak první průsečík, a to průsečík na straně c, ten bude představovat první část dráhy koule. Poté si narýsujeme s touto úsečkou rovnoběžku procházející naším prvním obrazem červeného bodu. V místech, kde se tato rovnoběžka protne se stranami a a b, nám vzniknou průsečíky. Propojíme červený bod s průsečíkem na straně a úsečkou a poté vytvoříme další úsečku propojující průsečíky na straně a a b, propojíme úsečkou průsečíky na straně b a c, nakonec propojíme úsečkou průsečík na straně c s modrým bodem, a tak dostaneme celou dráhu modré koule k červené.

Podrobný postup rýsování pomocí GeoGebry – třetí případ:

Počítáme s tím, že již máme sestrojený obdélník se stranami a, b, c, d a uvnitř umístěné dva body; modrý M a červený C

$C' = Soumernost(C, a)$

$C'' = Soumernost(C', b)$

$C''' = Soumernost(C'', c)$

$f = Usecka(M, C''')$

$P = Prusecik(c, f)$

$l: Primka(M, P)$

Funkce rovnoběžka: $m: Primka(C', l)$

$P' = Prusecik(m, b)$

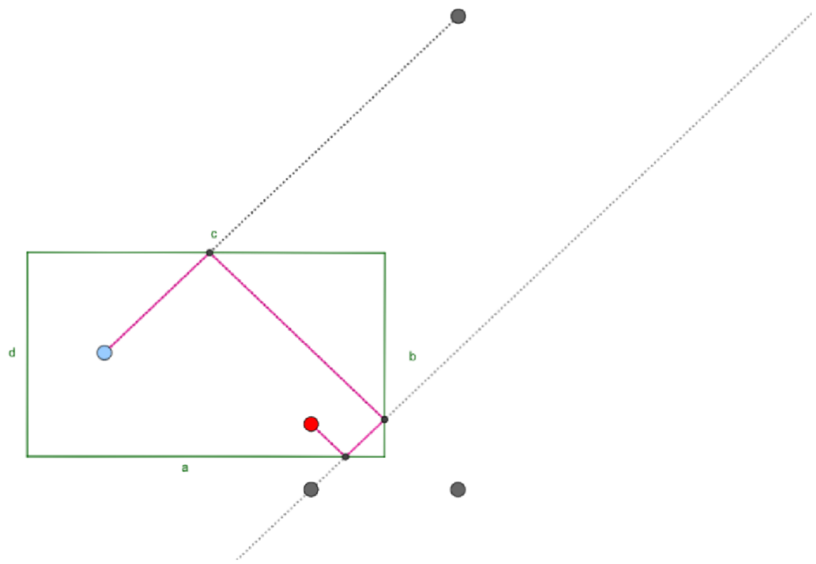
$P'' = Prusecik(m, a)$

$g = Usecka(M, P)$

$h = Usecka(P, P')$

$i = Usecka(P', P'')$

$j = Usecka(P'', C)$



Obrázek 7. Kulečník 3 (Zdroj: autor)

<u>Program Wolfram Alpha + GeoGebra:</u>

Jelikož tato úloha je tvořena pro žáky druhého stupně základní školy, a pro Wolfram Alpha potřebujeme zadání funkcí analyticky, mohou si žáci pomáhat GeoGebrou.

Při užití jedné stěny by řešení vypadalo následovně (Budeme používat nákres z předešlého řešení) Rozměry kulečníku jsou 20×13,5 dm.

$$a: y = 0$$

Modrý bod: $M = [6,6]$

Červený bod: $C = [14,2]$

Budeme používat funkci:

osovasoumernost[Bod_,Osa_]:={Bod[[1]]-(2*Osa[[1]]/((Osa[[1]])^2+(Osa[[2]])^2))*(Osa[[1]]*Bod[[1]]+Osa[[2]]*Bod[[2]]+Osa[[3]]),Bod[[2]]-(2*Osa[[2]]/((Osa[[1]])^2+(Osa[[2]])^2))*(Osa[[1]]*Bod[[1]]+Osa[[2]]*Bod[[2]]+Osa[[3]])}

Vstup:

osovasoumernost[{14,2},{0,1,0}]

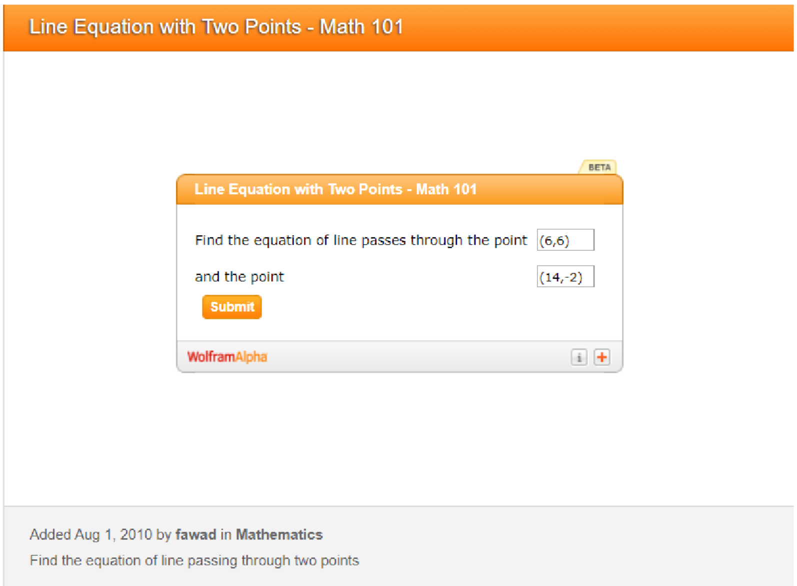
{14,-2}

Dostaneme tedy obraz $C' = [14, -2]$

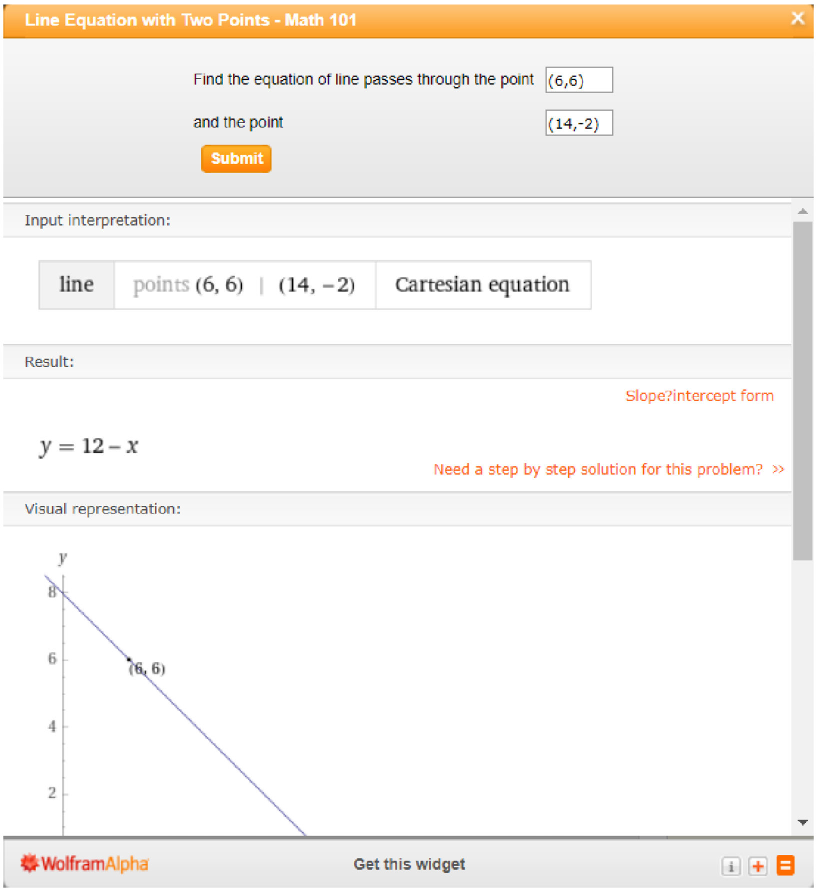
Nyní si vytvoříme přímku procházející body M a C'. Wolfram Alpha nabízí mnoho již naprogramovaných widgetů pro nejrůznější výpočty, proto pro nalezení přímky procházející dvěma body použijeme:

https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=82138b11a724b94d18df2e083d8b7b55

Pomocí kulatých závorek zapíšeme body M a C', a to jako (6,6) a (14,-2)



Obrázek 8. Wolfram Widget 1a (Zdroj: https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=82138b11a724b94d18df2e083d8b7b55)

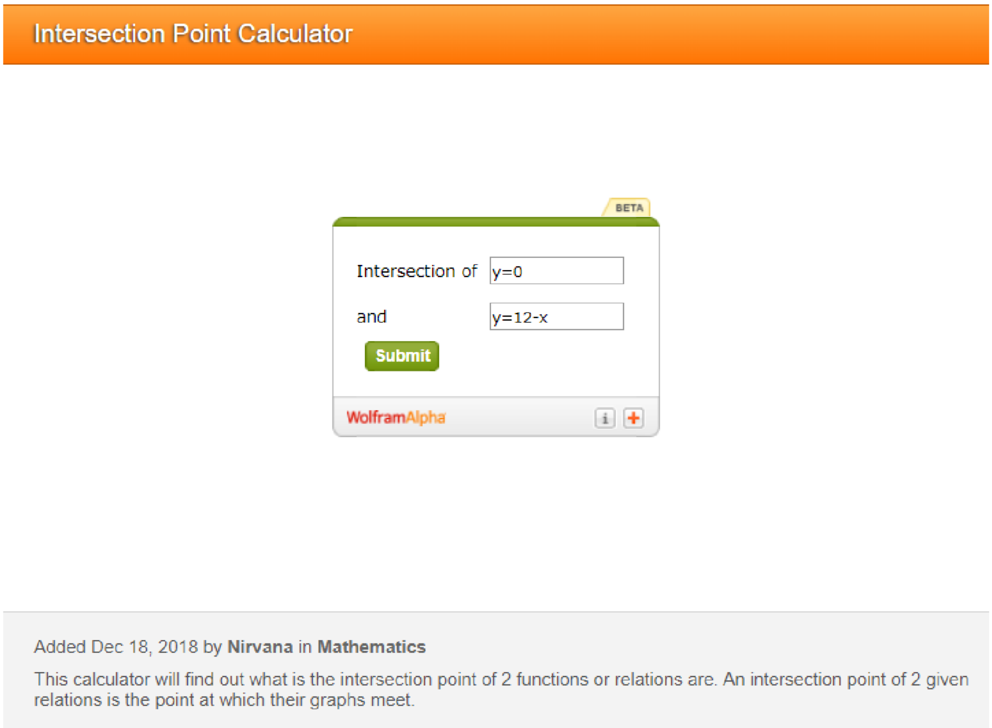


Obrázek 9. Wolfram Widget 1b (Zdroj: https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=82138b11a724b94d18df2e083d8b7b55)

Tento widget nám vyhodnotí rovnici přímky modrého bodu a obrazu červeného bodu, dostaneme že $y = 12 - x$

Poté můžeme užít dalšího widgetu pro nalezení průsečíku, který bude představovat náš bod odrazu:

https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=f93da8718e9af4861e32fab00dccec5f



Obrázek 10. Wolfram Widget (Zdroj: https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=f93da8718e9af4861e32fab00dccec5f)

Do tohoto widgetu si zadáme rovnice přímek ve formátu $y = 0$ a $y = 12 - x$.

