

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Metody defuzzifce fuzzy čísel



Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.
Rok odevzdání: 2012

Vypracovala:
Bc. Lucie Novosádová
AME, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně pod vedením RNDr. Ondřeje Pavlačky, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 22. března 2012

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala svému vedoucímu diplomové práce RNDr. Ondřeji Pavlačkovi, Ph.D. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnoval při konzultacích. Dále si zaslouží poděkování můj počítač, že vydržel moje pracovní tempo, a typografický systém \LaTeX , kterým je práce vysázena. Také bych ráda poděkovala své rodině a přátelům za podporu během studia.

Obsah

1	Úvod	4
2	Úvodní pojmy	6
2.1	Fuzzy množiny	6
2.2	Fuzzy čísla	8
2.3	Princip rozšíření	15
3	Metody defuzzifikace fuzzy čísel	20
3.1	Středový bod středního intervalu (MOM)	21
3.2	Těžiště a zobecněné těžiště	26
3.3	Medián	30
3.4	Očekávaná hodnota fuzzy čísla	43
4	Aplikace metod defuzzifikace fuzzy čísel	47
4.1	Porovnávání fuzzy čísel	47
4.2	Fuzzy regulátor	52
5	Závěr	58

1 Úvod

Fuzzy čísla se používají v mnoha matematických modelech k vyjádření neurčitých hodnoty dané veličiny. Vstupní hodnoty mohou být u vstupních proměnných z důvodu své neurčitosti vyjádřeny pomocí fuzzy čísel. Proto i výstup v modelu je dán v podobě fuzzy čísla, v některých případech to ale nestačí, a proto je nutné fuzzy číslo nahradit číslem reálným. Tento proces bývá označován jako defuzzifikace fuzzy čísla.

Existuje mnoho přístupů k defuzzifikaci fuzzy čísel, s některými jsem se již setkala ve své bakalářské práci *Metody porovnávání fuzzy čísel*. Ukázala jsem v ní, že jednotlivé metody nemusejí vždy dát stejný výsledek. Rozhodovatel musí tedy dobře zvážit, jakou číselnou charakteristiku zvolí.

Cílem této diplomové práce je seznámit čtenáře s metodami defuzzifikace fuzzy čísel, vysvětlit vlastnosti jednotlivých metod a ukázat jejich praktické využití. Součástí práce je také naprogramování funkcí v programu Matlab na výpočet číselných charakteristik pro speciální třídy fuzzy čísel. Celá práce je rozdělena na tři hlavní části.

V první části jsou vysvětleny základní pojmy teorie fuzzy množin. V této části si zavedeme fuzzy čísla, jež představují speciální třídu fuzzy množin definovaných na množině všech reálných čísel. Dále si zavedeme lineární fuzzy čísla zadané pomocí čtveřici význačných bodů a po částech lineární fuzzy čísla pro případ, kdy známe jen krajní hodnoty některých α -řezů fuzzy čísla. Tyto typy fuzzy čísel jsou v praktických aplikacích nejpoužívanější. Také je nutné nadefinovat pojem princip rozšíření, který je nutné znát pro defuzzifikaci výsledného fuzzy čísla získaného dosazením do konkrétní funkce a také pro aritmetické operace s fuzzy čísly.

Ve druhé části se zaměříme na jednotlivé metody defuzzifikace fuzzy čísel. Nejdříve se seznámíme s číselnými charakteristikami využívající při defuzzifikaci fuzzy čísel pouze předpis funkce příslušnosti, a to středový bod středního intervalu, těžiště, zobecněné těžiště a medián. Hlavním přínosem této práce je odvození vzorců u zmiňovaných metod pro lineární fuzzy čísla a po částech lineární fuzzy

čísla, u kterých si pro zjednodušení výpočtu naprogramujeme funkci v Matlabu. Další metodou defuzzifikace je očekávaná hodnota, jež přihlíží k tomu, jakým způsobem jsme dané fuzzy číslo získali. Na názorných příkladech budou jednotlivé metody defuzzifikace srovnány.

V poslední části se zaměříme na využití metod defuzzifikace. Metody se dají využít při porovnávání fuzzy čísel. Defuzzifikace je dále důležitou součástí fuzzy regulátoru, kde neurčitý fuzzy akční zásah převedeme na konkrétní zásah, aby daný přístroj věděl přesně, co má udělat.

2 Úvodní pojmy

2.1 Fuzzy množiny

V této části se seznámíme se základními pojmy teorie fuzzy množin, se kterými budeme pracovat v následujících kapitolách. Tato kapitola je zpracována podle [7, 9].

Klasická množina může být definována výčtem všech prvků, které do množiny patří, definicí vlastností, jež určuje příslušnost prvku do množiny, nebo definicí množiny A pomocí charakteristické funkce.

Definice 2.1. *Charakteristická funkce* χ_A množiny A je definována vztahem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1)$$

Fuzzy množina je analogicky určena pomocí tzv. funkce příslušnosti, která představuje zobecnění charakteristické funkce. Tato funkce nemusí nabývat jen hodnot 0 a 1, ale také spojitě hodnot mezi 0 a 1. To znamená, že se dá uvažovat případ, kdy prvek může do množiny patřit jen částečně. Tím se liší od klasické teorie množin, kde se předpokládá, že každý prvek daného univerza do množiny buď patří nebo nepatří.

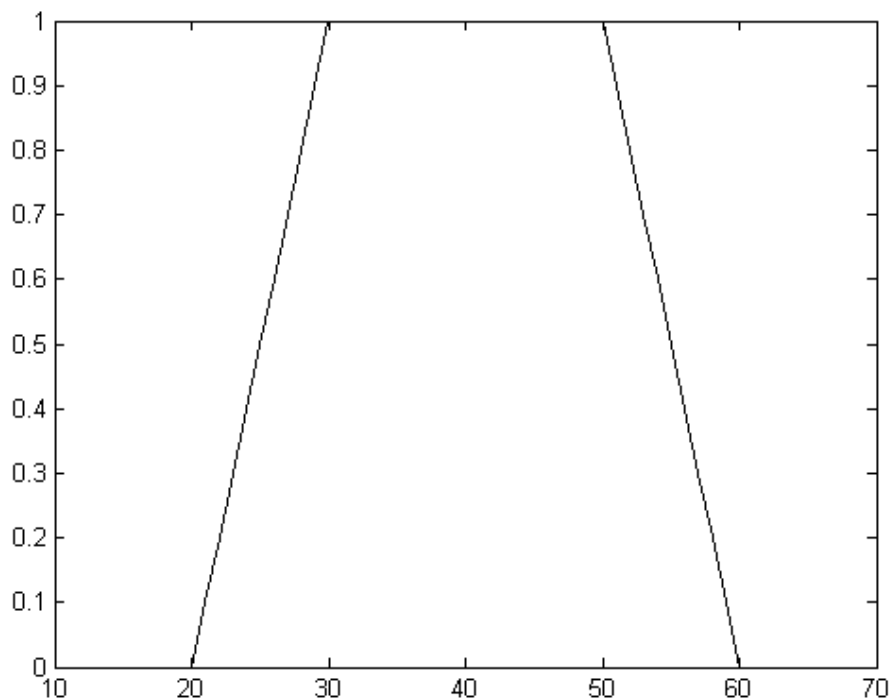
Definice 2.2. Nechť je dána množina U , tzv. univerzum. Pak *fuzzy množina* A na univerzu U je definována zobrazením

$$\mu_A : U \rightarrow [0, 1]. \quad (2)$$

Funkci μ_A nazýváme *funkcí příslušnosti* fuzzy množiny A . Pro každé $x \in U$ nazveme hodnotu $\mu_A(x)$ *stupněm příslušnosti* prvku x k fuzzy množině A .

Poznámka 2.1. Z důvodu jednoduššího zápisu budeme funkci příslušnosti značnou jako μ_A zapisovat jako $A(\cdot)$. Stupeň příslušnosti $\mu_A(x)$ budeme potom značit jako $A(x)$, kde $x \in U$.

Příklad 2.1. *Příkladem si uveďme fuzzy množinu „věk středně starého člověka“. Já si například představuji, že se věk středně starého člověka pohybuje od 30 let do 50 let, potom z Obr. 1 je názorně vidět, že u intervalu $[30,50]$ je stupeň příslušnosti roven 1. Dále ještě můžu připustit, že by věk středně starého člověka mohl ležet také trochu mimo tento interval, ale už tomu tak nevěřím.*



Obrázek 1: Věk středně starého člověka

Poznámka 2.2. *Systém všech fuzzy množin definovaných na univerzu U budeme označovat $F(U)$. Zápis $A \in F(U)$ vyjadřuje, že A je fuzzy množina na U .*

Nyní definujeme následující pojmy popisující fuzzy množinu, které je nutné znát pro další práci s fuzzy množinami.

Definice 2.3. *Nechť je dána fuzzy množina A definovaná na univerzu U a reálné číslo $\alpha \in [0, 1]$. Pak α -řezem fuzzy množiny A nazýváme ostrou množinu*

$$A_\alpha = \{x \in U \mid A(x) \geq \alpha\}. \quad (3)$$

Definice 2.4. *Jádrem fuzzy množiny A na univerzu U rozumíme (ostrou) množinu*

$$KerA = \{x \in U \mid A(x) = 1\}. \quad (4)$$

Definice 2.5. *Nosičem fuzzy množiny A na univerzu U nazýváme (ostrou) množinu*

$$SuppA = \{x \in U \mid A(x) > 0\}. \quad (5)$$

Definice 2.6. *Výška $hgt(A)$ fuzzy množiny A na univerzu U je definovaná formulí*

$$hgt(A) = \sup_{x \in U} A(x). \quad (6)$$

Definice 2.7. *Fuzzy množina A na univerzu U se nazývá *normální*, jestliže*

$$KerA \neq \emptyset. \quad (7)$$

Jednotlivé pojmy jsou znázorněny na fuzzy množině A na Obr. 2.

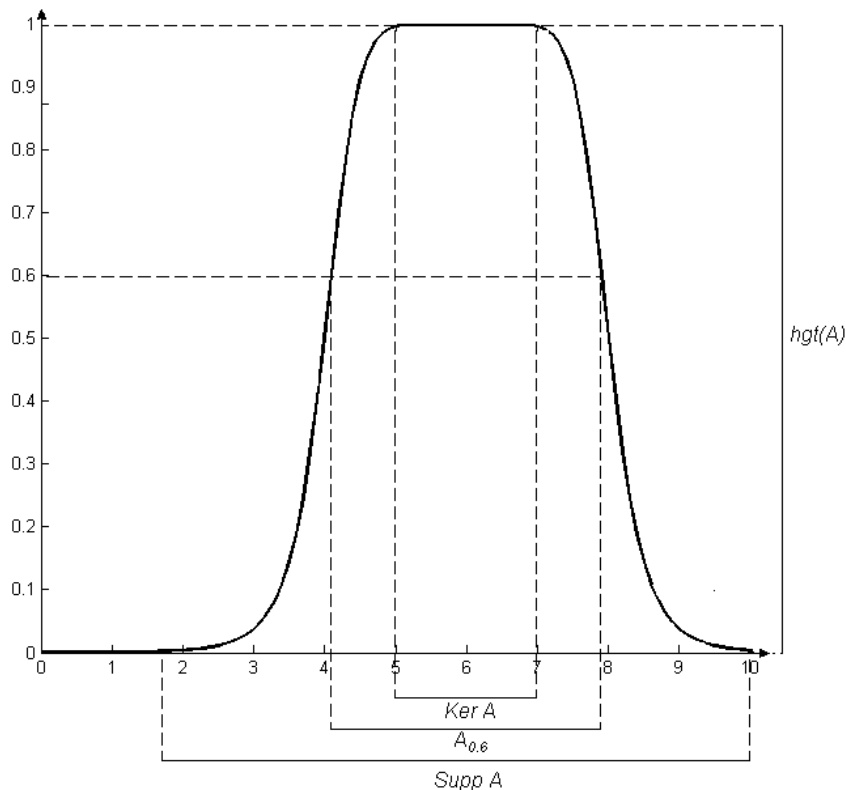
2.2 Fuzzy čísla

Fuzzy čísla jsou speciální třídou fuzzy množin definovaných na množině reálných čísel \mathbb{R} . Fuzzy čísla vyjadřují neurčité množství, nepřesné výsledky měření, atd. Tato podkapitola byla zpracována podle [5, 7, 8, 9].

Definice 2.8. *Fuzzy množina C definovaná na množině reálných čísel \mathbb{R} , která má následující vlastnosti:*

1. C je normální fuzzy množina,
2. α -řezy C_α jsou pro všechna $\alpha \in (0, 1]$ uzavřené intervaly,
3. nosič $Supp C$ je ohraničený,

se nazývá *fuzzy číslem*. Množinu všech fuzzy čísel budeme dále označovat $\mathcal{F}_N(\mathbb{R})$.



Obrázek 2: Fuzzy množina, její nosič, jádro, 0,6-řez a výška

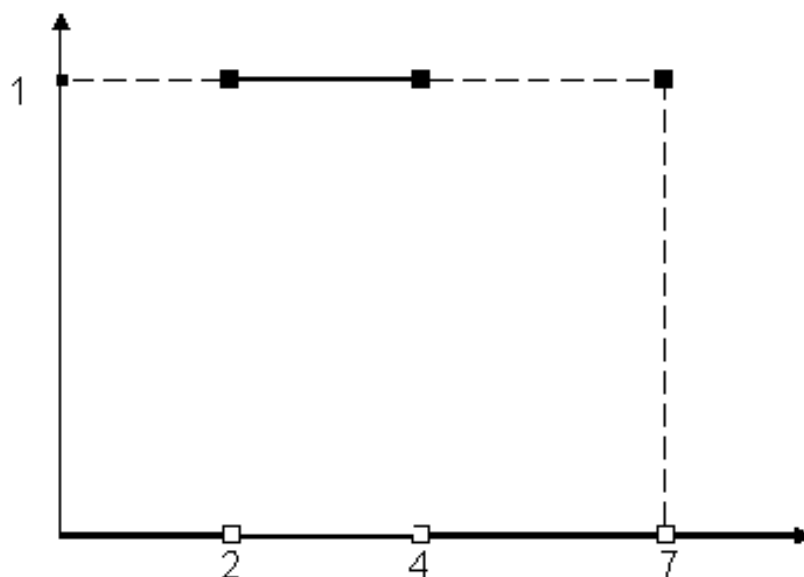
Definice 2.9. Nechť je dáno fuzzy číslo C a interval $[a, b]$. Fuzzy číslo C na intervalu $[a, b]$ je fuzzy číslo, pro které platí

$$\text{Supp } C \subseteq [a, b]. \quad (8)$$

Množinu všech fuzzy čísel na intervalu $[a, b]$ budeme dále označovat $\mathcal{F}_N([a, b])$.

Příklad 2.2. Speciálním případem fuzzy čísla je číslo reálné a uzavřený interval. Podle předchozí definice se dá ověřit, zda libovolné reálné číslo, například číslo 7, splňuje její vlastnosti. Číslo 7 zcela náleží do fuzzy množiny, proto je tato množina normální, α -řezy jsou uzavřené intervaly $[7, 7]$ a nosič je ohraničený. Uvedené vlastnosti fuzzy čísla splňuje také uzavřený interval, například $[2, 4]$. Funkce příslušnosti uvedených případů jsou znázorněny na Obr. 3.

Lepší představu o charakteru funkcí příslušnosti fuzzy čísel poskytuje násle-



Obrázek 3: Funkce příslušnosti reálného čísla a uzavřeného intervalu

dující věta.

Věta 2.1. *Nechť C je fuzzy množina na \mathbb{R} . Pak C je fuzzy číslem tehdy a jen tehdy, existují-li reálná čísla $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ tak, že pro funkci příslušnosti $C(\cdot)$ platí*

$$C(x) = \begin{cases} L(x) & \text{pro } x \in (-\infty, x_2) \\ 1 & \text{pro } x \in [x_2, x_3] \\ P(x) & \text{pro } x \in (x_3, \infty), \end{cases} \quad (9)$$

kde funkce $L : (-\infty, x_2) \rightarrow [0, 1]$ je neklesající, spojitá zprava a platí pro ni $L(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, x_1)$, funkce $P : (x_3, \infty) \rightarrow [0, 1]$ je nerostoucí, spojitá zleva a platí pro ni $P(x) = 0$ pro $x \in (x_4, \infty)$.

Důkaz: Viz [5]. ■

Nyní si ukážeme, že každé fuzzy číslo lze jednoznačně charakterizovat pomocí dvojice funkcí $\underline{c}(\alpha)$ a $\bar{c}(\alpha)$ definovaných na $[0, 1]$, jež popisují nejmenší a největší hodnoty jednotlivých α -řezů.

Věta 2.2. *Nechť C je fuzzy číslo. Nechť jsou funkce $\underline{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definované tak, že platí $C_\alpha = [\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)]$ pro všechna $\alpha \in (0, 1]$ a $\overline{\text{Supp } C} =$*

$[\underline{c}(0), \bar{c}(0)]$, kde $\overline{\text{Supp } C}$ značí uzávěr nosiče fuzzy čísla C . Pak jsou funkce \underline{c} a \bar{c} zleva spojité na $(0, 1]$, zprava spojité v 0 a splňují

$$\underline{c}(\alpha) \leq \underline{c}(\beta) \leq \bar{c}(\beta) \leq \bar{c}(\alpha) \quad (10)$$

pro všechna $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$.

Důkaz: Viz [8]. ■

Věta 2.3. Necht' funkce $\underline{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou zleva spojité na $(0, 1]$, zprava spojité v 0 a splňují vztah (10). Potom fuzzy množina, jejíž funkce příslušnosti je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$C(x) = \begin{cases} \max\{\alpha \mid x \in [\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)]\} & \text{pro } x \in [\underline{c}(0), \bar{c}(0)] \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (11)$$

je fuzzy číslo. Navíc platí, že $C_\alpha = [\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)]$ a uzávěr $\overline{\text{Supp } C} = [\underline{c}(0), \bar{c}(0)]$.

