



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STAVEBNÍ**

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

**ÚSTAV BETONOVÝCH A ZDĚNÝCH KONSTRUKCÍ**

INSTITUTE OF CONCRETE AND MASONRY STRUCTURES

**STOCHASTICKÁ OPTIMALIZACE  
ŽELEZOBETONOVÝCH KONSTRUKCÍ**

STOCHASTIC OPTIMIZATION OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

**DISERTAČNÍ PRÁCE**

DOCTORAL THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Ing. Jakub Venclovský

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

prof. RNDr. Ing. PETR ŠTĚPÁNEK, CSc.

BRNO 2022

## **Abstrakt**

Tato disertační práce se zabývá vytvořením algoritmu pro stochastickou optimalizaci průřezových charakteristik rovinných rámců. Po krátkém úvodu a vytyčení cílů práce následuje shrnutí poznatků a dosažených výsledků v oblastech deterministické a stochastické optimalizace konstrukcí. V práci je nadále popsána úloha deterministické optimalizace, jak byla řešena v pracích, na které vlastní práce navazuje. Posléze je představena reformulace původní deterministické úlohy do její stochastické podoby a samotný algoritmus řešení včetně způsobu vyhodnocování pravděpodobnosti. Práce je zakončena 6 příklady řešenými vytvořeným algoritmem.

## **Summary**

This Ph.D. thesis deals with creating an algorithm for stochastic optimization of the cross-sectional parameters of flat frames. After a brief introduction and outline of the thesis' goals is the summary of knowledge and results in the areas of deterministic and stochastic structural optimization. Further, the task of deterministic optimization is described, as it was solved in the previous thesis and papers which this thesis follows up on. Afterwards, the reformulation of the deterministic task to its stochastic form is described and the solution algorithm for such a task is introduced. The thesis ends with results of using the introduced algorithm on 6 examples.

## **Klíčová slova**

Stochastická optimalizace konstrukcí, deterministická optimalizace konstrukcí, vyhodnocování spolehlivosti konstrukce, vyhodnocování pravděpodobnosti

## **Keywords**

Stochastic structural optimization, deterministic structural optimization, structural reliability assessment, probability assessment

## **Bibliografická citace**

Venclovský, J. *Stochastická optimalizace železobetonových konstrukcí*. Brno, 2022. 133 s. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav betonových a zděných konstrukcí. Vedoucí práce Prof. RNDr. Ing. Petr Štěpánek, CSc.

Prohlašuji, že jsem disertační práci s názvem *Stochastická optimalizace železobetonových konstrukcí* vypracoval samostatně pod vedením Prof. RNDr. Ing. Petra Štěpánka, CSc. a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

Ing. Jakub Venclovský

Rád bych poděkoval svému školiteli Prof. RNDr. Ing. Petru Štěpánkovi, CSc. za vedení mého doktorského studia a mé disertační práce.

Ing. Jakub Venclovský

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Cíle práce</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Současný stav problematiky</b>	<b>8</b>
3.1	Deterministická strukturální optimalizace . . . . .	8
3.2	Stochastická strukturální optimalizace . . . . .	10
3.3	Popis metod řešení . . . . .	12
3.3.1	Geometrické programování (GP – Geometric Programming) . . . . .	12
3.3.2	Genetický algoritmus (GA – Genetic Algorithm) . . . . .	13
3.3.3	Simulované žihání (SA – Simulated Annealing) . . . . .	14
3.3.4	Metoda Langrangeových multiplikátorů . . . . .	15
3.3.5	Sequential Quadratic Programming (SQP) . . . . .	15
3.3.6	Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky (KKT) . . . . .	16
3.3.7	Harmony search . . . . .	17
3.3.8	Metoda redukováných gradientů (GRG – Generalized Reduced Gradient) . . . . .	17
3.3.9	Artificial Bee Colony (ABC) . . . . .	18
3.3.10	First Order Reliability Method (FORM), Second Order Reliability Method (SORM) . . . . .	19
3.3.11	Evolution Strategies (ES) . . . . .	19
3.3.12	Neuronová síť (NN – Neural Network) . . . . .	19
3.3.13	Simulace Monte Carlo . . . . .	20
3.3.14	Importance Sampling . . . . .	21
3.3.15	Latin Hypercube Sampling (LHS) . . . . .	21
3.3.16	Sequential Optimization and Reliability Assessment (SORA) . . . . .	21
3.3.17	Sequential Approximate Programming (SAP) . . . . .	22
3.3.18	Kriging Surrogate . . . . .	22
3.3.19	Dynamic Kriging . . . . .	22
3.3.20	Discrete Gravitational Search Algorithm (DGSA) . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Deterministická úloha</b>	<b>23</b>
4.1	Popis úlohy deterministické optimalizace . . . . .	23
4.1.1	Vektor návrhových proměnných . . . . .	23

---

4.1.2	Účelová funkce . . . . .	24
4.1.3	Mezní stav únosnosti . . . . .	24
4.1.4	Mezní stav použitelnosti . . . . .	36
4.1.5	Omezení návrhových proměnných . . . . .	36
4.1.6	Optimalizační algoritmus . . . . .	37
4.2	Výpočet ohybové tuhosti při MSP . . . . .	37
4.2.1	Původní metoda . . . . .	37
4.2.2	Navržená metoda . . . . .	38
4.2.3	Výpočet derivací v navržené metodě . . . . .	41
4.2.4	Průřez s dutinou . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Stochastická úloha a algoritmus řešení</b>	<b>47</b>
5.1	Popis úlohy stochastické optimalizace . . . . .	47
5.1.1	Vektor náhodných veličin . . . . .	48
5.2	Algoritmus řešení . . . . .	48
5.2.1	Heuristický algoritmus . . . . .	50
5.2.2	Inicializace výpočtu . . . . .	51
5.2.3	Deterministická optimalizace . . . . .	52
5.2.4	Vyhodnocování pravděpodobnosti . . . . .	53
5.2.5	Vnější smyčka regresní analýzy – iterační postup . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Řešené příklady</b>	<b>70</b>
6.1	Společné zadání pro příklady 1 až 3 . . . . .	70
6.1.1	Společné zadání . . . . .	70
6.2	Př. 1: Náhodnost v zatížení . . . . .	76
6.2.1	Zadání příkladu . . . . .	76
6.2.2	Inicializace výpočtu . . . . .	77
6.2.3	Iterační postup . . . . .	79
6.2.4	Vyhodnocování pravděpodobnosti . . . . .	84
6.2.5	Řešení příkladu . . . . .	91
6.2.6	Verifikace správnosti výsledku . . . . .	91
6.3	Př. 2: Náhodnost v pevnostech . . . . .	97
6.3.1	Zadání příkladu . . . . .	97
6.3.2	Inicializace výpočtu . . . . .	98
6.3.3	Iterační postup . . . . .	99
6.3.4	Řešení příkladu . . . . .	99

---

---

6.3.5	Verifikace správnosti výsledku . . . . .	100
6.4	Př. 3: Náhodnost v zatížení a pevnostech . . . . .	102
6.4.1	Zadání příkladu . . . . .	102
6.4.2	Inicializace výpočtu . . . . .	102
6.4.3	Iterační postup . . . . .	102
6.4.4	Řešení příkladu . . . . .	104
6.4.5	Verifikace správnosti výsledku . . . . .	104
6.5	Společné zadání pro příklady 4 až 6 . . . . .	106
6.5.1	Společné zadání . . . . .	106
6.6	Př. 4: Náhodnost v zatížení a délce . . . . .	111
6.6.1	Zadání příkladu . . . . .	111
6.6.2	Inicializace výpočtu . . . . .	111
6.6.3	Iterační postup . . . . .	111
6.6.4	Řešení příkladu . . . . .	113
6.6.5	Verifikace správnosti výsledku . . . . .	113
6.7	Př. 5: Náhodnost v zatížení, délce, výšce a šířce . . . . .	115
6.7.1	Zadání příkladu . . . . .	115
6.7.2	Inicializace výpočtu . . . . .	116
6.7.3	Iterační postup . . . . .	118
6.7.4	Řešení příkladu . . . . .	118
6.7.5	Verifikace správnosti výsledku . . . . .	119
6.8	Př. 6: Náhodnost v zatížení, délce a odchylkách výšky a šířky . . . . .	120
6.8.1	Zadání příkladu . . . . .	120
6.8.2	Inicializace výpočtu . . . . .	121
6.8.3	Iterační postup . . . . .	121
6.8.4	Řešení příkladu . . . . .	123
6.8.5	Verifikace správnosti výsledku . . . . .	124

**7 Závěr****125**

# 1. Úvod

V poslední době se ve stavebním inženýrství stále více uplatňuje matematická optimalizace. Využití je vícero, od spolehlivé konstrukce vzhledem k působení daného zatížení po efektivní způsob jak provést rekonstrukci dopravního úseku tak, aby došlo k co nejmenšímu narušení dopravy.

Dle nakládání s pravděpodobnostmi se rozlišují dva přístupy k optimalizaci – deterministický a stochastický.

Deterministický přístup, jak naznačuje jeho název, pracuje s jednotlivými hodnotami a nikoliv rozděleními pravděpodobnosti vstupních veličin. (Ačkoliv často jsou tyto hodnoty získány coby reprezentativní hodnoty nějakého pravděpodobnostního rozdělení – obvykle střední hodnota nebo daný kvantil.)

Stochastický přístup, jak již lze dovodit, pak pracuje přímo s rozděleními pravděpodobnosti. To na jednu stranu přináší vyšší výpočetní náročnost, na stranu druhou pak obvykle vzhledem k přesnější reprezentaci pravděpodobnosti vstupních veličin také přesnější výsledky. Rozlišuje se ještě více typů stochastických optimalizačních modelů, jedním z nich je i model s pravděpodobnostními omezeními. Ten se používá zejména pro návrh optimalizované konstrukce (což je zkrátka dáno typem úlohy).

Tato práce se zabývá právě navrhováním optimalizovaných konstrukcí (a sice železobetonových rovinných rámců) pomocí metod stochastické optimalizace. Jak bylo uvedeno, bude se jednat se o stochastický model s pravděpodobnostními omezeními, tj. bude dána pravděpodobnost, s níž má konstrukce odolat danému zatížení. Tedy veličinami, se kterými bude nejčastěji zacházeno plně pravděpodobnostně, jsou zatížení konstrukce a materiálové charakteristiky samotné konstrukce.

U stochastické optimalizace se dále rozdělují typy algoritmů řešení na analytické a simulační. Algoritmy analytické jsou založeny na pravděpodobnostní analýze a obecně je nelze použít k řešení rozsáhlých úloh s požadavkem na vysokou přesnost. Algoritmy simulační využívají diskretizace pravděpodobnosti k vytvoření určitého počtu možných scénářů, na kterých je následně simulována řešená úloha. Každý dílčí scénář potom vlastně představuje jeden deterministický problém.

Jelikož požadovaná přesnost pravděpodobnosti nesplnění mezních stavů konstrukce je příliš vysoká (řádově  $10^{-4}$  až  $10^{-6}$ ) a matematický model současně velmi rozsáhlý (řádově 1500 proměnných a rovnic), je jedinou možností nalezení takového řešení simulační přístup. Simulaci lze samozřejmě provádět efektivně a případně ji lze dále usnadnit ještě dalšími způsoby, což bude také obsahem této práce.



V neposlední řadě se ve stochastické optimalizaci uplatňují heuristické algoritmy. Tj. algoritmy, které neposkytují přesné řešení úlohy ale pouze přibližné. Na druhou stranu vykazují menší výpočetní náročnost. V této práci bude použit právě heuristický algoritmus.

Práce se pro jednoduchost bude omezovat pouze na optimalizaci jednodimenzionálních železobetoových prvků – nosníků. Metody uvedené v práci jsou také přímo použitelné pro optimalizaci rovinných konstrukcí z jednodimenzionálních železobetonových prvků složených – rovinných rámců. Principiálně ale lze všechny uvedené metody upravit i pro složitější typy konstrukcí (2D, 3D).

## 2. Cíle práce

Hlavním cílem práce je vytvořit a ověřit algoritmus pro stochastickou optimalizaci průřezových charakteristik železobetonového průřezu; tento algoritmus bude použit pro řešení rovinného rámu. Navržený algoritmus bude splňovat následující podmínky:

- účelovou funkcí je cena spotřebovaného materiálu,
- matematický model optimalizace zohledňuje namáhání normálovou silou a ohybovým momentem, namáhání smykiem není v optimalizaci zohledněno,
- první skupinou omezujících podmínek je, aby konstrukce v předem definovaných průřezích s požadovanou pravděpodobností vyhověla meznímu stavu únosnosti (MSÚ),
- druhou skupinou omezujících podmínek je, aby konstrukce v předem definovaných průřezích s požadovanou pravděpodobností vyhověla meznímu stavu použitelnosti (MSP),
- mezní stav použitelnosti zohledňuje pouze omezení průhybu,
- mohou být zahrnuta některá další, z hlediska aplikace pro betonové konstrukce obvyklá omezení jako:
  - omezení konkrétních rozměrů průřezu,
  - omezení plochy betonářské výztuže vzhledem k celkové ploše průřezu,
  - vzájemné omezení plochy betonářské výztuže a rozměrů průřezu tak, aby bylo splněno požadované krytí výztuže,
  - případně další podobné.