Dostaneme tak průsečík $P = [12{,}0]$

Při užití dvou stěn by řešení vypadlo následovně:

$$b: x = 20$$

$$c: y = 13{,}5$$

Vstup pro první obraz:

$x = 20$ si upravíme na$-x + 20 = 0$

osovasoumernost[{14,2},{-1,0,20}]

{26,2}

Dostaneme tedy obraz $C' = [26,2]$

Nyní si musíme udělat obraz C', ten si označíme jako C''.

Vstup pro druhý obraz:

$y = 13{,}5$ si upravíme na $y - 13{,}5 = 0$

osovasoumernost[{26,2},{0,1,-13.5}]

{26.,25.}

Dostaneme tedy obraz $C'' = [26,25]$

Pro nalezení průsečíků budeme opět využívat zmíněné widgety. Nejprve nalezneme přímku procházející M a C''. Zapíšeme pomocí kulatých závorek. Dostaneme přímku $y = \frac{19x}{20} + \frac{3}{10}$ a nalezneme průsečík se stranou c. Průsečík se rovná $P = [\frac{264}{19}, \frac{27}{2}]$.

Nyní nalezneme druhý průsečík. Vytvoříme si přímku procházející bodem P a C'. Dostaneme přímku $y = \frac{267}{10} - \frac{19x}{20}$. Nalezneme její průsečík se stranou b $P' = \left[20, \frac{77}{10}\right]$. První odraz tedy bude v bodě $P = [\frac{264}{19}, \frac{27}{2}]$ a poté v bodě $P' = \left[20, \frac{77}{10}\right]$.

Řešení při užití tří stran:

$$a: y = 0$$

$$b: x = 20$$

$$c: y = 13{,}5$$

První obraz bodu C podle strany a:

osovasoumernost[{14,2},{0,1,0}]

{14,-2}

Dostaneme tedy obraz $C' = [14, -2]$

Dále si vytvoříme obraz bodu C' podle strany b:

osovasoumernost[{14,-2},{-1,0,20}]

{26,-2}

Dostaneme tedy obraz $C'' = [26, -2]$

Dále si vytvoříme obraz bodu C'' podle strany c:

osovasoumernost[{26,-2},{0,1,13.5}]

{26,29}

Dostaneme tedy obraz $C''' = [26,29]$.

Nyní budeme hledat průsečíky. Nejprve si vytvoříme přímku M a C'''. Rovnice přímky bude vypadat následovně $y = \frac{23x}{20} - \frac{9}{10}$. Najdeme si průsečík se stranou c, $P = \left[\frac{288}{23}, \frac{27}{2}\right]$. Nyní musíme naleznout rovnoběžku s touto přímkou tak, aby procházela bodem C'. Pro zjištění této rovnice použijeme funkci v programu Wolfram Alpha v následující podobě

ResourceFunction["ParallelLineThrough"]

[23*x/20 -9/10,{x,14},{y,-2},"StandardFormEquation"]

Rovnici si upravíme na $y = \frac{23x}{20} - \frac{181}{10}$. Najdeme nakonec najdeme průsečíky se stranami b a a. Průsečík se stranou b bude $P' = \left[20, \frac{49}{10}\right]$ a průsečík se stranou a bude $P'' = \left[\frac{362}{23}, 0\right]$.

4. **Interpretovat výsledky – odpověď**

   Odpovědi pro dráhu vyplývají z grafického řešení. Můžeme využít jedné, dvou i tří stěn. V případě rozložení soupeřových koulí a černé koule se počet možností bude zmenšovat.

Komentář:

Úloha je modelová. V reálném životě by záleželo také na materiálu, rychlosti a mnohém dalším. Tato úloha nebývá typicky na základních školách učena, ovšem má velký potenciál, při posunování koulí v digitálním prostředí by se žáci mohli dívat, jak se dráha mění. Jako modifikaci bychom mohli přesně nadefinovat, kolika stěn se koule musí dotknout. Další modifikací může být umístění koulí, můžeme je nechat pevně dané nebo může záležet na žákovi, aby je umístil podle svého uvážení.

V tomto příkladu nejsou na ploše rozmístěny soupeřovy koule, pro ztížení obtížnosti by mohla být využita i tato modifikace.

V tomto příkladu kromě užití osové souměrnosti budeme také počítat se znalostí úhlů. Pomocí heuristického rozhovoru bychom mohli žáky navést na užití pravidla úhlu odrazu a dopadu.

Pokud se rozhodneme porovnat řešení GeoGebry a Wolframu Alpha, GeoGebra má výhodu, že žáci mohou ihned vidět, jakým způsobem poslat kouli, aby trefila tu druhou na kulečníku. Řešení Wolframu Alpha je v této ukázce čistě početní a může být pro mnohé těžké si představit, jak to vypadá v realitě. Výhodou jsou již naprogramované widgety pro počítání různých problémů, jediná nevýhoda pro české žáky je anglická terminologie.

Úloha 3

V zámeckém parku, který je ve francouzském stylu, což znamená, že rostliny jsou zde uspořádány do nejrůznějších útvarů, aby park působil upraveně, se rozhodli vysázet bílé tulipány, žluté narcisy, oranžové gerbery a červené karafiáty. Vybrali si obdélníkovou oblast se sochou uprostřed. Středem delší strany vede k soše cesta z obou stran. Socha směřuje z jedné strany k zámku a z druhé k jezírku. Zahradníci chtějí květiny vysázet do tří písmen a to tak, aby obě strany vypadaly stejné a nápis „KMTT“, který představuje iniciály nejvýznamnějšího představitele zámku, byl čitelný z obou stran. Ovšem nastal problém a jiná skupina zahradníků dostala za úkol vysázet květiny do tří obdélníků z každé strany a musí být zde užito všech typů květin. Písmena již byla na jedné ze stran vysazena, v pořadí tulipány, narcisy, gerbery a karafiáty. Jak mají skupiny vysázet rostliny, aby byly obě strany stejně osázené? Plocha má rozměry 12 a 20 metrů. Cesta je široká 3 m a socha má podstavu kruhového tvaru o poloměru 2 m.

1. **Definovat otázky**

   Jak nasázet rostliny na protější stranu? Kolika způsoby můžeme vysázet obdélníky?

2. **Předefinovat do vypočitatelné podoby**

   Jakou použít symetrii, aby byly strany shodné? Kolik máme variací?

3. **Vypočítat**

   Program GeoGebra:

   Nejprve si vytvoříme mnohoúhelník o rozměrech 12 a 20. Použijeme funkci Úsečka s pevnou délkou, klikneme na plochu a vytvoříme bod A a do vyskakovacího okna zapíšeme hodnotu 12. Poté si vytvoříme kolmice na tuto úsečku procházejícími krajními body úsečky AB. V bodě B pak vytvoříme Kružnici danou středem a poloměrem se středem v bodě B a poloměrem 20. Vytvoříme si průsečík kružnice a kolmice procházejícím bodem B, poté si vyznačíme Průsečík. Zvolíme funkci Mnohoúhelník a označíme všechny vrcholy. Nyní použijeme funkci Střed a klikneme na mnohoúhelník. V tomto středu vytvoříme Kružnici danou středem a poloměrem, kde velikost poloměru bude 2. Dále si vytvoříme Osu úsečky pro jednu z úseček o délce 12. Najdeme Průsečík osy s touto stranou a v průsečíku vytvoříme Kružnici danou středem a poloměrem, pro poloměr velikost 1. Najdeme Průsečíky strany a kružnice, v nich vytvoříme rovnoběžky s osou strany. Tak máme připravenou plochu.

Nyní si kratší stranu rozdělíme pomocí Osy úsečky na dvě poloviny a každou z těch polovin poté ještě jednou a vzniknou nám tak 4 obdélníky, které ohraničíme pomocí funkce Mnohoúhelník. Pro rychlejší práci budeme používat pouze dolní polovinu mnohoúhelníku. Nyní si do každého z nich pomocí funkce Pero vepíšeme příslušná písmena, po rozkliknutí více možností se nám v rohu zobrazí možnosti změny barev (K změníme na bílou, M změníme na žlutou, první T na oranžovou a druhé T na červenou). Pokud bychom chtěli, aby písmena vypadala profesionálněji otevřeme si dokument Word vepíšeme zde příslušná písmena a změníme jejich barvy, užijeme funkce výstřižek, zkopírujeme jej a vložíme do GeoGebry. Pomocí funkce Středová souměrnost vždy převedeme každé písmeno i do horní poloviny. Vybereme požadované písmeno a poté klikneme na střed mnohoúhelníku. Nyní vybíráme barvy pro obdélníky tak, aby se nám nestalo, že na jednom místě bude písmeno se stejnými květinami jako je obdélník. Opět změníme jejich barvu a mnohoúhelník převedeme do horní poloviny.

