Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Využití logaritmické a exponenciální funkce v různých vědních oborech

Vypracoval: Radek Krulec
Vedoucí práce: Mgr. Hana Štěpánková, Ph.D.

České Budějovice 2016

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma „Využití logaritmické a exponenciální funkce v různých vědních oborech“ jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 18. 4. 2016 ....

Poděkování

Chtěl bych poděkovat paní Mgr. Haně Štěpánkové, Ph.D. za odborné vedení mé bakalářské práce, cenné rady, velice dobrou komunikaci a čas, který mi věnovala. Rád bych také poděkoval rodině a přátelům, kteří při mně po celou dobu studia stáli a podporovali mě.

Anotace

Bakalářská práce je věnována praktickému využití logaritmické a exponenciální funkce v různých oborech. Cílem práce je prostudovat reálné situace, ve kterých se setkáváme s logaritmickými a exponenciálními závislostmi a vytvořit soubor aplikačních příkladů. Práce by měla ukázat, jak důležité místo zaujímá matematika v různých vědních oborech, a kde všude je jí potřeba.

Klíčová slova: aplikace, exponenciální funkce, logaritmická funkce, sbírka příkladů

Annotation

This bachelor thesis discusses practical use of logarithmic and exponential function in different fields. The aim of this thesis is read up real situations in which we deals with logarithmic and exponential dependences and create a file of application examples. This thesis should show how important is task of mathematics in various branches of science and in which branches mathematics is needed.

Keywords: application, exponential function, logarithmic function, collection of examples

Obsah

1 ÚVOD

Předkládaná bakalářská práce ukazuje praktické využití logaritmické a exponenciální funkce v různých oborech. Hlavním cílem této práce je vytvořit sbírku aplikačních příkladů, ve kterých se využívá logaritmické a exponenciální závislosti.

Při výběru bakalářské práce jsem se snažil zvolit takové téma, které by mě zajímalo a zároveň bylo využitelné v praxi. Z tohoto důvodu jsem se, jako budoucí učitel, rozhodl vytvořit souhrn příkladů. Tato sbírka by mohla sloužit nejen vyučujícím matematiky, jako zdroj příkladů z reálných situací, ale také studentům, kteří si mohou snáze uvědomit, kde všude se lze s problematikou logaritmických a exponenciálních funkcí setkat.

Práce je rozdělena do dvou částí - teoretické a aplikační. V teoretické části jsou nastíněny základní vlastnosti exponenciální a logaritmické funkce, se kterými se studenti poprvé setkávají na střední škole. Dále jsou zde uvedena pravidla pro počítání s logaritmy, kterých se bude v této práci využívat.

Stěžejní částí je kapitola Aplikace. V té jsou shrnuty nejvýznamnější obory, ve kterých se objevují právě exponenciální a logaritmické závislosti. Tyto obory jsou systematicky rozděleny do pěti charakteristických oblastí využití - fyziky, chemie, biologie, geografie a finanční matematiky. Pro lepší názornost jsou některé příklady doplněné grafy či obrázky. Vedle vyřešených vzorových příkladů by měl být hlavním přínosem bakalářské práce především dostatek úloh k procvičování.

2 TEORETICKÁ ČÁST

V této části se seznámíme s logaritmickou a exponenciální funkcí, uvedeme si jejich základní vlastnosti a ukážeme si, jak vypadají grafy těchto funkcí.

2.1 Exponenciální funkce

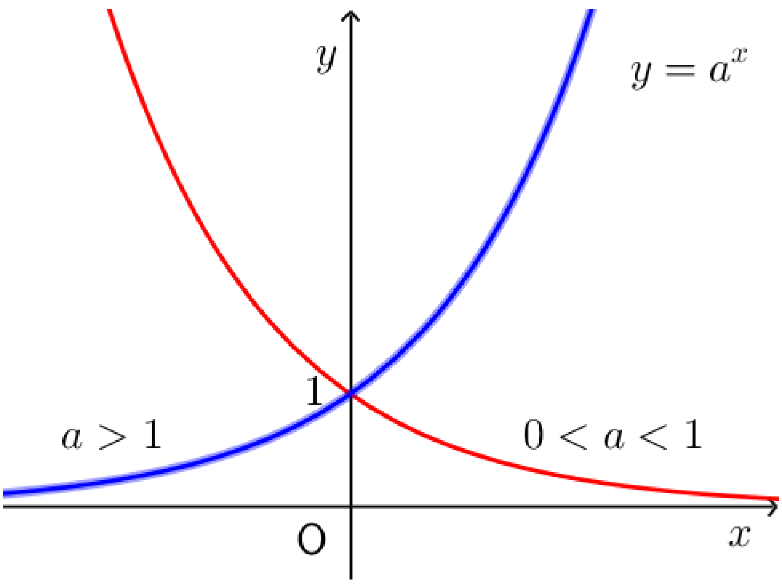
Exponenciální funkce je každá funkce s předpisem:

$$y = a^x, \tag{1}$$

kde $a > 0$, $a \neq 1$. Kdyby bylo $a = 1$ (tj. $y = 1^x = 1$), nejednalo by se o exponenciální funkci, nýbrž o funkci konstantní a grafem takovéto funkce je přímka.

Číslo a se nazývá základ exponenciální funkce a jeho hodnota ovlivňuje monotonii funkce. Exponenciální funkce je:
pro $a \in (0, 1)$ klesající,
pro $a \in (1, \infty)$ rostoucí (viz Obrázek 1).

Grafem funkce o předpisu (1) je exponenciální křivka a platí, že definičním oborem této funkce jsou všechna čísla reálná ($D = R$), zatímco oborem hodnot jsou pouze reálná čísla větší než 0 ($H = (0, \infty)$). ([5], s. 101)



Obrázek 1: Exponenciální funkce

Významným speciálním případem exponenciální funkce je funkce $y = e^x$, kde základem je tzv. Eulerovo číslo $e = 2{,}71828...$ ([14], s. 13).

2.2 Logaritmická funkce

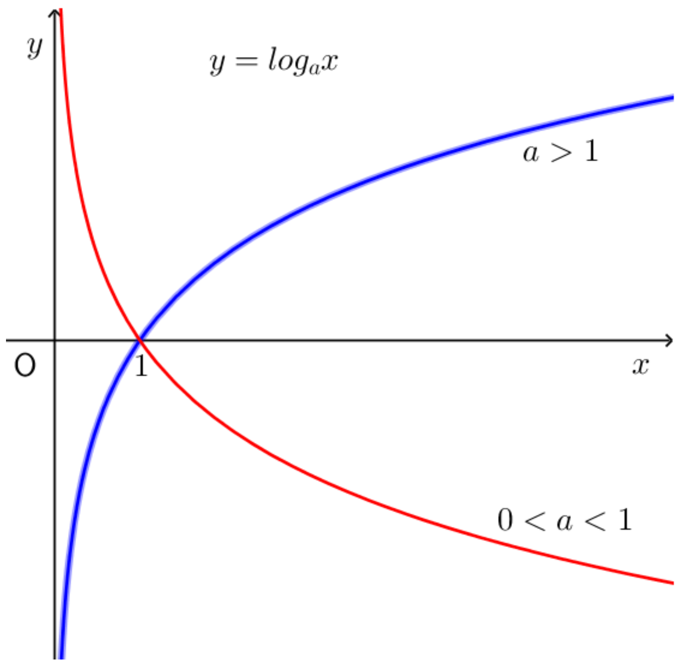
Logaritmická funkce je každá funkce s předpisem:

$$y = log_a x, \tag{2}$$

kde $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Číslo a se nazývá základ logaritmické funkce a jeho hodnota ovlivňuje monotonii funkce. Funkce (2) je:
pro $a \in (0, 1)$ klesající,
pro $a \in (1, \infty)$ rostoucí (viz Obrázek 2).

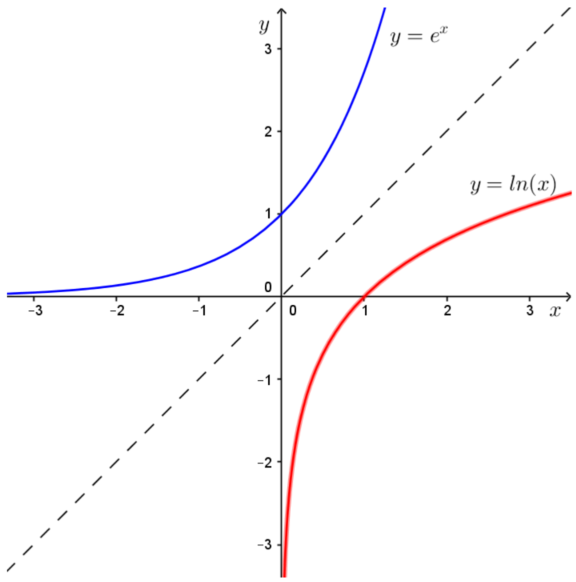
Grafem funkce o předpisu (2) je logaritmická křivka a platí, že definičním oborem této funkce jsou všechna reálná čísla větší než 0 ($D = (0, \infty)$), zatímco oborem hodnot jsou všechna reálná čísla ($H = R$). ([5], s. 103)



Obrázek 2: Logaritmická funkce

Vzhledem k tomu, že exponenciální funkce je prostá (tj. v celém definičním oboru je ryze monotonní), existuje k ní funkce inverzní, kterou je právě funkce logaritmická. Totéž platí i naopak ([5], s. 101).

Pro grafy těchto dvou funkcí musí tedy platit, že budou souměrné podle osy I. a III. kvadrantu tj. přímky $y = x$ ([13], s. 88).



Obrázek 3: Exponenciála a přirozený logaritmus

Pro řešení příkladů, které jsou zpravidla charakterizovány rovnicemi, je nezbytné umět operovat s logaritmy.

Logaritmus kladného čísla y při kladném základu a ($a \neq 1$) je takové číslo, kterým musíme umocnit základ, abychom dostali číslo y (zapisujeme $x = log_a y$). Platí tedy:

$$x = log_a y \Leftrightarrow y = a^x,$$

kde $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ ([5], s. 102).

Pravidla pro počítání s logaritmy:

Při úpravě logaritmických rovnic je zapotřebí umět pracovat s jistými pravidly. Ta základní jsou uvedena níže. ([14], s. 14)

Pro všechna $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ A > 0,\ B > 0,\ r \in \mathrm{R}$ platí:

$$log_a A + log_a B = log_a (A \cdot B),$$

$$log_a A - log_a B = log_a \left(\frac{A}{B}\right),$$

$$r \cdot log_a A = log_a A^r,$$

$$log_a a^r = r,$$

$$a^{log_a A} = A.$$

V některých případech se používá pro logaritmické funkce speciální značení. Pokud pracujeme s logaritmickou funkcí o základu 10, mluvíme o tzv. dekadickém logaritmu (příslušnou funkci zapisujeme $y = log\,x$). Je-li základem logaritmické funkce Eulerovo číslo e, mluvíme o přirozeném logaritmu a příslušnou funkci zapisujeme $y = ln\,x$ ([14], s. 14).

3 APLIKACE

Jak již bylo v úvodu nastíněno, stěžejní částí jsou právě aplikace. Exponenciální nebo logaritmický průběh se ukazuje např. u intenzity záření, hladiny intenzity zvuku, poločasu rozpadu, určování hodnoty pH, růstu populace, změny tlaku vzduchu s rostoucí nadmořskou výškou, přirozeného přírůstku, a dokonce také u složeného úrokování. Všemi těmito obory využití se nyní budeme zabývat.

Pro přehlednost jsou vymezené oblasti, ve kterých se setkáváme s exponenciálními a logaritmickými závislostmi. Tomu odpovídají i podkapitoly - fyzika, chemie, biologie, geografie a finanční matematika. Některé obory je však složité zařadit, jelikož se nachází na rozhraní dvou oblastí, např. poločas rozpadu radioaktivních prvků bývá zahrnován jak do fyziky, tak do chemie. Obdobně je tomu i u tlaku vzduchu, se kterým se můžeme setkat ve fyzice, ale protože se jeho hodnota mění s rostoucí nadmořskou výškou, je změna tlaku vzduchu zahrnuta do geografie.

V každé z osmi aplikací budou nejprve uvedené vztahy popisující jednotlivé závislosti a následně vzorově vyřešené vždy 4 příklady, které mohou sloužit jako návod k počítání neřešených příkladů (v textu značeno „Příklady k procvičování“). K těmto neřešeným příkladům jsou na konci každé podkapitoly uvedené výsledky.

Příklady jsou také doplněné různými zajímavostmi, které se k dané problematice vztahují. Ty jsou v textu ohraničeny rámečkem.

3.1 Fyzika

Jednou z nejvýznamnějších oblastí příbuzných matematice, ve které se setkáváme s aplikacemi exponenciálních a logaritmických funkcí, je bezpochyby fyzika.

V této kapitole se zaměříme na pokles intenzity záření při průchodu materiálem nebo jiným látkovým prostředím, a také na hladinu intenzity zvuku, která je definovaná jako dekadický logaritmus intenzity zvuku.

3.1.1 Intenzita záření

Intenzita záření je zářivý tok procházející příčným průřezem plochy a při průchodu látkovým prostředím klesá exponenciálně. Pokles intenzity záření procházející materiálem lze vyjádřit v závislosti na tloušt'ce materiálu následujícím vztahem:

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot d}, \tag{3}$$

kde I je výsledná intenzita záření, I_0 je intenzita záření před vstupem do materiálu, e je základ přirozeného logaritmu (tzv. Eulerova konstanta, jejíž hodnota je 2,71828...), μ je lineární součinitel zeslabení a d je tloušt'ka materiálu. [2]

Příklad 1: Pro rentgenové záření s vlnovou délkou 50 pm je lineární součinitel zeslabení olova $\mu = 0{,}6\ \mathrm{cm}^{-1}$. Jak silná musí být vrstva olova, má-li zachytit 90 % záření? ([2], s. 78)

Řešení: Ze zadání známe $\mu = 0{,}6\ \mathrm{cm}^{-1}$ a víme, že vrstva olova má zachytit 90 % záření, tedy $\frac{I}{I_0} = 10\,\% = 0{,}1$. Vyjdeme ze vztahu (3), který nejprve vydělíme hodnotou I_0 a poté dosadíme:

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu \cdot d}, \tag{4}$$

$$0,1 = e^{-0,6 \cdot d}.$$

Chceme vypočítat vrstvu olova d, proto celou rovnici zlogaritmujeme a hodnotu d dopočítáme:

$$ln(0,1) = -0,6 \cdot d,$$

$$d = -\frac{ln(0,1)}{0,6},$$

$$d \doteq 3,84.$$

Odpověď: Vrstva olova, která má zachytit 90 % záření, musí být silná 3,84 cm.