Hodnoty požadovaných pravděpodobností pro splnění MSÚ a MSP vychází z požadavků daných příslušnou normou [1] (příloha C) – tj. cca  $1-10^{-4}$  až  $1-10^{-6}$  pro únosnost a cca  $1-10^{-1}$  až  $1-10^{-3}$  pro použitelnost (zejména požadovaná pravděpodobnost pro únosnost tak klade velké požadavky na přesnost metody),

Práce navazuje na práce J. Plška ([2]) a I. Laníkové ([3], [4]) soustředěné na deterministickou strukturální optimalizaci. Konkrétní dílčí cíle práce, jejichž naplněním se dosáhne naplnění cíle celé práce jsou pak následující:

1. Reformulace matematického modelu deterministické strukturální optimalizace do stochastické podoby záměnou některých deterministických veličin za stochastické.

2. Vytvoření algoritmu pro efektivní a současně dostatečně přesné vyhodnocování pravděpodobnosti poruchy na stochastickém modelu rovinného rámu.
3. Vytvoření algoritmu, který při stanovení pravděpodobnosti poruchy dle bodu 2, bude optimalizovat parametry průřezů řešeného rámu.

## 3. Současný stav problematiky

Pro celkové shrnutí současného stavu problematiky je vhodné se zabývat jak deterministickou strukturální optimalizací (DBSO – Deterministic Based Structural Optimization) tak stochastickou strukturální optimalizací (RBSO – Reliability Based Structural Optimization). Je to vhodné také vzhledem k principu použitého řešení.

### 3.1. Deterministická strukturální optimalizace

O deterministické optimalizaci v oblasti stavebního inženýrství lze najít velké množství zdrojů. V rešeršním článku [5] jsou vyjmenovány a zevrubně popsány některé algoritmy používané pro deterministickou optimalizaci ve stavebním inženýrství (v jeho libovolných odvětvích). Současně jsou i představeny některé aplikace, kde byl daný algoritmus použit. Rešeršní článek [6] se zabývá pokroky přímo v oblasti deterministické strukturální optimalizace za posledních 15 let. Následující rešeršní část byla vytvořena pomocí obou těchto publikací a monitoruje vývoj v oblasti deterministické strukturální optimalizace přibližně od roku 1990 a to v chronologickém pořadí. Vybrané zmíněné metody řešení jsou pak alespoň zevrubně popsány později – odst. 3.3. Některé informace ohledně vývoje před tímto datem jsou k nalezení např. v [7].

V roce 1992 Chakrabarty v článcích [8], [9] popsal metodu optimalizace ceny železobetonového nosníku s obdélníkovým průřezem, kde nejvýznamnější omezující podmínkou byl mezní stav únosnosti pro ohyb. Úloha byla řešena geometrickým programováním (Geometric Programming – GP).

V roce 1997 Coello Coello, Christiansen a Hernández upravili a rozšířili ve svém článku [7] Chakrabartyho metodu. Nadále optimalizovali cenu nosníku za splnění mezního stavu únosnosti pro ohyb. Pro optimalizaci byl však v jejich práci použit genetický algoritmus (Genetic Algorithm – GA).

Komousis a Arsenis roku 1998 ve svém článku [10] představili způsob optimalizace nosníku, přičemž jejich cílem byla možnost praktického použití. Jejich optimalizace byla multikriteriální a zahrnovala minimalizaci hmotnosti, minimalizaci počtu výztuží a maximalizaci „jednotnosti výztuží“ (snahu o používání stejných poloměrů výztuží). Použili GA coby vyhledávač diskretních řešení, aby v jejich návrhu byly použity reálné běžně používané průměry výztuží.

Lepš a Šejnoha roku 2003 ve svém článku [11] pomocí modifikované metody simulovaného žíhání (Simulated Annealing – SA) cenově optimalizovali nosník obdélníkového

průřezu. Jako omezení jim kromě mezního stavu únosnosti pro ohyb sloužil mezní stav únosnosti pro posouvající sílu.

Roku 2005 Barros, Martins a Barros v článku [12] použili k optimalizaci plochy horní a dolní výztuže v nosníku metodu Lagrangeových multiplikátorů.

Sahab, Ashour a Toropov se v člancích [13], [14] z roku 2005 zabývali optimalizací tloušťky lokálně podepřené desky, rozměrů a vyztužení podpůrných sloupů a základových prvků pomocí GA. Jejich výzkum se soustředil na použití vhodné penalizační funkce v GA. V GA lze s omezujícími podmínkami nakládat dvěma způsoby: vyloučit z populace všechny jedince, kteří je nesplňují (což ale značně omezí šíři prozkoumaných řešení) nebo nesplnění podmínek penalizovat (jedinci, který nesplnil omezující podmínku, je snížena hodnota účelové funkce). Výše penalizace pak odpovídá míře, kterou byla porušena omezující podmínka. V těchto člancích pak byly vyzkoušeny penalizace, které na míře porušení omezení závisely kvadraticky, lineárně a druhou odmocninou.

Guerra a Kioussis se v roce 2006 v článku [15] zabývali optimalizací rámců vícepatrových budov a to (kromě běžně používaných zatížení) pod seismickým zatížením. Použili metodu Sequential Quadratic Programming (SQP).

Kwak a Kim se ve svých člancích [16], [17] z let 2008, 2009 zabývali optimalizací obdélníkového průřezu s omezením na mezní stav únosnosti v ohybu. Toto prováděli pro sloupy a nosníky. Jejich metodologie týkající se nosníků je pak velmi zajímavá. Vytvořili databázi možných diskrétních řešení (vhodné rozměry, vhodné množství výztuže, vhodný poměr výšky a šířky, apod.), která po získání tzv. iniciačního řešení byla využita k získání finálního diskrétního výsledku (zjednodušeně řečeno hledáním v okolí iniciačního řešení). Každý prvek této databáze (tedy určitá kombinace hodnot návrhových proměnných) pak dostala vlastní identifikační číslo (identifikační čísla rostou s rostoucí momentovou odolností). Iniciační řešení bylo v prvním článku získáno pomocí samotné databáze, a sice nalezením vztahu mezi identifikačními čísly a maximálním možným uneseným momentem pomocí regrese. Ve druhém článku bylo iniciační řešení hledáno genetickým algoritmem.

Barros, Barros a Ferreira v článku [18] z roku 2012 využili k řešení cenové optimalizace Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky (KKT).

Bekdas a Nigdeli v roce 2012 v jejich článku [19] využili k optimalizaci ceny T-nosníku algoritmus zvaný jako Harmony Search.

Fedghouche a Tiliouine se v článku [20] z roku 2012 také zabývali cenovou optimalizací nosníků s průřezem tvaru T, tentokrát však k optimalizování použili metodu Generalized Reduced Gradient (GRG).

---

Jahjough, Arafa a Alqedra se v roce 2013 v článku [21] zabývali cenovou optimalizací obdélníkových nosníků pomocí algoritmu Artificial Bee Colony (ABC).

Yousif a Najem v článku [22] z roku 2013 použili k cenové optimalizaci nosníku obdélníkového průřezu GA. K řešení posléze doplnili diskrétní v praxi použitelné uspořádání výztuže. K tomu využili databáze možného uspořádání výztuží (podobně jako Kwak v článcích [16], [17]).

Gare a Angalekar v jejich článku [23] z roku 2016 porovnali algoritmy GRG a SQP při hmotnostní optimalizaci obdélníkového nosníku. Došli k závěru, že rozdíl výsledků mezi těmito algoritmy je minimální (0,18 %) a volba algoritmu by tak měla probíhat na základě snadnosti implementace.

## 3.2. Stochastická strukturální optimalizace

Stochastická strukturální optimalizace je disciplínou, která se začala rozvíjet teprve relativně nedávno, což odpovídá její výpočetní náročnosti ve srovnání s optimalizací deterministickou. Následující rešeršní část byla vytvořena pomocí webového vyhledávání vědeckých článků a je opět zpracována chronologicky. Něco o historii strukturální stochastické optimalizace před zde prvním zmíněným článkem z roku 1997 je k nalezení např. v [24]. Mezi dříve vyvinuté metody patří zejména First Order Reliability Method – FORM a Second Order Reliability Method – SORM. Vývoj se dále ubíral směrem spíše k různým simulačním metodám.

Pu, Das a Faulkner ve svém článku [25] z roku 1997 nastínili jednoduchý algoritmus pro stochastickou optimalizaci konstrukcí složené z více prvků. Jelikož se v konstrukci prolínají pravděpodobnosti poruch jednotlivých prvků, jsou v každé další iteraci aktualizovány pravděpodobnostní omezení na tyto dílčí prvky tak, aby některé z nich nebyly spolehlivé zbytečně moc, zatímco jiné nebyly spolehlivé málo a tak snižovaly celkovou spolehlivost konstrukce.

V roce 2002 Papadrakis a Lagaros v článku [26] vyvinuli stochastickou optimalizaci železobetonových 3D rámců. O optimalizaci se v jejich případě stará algoritmus založený na Evolution Strategies (ES). K vyhodnocení jednotlivých omezujících podmínek (deterministických i pravděpodobnostních) je používán algoritmus z oblasti neuronových sítí (Neural Networks – NN).

Liu, Chen Sheng a Gea se ve svém článku [27] z roku 2003 zabývali vývojem algoritmu pro stochastickou optimalizaci nosných prvků (obecně ne stavebnických). Stochastická optimalizace v jejich případě probíhala jako sekvence optimalizací deterministických,

mezi kterými byla vyhodnocována spolehlivost současného řešení a nalézáno nové řešení, kterým mělo dojít ke zlepšení spolehlivosti při co nejmenším zhoršení hodnoty účelové funkce. K vyhodnocení spolehlivosti používali metodu Sequential Optimization and Reliability Assessment (SORA).

Tsompanakis a Papadrakis v článku [28] z roku 2004 navázali na předchozí článek [26] a dále ho rozšiřují. I tento článek využil k optimalizaci Evolution Strategies, vyhodnocování dílčích kroků ale probíhá pomocí metody konečných prvků a simulací Monte Carlo (za použití určitého Importance Sampling k omezení velikosti vzorku).

Roku 2006 se Cheng, Xu a Jiang v článku [29] věnovali stochastické optimalizaci nosníků pomocí metody Sequential Approximate Programming (SAP). Řešený model v mnohém odpovídá modelu v článku [26].

Aoues a Chateauneuf v článku [30] z roku 2008 v mnohém navazují na článek [25]. Výsledný algoritmus odpovídá původnímu. Liší se způsob vyhodnocování omezujících podmínek v dílčích krocích. K tomu je zde využit interakční diagram.

Dubourg, Sudret a Bourinet se v roce 2011 v článku [31] zabývali vývojem algoritmu pro stochastickou optimalizaci využívajícímu metodu Kriging Surrogate.

Lee, Choi a Zhao se roku 2011 v článku [32] věnovali stochastické optimalizaci za využití metody Dynamic Kriging, která je principiálně podobná metodě Kriging Surrogate.

V článku [33] z roku 2013 Khatibinia, Salajegheh, Salajegheh a Fadaee vyvinuli algoritmus pro stochastickou optimalizaci ceny železobetonových konstrukcí zahrnující konečně-prvkový model interakce konstrukce se zemínou. Algoritmus využívá metody Discrete Gravitational Search Algorithm (DGSA).

Yazdani, Khatibinia, Gharehbaghi a Hatami v článku [34] z roku 2016 opět řeší stochastickou optimalizaci a to za použití stejných metod jako v předchozím článku [33]. Tentokrát je však cílem zájmu seismická spolehlivost.

### 3.3. Popis metod řešení

#### 3.3.1. Geometrické programování (GP – Geometric Programming)

GP ([35]) je optimalizační metoda pro řešení úlohy tvaru:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad & \text{za podmínek:} \\ g_j(\mathbf{x}) & \leq 1, \quad j = 1, \dots, m, \\ h_k(\mathbf{x}) & = 1, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.1)$$

kde  $f, g_1, \dots, g_m$  jsou tzv. posynomy a  $h_1, \dots, h_n$  jsou tzv. monomy. Monom je zde definován jako reálná funkce reálné proměnné tvaru:

$$h(\mathbf{x}) = c x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_M^{a_M}, \quad (3.2)$$

kde pro něj v rámci geometrického programování platí

$$c > 0, \quad x_1, \dots, x_M > 0, \quad a_1, \dots, a_M \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

na rozdíl od klasické matematiky, kde pro monom obvykle platí

$$c \in \mathbb{R}, \quad x_1, \dots, x_M \in \mathbb{R}, \quad a_1, \dots, a_M \in \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

přičemž  $\mathbb{R}$  značí množinu reálných čísel a  $\mathbb{N}$  množinu přirozených čísel.

Posynom pak lze definovat jako sumu monomů, tedy

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^L c_l x_1^{a_{1l}} x_2^{a_{2l}} \dots x_M^{a_{Ml}}, \quad (3.5)$$

kde opět

$$c_l > 0, \quad x_1, \dots, x_M > 0, \quad a_{1l}, \dots, a_{Ml} \in \mathbb{R} \quad \text{pro } l = 1, \dots, L, \quad (3.6)$$

na rozdíl od polynomu z klasické matematiky, pro který

$$c_l \in \mathbb{R}, \quad x_1, \dots, x_M \in \mathbb{R}, \quad a_{1l}, \dots, a_{Ml} \in \mathbb{N} \quad \text{pro } l = 1, \dots, L. \quad (3.7)$$



Řešení takovéto úlohy je robustní a efektivní.

### 3.3.2. Genetický algoritmus (GA – Genetic Algorithm)

GA ([36]) je heuristická metoda používaná pro optimalizaci. Její základní varianta funguje následovně. Metoda začíná z náhodně vygenerované populace  $n$   $I$ -bitových chromozomů (možných řešení, která jsou tímto způsobem zakódována).