Podrobný postup rýsování pomocí GeoGebry:

$A = Prusecik(OsaX, OsaY)$

$B = Bod(Kruznice(A, 12))$

$f = Usecka(A, B)$

$g: Kolmice(A, f)$

$h: Kolmice(B, f)$

$c: Kruznice(B, 20)$

$C = Prusecik(c, h, 2)$

$i: Primka(C, f)$

$D = Prusecik(g, i)$

$ct1 = Mnohouhlenik(A, B, C, D)$

$a = Usecka(A, B, ct1)$

$b = Usecka(B, C, ct1)$

$c1 = Usecka(C, D, ct1)$

$d = Usecka(D, A, ct1)$

$E = Teziste(ct1)$

$e: Kruznice(E, 1)$

$j: OsaUsecky(d)$

$F = Prusecik(d, j)$

$k: Kruznice(F, 1.5)$

$G = Prusecik(k, d)$

$H = Prusecik(k, d)$

$l: Primka\big(H, Primka(F, j)\big)$

$m: Primka(G, I)$

$n: OsaUsecky(c1)$

$I = Prusecik(a, n)$

$q = Usecka(A, I)$

$r = Usecka(I, B)$

$s: OsaUsecky(a)$

$t: OsaUsecky(q)$

$f1: OsaUsecky(r)$

Nyní napíšeme písmena pomocí funkce Pero (pro profesionálnější vzhled do nového Word dokumentu si napíšeme písmeno, upravíme jeho barvu, vytvoříme výstřižek, ten zkopírujeme a vložíme do GeoGebry) a pomocí Středové souměrnosti vytvoříme jejich obrazy

$J = Prusecik(l, t)$

$K = Prusecik(t, q)$

$ct2 = Mnohouhlenik(J, H, A, K)$

$a1 = Usecka(A, K, ct2)$

$h1 = Usecka(H, A, ct2)$

$j1 = Usecka(J, H, ct2)$

$k1 = Usecka(K, J, ct2)$

$L = Prusecik(l, n)$

$ct3 = Mnohouhlenik(K, I, L, J)$

$i1 = Usecka(I, L, ct3)$

$j1 = Usecka(J, K, ct3)$

$k1 = Usecka(K, I, ct3)$

$l1 = Usecka(L, J, ct3)$

$M = Prusecik(f1, r)$

$N = Prusecik(l, f1)$

$ct4 = Mnohouhlenik(I, M, N, L)$

$i2 = Usecka(I, M, ct4)$

$l2 = Usecka(L, I, ct4)$

$m1 = Usecka(M, N, ct4)$

$n1 = Usecka(N, L, ct4)$

$ct5 = Mnohouhlenik(M, B, O, N)$

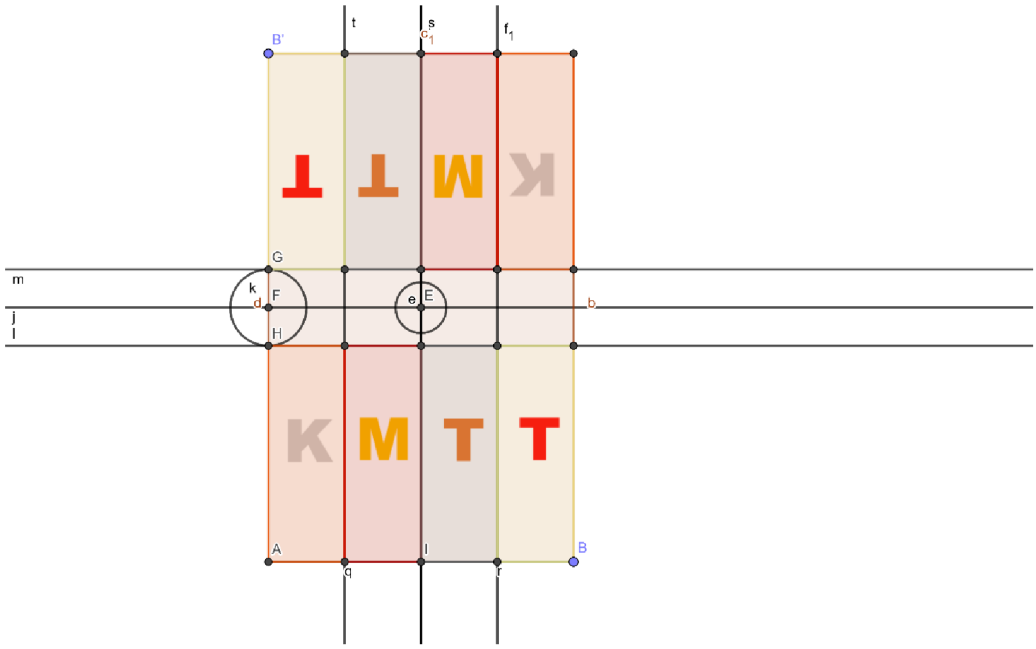
$b1 = Usecka(B, O, ct5)$

$m2 = Usecka(M, B, ct5)$

$n2 = Usecka(N, M, ct5)$

$o = Usecka(O, N, ct5)$

Nyní pomocí funkce Středové souměrnosti vytvoříme obrazy mnohoúhelníků.



Obrázek 11. Záhon (Zdroj: autor)

4. **Interpretovat výsledky – odpověď**

   V aplikaci můžeme zkoušet více barevných variací. Konečný výsledek bude *V(3,4)*, což je 24 možností.

Komentář:

U této úlohy se rozmístění rostlin v parku netypicky řeší pomocí středové souměrnosti, povětšinou je totiž pro zahradní architekturu užívána souměrnost osová. Jelikož na základní škole není vyučováno učivo kombinatoriky, jako řešení bychom měli uznat jednu z možností. Měli bychom žáky upozornit na více druhů možností. Nadanější žáci by tak mohli zpracovat více odpovědí.

Tato úloha je vhodná pro ukázku rozdílu mezi osovou a středovou souměrností, jelikož aby při otočení o 180 stupňů dostali stejné obrazce je nutné užít právě středovou souměrnost.

Úloha 4

Na vesnici mají farmu, je zde vytvořen velký výběh pro koně, podél něhož protéká řeka. Výběh má tvar obdélníku. Plot na jihu je dlouhý 1 km a pokud se vydáme přímo na sever, dorazíme k řece po 700 m. Koně mají venku v jihozápadním rohu umístěn seník hned vedle domu majitele, a na druhé straně, v rohu jihovýchodním, je umístěna stáj. Jakou nejkratší cestou by se mohl kůň dostat od seníku do stájí, má-li se cestou ještě napít u řeky?

1. **Definovat otázky**

   Kde by se měl jít kůň napít? Jak dlouhou cestu ujde?

2. **Předefinovat do vypočitatelné podoby**

   Který bod je nejkratší spojnicí tří oblastí? Jak dlouhá bude lomená čára spojující tyto tři body?

3. **Vypočítat**

   Program GeoGebra

   Nejprve si vykreslíme v programu obdélník. Převedeme si jednotky na metry a dostaneme tak 1 000 m a 700 m. Pro jednodušší vykreslení použijeme měřítko 1:100, tedy velikosti našich stran budou 10 cm a 7 cm. Obdélník si označíme $ABCD$. Vytvoříme jej pomocí úsečky o délce 10 cm, na tu vedeme kolmice v jejích krajních bodech. Na kolmicích vyznačíme body ve vzdálenosti 7 cm od průsečíků s původní úsečkou. Body nakonec spojíme úsečkou a získáme tak náš obdélník. Body v případě potřeby přejmenujeme. Naším úkolem je propojit bod A v nějakém místě se stranou c a bodem B. Strana c se stane naší osou souměrnosti. Máme dvě možnosti, můžeme použít funkci Osová souměrnost, nejprve si označíme bod B jako vzor a poté vybereme osu souměrnosti, v našem případě stranu c. GeoGebra nám sama vytvoří obraz bodu B. Druhý způsob, pokud neznáme funkci Osová souměrnost. Z bodu B vedeme na osu souměrnosti, tedy stranu c kolmici. Průsečíkem bodu B na ose se nám stane bod C, který je zároveň samodružným bodem. Ve stejné vzdálenosti od osy vytvoříme na kolmici obraz bodu B, můžeme si pomoci kružnicí.

   Nyní, když máme obraz bodu B, vytvoříme úsečku bodu A a obrazu bodu B. V místě, kde se nám protne se stranou c, nám vznikne průsečík.

Poté vytvoříme úsečku bodů A s průsečíkem na straně c a B s průsečíkem na straně c. Pro jednoduché určení délek těchto úseček užijeme funkce Vzdálenost, a nakonec tyto vzdálenosti sečteme a získáme nejkratší vzdálenost. Tedy sečteme 8,6 cm a 8,6 cm, jelikož průsečík bude ve středu strany. Nakonec pomocí měřítka výsledek převedeme a dostaneme hodnoty v m.

Podrobný postup rýsování pomocí GeoGebry:

$A = Prusecik(OsaX, OsaY)$

$B = (10{,}0)$

$f = Usecka(A, B)$

$g: Kolmice(A, f)$

$h: Kolmice(B, f)$

$D = Bod(g)\ (0{,}7)$

Funkce rovnoběžka:$i: Primka(D, f)$

$C = Prusecik(h, i)$

$j = Usecka(B, C)$

$k = Usecka(C, D)$

$l = Usecka(D, A)$

$B' = Soumernost(B, k)$

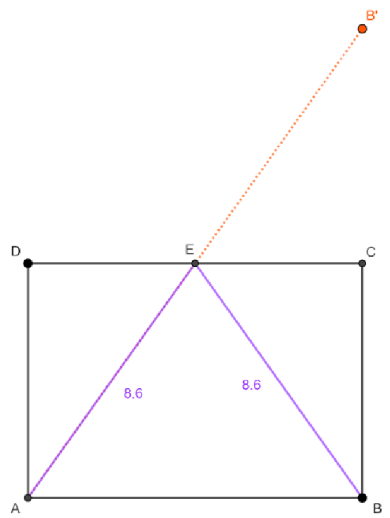
$m = Usecka(A, B')$

$E = Prusecik(m, k)$

$n = Usecka(A, E)$

$p = Usecka(E, B)$

Nakonec užijeme funkci Vzdálenost



Obrázek 12. Kůň (Zdroj: autor)

<u>Program Wolfram Alpha:</u>

Dle zadání si vypíšeme souřadnice bodů $A = [0,0], B = [1000,0], C = [1000,700], D = [0,700]$. Nejprve si zjistíme rovnici pro stranu c, ta bude vypadat následovně $y = 700$. Nyní pomocí osové souměrnosti nalezneme obraz bodu B.