Důkaz: Viz [8]. ■

Poznámka 2.3. Pro fuzzy číslo, jehož funkce příslušnosti je určena předpisem (11), budeme používat značení $C = \{[\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$.

V praktických úlohách často známe čtveřici bodů popisující krajní hodnoty nosiče a jádra daného fuzzy čísla. Spojením těchto bodů pomocí lineární funkce získáme tvar funkce příslušnosti nejjednodušší třídy fuzzy čísel, a to lineární fuzzy číslo.

Definice 2.10. Lineárním fuzzy číslem určeným čtveřicí bodů

$$(c_1, 0), (c_2, 1), (c_3, 1), (c_4, 0), \quad (12)$$

kde c_1, c_2, c_3, c_4 jsou reálná čísla splňující $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$, rozumíme fuzzy číslo C , jehož funkce příslušnosti závisí na parametrech c_1, c_2, c_3, c_4 následujícím způsobem:

$$\forall x \in \mathbb{R} : C(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < c_1 \\ \frac{x-c_1}{c_2-c_1} & \text{pro } c_1 \leq x < c_2 \\ 1 & \text{pro } c_2 \leq x \leq c_3 \\ \frac{c_4-x}{c_4-c_3} & \text{pro } c_3 < x \leq c_4 \\ 0 & \text{pro } c_4 < x. \end{cases} \quad (13)$$

Poznámka 2.4. V následujícím textu budeme lineární fuzzy číslo určené čtveřicí bodů (12) označovat jako $C = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$. Název lineárního fuzzy čísla $C = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ je odvozen z faktu, že použijeme-li reprezentaci $C = \{[\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$, pak obě funkce \underline{c} a \bar{c} jsou lineární. Funkce \underline{c} a \bar{c} jsou v takovém případě dány pro všechna $\alpha \in [0, 1]$ následovně:

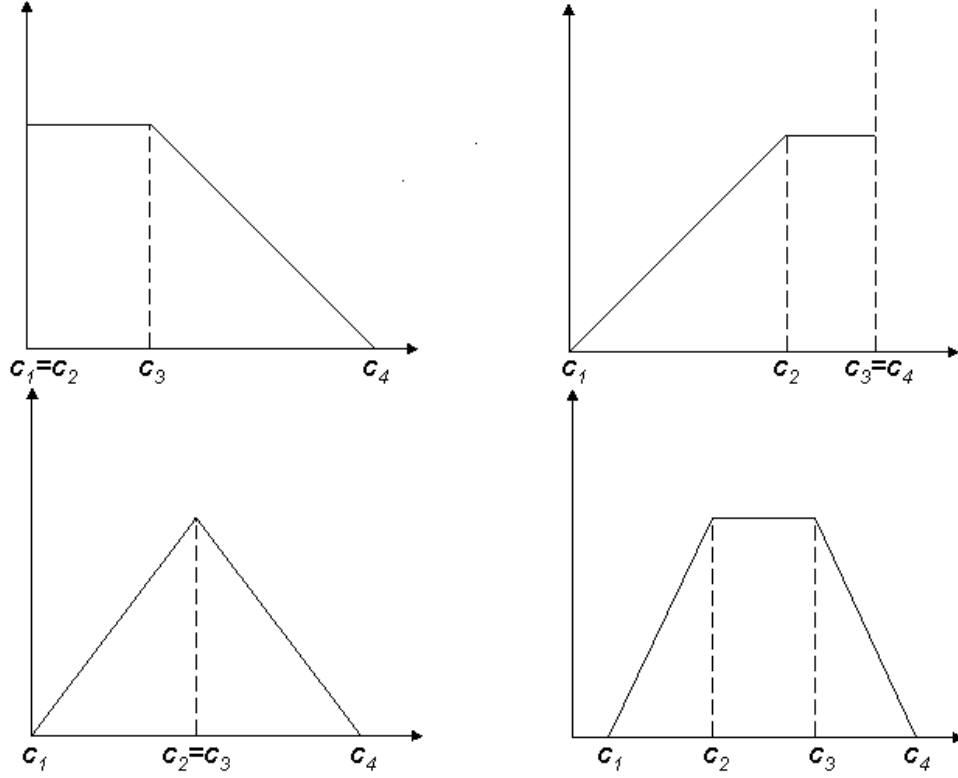
$$\underline{c}(\alpha) = c_1 + \alpha(c_2 - c_1) \quad a \quad \bar{c}(\alpha) = c_4 - \alpha(c_4 - c_3). \quad (14)$$

Příklad 2.3. Lineární fuzzy číslo může mít různé typy. Podle tvaru je to buď fuzzy číslo typu Z , pro které platí $c_1 = c_2$ a $c_2 \neq c_3$, fuzzy číslo typu S , kde $c_2 \neq c_3$ a $c_3 = c_4$, lichoběžníkové, kde $c_1 \neq c_2 \neq c_3 \neq c_4$, nebo trojúhelníkové, kde $c_1 \neq c_2 = c_3 \neq c_4$. Jednotlivé typy fuzzy čísel jsou znázorněny na Obr. 4.

Poznámka 2.5. V [9] je uvažována i další třída fuzzy čísel. Jsou to kvadratická fuzzy čísla, které se vyznačují hladkým tvarem funkce příslušnosti fuzzy množiny.

V praktických úlohách často známe jen krajní hodnoty určitých α -řezů fuzzy čísel. Taková fuzzy čísla pak jsou obvykle aproximována pomocí tzv. po částech lineárních fuzzy čísel.

Definice 2.11. Po částech lineárním fuzzy číslem určeným pomocí bodů $(\underline{c}(\alpha_i), \alpha_i)$ a $(\bar{c}(\alpha_i), \alpha_i)$, $i = 1, \dots, n$, kde $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$ pro $i = 1, \dots, n - 1$, a platí $\alpha_1 = 0$ a $\alpha_n = 1$, nazveme fuzzy číslo C , jehož funkci příslušnosti můžeme definovat násle-



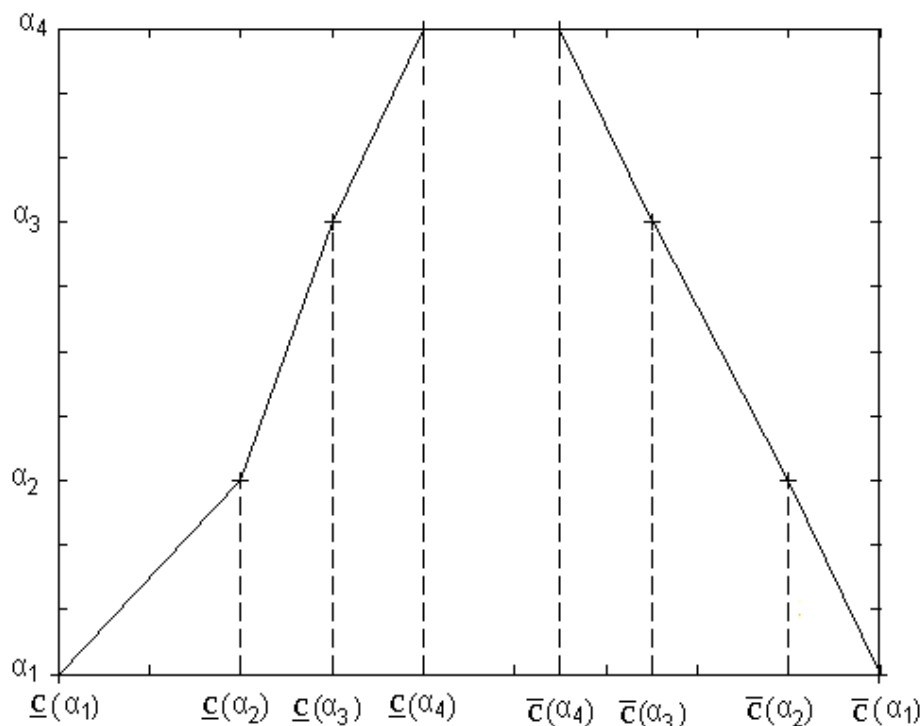
Obrázek 4: Typy lineárních fuzzy čísel

dovně

$$C(x) = \begin{cases} 0 & x < \underline{c}(\alpha_1) \\ (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \frac{x - \underline{c}(\alpha_1)}{\underline{c}(\alpha_2) - \underline{c}(\alpha_1)} + \alpha_1 & \underline{c}(\alpha_1) \leq x < \underline{c}(\alpha_2) \\ \dots & \\ (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \cdot \frac{x - \underline{c}(\alpha_{n-1})}{\underline{c}(\alpha_n) - \underline{c}(\alpha_{n-1})} + \alpha_{n-1} & \underline{c}(\alpha_{n-1}) \leq x < \underline{c}(\alpha_n) \\ 1 & \underline{c}(\alpha_n) \leq x \leq \bar{c}(\alpha_n) \\ (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \cdot \frac{\bar{c}(\alpha_{n-1}) - x}{\bar{c}(\alpha_{n-1}) - \bar{c}(\alpha_n)} + \alpha_{n-1} & \bar{c}(\alpha_n) < x \leq \bar{c}(\alpha_{n-1}) \\ \dots & \\ (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \frac{\bar{c}(\alpha_1) - x}{\bar{c}(\alpha_1) - \bar{c}(\alpha_2)} + \alpha_1 & \bar{c}(\alpha_2) < x \leq \bar{c}(\alpha_1) \\ 0 & \bar{c}(\alpha_1) < x. \end{cases} \quad (15)$$

Na Obr. 5 je znázorněna funkce příslušnosti po částech lineárního fuzzy čísla.

Poznámka 2.6. Fuzzy číslo C popsané krajními body α -řezů budeme značit



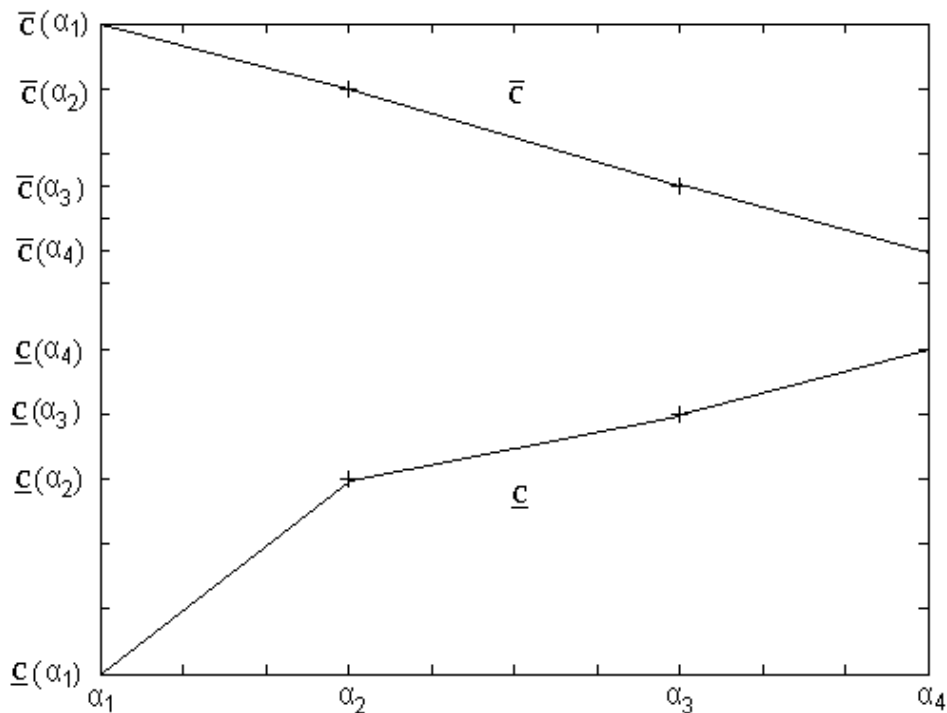
Obrázek 5: Funkce příslušnosti po částech lineárního fuzzy čísla

$C = \{[\underline{c}(\alpha_i), \bar{c}(\alpha_i)] \mid \alpha_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n\}$. V literatuře, např. [9], je po částech lineární fuzzy číslo definováno pomocí krajních hodnot α -řezů, pro které platí $\alpha_i = \frac{i-1}{n-1}, i = 1, \dots, n$. V této práci připustíme obecnější přístup k problematice, tzn. α -řezy nemusí nutně být rovnoměrně rozdělené.

Poznámka 2.7. Po částech lineární fuzzy číslo $C = \{[\underline{c}(\alpha_i), \bar{c}(\alpha_i)] \mid \alpha_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n\}$, znázorněné na Obr. 6, lze také definovat pomocí dvojice funkcí \underline{c} a \bar{c} . Hodnoty těchto funkcí známe v bodech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, pro ostatní $\alpha \in (\alpha_i, \alpha_{i+1}), i = 1, \dots, n-1$, jsou funkční předpisy dány následujícími vztahy

$$\underline{c}(\alpha) = \underline{c}(\alpha_i) + \frac{\alpha - \alpha_i}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} (\underline{c}(\alpha_{i+1}) - \underline{c}(\alpha_i)), \quad (16)$$

$$\bar{c}(\alpha) = \bar{c}(\alpha_i) + \frac{\alpha - \alpha_i}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} (\bar{c}(\alpha_{i+1}) - \bar{c}(\alpha_i)). \quad (17)$$



Obrázek 6: Funkce \underline{c} a \bar{c} po částech lineárního fuzzy čísla

2.3 Princip rozšíření

Výpočty s fuzzy čísly vycházejí z principu rozšíření. Následující příklad pojednává o motivaci principu rozšíření. Tato část byla zpracovaná podle [1, 9].

Příklad 2.4. *Mějme bazén s kruhovým obvodem o poloměru $r = 2m$. Zajímá nás, jaký objem vody V bude potřeba při výšce h . Víme, že $V = \pi r^2 h$, pak při $h = 1.5m$ je objem roven $V = \pi \cdot 2^2 \cdot 1.5$. Co když výšku nedokážeme přesně změřit a odhadujeme, že je rovna asi $1.5m$? Pak můžeme výšku h modelovat pomocí fuzzy čísla. Potom je potřeba také funkci $V = \pi r^2 h$ rozšířit na případ fuzzy čísel.*

Definice 2.12. *Fuzzifikací zobrazení $f : U \rightarrow V$ rozumíme zobrazení $f_F : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, které každé fuzzy množině $A \in \mathcal{F}(U)$ přiřazuje fuzzy množinu*

$f_F(A) \in \mathcal{F}(V)$ s funkcí příslušnosti definovanou pro každé $y \in V$ vztahem

$$f_F(A)(y) = \begin{cases} \sup\{A(x) \mid f(x) = y, x \in U\}, \\ 0, \text{ neexistuje-li žádné } x \in U \text{ takové, že } f(x) = y. \end{cases} \quad (18)$$

Poznámka 2.8. Body daného univerza U se do univerza V zobrazují spolu se svými stupni příslušnosti. Jestliže má bod z univerza V více vzorů, potom rozhoduje největší z jejich stupňů příslušnosti.

Princip rozšíření lze využít při grafickém řešení dosazování fuzzy čísla do funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Věta 2.4. Necht' je dáno fuzzy číslo X a spojitá funkce f . Pak dosazením fuzzy čísla X do funkce f získáme opět fuzzy číslo Y , jehož funkce příslušnosti je daná následovně

$$Y(y) = \max\{X(x) \mid y = f(x)\}. \quad (19)$$

Důkaz: Viz [1]. ■

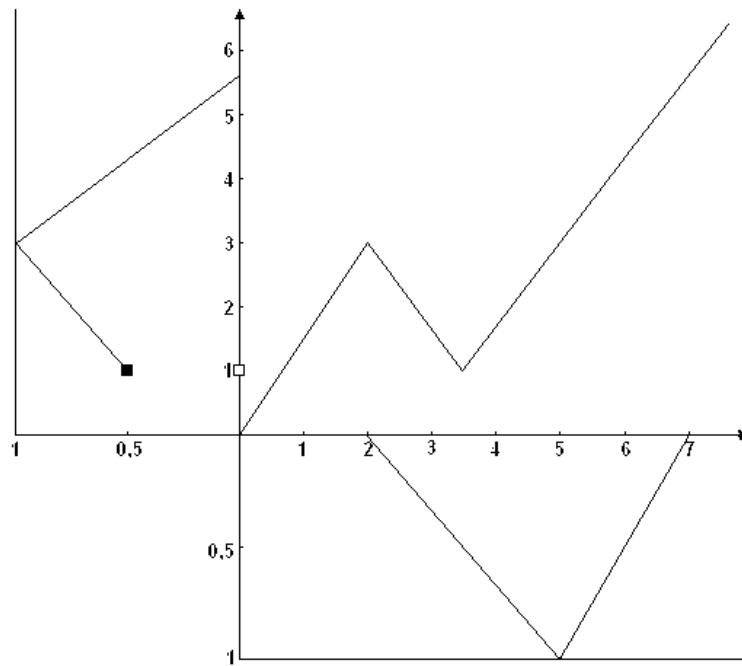
Z Věty 2.4 je zřejmé, že pokud budeme pracovat se spojitými funkcemi, výsledkem dosazení fuzzy čísla do funkce bude opět fuzzy číslo. V následujícím příkladu je znázorněno, jak vypadá výstup získaný dosazením fuzzy čísla do spojitě a nespojitě funkce.

Příklad 2.5. Na Obr. 7 máme zadanou funkci $f(x)$ a fuzzy číslo $A = \langle 2, 5, 7 \rangle$. Na levé straně získáme výsledné fuzzy číslo. Na Obr. 8 je zadaná funkce $g(x)$, která není spojitá, a opět fuzzy číslo $A = \langle 2, 5, 7 \rangle$. Z obrázku je zřejmé, že výsledkem není fuzzy číslo.