Kódování je třeba provádět způsobem odpovídajícím možnému rozsahu hledaných řešení a jejich přesnosti. Pokud např. bude hledané řešení v rozsahu 0 až 1 s přesností na 3 desetinná místa, je taková řešení možno zakódovat do 10 bitů jako

$$\begin{array}{rcl}
 0,000 & \dots & 0000000000 \quad (0), \\
 0,001 & \dots & 0000000001 \quad (1), \\
 0,002 & \dots & 0000000010 \quad (2), \\
 & & \vdots \\
 1,000 & \dots & 1111101000 \quad (1000).
 \end{array} \tag{3.8}$$

(Při zachování deseti bitů je možno tuto množinu rozšířit o dalších 23 možných řešení.)

Pro každý chromozom se pak stanoví, jak je vyhovující coby řešení problému (jaké hodnoty účelové funkce dosáhne jím zakódované možné řešení).

Samotný průběh GA má 3 fáze.

První fází je dědění. Jsou vybrány dvojice chromozomů pro reprodukci. Daný chromozom je vybrán tím pravděpodobněji (popř. i vícekrát), čím více je vyhovující coby řešení problému.

Následuje fáze křížení. Pro každý pár chromozomů se vybere pořadí bitu, od kterého se zamění zbývající bity tohoto páru chromozomů a vzniknou tak dva potomci. Např.:

$$\begin{array}{l}
 \text{rodičovské chromozomy} \quad \underline{10000010} \quad \text{a} \quad \overline{11101011} \quad \text{se budou křížit od 5. bitu,} \\
 \text{výsledkem jsou potomci} \quad \underline{10001011} \quad \text{a} \quad \overline{11100010}.
 \end{array} \tag{3.9}$$

Poslední je fáze mutace. V tomto kroku jsou s malou pravděpodobností změněny všechny bity chromozomu. Např.:

$$\begin{array}{l}
 \text{chromozom} \quad 10001011 \quad \text{náhodně mutuje v 6. bitu,} \\
 \text{výsledkem je} \quad 10001\underline{1}11.
 \end{array} \tag{3.10}$$

Tento postup se opakuje, dokud není naplněna daná ukončující podmínka – např. dostatečný počet generací nebo dostatečně malé zlepšení mezi po sobě následujícími generacemi.

### 3.3.3. Simulované žíhání (SA – Simulated Annealing)

SA (kapitola 2 v [37]) je opět heuristickou metodou inspirovanou žíháním v metalurgii. Vychází z toho, že ve statistické termodynamice je pravděpodobnost  $P_\alpha$ , že se systém nachází ve stavu  $\alpha$  o energii  $E_\alpha$  a teplotě  $T$ , určena z Boltzmannova rozdělení, tj.

$$P_\alpha = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_\alpha}{k_\beta T}}, \quad (3.11)$$

kde  $k_\beta$  je Boltzmannova konstanta a  $Z$  je tzv. partiční funkce tvaru

$$Z = \sum_{\beta} e^{-\frac{E_\beta}{k_\beta T}}, \quad (3.12)$$

tedy suma přes všechny stavy  $\beta$  o energii  $E_\beta$  a teplotě  $T$ . Při vysoké teplotě  $T$  se Boltzmannovo rozdělení blíží rovnoměrnému rozdělení pro všechny stavy bez ohledu na jejich energii. Jak se však  $T$  blíží nule, roste pravděpodobnost stavů s minimální energií.

V samotné metodě SA je tohoto principu využito tak, že se zvolí výchozí vysoká hodnota  $T$  a výchozí možné řešení  $\alpha$ . Z něj se náhodně vygeneruje nový možný stav  $\alpha_1 = \alpha + \Delta\alpha$ , pro který se vyhodnotí  $\Delta E_{\alpha_1} = E_{\alpha_1} - E_\alpha$ . Jestliže  $\Delta E_{\alpha_1} < 0$ , bude  $\alpha_1$  výchozím stavem do dalšího kroku. Jestliže  $\Delta E_{\alpha_1} \geq 0$  bude  $\alpha_1$  výchozím stavem do dalšího kroku pouze s pravděpodobností  $P = e^{-\frac{\Delta E_{\alpha_1}}{T}}$ , jinak zůstane výchozím stavem dalšího kroku původní  $\alpha$ . Sníží se hodnota  $T$  a krok se opakuje, dokud není hodnota  $T$  dostatečně nízká.

Tímto způsobem je eliminována situace, kdy se algoritmus hledání řešení nemůže pohnout z dosaženého lokálního minima. Důležitým parametrem celé metody je rychlost klesání hodnoty  $T$ . Vyšší rychlost klesání  $T$  způsobí rychlejší nalezení řešení, které ale současně může být méně přesné, a naopak.

### 3.3.4. Metoda Lagrangeových multiplikátorů

Metoda Lagrangeových multiplikátorů (např. [38]) je optimalizační metoda pro řešení úlohy:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad & \text{za podmínky:} \\ g(\mathbf{x}) &= 0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

kde  $\mathbf{x} = \{x_i, i = 1, \dots, n\}$ .

Aby funkce  $f$  dosáhla extrému na  $g$  musí gradienty obou funkcí splynout. To nastane, když bude platit, že gradient  $\nabla f$  je násobkem gradientu  $\nabla g$ . Tedy

$$\nabla f = -\lambda \nabla g. \tag{3.14}$$

Z rovností dvou vektorů plyne

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.15}$$

Výsledkem je tedy  $n+1$  rovnic (včetně původní podmínky  $g(\mathbf{x}) = 0$ ) o  $n+1$  neznámých. Pro více podmínek optimalizace  $g_1, \dots, g_m$  bude podmínka (3.14) nahrazena podmínkou

$$\nabla f + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j = 0. \tag{3.16}$$

Koeficienty  $\lambda$  a  $\lambda_j$  se nazývají Lagrangeovy multiplikátory. Zmíněné podmínky (3.14), (3.16) jsou nutnými podmínkami pro dosažení extrému, nikoliv však podmínkami dostačujícími.

### 3.3.5. Sequential Quadratic Programming (SQP)

SQP ([39]) slouží k řešení optimalizační úlohy, která je totožná s úlohou řešenou pomocí Lagrangeových multiplikátorů, tedy:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad & \text{za podmínek:} \\ g_j(\mathbf{x}) &= 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{3.17}$$

K tomu využívá Hessovu matici, která pro funkci  $f(\mathbf{x})$  nabývá tvaru

$$H(f(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Průběh metody začíná od výchozí aproximace řešení  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , výchozí aproximace příslušných Lagrangeových multiplikátorů  $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^m$  (viz metoda Langrangeových multiplikátorů) a výchozí aproximace Hessovy matice  $\mathbf{H}_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{H}_0 = H(f(\mathbf{x}_k))$ . Z předchozích aproximací  $\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k, \mathbf{H}_k$  se vytvoří nové aproximace  $\mathbf{x}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, \mathbf{H}_{k+1}$  tak, že je formulován a vyřešen kvadratický podproblém:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}_k \mathbf{d} + f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \quad \text{za podmínek:} \\ & \nabla g_j(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d} + g_j(\mathbf{x}_k) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Je-li  $\mathbf{d}_k$  řešením tohoto podproblému a  $\boldsymbol{\mu}_k$  jemu příslušné Lagrangeovy multiplikátory, pak další aproximace nabývá tvaru:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k, \\ \boldsymbol{\lambda}_{k+1} &= \boldsymbol{\lambda}_k + \alpha_k (\boldsymbol{\mu}_k - \boldsymbol{\lambda}_k), \end{aligned} \quad (3.20)$$

kde  $\alpha_k \in (0,1)$  je vhodná délka kroku.

### 3.3.6. Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky (KKT)

KKT podmínky (např. kapitola 1.8.1 v [40]) představují nutné ale nikoliv dostačující podmínky pro nalezení extrému funkce. Jsou rozšířením metody Lagrangeových multiplikátorů o podmínky dané nerovnostmi. Pro optimalizační úlohu

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \quad \text{za podmínek:} \\ & g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ & h_k(\mathbf{x}) \leq 0, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.21)$$

nabývají KKT podmínky tvaru (porovnat s (3.14) a (3.16)):

$$\nabla f = - \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j - \sum_{k=1}^n \mu_k \nabla h_k, \quad (3.22)$$

kde koeficienty  $\lambda$  a  $\mu$  se nazývají KKT multiplikátory.

Důvod, proč tato rovnice nadále platí, jsou tzv. podmínky komplementarity. Pro podmínky  $h_k(\mathbf{x}) \leq 0$  dochází ke dvěma možným situacím:

1. Extrém leží na hranici množiny dané nerovností. Pak lze s nerovností zacházet jako s rovností  $h_k(\mathbf{x}) = 0$  a oproti Lagrangeovým multiplikátorům se nejedná o žádnou změnu.
2. Extrém leží uvnitř množiny dané nerovností. Pak lze s nerovností zacházet jako s ostrou nerovností  $h_k(\mathbf{x}) < 0$ , která bude muset být později ověřena, ale rovnice (3.22) nadále platí za předpokladu, že příslušné  $\mu_k = 0$ .

Odtud jsou odvozeny zmíněné podmínky komplementarity, které říkají:

$$\mu_k h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.23)$$

### 3.3.7. Harmony search

Harmony search ([41], [42]) je podobně jako GA nebo SA heuristickou metodou, tentokrát inspirovanou způsobem, kterým improvizují muzikanti. Podobně jako v GA se zde pracuje se třemi metodami generování nových řešení. První je, že muzikant hraje již známou melodii (možné řešení) z paměti. Druhá, že muzikant toto pamatované řešení improvizací mírně pozmění. A třetí, že skládá melodii zcela novou. Použití paměti na melodie zde plní roli výběru nejvhodnějších řešení podobně jako v GA. Podobně jako v SA se zde pak pracuje s pravděpodobnostmi, dle nichž se odvíjí další kandidáti na řešení úlohy.

### 3.3.8. Metoda redukovaných gradientů (GRG – Generalized Reduced Gradient)

GRG ([43]) je iterační metoda, která využívá gradientů k postupnému nalezení extrému. Zjednodušeně řečeno metoda funguje následovně. V optimalizační úloze

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad & \text{za podmínek:} \\ g_j(\mathbf{x}) &= 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ h_k(\mathbf{x}) &\leq 0, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.24)$$

nejprve dojde k tomu, že podmínky dané nerovnostmi se změny na podmínky dané rovnostmi přidáním  $n$  proměnných  $y_1, \dots, y_n$ . Nová úloha bude vypadat takto ( $\mathbf{y}$  bylo do parametrů účelové funkce přidáno čistě formálně):

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad & \text{za podmínek:} \\ g_j(\mathbf{x}) &= 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ h_k(\mathbf{x}) + \mathbf{y} &= 0, \quad k = 1, \dots, n, \\ \mathbf{y} &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Platí  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)$  a  $m < M$  – v opačném případě by systém měl jednoznačné nebo žádné řešení a nejednalo by se o optimalizaci. V systému nyní je  $M + n$  proměnných a  $m + n$  rovnic. Proměnné lze rozdělit na  $m + n$  tzv. základních proměnných  $\mathbf{b}$  (basic) a  $M - m$  tzv. nezákladních proměnných  $\mathbf{nb}$  (nonbasic), přičemž platí, že základní proměnné lze z rovnic vyjádřit pomocí nezákladních proměnných. V průběhu výpočtu je možné základní a nezákladní proměnné libovolně zaměňovat, samozřejmě při dodržení jejich příslušného počtu a za příslušné změny systému rovnic, kterým se z nezákladních proměnných počítají základní proměnné.

Na nezákladních proměnných bude nadále probíhat optimalizační úloha

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{nb}} f(\mathbf{nb}, \mathbf{b}(\mathbf{nb})) &= \min_{\mathbf{nb}} F(\mathbf{nb}) \quad \text{za podmínek:} \\ \mathbf{y} &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Tato úloha je řešena iteračně pomocí gradientů  $\nabla F$ . V každé iteraci je třeba kontrolovat, zda nedojde k porušení některé z podmínek  $\mathbf{y} \geq 0$ . Pokud ano a jedná se o základní proměnnou, je vhodné z ní záměnou s jinou proměnnou udělat nezákladní proměnnou. Jedná-li se o nezákladní proměnnou, je možné dojít přesně na hranici, kde dané  $y_i = 0$  a nadále tuto hranici nepřekračovat, tj. pokud by gradient měl směřovat do oblasti  $y_i < 0$ , fixovat  $y_i = 0$  a tím z ní udělat základní proměnnou.

### 3.3.9. Artificial Bee Colony (ABC)

ABC (např. [21]) je heuristikou inspirovanou včelami sbírajícími nektar. Zjednodušeně pracuje algoritmus následovně. Existují v něm tři typy včel: pracovnice, pozorovatelé a hledači. Pozice zdrojů nektaru představují množinu možných řešení. Z iniciační množiny zdrojů si každá pracovnice zapamatuje pozici svého zdroje (nicméně zkráceně) a najde nový zdroj. Lepší z těchto zdrojů pak představí pozorovatelům v hníždě. Ti vyberou nej-

lepší zdroje (opět zkresleně), které představují novou množinu možných řešení. Množina možných řešení je současně stále náhodně doplňována hledači.

### 3.3.10. First Order Reliability Method (FORM), Second Order Reliability Method (SORM)

Jedná se o jedny z prvních metod sloužící ke stochastické optimalizaci. Jsou ojedinělými zástupci analytických metod.