Použijeme funkci

osovasoumernost[Bod_,Osa_]:={Bod[[1]]-(2*Osa[[1]]/((Osa[[1]])^2+(Osa[[2]])^2))*(Osa[[1]]*Bod[[1]]+Osa[[2]]*Bod[[2]]+Osa[[3]]),Bod[[2]]-(2*Osa[[2]]/((Osa[[1]])^2+(Osa[[2]])^2))*(Osa[[1]]*Bod[[1]]+Osa[[2]]*Bod[[2]]+Osa[[3]])}

Kde po dosazení použijeme:

osovasoumernost[{1000,0},{0,1,-700}]

{1000,1400}

Tedy obraz bodu $B' = [1000,1400]$. Nyní vytvoříme přímku procházející body A a B'. Použijeme widget vytvořený pomocí aplikace Wolfram Alpha: https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=82138b11a724b94d18df2e083d8b7b55

Aplikace nám vyhodnotí rovnici a dostaneme, že $y = \frac{7x}{5}$. Nyní si nalezneme průsečík této přímky s přímkou procházející stranou c. Použijeme jiný widget:

https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=f93da8718e9af4861e32faboodccec5f

Získáme tak průsečík $P = [500,700]$.

V posledním kroku si musíme spočítat vzdálenosti bodů A od P a P od B. Součtem těchto vzdáleností získáme délku trasy, jelikož v tomto případě je vzdálenost A od P a P od B stejná

celkovavzdalenost[A_,P_]:= {2*Round[Sqrt[(P[[1]]^2-A[[1]]^2)+(P[[2]]^2-A[[2]]^2)]]}

celkovavzdalenost[{0,0},{500,700}]

Vyjde nám 860 a to ještě v programu vynásobíme 2 a získáme celkovou vzdálenost 1720 m.

4. **Interpretovat výsledky – odpověď**

   Výsledek 1720 m ukazuje dle zadání nejkratší možnou trasu ze všech možných tras, kudy by kůň mohl jít. Jsou zde dva způsoby řešení, a to buď uvedený způsob, který řešíme pomocí obrazu bodu B, ale mohli bychom použít i obraz bodu A, postup by byl stejný.

Komentář:

Tento příklad je vhodný pro jednoduché procvičení osové souměrnosti. S velkou pravděpodobností žáky toto jednoduché řešení ze začátku nenapadne, pozice objektů pro tento příklad můžeme modifikovat, či místo řeky použít žlab o určité délce nebo se můžeme snažit vypočítat umístění žlabu.

V případě, že by žáci užili k řešení Wolfram Alpha nastává komplikace, jelikož obrázek se jim nebude vykreslovat graficky, proto musí užít představivosti. V případě Wolframu Alpha musí vědět jaké číslice zadávat kam a v jakém formátu, jelikož v tomto programu nebudou případné chyby tak zřetelné, jako například v GeoGebře. V této úloze se kromě osové a středové souměrnosti zaměřujeme na počítání vzdálenosti, při hledání nejkratší cesty.

Úloha 5

Mandala je známa také jako magický kruh. Je spojena s některými západními psychologickými teoriemi. Střed mandaly má symbolizovat božství a do tohoto středu směřují symetricky uspořádané útvary. Existuje mnoho verzí, ovšem právě nejčastější je zrovna kruh. Tento symbol můžeme často najít v architektuře, kde zdobí rotundy či kostely. [20]

Mistr zadal svým žákům následující úkol: Chci po vás, abyste mi vytvořili mandalu tak, aby se v ní vyskytoval jeden šestiúhelník, šest kruhů a šest trojúhelníků. Žádné z těchto útvarů se nesmí sebe dotýkat a nesmí se opakovat jejich barvy. Mandala musí být souměrná z kterékoliv strany. Poloměr bude libovolné velikosti.

1. **Definovat otázky**

   Jak umístit útvary do kruhu?

2. **Předefinovat do vypočitatelné podoby**

   Jakou použijeme souměrnost? Jak útvary vycentrovat?

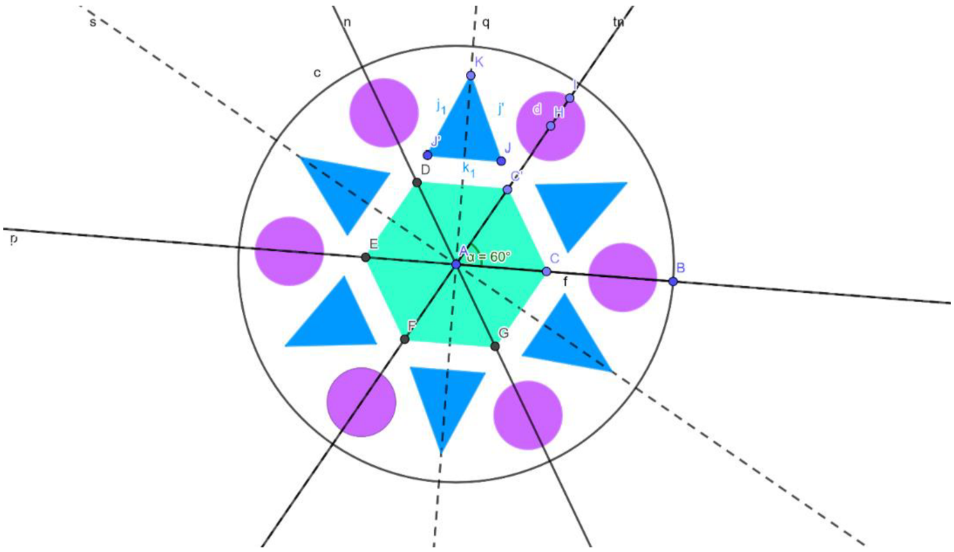
3. **Vypočítat**

   <u>Program GeoGebra:</u>

   Nejprve si narýsujeme kružnici pomocí funkce Kružnice daná středem a bodem, a vybereme si libovolné body. Jako první si do kružnice umístíme šestiúhelník. Jelikož se má zde nacházet pouze jeden šestiúhelník, tak aby byl souměrný jak ve středové, tak i v osové souměrnosti, musíme jej umístit do středu kružnice. Vytvoříme si úsečku spojující střed kružnice s jejím krajním bodem. Zvolíme si funkci Bod na objektu a zde si vybereme bod na úsečce ve vzdálenosti, jakou chceme mít pro poloměr šestiúhelníku. Dále si potřebujeme najít další bod šestiúhelníku, použijeme funkci Úhel dané velikosti, vybereme bod na rameni, poté střed kružnice a pro velikost úhlu si vydělíme 360 stupňů šesti, z čehož vyplývá, že velikost úhlu bude 60 stupňů. Takto nám vznikne třetí bod, který bude jedním z vrcholů mnohoúhelníku. Zvolíme si funkci mnohoúhelník a vybereme tyto dva body, které mají od středu stejnou vzdálenost a svírají 60 stupňů. Do vyskakovacího okna si poté zadáme jako počet vrcholů 6.

   V dalším kroku si rozdělíme kružnici pomocí tří přímek. Každá přímka bude procházet vrcholem mnohoúhelníku a jeho středově souměrným vrcholem.

Tyto přímky fungují jako pomocné při rýsování zbylých chybějících útvarů. Vybereme funkci Bod na objektu a vytvoříme si na jedné z přímek střed kružnice. Funkcí Kružnice o středu a bodu si vytvoříme na této přímce kružnici, poloměr si zvolíme libovolný, ovšem tak, aby nepřesahoval naši základní kružnici. Pomocí středové souměrnosti se středem v hlavní kružnici a osové souměrnosti s jednotlivými přímkami si vytvoříme zbylé kružnice, které barevně vyplníme. Nyní si do obrázku umístíme trojúhelníky, aby byly trojúhelníky souměrné musí být buď rovnostranné nebo rovnoramenné s vrcholem na přímce či ose úhlu, který přímky svírají. Na ukázce bude ležet trojúhelník na ose úhlu. Pomocí funkce Bod na objektu si zvolíme vrchol trojúhelníku na ose. Vlevo nebo vpravo od osy si zvolíme další bod a pomocí funkce Osová souměrnost nalezneme jeho obraz. Body spojíme užitím funkce Mnohoúhelník. Nyní použijeme opět středovou a osovou souměrnost a trojúhelníky tak zobrazíme i na chybějících místech.



Obrázek 13. Mandala (Zdroj: autor)

Výsledný obrázek by mohl vypadat právě takto, nakonec bychom schovali zbylé popisky a pomocné čáry.

Podrobný postup rýsování pomocí GeoGebry:

$c\colon Kruznice(A, B)$

$f = Usecka(A, B)$

$C = Bod(f)$ jde o libovolně zvolený bod na úsečce

$C' = Rotace(C, 60°, A)$

$\alpha = Uhel(C, A, C')$

$mnohoúhelník1 = Mnohouhelnik(C, C´, 6)$

$g = Usecka(C, C´, mnohoúhelník1)$

$m: Primka(A, F)$

$n: Primka(A, G)$

$p: Primka(E, A)$

$H = Bod(m)$

$I = Bod(m)$

$d: Kruznice(H, I)$

$OsaUhlu(m, n)$

$d1: Kruznice(d´1, A)$

Nyní vytvoříme souměrné kružnice pomocí osové a středové souměrnosti

$J = (-2{,}5)$ bod o libovolných souřadnicích ve vnitřní části kružnice

$K = Bod(q)$ nacházející se v blízkosti předchozího bodu

$J' = Soumernost(J, q)$

$t1 = Mnohouhlenik(J´, J, K)$

$j´ = Usecka(J, K, t1)$

$j1 = Usecka(K, J´, t1)$

$k1 = Usecka(J´, J, t1)$

4. **Interpretovat výsledky – odpověď**

   K této úloze mohou žáci přistupovat tvořivě, je zde více řešení.