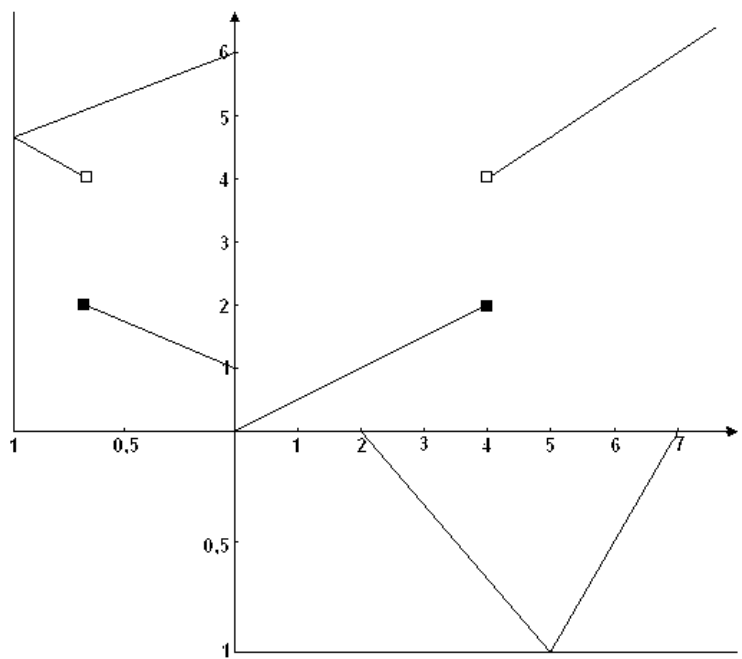
Kromě grafického řešení lze počítat pomocí uspořádaných dvojic funkcí \underline{x} a \bar{x} popisující krajní body α -řezů.

Věta 2.5. Necht' je dáno fuzzy číslo $X = \{[\underline{x}(\alpha), \bar{x}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$ a spojitá funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dosazením fuzzy čísla X do funkce f dostaneme fuzzy číslo $Y = f_F(X) = \{[\underline{y}(\alpha), \bar{y}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$, kde hodnoty $\underline{y}(\alpha)$ a $\bar{y}(\alpha)$ získáme následovně

$$\underline{y}(\alpha) = \min\{f(x) \mid x \in [\underline{x}(\alpha), \bar{x}(\alpha)]\}, \quad (20)$$



Obrázek 7: Dosazení fuzzy čísla A do spojité funkce



Obrázek 8: Dosazení fuzzy čísla A do nespojité funkce

$$\bar{y}(\alpha) = \max\{f(x) \mid x \in [\underline{x}(\alpha), \bar{x}(\alpha)]\}. \quad (21)$$

Důkaz: Viz [1]. ■

Následující věta ukazuje, že výrazy (20) a (21) lze v případě monotónních funkcí zjednodušit.

Věta 2.6. *Nechť je dáno fuzzy číslo $X = \{[\underline{x}(\alpha), \bar{x}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$ a spojitá funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Označme $Y = f_F(X) = \{[\underline{y}(\alpha), \bar{y}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$. Je-li funkce f nerostoucí, pak platí*

$$\underline{y}(\alpha) = f(\bar{x}(\alpha)), \quad (22)$$

$$\bar{y}(\alpha) = f(\underline{x}(\alpha)), \quad (23)$$

je-li naopak funkce f neklesající, pak platí

$$\underline{y}(\alpha) = f(\underline{x}(\alpha)), \quad (24)$$

$$\bar{y}(\alpha) = f(\bar{x}(\alpha)). \quad (25)$$

Důkaz: Důkaz této věty jednoznačně plyne ze vztahů (20) a (21) a z vlastnosti monotónní funkce. ■

V následujícím příkladu je názorně ukázáno, jak lze dosazovat fuzzy číslo do neklesající funkce s využitím vztahů (24) a (25).

Příklad 2.6. *Mějme dánu funkci $f(x) = 3x + 1$, která je neklesající a spojitá, a fuzzy číslo $A = [1, 2, 4, 5]$, které lze zapsat pomocí uspořádaných dvojic funkcí jako $A = \{[1 + \alpha, 5 - \alpha], \alpha \in [0, 1]\}$. Pak dosazením fuzzy čísla A do funkce f získáme fuzzy číslo $f_F(A) = \{[3(1 + \alpha) + 1, 3(5 - \alpha) + 1], \alpha \in [0, 1]\}$, výsledné fuzzy číslo je tedy $f_F(A) = \{[4 + 3\alpha, 16 - 3\alpha], \alpha \in [0, 1]\}$.*

S využitím principu rozšíření můžeme také provádět aritmetické operace s fuzzy čísly. V následující definici si zavedeme součet a násobení dvou fuzzy čísel fuzzy čísel a násobení fuzzy čísla reálnou konstantou.

Definice 2.13. Necht' jsou dána fuzzy čísla $C, D \in U$, potom

- součet fuzzy čísel C a D je definovaný vztahem

$$(C + D)(z) = \sup\{\min\{C(x), D(y)\} | x + y = z, x, y \in U\}, \quad (26)$$

- násobení fuzzy čísel C a D je definovaný vztahem

$$(C \cdot D)(z) = \sup\{\min\{C(x), D(y)\} | x \cdot y = z, x, y \in U\}, \quad (27)$$

- násobení fuzzy čísla C konstantou $k \in \mathbb{R}$ je definované vztahem

$$(k \cdot C)(z) = \sup\{C(x) | k \cdot x = z, x \in U\}. \quad (28)$$

Aritmetické operace s fuzzy čísly můžeme také zavést pomocí dvojice funkcí, jež popisují fuzzy čísla C a D .

Definice 2.14. Necht' jsou dána fuzzy čísla $C = \{[\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$ a $D = \{[\underline{d}(\alpha), \bar{d}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$, potom

- součet fuzzy čísel C a D je definovaný vztahem

$$C + D = \{[\underline{c}(\alpha) + \underline{d}(\alpha), \bar{c}(\alpha) + \bar{d}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}, \quad (29)$$

- násobení fuzzy čísel C a D je definované vztahem

$$C \cdot D = \{[\min\{\underline{c}(\alpha) \cdot \underline{d}(\alpha), \underline{c}(\alpha) \cdot \bar{d}(\alpha), \bar{c}(\alpha) \cdot \underline{d}(\alpha), \bar{c}(\alpha) \cdot \bar{d}(\alpha)\}, \max\{\underline{c}(\alpha) \cdot \underline{d}(\alpha), \underline{c}(\alpha) \cdot \bar{d}(\alpha), \bar{c}(\alpha) \cdot \underline{d}(\alpha), \bar{c}(\alpha) \cdot \bar{d}(\alpha)\}] \mid \alpha \in [0, 1]\}, \quad (30)$$

- násobení fuzzy čísla C konstantou $k \in \mathbb{R}$ je definované vztahem

$$k \cdot C = \{[\min\{k \cdot \underline{c}(\alpha), k \cdot \bar{c}(\alpha)\}, \max\{k \cdot \underline{c}(\alpha), k \cdot \bar{c}(\alpha)\}] \mid \alpha \in [0, 1]\}. \quad (31)$$

3 Metody defuzzifikace fuzzy čísel

Tato kapitola je věnována různým metodám defuzzifikace fuzzy čísel. Tento přístup spočívá v tom, že fuzzy čísla nahradíme reálnými čísly, které je dle určitého hlediska nejlépe vystihují.

Obecně je tedy defuzzifikace fuzzy čísel dána jako určité zobrazení

$$d : \mathcal{F}_N(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (32)$$

K aproximaci fuzzy čísel se nejčastěji používají metody využívající tvaru funkce příslušnosti, a to těžiště a zobecněné těžiště, medián a středový bod středního intervalu (MOM). Tato část byla zpracována s využitím [1, 7, 9]. Z této literatury byly převzaty definice těchto metod a dále budou v kapitole prostudovány uvedené metody pro případ lineárních fuzzy čísel a po částech lineárních fuzzy čísel. Dalším přístupem k defuzzifikaci fuzzy čísel je očekávaná hodnota fuzzy čísla, která přihlíží k tomu, jakým způsobem bylo fuzzy číslo získáno. Tato část byla zpracována podle [2].

Názvosloví a značení u některých metod defuzzifikace fuzzy čísel není v odborné literatuře zcela jednotné. V některých zdrojích se můžeme setkat s různými názvy stejné číselné charakteristiky, v takových případech je na to v textu upozorněno.

Jednotlivé metody defuzzifikace fuzzy čísel budou průběžně aplikovány na konkrétním příkladě, abychom je mohli mezi sebou vzájemně porovnat. Na Obr. 9 je znázorněno fuzzy číslo $C = \langle 1, 5, 7, 9 \rangle$ a na Obr. 10 je fuzzy číslo D pro ilustraci případu, kdy známe jen krajní hodnoty některých α -řezů. Pro tento případ jsou v kapitole uvedeny funkce sestavené v Matlabu, jež výrazně zjednoduší výpočet metod defuzzifikace po částech lineárního fuzzy čísla. Pro fuzzy číslo D znázorněné na Obr. 10 má vstup do zmiňované funkce následující tvar

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1.2 & 9.3 \\ 0.2 & 2 & 9 \\ 0.4 & 2.5 & 8.8 \\ 0.5 & 4 & 7.3 \\ 0.8 & 4.9 & 7.2 \\ 1 & 5.3 & 6.5 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

kde první sloupec matice X obsahuje hodnoty α_i , druhý sloupec jsou hodnoty $\underline{c}(\alpha_i)$ a třetí sloupec jsou hodnoty $\bar{c}(\alpha_i)$, pro $i = 1, \dots, 6$.

Dále budeme zkoumat u metod vycházejících z tvaru funkce příslušnosti, jaké splňují vlastnosti při provádění aritmetických operací s fuzzy čísly, které jsme si definovaly v předchozí kapitole. To znamená, že budeme zkoumat, zda pro každé $C, D \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ platí vztahy

$$d(C + D) = d(C) + d(D), \quad (34)$$

$$d(C \cdot D) = d(C) \cdot d(D), \quad (35)$$

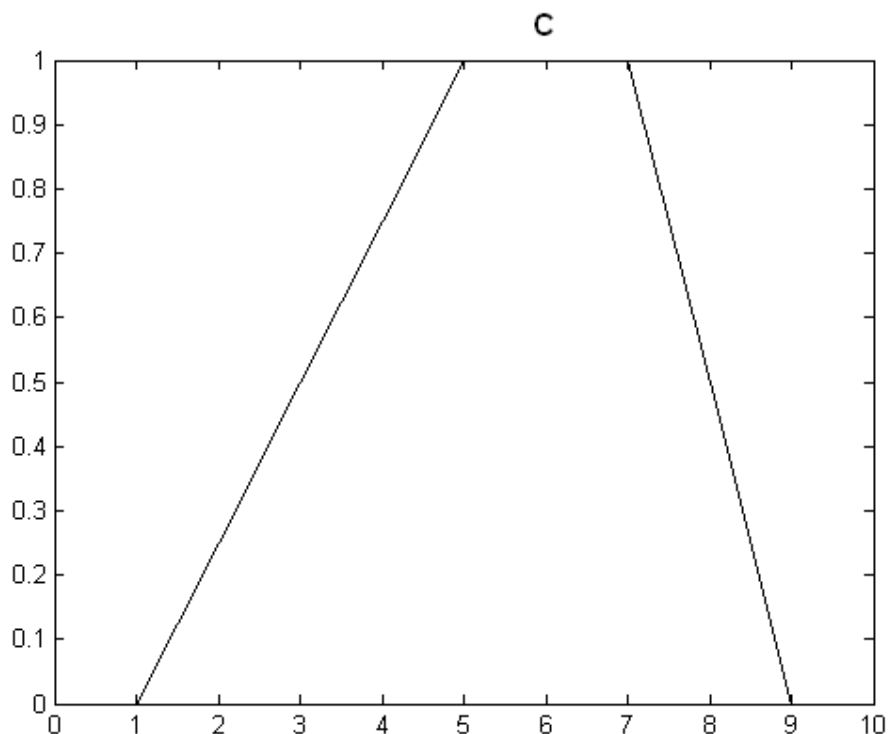
$$d(k \cdot C) = k \cdot d(C), k \in \mathbb{R}. \quad (36)$$

3.1 Středový bod středního intervalu (MOM)

Nejprve se seznámíme se s číselnou charakteristikou, která se v anglicky psané literatuře nazývá *the middle point of the mean interval*. Jelikož pro něj neexistuje český ekvivalent, budeme jej nazývat středovým bodem středního intervalu, dále budeme používat pouze zkratku *MOM*.

V literatuře [3] se pro tuto číselnou charakteristiku používá název *the expected value*, což bychom mohli přeložit jako očekávanou hodnotu fuzzy čísla. V této práci se budeme také zabývat charakteristikou nazvanou očekávaná hodnota fuzzy čísla, ale budeme ji definovat odlišným způsobem.

Abychom mohli nadefinovat *MOM*, seznámíme se nejdříve se středovým intervalem fuzzy čísla C .



Obrázek 9: Fuzzy číslo C

Definice 3.1. Nechť je dáno fuzzy číslo $C = \{[\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$. Potom střední interval fuzzy čísla C je interval $E(C) = [\underline{E}(C), \bar{E}(C)]$, kde

$$\underline{E}(C) = \int_0^1 \underline{c}(\alpha) d\alpha \quad a \quad \bar{E}(C) = \int_0^1 \bar{c}(\alpha) d\alpha. \quad (37)$$

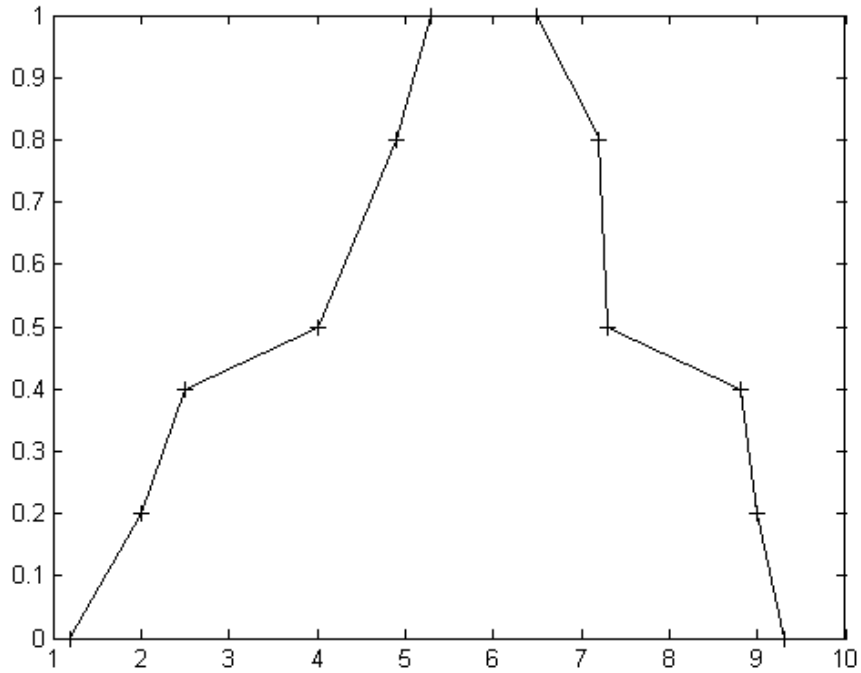
Definice 3.2. Nechť je dáno fuzzy číslo $C = \{[\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$. Středovým bodem středního intervalu fuzzy čísla C nazveme reálné číslo MOM_C definované formulí

$$MOM_C = \frac{\underline{E}(C) + \bar{E}(C)}{2}. \quad (38)$$

Poznámka 3.1. Užitím vzorců (37) lze MOM_C napsat následujícím způsobem

$$MOM_C = \int_0^1 \frac{\underline{c}(\alpha) + \bar{c}(\alpha)}{2} d\alpha. \quad (39)$$

V následující větě je ukázané, že v případě lineárních fuzzy čísel lze výpočet MOM výrazně zjednodušit.



Obrázek 10: Fuzzy číslo D

Věta 3.1. *Nechť $C = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ je lineární fuzzy číslo. Pak pro MOM_C fuzzy čísla C platí vztah*

$$MOM_C = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}{4}. \quad (40)$$

Důkaz: Viz [7].

Příklad 3.1. *Pro fuzzy číslo C , znázorněné na Obr. 9, platí $MOM_C = 5.5$.*

Nyní se zaměříme na výpočet MOM fuzzy čísla C v případě, kdy známe jen krajní hodnoty některých α -řezů daného fuzzy čísla.