FORM a SORM (např. [44]) jsou metody určené k rychlému vyhodnocení spolehlivosti systému. Obě metody využívají k výpočtu pravděpodobnosti porušení systému transformaci původního pravděpodobnostního rozdělení na ekvivalentní vícedimenzionální normální rozdělení. Zde je následně aproximována funkce poruchy (funkce, která dělí pravděpodobnostní prostor na množiny přípustných a nepřípustných řešení) a pravděpodobnost porušení systému je stanovena jako vzdálenost bodu MPP (Most Probable Point, bodě na funkci poruchy, který je nejbližší počátku vícedimenzionálního normálního rozdělení a s největší pravděpodobností v něm dojde k poruše) právě k tomuto počátku vícedimenzionálního rozdělení (v jednotkách rozptylu).

FORM hledá MPP iterační metodou, kdy průběžně aproximuje funkci poruchy jejím Taylorovým polynomem řádu 1. SORM pak k průběžné aproximaci funkce poruchy využívá Taylorova polynomu řádu 2.

### 3.3.11. Evolution Strategies (ES)

ES (např. [26], [28]) je metoda, která je inspirována evolucí a je velmi podobná GA. Rozdíl mezi ES a GA je především v tom, že v ES nejsou možná řešení kódována celočíselně (popř. binárně), ale pracuje se přímo s vektory reálných čísel. Pro křížení to pak znamená, že se mezi rodiči může provádět nějaká složitější matematická operace. Mutace je pak obvykle malá odchylka od původního reálného čísla, přičemž možnou velikost těchto odchylek lze adaptivně měnit v průběhu algoritmu.

### 3.3.12. Neuronová síť (NN – Neural Network)

Neural Network ([26], [45]) je algoritmus, který je často uplatňován v oblastech, které je obtížné nebo zdlouhavé zpracovat exaktně. Neuronová síť se zjednodušeně řečeno učí – její přesnost se zlepšuje s množstvím příkladů, které má k dispozici k porovnání. Výsledek složité a časově náročné operace, jakým je např. vyhodnocování pravděpodobnosti porušení konstrukce, tak lze velmi rychle odhadnout pomocí NN.

Jedna z nejjednodušších forem NN se skládá ze vstupní vrstvy, výstupní vrstvy a daného počtu skrytých vrstev. Každá vrstva se skládá z daného počtu neuronů. Neuron jsou napříč vrstvami propojeny spojeními, kterým je přiřazena váha od 0 do 1, přičemž 0 znamená plně neaktivní spojení a 1 plně aktivní. Tímto způsobem pomocí tzv. aktivačních funkcí dojde signál ze vstupních neuronů až k výstupním, přičemž výstupní neuron, který má nejvyšší hodnotu je považován za správnou odpověď. Proces učení pak spočívá v tom, že se nastavují vhodné hodnoty váhám spojení tak, aby síť dávala požadované výsledky.

Složitější formy NN pak mohou např. provádět klasickou aproximaci (jako např. i v této práci). Ve výstupní vrstvě je předem daný počet číselně počítaných výstupů. Na místo funkcí aktivačních pak přichází funkce tzv. přenosové. Ty kromě zmíněné aktivační složky (váha od 0 do 1, 0 plně neaktivní, 1 plně aktivní) obsahují i další parametry. Učení NN pak spočívá v optimalizaci všech těchto parametrů nejčastěji tak, aby napříč množinou k učení byly minimalizovány kvadráty odchylek (ale kritérium může být samozřejmě i jiné). Přenosové funkce mezi dílčími vrstvami NN mohou být různé. Ačkoliv existuje soubor nejčastěji používaných přenosových funkcí, je samozřejmě možné vytvářet i své vlastní.

Pro NN je také důležitá samotná metoda učení. Opět existuje soubor nejčastěji používaných metod. Např. v této práci je použita výlučně metoda Levenberg-Marquardt, protože pro řešené problémy při nejkratší době učení poskytuje nejpresnější výsledky. Její použití ale není podmínkou.

Při trénování NN také dochází k rozdělení množiny dat k trénování na podmnožiny, a to dat k samotnému trénování a dále data validační a testovací. Data k samotnému trénování slouží k samotnému optimalizování parametrů prostřednictvím minimalizace odchylek. To je často rozděleno do více etap. Zde nastupují data validační, ty mohou být použity právě mezi jednotlivými etapami k ověření stávající přesnosti a případně např. výběru vhodnější varianty, čímž se ovšem součástí učení částečně stávají. Data k testování pak, jak název napovídá, nejsou součástí učení vůbec, slouží pouze k ověřování přesnosti výstupů NN.

### 3.3.13. Simulace Monte Carlo

Metoda Monte Carlo ([46]) je neklasičtější metodou simulace a to v podstatě „hrubou silou“. Simulované scénáře jsou vybírány přesně podle zvoleného pravděpodobnostního rozdělení, vyhodnoceny a na základě toho spočítána pravděpodobnost vyhodnocovaného jevu. Velkou nevýhodou je velká výpočetní náročnost, pokud je samotný postup vyhod-

---



nocení náročný, a nutnost velkého množství simulovaných scénářů, pokud je třeba určit pravděpodobnost vyhodnocovaného jevu s vysokou přesností.

### 3.3.14. Importance Sampling

Importance Sampling ([46]) je obdobou metody Monte Carlo, kdy dochází k pečlivějšímu výběru simulovaných scénářů, přičemž se s nimi již nezachází pouze podle jejich počtu, ale každému scénáři přísluší váha odpovídající pravděpodobnosti, kterou reprezentuje. Výběr scénářů se pak soustřeďuje do hodnot náhodných veličin, u kterých je obtížné předpokládat, jak dopadne vyhodnocovaný jev. Existují různé konkrétní strategie pro Importance Sampling.

### 3.3.15. Latin Hypercube Sampling (LHS)

Latin Hypercube Sampling ([47]) je metoda výběru scénářů pro simulaci. Ve dvou dimenzích metoda pracuje na principu Latinského čtverce. Tj. poté, co je rozdělení pravděpodobnosti diskretizováno pomocí čtvercové sítě, kde každé dílčí pole pokrývá stejnou míru pravděpodobnosti, se scénáře pro simulaci vybírají jako reprezentanti polí tak, že z každé řady i sloupce polí, je vybráno právě jedno pole / jeho reprezentant, např. jak naznačuje Tab. 3.1.

Tabulka 3.1: Princip výběru scénářů metodou Latin Hypercube Sampling ve dvoudimenzionálním rozdělení pravděpodobnosti. Po diskretizaci na  $4 \times 4$  pole jsou vybrány 4 scénáře pro simulaci.

	×		
		×	
×			
			×

Pro více dimenzí se poté jedná o zobecnění metody pro dvě dimenze.

### 3.3.16. Sequential Optimization and Reliability Assessment (SORA)

Účelem metody SORA ([27]) je zefektivnit optimalizaci s pravděpodobnostními omezeními. K tomu využívá toho, že většinou pracuje s deterministickými reformulacemi původních pravděpodobnostních podmínek. Ke skutečnému vyhodnocování pravděpodobnosti dochází pouze tehdy, jestliže nejspíše bylo dosaženo požadované pravděpodob-

nosti, a to modifikovanou metodou SORM. Při hledání MPP (viz FORM, SORM) se využívá znalostí z předchozích iterací.

### 3.3.17. Sequential Approximate Programming (SAP)

SAP ([29]) připomíná metodu SORA a částečně tak i metodu SORM. Využívá vlastní aproximace funkce poruchy na níž pak efektivním způsobem hledá MPP. Podobně jako SORA využívá informace o MPP z předchozích iterací.

### 3.3.18. Kriging Surrogate

Úkolem metody Kriging Surrogate (např. [31]) je zjednodušit vyhodnocování dílčích pravděpodobnostních omezení. Funguje na principu, kdy na základě daného vzorku je pomocí regrese vytvořena vazba mezi parametry zatěžovaného prvku a pravděpodobností porušení.

### 3.3.19. Dynamic Kriging

Metoda Dynamic Kriging (např. [32]) je principiálně podobná metodě Kriging Surrogate s tím rozdílem, že predikce, vytvořená Kriging metodou, se nyní postupně mění v každé iteraci optimalizace, a to na základě volby vzorku, z níž se predikce vytváří.

### 3.3.20. Discrete Gravitational Search Algorithm (DGSA)

DGSA (např. [33]) je heuristika inspirovaná gravitací. Množina možných řešení je reprezentována částicemi hmoty v prostoru, které spolu interagují na základě gravitace a pohybových zákonů. Vyhodnocování pravděpodobností je podobně jako u metod Kriging Surrogate a Dynamic Kriging založeno na predikci, tentokrát však pomocí metod odvozených z waveletů (wavelety jsou specifické funkce používané k rozkladu jiných funkcí – tento rozklad je částečně podobný Fourierově transformaci).

## 4. Deterministická úloha

Nyní bude představena deterministická úloha optimalizace návrhu betonové konstrukce. Návrh vychází z metody dílčích součinitelů spolehlivosti – všechny náhodnosti jsou nahrazeny jejich návrhovými hodnotami a jsou využívány spolehlivostní součinitele. Pro více informací o navrhování betonových prvků a konstrukcí viz normy [1], [48] a [49].

### 4.1. Popis úlohy deterministické optimalizace

Následující část popisuje matematický model, který v prostředí GAMS naprogramovala I. Laníková [3], [4]. Tento matematický model pak využívá i .d11 knihovny J. Plška vytvořené v rámci jeho disertační práce [2]. Definice úlohy deterministické optimalizace je rozšířením definice uvedené v [57], respektive [58].

Úloha deterministické optimalizace zjednodušeně nabývá podoby

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad \text{za podmíněk:} \quad (4.1)$$

$$L_r(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \leq R_r(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad (4.2)$$

$$w_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \leq w_{\max}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{C}, \quad (4.4)$$

kde  $\mathbf{x}$  je vektor návrhových proměnných,  $\mathbf{v}$  je vektor dalších vstupních proměnných úlohy (např. předepsaných zatížení a materiálových charakteristik),  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  je účelová funkce optimalizace (např. cena konstrukce),  $L_r(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  představuje účinek zatížení v daných průřezích  $r = 1, \dots, n_r$ ,  $R_r(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  odolnost konstrukce v průřezu  $r$ ,  $w_s(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  jsou průhyby konstrukce v průřezích  $s = 1, \dots, n_s$ ,  $w_{\max}$  je maximální povolená hodnota průhybu a  $\mathbf{C}$  představuje omezující podmínky pro návrhové proměnné.

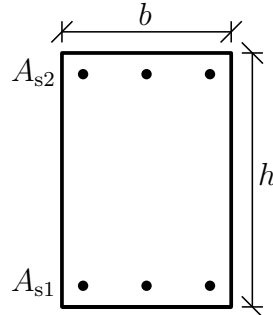
Všechny tyto podmínky a proměnné jsou podrobněji popsány v následujícím textu.

#### 4.1.1. Vektor návrhových proměnných

Jak bylo zmíněno v úvodu, kvůli jednoduchosti se tato práce omezuje na jednodimenzionální prvky – nosníky. Uvedené metody lze ale také přímo aplikovat na rovinné konstrukce z nich složené – rovinné rámy.

Délka nosníku je daná a nemůže se měnit. Vektor  $\mathbf{x}$  v (4.1) až (4.4) tak v nejjednodušším případě obsahuje proměnné, které popisují tvar průřezu tohoto nosníku a to včetně plochy výztuže. V jednoduchém případě je průřez obdélníkový a  $\mathbf{x} = (b, h, A_{s1}, A_{s2})$ , kde

$b$  je šířka a  $h$  výška průřezu a  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$  jsou plochy dolní a horní vrstvy ocelové výztuže, viz Obr. 1. Do vektoru  $\mathbf{x}$  a tedy mezi optimalizované proměnné mohou ale náležet i další veličiny, typicky poloha výztuže, třída betonu, druh oceli a další. Hranicí průřezu může být libovolný polygon, musí ale být patřičně popsán, viz odst. 4.2.2 a odst. 4.2.4.



Obrázek 1: Jednoduchý obdélníkový průřez,  $\mathbf{x} = (b, h, A_{s1}, A_{s2})$ .

### 4.1.2. Účelová funkce

Účelová funkce  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  v (4.1) může představovat cokoliv od prosté ceny použitého materiálu po multikriteriální funkci zahrnující tuhost/poddajnost prvku a/nebo environmentální aspekty napříč výstavbou, údržbou i likvidací konstrukce. Jednoduchou možnou uvažovanou účelovou funkcí je např. zmíněné vyhodnocování ceny spotřebovaného materiálu dané rovnicí

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = V_c(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \times C_{cv} + W_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \times C_{sw}, \quad (4.5)$$

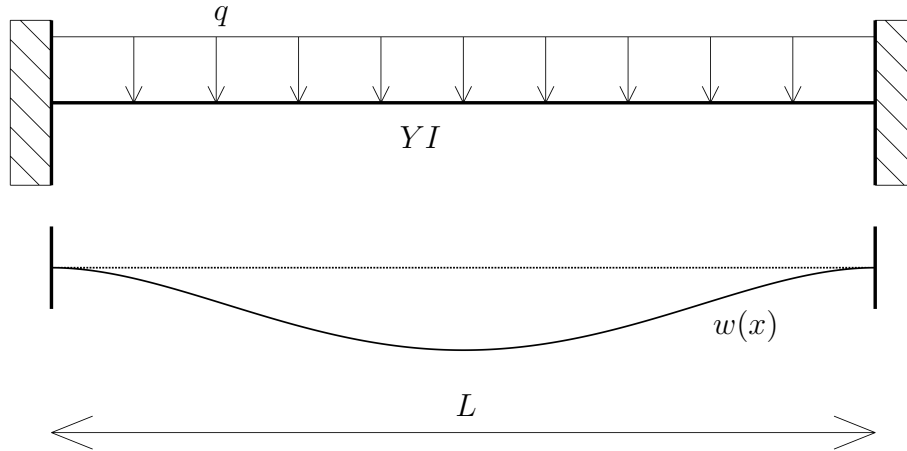
kde  $V_c$  je objem použitého betonu,  $C_{cv}$  je cena betonu za jednotku objemu,  $W_s$  je hmotnost použité oceli a  $C_{sw}$  je cena oceli za jednotku hmotnosti.