Příklad 2: Vrstva železa silná 1,5 cm zeslabí intenzitu rentgenového záření na 64 % původní hodnoty. Urči lineární součinitel zeslabení železa pro toto záření. ([2], s. 79)

Řešení: Vyjdeme ze zadání: $d = 1{,}5$ cm, $\frac{I}{I_0} = 0{,}64$, $\mu = ?$. Pro výpočet použijeme vzorec (4) z předcházejícího příkladu, doplníme známé hodnoty a vypočítáme lineraní součinitel zeslabení:

$$0,64 = e^{-\mu \cdot 1,5},$$

$$ln(0,64) = -\mu \cdot 1,5,$$

$$\mu = -\frac{ln(0,64)}{1,5},$$

$$\mu \doteq 0,3.$$

Odpověď: Lineární součinitel zeslabení železa pro toto záření je přibližně 0,3 cm^{-1}.

Příklad 3: Urči vztah pro polovrstvu $d\,'$, jestliže pro absorpci záření platí vztah: $I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot d}$. ([18], s. 39)

Řešení: Víme, že se jedná o polovrstvu, proto musí platit: $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2}$. K odvození použijeme vzorec (4), ve kterém nahradíme vrstvu d polovrstvou $d\,'$:

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu \cdot d\,'}.$$

Na levé straně rovnice dosadíme hodnotu $\frac{1}{2}$, následně celou rovnici zlogaritmujeme a vyjádříme $d\,'$:

$$\frac{1}{2} = e^{-\mu \cdot d\,'},$$

$$ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\mu \cdot d\,',$$

$$d\,' = -\frac{ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\mu},$$

$$d\,' = \frac{ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}{\mu},$$

$$d\,' = \frac{ln(2)}{\mu}. \tag{5}$$

Odpověď: Pro polovrstvu $d\,'$ platí vztah: $d\,' = \frac{ln(2)}{\mu}$.

Příklad 4: Intenzita denního světla, které proniká do mořské vody, se snižuje v závislosti na hloubce exponenciálně. V hloubce 6 m je snížena na polovinu. Podmořská kamera potřebuje pro dobrý příjem alespoň 75 % intenzity denního světla. Do jaké maximální hloubky ji lze použit? ([9], s. 156)

Řešení: Příklad si rozdělíme na dvě části. V první části budeme chtít vypočítat lineární součinitel zeslabení mořské vody, který v druhé části využijeme pro výpočet maximální hloubky. Ze zadání je patrné, že pro $d = 6$ m je intenzita světla poloviční, tedy $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2}$. Chceme vyjádřit linerání součinitel zeslabení μ, proto využijeme vztahu (5) z příkladu 3 a dostaneme:

$$\mu = \frac{ln(2)}{d},$$

$$\mu = \frac{ln(2)}{6}.$$

Hodnotu μ nemusíme vyjadřovat jako desetinné číslo, protože s ní budeme dál pracovat. Již známe lineární součinitel zeslabení, proto se můžeme přesunout k druhé části příkladu a vypočítat maximální hloubku. Ze zadání známe podíl $\frac{I}{I_0} = 75\,\% = 0{,}75$. K výpočtu použijeme (4) a budeme zjišťovat hloubku d:

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu \cdot d},$$

$$0,75 = e^{-\frac{ln(2)}{6} \cdot d},$$

$$ln(0,75) = -\frac{ln(2)}{6} \cdot d,$$

$$d = -\frac{6 \cdot ln(0,75)}{ln(2)},$$

$$d \doteq 2,5.$$

Odpověď: Podmořskou kameru můžeme použít do maximální hloubky 2,5 metru.

3.1.2 Hladina intenzity zvuku

Nezastupitelnou součástí lidského života jsou zvuky. Jak silně slyšíme zvuk, nám určuje intenzita zvuku. Ta je definována jako akustický výkon dopadající na jednotku plochy. Lidské ucho je schopné slyšet zvuky od velmi slabých (tzv. práh slyšení o intenzitě I = 10^{-12} W·m^{-2}) až po bolestivé zvuky (tzv. práh bolesti o intenzitě I = 10 W·m^{-2}). Protože je poměr mezi nejmenší a největší intenzitou zvuku velký, zavádíme hladinu intenzity zvuku B. Tato veličina, udávána v decibelech, je definována následujícím způsobem:

$$B = 10 \cdot log \frac{I}{I_0}, \tag{6}$$

kde log je dekadický logaritmus o základu 10, I je intenzita zvuku a $I_0 = 10^{-12}$ W·m^{-2} (práh slyšení). [29]

V následující tabulce jsou pro zajímavost uvedeny příklady zvuků s různou hladinou intenzity.

Zvuk	Hladina intenzity zvuku [dB]
Práh slyšení	0
Šelest listí	10
Šum listí	20
Pouliční hluk v tichém předměstí	30
Tlumený rozhovor	40
Normální pouliční hluk	50
Hlasitý rozhovor	60
Hluk na silně frekventovaných ulicích	70
Hluk v tunelech podzemních železnic	80
Hluk motorových vozidel	90
Maximální hluk motorky	100
Hlasité obráběcí stroje	110
Startující letadlo ve vzdálenosti 1 m	120
Práh bolesti	130

Tabulka 1: Příklady zvuků s různou hladinou intenzity [24]

Příklad 5: Jaká je hladina intenzity prahu slyšení? [29]

Řešení: Chceme ověřit, zda hodnota hladiny intenzity prahu slyšení uvedená v tabulce je správná. Pro práh slyšení musí platit: $I = I_0$. Dosadíme do rovnice (6) a dopočítáme:

$$B = 10 \cdot log \frac{I_0}{I_0},$$

$$B = 10 \cdot log\, 1,$$

$$B = 10 \cdot 0,$$

$$B = 0.$$

Odpověď: Výpočtem jsme se přesvědčili, že hladina intenzity prahu slyšení je 0 dB.

Příklad 6: Intenzita zvuku reprodukční soustavy je 0,24 $\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$. Vypočítej hladinu intenzity zvuku. [29]

Řešení: Ze zadaní plyne, že I = 0,24 $\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$, B = ? a víme, že $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$. K řešení použijeme vztah (6) a neznámou hodnotu B vypočítáme:

$$B = 10 \cdot log \frac{0,24}{10^{-12}},$$

$$B = 10 \cdot 11,38,$$

$$B \doteq 114.$$

Odpověď: Hladina intenzity zvuku je přibližně 114 dB.

Příklad 7: Na diskotéce byla naměřena hladina intenzity zvuku 100 dB. Jaká byla intenzita zvuku v tomto prostoru?

Řešení: Tentokrát chceme zjistit intenzitu zvuku, když známe hladinu intenzity zvuku B = 100 dB, I = ?, $I_0 = 10^{-12}$ $\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$. I nyní využijeme (6):

$$100 = 10 \cdot log \frac{I}{10^{-12}},$$

rovnici vydělíme číslem 10 a poté vyjádříme neznámou hodnotu I:

$$10 = log \frac{I}{10^{-12}},$$

$$10^{10} = \frac{I}{10^{-12}},$$

$$I = 10^{10} \cdot 10^{-12},$$

$$I = 10^{-2}.$$

Odpověď: Intenzita zvuku na diskotéce byla 10^{-2} $\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$.

Příklad 8: Původní intenzita zvuku měla hodnotu 10^{-6} W·m^{-2}. Hladina intenzity zvuku se zvýšila o 50 dB. Jaká je nyní intenzita zvuku? [25]

Řešení: 1. způsob

Budeme postupovat stejně jako v předešlých příkladech tzn. s využitím vzorce (6). Řešení si rozdělíme do dvou částí. Označme si původní intenzitu $I_1 = 10^{-6}$ W·m^{-2} a původní hladinu intenzity zvuku označme B_1. S použitím (6) vypočítáme hodnotu B_1:

$$B_1 = 10 \cdot log\frac{I_1}{10^{-12}},$$

$$B_1 = 10 \cdot log\frac{10^{-6}}{10^{-12}},$$

$$B_1 = 10 \cdot log 10^6,$$

$$B_1 = 10 \cdot 6,$$

$$B_1 = 60.$$

Již víme, že $B_1 = 60$ dB a můžeme přistoupit k druhé části výpočtu. Současná hladina intenzity B_2 je vzhledem k původní hladině intenzity B_1 zvýšena o 50 dB. Platí tedy $B_2 = B_1 + 50$ a současná intenzita zvuku $I_2 = ?$. Opět použijeme (6) a hledanou hodnotu I_2 dopočítáme:

$$B_2 = 10 \cdot log\frac{I_2}{10^{-12}},$$

$$B_1 + 50 = 10 \cdot log\frac{I_2}{10^{-12}},$$

$$60 + 50 = 10 \cdot log\frac{I_2}{10^{-12}},$$

$$110 = 10 \cdot log\frac{I_2}{10^{-12}},$$

$$11 = log\frac{I_2}{10^{-12}},$$

$$10^{11} = \frac{I_2}{10^{-12}},$$

$$I_2 = 10^{11} \cdot 10^{-12},$$

$$I_2 = 10^{-1}.$$

Odpověď: Současná intenzita zvuku je 10^{-1} W·m^{-2}.

Řešení: 2. způsob

Při řešení tohoto příkladu však můžeme postupovat i bez použití vzorců. Z úvodní části víme, že hladina intenzity zvuku je definovaná jako dekadický logaritmus podílu intenzity zvuku. Stačí si tedy uvědomit, že zvýšení intenzity zvuku desetkrát (10^1 krát) znamená zvýšení hladiny intenzity zvuku o 10 dB. Zvýšení intenzity zvuku stokrát (10^2 krát) znamená zvýšení hladiny intenzity zvuku o 20 dB atd. Stejnou úvahou dojdeme k tomu, že pokud se hladina intenzity zvuku zvýšila o 50 dB, musela se intenzita zvuku zvýšit stotisíckrát (10^5 krát). Ze zadání víme, že původní intenzita zvuku měla hodnotu 10^{-6} W·m^{-2}. Současná intenzita zvuku je stotisíckrát vyšší (matematicky to můžeme zapsat: $10^{-6} \cdot 10^5 = 10^{-1}$ W·m^{-2}). I s použitím úvahy jsme dosáhli správného výsledku.

3.1.3 Příklady k procvičování

Intenzita záření

1) Pro rentgenové záření s vlnovou délkou 50 pm je součinitel zeslabení olova 0,6 cm^{-1}. Jak silná musí být vrstva olova, má-li zachytit 75 % záření? ([2], s. 79)

2) Pro rentgenové záření je součinitel zeslabení železa 0,3 cm^{-1}. Jak silná musí být vrstva železa, jestliže má zachytit 60 % záření?

3) Jaká část záření gama projde vrstvou olova o tloušťce 3 cm, je-li lineární součinitel zeslabení olova pro záření gama 0,85 cm^{-1}?

4) Lineární součinitel zeslabení železa pro rentgenové záření je 0,3 cm^{-1}. Jaká je tloušťka polovrstvy železa pro toto záření? ([2], s. 79)

5) Rentgenové záření prochází hliníkovou vrstvou tlustou 1 cm. Vypočítej procentový úbytek I_0, jestliže lineární součinitel zeslabení pro hliník je 0,54 cm^{-1}. ([9], s. 155)

6) Vrstva olova silná 1 cm zeslabí intenzitu rentgenového záření na 56 % původní hodnoty. Jaký je lineární součinitel zeslabení olova pro toto záření? ([2], s. 79)

7) Urči tloušťku vrstvy hliníku potřebnou k tomu, aby se intenzita rentgenového záření zeslabila na polovinu své původní intenzity. Lineární součinitel zeslabení hliníku pro rentgenové záření je 0,54 cm^{-1}. ([9], s. 155)

8) Úzký rentgenový svazek je tvořen 2000 fotony. Po průchodu měděnou deskou o tloušťce 1 cm se počet fotonů zredukuje na 1000. Vypočítej lineární součinitel zeslabení pro tuto desku. [40]

9) Jak silnou vrstvu olova potřebujeme, aby se intenzita záření gama snížila na setinu původní hodnoty? Lineární součinitel zeslabení olova pro toto záření je 0,85 cm^{-1}.

10) Intenzita rentgenových paprsků se sníží při průchodu olověnou deskou o tloušťce 1 mm o 5 %. Jak silná musí být olověná deska, aby se jejich intenzita snížila na 60 % původní intenzity? ([9], s. 145)

11) Cínová destička má tloušťku 1,5 cm. Intenzita záření gama se sníží při průchodu touto destičkou na 80 % původní intenzity. Jak silnou cínovou destičku musíme použít, aby se intenzita tohoto záření snížila na 50 %?

12) Při průchodu skleněnou deskou o mocnosti 10 cm ztratí světelný paprsek $\frac{1}{12}$ své původní intenzity. Kolik procent původní intenzity bude mít světelný paprsek po průchodu 4 stejnými deskami?

13) Lineární součinitel zeslabení pro ^{99m}Tc se pro tukovou a podobnou tkáň udává 0,15 cm^{-1}. Kolik procent záření dopadne na detektor, jestliže mezi zdrojem záření a detektorem bude vrstva tkáně silná 6 cm? ([2], s. 80)

14) Urči vztah pro absorpční koeficient μ, jestliže pro absorpci záření platí vztah: $I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot d}$. ([18], s. 39)

Hladina intenzity zvuku

15) Urči hladinu intenzity zvuku prahu bolesti. [29]

16) Vypočítej hladinu intenzity zvuku o intenzitě 10^{-6} $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. [29]

17) O kolik decibelů se zvýší hladina intenzity zvuku, vzroste-li intenzita zvuku tisíckrát? [25]

18) O kolik decibelů se zvýší hladina intenzity zvuku, pokud se intenzita zvuku zvýší 100 000 krát? [27]

19) Pokud je v určitém místě intenzita zvuku 10^{-7} $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$, jaká je hladina intenzity zvuku v tomto místě? [22]

20) Intenzita zvuku jedoucího vlaku je 10^{-3} $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. Jaká je hladina intenzity zvuku tohoto vlaku?

21) Intenzita zvuku aparatury byla zvýšena z 10^{-10} $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$ na 10^{-3} $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. O kolik decibelů se zvýšila hladina intenzity zvuku? [25]

22) Zvuková intenzita elektrické kytary byla zesílena z 10^{-10} $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$ na 10^{-4} $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. Kolik decibelů činí zesílení? [45]

23) Urči intenzitu zvuku, pokud je jeho hladina intenzity 70 dB. [29]

24) Jakou intenzitu má zvuk, jehož hladina intenzity je 130 dB? [45]

25) Jaké intenzitě zvuku odpovídá hladina intenzity 45 dB? [22]

26) Ucho nemocného člověka má práh slyšitelnosti 20 dB. Jaká je intenzita prahu slyšitelnosti, kterou toto ucho slyší? [25]

27) Kolikrát se snížila intenzita hluku, jestliže se použitím chrániče sluchu snížila hladina intenzity ze 100 na 70 dB? [25]

28) O kolik procent vzroste intenzita zvuku, jestliže hladina intenzity zvuku vzroste o 1 dB? [45]

29) Hladina intenzity zvuku se zvýšila o 20 dB. Vyjádři poměr mezi původní a konečnou intenzitou zvuku. [25]

30) Bylo zjištěno, že hladina intenzity kvákání žáby je 64 dB a hladina intenzity kohoutího kokrhání je 85 dB. Kolikrát je intenzita kohoutího kokrhání větší než intenzita žabího kvákání?