Věta 3.2. *Nechť je dáno fuzzy číslo $C = \{[\underline{c}(\alpha_i), \bar{c}(\alpha_i)] \mid \alpha_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n\}$. Potom pro MOM_C platí následující vztah*

$$MOM_C = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) (\underline{c}(\alpha_i) + \bar{c}(\alpha_i) + \underline{c}(\alpha_{i+1}) + \bar{c}(\alpha_{i+1})). \quad (41)$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}
MOM_C &= \int_0^1 \frac{\underline{c}(\alpha) + \bar{c}(\alpha)}{2} d\alpha = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{(\underline{c}(\alpha_i) + \frac{\alpha - \alpha_i}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} (\underline{c}(\alpha_{i+1}) - \underline{c}(\alpha_i)) + \bar{c}(\alpha_i) + \frac{\alpha - \alpha_i}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} (\bar{c}(\alpha_{i+1}) - \bar{c}(\alpha_i)))}{2} d\alpha = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \underline{c}(\alpha) d\alpha + \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{\alpha - \alpha_i}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} (\underline{c}(\alpha_{i+1}) - \underline{c}(\alpha_i)) d\alpha + \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \bar{c}(\alpha) d\alpha + \\
&+ \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{\alpha - \alpha_i}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} (\bar{c}(\alpha_{i+1}) - \bar{c}(\alpha_i)) d\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \{ \underline{c}(\alpha_i) \alpha_{i+1} - \underline{c}(\alpha_i) \alpha_i + \bar{c}(\alpha_i) \alpha_{i+1} \\
&- \bar{c}(\alpha_i) \alpha_i + \frac{1}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} (\frac{1}{2} \underline{c}(\alpha_{i+1}) (\alpha_{i+1}^2 - \alpha_i^2) - \alpha_i \underline{c}(\alpha_{i+1}) (\alpha_{i+1} - \alpha_i)) \} - \frac{1}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \cdot \\
&\cdot (\frac{1}{2} \underline{c}(\alpha_i) (\alpha_{i+1}^2 - \alpha_i^2) - \alpha_i \underline{c}(\alpha_i) (\alpha_{i+1} - \alpha_i)) + \frac{1}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} (\frac{1}{2} \bar{c}(\alpha_{i+1}) (\alpha_{i+1}^2 - \alpha_i^2) - \\
&- \alpha_i \bar{c}(\alpha_{i+1}) (\alpha_{i+1} - \alpha_i)) - \frac{1}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} (\frac{1}{2} \bar{c}(\alpha_i) (\alpha_{i+1}^2 - \alpha_i^2) - \alpha_i \bar{c}(\alpha_i) (\alpha_{i+1} - \alpha_i)) \} = \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} (\underline{c}(\alpha_i) \alpha_{i+1} - \underline{c}(\alpha_i) \alpha_i + \underline{c}(\alpha_{i+1}) \alpha_{i+1} - \underline{c}(\alpha_{i+1}) \alpha_i + \bar{c}(\alpha_i) \alpha_{i+1} - \bar{c}(\alpha_i) \alpha_i + \\
&+ \bar{c}(\alpha_{i+1}) \alpha_{i+1} - \bar{c}(\alpha_{i+1}) \alpha_i) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) (\underline{c}(\alpha_i) + \bar{c}(\alpha_i) + \underline{c}(\alpha_{i+1}) + \bar{c}(\alpha_{i+1})).
\end{aligned}$$

■

Pro zjednodušení výpočtu středového bodu středního intervalu po částech lineárního fuzzy čísla jsem sestrojila v programu Matlab funkci pod názvem MOM.m, jejíž vstup je dán dle (33), a má následující tvar:

```

function MOM = MOM(X)

alfa=X(:,1);
C=X(:,2:3);
h=size(X);
n=h(1);

S=zeros(n-1,1);

```

```

for i=1:n-1
    S(i)=(alfa(i+1)-alfa(i))*((C(i+1,1)+C(i,1))+C(i+1,2)+C(i,2));
end

MOM=1/4*sum(S);

```

Příklad 3.2. Pro fuzzy číslo D , znázorněné na Obr. 10, dostaneme po dosazení $MOM_D = 5.71$.

V následujících větách jsou uvedeny vlastnosti MOM při provádění aritmetických operací s fuzzy čísly.

Věta 3.3. Necht' jsou dána fuzzy čísla $C = \{[\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$ a $D = \{[\underline{d}(\alpha), \bar{d}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$, potom pro středový bod středního intervalu MOM_{C+D} platí následující vztah

$$MOM_{C+D} = MOM_C + MOM_D. \quad (42)$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}
 MOM_C + MOM_D &= \int_0^1 \frac{\underline{c}(\alpha) + \bar{c}(\alpha)}{2} d\alpha + \int_0^1 \frac{\underline{d}(\alpha) + \bar{d}(\alpha)}{2} d\alpha = \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{\underline{c}(\alpha) + \bar{c}(\alpha)}{2} + \frac{\underline{d}(\alpha) + \bar{d}(\alpha)}{2} \right) d\alpha = \int_0^1 \frac{\underline{c}(\alpha) + \underline{d}(\alpha) + \bar{c}(\alpha) + \bar{d}(\alpha)}{2} d\alpha = \\
 &= MOM_{C+D}.
 \end{aligned}$$

■

Věta 3.4. Necht' je dáno fuzzy číslo $C = \{[\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$ a konstanta $k \in \mathbb{R}$, potom pro středový bod středního intervalu $MOM_{k \cdot C}$ platí následující vztah

$$MOM_{k \cdot C} = k \cdot MOM_C. \quad (43)$$

Důkaz:

$$k \cdot MOM_C = k \cdot \int_0^1 \frac{\underline{c}(\alpha) + \bar{c}(\alpha)}{2} d\alpha = \int_0^1 \frac{k \cdot \underline{c}(\alpha) + k \cdot \bar{c}(\alpha)}{2} d\alpha = MOM_{k \cdot C}.$$

■

Poznámka 3.2. Pro medián fuzzy čísla neplatí $MOM_{C \cdot D} = MOM_C \cdot MOM_D$. Mějme například dána fuzzy čísla $C = \langle 3, 4, 7 \rangle$ a $D = \langle 1, 2, 3, 5 \rangle$. Pro jejich hodnoty MOM platí $MOM_C = 4.50$ a $MOM_D = 2.75$, to znamená, že $MOM_C \cdot MOM_D = 12.38$. Výsledné fuzzy číslo $C \cdot D$ bude mít význačné body $c_1 = 3, c_2 = 8, c_3 = 12, c_4 = 35$, ale funkce příslušnosti není lineární. Středový bod středního intervalu výsledného fuzzy čísla má hodnotu $MOM_{C \cdot D} = 13.92$ a srovnáním s $MOM_C \cdot MOM_D$ zjistíme, že se hodnoty liší.

3.2 Těžiště a zobecněné těžiště

Dalším způsobem defuzzifikace fuzzy čísla je číselná charakteristika, jež se v anglicky psané literatuře nazývá *the center of gravity*, neboli těžiště fuzzy čísla.

Definice 3.3. Nechť je dáno fuzzy číslo C , které není číslem reálným. Jeho těžištěm nazveme reálné číslo t_C definované vztahem

$$t_C = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} C(x)x dx}{\int_{-\infty}^{\infty} C(x) dx}. \quad (44)$$

Pokud C je reálné číslo, pak klademe $t_C = C$.

Zobecněným těžištěm řádu k nazveme reálné číslo t_{kC} dané vzorcem

$$t_{kC} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} C^{k+1}(x)x dx}{\int_{-\infty}^{\infty} C^{k+1}(x) dx}, k \in \{1, 2, \dots\}. \quad (45)$$

Pokud C je reálné číslo, pak klademe $t = t_{kC} = C$.

Poznámka 3.3. Těžiště fuzzy čísla je analogické jako střední hodnota spojité náhodné veličiny, jejíž rozdělení pravděpodobností je popsáno funkcí hustoty. Zobecněné těžiště pak dává větší váhu hodnotám s většími stupni příslušnosti a potlačuje vliv hodnot s malými stupni příslušnosti. Čím větší je parametr k , tím více se t_{kC} blíží středu jádra fuzzy čísla.

Následující věty ukazují, že v případě lineárních fuzzy čísel lze výpočet těžiště a zobecněného těžiště řádu k zjednodušit.

Věta 3.5. *Nechť $C = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ je lineární fuzzy číslo. Potom pro těžiště t_C fuzzy čísla C platí vztah*

$$t_C = \frac{1}{3} \cdot \frac{c_4^2 + c_3^2 - c_2^2 - c_1^2 + c_4c_3 - c_2c_1}{c_4 + c_3 - c_2 - c_1}. \quad (46)$$

Důkaz: Viz [7].

Věta 3.6. *Nechť $C = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ je lineární fuzzy číslo. Pak pro zobecněné těžiště t_{kC} řádu k fuzzy čísla C platí vztah*

$$t_{kC} = \frac{2 \cdot (c_4^2 + c_3^2 - c_2^2 - c_1^2 + c_3c_4 - c_1c_2 + kc_3c_4 - kc_1c_2) + (c_3^2 - c_2^2) \cdot (k^2 + 3k)}{2 \cdot (k + 3) \cdot (c_4 + c_3 - c_2 - c_1 + kc_3 - kc_2)}. \quad (47)$$

Důkaz: Viz [7].

Příklad 3.3. *Fuzzy číslo $C = \langle 1, 5, 7, 9 \rangle$ na Obr. 9 má těžiště $t_C = 5.4$ a zobecněná těžiště $t_{1C} = 5.6$ a $t_{4C} = 5.8$. Lze vidět, že čím větší je parametr k , tím více se t_{kC} blíží středu jádra fuzzy čísla.*

V předchozí části jsme uvažovali výpočet těžiště fuzzy čísla, pokud je tvar funkce příslušnosti daného fuzzy čísla spojitý. Nyní se zaměříme na postup v případě, kdy známe jen krajní hodnoty některých α -řezů daného fuzzy čísla.

Výpočet těžiště po částech lineárního fuzzy čísla je uveden v následující větě.

Věta 3.7. *Nechť je dáno po částech lineární fuzzy číslo $C = \{[\underline{c}(\alpha_i), \bar{c}(\alpha_i)] \mid \alpha_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n\}$. Označme*

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} (2\alpha_{i+1} + \alpha_i - 3) (\underline{c}(\alpha_{i+1})^2 - \bar{c}(\alpha_{i+1})^2) - (\alpha_{i+1} - \alpha_i) (\underline{c}(\alpha_{i+1})\underline{c}(\alpha_i) - \bar{c}(\alpha_{i+1})\bar{c}(\alpha_i)) - (\alpha_{i+1} + 2\alpha_i) (\underline{c}(\alpha_i)^2 - \bar{c}(\alpha_i)^2)$$

a

$$B = 3 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} ((\alpha_{i+1} + \alpha_i - 2)(\underline{c}(\alpha_{i+1}) - \bar{c}(\alpha_{i+1})) + (\alpha_{i+1} + \alpha_i)(\bar{c}(\alpha_i) - \underline{c}(\alpha_i))).$$

Pak pro těžiště t_C platí

$$t_C = \frac{A}{B}. \quad (48)$$

Důkaz: Vzorec pro výpočet těžiště po částech lineárního fuzzy čísla získáme dosazením vztahu (15) do obecného vzorce pro výpočet těžiště (44). ■

Pro potřebu výpočtu těžiště po částech lineárního fuzzy čísla jsem sestrojila v programu Matlab funkci pod názvem `teziste.m`, jejíž vstup je dán dle (33), a má následující tvar:

```
function teziste = teziste(X)

alfa=X(:,1);
C=X(:,2:3);
h=size(X);
n=h(1);

a=zeros(n-1,1);
for i=1:n-1
    a(i)=(((2*alfa(i+1)+alfa(i)-3)*((C(i+1,1))^2-(C(i+1,2))^2)
    -(alfa(i+1)-alfa(i))*(C(i,1)*C(i+1,1)-C(i,2)*C(i+1,2)))
    -(alfa(i+1)+2*alfa(i))*((C(i,1))^2-(C(i,2))^2))
end

b=zeros(n-1,1);
for i=1:n-1
    b(i)=((alfa(i+1)+alfa(i)-2)*(C(i+1,1)-C(i+1,2))+(alfa(i+1)
    +alfa(i))*(C(i,2)-C(i,1)))
end

c=sum(a);
d=sum(b);

teziste=(1/3)*c/d;
```

Příklad 3.4. Pro fuzzy číslo D , znázorněné na Obr. 10, dostaneme po dosazení $t_D = 5.63$.

Poznámka 3.4. Těžiště po částech lineárního fuzzy čísla můžeme také využít při výpočtu těžiště fuzzy čísla C , kde dvojice funkcí \underline{c} a \bar{c} nejsou lineární. Fuzzy číslo C aproximujeme po částech lineárním fuzzy číslem pro libovolný počet $\alpha_i \in [0,1]$.

V následující větě jsou uvedeny vlastnosti těžiště při provádění aritmetických operací s fuzzy čísly.

Věta 3.8. Nechť je dáno fuzzy číslo C a reálná konstanta $k \in \mathbb{R}$. Potom pro těžiště fuzzy čísla $t_{k \cdot C}$ platí následující vztah

$$t_{k \cdot C} = k \cdot t_C. \quad (49)$$

Důkaz: Nechť jsou dána fuzzy čísla $C \in U$ a $D = k \cdot C$, potom pro těžiště fuzzy čísla D platí:

1. Pro $k \neq 0$ je $D(y) = C(x)$, kde $y = kx$, a platí

$$\begin{aligned} t_D &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} D(y)ydy}{\int_{-\infty}^{\infty} D(y)dy} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} D(kx)kxkdx}{\int_{-\infty}^{\infty} D(kx)kdx} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} C(x)kxkdx}{\int_{-\infty}^{\infty} C(x)kdx} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} k^2 C(x)x dx}{\int_{-\infty}^{\infty} k C(x) dx} = k \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} C(x)x dx}{\int_{-\infty}^{\infty} C(x) dx} = k \cdot t_C. \end{aligned}$$

2. Pro $k = 0$, kde $D(y) = \sup\{C(x)|y = 0, x \in U\}$, platí

$$t_D = 0 = 0 \cdot t_C.$$

■

Poznámka 3.5. Pro těžiště fuzzy čísla neplatí $t_{C+D} = t_C + t_D$. Pro fuzzy čísla $C = \langle 3, 4, 7 \rangle$ a $D = \langle 1, 2, 3, 5 \rangle$ platí $t_C = 4.67$ a $t_D = 2.80$, to znamená, že $t_C + t_D = 7.47$, ale pro fuzzy číslo $C + D = \langle 4, 6, 7, 12 \rangle$ platí $t_{C+D} = 7.44$. Dále pro těžiště fuzzy čísla neplatí ani $t_{C \cdot D} = t_C \cdot t_D$. Součin dvou fuzzy čísel

pro zjednodušení aproximujeme po částech lineárním fuzzy číslem. Nejdříve si vyjádříme hodnoty $C \cdot D = \{[\underline{c}(\alpha_i) \cdot \underline{d}(\alpha_i), \bar{c}(\alpha_i) \cdot \bar{d}(\alpha_i)] \mid \alpha_i = 0, 0.01, \dots, 1\}$ a vypočítáme hodnotu těžiště po částech lineárního fuzzy čísla, tj. $t_{C \cdot D} = 15.12$ a pokud ji porovnáme s hodnotou $t_C \cdot t_D = 13.07$, zjistíme, že se výrazně liší.

3.3 Medián

Tato část je věnována výpočtu číselné charakteristiky, která se v anglicky psané literatuře někdy nazývá *the center of area*, neboli medián fuzzy čísla.

Definice 3.4. Nechť je dáno fuzzy číslo C , pak *medián* fuzzy čísla C je reálné číslo m_C , pro které platí následující formule

$$\int_{-\infty}^{m_C} C(x) dx = \int_{m_C}^{\infty} C(x) dx. \quad (50)$$

Poznámka 3.6. Medián rozděluje plochu pod funkcí příslušnosti na dvě stejné části.

Pokud bychom chtěli vzorec pro výpočet mediánu vyjádřit pro lineární fuzzy číslo C pomocí význačných bodů, je nutné si fuzzy číslo rozdělit na tři části S_1, S_2, S_3 , viz Obr. 11. Hodnoty jednotlivých obsahů lze určit podle následujících vztahů

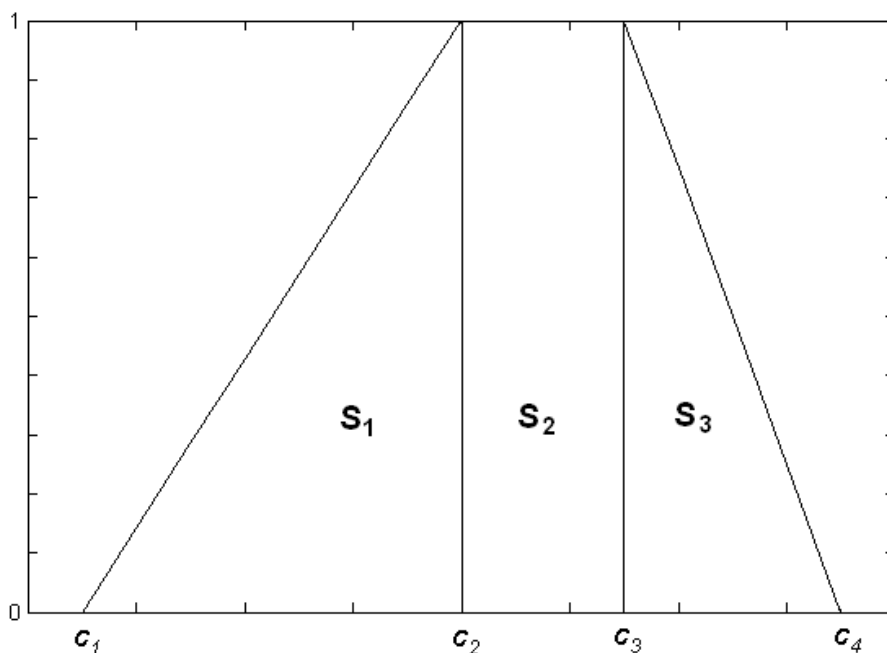
$$S_1 = \frac{c_2 - c_1}{2}, \quad (51)$$

$$S_2 = c_3 - c_2, \quad (52)$$

$$S_3 = \frac{c_4 - c_3}{2}. \quad (53)$$

Potom pro medián m_C fuzzy čísla $C = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ platí uvedené vztahy.