### 4.1.3. Mezní stav únosnosti

Nerovnice (4.2) reprezentuje v úloze (4.1) až (4.4) podmínky mezního stavu únosnosti (MSÚ) v předem daných průřezích  $r, r = 1, \dots, n_r$ . Toto formální vyjádření MSÚ je však dosti zjednodušené. Ve skutečnosti se jedná o celou řadu rovnic a nerovnic, jejichž vyústěním jsou omezení pro přetvoření betonu a ocelové výztuže. K vyhodnocení MSÚ je nejprve třeba spočítat deformace konstrukce, a to např. pomocí metody konečných prvků (MKP). Celá tato kapitola nadále čerpá z [50], [51], [52], [53], [54].

Pozn. Cílem tohoto popisu není odvodit základní vztahy pro MKP pro případ rovinných prutových konstrukcí; cílem je pouze zrekapitulovat základní vztahy, které budou využívány.

Nejprve budou definovány některé základní pojmy na oboustranně vetknutém nosníku na Obr. 2.



Obrázek 2: Oboustranně vetknutý nosník o délce  $L$  s Youngovým modulem pružnosti  $Y$ , momentem setrvačnosti  $I$ , zatížený spojitém zatížením  $q$  s výslednou průhybovou čarou  $w(x)$ .

MKP je variační metodou hledání minima potenciální energie konstrukce. Pro jednoduchost se uvažuje, že konstrukci tvoří nosník dle Obr. 2. Platí

$$\begin{aligned}\Pi(w(x)) &= \Pi_d(w(x)) + \Pi_z(w(x)) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L YI (w''(x))^2 dx - \int_0^L q(x) w(x) dx,\end{aligned}\quad (4.6)$$

kde  $\Pi(w(x))$  je potenciální energie celé konstrukce,  $\Pi_d(w(x))$  je potenciální energie vnitřních sil (deformační energie) a  $\Pi_z(w(x))$  je potenciální energie vnějších sil (zatížení) nosníku.  $(\cdot)''$  značí druhou derivaci  $\cdot$  podle  $x$ , pro ostatní veličiny viz Obr. 2. Řešením takovéto úlohy je průhybová čára  $w_m(x)$ , pro niž platí

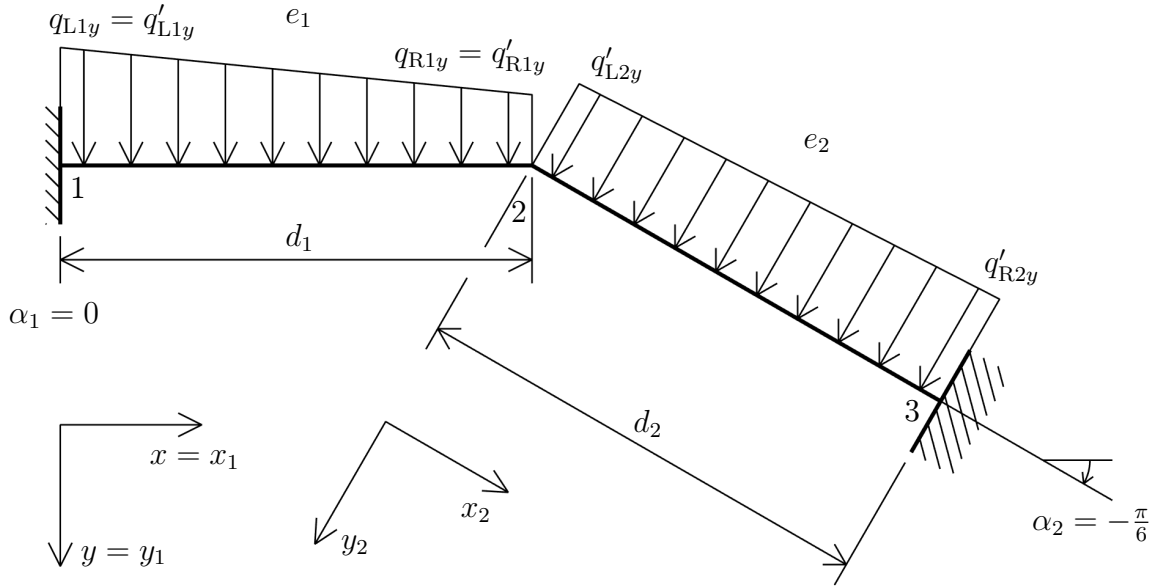
$$\Pi(w_m(x)) = \min. \quad (4.7)$$

Práce se nadále omezuje na rovinné rámy. Provedením délkové diskretizace lze rám  $e$  rozdělit na  $n$  konečných prvků  $e_i$ , tj.

$$e = \{e_i, i = 1, \dots, n\}. \quad (4.8)$$

Konečné prvky se v práci budou předpokládat jako přímé.

Další postup bude ukázán na příkladu rámu z Obr. 3. Ten bude rozdělen na konečné prvky  $e_1$ ,  $e_2$ , přičemž pro jednoduchost bude každý z nich odpovídat jedné přímé části rámu (obecně ale každá přímá část může být rozdělena na více konečných prvků).



Obrázek 3: Rovinný rám  $e$  sestávající ze dvou konečných prvků  $e_1$  a  $e_2$  a tří uzlů 1, 2, 3. Globální a lokální souřadné systémy.

Nadále je třeba začít rozlišovat různé souřadnicové systémy. Kromě globálního souřadnicového systému  $\{x, y, z\}$  jsou zavedeny také lokální souřadnicové systémy  $\{x_i, y_i, z_i\}$  příslušející každému konečnému prvku  $e_i$ , viz Obr. 3 (lokální osa  $x_i$  je osou prvku  $e_i$ ).

Později bude potřeba znát také transformační matice z každého dílčího lokálního souřadnicového systému  $\{x_i, y_i, z_i\}$  do globálního souřadnicového systému  $\{x, y, z\}$ . Tyto transformační matice mají pro každý dílčí lokální souřadnicový systém  $\{x_i, y_i, z_i\}$  tvar

$$\mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} c_i & -s_i & 0 \\ s_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

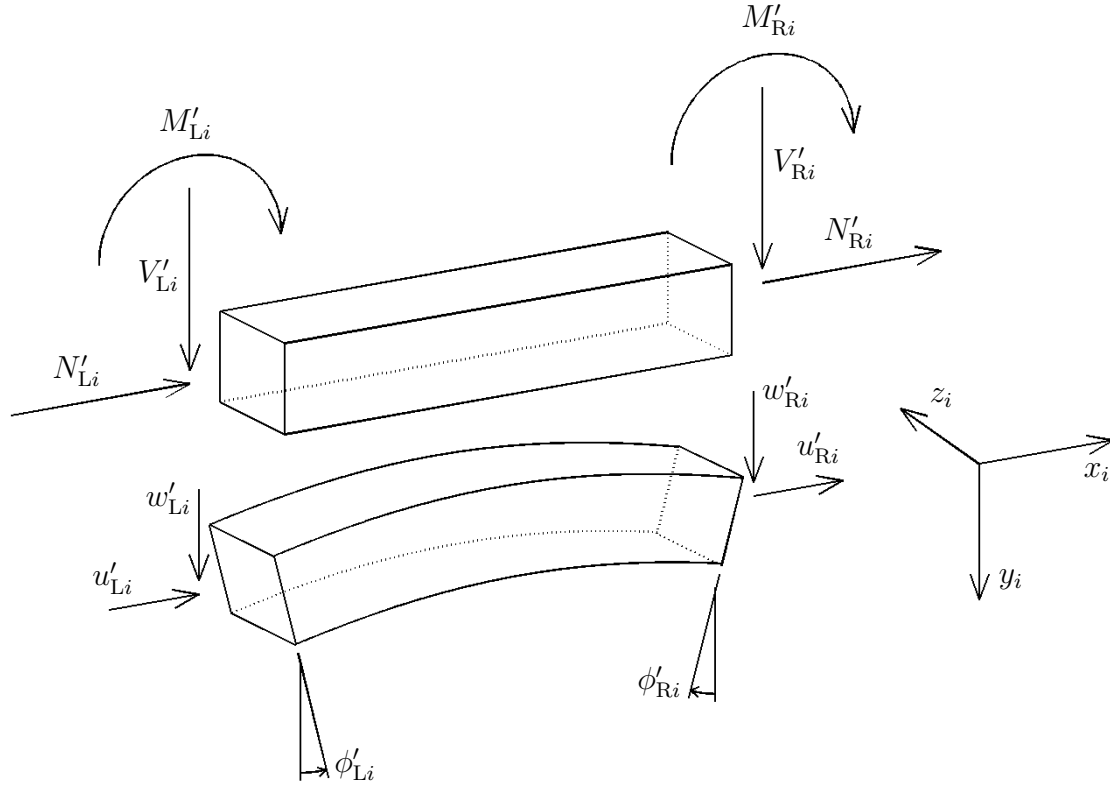
kde

$$c_i = \cos(\alpha_i), \quad (4.10)$$

$$s_i = \sin(\alpha_i), \quad (4.11)$$

kde  $\alpha_i$  je úhel, který svírá globální osa  $x$  s lokální osou  $x_i$  konečného prvku  $e_i$ , viz Obr. 3.

Dále je třeba se zaměřit se na vnitřní síly a deformace konečného prvku  $e_i$  v jeho lokálním souřadnicovém systému  $\{x_i, y_i, z_i\}$ , viz Obr. 4.



Obrázek 4: Ohýbaný konečný prvek  $e_i$  v lokálním souřadném systému  $\{x_i, y_i, z_i\}$ , který má ve svých uzlech vnitřní síly normálové  $N'_{Li}$ ,  $N'_{Ri}$ , posouvající  $V'_{Li}$ ,  $V'_{Ri}$  a momenty  $M'_{Li}$ ,  $M'_{Ri}$ . V uzlech jsou pak také posunutí  $u'_{Li}$ ,  $u'_{Ri}$ ,  $w'_{Li}$ ,  $w'_{Ri}$  a pootočení  $\phi'_{Li}$ ,  $\phi'_{Ri}$ .

Z Obr. 4 je možné definovat lokální vektory vnitřních sil  $\mathbf{F}'_{Li}$  a deformací  $\mathbf{U}'_i$  konečného prvku  $e_i$ . Platí

$$\mathbf{F}'_{Li} = \begin{pmatrix} N'_{Li} \\ V'_{Li} \\ M'_{Li} \\ N'_{Ri} \\ V'_{Ri} \\ M'_{Ri} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}'_i = \begin{pmatrix} u'_{Li} \\ w'_{Li} \\ \phi'_{Li} \\ u'_{Ri} \\ w'_{Ri} \\ \phi'_{Ri} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

kde  $N$  je normálová síla,  $V$  posouvající síla a  $M$  moment,  $i$  indexuje jednotlivé konečné prvky, přičemž  $(\ )_{Li}$  značí levý uzel konečného prvku  $i$  a analogicky  $(\ )_{Ri}$  pravý uzel konečného prvku  $i$ ,  $(\ )'$  potom značí lokální souřadnicový systém daného konečného prvku.

Na konečném prvku  $e_i$  lze dále odvodit vztahy mezi vnitřními silami a deformacemi. Toho lze docílit odvozením z klasických fyzikálních vztahů mezi přetvořeními, silami a

deformacemi nebo v rámci rozvedení variační metody (4.6), (4.7) zavedením vhodných báзовých funkcí a pokračováním v maticovém rozboru problému, viz [50] až [54]. V práci budou uvedeny pouze jejich závěry. Platí vztahy

$$N'_{Li} = \frac{YA_i}{d_i} (u'_{Li} - u'_{Ri}), \quad (4.13)$$

$$N'_{Ri} = \frac{YA_i}{d_i} (-u'_{Li} + u'_{Ri}), \quad (4.14)$$

$$V'_{Li} = 12 \frac{YI_i}{d_i^3} (w'_{Li} - w'_{Ri}) + 6 \frac{YI_i}{d_i^2} (\phi'_{Li} + \phi'_{Ri}), \quad (4.15)$$

$$V'_{Ri} = 12 \frac{YI_i}{d_i^3} (-w'_{Li} + w'_{Ri}) + 6 \frac{YI_i}{d_i^2} (-\phi'_{Li} - \phi'_{Ri}), \quad (4.16)$$

$$M'_{Li} = 6 \frac{YI_i}{d_i^2} (w'_{Li} - w'_{Ri}) + 2 \frac{YI_i}{d_i} (2\phi'_{Li} + \phi'_{Ri}), \quad (4.17)$$

$$M'_{Ri} = 6 \frac{YI_i}{d_i^2} (w'_{Li} - w'_{Ri}) + 2 \frac{YI_i}{d_i} (\phi'_{Li} + 2\phi'_{Ri}), \quad (4.18)$$

kde  $Y$  je Youngův modul pružnosti,  $A_i$  je plocha průřezu,  $I_i$  moment setrvačnosti a  $d_i$  délka konečného prvku  $e_i$ .