3.1.4 Výsledky

Intenzita záření

1) 2,3 cm
2) 3,1 cm
3) 7,8 %
4) 2,3 cm
5) 41,7 %
6) 0,6 cm^{-1}
7) 1,3 mm
8) 0,7 cm^{-1}
9) 5,4 cm
10) 10 mm
11) 4,7 cm
12) 70,6 %
13) 40,7 %
14) $\mu = \frac{ln \frac{I_0}{I}}{d}$

Hladina intenzity zvuku

15) 130 dB
16) 60 dB
17) o 30 dB
18) o 50 dB
19) 50 dB
20) 90 dB
21) o 70 dB
22) 60 dB
23) 10^{-5} $W{\cdot}m^{-2}$
24) 10 $W{\cdot}m^{-2}$
25) $3{,}2{\cdot}10^{-8}$ $W{\cdot}m^{-2}$
26) 10^{-10} $W{\cdot}m^{-2}$
27) 1 000 krát
28) o 26 %
29) 1 : 100
30) 126 krát

3.2 Chemie

Další oblastí, u které se můžeme setkat s využitím exponenciální a logaritmické funkce, je chemie. Poměrně důležitou roli hraje v životě poločas rozpadu a jeho využití. Následující příklady toho budou důkazem.

Kromě poločasu rozpadu radioaktivních prvků či izotopů jsou v chemii velice důležité také výpočty pH roztoků. V této kapitole si proto ukážeme, jak vypočítat hodnotu pH silných kyselin a zásad.

3.2.1 Poločas rozpadu

Poločas rozpadu určuje, za jakou dobu se počet jader nějakého radioaktivního prvku či izotopu zmenší na polovinu. Závislost hmotnosti radioaktivní látky na čase při jejím radioaktivním rozpadu je dána vzorcem:

$$m_{(t)} = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \tag{7}$$

kde $m_{(t)}$ je výsledná hmotnost v čase t, m_0 je počáteční hmotnost, e je základ přirozeného logaritmu, t je čas a λ je konstanta radioaktivní přeměny. Pro tuto přeměnovou konstantu platí:

$$\lambda = \frac{ln(2)}{T}, \tag{8}$$

kde T je poločas rozpadu (čas, za který se zmenší hmotnost látky na polovinu). ([2], s. 78) Při některých výpočtech je však výhodnější používat vzorec:

$$m_{(t)} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}, \tag{9}$$

který je ekvivalentní s (7). Pro odvození stačí dosadit (8) do (7). Dostaneme tedy

$$m_{(t)} = m_0 \cdot e^{-\frac{ln(2)}{T} \cdot t},$$

$$m_{(t)} = m_0 \cdot e^{\frac{t}{T} \cdot ln\left(\frac{1}{2}\right)},$$

$$m_{(t)} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Příklad 9: Urči poločas rozpadu bismutu, jestliže počáteční hmotnost bismutu byla 32 g a za 242 minut klesla na 2 g. [35]

Řešení: 1. způsob

Ze zadání je patrné, že $m_0 = 32$ g, $m = 2$ g, $t = 242$ minut, $T = ?$. Využijeme vzorec (9) a po dosazení dostaneme:

$$2 = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{242}{T}},$$

$$\frac{2}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{242}{T}}.$$

Zajímá nás poločas rozpadu T, celou rovnici proto zlogaritmujeme a vyjádříme T:

$$ln\left(\frac{2}{32}\right) = ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{242}{T}},$$

$$ln\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{242}{T} \cdot ln\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$T = \frac{242 \cdot ln\left(\frac{1}{2}\right)}{ln\left(\frac{1}{16}\right)},$$

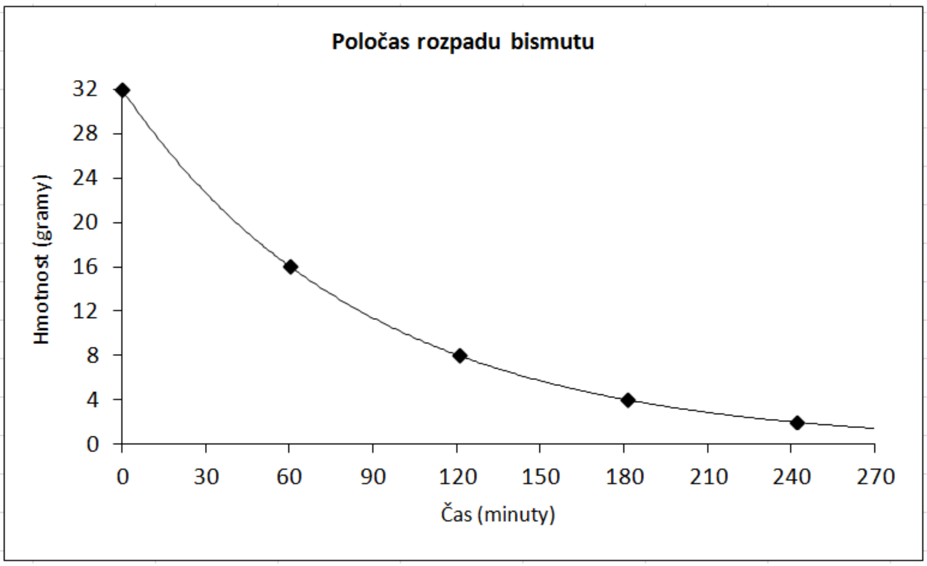
$$T = 60,5.$$

Odpověď: Poločas rozpadu bismutu je 60,5 minut.

Řešení: 2. způsob

Můžeme postupovat i bez využití vzorce. Víme, že poločas rozpadu je doba, za kterou se počet jader (hmotnost) prvku zmenší na polovinu. Před prvním poločasem rozpadu musela být hmotnost jader 2^1 krát větší (4 g), před druhým poločasem 2^2 krát větší (8 g), před třetím poločasem 2^3 krát větší (16 g) a před čtvrtým poločasem 2^4 krát větší (32 g). Zjistili jsme, že ke snížení hmotnosti bismutu z 32 g na 2 g byly zapotřebí 4 poločasy rozpadu. Stačí tedy dobu 242 minut vydělit čtyřmi a dostaneme také poločas rozpadu 60,5 minut.

Příklad můžeme doplnit obrázkem grafu, ze kterého je patrné, že závislost hmotnosti bismutu na čase klesá exponenciálně.



Obrázek 4: Poločas rozpadu bismutu

Příklad 10: Vypočítej procentní úbytek izotopu kobaltu ^{60}Co za 2,5 roku, jestliže jeho poločas rozpadu je 5,26 roku. ([2], s. 78)

Řešení: Tentokrát známe pouze $t = 2{,}5$ roku a $T = 5{,}26$ roku. Nejprve potřebujeme vypočítat, jaký podíl kobaltu zůstane po 2,5 letech. Zajímá nás $\frac{m}{m_{(0)}}$. K výpočtu využijeme vzorec (9), do kterého dosadíme známé hodnoty t a T:

$$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2,5}{5,26}}.$$

Chceme zjstit podíl nové a původní hmotnosti, proto celou rovnici vydělíme hodnotou m_0 a vypočítáme:

$$\frac{m}{m_{(0)}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2,5}{5,26}},$$

$$\frac{m}{m_{(0)}} \doteq 0,72.$$

Po 2,5 letech zbyde asi 72 % izotopu kobaltu. Nyní již stačí odečíst těchto 72 % od 100 % a dostaneme, že úbytek izotopu kobaltu ^{60}Co je 28 %.

Odpověď: Procentní úbytek izotopu kobaltu ^{60}Co za 2,5 roku je 28 %.

Příklad 11: Uhlíkovou metodou bylo zjištěno, že zkoumaný nález obsahuje 7,6 % z podílu uhlíku ^{14}C připadajícího na živý organismus. Vypočítej stáří nálezu, jestliže poločas rozpadu uhlíku^{14}C je 5730 let. ([2], s. 79)

Řešení: Víme, že $T = 5730$ let, $\frac{m}{m_0} = 7{,}6\,\% = 0{,}076$ a $t = ?$. Opět vyjdeme ze vztahu (9), který vydělíme hodnotou m_0 a dosadíme hodnoty ze zadání:

$$\frac{m}{m_{(0)}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}},$$

$$0,076 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}.$$

Rovnici zlogaritmujeme a vyjádříme hodnotu t:

$$ln(0,076) = ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}},$$

$$t = \frac{5730 \cdot ln(0,076)}{ln\left(\frac{1}{2}\right)},$$

$$t \doteq 21303.$$

Odpověď: Stáří nálezu je přibližně 21 303 let.

Radiokarbonová metoda datování

Radiokarbonová metoda datování (též uhlíková metoda) je chemicko-fyzikální metoda založená na sledování poměru izotopu uhlíku ^{14}C a ^{12}C v pozůstatcích živých organismů (tkáně, kosti, dřevo, ...). Radioaktivní forma uhlíku ^{14}C se totiž fotosyntézou dostává do rostlin a odtud do potravního řetězce. Příjem radioaktivního uhlíku pak končí přerušením účasti vzorku v uhlíkovém koloběhu (tedy smrtí organismu) a od tohoto okamžiku začíná přeměna ^{14}C na ^{12}C s poločasem rozpadu 5730 let. Množství zbylého ^{14}C v nalezeném zbytku organismu se změří a dle jeho množství je pak možné určit jeho absolutní stáří [30].

Příklad 12: Hmotnost vzorku radioaktivní látky se za dobu Δt snížila z m_1 na m_2. Vyjádři poločas přeměny látky v závislosti na m_1, m_2 a Δt. Vypočítej poločas přeměny radioaktivního izotopu olova, jestliže se za 5 minut hmotnost vzorku snížila z 2,10 g na hodnotu 1,85 g. ([2], s. 80)

Řešení: Nejprve chceme obecně vyjádřit předpis pro poločas přeměny. Využijeme vztah (9), přičemž víme, že původní hmotnost je m_1, koncová hmotnost m_2 a čas je charakterizován změnou Δt. Proto:

$$m_2 = m_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}}. \tag{10}$$

Odtud potřebujeme vyjádřit neznámou T. Celou rovnici vydělíme počáteční hmotností m_1, rovnici zlogaritmujeme a poločas přeměny vyjádříme v závislosti na ostatních veličinách:

$$T = \frac{\Delta t \cdot ln\left(\frac{1}{2}\right)}{ln\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}. \tag{11}$$

V druhé části zadání příkladu máme připraveno, že $\Delta t = 5$ minut, $m_1 =$ 2,10 g a $m_2 =$ 1,85 g. Dosadíme do připraveného vztahu (11) a hodnotu T dopočítáme:

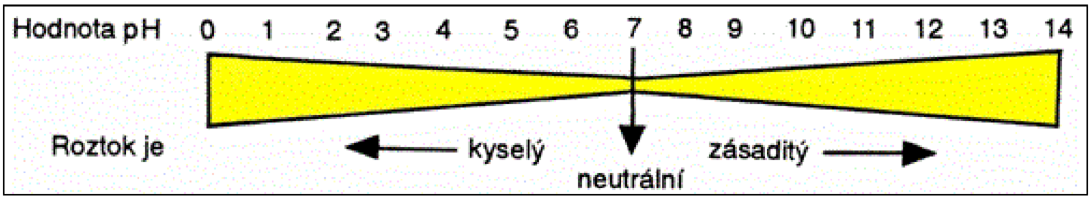
$$T = \frac{5 \cdot ln\left(\frac{1}{2}\right)}{ln\left(\frac{1{,}85}{2{,}10}\right)},$$

$$T \doteq 27,3.$$

Odpověď: Poločas přeměny radioaktivního izotopu olova je přibližně 27,3 minut.

3.2.2 Hodnota pH

Vodíkový expoment (pH) je číslo, kterým v chemii vyjadřujeme, zda vodný roztok reaguje kysele či naopak zásaditě. K určení hodnoty pH se používá stupnice pH, která nabývá hodnot od 0 do 14. Jedná se o logaritmickou stupnici, proto platí, že zvýší-li se koncentrace roztoku na desetinásobek, pak se hodnota pH zvýší o 1. Voda je neutrální a má pH rovno 7. Čím je hodnota pH menší než 7, tím je roztok kyselejší. Naopak, čím je pH větší než 7, tím je roztok zásaditější [32].



Obrázek 5: Stupnice *pH [33]*

Vzhledem k tomu, že se výpočty hodnot pH různých roztoků liší, budeme se v této práci zabývat jen výpočty pH silných jednosytných a dvojsytných kyselin a silných jednosytných a dvojsytných zásad. Následující vztahy jsou převzaty z [46].

Hodnota pH silných jednosytných kyselin je definovaná jako záporný dekadický logaritmus koncentrace vodíkových kationtů ve zředěném vodném roztoku:

$$pH = -log(c_{H_3O^+}), \tag{12}$$

kde log je dekadický logaritmus a $c_{H_3O^+}$ je koncentrace kyseliny. Jednotkou molární koncentrace je mol/l. V analytické chemii se více používá označení M (1 mol/l = 1 M), proto se v tomto textu setkáme s tímto označením. Pokud máme v zadání např. „2 M roztok“ znamená to, že máme na mysli dvou molární roztok [31].

Pro silné dvojsytné kyseliny platí podobný vztah, jako pro silné jednosytné kyseliny, ovšem nyní je argumentem logaritmu dvojnásobek koncentrace kyseliny. Tedy:

$$pH = -log(2 \cdot c_{H_3O^+}), \tag{13}$$

kde log je opět dekadický logaritmus a $c_{H_3O^+}$ je koncentrace kyseliny.

U silných zásad nastává změna. Na rozdíl od kyselin jsou zásady zdrojem aniontů a pro koncentraci aniontů OH^- (ozn. pOH) platí:

$$pOH = -log(c_{OH^-}). \tag{14}$$

Při znalosti pOH jsme schopni vyjádřit pH silných jednosytných zásad pomocí vzorce:

$$pH = 14 - pOH. \tag{15}$$

Za hodnotu pOH dosadíme (14) a vzorec upravíme:

$$pH = 14 - (-log(c_{OH^-})),$$

$$pH = 14 + log(c_{OH^-}), \tag{16}$$

kde log je dekadický logaritmus a c_{OH^-} je koncentrace zásady.

Vztah pro výpočet pH u silných dvojsytných zásad se liší od silných jednosytných zásad opět dvojnásobkem koncentrace v argumentu logaritmu:

$$pH = 14 + log(2 \cdot c_{OH^-}). \tag{17}$$

V následujících příkladech budeme počítat pH roztoků některých silných kyselin a hydroxidů. Při řešení bude potřeba vědět, zda se jedná o jednosytné nebo dvojsytné kyseliny, případně zásady. K rozlousknutí tohoto „oříšku“ nám pomohou informace uvedené v Tabulce 2.