- Jestliže platí $S_1 > S_2 + S_3$, potom bude medián m_C ležet v intervalu (c_1, c_2) a určíme ho jako řešení následující rovnice



Obrázek 11: Fuzzy číslo C

$$\int_{c_1}^{m_C} \frac{x - c_1}{c_2 - c_1} dx = \int_{m_C}^{c_2} \frac{x - c_1}{c_2 - c_1} dx + S_2 + S_3. \quad (54)$$

- Jestliže platí $(S_1 < S_2 + S_3) \wedge (S_1 + S_2 > S_3)$, potom se bude medián m_C nacházet v intervalu (c_2, c_3) a určíme ho jako řešení následující rovnice

$$S_1 + \int_{c_2}^{m_C} 1 dx = \int_{m_C}^{c_3} 1 dx + S_3, \quad (55)$$

ze které můžeme vyjádřit vzorec pro výpočet mediánu

$$m_C = \frac{c_2 + c_3 + S_3 - S_1}{2}. \quad (56)$$

- Jestliže platí $S_1 + S_2 < S_3$, potom bude medián m_C ležet v intervalu (c_3, c_4) a určíme ho jako řešení následující rovnice

$$S_1 + S_2 + \int_{c_3}^{m_C} \frac{c_4 - x}{c_4 - c_3} dx = \int_{m_C}^{c_4} \frac{c_4 - x}{c_4 - c_3} dx. \quad (57)$$

- Také může nastat případ, kdy $S_1 = S_2 + S_3$. Potom jsme již hodnotu mediánu m_C našli a je rovna hodnotě

$$m_c = c_2, \quad (58)$$

analogicky může nastat případ, kde $S_1 + S_2 = S_3$, pro hodnotu mediánu potom platí vztah

$$m_c = c_3. \quad (59)$$

Pro potřebu výpočtu mediánu lineárního fuzzy čísla jsem sestrojila v programu Matlab funkci pod názvem median.m a má následující tvar:

```
function median = median(C)

S1 = (C(2)-C(1))/2 ;
S2 = C(3)-C(2);
S3 = (C(4)-C(3))/2;

if S1 > S2+S3
    k=1
    median=fsolve(@(m)m^2-2*C(1)*m-C(1)^2/2-C(2)^2/2+C(1)^2
    +C(1)*C(2)-(C(2)-C(1))*(C(3)-C(2))-((C(4)-C(3))*(C(2)
    -C(1)))/2,C(2));

elseif S1 == S2+S3
    k=2
    median=C(2);

elseif S1+S2 < S3
    k=3
    median=fsolve(@(m)m^2-2*C(4)*m-C(3)^2/2-C(4)^2/2+C(4)^2
    +C(3)*C(4)-(C(4)-C(3))*(C(3)-C(2))-((C(4)-C(3))*(C(2)
```

```

-C(1))/2,C(1));

elseif S1+S2 == S3
    k=4
    median=C(3);

else
    k=5
    median=(C(1)+C(2)+C(3)+C(4))/4;
end

```

Příklad 3.5. Pro fuzzy číslo C , znázorněné na Obr. 9, platí $m_C = 5.5$. Hodnotu dostaneme dosazením do vzorce (61), tj. stejná hodnota jako pro MOM_C .

Stejně jako u předchozích metod i nyní se zaměříme na případ, kdy známe pouze krajní hodnoty některých α -řezů. Budeme postupovat podobným způsobem jako pro výpočet mediánu u lineárního fuzzy čísla. Zvolili jsme takový postup, že vytvoříme po částech lineární fuzzy čísla, viz Obr. 12, a rozdělíme si fuzzy číslo na menší obsahy S_k , $k = 1, \dots, 2n - 1$, kde n je počet známých α -řezů.

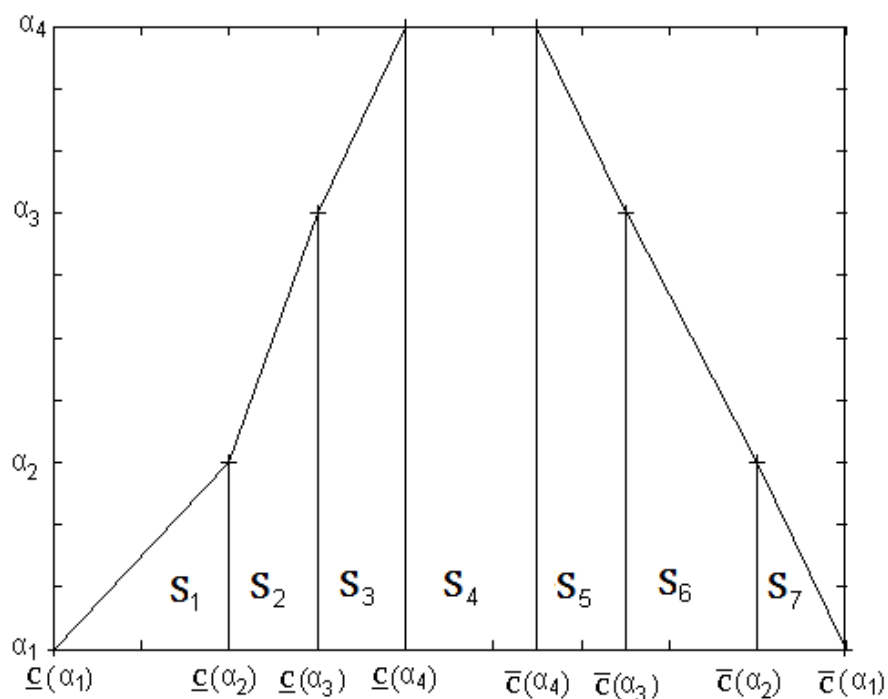
Medián m_C daného fuzzy čísla $C = \{[\underline{c}(\alpha_i), \bar{c}(\alpha_i)] \mid \alpha_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n\}$ můžeme získat pomocí následujících vztahů:

- Jestliže existuje $j \in \{1, \dots, n - 1\}$ takové, že platí

$$\left(\sum_{k=1}^{j-1} S_k < \sum_{k=j}^{2n-1} S_k \right) \wedge \left(\sum_{k=1}^j S_k > \sum_{k=j+1}^{2n-1} S_k \right),$$

pak medián m_C bude ležet v intervalu $(\underline{c}(\alpha_j), \underline{c}(\alpha_{j+1}))$ a určíme ho jako řešení následující rovnice

$$\sum_{k=1}^{j-1} S_k + \int_{\underline{c}(\alpha_j)}^{m_C} \left((\alpha_{j+1} - \alpha_j) \cdot \frac{x - \underline{c}(\alpha_j)}{\underline{c}(\alpha_{j+1}) - \underline{c}(\alpha_j)} + \alpha_j \right) dx =$$



Obrázek 12: Fuzzy číslo D

$$= \int_{m_C}^{c(\alpha_{j+1})} \left((\alpha_{j+1} - \alpha_j) \cdot \frac{x - c(\alpha_j)}{c(\alpha_{j+1}) - c(\alpha_j)} + \alpha_j \right) dx + \sum_{k=j+1}^{2n-1} S_k. \quad (60)$$

- Jestliže nastane případ, kde

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} S_k < \sum_{k=n}^{2n-1} S_k \right) \wedge \left(\sum_{k=1}^n S_k > \sum_{k=n+1}^{2n-1} S_k \right),$$

pak se bude medián m_C nacházet v intervalu $(c(\alpha_n), \bar{c}(\alpha_n))$ a určíme ho jako řešení následující rovnice

$$\sum_{k=1}^{n-1} S_k + \int_{c(\alpha_n)}^{m_C} 1 dx = \int_{m_C}^{\bar{c}(\alpha_n)} 1 dx + \sum_{k=n+1}^{2n-1} S_k, \quad (61)$$

ze které můžeme vyjádřit vzorec pro výpočet mediánu

$$m_C = \frac{\bar{c}(\alpha_n) + \underline{c}(\alpha_n) + \sum_{k=n+1}^{2n-1} S_k - \sum_{k=1}^{n-1} S_k}{2}. \quad (62)$$

- Jestliže existuje $j \in \{1, \dots, n-1\}$ takové, že platí

$$\left(\sum_{k=2n-j+1}^{2n-1} S_k < \sum_{k=1}^{2n-j} S_k \right) \wedge \left(\sum_{k=2n-j}^{2n-1} S_k > \sum_{k=1}^{2n-j-1} S_k \right),$$

pak medián m_C bude ležet v intervalu $(\bar{c}(\alpha_{j+1}), \bar{c}(\alpha_j))$ a určíme ho jako řešení následující rovnice

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2n-j-1} S_k + \int_{\bar{c}(\alpha_{j+1})}^{m_C} \left((\alpha_{j+1} - \alpha_j) \cdot \frac{\bar{c}(\alpha_j) - x}{\bar{c}(\alpha_j) - \bar{c}(\alpha_{j+1})} + \alpha_j \right) dx = \\ & = \int_{m_C}^{\bar{c}(\alpha_j)} \left((\alpha_{j+1} - \alpha_j) \cdot \frac{\bar{c}(\alpha_j) - x}{\bar{c}(\alpha_j) - \bar{c}(\alpha_{j+1})} + \alpha_j \right) dx + \sum_{k=2n-j+1}^{2n-1} S_k. \end{aligned} \quad (63)$$

- Jestliže existuje $j \in \{1, \dots, n-1\}$ takové, že platí

$$\sum_{k=1}^j S_k = \sum_{k=j+1}^{2n-1} S_k,$$

pak hodnotu m_C známe a je dána

$$m_C = \underline{c}(\alpha_{j+1}), \quad (64)$$

analogicky jestliže existuje $j \in \{1, \dots, n-1\}$ takové, že platí

$$\sum_{k=2n-j}^{2n-1} S_k = \sum_{k=1}^{2n-j-1} S_k,$$

pak pro m_C platí

$$m_C = \bar{c}(\alpha_{j+1}). \quad (65)$$

Pro zjednodušení výpočtu mediánu po částech lineárního fuzzy čísla jsem sestrojila v programu Matlab funkci pod názvem median_alfa.m, jejíž vstup je dán dle (33), a má následující tvar:

```
function median_alfa = median_alfa(X)

alfa=X(:,1);
C=X(:,2:3);
h=size(X);
n=h(1);

S=zeros(2*n-1,1);
for i=1:n-1
    S(i)=1/2*(C(i+1,1)-C(i,1))*(alfa(i+1)-alfa(i))+C(i+1,1)
        -C(i,1))*(alfa(i));
end
S(n)=(C(n,2)-C(n,1))*(alfa(n));
for i=1:n-1
    S(n+i)=1/2*(C(n-i,2)-C(n-i+1,2))*(alfa(n-i+1)-alfa(n-i))
        +(C(n-i,2)-C(n-i+1,2))*(alfa(n-i));
end

X=zeros(2*n,1);
for i=1:2*n;
    A=zeros(2*n-1,1);
    for k=1:2*n-i;
        A(k)=(S(k));
    end
end
```

```

    X(1+k)=sum(A);
end

Y=zeros(2*n,1);
for i=1:2*n-1;
    B=zeros(2*n-1,1);
    for k=1:i;
        B(k)=(S(2*n-k));
    end
    Y(1+k)=sum(B);
end

for i=1:n-1
    if X(i)<Y(2*n-i+1) && X(i+1)>Y(2*n-i)
        median_alfa=fsolve(@(m)X(i)+(alfa(i+1)-alfa(i))/(C(i+1,1)
-C(i,1))*(m^2/2-m*(C(i,1))-((C(i,1))^2)/2+(C(i,1))^2)
+(m-C(i,1))*alfa(i)-(alfa(i+1)-alfa(i))/(C(i+1,1)-C(i,1))
*(((C(i+1,1))^2)/2-C(i+1,1)*C(i,1)-(m^2)/2+m*C(i,1))
-(C(i+1,1)-m)*alfa(i)-Y(2*n-i),C(i,2));

    elseif Y(i)<X(2*n-i+1) && Y(i+1)>X(2*n-i)
        median_alfa=fsolve(@(m)X(2*n-i)+(alfa(i+1)-alfa(i))
/(C(i,2)-C(i+1,2))*(-m^2/2+m*C(i,2)+((C(i+1,2))^2)/2
-C(i,2)*C(i+1,2))+m-C(i+1,2))*alfa(i)-(alfa(i+1)
-alfa(i))/(C(i,2)-C(i+1,2))*((-C(i,2))^2)/2+(C(i,2))^2
+(m^2)/2-m*C(i,2))-(C(i,2)-m)*alfa(i)-Y(i),C(i,1));

    elseif X(i)==Y(2*n-i+1)
        median_alfa=C(i,1);
    end
end

```

```

elseif Y(i)==X(2*n-i+1)
    median_alfa=C(i,2);
end
end

if X(n)<Y(n+1) && X(n+1)>Y(n)
    median_alfa=(Y(n)-X(n)+C(n,2)+C(n,1))/2;
end

```

Příklad 3.6. *Dosažením do vzorce (62) dostaneme hodnotu mediánu fuzzy čísla D znázorněného na Obr. 10, a to $m_D = 5.71$.*

Medián fuzzy čísla C můžeme vyjádřit také v případě, kdy známe dvojice funkcí \underline{c} a \bar{c} , které nejsou lineární. Budeme postupovat stejným způsobem jako u výpočtu mediánu pro lineární fuzzy číslo a po částech lineární fuzzy číslo, tj. rozdělíme si fuzzy číslo na tři části S_1, S_2, S_3 , viz Obr. 13 a vypočítáme hodnoty jednotlivých obsahů dle následujících vztahů

$$S_1 = \underline{c}(1) - \int_0^1 \underline{c}(\alpha) d\alpha, \quad (66)$$

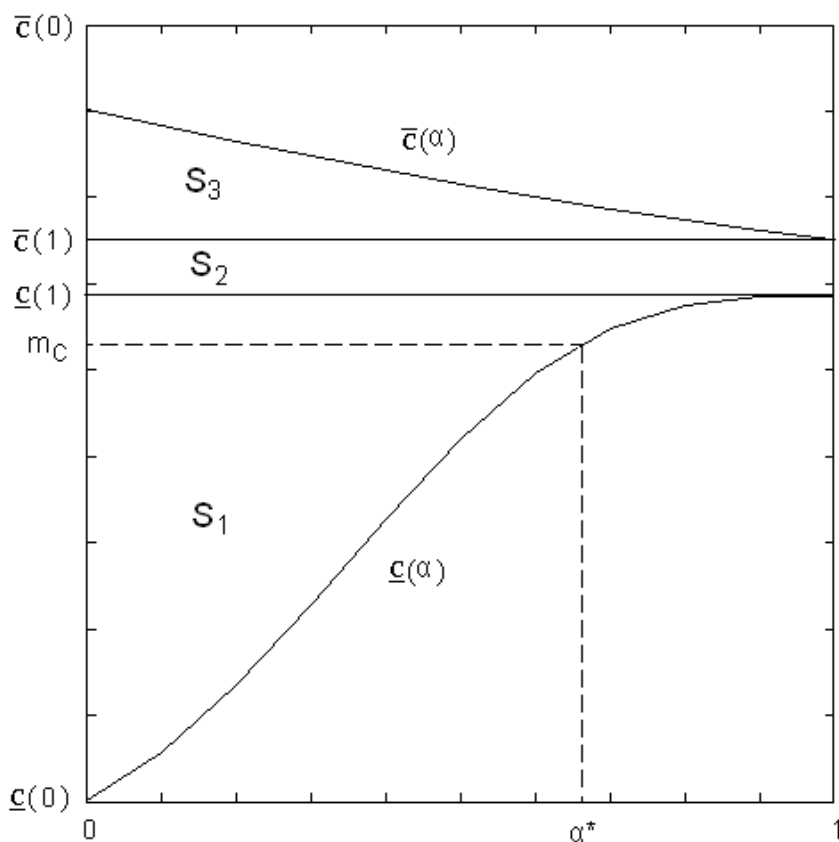
$$S_2 = \bar{c}(1) - \underline{c}(1), \quad (67)$$

$$S_3 = \int_0^1 \bar{c}(\alpha) d\alpha - \bar{c}(1). \quad (68)$$

Potom pro medián m_C fuzzy čísla $C = \{[\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$ platí následující vztahy

- Jestliže platí $S_1 > S_2 + S_3$, potom bude medián m_C ležet v intervalu (c_1, c_2) a určíme ho jako řešení následující rovnice

$$\int_0^{\alpha^*} (m_c - \underline{c}(\alpha)) d\alpha = \alpha^* (\underline{c}(1) - m_c) + \int_{\alpha^*}^1 (\underline{c}(1) - \underline{c}(\alpha)) d\alpha + S_2 + S_3, \quad (69)$$



Obrázek 13: Fuzzy číslo C

kde α^* je dáno vztahem

$$\alpha^* = \sup\{\alpha : \underline{c}(\alpha) < m_C\}. \quad (70)$$

- Jestliže platí $(S_1 < S_2 + S_3) \wedge (S_1 + S_2 > S_3)$, potom bude medián m_C ležet v intervalu (c_2, c_3) a určíme ho jako řešení následující rovnice

$$S_1 + \int_0^1 (m_c - \underline{c}(1)) d\alpha = \int_0^1 (\bar{c}(1) - m_c) d\alpha + S_3, \quad (71)$$

ze které můžeme vyjádřit vzorec pro výpočet mediánu

$$m_c = \frac{\bar{c}(1) + \underline{c}(1) + S_3 - S_1}{2}. \quad (72)$$

- Jestliže platí $S_1 + S_2 < S_3$, potom bude medián m_C ležet v intervalu (c_3, c_4) a určíme ho jako řešení následující rovnice

$$S_1 + S_2 + \alpha^*(m_c - \bar{c}(1)) + \int_{\alpha^*}^1 (\bar{c}(\alpha) - \bar{c}(1))d\alpha = \int_0^{\alpha^*} (\bar{c}(\alpha) - m_C)d\alpha, \quad (73)$$

kde α^* je dáno vztahem

$$\alpha^* = \sup\{\alpha : \bar{c}(\alpha) > m_C\}. \quad (74)$$

- Také může nastat případ, kdy $S_1 = S_2 + S_3$. Potom jsme již hodnotu mediánu m_C našli a je rovna hodnotě

$$m_c = \underline{c}(1), \quad (75)$$

analogicky může nastat případ, kde $S_1 + S_2 = S_3$, pro hodnotu mediánu potom platí vztah

$$m_c = \bar{c}(1). \quad (76)$$

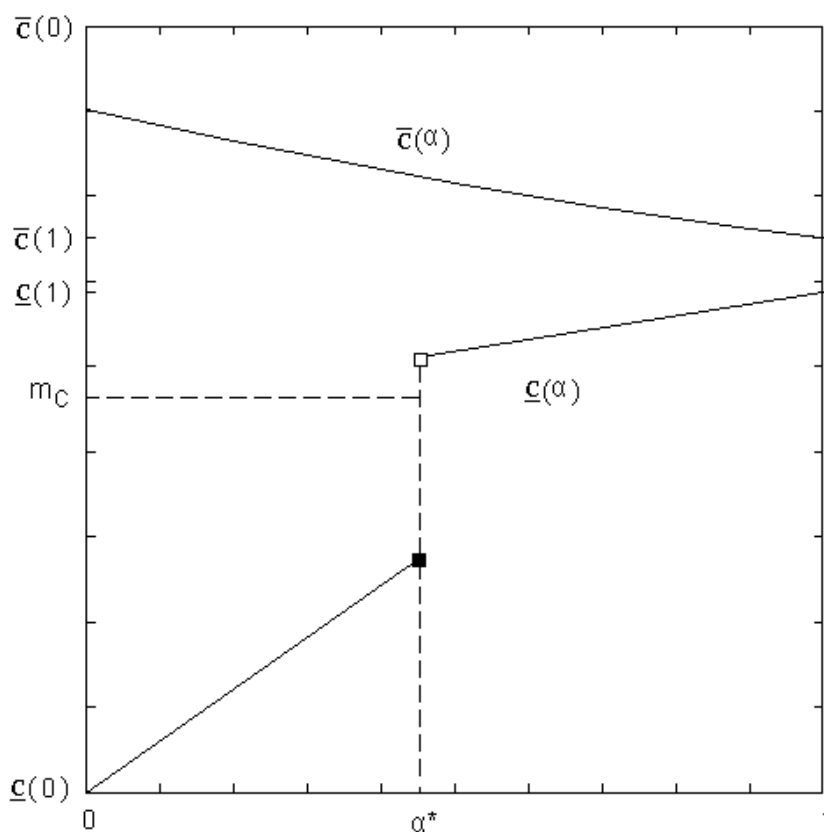
Poznámka 3.7. Při výpočtu mediánu fuzzy čísla můžeme narazit na problém, kdy dvojice funkcí \underline{c} a \bar{c} nejsou spojité, takový případ je znázorněn na Obr. 14. Proto je nutné α^* definovat podle výše uvedených vztahů (70) a (74).