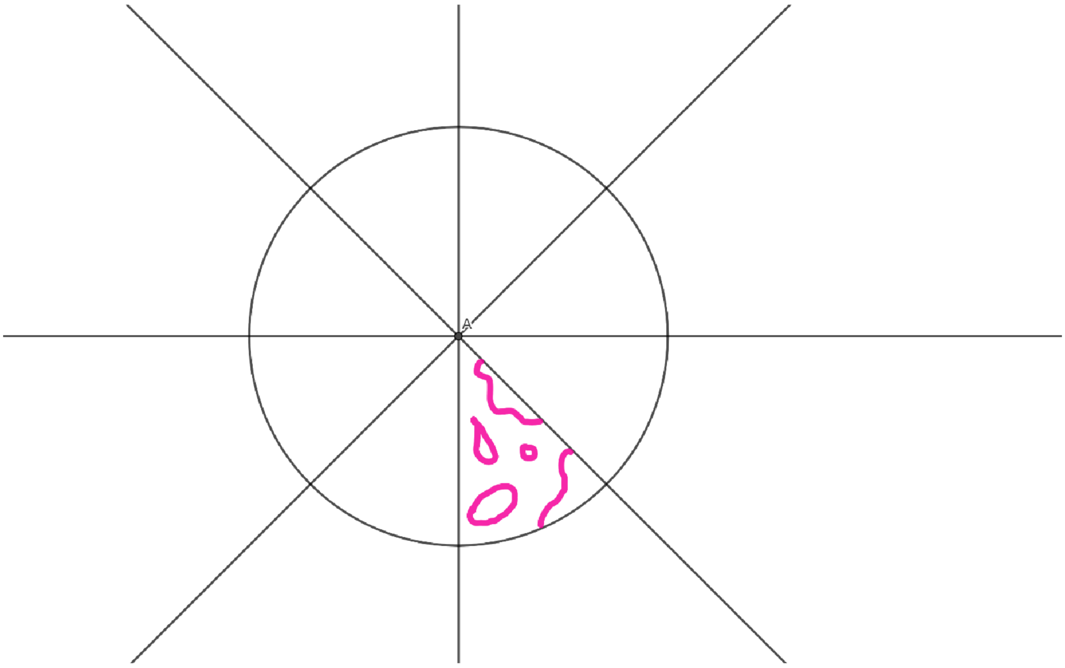
Komentář:

U této úlohy je více možností. Žáci si zde musí uvědomit nutnost užití obou souměrností. Je vhodné, aby se snažili mít všechny útvary souměrné a snažili se mít tak co nejvíce os souměrnosti. Maximální možný počet by byl šest. Tento příklad je jednoduchý pro vyzkoušení souměrností.

Zajímavá by byla modifikace tohoto příkladu užití vystřihováním sněhové vločky, kde bychom ukázali jednu stranu útvaru, ve které bychom měli zaznačeny chybějící části a poté bychom představili, jakým způsobem byl papír seskládán a hledali výslednou vločku, kterou bychom dostali po rozložení papíru.

Modifikovaná úloha:

Děti se rozhodli vytvořit vánoční výzdobu a začali vystřihovat sněhové vločky z papíru. Papír tvaru čtverce nejprve přeložili na polovinu a poté vzniklý obdélník po obvodu delší strany opět na polovinu, a nakonec tento čtverec přeložili podél úhlopříčky procházející středem papíru. Papír byl zastřižen tak, aby po rozložení vytvořil kruh. Vzor na viditelné části papíru byl následující, kdy nastřižená část se nachází na přeloženém rohu:



Obrázek 14. Vločka zadání (Zdroj: autor)

Jak vypadá vločka?

1. **Definovat otázky**

   Jak bude vypadat vločka po rozložení papíru? Jak se bude promítat vystřižený tvar na další plochy?

2. **Předefinovat do vypočitatelné podoby**

   Podle jaké souměrnosti se nám bude obrazec promítat na ostatní strany?

3. **Vypočítat**

   Program GeoGebra:

   Abychom si mohli útvar sestrojit musíme si nejprve vytvořit plochu známé části. Jelikož víme, že po sestřižení a rozložení jsme dostali kruh vytvoříme si Kružnici danou středem a bodem, poté si kružnici rozdělíme na 8 částí, k tomu můžeme použít funkci Úhel dané velikosti, kde si 360 stupňů rozdělíme na 8 dílů, tedy po 45 stupních. Středem kružnice budou procházet přímky svírající tyto úhly. Poté si vybereme jednu kruhovou výseč, do které si zaznačíme vzor. Nyní pro nalezení protější strany použijeme funkci Osová souměrnost a podle přímky, která je okrajem této výseče nalezneme obraz, který se nám promítne na sousední stranu. Nyní můžeme použít středovou souměrnost a najít obraz na protější výseči. Tedy pomocí těchto souměrností můžeme nakonec najít výsledný obrazec.

Podrobný postup rýsování pomocí GeoGebry:

$A = Prusecik(OsaX, OsaY)$

$B = Bod(OsaX)$

$c: Kruznice(A, B)$

$B' = Rotace(B, 45°, A)$

$\alpha = Uhel(B, A, B')$

$B'' = Rotace(B', 45°, A)$

$\beta = Uhel(B', A, B'')$

$B''' = Rotace(B'', 45°, A)$

$\gamma = Uhel(B'', A, B''')$

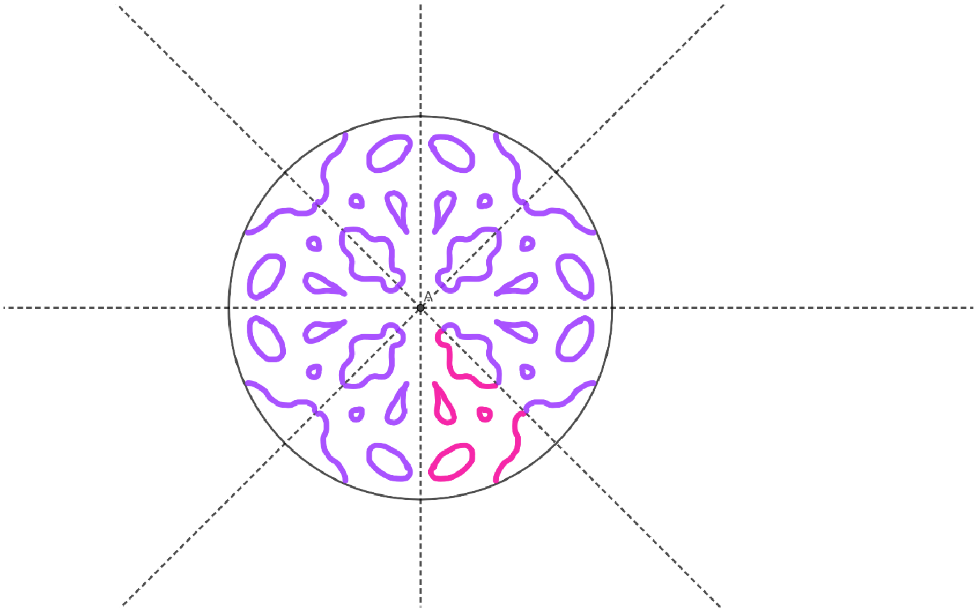
$f: Primka(B, A)$

$g: Primka(B', A)$

$h: Primka(B'', A)$

$i: Primka(B''', A)$

Do vybrané výseče vložíme pomocí funkce Pero tahy a pomocí osové a středové souměrnosti je převedeme do zbylých výsečí.



Obrázek 15 Vločka (Zdroj: autor)

4. **Interpretovat výsledky – odpověď**

   Abychom věděli, že výsledný obrazec je správně, stačí si zkontrolovat, zda je souměrný osově, či středově.

Komentář:

Toto zadání jako modifikace by mělo být pro žáky jednodušší k řešení, jelikož část, která má být symetrická již mají vyznačenou. Příklad je vhodný jako úvod do problematiky souměrností. Můžeme žákům tímto způsobem ukázat, jak jsou schopni si předem zjistit výsledný obraz před tím, než začnou vystřihávat vločku.

Úloha 6

Skupinka se rozhodla si vytvořit své vlastní hrací karty. Ovšem nechtějí použít klasické symboly jako jsou srdce, piky, káry a kříže. Každý dostal za úkol vytvořit tři karty. Na tebe se dostala čísla 7, 9, 10. Pro sadu těchto karet jste si domluvili symbol kružnice. Vytvoř tyto karty tak, aby i při otočení o 180 stupňů byly symboly čitelné stejným způsobem, tak jako u klasických karet. Rozměr jedné karty je 42×68 mm. Číslo vepiš vlastní rukou do levého horního rohu.

1. **Definovat otázky**

   Jak zajistit, aby byly karty stejné i při otočení?

2. **Předefinovat do vypočitatelné podoby**

   Jakou symetrii musíme použít? Kam musíme umístit kružnice, abychom dostali požadovaný počet?

3. **Vypočítat**

   <u>Program GeoGebra:</u>

   Nejprve si v programu vytvoříme tři obdélníky. Začneme úsečkami o délce 42 mm. Vybereme funkci Úsečka s pevnou délkou, klikneme někde na pracovní ploše, vytvoří se nám tak bod a vyskočí na nás okno, do kterého zadáme vzdálenost, pokud tvoříme v cm, použijeme místo desetinné čárky tečku. Poté na tyto úsečky povedeme kolmice. Ve vzdálenosti 68 mm od původních úseček vytvoříme rovnoběžku s těmito úsečkami. Můžeme si pomoci funkcí Úsečka s pevnou délkou, avšak musíme poté touto úsečkou rotovat nebo můžeme vytvořit kružnici se středem v jednom z bodů úsečky a požadovanou délkou, kdy při protnutí s kolmicí procházející středem kružnice nám vznikne průsečík v požadované vzdálenosti. Pomocí funkce Rovnoběžka nyní vytvoříme a pomocí funkce Průsečík nalezneme průsečíky kolmic s touto rovnoběžkou, nakonec si pomocí funkce Mnohoúhelník vytvoříme tři obdélníky.

   Nyní si nalezneme středy těchto obdélníků. Vybereme funkci Střed a poté u každého mnohoúhelníku klikneme na útvar. A vytvoříme si také osy kratší strany pomocí funkce Osa úsečky, které budou procházet naším středem. Tento krok není nutný, pokud nechceme rozmístění kružnic symetricky vzdálené od stran.

Nyní si vytvoříme číslice. Vybereme funkci Pero a do levého horního rohu číslici vepíšeme, pomocí ukazovátka pak můžeme objekt vybrat a případně změnit jeho barvu. Pro profesionálnější vzhled karet použijeme výstřižek číslice z jiného souboru, který vložíme do GeoGebry. Aby karta byla souměrná i po otočení použijeme funkci Středová souměrnost, vybereme nakreslený útvar jako vzor a poté střed mnohoúhelníku jako střed naší středové souměrnosti.

V dalším kroku si vytvoříme kružnice na místo symbolů. Pro karty v ukázce byla zvolena funkce Kružnice daná středem a poloměrem. Poloměr byl zvolen jako 0,3 cm. Pro rychlejší vykreslování dalších kružnic klikneme na kružnici, kterou jsme vytvořili a stlačíme klávesovou zkratku Ctrl+C a poté Ctrl+V. Dále už kružnice rozmisťujeme dle vlastního uvážení a vytváříme k nim obrazy ve středové a osové souměrnosti.