Kategorie	Název (vzorec)
Jednosytné kyseliny	kyselina chlorovodíková (HCl)
	kyselina bromovodíková (HBr)
	kyselina dusičná (HNO_3)
	kyselina chloristá ($HClO_4$)
Dvojsytné kyseliny	kyselina sírová (H_2SO_4)
	kyselina hexafluorokřemičitá ($H_2(SiF_6)$)
Jednosytné zásady	hydroxid sodný ($NaOH$)
	hydroxid draselný (KOH)
Dvojsytné zásady	hydroxid barnatý ($Ba(OH)_2$)
	hydroxid strontnatý ($Sr(OH)_2$)

Tabulka 2: Kategorie silných kyselin a zásad

Příklad 13: Vypočítej pH 0,001 M roztoku kyseliny chlorovodíkové. ([8], s. 85)

Řešení: Ze zadání známe koncentraci kyseliny c = 0,001 M, pH = ? a víme, že kyselina chlorovodíková (HCl) je silná jednosytná kyselina. Proto dosadíme do (12):

$$pH = -log(0,001)$$

$$pH = 3.$$

Odpověď: Hodnota pH 0,001 M roztoku kyseliny chlorovodíkové je 3.

Příklad 14: Roztok hydroxidu sodného má pH rovno 12. Urči koncentraci tohoto hydroxidu.

Řešení: Nyní máme k dispozici $pH = 12$ a chceme zjistit koncentraci $c = ?$. Hydroxid sodný (NaOH) je silná jednosytná zásada, proto tentokrát využijeme vztah (16):

$$12 = 14 + log(c),$$

$$-2 = log(c),$$

$$10^{-2} = c,$$

$$c = 0,01.$$

Odpověď: Koncetrace NaOH s pH rovno 12 je 0,01 M.

Příklad 15: Vypočítej pH 0,003 M roztoku kyseliny sírové. [23]

Řešení: Opět vypíšeme fakta, která známe: c = 0,003 M, pH = ? a kyselina sírová (H_2SO_4) je silná dvojsytná kyselina. Využijeme (13) a hodnotu pH dopočítáme:

$$pH = -log(2 \cdot 0,003),$$

$$pH = -log(0,006),$$

$$pH = 2,2.$$

Odpověď: Hodnota pH 0,003 M roztoku H_2SO_4 je 2,2.

Příklad 16: Vypočítej pH roztoku, jehož $pOH = 3$ a rozhodni, zda se jedná o zásaditý nebo kyselý roztok. [47]

Řešení: Tentokrát víme, že $pOH = 3$ a chceme určit pH. Tím, že známe pOH, bude pro nás nejvýhodnější použít vzorec (15):

$$pH = 14 - 3,$$

$$pH = 11.$$

Odpověď: Vzhledem k hodnotě pH, která je rovna 11, se jedná o zásaditý roztok.

3.2.3 Příklady k procvičování

Poločas rozpadu

1) Poločas přeměny ^{131}I je 8 dní. Kolik zbyde z 1 gramu vzorku po 32 dnech? ([2], s. 79)

2) Poločas přeměny ^{137}Cs je 30 let. Po jaké době zbyde z 1 kg vzorku 1 g? ([2], s. 79)

3) Poločas rozpadu izotopu je přibližně 3 minuty. Za kolik minut od počátku rozpadu zbyde z původního množství jedna šestnáctina? ([4], s. 79)

4) Ve vzorku radioaktivního fosforu, který má poločas přeměny 14 dnů, je $4{\cdot}10^{18}$ atomů fosforu. Kolik atomů fosforu bude v tomto vzorku za 4 týdny? ([1], s. 175)

5) V urychlovači bylo vyrobeno 5 g radioaktivního jódu s poločasem přeměny 2 hodiny. Kolik gramů látky budeme mít k dispozici po 5 hodinách?

6) Hmotnost izotopu radia je 150 g. Urči, kolik gramů zbyde z původního množství daného izotopu Ra za 19 minut, jestliže poločas rozpadu je 2,7 minuty.

7) Za jak dlouho se přemění polovina jader radionuklidu, jestliže jeho rozpadová konstanta je $\lambda = 1{,}42{\cdot}10^{-11}\ \mathrm{s}^{-1}$? [27]

8) Urči přeměnovou konstantu radionuklidu $^{55}_{27}Co$, jestliže se počet jeho atomů zmenší za 1 hodinu o 3,8 %. ([17], s. 113)

9) Radionuklid uhlíku $^{14}_{6}C$ ve strarém kousku dřeva představuje 0,0416 hmotnosti tohoto radionuklidu v živé dřevině. Urči přibližné stáří dřeva, jestliže poločas přeměny radionuklidu je 5730 let. ([7], s. 224)

10) V kousku starého dřeva klesl obsah radionuklidu $^{14}_{6}C$ na 72 % původní hodnoty. Urči stáří dřeva, je-li poločas přeměny radionuklidu 5730 let. ([1], s. 176)

11) Jaké je stáří materiálu dřevěné sošky, jestliže obsahuje 68 % původního množství radioaktivního uhlíku $^{14}_{6}C$, jehož poločas přeměny je 5730 let. ([6], s. 73)

12) Radionuklid stříbra má poločas rozpadu 20 minut. Jaká část radionuklidu se přemění za 2 hodiny? ([7], s. 225)

13) Urči, na kolik procent původní hodnoty se snížil obsah radioaktivního nuklidu v dřevěné třísce po 3500 letech, jestliže poločas rozpadu radioaktivního nuklidu uhlíku je 5730 let.

14) Za 28 dní se přemění 75 % jader $^{32}_{15}P$. Urči jeho poločas přeměny. ([17], s. 103)

15) Množství radioaktivní látky se během jedné hodiny zmenšilo o 70 %. Urči poločas přeměny. [29]

16) Obsah uhlíku $^{14}_{6}C$ ve dřevě odpovídá 92,5 % jeho obsahu v atmosféře. Urči stáří dřeva. Který český panovník seděl v té době na trůně, který byl z tohoto dřeva vyroben?

17) V září 1991 objevili němečtí turisté v Őtztalských Alpách v Jižním Tyrolsku ledem mumifikované tělo. Uhlíkovou metodou bylo zjištěno, že pro nerozpadnutá jádra v jeho těle (N_0) a jádra v těle současných lidí (N) platí: $N = 0{,}5267\ N_0$. Před kolika roky tento člověk zamrzl, jestliže poločas rozpadu uhlíku je 5730 let? [27]

18) Skelet zvířete nalezený při archeologickém výzkumu obsahoval 11 % z podílu $^{14}_{6}C$ připadajícího na živý organismus. Poločas přeměny $^{14}_{6}C$ je 5730 let. Jaké je stáří nálezu? ([9], s. 143)

19) Poločas rozpadu uranu $^{235}_{92}U$ je 700 miliónů let. Za kolik let se jeho množství v zemské kůře zmenší na třetinu původního stavu? [29]

20) DDT (Dichlordifenyltrichlorethan) je pro člověka velice škodlivá látka, která se dostává potravinovým řetězcem do mléka a dalších potravin. Její koncentrace ve výši $5 \cdot 10^{-6}$ % je v současné době ještě tolerována, do budoucna je však požadováno snížit ji na $2 \cdot 10^{-6}$ %. Chemický rozklad DDT probíhá jen velmi pozvolna, „poločas rozkladu“ je zhruba 30 let. Za jakou dobu bude dosaženo požadované nižší koncentrace? ([9], s. 145)

21) Jakou aktivitu musí mít preparát značený ^{99m}Tc v 7 hodin ráno, má-li se v 11 hodin podat 100 MBq? Poločas přeměny ^{99m}Tc je 6 hodin. ([2], s. 80)

22) Kolikrát se musí prodloužit čas snímání při použití ^{99m}Tc po 18 hodinách od prvního snímku, aby detekovaná četnost byla stejná jako u prvního snímku? Předpokládej, že nedochází k vyplavení radiofarmaka z místa snímku a poločas přeměny ^{99m}Tc je 6 hodin. ([2], s. 80)

Hodnota pH

23) Vypočítej pH roztoku hydroxidu draselného o koncentraci 0,01 M.

24) Vypočítej pH 0,024 M roztoku kyseliny sírové. [28]

25) Jaké je pH roztoku hydroxidu sodného o koncentraci $c(NaOH) = 0{,}07$ M? [47]

26) Urči pH 0,002 M roztoku kyseliny sírové. [28]

27) Koncentrace roztoku hydroxidu vápenatého je $4 \cdot 10^{-2}$ M. Zjisti jeho pH. [23]

28) Jaké je pH $5 \cdot 10^{-4}$ M roztoku KOH? [23]

29) Vypočítej pH $9 \cdot 10^{-5}$ M roztoku kyseliny dusičné. [23]

30) Vypočítej pH roztoku s $pOH = 2$ a rozhodni, zda se jedná o zásaditý nebo kyselý roztok. [47]

31) Vypočítej pH roztoku, jehož $pOH = 3{,}5$ a rozhodni, zda se jedná o zásaditý nebo kyselý roztok.

32) Jaké je pH roztoku kyseliny bromovodíkové, jeli rovnovážná koncentrace roztoku 10^{-3} M?

33) Vypočítej koncentraci roztoku kyseliny bromovodíkové, jehož pH je 2. [47]

34) Zjisti koncentraci roztoku kyseliny chloristé, je-li jeho $pOH = 10$. [47]

35) Vypočítej koncentraci roztoku hydroxidu strontnatého, jehož pH je 13.

36) Urči koncentraci roztoku kyseliny hexafluorokřemičité, jestliže pH tohoto roztoku je 1,5.

37) Vypočítej koncentraci roztoku hydroxidu draselného, jehož pOH je 3,7.

38) Kolikrát bude koncentrace roztoku NaOH s $pH = 12$ větší než koncentrace roztoku KOH s $pH = 10$?

39) Roztok kyseliny hexafluorokřemičité má koncentraci 0,004 M, zatímco kyselina sírová má ve vodném roztoku koncentraci 0,029 M. Kolikrát je pH kyseliny hexafluorokřemičité větší než pH kyseliny sírové?

40) Koncentrace roztoku hydroxidu vápenatého je $9 \cdot 10^{-3}$ M a koncentrace roztoku hydroxidu barnatého je $2 \cdot 10^{-2}$ M. Který roztok má větší pH?

41) Původní koncentrace roztoku kyseliny chloristé byla 0,005 M. Jaké je současné pH roztoku kyseliny chloristé, jestliže se koncentrace roztoku této kyseliny zvýšila o $3 \cdot 10^{-3}$ M?

42) Koncentrace roztoku hydroxidu strontnatého se z původní hodnoty 0,04 M zvýšila o 50 %. Jaké je současné pH tohoto roztoku?

3.2.4 Výsledky

Poločas rozpadu

1) 0,0625 g

2) 299 let

3) 12 minut

4) $1{\cdot}10^{18}$

5) 0,88 g

6) 1,14 g

7) 1 548 let

8) 0,039 s^{-1}

9) 26 285 let

10) 2 716 let

11) 3 188 let

12) $\frac{1}{64}$ původní hodnoty

13) na 65,5 %

14) 14 dní

15) 34,5 min

16) 644 let; Karel IV.

17) před 5 300 lety

18) 18 247 let

19) za $1{,}1{\cdot}10^{9}$ let

20) za 40 let

21) 158,7 MBq

22) 8 krát

Hodnota pH

23) 12

24) 1,3

25) 12,8

26) 2,4

27) 12,9

28) 10,7

29) 4,1

30) 12; zásaditý

31) 10,5; zásaditý

32) 3

33) 0,01 M

34) 0,0001 M

35) 0,05 M

36) 0,016 M

37) 0,002 M

38) 100 krát

39) 1,7 krát

40) hydroxid barnatý

41) 2,1

42) 13,1

3.3 Biologie

Exponenciální funkce zaujímá významné místo také v biologii. Známým spojením je „exponenciální růst“, který obecně značí, že něco roste (stoupá) velice rychle.

Klasickým příkladem exponenciálního růstu je růst populace. V této kapitole se budeme zabývat množením mikroorganismů, pro jejichž jednu fázi je typický právě exponenciální růst. Nesmíme opomenout růst světové populace (počet obyvatel světa), ten bude nastíněn v kapitole 3.4.2.

3.3.1 Růst populace

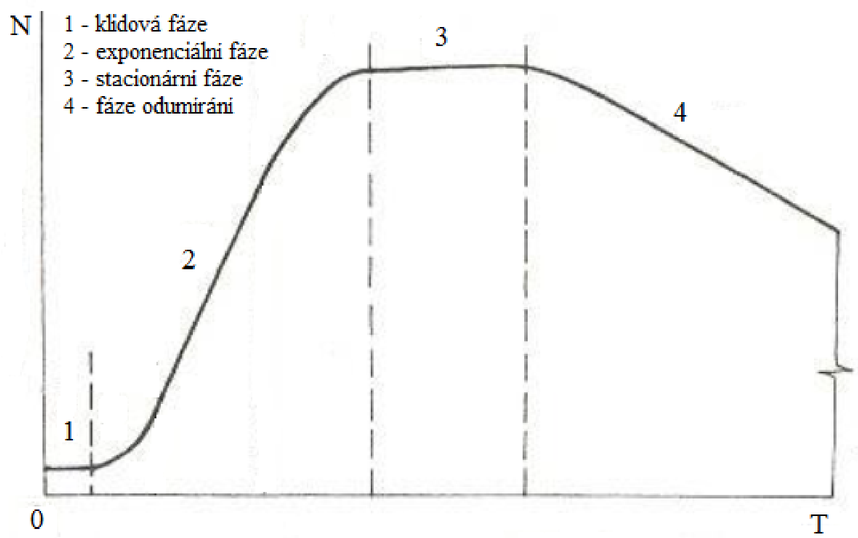
Významnou roli v biologii hraje růst populace bakterií. Ten je charakterizován tzv. růstovou křivkou (Obrázek 6). Pro nás je nejvýznamnější druhá fáze - exponenciální, která trvá do vyčerpání živin. Tu můžeme charakterizovat rovnicí:

$$N = N_0 \cdot 2^n, \tag{18}$$

kde N je počet buněk (bakterií, virů, ...) na konci exponenciální fáze, N_0 je počet buněk na začátku a n je počet generací. Hodnota n bývá také definována následujícím způsobem:

$$n = \frac{t}{T}, \tag{19}$$

kde t je čas (v hod.), po který populace roste a T (v hod.) je doba zdvojení (doba, za kterou dojde ke zdvojnásobení buněk populace). [37]



Obrázek 6: Růstová křivka bakterií [37]

Často se můžeme setkat s příklady, u nichž bude výhodné použít vztah, který vznikne dosazením (19) do (18):

$$N = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{T}}. \tag{20}$$

Příklad 17: V Petriho misce bylo 5 bakterií. Každá z těchto bakterií se zdvojila vždy po 45 minutách. Kolik bakterií bylo v Petriho misce po pěti hodinách?

<u>Řešení:</u> Ze zadání plyne, že $N_0 = 5$, $T = 45$ min $= \frac{3}{4}$ h, $t = 5$ h a N = ?. Podle hodnot, které máme zadané je patrné, že k řešení použijeme vztah (20):

$$N = 5 \cdot 2^{\frac{5}{\frac{3}{4}}},$$

$$N = 5 \cdot 2^{\frac{20}{3}},$$

$$N \doteq 508.$$

<u>Odpověď:</u> Po pěti hodinách bylo v Petriho misce zhruba 508 bakterií.