Poznámka 3.8. Medián fuzzy čísla $C = \{[\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$, kde dvojice funkcí \underline{c} a \bar{c} nejsou lineární, můžeme určit tak, že dané obecné fuzzy číslo s libovolnou přesností aproximujeme po částech lineárním fuzzy číslem. Pro výpočet lze potom využít *m-file* `median_alfa.m`.

Nyní si ukážeme, jaký platí vztah mezi středovým bodem středního intervalu MOM_C a mediánem m_C . Nejdříve je nutné seznámit se s pojmem regulární fuzzy číslo.

Definice 3.5. Řekneme, že fuzzy číslo C je regulární, jestliže platí

$$m_C \in KerC. \quad (77)$$



Obrázek 14: Fuzzy číslo C

Věta 3.9. *Nechť je dáno fuzzy číslo C , které je regulární. Potom pro hodnoty MOM_C a m_C platí*

$$MOM_C = m_C. \quad (78)$$

Důkaz: Viz [11]. ■

V následujících větách jsou uvedeny vlastnosti mediánu při provádění aritmetických operací s fuzzy čísly.

Věta 3.10. *Nechť je dáno fuzzy číslo C a reálná konstanta $k \in \mathbb{R}$. Potom pro medián fuzzy čísla $m_{k \cdot C}$ platí následující vztah*

$$m_{k \cdot C} = k \cdot m_C. \quad (79)$$

Důkaz: Nechť je dáno fuzzy číslo $C = \{[\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$, důkaz si ukážeme pro případ, kdy $m_C \in (c_1, c_2)$, potom dosazením do vztahu pro výpočet mediánu (69) získáme

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha^*} (m_C - \underline{c}(\alpha))d\alpha &= \alpha^*(\underline{c}(1) - m_C) + \int_{\alpha^*}^1 (\underline{c}(1) - \underline{c}(\alpha))d\alpha + S_2 + S_3, \\ m_C \alpha^* - \int_0^{\alpha^*} \underline{c}(\alpha)d\alpha &= \alpha^* \underline{c}(1) - m_C \alpha^* + \underline{c}(1) - \alpha^* \underline{c}(1) - \int_0^{\alpha^*} \underline{c}(\alpha)d\alpha + \bar{c}(1) - \underline{c}(1) + \\ &\quad + \int_0^1 \bar{c}(\alpha)d\alpha - \bar{c}(1), \\ 2m_C \alpha^* &= \int_0^{\alpha^*} \underline{c}(\alpha)d\alpha - \int_{\alpha^*}^1 \underline{c}(\alpha)d\alpha + \int_0^1 \bar{c}(\alpha)d\alpha. \end{aligned}$$

Vzorec pro výpočet mediánu je pak dán vztahem

$$m_C = \frac{\int_0^{\alpha^*} \underline{c}(\alpha)d\alpha - \int_{\alpha^*}^1 \underline{c}(\alpha)d\alpha + \int_0^1 \bar{c}(\alpha)d\alpha}{2\alpha^*}$$

Nechť je dáno fuzzy číslo $k \cdot C = \{[k \cdot \underline{c}(\alpha), k \cdot \bar{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$, pak medián pro případ, kdy $m_{k \cdot C} \in [c_1, c_2]$, je dán vztahem

$$\begin{aligned} m_{k \cdot C} &= \frac{\int_0^{\alpha^*} k \cdot \underline{c}(\alpha)d\alpha - \int_{\alpha^*}^1 k \cdot \underline{c}(\alpha)d\alpha + \int_0^1 k \cdot \bar{c}(\alpha)d\alpha}{2\alpha^*} = \\ &= k \cdot \frac{\int_0^{\alpha^*} \underline{c}(\alpha)d\alpha - \int_{\alpha^*}^1 \underline{c}(\alpha)d\alpha + \int_0^1 \bar{c}(\alpha)d\alpha}{2\alpha^*} = k \cdot m_C \end{aligned}$$

Ekvivalentně bychom zjistili, že důkaz platí taky pro případ $m_C \in (c_2, c_3)$ a $m_C \in (c_3, c_4)$. ■

Věta 3.11. *Nechť jsou dána regulární fuzzy čísla $C = \{[\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$ a $D = \{[\underline{d}(\alpha), \bar{d}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$, potom pro medián m_{C+D} platí následující vztah*

$$m_{C+D} = m_C + m_D. \quad (80)$$

Důkaz: Důkaz plyne z Věty 3.9. ■

Poznámka 3.9. *Obecně pro medián fuzzy čísla ovšem neplatí $m_{C+D} = m_C + m_D$. Například u fuzzy čísel $C = \langle 3, 4, 7 \rangle$ a $D = \langle 1, 2, 3, 5 \rangle$ platí $m_C = 4.55$ a $m_D = 2.75$, to znamená, že $m_C + m_D = 7.30$, ale pro fuzzy číslo $C+D = \langle 4, 6, 7, 12 \rangle$ platí $m_{C+D} = 7.26$. Dále pro medián fuzzy čísla neplatí ani $m_{C \cdot D} = m_C \cdot m_D$. Součin dvou fuzzy čísel pro zjednodušení výpočtu aproximujeme po částech lineárním fuzzy číslem a pro hodnotu mediánu potom platí $m_{C \cdot D} = 14.04$ a srovnáním s hodnotou $m_C \cdot m_D = 12.51$ zjistíme, že se výrazně liší.*

3.4 Očekávaná hodnota fuzzy čísla

V této části se budeme zabývat další metodou defuzzifikace fuzzy čísel, jež se v anglicky psané literatuře nazývá *the expected value*, neboli očekávaná hodnota fuzzy čísla. Tento přístup se od předchozích metod liší tím, že se přihlíží k tomu, jakým způsobem bylo fuzzy číslo získáno.

V této práci se budeme zabývat pouze případem, kdy máme dáno fuzzy číslo $X \in \mathcal{F}_N([a, b])$ a funkci $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, jejíž fuzzifikací je zobrazení $g_F : \mathcal{F}_N([a, b]) \rightarrow \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$.

Abychom mohli nadefinovat očekávanou hodnotu fuzzy čísla, seznámíme se nejdříve se střední hodnotou funkce na daném intervalu.

Definice 3.6. Nechť jsou dány $a, b \in \mathbb{R}$, pro které platí $a \leq b$, a $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce integrovatelná na intervalu $[a, b]$, pak *střední hodnotou funkce g na intervalu $[a, b]$* označíme hodnotu $C_{[a,b]}(g)$ definovanou následovně

$$C_{[a,b]}(g) = \begin{cases} \frac{\int_a^b g(x) dx}{\int_a^b 1 dx} & a < b \\ g(a) & a = b. \end{cases} \quad (81)$$

Očekávanou hodnotu fuzzy čísla, která vznikne jako výstup fuzzy rozšíření funkce g , pak definujeme jako průměrnou hodnotu středních hodnot funkce g na α -řezech vstupního fuzzy čísla.

Definice 3.7. Nechť jsou dány $a, b \in \mathbb{R}$, pro které platí $a \leq b$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a fuzzy číslo $X \in \mathcal{F}_N([a, b])$. *Očekávanou hodnotou fuzzy čísla $g_F(X)$* nazveme reálné číslo $E[g_F(X)]$ definované

následujícím vztahem

$$E[g_F(X)] = \int_0^1 C_{X_\alpha}(g) d\alpha. \quad (82)$$

Poznámka 3.10. Pokud fuzzy číslo X není výstup získaný dosazením fuzzy čísla do funkce, bereme jako funkci pouze $g(x) = x$. Střední hodnota takového fuzzy čísla je tedy dána vzorcem

$$C_{X_\alpha}(g) = \frac{\int_{\underline{x}(\alpha)}^{\bar{x}(\alpha)} x dx}{\int_{\underline{x}(\alpha)}^{\bar{x}(\alpha)} 1 dx} = \frac{\frac{\underline{x}(\alpha)^2}{2} - \frac{\bar{x}(\alpha)^2}{2}}{\underline{x}(\alpha) - \bar{x}(\alpha)} = \frac{1}{2}(\underline{x}(\alpha) + \bar{x}(\alpha)). \quad (83)$$

Očekávaná hodnota je potom rovna

$$E[g_F(X)] = \int_0^1 \frac{1}{2}(\underline{x}(\alpha) + \bar{x}(\alpha)) d\alpha = \int_0^1 \frac{\underline{x}(\alpha) + \bar{x}(\alpha)}{2} d\alpha, \quad (84)$$

což odpovídá vzorci pro výpočet středového bodu středního intervalu.

V následujících příkladech si ukážeme výpočet očekávané hodnoty fuzzy čísla a porovnáme ji s ostatními metodami defuzzifikace.

Příklad 3.7. Necht $X = [0, 1]$ je uzavřený interval. Jedná se o speciální případ fuzzy čísla, tj. $X = \langle 0, 0, 1, 1 \rangle$. Předchozí metody defuzzifikace vycházející pouze z předpisu funkce příslušnosti by daly výsledek 0.5. Očekávaná hodnota fuzzy čísla přihlíží na způsob, jakým jsme výstupní fuzzy číslo získali. Hodnoty dvojice funkcí jsou rovny $\underline{x}(\alpha) = 0$ a $\bar{x}(\alpha) = 1$. Necht je dále dána funkce $g(x) = x^2$, potom dosazením fuzzy čísla X do funkce dostaneme fuzzy číslo $g_F(X) = X^2 = [0, 1]$. Očekávaná hodnota fuzzy čísla je dána následovně

$$EX^2 = \frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 dx} = \frac{1}{3}.$$

Ostatní zmíněné metody defuzzifikace ohodnotí výsledné fuzzy číslo $g_F(X)$ opět hodnotou 0.5, protože vycházejí z tvaru funkce příslušnosti daného fuzzy čísla.

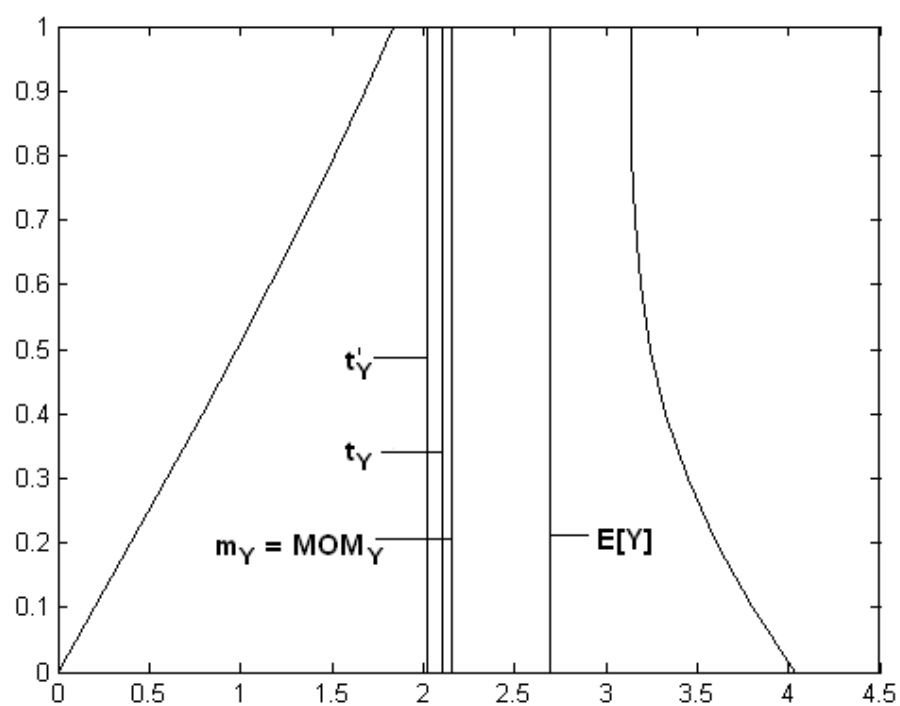
Příklad 3.8. Necht' je dáno fuzzy číslo $X = \langle 0, 1, 3, 5 \rangle$ a funkce $f(x) = x + \sin x$. Hodnoty dvojice funkcí jsou v tomto případě rovny $\underline{x}(\alpha) = \alpha$ a $\bar{x}(\alpha) = 5 - 2\alpha$. Střední hodnota funkce $f(x)$ na α -řezu X_α je dána jako

$$C_{X_\alpha}(f) = \frac{\int_\alpha^{5-2\alpha} (x + \sin x) dx}{\int_\alpha^{5-2\alpha} 1 dx} = \frac{\frac{3}{2}\alpha^2 + \cos\alpha + \frac{25}{2} - 10\alpha - \cos(2\alpha - 5)}{5 - 3\alpha}.$$

Očekávanou hodnotu výsledného fuzzy čísla $Y = g_F(X)$ potom dostaneme následovně

$$E[Y] = \int_0^1 C_{X_\alpha}(f) d\alpha = 2.69.$$

Medián fuzzy čísla Y vypočteme užitím vzorce (72) a je roven $m_Y = 2.16$. Fuzzy číslo Y je regulární, to znamená, že pro středový bod středního intervalu platí $MOM_Y = 2.16$. Těžiště spočítáme tak, že si vyčíslíme hodnoty $\underline{y}(\alpha_i), \bar{y}(\alpha_i)$ v konečně mnoha $\alpha_i = \{0, 0.01, \dots, 1\}$ a také pro $\alpha_i = \{0, 0.001, \dots, 1\}$ a aproximujeme výsledné fuzzy číslo po částech lineárním fuzzy číslem a spočítáme těžiště podle vzorce (48). Potom je těžiště výsledného fuzzy čísla dáno hodnotou $t_Y = 2.12$ pro $\alpha_i = \{0, 0.01, \dots, 1\}$ a $t'_Y = 2.01$ pro $\alpha_i = \{0, 0.001, \dots, 1\}$. Hodnota těžiště po částech lineárního fuzzy čísla se s rostoucím n , kde $i = 1, \dots, n$, blíží hodnotě těžiště původního fuzzy čísla Y . Tyto zmíněné metody defuzzifikace se tedy značně liší od očekávané hodnoty výsledného fuzzy čísla. Výsledné fuzzy číslo Y a jeho číselné charakteristiky jsou zobrazeny na Obr. 15.



Obrázek 15: Číselné charakteristiky výsledného fuzzy čísla Y

4 Aplikace metod defuzzifikace fuzzy čísel

V následující kapitole se zaměříme na využití metod defuzzifikace fuzzy čísel. Jednotlivé metody defuzzifikace fuzzy čísel můžeme využít při porovnání fuzzy čísel a dále si ukážeme využití defuzzifikace ve fuzzy regulátoru.

4.1 Porovnávání fuzzy čísel

Pokud fuzzy číslo nahradíme reálným číslem dle mediánu, těžiště, zobecněného těžiště nebo MOM, lze fuzzy čísla podle zvolené metody využívající tvaru funkce příslušnosti mezi sebou porovnávat. Pokud je fuzzy číslo dáno jako výsledek získaný dosazením původního fuzzy čísla do funkce, lze také využít zmiňované číselné charakteristiky fuzzy čísla, ale vhodnější metodou je očekávaná hodnota fuzzy čísla.

Definice 4.1. Nechť $d : \mathcal{F}_N(\mathbb{R}) \rightarrow R$ je metoda defuzzifikace, C a D jsou libovolná fuzzy čísla. Pak řekneme, že *fuzzy číslo C je menší nebo rovno než fuzzy číslo D* podle metody defuzzifikace d , značíme $C \leq_d D$, jestliže $d(C) \leq d(D)$.