Toto lze zapsat maticově jako

$$\mathbf{K}'_i \mathbf{U}'_i = \mathbf{F}'_{Li}, \quad (4.19)$$

kde  $\mathbf{K}'_i$  se nazývá lokální matice tuhosti prvku  $e_i$  a platí pro ni

$$\mathbf{K}'_i = \begin{pmatrix} \mathbf{K}'_{LLi} & \mathbf{K}'_{LRi} \\ \mathbf{K}'_{RLi} & \mathbf{K}'_{RRi} \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

kde

$$\mathbf{K}'_{LLi} = \begin{pmatrix} \frac{YA_i}{d_i} & 0 & 0 \\ 0 & 12 \frac{YI_i}{d_i^3} & 6 \frac{YI_i}{d_i^2} \\ 0 & 6 \frac{YI_i}{d_i^2} & 4 \frac{YI_i}{d_i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}'_{LRi} = \begin{pmatrix} -\frac{YA_i}{d_i} & 0 & 0 \\ 0 & -12 \frac{YI_i}{d_i^3} & 6 \frac{YI_i}{d_i^2} \\ 0 & -6 \frac{YI_i}{d_i^2} & 2 \frac{YI_i}{d_i} \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$



$$\mathbf{K}'_{RLi} = \mathbf{K}'_{LRi}{}^T = \begin{pmatrix} -\frac{YA_i}{d_i} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{YI_i}{d_i^3} & -6\frac{YI_i}{d_i^2} \\ 0 & 6\frac{YI_i}{d_i^2} & 2\frac{YI_i}{d_i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}'_{RRi} = \begin{pmatrix} \frac{YA_i}{d_i} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{YI_i}{d_i^3} & -6\frac{YI_i}{d_i^2} \\ 0 & -6\frac{YI_i}{d_i^2} & 4\frac{YI_i}{d_i} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Nyní lze dříve definované lokální vektory vnitřních sil a deformací transformovat do globálního souřadného systému, viz (4.12) a Obr. 4. Globální vektor vnitřních sil  $\mathbf{F}_{Li}$  (označení globální zde vyjadřuje, že je v globálním souřadnicovém systému) je tvaru

$$\mathbf{F}_{Li} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_i & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_i \end{pmatrix} \mathbf{F}'_{Li} = \begin{pmatrix} c_i & -s_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_i & c_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_i & -s_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N'_{Li} \\ V'_{Li} \\ M'_{Li} \\ N'_{Ri} \\ V'_{Ri} \\ M'_{Ri} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{Li} \\ V_{Li} \\ M_{Li} \\ N_{Ri} \\ V_{Ri} \\ M_{Ri} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Globální vektor deformací  $\mathbf{U}_i$  prvku  $e_i$  má tvar

$$\mathbf{U}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_i & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_i \end{pmatrix} \mathbf{U}'_i = \begin{pmatrix} c_i & -s_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_i & c_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_i & -s_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_{Li} \\ w'_{Li} \\ \phi'_{Li} \\ u'_{Ri} \\ w'_{Ri} \\ \phi'_{Ri} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{Li} \\ w_{Li} \\ \phi_{Li} \\ u_{Ri} \\ w_{Ri} \\ \phi_{Ri} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Vnitřní síly  $\mathbf{F}_{Li}$  prvku  $e_i$  lze podobně jako v (4.19) až (4.22) zapsat pomocí globální matice tuhosti  $\mathbf{K}_i$  a vektoru deformací  $\mathbf{U}_i$  jako

$$\mathbf{K}_i \mathbf{U}_i = \mathbf{F}_{Li}. \quad (4.25)$$

Vektory  $\mathbf{F}_i$ ,  $\mathbf{U}_i$  jsou ale v globálním souřadném systému a při odvozování matice  $\mathbf{K}_i$  je tedy třeba vzít v potaz úhly v globálním souřadném systému jednotlivých konečných prvků. Výsledná matice tuhosti tak nabyde tvaru (viz [53], [54])

$$\mathbf{K}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{LLi} & \mathbf{K}_{LRi} \\ \mathbf{K}_{RLi} & \mathbf{K}_{RRi} \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

$$\mathbf{K}_{LLi} = \begin{pmatrix} \frac{YA_i}{d_i} c_i^2 + 12 \frac{YI_i}{d_i^3} s_i^2 & \left( \frac{YA_i}{d_i} - 12 \frac{YI_i}{d_i^3} \right) c_i s_i & -6 \frac{YI_i}{d_i^2} s_i - \frac{YS_i}{d_i} c_i \\ \left( \frac{YA_i}{d_i} - 12 \frac{YI_i}{d_i^3} \right) c_i s_i & \frac{YA_i}{d_i} s_i^2 + 12 \frac{YI_i}{d_i^3} c_i^2 & 6 \frac{YI_i}{d_i^2} c_i - \frac{YS_i}{d_i} s_i \\ -6 \frac{YI_i}{d_i^2} s_i - \frac{YS_i}{d_i} c_i & 6 \frac{YI_i}{d_i^2} c_i - \frac{YS_i}{d_i} s_i & 4 \frac{YI_i}{d_i} \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{K}_{LRi} = \begin{pmatrix} -\frac{YA_i}{d_i} c_i^2 - 12 \frac{YI_i}{d_i^3} s_i^2 & \left( -\frac{YA_i}{d_i} + 12 \frac{YI_i}{d_i^3} \right) c_i s_i & -6 \frac{YI_i}{d_i^2} s_i + \frac{YS_i}{d_i} c_i \\ \left( -\frac{YA_i}{d_i} + 12 \frac{YI_i}{d_i^3} \right) c_i s_i & -\frac{YA_i}{d_i} s_i^2 - 12 \frac{YI_i}{d_i^3} c_i^2 & 6 \frac{YI_i}{d_i^2} c_i + \frac{YS_i}{d_i} s_i \\ 6 \frac{YI_i}{d_i^2} s_i + \frac{YS_i}{d_i} c_i & -6 \frac{YI_i}{d_i^2} c_i + \frac{YS_i}{d_i} s_i & 2 \frac{YI_i}{d_i} \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{K}_{RLi} = \mathbf{K}_{LRi}^T, \quad (4.29)$$

$$\mathbf{K}_{RRi} = \begin{pmatrix} \frac{YA_i}{d_i} c_i^2 + 12 \frac{YI_i}{d_i^3} s_i^2 & \left( \frac{YA_i}{d_i} - 12 \frac{YI_i}{d_i^3} \right) c_i s_i & 6 \frac{YI_i}{d_i^2} s_i - \frac{YS_i}{d_i} c_i \\ \left( \frac{YA_i}{d_i} - 12 \frac{YI_i}{d_i^3} \right) c_i s_i & \frac{YA_i}{d_i} s_i^2 + 12 \frac{YI_i}{d_i^3} c_i^2 & -6 \frac{YI_i}{d_i^2} c_i - \frac{YS_i}{d_i} s_i \\ 6 \frac{YI_i}{d_i^2} s_i - \frac{YS_i}{d_i} c_i & -6 \frac{YI_i}{d_i^2} c_i - \frac{YS_i}{d_i} s_i & 4 \frac{YI_i}{d_i} \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

kde je oproti (4.13) až (4.22) navíc pouze  $S_i$ , což je statický moment průřezu konečného prvku  $e_i$ .

Nyní je třeba si všimnout, že daným uzlům konečných prvků v rámu  $e$  odpovídají některé levé nebo pravé uzly dílčích konečných prvků  $e_i$ . Ve zmíněném příkladu z Obr. 3 tak uzlům rámu 1, 2, 3 odpovídají uzly konečných prvků L1, R1, L2, R2 následovně:

$$\begin{aligned} \text{uzel 1: L1,} \\ \text{uzel 2: R1 a L2,} \\ \text{uzel 3: R2.} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Na základě (4.31) je nyní pro příklad z Obr. 3 možné složit globální vektor deformací  $\mathbf{U}$  jako

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \phi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{L1} \\ w_{L1} \\ \phi_{L1} \\ u_{L2} \\ w_{L2} \\ \phi_{L2} \\ u_{R2} \\ w_{R2} \\ \phi_{R2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{L1} \\ w_{L1} \\ \phi_{L1} \\ u_{R1} \\ w_{R1} \\ \phi_{R1} \\ u_{R2} \\ w_{R2} \\ \phi_{R2} \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

kde  $u_1, w_1, \phi_1$  jsou posunutí a pootočení v uzlu 1;  $u_2, w_2, \phi_2$  v uzlu 2 a analogicky dále.

Rám je samozřejmě také zatížen. V modelu MKP se rozlišují dva stavy – primární a sekundární. Do primárního stavu náleží zatížení působící na jednotlivé konečné prvky, nikoliv však v jejich uzlech. Sekundární stav je pak tvořen veškerými silami a momenty působícími v uzlech k. p. a to včetně reakcí od primárního stavu. Pro konvergenci (při zjemňování dělení na k. p.) MKP pro hodnoty vnitřních sil a deformací v uzlech je postačujícím přístupem umísťovat zatěžovací bodové síly nebo momenty pouze do uzlů k. p. (popřípadě za tímto účelem umístit nový uzel a tím i konečný prvek / konečné prvky). V případě spojitých zatížení (které nutně spadají do primárního stavu) lze potom ukázat, že je postačující dopočítat jejich bodový účinek v daném uzlu pomocí tzv. přičinkových funkcí pro oboustranně vetknutý nosník. Toto vše lze opět odvodit z pokračování v maticovém rozboru varičního principu (4.6), (4.7), viz [50]. V práci budou tyto vzorce pouze vypsány, viz (4.36) až (4.41). V případě přítomnosti bodového zatížení i účinku spojitého zatížení se tato jednoduše sečtou.

Pro výpočet účinků spojitého zatížení bude nejprve zaveden lokální vektor zatížení  $\mathbf{F}'_{Ei}$ , který je opět možné pomocí transformačních matic transformovat v globální vektor zatížení  $\mathbf{F}_{Ei}$ , platí

$$\mathbf{F}_{Ei} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_i & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_i \end{pmatrix} \mathbf{F}'_{Ei} = \begin{pmatrix} c_i & -s_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_i & c_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_i & -s_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'_{xLi} \\ F'_{yLi} \\ M'_{zLi} \\ F'_{xRi} \\ F'_{yRi} \\ M'_{zRi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{xLi} \\ F_{yLi} \\ M_{zLi} \\ F_{xRi} \\ F_{yRi} \\ M_{zRi} \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

kde  $F_x$  značí silový účinek působící ve směru osy  $x$ ,  $F_y$  silový účinek působící ve směru osy  $y$  a  $M_z$  momentový účinek spojitého zatížení,  $( )_{Li}$  značí levý uzel a  $( )_{Ri}$  pravý uzel končného prvku  $e_i$ , čárka  $( )'$  značí lokální a její absence globální souřadnicový systém.

Příčinkové funkce jsou převzaty z [54] a mají tvar

$$\begin{aligned} \text{pro } F'_{xLi}, F'_{xRi} : & \quad 1 - \xi_i, & \quad \xi_i, \\ \text{pro } F'_{yLi}, F'_{yRi} : & \quad 1 - 3\xi_i^2 + 2\xi_i^3, & \quad 3\xi_i^2 - 2\xi_i^3, \\ \text{pro } M'_{zLi}, M'_{zRi} : & \quad (\xi_i - 2\xi_i^2 + \xi_i^3) d_i, & \quad (-\xi_i^2 + \xi_i^3) d_i, \end{aligned} \quad (4.34)$$

kde

$$\xi_i = \frac{x_i}{d_i}, \quad (4.35)$$

kde  $d_i$  je délka konečného prvku  $e_i$ .

Nyní mohou být spočítány účinky spojitého zatížení vzorci (viz [54])

$$\begin{aligned} F'_{xLi} &= \int_0^{d_i} (1 - \xi_i) \left( q'_{xLi} + \frac{q'_{xRi} - q'_{xLi}}{d_i} x_i \right) dx_i = \\ &= \left( \frac{1}{2} q'_{xLi} + \frac{1}{6} (q'_{xRi} - q'_{xLi}) \right) d_i, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} F'_{xRi} &= \int_0^{d_i} \xi_i \left( q'_{xLi} + \frac{q'_{xRi} - q'_{xLi}}{d_i} x_i \right) dx_i = \\ &= \left( \frac{1}{2} q'_{xLi} + \frac{1}{3} (q'_{xRi} - q'_{xLi}) \right) d_i, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} F'_{yLi} &= \int_0^{d_i} (1 - 3\xi_i^2 + 2\xi_i^3) \left( q'_{yLi} + \frac{q'_{yRi} - q'_{yLi}}{d_i} x_i \right) dx_i = \\ &= \left( \frac{1}{2} q'_{yLi} + \frac{3}{20} (q'_{yRi} - q'_{yLi}) \right) d_i, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} F'_{yRi} &= \int_0^{d_i} (3\xi_i^2 - 2\xi_i^3) \left( q'_{yLi} + \frac{q'_{yRi} - q'_{yLi}}{d_i} x_i \right) dx_i = \\ &= \left( \frac{1}{2} q'_{yLi} + \frac{7}{20} (q'_{yRi} - q'_{yLi}) \right) d_i, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} M'_{zLi} &= \int_0^{d_i} (\xi_i - 2\xi_i^2 + \xi_i^3) d_i \left( q'_{yLi} + \frac{q'_{yRi} - q'_{yLi}}{d_i} x_i \right) dx_i = \\ &= \left( \frac{1}{12} q'_{yLi} + \frac{1}{30} (q'_{yRi} - q'_{yLi}) \right) d_i^2, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}
 M'_{zRi} &= \int_0^{d_i} (-\xi_i^2 + \xi_i^3) d_i \left( q'_{yLi} + \frac{q'_{yRi} - q'_{yLi}}{d_i} x_i \right) dx_i = \\
 &= \left( -\frac{1}{12} q'_{yLi} - \frac{1}{20} (q'_{yRi} - q'_{yLi}) \right) d_i^2,
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

kde  $q'_{xLi}$ ,  $q'_{xRi}$  jsou intenzity zatížení v ose  $x_i$  lokálního souřadnicového systému v levém a pravém uzlu prvku  $e_i$  a analogicky  $q'_{yLi}$ ,  $q'_{yRi}$  jsou intenzity zatížení v ose  $y_i$ .