Tipy: Pokud vytváříme kartu s lichým počtem kružnic můžeme jednu z kružnic vykreslit kolem středu mnohoúhelníku. Pokud vytváříme kružnice na ose souměrnosti je vhodné užít funkce Bod na objektu a poté vykreslit kružnici daného poloměru. Nakonec zakryjeme nepotřebné popisky.

Podrobný postup rýsování pomocí GeoGebry – karta 7:

$A = Prusecik(OsaX, OsaY)$

$B = Bod(Kruznice(A, 4.2)$

$f = Usecka(A, B)$

$i = Kolmice(A, f)$

$j = Kolmice(B, f)$

$c: Kruznice(B, 6.8)$

$G = Prusecik(c, j, 2)$

Nyní vytvoříme rovnoběžku $p = Primka(G, f)$

$I = Prusecik(p, i)$

$ct1 = Mnohouhlenik(A, B, G, I)$

$a = Usecka(A, B, ct1)$

$b = Usecka(B, G, ct1)$

$g1 = Usecka(G, I, ct1)$

$i1 = Usecka(I, A, ct1)$

$N = Teziste(ct1)$

Funkcí Pero napíšeme 7 (nebo pokud chceme, aby karty vypadaly lépe, do nového Word dokumentu si napíšeme číslici upravíme její barvu, vytvoříme výstřižek, ten zkopírujeme a vložíme do GeoGebry) a funkcí středová souměrnost vytvoříme její obraz

$r: OsaUsecky(a)$

$q: Kruznice(Q, 0.3)$

$q': Soumernost(q, N)$

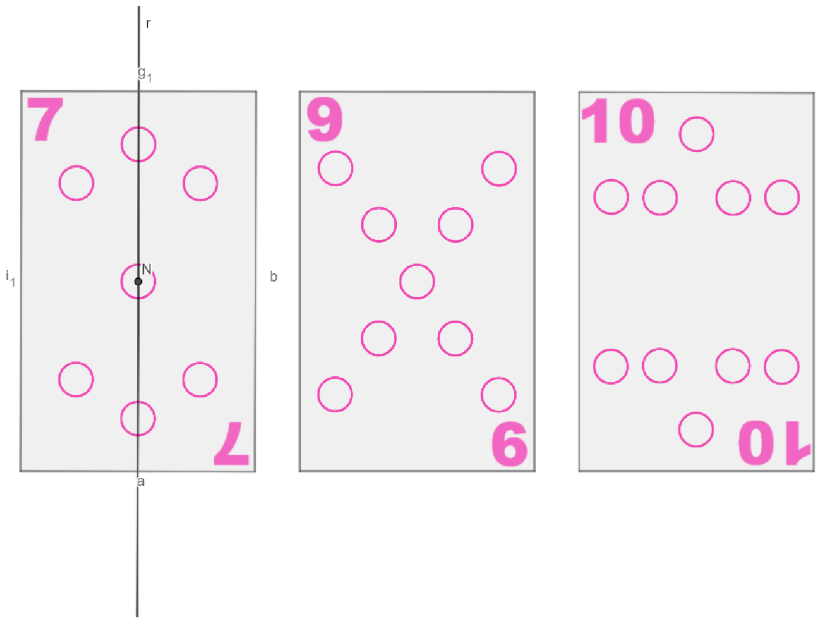
$q1': Soumernost(q, r)$

$d1: Soumernost(q1', N)$

$e1: Kruznice(R, 0.3)$

$h1: Soumernost(e1, N)$

$p1: Kruznice(N, 0.3)$



Obrázek 16. Karty (Zdroj: autor)

4. Interpretovat výsledky – odpověď

Je zde mnoho možností, jak karty vytvořit. Pokud bychom kartu rozdělili na polovinu, musí být její části souměrné.

Komentář:

Tento úkol je vhodný pro procvičení obou typů souměrností, a to jak středové, tak osové. Aby byly karty souměrné i po otočení o 180 stupňů stačilo by využít pouze středové souměrnosti. Využití osové souměrnosti je doporučeno v případě, pokud chceme, aby karty působily „upraveněji". Žáci zde využijí jak tvořivé myšlení, tak i prostorovou představivost. Při této aktivitě může být třída rovnoměrně rozdělena do čtyř skupin. Jednodušší je vytvářet číselné karty, ovšem pokud by žáci chtěli být kreativnější při vytváření karet krále, královny, kluka a žolíka je vhodné užít funkce Pero a poté obrázky převádět pomocí středové souměrnosti. Při vybírání symbolů je shodné volit obrazce, které jsou středově souměrné. Zajistíme tak, že při rotaci karty bude karta totožná. Pokud nechceme užít daných geometrických útvarů, je zde možnost opět využít funkce Pero.

U této úlohy nejde vyloženě o řešení problému, ale tvoření s využitím souměrnosti. Problém se nachází v umístění symbolů tak, aby jejich počet odpovídal hodnotě karty.

Úloha 7

Dva hráči hrají šipky. Terč, na který hází má klasické rozmístění čísel, od shora jsou to čísla 20, 1, 18, 4, 13, 6, 10, 15, 2, 17, 3, 19, 7, 16, 8, 11, 14, 9, 12, 5 a to ve směru hodinových ručiček. Kruh ve středu udává hodnotu 50 a jeho vnější kruh hodnotu 25. Poté se na terči vyskytují ještě další dva kruhové pásy. Vnitřní pás krajní hodnotu násobí třemi a vnější ji násobí dvěma.

Rozhodli se hrát hru tak trochu jinak. Každý dostane celkem 9 šipek. První hráč nastřílel čísla 20, 6, 11, 14, 4,25 a poté trefil dvojnásobek 9 a 8, a trojnásobek 15. Druhý hráč trefoval pole přímo naproti prvního hráče. Kolik nahrál každý z hráčů? Kdo v šipkách zvítězil?

1. **Definovat otázky**

   Kde zasáhl druhý hráč terč? Kolik bodů každý nastřílel?

2. **Předefinovat do vypočitatelné podoby**

   Jakou souměrnost užít pro nalezení souměrných bodů? Jaký je součet hodnot každého z hráčů?

3. **Vypočítat**

   Program GeoGebra

   Nejprve si vytvoříme plochu, jde o náčrt, proto na velikosti ploch nebude záležet. Zvolíme si bod a vytvoříme Kružnici, můžeme použít funkci, jak Kružnice daná středem a bodem, tak i Kružnice daná středem a poloměrem. Vytvoříme si zbylé kružnice rozdělující oblasti naší plochy. Poté si rozdělíme kružnici pomocí funkce Úhel dané velikosti, vybereme bod na kružnici a střed našich soustředných kružnic, velikost bude 18 stupňů, vznikne nám tak bod, který po propojení přímkou se středem rozdělí pole v kružnici. Toto uděláme tolikrát, abychom měli celou kružnici rozdělenou do 20 dílů. Nyní si pomocí funkce Text vložíme číslice, v pravé horní listě můžeme změnit jak barvu, tak i velikost písma. Je vhodné textové pole zkopírovat, aby formátování zůstalo stejné a poté pouze změnit číslici. Zakryjeme popisy u přímek, úhlů a bodů a necháme pouze střed viditelný. Nyní si na plochu umístíme body 20, 6, 11, 14, 4, 25, dvojnásobky 9 a 8 a trojnásobek 15. Všechny tyto body si pro lepší orientaci označíme jednou barvou, v ukázce je to růžová. Abychom našli jednoduše umístění protějších bodů použijeme funkci Středová souměrnost.

Nejprve vybereme vzor a poté klikneme na střed. Pro tyto obrazy opět zvolíme jinou barvu, v ukázce je použita zelená. Zelené body tedy jsou 3, 11, 6, 10, 16, 25, dvojnásobky 15 a 13, a trojnásobek 9.

Součet hodnot růžových bodů bude činit 159 a součet zelených 154. Tedy vyšší součet nám dají růžové body. K zjištění této skutečnosti můžeme pouze do příkazového řádku zadat tento součet a aplikace nám vyhodnotí výsledek.

Podrobný postup rýsování pomocí GeoGebry:

$A = Prusecik(OsaX, OsaY)$

$B = Bod(OsaX)$

$c: Kruznice(A, B)$

$C = (1,0)$

$c: Kruznice(A, C)$

$D = Bod(OsaX)$

$e: Kruznice\ (A, D)$

$D' = Rotace(D, 18°, A)$

$\alpha = Uhel(D, A, D')$

$f: Primka(A, D')$

Nyní tuto akci provedeme víckrát, abychom měli kružnici rozdělenou přímkami na 20 výsečí.

$G = (5,0)$

$q: Kruznice(A, G)$

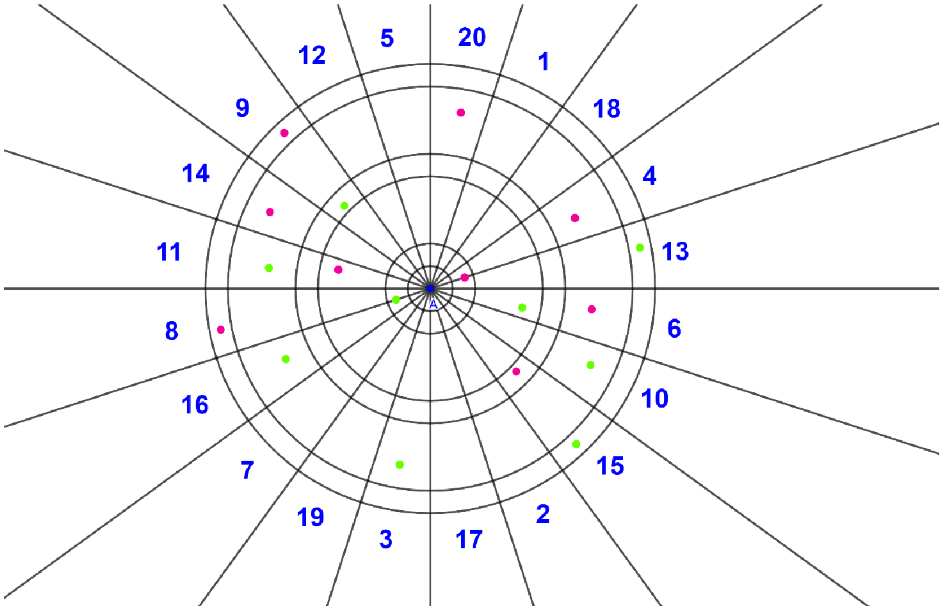
$H = (6,0)$

$r: Kruznice(A, H)$

$I = (9,0)$

$s: Kruznice(A, I)$

Nyní rozmístíme číslice k příslušným částem, rozmístíme body a pomocí středové souměrnosti nalezneme obrazy.