Příklad 18: V buňce byl jeden vir, který se zdvojil každých 5 minut. Vypočítej, za jak dlouho bylo v buňce 2^{24} virů.

<u>Řešení:</u> Opět si vypíšeme známé hodnoty: $N_0 = 1$, $T = 5$ min $= \frac{1}{12}$ h, $N = 2^{24}$. Nyní chceme zjistit $t = ?$, proto opět využijeme (20):

$$2^{24} = 1 \cdot 2^{\frac{t}{\frac{1}{12}}},$$

$$2^{24} = 2^{12 \cdot t}.$$

Dostali jsme exponenciální rovnici o stejném základu, proto můžeme porovnávat exponenty. Tím dopočítáme hodnotu t:

$$24 = 12 \cdot t,$$

$$t = \frac{24}{2},$$

$$t = 2.$$

<u>Odpověď:</u> Požadované množství virů bylo v buňce za 2 hodiny.

Příklad 19: Počet bakterií typu A se zdvojnásobí během každých 2 hodin, počet bakterií typu B je dvojnásobný vždy až po třech hodinách. Za jak dlouho se počty obou typů bakterií vyrovnají, jestliže je na počátku bakterií typu B o polovinu více než bakterií typu A? ([16], s. 106)

Řešení: Tentokrát máme dva typy bakterií a máme vypočítat, za jak dlouho bude počet obou typů bakterií stejný. Označme hodnoty vztahující se k bakteriím typu A indexem $_A$, analogicky hodnoty charakterizující typ B indexem $_B$. Potom ze zadání platí: $T_A = 2$ h, $T_B = 3$ h, $N_{B_0} = N_{A_0} + \frac{1}{2}N_{A_0}$, tedy $N_{B_0} = \frac{3}{2}N_{A_0}$. Neznámá hodnota je opět čas t. Protože se mají počty obou typů bakterií sobě rovnat, musí platit:

$$N_{A_0} \cdot 2^{\frac{t}{T_A}} = \frac{3}{2}N_{A_0} \cdot 2^{\frac{t}{T_B}}.$$

Celou rovnici vydělíme hodnotou N_{A_0}, zlogaritmujeme, dosadíme hodnoty ze zadání a následně vyjádříme neznámou hodnotu t:

$$2^{\frac{t}{T_A}} = \frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{t}{T_B}},$$

$$ln\left(2^{\frac{t}{T_A}}\right) = ln\left(\frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{t}{T_B}}\right),$$

$$\frac{t}{T_A} \cdot ln\left(2\right) = ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{t}{T_B} \cdot ln\left(2\right),$$

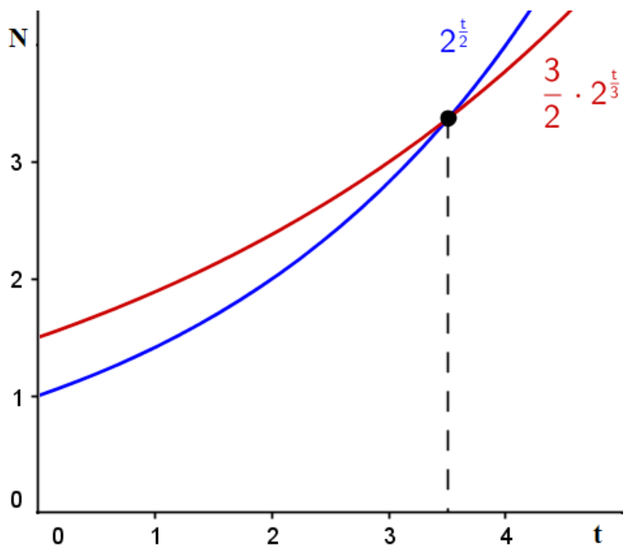
$$\frac{t}{2} \cdot ln\left(2\right) = ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{t}{3} \cdot ln\left(2\right),$$

$$t \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot ln(2) - \frac{1}{3} \cdot ln(2)\right) = ln\left(\frac{3}{2}\right),$$

$$t = \frac{ln(\frac{3}{2})}{\frac{1}{2} \cdot ln(2) - \frac{1}{3} \cdot ln(2)},$$

$$t \doteq 3,5.$$

O správnosti řešení se můžeme přesvědčit na Obrázku 7.



Obrázek 7: Grafické znázornění příkladu 19

Odpověď: Počty obou typů bakterií se vyrovnají přibližně za 3,5 hodiny.

Existují příklady, u kterých se k řešení nemusí používat vzorce, ale k výsledku lze dojít pouhou úvahou. Jedním z nich je i následující příklad.

Příklad 20: Na rybníce rostou lekníny. První den 1, druhý den 2, třetí den 4, čtvrtý den 8, pátý den 16, ... Dvacátého dne je celý rybník zarostlý. Kolikátý den je zarostlá polovina rybníka?

Řešení: Rybník zarůstá lekníny, přičemž každý den přibude dvojnásobný počet leknínů, než den předešlý (druhý den: $2{\cdot}1 = 2$, třetí den: $2{\cdot}2 = 4$, čtvrtý den: $2{\cdot}4 = 8$). Můžeme se na tuto zákonitost podívat také obráceně. Pátého dne je na rybníku 16 leknínů, zatímco čtvrtého dne jich tam bylo jen 8 (tedy $\frac{1}{2}$). Třetího dne byly lekníny jen 4 (opět $\frac{1}{2}$ než den předcházející). Platí tedy, že každý předcházející den je na rybníce polovina leknínů. Víme, že celý rybník je zarostlý dvacátý den. Proto polovina rybníka musí být zarostlá předcházející den tj. devatenáctý.

Odpověď': Polovina rybníka je zarostlá devatenáctý den.

3.3.2 Příklady k procvičování

Růst populace

1) Bakterie Escherichia coli se v příznivých podmínkách dělí přibližně jednou za hodinu. Kolik bakterií se namnoží v roztoku za příznivých podmínek za 1 den? [29]

2) Na počátku byly dvě bakterie. Doba zdvojení bakterie je 2 hodiny. Kolik bakterií bude za jeden den?

3) Bakterie Streptococcus thermophilus mají čas zdvojení 12 minut. Urči počet těchto bakterií po šesti hodinách.

4) Vir se každých 10 minut rozdělí na další dva viry. Vypočítej množství virů po třech hodinách.

5) Bakterie způsobující tuberkulózu (Mycobacterium tuberculosis) se vzhledem k ostatním bakteriím dělí velice pomalu. Její doba zdvojení je asi 15 hodin. Za jak dlouhou dobu bude těchto bakterií 2560, bylo-li jich na začátku 10?

6) Vir se v hostitelské buňce množí každých 15 minut. Za jak dlouho bude buňka obsahovat $2 \cdot 10^{16}$ virů?

7) V Petriho misce byla na začátku pozorování jedna bakterie. Po deseti hodinách bylo v Petriho misce 1024 bakterií. Urči dobu zdvojení této bakterie.

8) Vypočítej dobu zdvojení bakterií, jejichž počet se během 4 hodin zvýšil ze 100 na milion.

9) Saccharomyces cerevisce jsou kvasinky používající se při kvašení piva. Během šestidenního procesu kvašení vzrost počet těchto kvasinek z 20 na $9{,}5 \cdot 10^{22}$. Urči dobu, za kterou se každá kvasinka zdvojnásobí.

10) První typ bakterie má dobu zdvojení 20 minut, zatímco druhý typ bakterie jen 15 minut. Za jak dlouho se počty obou typů bakterií vyrovnají, bylo-li na začátku bakterií prvního typu třikrát více?

11) Hladina jezírka se pokrývala lekníny tak, že se plocha pokrytá lekníny za den zdvojnásobila. Třicátý den byla hladina plná leknínů. Kolikátý den byla zakryta lekníny polovina hladiny jezírka? ([19], s. 153)

12) Vodní plocha zakrytá listy leknínu se každý den zdvojnásobí. Kolikátý den bude zarostlá celá vodní plocha lekníny, jestliže sedmý den pokrývaly listy leknínu polovinu této plochy?

3.3.3 Výsledky

Růst populace

1) 2^{24}

2) 2^{13}

3) 2^{30}

4) 2^{18}

5) 5 dní

6) 13,5 hodiny

7) 1 hodina

8) 0,3 hodiny

9) 2 hodiny

10) 1,58 hodiny

11) dvacátý devátý

12) osmý

3.4 Geografie

V geografii se setkáváme s využitím exponenciální funkce zejména ve dvou oborech. Prvním z nich je závislost tlaku vzduchu na nadmořské výšce, která klesá exponenciálně. Přístroj používaný k měření tlaku vzduchu se nazývá barometr.

Ve vědě blízké geografii (demografii) se setkáváme s přirozeným přírůstkem (resp. úbytkem) počtu obyvatel, a s tím souvisejícím růstem světové populace.

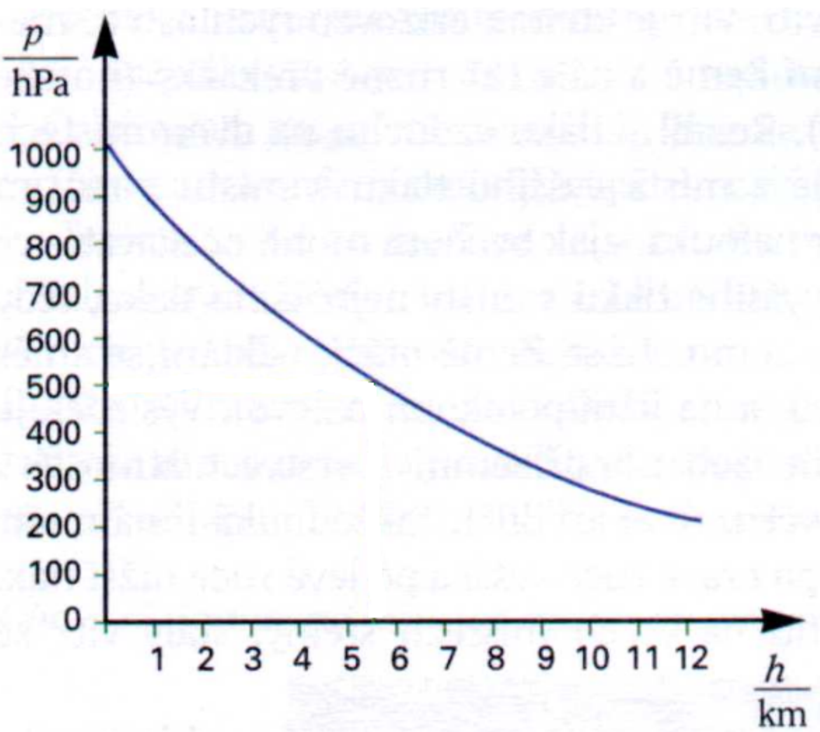
3.4.1 Tlak vzduchu

S rostoucí nadmořskou výškou se mění celá řada veličin, např. teplota vzduchu, vlhkost vzduchu, intenzita UV záření nebo právě zmiňovaný tlak vzduchu. Na rozdíl od ostatních veličin klesá tlak vzduchu exponenciálně.

Závislost tlaku vzduchu na nadmořské výšce lze vyjádřit vztahem:

$$p_{(h)} = p_0 \cdot 0,88^h, \tag{21}$$

kde $p_{(h)}$ je tlak vzduchu v nadmořské výšce h (km), p_0 je tlak vzduchu v nulové nadmořské výšce a platí, že $p_0 \doteq 1013\,\mathrm{hPa}$ ([9], s. 129).
Funkce charakterizující tuto závislost je znázorněna na Obrázku 8.



Obrázek 8: Závislost tlaku vzduchu na nadmořské výšce [26]

Příklad 21: Vypočítej tlak vzduchu v nadmořských výškách 800 m a 3000 m. ([9], s. 129)

Řešení: Podle zadání chceme vypočítat tlak vzduchu ve dvou různých nadmořských výškách, které si označíme $h_1 = 800$ m a $h_2 = 3000$ m. K tomu, abychom mohli k řešení využít vztah (21), musíme nejprve převést zadané nadmořské výšky na kilometry ($h_1 = 800$ m $= 0{,}8$ km a $h_2 = 3000$ m $= 3$ km). Po převedení již stačí do vztahu (21) dosadit a hodnoty dopočítat:

$$p_{(0,8)} = p_0 \cdot 0,88^{h_1},$$

$$p_{(0,8)} = 1013 \cdot 0,88^{0,8},$$

$$p_{(0,8)} \doteq 915.$$

Stejným způsobem dopočítáme i tlak vzduchu v druhé nadmořské výšce h_2:

$$p_{(3)} = p_0 \cdot 0,88^{h_2},$$

$$p_{(3)} = 1013 \cdot 0,88^{3},$$

$$p_{(3)} \doteq 690.$$

Odpověď: Tlak vzduchu v nadmořské výšce 800 metrů je 915 hPa, zatímco v nadmořské výšce 3000 metrů je tlak pouze 690 hPa.

Příklad 22: Turisté se snažili vylézt na nejvyšší horu Kavkazu - Elbrus (5 642 m). Protože byla mlha, v určení nadmořské výšky se mohli spolehnout jen na barometr, který ukazoval 530 hPa. Urči, kolik výškových metrů zbývalo turistům k tomu, aby se dostali na vrchol. [36]

Řešení: Nejprve budeme potřebovat zjistit, v jaké nadmořské výšce se turisté nacházeli, když jim barometr ukazoval tlak vzduchu $p = 530$ hPa. K tomu opět využijeme vztah (21) a nadmořskou výšku h vypočítáme:

$$530 = 1013 \cdot 0,88^{h},$$

$$\frac{530}{1013} = 0,88^{h},$$

$$ln\left(\frac{530}{1013}\right) = h \cdot ln\left(0,88\right),$$

$$h = \frac{ln\left(\frac{530}{1013}\right)}{ln\left(0,88\right)},$$

$$h \doteq 5,067.$$

Již víme, že se turisté nacházeli v nadmořské výšce 5,067 km (5 067 m) a zbývá jen tuto hodnotu odečíst od nadmořské výšky vrcholu. Tedy:

$$5642 - 5067 = 575.$$

Odpověď: Ke zdolání vrcholu Elbrus zbývá turistům vylézt ještě 575 výškových metrů.

Příklad 23: Jestliže klesne tlak vzduchu na 40 % hodnoty tlaku na hladině moře, nemá již člověk dostatečný příjem kyslíku z atmosféry. Urči přibližně tuto kritickou nadmořskou výšku. ([9], s. 144)

Řešení: Tentokrát budeme počítat nadmořskou výšku $h = ?$, přičemž máme k dispozici hodnotu tlaku vzduchu vyjádřenou v závislosti na tlaku u hladiny moře ($p = 0,4 \cdot p_0$). Této vlastnosti spolu se vztahem (21) využijeme:

$$0,4 \cdot p_0 = p_0 \cdot 0,88^h.$$

Celou rovnici vydělíme hodnotou p_0, zlogaritmujeme a dopočítáme výšku h:

$$0,4 = 0,88^h,$$

$$ln(0,4) = h \cdot ln(0,88),$$

$$h = \frac{ln(0,4)}{ln(0,88)},$$

$$h \doteq 7,168.$$

Odpověď: Kritická hranice dostatečného příjmu kyslíku z atmosféry je přibližně 7 168 metrů nad mořem.