Pro příklad z Obr. 3 je teď možné opět pomocí (4.31) sestavit celkový globální vektor zatížení  $\mathbf{F}_E$  jako

$$\mathbf{F}_E = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{xL1} \\ F_{yL1} \\ M_{zL1} \\ F_{xR1} + F_{xL2} \\ F_{yR1} + F_{yL2} \\ M_{zR1} + M_{zL2} \\ F_{xR2} \\ F_{yR2} \\ M_{zR2} \end{pmatrix}, \tag{4.42}$$

kde  $F_{x1}$ ,  $F_{y1}$  jsou předepsané bodové zatěžovací síly ve směru os  $x, y$  a  $M_{z1}$  předepsaný bodový zatěžovací moment, to vše v uzlu 1. Analogicky dále pro uzly 2 a 3.

Nakonec je třeba složit globální matici tuhosti  $\mathbf{K}$  a zapsat maticový výpočet. K tomuto složení se využije skutečnosti, že v každém jednotlivém uzlu konečných prvků musí platit

$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= 0, \\
 \sum F_y &= 0, \\
 \sum M_z &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

V příkladu z Obr. 3 tak při znalosti (4.31) pro jednotlivé uzly bude platit

$$\begin{aligned}
 & 0 = N_{L1} + F_{x1} + F_{xL1} + R_{x1} , \\
 \text{uzel 1: } & 0 = V_{L1} + F_{y1} + F_{yL1} + R_{y1} , \\
 & 0 = M_{L1} + M_{z1} + M_{zL1} + R_{z1} , \\
 \\ 
 & 0 = N_{R1} + N_{L2} + F_{x2} + F_{xR1} + F_{xL2} , \\
 \text{uzel 2: } & 0 = V_{R1} + V_{L2} + F_{y2} + F_{yR1} + F_{yL2} , \\
 & 0 = M_{R1} + M_{L2} + M_{z2} + M_{zR1} + M_{zL2} , \\
 \\ 
 & 0 = N_{R2} + F_{x3} + F_{xR2} + R_{x3} , \\
 \text{uzel 3: } & 0 = V_{R2} + F_{y3} + F_{yR2} + R_{y3} , \\
 & 0 = M_{R2} + M_{z3} + M_{zR2} + R_{z3} , 
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

kde  $R_{x1}$ ,  $R_{y1}$  jsou silové reakce vetknutí v uzlu 1 v osách  $x$ ,  $y$  a  $R_{z1}$  je momentová reakce vetknutí v uzlu 1. Analogicky pro  $R_{x3}$ ,  $R_{y3}$ ,  $R_{z3}$  a uzel 3.

Na základě znalosti (4.23) až (4.30) tak lze (4.44) zapsat jako

$$\mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{F}_E + \mathbf{R} = \mathbf{0}, \tag{4.45}$$

kde  $\mathbf{R}$  je vektor reakcí vazeb pro příklad z Obr. 3,

$$\mathbf{R} = (R_{x1}, R_{y1}, R_{z1}, 0, 0, 0, R_{x3}, R_{y3}, R_{z3})^T \tag{4.46}$$

a globální matice tuhosti je složena na základě vnitřních sil v (4.44) dle znalostí z (4.23) až (4.30) jako

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{LL1} & \mathbf{K}_{LR1} & 0 \\ \mathbf{K}_{RL1} & \mathbf{K}_{RR1} + \mathbf{K}_{LL2} & \mathbf{K}_{LR2} \\ 0 & \mathbf{K}_{RL2} & \mathbf{K}_{RR2} \end{pmatrix}. \tag{4.47}$$

Úpravou a dosazením okrajových podmínek pro deformace se dostane

$$\mathbf{K} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ w_2 \\ \phi_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{F}_E - \begin{pmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{z1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{x3} \\ R_{y3} \\ R_{z3} \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

kde  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{F}_E$  jsou známé. Pro případ daný na Obr. 3 se tak jedná o systém 9 rovnic o 9 neznámých, což je jednoznačně řešitelný systém. Tento systém rovnic lze dořešit pomocí jednoduchých úprav, moderní řešiče (např. používaný řešič CONOPT3 v prostředí GAMS) si potom poradí i přímo s tímto tvarem.

Ze známých průběhů lokálních vnitřních sil  $\mathbf{F}'_{li}$  (které lze dopočítat) nyní mohou být vypočtena napětí a přetvoření v nosníku. K tomu lze využít tzv. parametry přetvoření  $\epsilon_{ix}, K_{iy}, K_{iz}$ , pro všechny uzly konečných prvků. Výpočet využívá .dll knihovny vytvořené J. Plškem v jeho dizertaci [2]. Narozdíl od Plškovy práce, zde je parametr  $K_{iy}$  vždy nulový, protože je odvozen z ohybu v rovině  $y$  za pomoci dalšího momentu, který tato práce neuvažuje. Přetvoření průřezu konečného prvku  $e_i$  na souřadnici  $y$  tedy je

$$\epsilon_i(y) = \epsilon_{ix} + K_{iz} y. \quad (4.49)$$

Vyhodnocení podmínek MSÚ je ukončeno porovnáním hodnot přetvoření  $\epsilon_r(y)$  (tedy pouze ve vyhodnocovaných průřezích  $r, r = 1, \dots, n_r$ ) s minimálním povoleným přetvořením betonu  $\epsilon_{c,\min}$  a maximálním povoleným přetvořením vyztužující oceli  $\epsilon_{s,\max}$  (uvažuje se znaménková konvence, kde znaménko  $-$  odpovídá tlaku a  $+$  tahu). Podmínka tlačené výztuže není ověřována, protože v případě jejího nevyhovění by nemohla vyhovět ani podmínka tlačného betonu. Musí tedy platit

$$\epsilon_r(y) \geq \epsilon_{c,\min} \quad (4.50)$$

$$\epsilon_r(y_j) \leq \epsilon_{s,\max}, \quad (4.51)$$

kde  $y_j$  jsou  $y$  souřadnice různých vrstev vyztužující oceli (viz Obr. 1).

#### 4.1.4. Mezní stav použitelnosti

Nerovnice (4.3) reprezentuje v úloze (4.1) až (4.4) podmínky mezního stavu použitelnosti (MSP), opět v předem daných průřezích  $s, s = 1, \dots, n_s$ . Jak její zápis naznačuje, tato práce se v rámci MSP omezuje pouze na omezení průhybu, přičemž zmíněný zápis je opět dosti zjednodušený. Ve skutečném modelu předchází samotnému vyhodnocení podmínek na omezení průhybu celá řada výpočtů. Postup vyhodnocování podmínek MSP je částečně podobný vyhodnocování podmínek MSÚ. Rozdíl je, že v případě MSP je třeba uvažovat možný vznik trhlin v betonu. Tyto trhliny pak ovlivňují ohybovou tuhost  $B_i$ , pro kterou platí ( $Y$  je Youngův modul pružnosti)

$$B_i = Y I_i \quad (4.52)$$

a která tedy ovlivňuje moment setrvačnosti  $I_i$ , který je vstupní proměnnou do matice tuhosti (viz (4.26) až (4.30)) a tedy do maticového výpočtu.

Trhliny se objeví, pokud prvky vektorů vnitřních sil  $\mathbf{F}'_{1i}$  překročí mezní hodnoty. Je tak třeba nalézt rovnovážný stav mezi hodnotami  $I_i$ ,  $\mathbf{F}'_{1i}$  a rozhodnutím zda vzniknou trhliny a z toho vyplývajících dalších vztahů.

Výpočet ohybové tuhosti  $B_i$  s nebo bez trhlin je opět proveden pomocí knihoven, jež vytvořil J. Plšek [2]. Detailnější popis původní metody [2] obsahuje odst. 4.2.1.

Samotné vyhodnocení podmínky MSP v daném průřezu  $r$  je provedeno přímým porovnáním hodnoty posunutí v ose  $y$  v tomto průřezu s jeho maximální povolenou hodnotou. Musí platit

$$w_s \leq w_{\max}, \quad s = 1, \dots, n_s. \quad (4.53)$$

Podmínku lze předepsat také pro lokální souřadný systém nebo libovolnou kombinaci posunutí a pootočení  $u, w, \phi$  (viz Obr. 4), potažmo je možné předepsat takových podmínek více.

#### 4.1.5. Omezení návrhových proměnných

Nerovnice (4.4) vymezuje limitní hodnoty pro samotné návrhové proměnné. Současně jsou zahrnuta i omezení, vyplývající ze vzájemných vztahů těchto proměnných (zápis je symbolický). Do těchto omezení tak zejména patří maximální a minimální šířka a výška betonového průřezu a maximální a minimální plocha výztuže vzhledem k ploše betonového průřezu.



### 4.1.6. Optimalizační algoritmus

Samotná optimalizace je postavena na metodě redukováných gradientů (GRG). Podrobnější popis této metody obsahuje odst. 3.3. Konkrétně je použit řešič CONOPT3 z optimalizačního prostředí GAMS.

Z použití GRG vyplývají některá pravidla pro prováděné výpočty. V prvé řadě je to nutnost spojitosti veškerých funkcí včetně jejich prvních derivací. Toho je v některých případech (pracovní diagramy, zmíněná tuhost) nutno docílit pomocí Hermitovské interpolace. Toto již bylo zpracováno J. Plškem a je přítomno v jeho .dll knihovnách, viz [2].

Dále pro hledání globálního minima musí být splněna podmínka konvexnosti úlohy. S ohledem na komplexnost úlohy se předpokládá její nesplnění a tedy, že je hledáno pouze lokální minimum.

## 4.2. Výpočet ohybové tuhosti při MSP

### 4.2.1. Původní metoda

Jak bylo uvedeno (viz odst. 4.1.4), pro výpočet ohybové tuhosti při MSP, kdy mohou vznikat trhliny, byly použity knihovny J. Plška z jeho disertační práce [2]. Při používání těchto knihoven, však může za určitých okolností docházet k nepřesnostem. Celé problematice se věnoval článek [55], respektive [56].

V práci J. Plška [2] se ohybová tuhost  $B$  počítá vzorcem

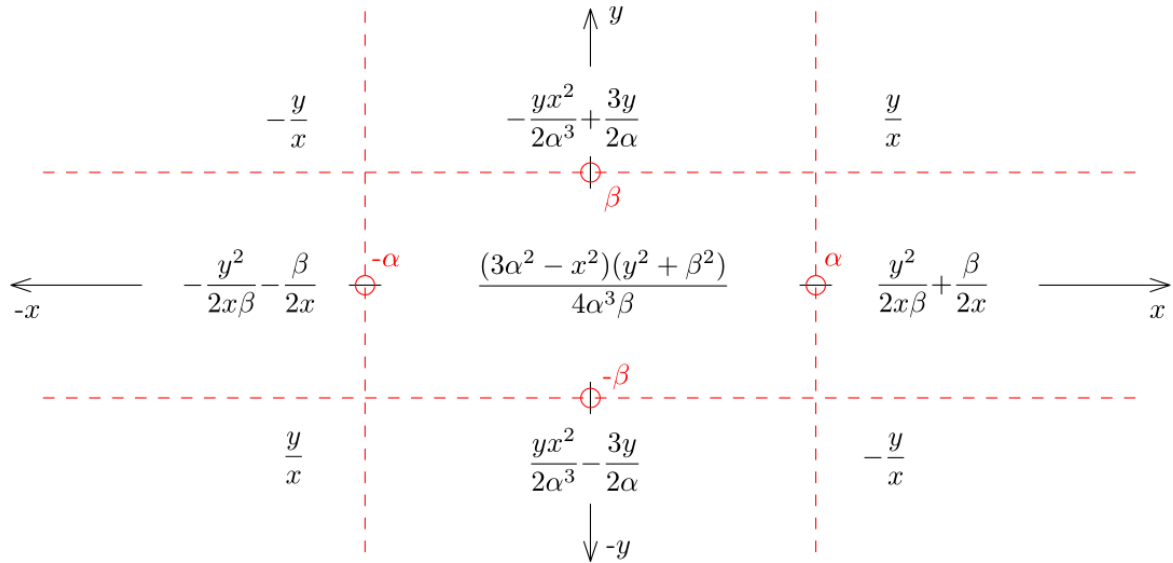
$$B = \frac{1}{G}, \quad (4.54)$$

kde  $G$  je poddajnost, pro kterou platí

$$G = \frac{K}{M}, \quad (4.55)$$

kde  $M$  je ohybový moment působící v rovině zakřivení a  $K$  je zakřivení deformovaného prutu.