Obrázek 17. Terč (Zdroj: autor)

4. **Interpretovat výsledky – odpověď**

   První hráč nahrál 159 bodů a druhý nahrál 154 bodů, tedy první hráč nahrál o 5 bodů více a tedy zvítězil.

Komentář:

Tento příklad je poněkud nerealistický, ovšem jde o jednoduchá znázornění středové souměrnosti spolu s dalšími výpočty. Je velmi malá pravděpodobnost, že hráči by odehráli šipky tímto způsobem. Na tomto příkladu si žáci procvičí rozdělení kružnice pomocí užití úhlu o 360 stupních. Je vhodné zakrývat popisky u některých narýsovaných útvarů, jelikož obrázek by se pak stal nepřehledným.

Úkol by se dal modifikovat jako úloha pro dva žáky, kdy každý z nich umístí jeden bod a poté vytvoří obrazy ve středové souměrnosti těchto bodů. Úloha by se dala použít jako hra v matematice, kdy by se dalo přidat pravidlo, že hráč nesmí trefit stejnou hodnotu dvakrát, a tak by si mohli žáci zároveň procvičovat odhad a hledat strategii, jak nahrát co nejvíce bodů.

Nejdelší dobu při konstruování náčrtu pro tento příklad zabere rýsování terče, hrací plochy. Poté je však konstrukce bodů otázkou minut. Je vhodné měnit barvy obrazů bodů ihned, aby žáci předešli komplikacím, při hledání chyb. K součtu je vhodné využít přímo aplikace GeoGebra.

Program Wolfram Alpha:

Pokud bychom tento příklad chtěli řešit v programu Wolfram Alpha bylo by vhodné naprogramovat funkci *if* a to tak, že bychom spárovali protější číslice na terči a při zadání jedné z hodnot by nám to vyhodnotilo tu protější. Nevýhodou by bylo, že žáci by neviděli graficky, kde byly šipky umístěny, ovšem zjištění součtu by se tímto mohlo urychlit.

Kód pro hledání vypisování hodnot by mohl vypadat například takto:

```
hodnota[x_]:=If[x==20,"3",If[x==3,
"20",If[x==1,"19",If[x==19,"1",If[x==18,"7",If[x==7,"18",If[x==4,"16",If[x==16,"4",If[x=
=13,"8",If[x==8,"13",If[x==6,"11",If[x==11,"6",If[x==10,"14",If[x==14,"10",If[x==15,"9"
,If[x==9,"15",If[x==2,"12",If[x==12,"2",If[x==17,"5",If[x==5,"17",If[x==25,"25",50]]]]]]
]]]]]]]]]]]]]
hodnota[16]
4
```

Ovšem pozor v tomto kódu jsou čísla jako slovní vyjádření a nešlo by s nimi dále počítat. Pokud bychom měli jako výsledky násobek, musíme nakonec ještě číslo roznásobit.

Úloha 8

V současné době existují dva typy mikroskopů, pokud se bavíme o způsobu podsvícení preparátu. Modernější mikroskopy využívají zabudované osvětlení. Dříve však se často především ve školních pracovnách užívaly hlavně mikroskopy, kde se muselo světlo pod preparát dostat pomocí zrcátka, a to světlo denní nebo světlo umělé. Preparát byl umístěn na desce, kde uprostřed byla díra právě pro průnik světla na jeho podsvícení.

Nyní si představte, že se nacházíte v laboratoři. Jediné světlo v této místnosti je z osvětlení ze stropu. Vytvořte grafické znázornění pro odraz světla, jak by fungovalo při používání mikroskopu se zrcátkem. Snažte se, aby se zrcátko dalo naklánět a mohli bychom pozorovat změny v reálném čase. (Poznámka: neznáme rozměry mikroskopu, proto si je zvolte dle vlastního uvážení)

1. **Definovat otázky**

   Pod jakým úhlem se musí světlo odrážet? Jaká souměrnost je lom světla?

2. **Předefinovat do vypočitatelné podoby**

   Jaký bude úhel lomu?

3. **Vypočítat**

   <u>Program GeoGebra:</u>

   Pro sestrojení grafického znázornění začneme úsečkou CD pomocí funkce Úsečka s pevnou délkou, v ukázce je zvolena délka 2, tato úsečka bude představovat plochu pro odraz. Dále si vytvoříme úsečku EF, na kterou má dopadnout odraz, ta se bude nacházet nad úsečkou CD, zvolíme délku například 4. Nyní si vytvoříme osu úsečky CD funkcí Osa úsečky a stejným způsobem i osu úsečky $EF.$ Pomocí funkce Průsečík nalezneme průsečíky s příslušnými úsečkami. Průsečíky spojíme úsečkou a vytvoříme pomocí osové souměrnosti obraz této úsečky. Vybereme funkci Osová souměrnost, označíme úsečku jako vzor a vybereme osu úsečky jako osu souměrnosti. Pomocí funkce Úhel vybereme tři body, bod D a poté úsečku spojující oba průsečíky tak, aby průsečík na úsečce CD byl vrcholem úhlu. Nakonec si vytvoříme polopřímku, která bude procházet obrazem úsečky, který jsme si předtím vytvořili.

Pokud uchopíme bod D, můžeme jej různě naklánět, tím tedy hledat vhodný úhel pro dopad a odraz světla.

Podrobný postup rýsování pomocí GeoGebry:

Umístíme si libovolně bod C

$D = Bod(Kruznice(C, 2))$

$g = Usecka(C, D)$

Umístíme si libovolně bod E nad úsečku g

$F = Bod(Kruznice(E, 4))$

$h = Usecka(E, F)$

$i: OsaUsecky(g)$

$j: OsaUsecky(h)$

$G = Prusecik(i, g)$

$H = Prusecik(j, h)$

$k = Usecka(G, H)$

$G' = Soumernost(G, i)$

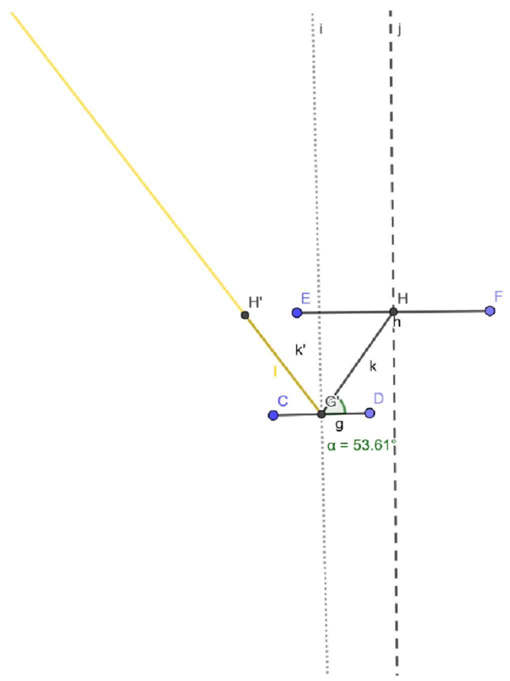
$H' = Soumernost(H, i)$

$k' = Usecka(G', H')$

$I = Bod(k')$

$l: Primka(I, H')$

$\alpha = Uhel(D, G, H)$



Obrázek 18 Mikroskop (Zdroj: autor)

4. **Interpretovat výsledky – odpověď**

   Na tomto grafickém znázornění můžeme pozorovat, jak se mění úhel při dopadu světla. Můžeme libovolně naklánět „zrcadlo“ a také plochu s preparátem. Pokud bychom počítali s přesnými rozměry mikroskopu, mohli bychom plochy upevnit a přesně nastavit vzdálenosti mezi nimi. Příklad je teoretický, avšak vychází z praktického života.

Komentář:

Následující úloha je spíše teoretická. Z praktického hlediska po žácích opět vyžaduje znalost lomu světla. Je vhodné napomoci pomocí heuristického rozhovoru, a dovést je tak na užití úhlů a osové souměrnosti. Díky dynamičnosti aplikace mohou žáci pozorovat v reálném čase změny úhlu při naklonění zrcadla či plochy s umístěným preparátem.

Bylo by vhodné před zapojením této úlohy do výuky, aby si žáci vyzkoušeli práci s mikroskopem, a tak pro ně nebyly termíny cizí, a to buď v hodinách přírodopisu, nebo alespoň do hodiny, kde se budou zaobírat tímto příkladem, přinést mikroskop a ukázat jim princip. Druhou možností je dát žákům za úkol si informace sami vyhledat, mohou si tak totiž procvičovat svou digitální gramotnost a kritické myšlení při práci s nalezenými informacemi.

Jako modifikaci příkladu by bylo vhodné zadat žákům informace o místnosti, rozmístění světel, výšce stolu, vzdálenosti zrcátka od pracovní plochy, aby tak žáci dostali co nejpřesnější výsledky. Ovšem pro demonstraci funkce mikroskopu a světla je to takto dostačující.

Závěr

Tato práce představila čtyřkrokový proces jako takový, se zaměřením na požadavky na jednotlivé kroky. Čtyřkrokový proces by mohl zefektivnit myšlení žáků a zlepšit jejich pochopení řešení matematických úloh v širším kontextu, než je užití matematického aparátu. Proces se zabývá hledáním cesty k vhodnému řešení s tím, že výpočty jsou přenechány výpočetní technice (počítač a vhodný software). V moderním světě plném umělé inteligence se postupně vytrácí smysl počítání zpaměti, jelikož máme mnoho možností využití nejrůznějších technologií okolo nás a mnohem lepší dostupnost. Dříve byl dobrý matematik ten, který uměl rychle a správně počítat, ovšem často to byl člověk, který uměl užívat nazpaměť naučené postupy. Dobrý matematik ale může být také člověk, který vymyslí inovativní postupy řešení, i když si při řešení pomůže s kalkulacemi právě počítačem. Současné technologie nám umožňují výsledky zpřesňovat, jelikož počítač je schopen za krátkou dobu provést mnoho výpočtů, kterých člověk za tak krátkou dobu není schopen dosáhnout.

Technologie se však stále vyvíjejí a tento proces, než bude zakomponován jako standard do běžné výuky, musí urazit ještě dlouhou cestu.

Práce se také soustředila na představení výhod a nevýhod zapojení počítačů do výuky v současné společnosti. Samozřejmě, že z této změny mohou mít někteří obavy. Tato práce se snažila tyto obavy uklidnit a vysvětlit vhodnost jak čtyřkolového procesu, tak i využívání informačních technologií v předmětech základní školy.