Poznámka 4.1. Z definice tedy plyne, že *fuzzy čísla můžeme porovnávat podle všech zmíněných metod defuzzifikace:*

- *Fuzzy číslo C je menší nebo rovno fuzzy číslu D vzhledem k jejich MOM, značíme $C \leq_{MOM} D$, jestliže platí $MOM_C \leq MOM_D$.*
- *Fuzzy číslo C je menší nebo rovno fuzzy číslu D vzhledem k jejich těžištím, značíme $C \leq_t D$, jestliže platí $t_C \leq t_D$.*
- *Fuzzy číslo C je menší nebo rovno fuzzy číslu D vzhledem k jejich zobecněným těžištím řádu k , značíme $C \leq_{t_k} D$, jestliže platí $t_{kC} \leq t_{kD}$.*
- *Fuzzy číslo C je menší nebo rovno fuzzy číslu D vzhledem k jejich mediánům, značíme $C \leq_m D$, jestliže platí $m_C \leq m_D$.*
- *Fuzzy číslo C je menší nebo rovno fuzzy číslu D vzhledem k očekávané hodnotě, značíme $C \leq_E D$, jestliže platí $E[C] \leq E[D]$.*

Poznámka 4.2. Uspořádání fuzzy čísel podle zvolené metody defuzzifikace d je kvaziúspořádání. Např. různá fuzzy čísla mohou mít stejný medián, těžiště nebo MOM, to znamená, že může platit $A =_d B$ i když $A \neq B$, kde $A =_d B$ znamená, že $A \leq_d B \wedge B \leq_d A$. Relace \leq_d je úplná, z toho plyne, že všechna fuzzy čísla jsou pomocí této relace porovnatelná.

Z Poznámky 4.2 vyplývá, že při porovnávání fuzzy čísel můžeme narazit na problém rovnosti nestejných fuzzy čísel podle metod defuzzifikace. Takovým případem jsou například symetrická fuzzy čísla.

Definice 4.2. Fuzzy číslo C je symetrické, jestliže existuje $u \in \mathbb{R}$, takové, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

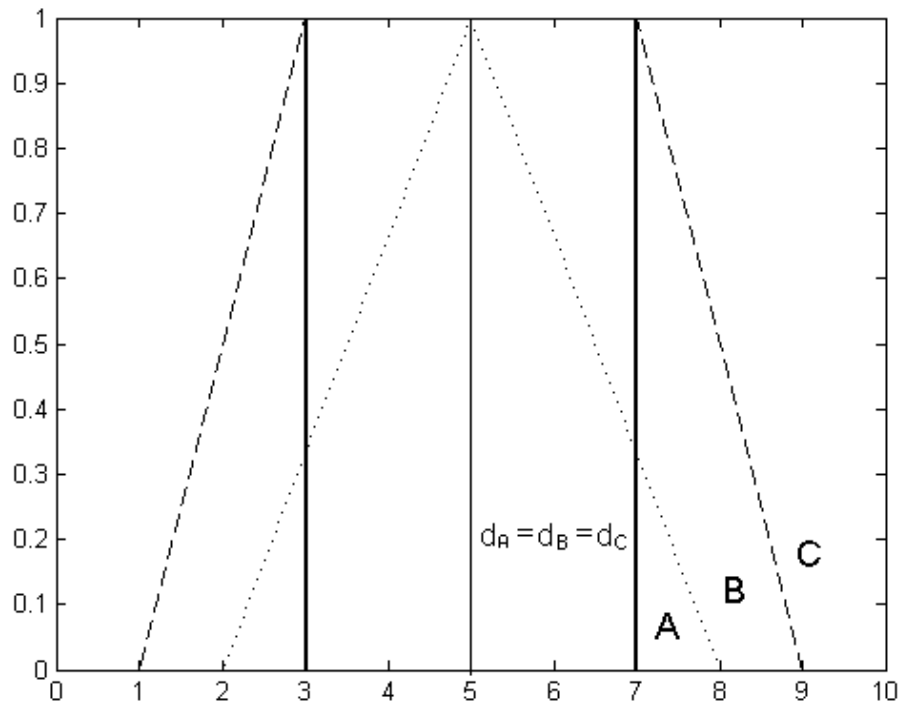
$$C(x) = C(2u - x). \quad (85)$$

Příklad 4.1. Symetrická fuzzy čísla A , B a C znázorněná na Obr. 16 jsou příklady nestejných fuzzy čísel se stejnými charakteristikami. U těchto fuzzy čísel nemůžeme podle ani jedné z těchto relací říci, které je větší.

Příklad 4.2. Porovnávání dvou fuzzy čísel C a D pomocí mediánu, těžiště, zobecněného těžiště libovolného řádu k a MOM nemusí dát vždy stejný výsledek. Na Obr. 17 jsou znázorněna fuzzy čísla $C = \langle 3, 4, 5, 11 \rangle$ a $D = \langle 1, 7, 8, 9 \rangle$. Pro středový bod středního intervalu C a D platí $MOM_C = 5.75$ a $MOM_D = 6.25$, takže $C <_{MOM} D$. Pro mediány fuzzy čísel platí $m_C = 5.80$ a $m_D = 6.20$, takže $C <_m D$. Těžiště fuzzy čísel C a D jsou $t_C = 6.07$ a $t_D = 5.93$, podle těžiště platí $C >_t D$. U zobecněného těžiště řádu $k = 1$ dostaneme $t_{1C} = 5.63$ a $t_{1D} = 6.34$, tedy $D >_{t_1} C$ a u zobecněného těžiště řádu $k = 4$ je $t_{4C} = 5.08$ a $t_{4D} = 6.92$, to znamená $D >_{t_4} C$. Na Obr. 17 lze vidět, že při rostoucím k se těžiště blíží ke středu jádra, protože zobecněné těžiště dává těmto hodnotám větší váhu.

V následujícím příkladu jsou porovnány po částech lineární fuzzy čísla podle MOM, těžiště a mediánu.

Příklad 4.3. Nechť jsou dána po částech lineární fuzzy čísla $C = \{[c(\alpha_i), \bar{c}(\alpha_i)] \mid \alpha_i \in [0, 1], i = 1, \dots, 3\}$ a $D = \{[d(\alpha_i), \bar{d}(\alpha_i)] \mid \alpha_i \in [0, 1], i = 1, \dots, 3\}$, která

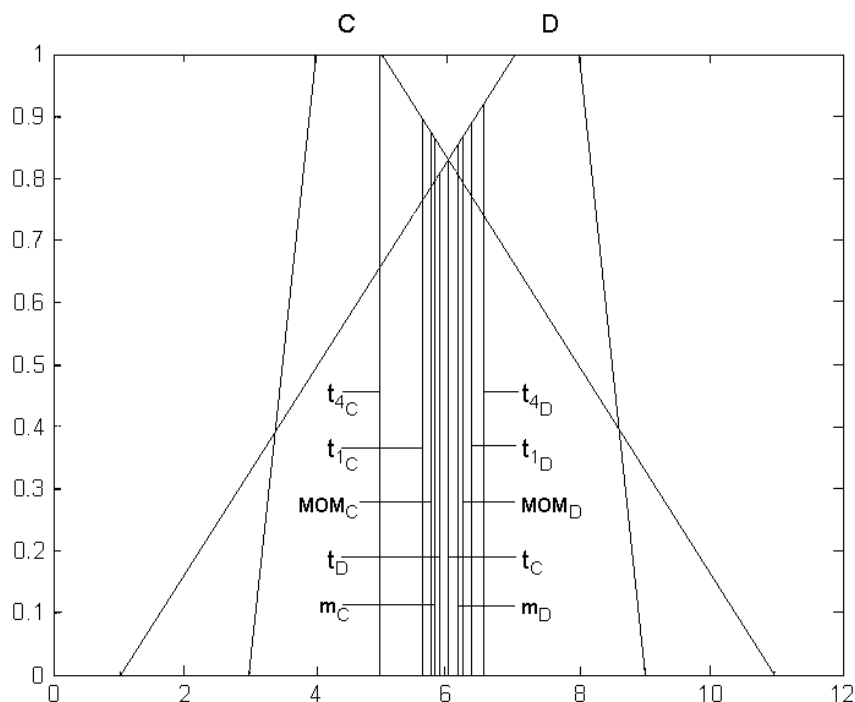


Obrázek 16: Symetrická fuzzy čísla A, B, C

jsou zakreslena na Obr. 18. Pro středový bod středního intervalu C a D platí $MOM_C = 6.19$ a $MOM_D = 6.44$, takže $C <_{MOM} D$. Pro mediány fuzzy čísel platí $m_C = 6.28$ a $m_D = 6.40$, takže $C <_m D$. Těžiště fuzzy čísel C a D jsou $t_C = 6.52$ a $t_D = 6.30$, podle těžiště platí $C >_t D$. Na Obr. 18 jsou znázorněna po částech lineární fuzzy čísla C a D a také jejich číselné charakteristiky.

V následujícím příkladu jsou porovnány fuzzy čísla podle jejich očekávané hodnoty.

Příklad 4.4. Nechť je dán uzavřený interval $X = [0, 2]$, jedná se o fuzzy číslo $X = \langle 0, 0, 2, 2 \rangle$. Nechť jsou dále dány funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = 2x$. Dosazením fuzzy čísla X do funkce $f(x)$ získáme fuzzy číslo $f_F(X) = \langle 0, 0, 4, 4 \rangle$, jedná se opět o uzavřený interval. Dosazením fuzzy čísla X do funkce $g(x)$ získáme fuzzy číslo $g_F(X) = \langle 0, 0, 4, 4 \rangle$, opět se jedná o uzavřený interval. Je tedy zřejmé, že se jedná o stejná fuzzy čísla, ale pro jejich očekávané hodnoty platí $E[f_F(X)] = 1.3$



Obrázek 17: Těžiště, zobecněné těžiště řádu $k = 1$ a $k = 4$, medián a MOM fuzzy čísla C a D

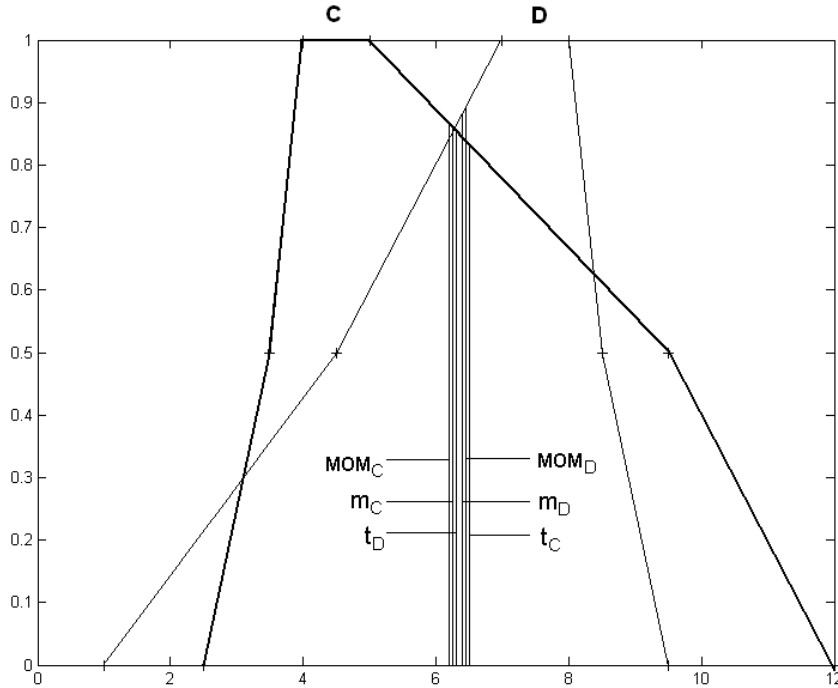
a $E[g_F(X)] = 2$. Z toho plyne, že stejná fuzzy čísla mohou mít různou očekávanou hodnotu. Ostatní zmíněné metody defuzzifikace ohodnotí výsledná fuzzy čísla $f_F(X)$ a $g_F(X)$ hodnotou 2.

V následujícím příkladu je ukázáno, jak můžeme využít očekávanou hodnotu fuzzy čísla k řešení praktických úloh.

Příklad 4.5. Zajímá nás očekávaná hodnota naspořené částky S . Chceme si založit spoření na dobu $n = 6$ let. Ukládaná částka bude činit $x = 20000$ Kč ročně. Úrokové období i je zde roční. Jedná se tedy o polhůtní roční dlouhodobé spoření s ročním úročením, u kterého budoucí hodnotu získáme vztahem

$$S = x \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \quad (86)$$

Budeme uvažovat, že i se v jednotlivých letech může měnit a neznáme jej



Obrázek 18: Těžiště, medián a MOM po částech lineárních fuzzy čísel C a D

dopředu. Potom je potřeba pro výpočet celkové budoucí hodnoty určit průměrnou úrokovou míru za celou dobu spoření. Expertně ji odhadneme pomocí lineárního fuzzy čísla, úroková míra může mít tvar $I = \langle 0, 2.5, 4 \rangle$, hodnoty jsou uvedené v procentech. Dvojice funkcí budou tedy tvaru $\underline{i}(\alpha) = 2.5\alpha$ a $\bar{i}(\alpha) = 4 - 1.5\alpha$. V tomto případě také naspořená částka bude fuzzy číslo $S_F(I)$ a má tvar

$$S_F(I) = \left\{ 20000 \cdot \frac{(1 + 2.5\alpha)^6 - 1}{2.5\alpha}, 20000 \cdot \frac{(1 + 4 - 1.5\alpha)^6 - 1}{4 - 1.5\alpha}, \alpha \in [0, 1] \right\}. \quad (87)$$

Očekávaná hodnota naspořené částky je $E[S_F(I)] = 126\,975.47$. Pokud nebudeme uvažovat, jak jsme naspořenou částku získali, můžeme určit i ostatní číselné charakteristiky výsledného fuzzy čísla $S_F(I)$. Středový bod středního intervalu je dán hodnotou $MOM_{S_F(I)} = 127\,012.79$. Těžiště a medián fuzzy čísla $S_F(I)$ určíme aproximací po částech lineárním fuzzy číslem pro $\alpha_i = \{0, 0.01, 0.02, \dots, 1\}$, tedy platí $t_{S_F(I)} = 126\,780.68$ a $m_{S_F(I)} = 126\,974.72$. Podle uvedených číselných

charakteristik tedy platí $t_{S_F(I)} < m_{S_F(I)} < E[S_F(I)] < MOM_{S_F(I)}$.

Kromě pohyblivé úrokové míry je nám také nabídnuta pevná úroková míra $i = 2.2\%$. Budoucí hodnota naspořené částky je $S = 126\,796.82$. Pokud zvolíme pevnou úrokovou míru, víme předem jakou naspořenou částku za šest let dostaneme. Pokud ale zvolíme pohyblivou úrokovou míru, je možnost, že daná částka bude větší, ale může být i menší než při pevné úrokové míře. Jestliže tuto hodnotu srovnáme s metodami defuzzifikace pro případ pohyblivé úrokové míry, potom platí, že naspořená částka při pevné úrokové míře je větší než těžiště a menší než medián, MOM a očekávaná hodnota výsledného fuzzy čísla $S_F(I)$. Naspořená částka při pevné úrokové míře $i = 2.2\%$ dává lepší výsledek pouze při porovnání s těžištěm. Nyní již záleží na rozhodovateli, které z uvedených metod dá přednost. Já bych zvolila první variantu při pohyblivé úrokové míře $I = \langle 0, 2.5, 4 \rangle$, protože očekávaná hodnota naspořené částky přihlíží k tomu, jak jsme dané fuzzy číslo získali.

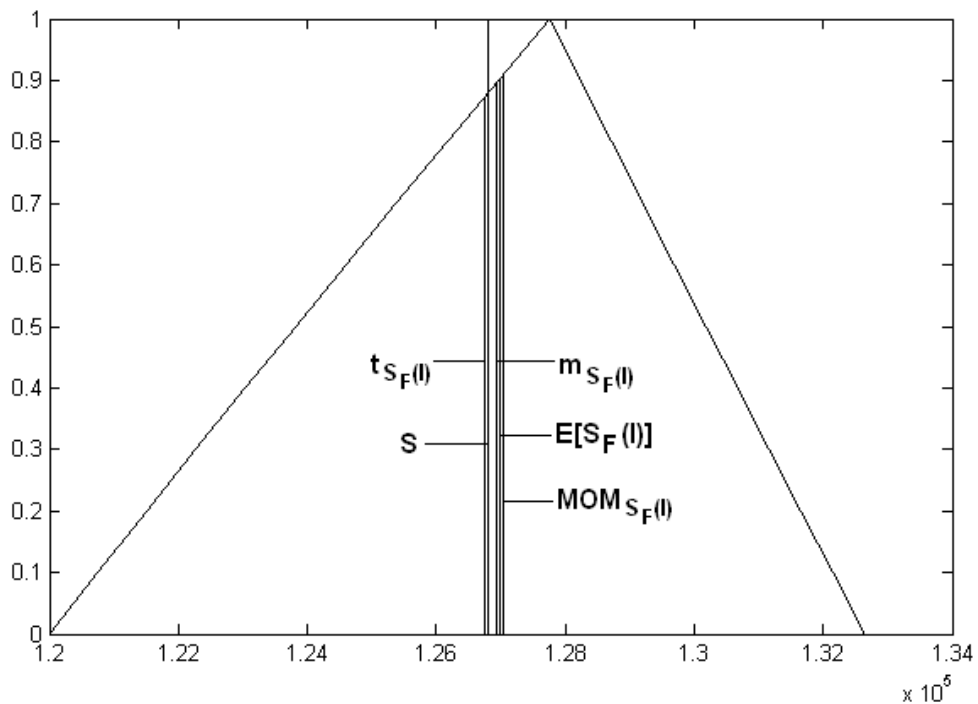
Na Obr. 19 je názorně zobrazena naspořená částka S při pevné úrokové míře $i = 2.2\%$ a naspořená částka $S_F(I)$ při pohyblivé úrokové míře $I = \langle 0, 2.5, 4 \rangle$ a její očekávaná hodnota a ostatní metody defuzzifikace.