Dostatečný příjem kyslíku

Horolezci, kteří zdolávají nejvyšší vrcholy světa - himálajské osmitisícovky (např. Mount Everest, K2, Kančendžengu či Makalu), používají pro optimální výstup dýchací přístoje. Důvodem je nízká hodnota tlaku vzduchu ve vysokých nadmořských výškách, tzn. řídký vzduch, který obsahuje málo kyslíku. Kritická hranice dostatečného příjmu kyslíku se nachází právě nad 7 000 metrů nad mořem. Přesto někteří horolezci dýchací přístroje nepoužívají a takovéto riskantní výstupy berou jako výzvu a adrenalin.

Příklad 24: O kolik hPa klesne tlak vzduchu, jestliže z parkoviště v nadmořské výšce 570 m n. m. vystoupáme ke hradu, jehož nadmořská výška je 660 m n.m.?

Řešení: Podle zadání nás zajímá rozdíl tlaků vzduchu (Δp) v nadmořské výšce $h_1 = 570$ m (0,57 km) a $h_2 = 660$ m (0,66 km). Proto nejprve vypočítáme jednotlivé hodnoty tlaku vzduchu $p_{(0,57)}$ a $p_{(0,66)}$ a následně tyto hodnoty od sebe odečteme. S využitím (21) začneme počítat tlak vzduchu $p_{(0,57)}$:

$$p_{(h_1)} = 1013 \cdot 0,88^{h_1},$$

$$p_{(0,57)} = 1013 \cdot 0,88^{0,57},$$

$$p_{(0,57)} \doteq 942.$$

Tlak v nadmořské výšce 570 m n. m. bude přibližně 942 hPa, zbývá dopočítat tlak vzduchu v nadmořské výšce 660 m n.m.:

$$p_{(h_2)} = 1013 \cdot 0,88^{h_2},$$

$$p_{(0,66)} = 1013 \cdot 0,88^{0,66},$$

$$p_{(0,66)} \doteq 931.$$

Již známe i tlak vzduchu v nadmořské výšce h_2, stačí proto odečíst od sebe hodnoty tlaků vzduchu, a tím dostaneme hledaný rozdíl $\triangle p$:

$$\triangle p = p_{(0,57)} - p_{(0,66)},$$

$$\triangle p = 942 - 931,$$

$$\triangle p = 11.$$

Odpověď: Pokud vystoupáme z parkoviště (570 m n. m.) k hradu (660 m n. m.), klesne tlak zhruba o 11 hPa.

3.4.2 Přírůstek počtu obyvatel

Bezpochyby klíčovou záležitostí v dnešním světě je vývoj počtu obyvatel. Denně se setkáváme s informacemi, že někde počet obyvatel klesá, jinde naopak rapidně stoupá. Přírůstek počtu obyvatel je dán exponenciální závislostí:

$$N = N_0 \cdot e^{r \cdot n}, \tag{22}$$

kde N je počet obyvatel na konci uvažovaného období, N_0 je původní počet obyvatel, e je základ přirozeného logaritmu, r charakterizuje roční míru růstu populace (pro $r > 0$ populace roste, pro $r < 0$ populace klesá) a n (v letech) určuje dobu, během které se měnil počet obyvatel ([4], s. 74).

Na rozdíl od předešlých oborů, ve kterých jsme se s exponenciální či logaritmickou závislostí setkali, musíme při řešení následujících příkladů počítat s jistou „rezervou". Nelze brát výsledky striktně, protože ačkoliv budeme počítat s konstantní roční mírou růstu během n let, tato hodnota se mohla v průběhu jednotlivých let mírně měnit.

Počty obyvatel, roční míry růstu a prognózy vývoje počtu obyvatel konkrétních měst či států, které jsou uváděny v následujících příkladech, byly převzaty z těchto zdrojů: [15], [39], [42], [43].

Příklad 25: Před 15 lety mělo město 40 000 obyvatel. Vypočítej současný počet obyvatel, jestliže byl roční přírůstek obyvatel 1,1 %.

Řešení: K vyřešení příkladu využijeme informace ze zadání: $n = 15$ let, $N_0 = 40\,000$, $r = 1{,}1\,\% = 0{,}011$, $N = ?$. K výpočtu použijeme vzorec (22), do kterého dosadíme a vypočítáme hodnotu N:

$$N = 40000 \cdot e^{0{,}011 \cdot 15},$$

$$N = 40000 \cdot e^{0{,}165},$$

$$N \doteq 47176.$$

Odpověď: V současné době žije ve městě 47 176 obyvatel.

Příklad 26: Počet obyvatel města vzrostl za 9 let ze 14 000 na 18 000. Jaký byl roční přírůstek v procentech?

Řešení: I tentokrát si vypíšeme hodnoty, které máme k dispozici: $N = 18\,000$, $N_0 = 14\,000$, $n = 9$ let, $r = ?$. Zatímco jsme v minulém příkladu zjišťovali počet obyvatel, nyní nás zajímá roční míra růstu r. K řešení dojdeme opět s pomocí vztahu (22):

$$18000 = 14000 \cdot e^{9 \cdot r}.$$

Rovnici nejdříve vydělíme číslem 14 000 a poté zlogaritmujeme, abychom osamostatnili hodnotu r:

$$\frac{18000}{14000} = e^{9 \cdot r},$$
$$ln\left(\frac{9}{7}\right) = 9 \cdot r,$$
$$r = \frac{ln\left(\frac{9}{7}\right)}{9},$$
$$r \doteq 0,028.$$

Známe již roční míru růstu 0,028. Tu musíme ještě převést na procenta, tedy 2,8 %.

Odpověď: Roční přírůstek obyvatel byl v daném městě 2,8 %.

Příklad 27: V oblasti se snížil počet obyvatel z 26 500 na 24 500. Každý rok byl zaznamenán stejný procentuální úbytek 3,9 %. Urči, během kolika let se počet obyvatel snížil.

Řešení: Chceme určit, během kolika let se snížil počet obyvatel (n = ?), jestliže $N = 24\ 500$ a $N_0 = 26\ 500$. Dále víme, že došlo k úbytku, proto budeme psát roční míru růstu se znaménkem mínus. Tedy r = - 3,9 % = - 0,039. Podobně jako v předešlých úlohách dosadíme do (22) a nyní vypočítáme hodnotu n:

$$24500 = 26500 \cdot e^{-0,039 \cdot n},$$
$$\frac{24500}{26500} = e^{-0,039 \cdot n},$$
$$ln\left(\frac{49}{53}\right) = -0,039 \cdot n,$$
$$n = -\frac{ln\left(\frac{49}{53}\right)}{0,039},$$
$$n \doteq 2.$$

Odpověď: Počet obyvatel se v oblasti snížil během dvou let.

Příklad 28: Čína je v současné době stát s největším počtem obyvatel na světě. V roce 2015 měla Čína 1,37 mld. obyvatel s ročním přírůstkem 0,3 %. Indie, která je v počtu obyvatel celosvětově druhá, měla v tom samém roce 1,27 mld. obyvatel, ale roční přírůstek byl daleko větší (1,2 %). Vypočítej, ve kterém roce převýší počet obyvatel Indie velikost čínské populace, jestliže prognózy počítají se stejnými ročními přírůstky jako v roce 2015.

Řešení: Tentokrát je zadání příkladu trochu jiné, než na které jsme zvyklí. Požadavkem je zjistit, ve kterém roce dostihne indická populace tu čínskou. Musíme nejprve vypočítat, za kolik let ($n = ?$) se budou tyto dvě populace sobě rovnat. Pro názornost označme hodnoty vztahující se k Číně indexem $_{č}$, hodnoty pro Indii indexem $_{i}$. Vyjdeme ze zadání, kdy pro Čínu platí: $N_{č} = 1{,}37$ mld., $r_{č}= 0{,}3\ \% = 0{,}003$, zatímco pro Indii: $N_i = 1{,}27$ mld. a $r_i = 1{,}2\ \% = 0{,}012$. Počet obyvatel za n let se sobě musí rovnat:

$$N_{č} \cdot e^{r_{č} \cdot n} = N_i \cdot e^{r_i \cdot n}.$$

Dosadíme za jednotlivé hodnoty ze zadání a s využitím úprav vyjádříme neznámou n:

$$1,37 \cdot e^{0,003 \cdot n} = 1,27 \cdot e^{0,012 \cdot n},$$

$$ln\Big(1,37 \cdot e^{0,003 \cdot n}\Big) = ln\Big(1,27 \cdot e^{0,012 \cdot n}\Big),$$

$$ln\Big(1,37\Big) + 0,003 \cdot n \cdot ln\Big(e\Big) = ln\Big(1,27\Big) + 0,012 \cdot n \cdot ln\Big(e\Big),$$

$$ln\Big(1,37\Big) + 0,003 \cdot n = ln\Big(1,27\Big) + 0,012 \cdot n,$$

$$ln\Big(1,37\Big) - ln\Big(1,27\Big) = 0,012 \cdot n - 0,003 \cdot n,$$

$$ln\left(\frac{1,37}{1,27}\right) = n \cdot \Big(0,012 - 0,003\Big),$$

$$ln\left(\frac{1,37}{1,27}\right) = n \cdot 0,009,$$

$$n = \frac{ln\left(\frac{1,37}{1,27}\right)}{0,009},$$

$$n \doteq 8,4.$$

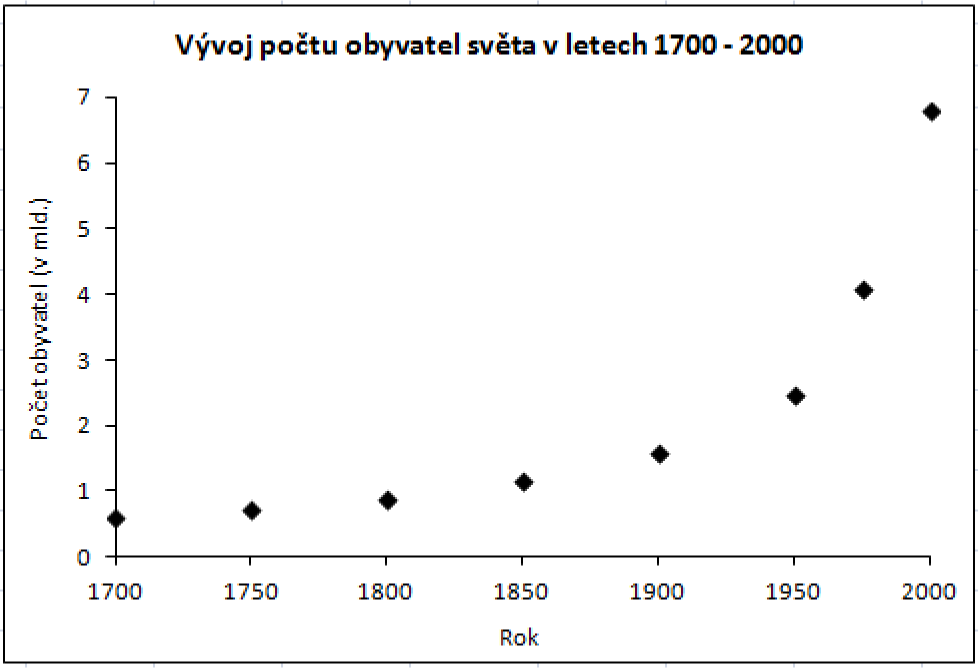
Již víme, že rovnost indické a čínské populace nastane zhruba za 8,5 let. Vzhledem k tomu, že v zadání jsme vycházeli z roku 2015, přičteme k tomuto roku 8,5 let.

Odpověď: Počet obyvatel Indie by měl převýšit čínskou populaci přibližně mezi roky 2023 a 2024.

Řešení této úlohy bychom mohli provést i graficky, podobně jako u řešeného příkladu 19 v kapitole 3.3.1. U každého státu (Čína a Indie) bychom znázornili růstovou křivku v následujících několika letech po roce 2015. Tam, kde by se grafy jednotlivých států protly, tam by byl hledaný rok, ve kterém budou populace obou zemí stejně početné. Na rozdíl od řešeného příkladu 19 není při grafickém řešení tohoto příkladu tolik znatelný exponenciální průběh, proto zde není grafické řešení přiloženo.

Růst světové populace

S přirozeným přírůstkem počtu obyvatel souvisí úzce také růst světové populace. Růst počtu obyvatel se od 18. století výrazně zrychlil a až do současnosti vykazuje exponenciální ráz (viz Obrázek 9). Tento růst byl zapříčiněn zejména průmyslovou revolucí, během které došlo ve vyspělých státech světa k výraznému nárůstu porodnosti a zároveň snižování úmrtnosti. V rozvojových zemích byl nárůst porodnosti zaznamenán až v 2. polovině 20. století [48]. Obdobně jako u populace bakterií, řas či virů je tento trend dlouhodobě neudržitelný. Mezi hlavní problémy spojené s exponenciálním rozpínáním lidské populace patří kromě nedostatku místa na Zemi hlavně omezené zdroje potravin. Podle prognostických odhadů OSN však dojde ve druhé polovině 21. století v celosvětovém měřítku k zastavení populačního růstu a následně začne počet obyvatel světa klesat [21].



Obrázek 9: Vývoj počtu obyvatel světa v letech 1700 - 2000

3.4.3 Příklady k procvičování

Tlak vzduchu

1) Vypočítej tlak vzduchu v nadmořské výšce 450 m n. m.

2) Jaký tlak vzduchu bude na vrcholu nejvyšší české hory Sněžky, jestliže její vrchol leží 1 602 metrů nad mořem?

3) V následující tabulce jsou uvedeny nejvyšší vrcholy vybraných světadílů a jejich nadmořské výšky. Urči, jaký tlak vzduchu bude na každém vrcholu a tabulku doplň.

Vrchol	Nadmořská výška (m)	Tlak (hPa)
Mont Everest	8 850	
Aconcagua	6 959	
Kilimandžáro	5 895	
Mont Blanc	4 809	
Mount Kosciuszko	2 228	

Tabulka 3: Nejvyšší vrcholy vybraných světadílů [20]

4) Na jaký tlak vzduchu musí být připraveni turisté, kteří vyjedou lanovkou na nejvyšší vrchol Krušných hor? Klínovec se nachází v nadmořské výšce 1 244 m n. m.

5) Vypočítej tlak vzduchu v troposféře, je-li její průměrná výška 11 km.

6) Jaký je rozdíl tlaku vzduchu mezi nejnižším a nejvyšším místem České republiky? Nejvyšším místem je Sněžka (1 602 m n. m.), za nejnižší místo je považován tok řeky Labe u Hřenska (115 m n. m.)