Práce o čtyřkrokovém procesu se zaměřila na učivo druhého stupně základní školy osové a středové souměrnosti. Práce obecně zmiňuje matematické kompetence, které se týkají právě tohoto učiva. Jsou zde rozebrané schopnosti matematicky gramotného žáka. Dle Rámcového vzdělávacího programu jsou v práci rozebrané očekávané výstupy žáků. Je zde představeno, jakým způsobem by měly být matematické úlohy na školách řešeny, jak vypadají kroky při jejich řešení, co obnáší matematická kultura.

V současné době existuje mnoho programů, mnoho přímo matematických softwarů, které můžeme používat pro řešení jak jednoduchých, tak i komplikovaných problémů. Na internetu nalezneme mnoho softwarů, které jsou buď zdarma nebo mají i neplacenou verzi, kde si můžeme program vyzkoušet. Pro školní prostředí se nejlépe hodí z programů společnosti Wolfram Research Wolfram Alpha, popř. online verze jejich hlavního programu Wolfram Mathematica označovaný jako Wolfram Cloud. Tyto programy mají sice omezený počet funkcí oproti hlavnímu programu Wolfram Mathematica, jsou však dostupnější.

Wolfram Research však není první, kdo navrhl využití čtyř kroků pro řešení matematických problémů, existovaly a existují i jiné postupy, které se v některých krocích liší, avšak mají společný základ. Všechny tyto postupy se snaží o zavedení myšlenkového procesu, který může člověku ulehčit přemýšlení při hledání řešení nejen matematických problémů.

V praktické části byla vytvořena sbírka úloh, ve kterých se nabízí vyzkoušení čtyř kroků čtyřkrokového procesu. Úlohy jsou to spíše netradiční a neobjevují se často v učebnicích matematiky. Zahrnují nejen osovou a středovou souměrnost, ale také například výpočet obsahu či vzdálenosti a jiné. V polovině příkladů jde spíše o kreativní úlohy, kde žáci vytvářejí pomůcky běžného života s pomocí osové a středové souměrnosti, jako jsou například hrací karty. V práci je uveden postup řešení, u většiny příkladů si žáci mohou zvolit vlastní jednotky.

Ačkoliv tento proces byl navržen představiteli společnosti Wolfram Research, tento software není pro kreativní úlohy nejvhodnější. Prvním z důvodů by mohl být poněkud složitý programovací jazyk, do něhož zadáváme funkce v anglickém jazyce a v případě, že potřebujeme od programu nápovědu je vysvětlení také v anglickém jazyce. Jelikož na základních školách se žáci s anglickou terminologií v matematice nesetkávají, ztěžuje to možnost vlastního programování, kde by si žáci hledali vhodné funkce sami, a tedy pokud si nemohou funkce tvořit sami, museli bychom pro ně tyto funkce přichystat a pouze je naučit, jakým způsobem je používat. Další nevýhodou je, že osová a středová souměrnost se většinou řeší rýsováním a ve Wolfram Mathematice, abychom byli schopni něco vykreslit, je nutné znát analytický zápis, což nespadá pod učivo základní školy. Pokud bychom tedy chtěli využívat program ke grafickému znázornění, potřebovali bychom jiný program, který by generoval rovnice pro jednotlivé útvary – výborná je například GeoGebra. GeoGebra je pro osovou a středovou souměrnost jeden z nejvhodnějších programů. Nabízí jednoduché rýsování, ze kterého lze jednoduše vyčíst výsledky. Její dynamické prostředí nám umožňuje pozorovat, jak při pohybování pouhým bodem se úloha mění.

Tedy, i když jsou představitelé Wolfram Research propagátoři čtyřkrokového procesu, je vhodné mít další alternativy programů, jelikož řešení pomocí programů sady Wolfram Research může být složité pro žáky druhého stupně základní školy, především právě u učiva osové a středové souměrnosti. Na českých školách se žáci povětšinou neučí matematickou terminologii v anglickém jazyce, proto aby byly schopni vyřešit jednoduchý příklad pravděpodobně by museli využít překladačů. Pokud bychom chtěli využívat program od Wolfram Research, bylo by vhodné funkce naprogramovat a žáky naučit, co je potřeba dosadit kam a jakým způsobem interpretovat výsledky. S rozšířením hodin informatiky na základních školách by se však tato skutečnost mohla časem zlepšit.

S rozvojem technologií se nám nabízí stále více možností. Pokud bychom byli schopni všem žákům v hodinách matematiky zajistit počítač (notebook, tablet), kde by mohli pro řešení úloh používat nejrůznější programy pro počítání a vykreslování, byl by to další krok dopředu. Učitelé by měli dát tomuto postupu šanci a snažit se ho postupně zapojovat do hodin matematiky, mohl by být totiž výhodný nejen pro problémy matematické ale i problémy, se kterými se setkáváme v běžném životě. Tento postup nám může pomoci s přemýšlením, jaké kroky musíme udělat, abychom problém vyřešili. Budoucnost je ve výpočetních technologiích, a ne papíru a tužce. V současné době má skoro každé dítě mobilní telefon, ve kterém bychom našli minimálně funkční kalkulačku. Většina je schopna se připojit k internetu a využívat zde nespočet aplikací. Proto pokud by měli možnost je využívat i v hodinách matematiky pro práci, mohlo by to přinést spoustu výhod.

Seznam literatury

1. WOLFRAM, C. *The Math(s) Fix: An Education Blueprint for the AI Age*. Wolfram Media, Inc., 2020. ISBN 978-1-57955-030-1.

2. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha: MŠMT, 2021 [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

3. *Metodická doporučení k rozvoji matematické gramotnosti v základním vzdělávání* [online]. [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/15099/priloha___metodicka_doporuceni_k_rozvoji_matematicke_gramotnosti_v_zakladnim_vzdelavani.pdf

4. KUŘINA, F. *Matematika a řešení úloh*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2011. ISBN 978-80-7394-307-3.

5. *5.2.1 Vzdělávací obor - Matematika a její aplikace - Geometrie v rovině a v prostoru 2. období 1. stupně* [online]. MŠMT [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://digifolio.rvp.cz/view/view.php?id=10703

6. *5.2.1 Vzdělávací obor - Matematika a její aplikace - Geometrie v rovině a v prostoru 2. stupeň* [online]. MŠMT [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://digifolio.rvp.cz/view/view.php?id=10707

7. *ŠVP - ZŠ Slovan KROMĚŘÍŽ* [online]. Kroměříž: ZŠ Slovan Kroměříž, 2016 [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://www.zsslovan.cz/files/documents/volne-materialy/svp-inkluze-2016.pdf

8. POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 10. vydání. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-458-2.

9. *Osová souměrnost* [online]. [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://www.umimematiku.cz/cviceni-osova-soumernost

10. *Středová souměrnost* [online]. [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://www.umimematiku.cz/cviceni-stredova-soumernost

11. *About Wolfram* [online]. Wolfram, 2023 [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://www.wolfram.com/company/

12. *WOLFRAM PRODUCTS & SERVICES* [online]. Wolfram, 2023 [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://www.wolfram.com/products/?source=footer

13. *Co je GeoGebra?* [online]. GeoGebra, 2023 [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/about

14. *What is Maple?* [online]. Canada: Maplesoft, 2023 [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://www.maplesoft.com/products/maple/

15. *CABRILOG* [online]. Fontaine: Cabri Express, 2017 [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://cabri.com/en/

16. *THE FOUR-STEP PROBLEM SOLVING PLAN* [online]. Houston: Blackboard, 2023 [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://www.cfisd.net/Page/1831

17. *The easy 4 step problem-solving process (+ examples)* [online]. Ed Latimore, 2023 [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://edlatimore.com/problem-solving-process/

18. *Středová souměrnost* [online]. JCU [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO2/Stredova_soumernost.pdf

19. *Osová souměrnost* [online]. JCU [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO2/Osova_soumernost.pdf

20. *O mandalách* [online]. Brno: Zuzana Řezáčová Lukášková, 2018 [cit. 2023-04-04]. Dostupné z: https://www.centrum-mandala.cz/o-mandalach

Seznam obrázků

Anotace

Jméno a příjmení	Bc. Eliška Kočařová
Katedra	Katedra matematiky
Vedoucí práce	Mgr. David NOCAR Ph.D.
Rok obhajoby	2023

Název práce	Čtyřkrokový proces řešení problémů vedoucích na užití osové a středové souměrnosti
Název v angličtině	The 4-step maths process of solving problems using the axial and the central symmetry
Anotace práce	Práce je zaměřena na aktuální trend osvěty vnímání matematiky a její užití v matematickém vzdělávání. Ve školské matematice na základních školách je výuka zaměřena především na výpočty. Matematika, a tudíž i proces řešení problému/úlohy je komplexnější a dal by se vystihnout následujícími čtyřmi kroky: 1. „umění" správně položit otázky mající původ v reálném světě kolem nás, 2. tyto pak transformovat do jednoznačně definovaných (matematických) formulí, 3. následně je na axiomatickém základě vyřešit a 4. konečně toto formální řešení transformovat zpět do reálného světa a tady jej verifikovat. (Wolfram, 2020). Školská matematika se tedy soustředí především na 3. bod výše specifikovaného procesu, který ale v současnosti stále více můžeme přenechávat na výpočetní technice. Cílem práce je seznámit se s výše popsaným procesem dle aktuálních zdrojů a ukázat na zvoleném tématu osové a středové souměrnosti výše popsaný čtyřkrokový proces řešení úloh.
Klíčová slova	čtyřkrokový proces, matematika, souměrnost, osa, střed
Anotace v angličtině	This thesis is focused on the trend of mathematics and its usage in education. At school mathematics the education is revolving around calculations. Mathematics, as well as problem solving process is more complex and could be defined by these points: 1. Ability to correctly ask questions about things in the real world around us, 2. transform it to clearly defined (mathematical) formulas, 3. solve it by using axiomatic base, 4. finally, transform that formal answer back to the real world and verify it. (Wolfram, 2020) School mathematics is mostly focused on the point 3 that is specified above. However, this step can solved by technology nowadays. The aim of this work is to introduce the process described above using current sources and show on topic of axis and point symmetry the four step process of solving problems described above.
Klíčová slova v angličtině	4 step process, mathematics, symmetry, axis, point
Přílohy vázané k práci	0
Rozsah práce	81
Jazyk	český