4.2 Fuzzy regulátor

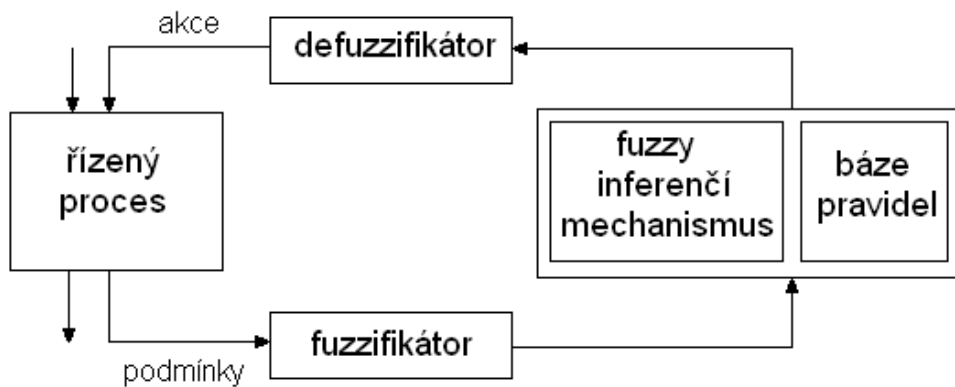
V následující podkapitole se zaměříme na fuzzy regulátor, jehož důležitou součástí je defuzzifikace výstupních proměnných. V této podkapitole si princip fuzzy regulátoru pouze nastíníme a názorně si ho ukážeme na příkladě. Podrobněji je tato problematika zpracovaná např. v literatuře [9, 10].

Fuzzy regulátor je součástí řešení problému automatického řízení procesu. Základním principem fuzzy regulátoru je převedení numerických hodnot pomocí jazykových proměnných, tzv. fuzzifikace, dále inferenční mechanismus zpracovávající fuzzy pravidla k odvození fuzzy akčního zásahu, a na závěr je potřeba tento fuzzy výstup převést na konkrétní akční zásah, aby daný přístroj věděl, co má udělat, tedy defuzzifikace. Na Obr. 20 je znázorněn princip fuzzy regulátoru.

Postup fuzzy regulátoru se tedy skládá z následujících částí:



Obrázek 19: Číselné charakteristiky naspořené částky $S_F(I)$



Obrázek 20: Princip fuzzy regulátoru

1. Identifikace vstupních a výstupních proměnných

Nejdříve určíme bázecké proměnné x_1, \dots, x_n, y , kde x_1, \dots, x_n představují vstupní proměnné a y výstupní proměnnou, a k nim přiřadíme příslušné

jazykové proměnné X_1, \dots, X_n, Y , aby bylo pokryto celé univerzum. Například základní proměnná *teplota* daná intervalem $[-10, 100]_{\circ C}$ má nespočetně mnoho hodnot a její příslušná jazyková proměnná má spočetně mnoho hodnot, a to {mrazivo, zima, teplo, horko, vedro}.

2. Fuzzifikace vstupních dat

Fuzzifikovat vstupní data lze formálně, kde dané reálné hodnotě x' přiřadíme stupeň příslušnosti 1, potom $X' = \{1|_{x'}\}$. Nebo lze fuzzy číslo získat reálně tak, že platí $X' = \langle a, x', b \rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $SuppX' = [a, b]$.

3. Definování báze pravidel

Báze pravidel se modeluje pomocí fuzzy relace a představuje hodnotící funkci vyjadřující vztah mezi vstupními jazykovými proměnnými X_1, \dots, X_n a výstupní jazykovou proměnnou Y . Nejčastěji se určuje expertně na základě znalosti vztahu mezi základními proměnnými.

4. Výběr inferenčního mechanismu

Pokud známe hodnotící funkci vyjádřenou bází pravidel, potřebujeme dále vědět, jak dosazovat hodnoty vstupů do hodnotící funkce zadané jazykově. Nejčastěji se používá Mamdaniho nebo Sugenuv přístup. U Mamdaniho přístupu výstupem nemusí být fuzzy číslo, proto se zaměříme na Sugenuv přístup, abychom mohli výstupní fuzzy číslo defuzzifikovat.

5. Defuzzifikace fuzzy výstupů

Posledním krokem fuzzy regulátoru je defuzzifikace výstupní proměnné. Zde můžeme využít číselné charakteristiky fuzzy čísel zmíněné v předchozí kapitole.

V následujícím příkladu si ukážeme základní postup řešení fuzzy regulátoru a zaměříme se na poslední krok fuzzy regulátoru, a to defuzzifikaci výstupních proměnných.

Příklad 4.6. *Cílem je určit počet pracovníků, kterých je potřeba při řešení daného problému. Budeme uvažovat dvě vstupní proměnné, jež nám budou ovliv-*

ňovat výsledný počet pracovníků. První vstup X_1 představuje náročnost daného úkolu. Druhý vstup X_2 je doba, kterou máme na vypracování úkolu. Výstupem Y je počet pracovníků.

$$X_1 = (\text{úkol}, \{\text{lehký}, \text{střední}, \text{těžký}\}, [0, 100]_{\%}),$$

$$X_2 = (\text{doba}, \{\text{krátká}, \text{střední}, \text{dlouhá}\}, [0, 30]_{\text{dny}}),$$

$$Y = (\text{počet pracovníků}, \{\text{málo}, \text{středně}, \text{hodně}\}, [0, 20]_{\text{pracovníci}}).$$

Na Obr. 21 jsou graficky znázorněny jazykové proměnné.

Dále expertně nadefinujeme bázi pravidel. Jednotlivé pravidla jsou uvedeny v následující tabulce.

X_2/X_1	lehký	průměrný	těžký
krátká	středně	hodně	hodně
střední	málo	středně	hodně
dlouhá	málo	málo	středně

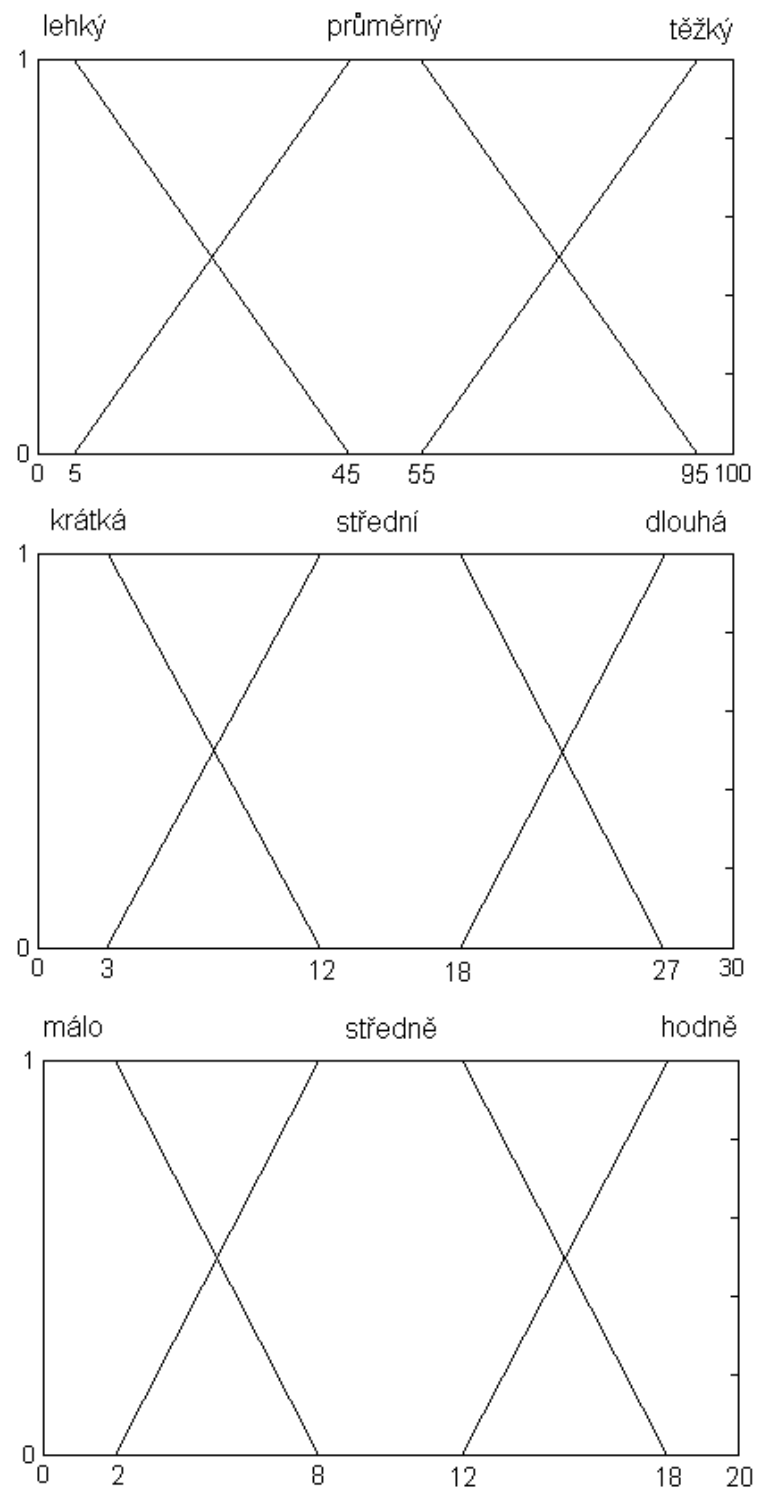
Tabulka 1: Báze pravidel

Naším úkolem je zjistit, kolik pracovníků máme přiřadit k řešení konkrétního problému. Náročnost úkolu odhadujeme asi na 40%, první vstup je dán tedy v podobě trojúhelníkového fuzzy čísla $X'_1 = \langle 30, 40, 50 \rangle$. Na zpracování daného úkolu máme čas sedm dní, druhý vstup je reálné číslo $X'_2 = 7$.

Dále je potřeba vědět, jak dosazovat vstupní hodnoty do báze pravidel. Musíme zvolit vhodný inferenční mechanismus. Vybereme metodu zobecněný Sugeno, aby výstupem bylo fuzzy číslo a mohli jsme ho dále defuzzifikovat. Výsledné fuzzy číslo získáme váženým průměrem podle následujícího vztahu

$$Y^Z = \frac{\sum_i h_i Y_i}{\sum_i h_i}, \quad (88)$$

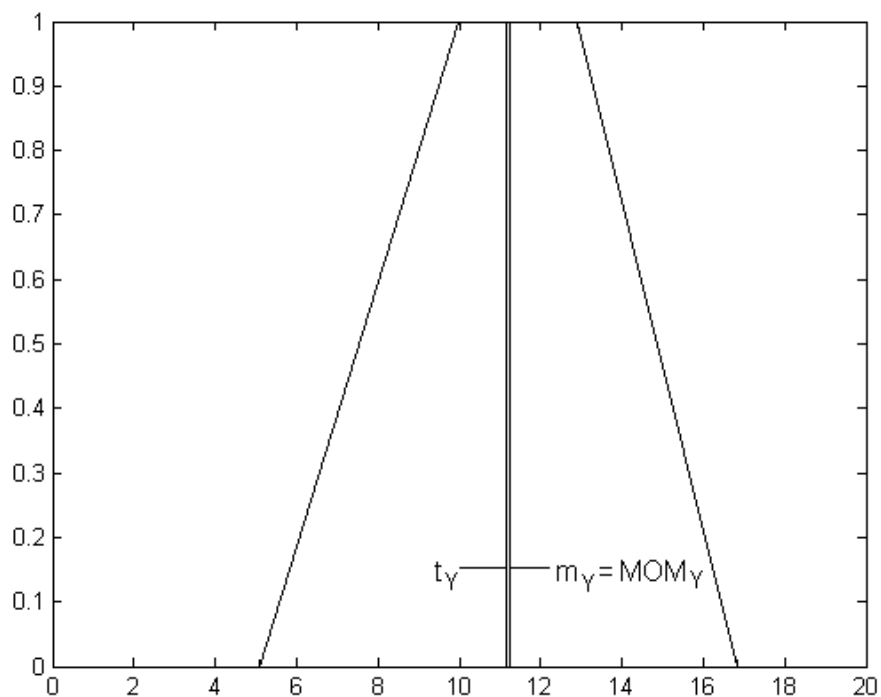
kde h_i je váha i -tého pravidla určená vztahem



Obrázek 21: Jazykové proměnné

$$h_i = \sup_{x_1, x_2} \min\{\min\{X'_1(x_1), X'_2(x_2)\}, \min\{X_{i1}(x_1), X_{i2}(x_2)\}\}. \quad (89)$$

Výstupní fuzzy číslo má tvar $Y = \langle 5.10, 9.98, 12.91, 16.82 \rangle$. Nyní ještě potřebujeme vědět, co tohle fuzzy číslo představuje, abychom mohli přiřadit konkrétní počet pracovníků. Přejdeme k poslednímu kroku fuzzy regulátoru, a to je defuzzifikace výstupní fuzzy proměnné. Těžiště výstupního fuzzy čísla je dáno hodnotou $t_Y = 11.15$, hodnota mediánu je $m_Y = 11.20$, protože se jedná o regulární fuzzy číslo pro hodnotu středového bodu středního intervalu rovněž platí $MOM_Y = 11.20$. Výstupní fuzzy číslo a jeho jednotlivé číselné charakteristiky jsou znázorněny na Obr. 22. Pokud vypočítané hodnoty zaokrouhlíme matematicky, pro všechny bude platit $d_Y = 11$. Hodnoty uvedených metod defuzzifikace se tedy neliší, podle všech zmiňovaných metod bychom se jednoznačně rozhodli pro 11 pracovníků.



Obrázek 22: Výstupní fuzzy číslo a jeho číselné charakteristiky

5 Závěr

Hlavním cílem diplomové práce bylo vysvětlit jednotlivé metody defuzzifikace fuzzy čísel, zjistit jejich matematické vlastnosti a ukázat jejich praktické využití. Jednotlivé metody defuzzifikace fuzzy čísel byly ilustrovány na názorných příkladech.

Zabývali jsme se metodami defuzzifikace využívajícími tvaru funkce příslušnosti, a to středový bod středního intervalu, těžiště, zobecněné těžiště a medián. U těchto metod defuzzifikace byly převzaty obecné vzorce z literatury [1, 9]. Hlavní náplní diplomové práce pak bylo odvození vztahů pro zjednodušený výpočet jednotlivých metod defuzzifikace lineárního fuzzy čísla zadaného pomocí čtveřici význačných bodů a po částech lineárního fuzzy čísla, kdy známe jen krajní hodnoty některých α -řezů. U metod defuzzifikace po částech lineárního fuzzy čísla jsem pro zjednodušení výpočtu vytvořila funkce v programu Matlab. Dále jsme u středového bodu středního intervalu, těžiště a mediánu zkoumali, jaké vlastnosti splňují metody defuzzifikace při provádění aritmetických operací s fuzzy čísly. Zjistili jsme, že nejlepší vlastnosti splňuje středový bod středního intervalu, protože na rozdíl od ostatních metod u něj navíc platí, že MOM součtu fuzzy čísel je roven součtu MOM jednotlivých fuzzy čísel. Dále jsme se seznámili s metodou defuzzifikace nazvané očekávaná hodnota fuzzy čísla a vysvětlili její výhody oproti ostatním metodám defuzzifikace. Očekávaná hodnota fuzzy čísla přihlíží k tomu, jak jsme dané fuzzy číslo získali. V další části jsme si ukázali, jak lze metody defuzzifikace využít při porovnávání fuzzy čísel. Na praktických příkladech jsme si znázornili, že porovnávání fuzzy čísel nemusí dát stejný výsledek a záleží na rozhodovateli, které metodě dá přednost. Dále jsme si na ilustrativním příkladě ukázali využití metod defuzzifikace ve fuzzy regulátoru.

Při zpracovávání diplomové práce jsem využívala program Matlab. Zakreslovala jsem v tomto programu ilustrační obrázky pro názorné vysvětlení daného problému. Také jsem v programu Matlab vytvářela algoritmy pro jednoduchý výpočet metod defuzzifikace a prováděla jsem další pomocné výpočty při řešení konkrétních příkladů. Při vytváření práce jsem si prohloubila své znalosti s tímto

programem. Celou práci jsem psala v typografickém programu L^AT_EX.

Díky své diplomové práci jsem si prohloubila vědomosti o fuzzy číslech a jednotlivých metodách defuzzifikace. Věřím, že své znalosti v oblasti fuzzy čísel pro me budou mít přínos i nadále a také, že má diplomová práce bude přínosem i pro ostatní.

Literatura

- [1] Dubois, D. a kol., *Fuzzy interval analysis*, in: D. Dubois, H. Prade (Eds.), *Fundamentals of fuzzy sets*, Kluwer Academic Publishers, Boston-London-Dordrecht, 2000, str. 483-582.
- [2] Fullér, R., Majlender P., *On interactive fuzzy numbers*, *Fuzzy Sets and Systems* 143, 2004, str. 355–369.
- [3] Hong, D. H.: *Note on the expected value of a function of a fuzzy variable*, *J. Appl. Math. & Informatics* Vol. 27, 2009, str. 773-778.
- [4] Hort, D., Rachůnek, J.: *Algebra I.*, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc 2005, Dotisk 1. vydání.
- [5] Klir, G.J., Yuan, B.: *Fuzzy sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice Hall, New Jersey 1996.
- [6] Krutský, F.: *Algebra I.*, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc 1995.
- [7] Novosádová, L.: *Metody porovnávání fuzzy čísel*, Bakalářská práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc 2011.
- [8] Pavlačka, O.: *Fuzzy metody rozhodování*, Disertační práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc 2007.
- [9] Talašová, J.: *Fuzzy metody vícekritériálního hodnocení a rozhodování*, Univerzita Palackého v Olomouci 2003, 1.vydání.
- [10] Von Altrock, C.: *Fuzzy Logic and NeuroFuzzy Applications Explained*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [11] Zhao, R., Govind R.: *Defuzzification of fuzzy intervals*, *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, str. 45-56.