7) Nejvyšší hora Moravy je Praděd (1 491 m n. m.) nacházející se v Hrubém Jeseníku. Zjisti, o kolik hPa bude na vrcholu Pradědu vyšší tlak vzduchu než na vrcholu nejvyšší hory Čech - Sněžce (1 602 m n. m.)

8) Turisté se vydali na pěší túru, kterou začali na náměstí v Kašperských Horách (735 m n. m.). Jejich cílem bylo navštívit hrad Kašperk ležící 875 m n. m. O jakou hodnotu klesl tlak vzduchu během výletu?

9) V jaké nadmořské výšce je tlak vzduchu roven 900 hPa?

10) Vypočítej nadmořskou výšku náměstí v Jihlavě, jestliže je tlak vzduchu na náměstí tohoto krajského města 947 hPa.

11) Přibližně v jaké výšce nad zemským povrchem se pohybovalo letadlo, když barometr ukazoval tlak vzduchu 388 hPa?

12) V jaké nadmořské výšce je tlak vzduchu poloviční než u hladiny moře?

13) Urči nadmořskou výšku, ve které je tlak vzduchu o 20 % nižší než tlak vzduchu u hladiny moře.

14) Na vrcholu hory Říp byl naměřen tlak vzduchu 955,8 hPa. V jaké nadmořské výšce se Říp nachází?

15) Nejvyšší vrchol Českého středohoří má tlak vzduchu 91 021 Pa. Vypočítej jeho nadmořskou výšku a zjisti, o kterou horu se jedná.

16) U vchodu na rozhlednu ukazoval barometr tlak vzduchu 950 hPa a na vrcholu rozhledny 944 hPa. Jak vysoká je rozhledna? Kolik schodů vede na vrchol rozhledny, má-li každý schod výšku 20 cm?

Přírůstek počtu obyvatel

17) Počet obyvatel byl ve městě před 20 roky 56 000. Vypočítej současný počet obyvatel ve městě, byl-li každoroční přírůstek 0,7 %.

18) V roce 1950 měl Mělník 13 076 obyvatel. Vypočítej počet obyvatel v roce 1980, jestliže roční přírůstek obyvatel byl 1,23 %.

19) Jaký počet obyvatel má město s 3% ročním přírůstkem, pokud za 10 let bude mít toto město 60 000 obyvatel? [35]

20) V roce 1960 překonala světová populace hranici 3 mld. Vypočítej počet obyvatel světa v roce 1970, byl-li roční přírůstek 2 %.

21) Počet obyvatel Indie byl v roce 2015 zhruba 1,27 miliard. Prognózy vývoje počtu obyvatel předpokládají dlouhodobý roční přírůstek indické populace na 0,8 %. Jakou hranici počtu obyvatel bude Indie atakovat při těchto předpokladech v roce 2050?

22) Počet obyvatel města vzrostl za 10 let z 25 000 na 32 000. Jaký byl roční přírůstek obyvatel v procentech?

23) Počet obyvatel města klesl za 6 let ze 75 000 na 71 000. Jaký byl roční úbytek obyvatel v procentech?

24) Za pět let se počet obyvatel ve městě zvýšil o 12 %. Jaký byl roční přírůstek obyvatel vyjádřený v procentech? [41]

25) V polární oblasti se během deseti let snížil původní počet obyvatel o 15 %. Urči procentuální roční úbytek obyvatel.

26) Populace Indie se zvětšila od roku 1951 do roku 1970 o 50 %. Vypočítej roční míru růstu v tomto období. ([4], s. 77)

27) Ve městě žije 157 000 obyvatel. Před 25 lety jich zde bylo 102 000. Kolik obyvatel bude ve městě žít za dalších 10 let, počítá-li se s průměrným přírůstkem obyvatelstva jako v předchozích letech? [35]

28) Město má 22 000 obyvatel. Za jak dlouho lze očekávat, že bude mít 25 000 obyvatel, činí-li průměrný roční přírůstek obyvatel 1,4 %? [35]

29) V určité oblasti se snížil počet obyvatel z 250 000 na 195 000. Meziroční úbytek obyvatel zaznamenaný v této oblasti byl 1,6 %. Vypočítej, během kolika let se počet obyvatel snížil.

30) Město má nyní 80 000 obyvatel. Za kolik let se počet obyvatel zvýší o 10 000, je-li průměrný roční přírůstek vyjádřený v procentech 0,9 %?

31) Průměrný roční přírůstek obyvatel rozvojové země je 3,3 %. Vypočítej, za jak dlouho se (při stávajícím ročním přírůstku) počet obyvatel této země zdvojnásobí.

32) Evropská populace dosahovala v roce 2010 asi 734 milionů obyvatel. Podle předpokládaných prognóz bude počet obyvatel klesat s ročním úbytkem 0,18 %. Urči, ve kterém roce klesne počet obyvatel v Evropě pod hranici 700 milionů.

3.4.4 Výsledky

Tlak vzduchu

1) 956 hPa
2) 825 hPa
3) 327, 416, 477, 548, 762 hPa
4) 864 hPa
5) 248 hPa
6) 173 hPa
7) o 12 hPa
8) o 16 hPa
9) 925 m n. m.
10) 527 m n. m.
11) 7,5 km
12) 5422 m n. m.
13) 1746 m n. m.
14) 455 m n. m.
15) 837 m n. m.; Milešovka
16) 50 m; 250

Přírůstek počtu obyvatel

17) 64 415
18) 18 912
19) 44 449
20) 3,7 mld.
21) 1,7 mld.
22) 2,5 %
23) 0,9 %
24) 2,3 %
25) 1,6 %
26) 2,1 %
27) 186 560
28) 9 let
29) 15,5 let
30) 13 let
31) 21 let
32) 2036

3.5 Finanční matematika

Poslední oblastí, kterou se v této práci budeme zabývat, je složené úrokování. Většina z nás s ním má zkušenosti, jelikož se velmi často používá při uzavírání různých finančních produktů.

Pro jednoduchost nás budou zajímat pouze takové případy, ve kterých si klient uloží danou částku s pevnou úrokovou mírou na určitou dobu a během této doby žádné finanční obnosy nepřikládal ani nevybíral.

3.5.1 Složené úrokování

Složené úrokování je založené na principu připisování úroků k původnímu kapitálu (peněžní částce) a v následujícím období se tento zúročený obnos bere jako základ pro další úrokování. Budeme vycházet z tzv. polhůtního úrokování (úroky se budou platit na konci úrokovacího období), přičemž bychom neměli zapomenout na odečtení 15% daně z příjmu, kterou banka odvede státu ([3], s. 22).

Za těchto předpokladů lze složené úrokování vyjádřit rovnicí:

$$I_n = I_0 \cdot (1 + 0,85 \cdot p)^n, \tag{23}$$

kde I_n je částka (v Kč) uspořená na konci úrokovacího období, I_0 je původní částka (v Kč), kterou vkladatel uložil do banky, p je roční úroková míra vyjádřená jako desetinné číslo a n je úrokovací období (v letech). Hodnota $0,85$ ve vzorci (23) značí daň z úroku ve výši 15 % ([10], s. 60).

Úroková míra (někdy také úroková sazba) udává procentní navýšení vložené (půjčené) částky za určité úrokovací období [44].

Úrokovací období je doba, za kterou se úroky pravidelně připisují. Zpravidla bývá toto období: roční, značíme p. a. (per annum),
pololetní, značíme p. s. (per semestre),
čtvrtletní, značíme p. q. (per quartalae),
měsíční, značíme p. m. (per mensem) ([3], s. 12).

Pokud je úrokovací období kratší než jeden rok (úroky se připisují m krát do roka), potom je rovnice (23) pro složené úrokování mírně upravena a platí:

$$I_n = I_0 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot \frac{p}{m}\right)^{m \cdot n}. \tag{24}$$

Platí, že pro úrokovací období: pololetní ($m = 2$), čtvrtletní ($m = 4$), měsíční ($m = 12$).

Příklad 29: Vkladatel si uložil do banky na počátku roku 2001 na vkladní knížku s výpovědní lhůtou 2 roky 16 000 Kč. Roční úroková míra byla pro tento vklad 5 % s úrokovacím obdobím 1 rok. Kolik korun měl na konci roku 2002? ([10], s. 58)

Řešení: 1. způsob

Vypíšeme si informace ze zadání: $n = 2$ roky, $I_0 = 16\ 000$ Kč, $p = 5\ \% = 0{,}05$, $I = ?$. Víme, že úrokovací období je jeden rok, dosadíme proto do (23) a neznámou hodnotu vypočítáme:

$$I = 16000 \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,05)^2,$$

$$I = 16000 \cdot (1,0425)^2,$$

$$I = 17388,9.$$

Odpověď: Vkladatel měl na konci roku 2002 na vkladní knížce částku 17 388,90 Kč.

Řešení: 2. způsob

Příklad můžeme řešit také bez použití vzorce, pouze s využitím principu složeného úrokování. Na počátku roku 2001 byl vklad 16 000 Kč. Na konci roku 2001 přibyl ke vkladu úrok z vložené částky snížený o 15 % (daň z příjmu). K celé této částce přibyl na konci roku 2002 opět čistý úrok, tentokrát však z částky na konci roku 2001 (princip složeného úrokování). Stručně to můžeme popsat následujícím způsobem:

vklad na počátku roku 2001	16000 Kč
čistý úrok za rok 2001	$(16000 \cdot 0,05 \cdot 0,85)$ Kč
částka na konci roku 2001	$(16000 + 16000 \cdot 0,05 \cdot 0,85)$ Kč
čistý úrok za rok 2002	$[(16000 + 16000 \cdot 0,05 \cdot 0,85) \cdot 0,05 \cdot 0,85]$ Kč
částka na konci roku 2002	$(16000 + 16000 \cdot 0,05 \cdot 0,85) +$
	$[(16000 + 16000 \cdot 0,05 \cdot 0,85) \cdot 0,05 \cdot 0,85]$ Kč $=$
	$= 17388,90$ Kč

I tímto způsobem jsme došli ke stejnému výsledku. Kdybychom použili vytýkání u jednotlivých, výše uvedených výrazů, došli bychom k finálnímu vztahu, který jsme použili v případě 1. řešení. Ačkoliv byl tento druhý způsob řešení delší, bylo zde daleko názorněji ukázáno, jak k výsledné částce dojdeme.

Odpověď: Vkladatel měl na konci roku 2002 na vkladní knížce částku 17 388,90 Kč.

Příklad 30: Kolik peněz musí klient uložit do banky, aby při roční úrokové míře 8,5 % měl za 5 let 25 000 Kč? Úrokovací období je čtvrtletní.

Řešení: Nyní máme k dispozici p = 8,5 % = 0,085, n = 5 let, I = 25 000 Kč, $I_0 = ?$. Vzhledem k tomu, že úrokovací období je čtvrtletní ($m = 4$), vyjdeme tentokrát ze vztahu (24):

$$25000 = I_0 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot \frac{0,085}{4}\right)^{4 \cdot 5},$$

$$25000 = I_0 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,02125\right)^{20},$$

$$I_0 = \frac{25000}{\left(1 + 0,85 \cdot 0,02125\right)^{20}},$$

$$I_0 \doteq 17476,4.$$

Odpověď: Klient musí do banky uložit 17 476,40 Kč.

Příklad 31: Jak dlouho byl uložený kapitál ve výši 15 000 Kč, jestliže při úrokové sazbě 4 % p. a. vzrost na 21 000 Kč? ([3], s. 28)

Řešení: Opět si zaznamenáme hodnoty, které máme k dispozici: I_0 = 15 000 Kč, p = 4 % = 0,04, I = 21 000 Kč a n = ?. Úrokovací období je p. a. (roční), proto k řešení využijeme (23):

$$21000 = 15000 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,04\right)^{n},$$

$$\frac{7}{5} = \left(1 + 0,85 \cdot 0,04\right)^{n}.$$

Celou rovnici zlogaritmujeme a hodnotu n vypočítáme:

$$ln\left(\frac{7}{5}\right) = n \cdot ln\left(1 + 0,85 \cdot 0,04\right),$$

$$n = \frac{ln\left(\frac{7}{5}\right)}{ln\left(1 + 0,85 \cdot 0,04\right)},$$

$$n \doteq 10.$$

Odpověď: Kapitál byl uložený přibližně 10 let.

Příklad 32: Jaký by musel být úrok při složeném úrokování, aby za 5 let vklad 10 000 Kč vzrostl o polovinu? [34]

Řešení: V zadání nemáme jasně stanoveno, jaké má být úrokovací období. Zkusme proto vypočítat úrokovou míru dvakrát - nejprve s ročním úrokovacím obdobím a poté s měsíčním úrokovacím obdobím. Bude zajímavé zkoumat, jak se budou jednotlivé úrokové míry lišit.

1) roční úrokovací období: Chceme zjistit úrokovou míru $p = ?$, jestliže $n = 5$ let, $I_0 = 10\ 000$ Kč a $I = 10\ 000 + \frac{1}{2} \cdot 10\ 000 = 15\ 000$ Kč. Podobně jako při řešení předchozích příkladů vyjdeme z rovnice (23):

$$15000 = 10000 \cdot (1 + 0,85 \cdot p)^5,$$

$$\frac{3}{2} = (1 + 0,85 \cdot p)^5.$$

Rovnici odmocníme a určíme úrokovou míru p:

$$\sqrt[5]{\frac{3}{2}} = 1 + 0,85 \cdot p,$$

$$p = \frac{\sqrt[5]{\frac{3}{2}} - 1}{0,85},$$

$$p \doteq 0,099.$$

Odpověď: Úrok by musel být asi 9,9 %.

2) měsíční úrokovací období: Hodnoty jsou stejné jako u předchozího výpočtu, jen počítáme s měsíčním úrokovacím obdobím ($m = 12$). Použijeme vztah (24):

$$15000 = 10000 \cdot (1 + 0,85 \cdot \frac{p}{12})^{12 \cdot 5},$$

$$\frac{3}{2} = (1 + 0,85 \cdot \frac{p}{12})^{60}.$$

Rovnici odmocníme a určíme úrokovou míru p:

$$\sqrt[60]{\frac{3}{2}} = 1 + 0,85 \cdot \frac{p}{12},$$

$$p = 12 \cdot \frac{\sqrt[60]{\frac{3}{2}} - 1}{0,85},$$

$$p \doteq 0,096.$$

Odpověď: Úrok by musel být asi 9,6 %.

Úroková míra v závislosti na úrokovacím období

Z právě vyřešeného příkladu je patrné, že když bude úrokovací období měsíční (vklad se úročí častěji), je úroková míra nižší, než u ročního úrokování, a přesto dosáhneme stejného obnosu. Při uzavírání finančích produktů proto není vždy výhodné hledět jen na úrokovou míru, ale měli bychom ji uvažovat v závislosti na úrokovacím období. Někdy je totiž rentabilnější nižší úroková míra, ale s častějším úrokováním.

3.5.2 Příklady k procvičování

Složené úrokování

1) Občan uložil na počátku roku do banky 24 000 Kč na termínovaný vklad na 3 roky s roční úrokovou mírou 5,5 %. Úrokovací období je 1 rok. Jak velkou částku bude mít na termínovaném vkladu na konci třetího roku? ([10], s. 65)

2) Vkladatel uložil na počátku roku do banky 15 000 Kč na termínovaný vklad na 1 rok s roční úrokovou mírou 2,4 %. Úrokovací období je 1 rok. Jakou celkovou částku bude mít na termínovaném vkladu na konci roku? ([11], s. 21)

3) Na účet s roční úrokovou mírou 4 % se uloží na počátku roku částka 100 000 Kč. Úroky se připisují na konci každého roku. Kolik peněz bude na účtu po deseti letech? ([16], s. 236)

4) Počátkem roku uložil pan Novák do banky 50 000 Kč. Vklad je úročen 8 % ročně. Kolik korun bude mít na účtu po 4 letech? ([12], s. 71)

5) Uložili jsme částku 12 000 Kč. Jaká bude výše kapitálu za 3 roky, jestliže úroková sazba bude 5 % p. a.? ([3], s. 23)

6) Do banky vložíme 150 Kč. Na jakou částku vzroste tento vklad za 7 let při roční úrokové míře 2,5 %? [34]

7) Vkladatel si může uložit 16 000 Kč na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 5 %. Jakou částku by obdržel za 2 roky, pokud je úrokovací období pololetní? Porovnej tento příklad s řešeným příkladem 29. Je pro vkladatele výhodnější roční nebo pololetní úrokovací období? ([10], s. 59)

8) Vkladatel uložil na počátku roku na termínovaný vklad na 4 roky částku 12 500 Kč. Roční úroková míra je 6,2 %. Jak vysokou částku bude mít na konci čtvrtého roku, je-li úrokovacím obdobím polovina roku? ([10], s. 65)

9) Jak se po uplynutí 10 let zhodnotí jednorázový vklad 4 000 Kč investovaný na účet s 4% roční úrokovou mírou, pokud se úroky připisují na konci každého úrokovacího období, jehož délka je půl roku? ([16], s. 89)

10) Vkladatel uložil na počátku roku na termínovaný účet na 2 roky částku 32 000 Kč. Roční úroková míra je 2 %. Jak vysokou částku bude mít na účtu na konci druhého roku, jestliže je úrokovací období čtvrtletní? ([11], s. 21)

11) Občan si uložil 12 000 Kč. Jak vysokou částku může očekávat za 3 roky, jestliže úrokovací období bude čtvrtletní a úroková sazba činí 5 % p. a.? ([3], s. 24)

12) Vkladatel uložil na termínovaný vklad na 1 měsíc částku 50 000 Kč, roční úroková míra je 1,95 %. Jak vysoká částka mu bude po jednom měsíci vyplacena? ([11], s. 21)

13) Do banky uložíme 10 000 Kč. Kolik peněz budeme mít po 1 roce, jestliže nám úroky ve výši 9 % připisují měsíčně? ([12], s. 72)

14) Na vkladní knížku s 2 % p. a. jsme uložili začátkem roku 700 Kč. Úroky se připisují měsíčně. Kolik korun si budeme moci vybrat na konci září? [38]

15) Kolik musíme uložit, abychom za 5 let při úrokové sazbě 5 % p. a. získali kapitál ve výši 100 000 Kč? ([3], s. 30)

16) Kolik korun musíme uložit na spořicí účet, jestliže chceme mít po šesti letech částku 66 000 Kč? Úroková míra je 4 % p. a.

17) Kolik korun musíme vložit do banky, abychom po 3 letech měli k dispozici 30 000 Kč, pokud banka každoročně připisuje na konci roku 2 %? [34]

18) Jakou částku musíme uložit do banky, abychom měli při úrokové sazbě 9 % p. a. za 12 let částku 120 000?

19) Jak dlouho byl uložen kapitál 2 300 000 Kč, jestliže vzrostl při 9% úroku p. a. na hodnotu 4 995 347 Kč? ([3], s. 27)

20) Na začátku roku si do banky uložíš na vkladní knížku částku 35 000 Kč s roční úrokovou mírou 2,2 %. Banka úročí jednou ročně. Urči, za jak dlouho bude na vkladní knížce částka 37 000 Kč. [38]

21) V lednu jsme do banky uložili na vkladní knížku částku 32 000 Kč s úrokovou mírou 1,8 %. Banka úročí jednou ročně. Urči, za kolik let nejdříve bude na vkladní knížce částka 34 000 Kč.

22) Na jakou dobu je třeba vložit do banky 10 000 Kč, aby se tato částka zdvojnásobila při 5% ročním úrokování? [34]

23) Za jaký čas se vklad vložený do spořitelny na 3,3 % p. a. při celoročním úročení zdvojnásobí? [35]

24) Urči, jak dlouho musel být uložený kapitál, který při pololetním úročení vzrost ze 150 000 Kč při roční úrokové sazbě 4 % na 180 000 Kč. ([3], s. 28)

25) Jaká byla roční úroková sazba, jestliže kapitál 20 000 Kč vzrostl ze 4 roky na hodnotu 27 400 Kč? ([3], s. 32)

26) Jistina 200 000 Kč byla uložena na vkladní knížce. Po sedmi letech nabyla hodnoty 300 000 Kč. Na jaký roční úrok byla uložena?

27) Jaký by musel být roční úrok při složeném úrokování, aby za 8 let vklad 10 000 Kč vzrostl o polovinu?

28) Kolika procenty byl úročen vklad 20 000 Kč, jestliže za 10 let vzrostl na 30 000 Kč? Úrokovací období bylo pololetní.

3.5.3 Výsledky

Složené úrokování

1) 27 525,80 Kč
2) 15 306 Kč
3) 139 702,90 Kč
4) 65 051,20 Kč
5) 13 596 Kč
6) 173,80 Kč
7) 17 404 Kč; pololetní
8) 15 391,30 Kč
9) 5 603,80 Kč
10) 33 104,30 Kč
11) 13 622,70 Kč
12) 50 069,10 Kč
13) 10 792,40 Kč
14) 709 Kč
15) 81 211,90 Kč
16) 54 003,40 Kč
17) 28 520,60 Kč
18) 49 546,50 Kč
19) 10,5 let
20) 3 roky
21) 4 roky
22) 16,7 let
23) 25,1 let
24) 5,4 let
25) 9,6 %
26) 7 %
27) 6,1 %
28) 4,8 %

4 ZÁVĚR

Cílem bakalářské práce bylo vytvořit sbírku příkladů z reálných situací, ve kterých se objevuje exponenciální nebo logaritmická závislost. Celkem je v práci ukázáno osm oblastí, ve kterých se s těmito aplikacemi můžeme setkat.

Každá kapitola obsahuje jak vzorově řešené příklady, tak především neřešenou část, ve které je dostatek úloh k procvičování. U některých řešených příkladů jsou uvedeny dva různé způsoby řešení, přičemž jeden postup využívá většinou vzorec, zatímco druhý postup je založený spíše na teoretické úvaze.

Sbírku mohou využít nejen učitelé, jako zdroj příkladů, ale také samotní studenti k procvičování. Snáze si tak uvědomí, kde všude se s matematikou mohou setkat a jakou důležitou pozici zaujímá matematika v běžném životě.

5 LITERATURA A ZDROJE

Literatura

[1] BARTUŠKA, K.: *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy.* Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-037-3.

[2] BERÁNEK, L., SINGER, J.: *Vybrané kapitoly z aplikované matematiky.* České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2007. ISBN 978-80-7394-037-9.

[3] ČÁMSKÝ, F.: *Finanční matematika.* Brno: Masarykova univerzita, 1997. ISBN 80-210-1509-8.

[4] HRADILEK, L., STEHLÍK, E.: *Matematika pro geology.* Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1990. ISBN 80-03-00384-9.

[5] KUBÁT, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, 2004. ISBN 978-80-7196-298-4.

[6] KUBÁT, J., HRUBÝ, D., PILGR, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum.* Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-030-6.

[7] LEPIL, O. a kol.: *Fyzika: sbírka úloh pro střední školy.* Praha: Prometheus, 2003. ISBN 978-80-7196-266-3.

[8] MAREČEK, A., HONZA, J.: *Chemie: sbírka příkladů pro studenty středních škol.* Brno: Proton, 2001. ISBN 80-902402-2-4.

[9] ODVÁRKO, O.: *Matematika pro gymnázia: funkce.* Praha: Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-164-7.

[10] ODVÁRKO, O.: *Matematika pro gymnázia: posloupnosti a řady.* Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-391-2.

[11] ODVÁRKO, O.: *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia.* Praha: Prometheus, 2005. ISBN 978-80-7196-314-1.

[12] PETÁKOVÁ, J.: *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7.

[13] PETRÁŠKOVÁ, V., ŠTĚPÁNKOVÁ, H.: *Algebraické funkce a diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2014. ISBN 978-80-7394-473-5.

[14] PILECKÁ, N.: *Vybrané kapitoly z matematiky: studijní materiál pro posluchače Zdravotně sociální fakulty Jihočeské univerzity.* Praha: Manus, 2004. ISBN 80-8657-106-8.

[15] RŮŽKOVÁ, J., ŠKRABAL, J.: *Historický lexikon obcí České republiky 1869-2005.* Praha: Český statistický úřad, 2006. ISBN 80-250-1277-8.

[16] ŘÍDKÁ, E., BLAHUNKOVÁ, D., CHÁRA, P.: *Maturitní otázky - matematika.* Praha: Fragment, 2007. ISBN 978-80-253-0497-6.

[17] ŠTOLL, I.: Fyzika pro gymnázia: fyzika mikrosvěta. Praha: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-241-4.

[18] TESAŘ, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro fyziky.* České Budějovice: Jihočeská univerzita, 1995. ISBN 80-7040-133-8.

[19] VOŠICKÝ, Z.: *Matematika v kostce.* Havlíčkův Brod: Fragment, 2007. ISBN 978-80-253-0191-3.

[20] *Školní atlas světa.* Praha: Kartografie Praha, 2007. ISBN 978-80-7011-925-9.

[21] BURCIN, B., KUČERA, T., ŠÍDLO, L.: Populační vývoj světa aneb trocha statistických dat. *Geografické rozhledy.* 2007, roč. 17, č. 1, str. 22 - 23.

Internetové zdroje

[22] BÖHM, P.: *Zvukové vlnění* [online]. [cit. 2016-03-09]. Dostupné z: http://www.vernier.cz/experimenty/gml/fyzika/f33.pdf

[23] BŘÍŽĎALA, J.: *Výpočty pH* [online]. [cit. 2016-03-14]. Dostupné z: http://e-chembook.eu/vypocty-ph

[24] BUREŠ, J.: *Converter* [online]. 2002 [cit. 2016-03-09]. Dostupné z: http://www.converter.cz/tabulky/hluk.htm

[25] *Diskuse a dotazy Ontola* [online]. 2016 [cit. 2016-03-09]. Dostupné z: http://www.ontola.com/cs

[26] *Graf závislosti tlaku na nadmořské výšc*e [online]. [cit. 2016-03-18]. Dostupné z: http://artemis.osu.cz/MMi/meteo1/diplomka/Ramec2_soubory/AAA/graft.jpg

[27] HESTERIC, R.: *Priklady.eu* [online]. 2016 [cit. 2016-03-05]. Dostupné z: http://www.priklady.eu/cs/Index.alej

[28] *Chemické výpočty* [online]. [cit. 2016-03-15]. Dostupné z: http://chemicke-vypocty.cz/Vypocet-pH.html

[29] KRYNICKÝ, M.: *Elektronická učebnice matematiky* [online]. 2015 [cit. 2016-03-04]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/

[30] MIKEŠOVÁ, V.: *Archeologie na dosah* [online]. [cit. 2016-03-10]. Dostupné z: http://www.archeologienadosah.cz/o-archeologii/metody/datovani

[31] *Molární koncentrace* [online]. [cit. 2016-03-14]. Dostupné z: http://www.aristoteles.cz/chemie/chemicke_vypocty/koncentrace/molarni-koncentrace.php

[32] *pH* [online]. 2016 [cit. 2016-03-14]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/PH

[33] *pH stupnice* [online]. [cit. 2016-03-14]. Dostupné z: http://home.tiscali.cz/chemie/pH.htm

[34] *Priklady.com* [online]. [cit. 2016-04-03]. Dostupné z: http://priklady.com/cs/index.php/posloupnosti-a-rady/aplikace-posloupnosti-jednoduche-a-slozene-urokovani

[35] *Příklady z matematiky* [online]. 2016 [cit. 2016-03-05]. Dostupné z: http://www.hackmath.net/

[36] RICHTER, J.: *Webové stránky určené pro výuku funkcí na střední škole* [online]. 2007 [cit. 2016-03-18]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz//diplomky/jaroslav_richter/kap4/kap4.php?sec=all

[37] *Růst a množení bakterií* [online]. 2013 [cit. 2016-03-27]. Dostupné z: http://kmvd.agrobiologie.cz/randova/AMA73_3_vlkova.pdf

[38] *Sbirkaprikladu.eu* [online]. 2012 [cit. 2016-04-03]. Dostupné z: http://www.sbirkaprikladu.eu/g/99#.VwOmi_Zf1Ms

[39] *Seznam států světa podle počtu obyvatel* [online]. 2016 [cit. 2016-03-20]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Seznam_st%C3%A1t%C5%AF_sv%C4%9Bta_podl

[40] SÚKUPOVÁ, L.: *Výpočet lineárního součinitele zeslabení* [online]. 2014 [cit. 2016-03-05]. Dostupné z: http://www.sukupova.cz/vypocet-linearniho-soucinitele-zeslabeni/

[41] ŠIBRAVOVÁ, L.: *Výuka matematiky na střední škole s využitím Internetu: část II. - Posloupnosti a řady* [online]. 2003 [cit. 2016-03-21]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/posloupnosti/index.htm

[42] *The Statistics Portal* [online]. [cit. 2016-03-20]. Dostupné z: http://www.statista.com/markets/422/international/

[43] *United States Census* [online]. 2015 [cit. 2016-03-20]. Dostupné z: https://www.census.gov/population/international/data/worldpop/table_population.php

[44] *Úroková míra* [online]. [cit. 2016-04-03]. Dostupné z: http://www.usetreno.cz/slovnik-pojmu/urokova-mira/

[45] VAŠČÁK, V.: *Mechanické vlnění* [online]. 2013 [cit. 2016-03-09]. Dostupné z: http://www.vascak.cz/?p=1374&c=73&n=2&u=1#kotva306

[46] *Výpočet pH silných kyselin a zásad* [online]. [cit. 2016-03-14]. Dostupné z: http://www.aristoteles.cz/chemie/ph/vypocet-ph-roztoku-silnych-kyselin-a-zasad.php

[47] *Výpočet pH silných kyselin a zásad - příklady* [online]. [cit. 2016-03-15]. Dostupné z: http://www.aristoteles.cz/chemie/ph/vypocet-ph-roztoku-silnych-kyselin-a-zasad-priklady.php

[48] *Zeměpis nejen pro střední školy* [online]. [cit. 2016-03-20]. Dostupné z: http://zemepis-skola.blogspot.cz/2015/09/geografie-obyvatelstva-studiem.html