Tyto vztahy jsou využity k výpočtu ohybových tuhostí trhlinami neporušených i porušených průřezů. Také se poznamenává, že pro hodnoty  $K$  a  $M$  blízké 0 budou vznikat numerické problémy. Proto je zaveden tzv. normalizovaný výpočet, který pracuje s konstantami  $\alpha$  a  $\beta$  a má zajistit, že ohybová tuhost  $B$  i poddajnost  $G$  budou spojitě a budou mít spojitě také první derivace. Schéma normalizovaného výpočtu je na Obr. 5.



Obrázek 5: Schéma normalizovaného výpočtu tuhosti, respektive poddajnosti. Za proměnné  $x$  a  $y$  ve schématu se dosadí  $K$  a  $M$  (viz (4.54), (4.55),  $\alpha$  a  $\beta$  jsou volené parametry).

Ačkoliv tento normalizovaný výpočet plní svůj účel v tom smyslu, že ohybová tuhost  $B$  i poddajnost  $G$  jsou spojité a mají spojité i první derivace, naneštěstí jejich hodnoty z normalizovaného výpočtu nejsou vždy dobrou reprezentací jejich reálných hodnot. Toto je závislé také na vhodné volbě konstant  $\alpha$ ,  $\beta$ , přičemž ucelená metoda volby těchto konstant není k dispozici.

Proto byla autorem práce navržena jiná metoda výpočtu tuhosti. (Srovnání obou metod je ukázáno později na Obr. 7.)

### 4.2.2. Navržená metoda

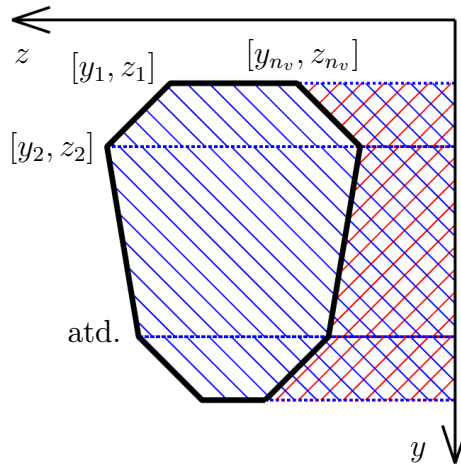
Navržená metoda ponechává Plškův výpočet pro ohybovou tuhost průřezu porušeného trhlinami, pro neporušený průřez pak spoléhá na klasický vzorec

$$B = Y \cdot I, \quad (4.56)$$

kde  $Y$  je Youngův modul pružnosti a  $I$  je moment setrvačnosti průřezu (včetně obsažené výztuže). S ohledem na obecnost celé Plškovy procedury, je výpočet navržen pro obecný polygon, který je určen souřadnicemi jeho  $n_v$  vrcholů  $[y_j, z_j]$ ,  $j = 1, \dots, n_v$ , přičemž se uvažuje, že  $n_v + 1 = 1$  a opačně  $1 - 1 = n_v$ .

Ve výpočtu se nejprve spočítá plocha a její první moment (statický moment) daného průřezu – polygonu. Průběh je takový, že se spočítají dílčí plochy pod každým segmentem

polygonu (a to až k ose) a přičtou se k celkové ploše (analogicky pro statický moment). Využívá se toho, že dílčí plochy pro horní segmenty polygonu (segmenty, kde  $y_{i+1} > y_i$ ) mají opačné znaménko než pro dolní segmenty (segmenty, kde  $y_{i+1} < y_i$ ). Analogicky platí i pro statický moment. Z toho plyne, že vrcholy musí být správně uspořádány – po nebo proti směru hodinových ručiček – a sice tak, aby dílčí plochy pod horními segmenty byly kladné. Při špatném uspořádání by plocha (respektive její moment) vyšla s opačným znaménkem. Dle Obr. 6 a vzorců (4.57), (4.58) lze ověřit, že správné uspořádání je v daném souřadnicovém systému proti směru hodinových ručiček. Tento výpočet bude později analogicky použit i pro druhý moment plochy (moment setrvačnosti) – (4.63).



Obrázek 6: Příklad polygonálního průřezu a ilustrace postupu výpočtu plochy (respektive jejích momentů).

Vzorec pro výpočet plochy průřezu  $A_c$  je (pozn. při  $j = 1$  se uvažuje  $j - 1 = n_v$ )

$$\begin{aligned}
 A_c &= \sum_{j=1}^{n_v} A_j = \sum_{j=1}^{n_v} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_0^{\frac{z_j - z_{j-1}}{y_j - y_{j-1}}(y - y_{j-1}) + z_{j-1}} dz dy = \\
 &= \sum_{j=1}^{n_v} \frac{1}{2} (z_j + z_{j-1}) (y_j - y_{j-1}),
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

kde  $A_j$  je dílčí plocha pod segmentem polygonu daném vrcholy  $[y_{j-1}, z_{j-1}]$  a  $[y_j, z_j]$ .

Podobně, vzorec pro výpočet statického momentu průřezu  $S_c$  je (pozn. při  $j = 1$  se opět uvažuje  $j - 1 = n_v$ )

$$\begin{aligned} S_c &= \sum_{j=1}^{n_v} S_j = \sum_{j=1}^{n_v} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_0^{\frac{z_j - z_{j-1}}{y_j - y_{j-1}}(y - y_{j-1}) + z_{j-1}} y \, dz \, dy = \\ &= \sum_{j=1}^{n_v} \left[ (z_j - z_{j-1}) \left( \frac{y_j^2}{3} - \frac{y_j y_{j-1}}{6} - \frac{y_{j-1}^2}{6} \right) + z_{j-1} \left( \frac{y_j^2}{2} - \frac{y_{j-1}^2}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.58)$$

kde  $S_j$  je dílčí statický moment pod segmentem polygonu daném vrcholy  $[y_{j-1}, z_{j-1}]$  a  $[y_j, z_j]$ .

Nyní se spočítá celková plocha  $A_{cs}$  jako součet plochy betonového průřezu  $A_c$  a plochy ocelové výztuže  $A_s$  vážené poměrem modulů pružnosti oceli  $Y_s$  a betonu  $Y_c$ . Analogicky se spočítá i celkový statický moment  $S_{cs}$  ze statického momentu betonového průřezu  $S_c$  a ocelové výztuže  $S_s$ . Dostane se

$$A_{cs} = A_c + \frac{Y_s}{Y_c} A_s, \quad (4.59)$$

$$S_{cs} = S_c + \frac{Y_s}{Y_c} S_s. \quad (4.60)$$

Hodnoty  $A_{cs}$  a  $S_{cs}$  slouží pouze k transformaci souřadného systému tak, aby těžiště průřezu (včetně výztuže a úměrně modulům pružnosti) ve směru  $y$  bylo na ose  $z$  (tedy  $y = 0$ ). Toto naznačují rovnice

$$y_{cs} = -\frac{S_{cs}}{A_{cs}}, \quad (4.61)$$

$$y'_j = y_j + y_{cs}, \quad (4.62)$$

kde  $y_{cs}$  je potřebný posun ve směru  $y$  tak, aby těžiště polygonu bylo na ose  $z$ , a  $y'_j$  jsou souřadnice polygonu v novém souřadném systému.

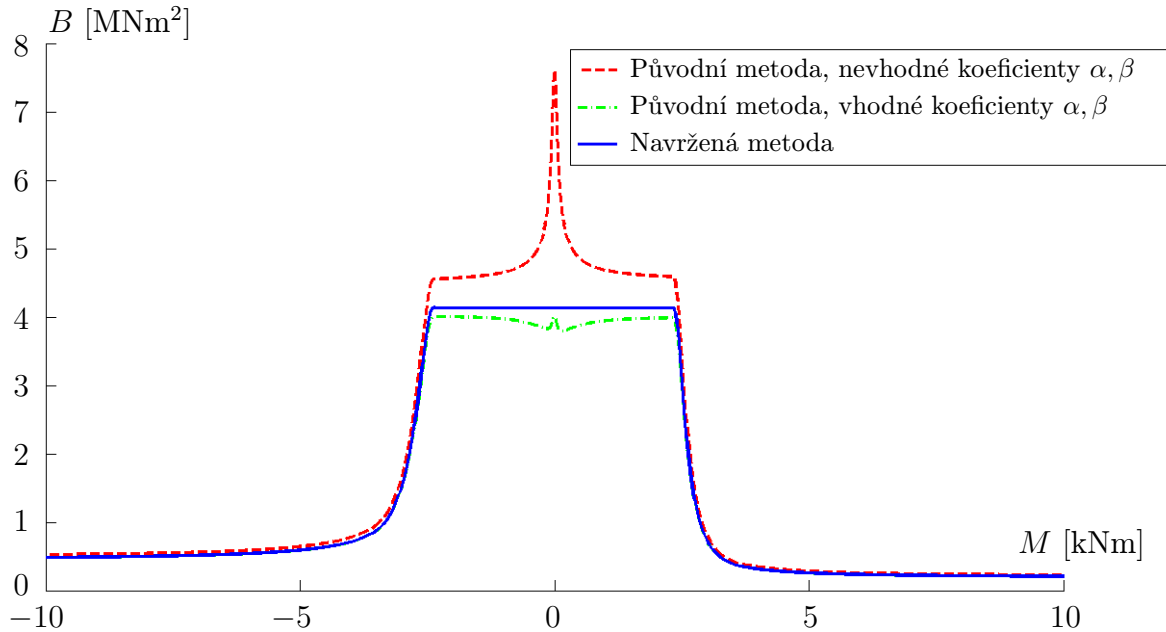
Pro takto posunutý průřez se nyní spočítá moment setrvačnosti  $I_c$  pomocí vzorce (pozn. při  $j = 1$  se opět uvažuje  $j - 1 = n_v$ )

$$\begin{aligned} I_c &= \sum_{j=1}^{n_v} I_j = \sum_{j=1}^{n_v} \int_{y'_{j-1}}^{y'_j} \int_0^{\frac{z_j - z_{j-1}}{y'_j - y'_{j-1}}(y - y'_{j-1}) + z_{j-1}} y^2 \, dz \, dy = \\ &= \sum_{j=1}^{n_v} \left[ (z_j - z_{j-1}) \left( \frac{y_j'^3}{4} - \frac{y_j'^2 y'_{j-1}}{12} - \frac{y'_j y_{j-1}'^2}{12} - \frac{y_{j-1}'^3}{12} \right) + z_{j-1} \left( \frac{y_j'^3}{3} - \frac{y_{j-1}'^3}{3} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.63)$$

kde  $I_j$  je dílčí moment setrvačnosti pod segmentem polygonu daném vrcholy  $[y'_{j-1}, z_{j-1}]$  a  $[y'_j, z_j]$ .

Protože moment setrvačnosti ocelové výztuže  $I_s$  je znám pouze v původní soustavě souřadnic a je tedy třeba ho přepočítat, má pak výsledný vzorec pro výpočet tuhosti tvar

$$B = I_c Y_c + (I_s + 2 y_{cs} S_s + y_{cs}^2 A_s) Y_s. \quad (4.64)$$



Obrázek 7: Porovnání metod výpočtu ohybové tuhosti.

Na Obr. 7 je k vidění porovnání výpočtu ohybové tuhosti pomocí původní metody [2] (a to s vhodně a nevhodně zvolenými koeficienty  $\alpha, \beta$ ) a navržené metody. Porovnání je provedeno na příkladu nosníku čtvercového průřezu  $200 \times 200$  mm s horní výztuží o ploše  $40 \text{ mm}^2$ , dolní výztuží  $103 \text{ mm}^2$ , obě se vzdáleností mezi těžištěm výztuže a lícem betonu  $30$  mm. Nosník je zatížen normálovou silou  $2$  kN a ohybovým momentem  $M$  dle grafu.

### 4.2.3. Výpočet derivací v navržené metodě

Jak bylo zmíněno na začátku kapitoly, je potřeba znát i první derivace ohybové tuhosti a to podle všech vstupních proměnných. Těmi jsou moduly pružnosti betonu a oceli –  $Y_c$  a  $Y_s$ , dále plocha, statický moment a moment setrvačnosti ocelové výztuže –  $A_s$ ,  $S_s$  a  $I_s$  a také samotné souřadnice vrcholů polygonu –  $y_j$ ,  $z_j$ .

Situace je nejjednodušší pro  $I_s$ , jelikož se vyskytuje pouze ve finální rovnici pro ohybovou tuhost (4.64). Platí

$$\frac{dB}{dI_s} = Y_s. \quad (4.65)$$

Pro další výpočty je z (4.62) až (4.64) výhodné odvodit

$$\frac{dB}{dy_{cs}} = \frac{\partial B}{\partial y_{cs}} + \frac{\partial B}{\partial I_c} \frac{dI_c}{dy_{cs}} = (2 S_s + 2 y_{cs} A_s) Y_s + Y_c \frac{dI_c}{dy_{cs}}, \quad (4.66)$$

kde  $\frac{dI_c}{dy_{cs}}$  je odvozeno z (4.62), (4.63) jako (pozn. při  $j = 1$  se opět uvažuje  $j - 1 = n_v$ )

$$\begin{aligned} \frac{dI_c}{dy_{cs}} &= \sum_{j=1}^{n_v} \frac{dI_j}{dy_{cs}} = \sum_{j=1}^{n_v} \left( \frac{\partial I_j}{\partial y'_j} \frac{dy'_j}{dy_{cs}} + \frac{\partial I_j}{\partial y'_{j-1}} \frac{dy'_{j-1}}{dy_{cs}} \right) = \sum_{j=1}^{n_v} \left( \frac{\partial I_j}{\partial y'_j} + \frac{\partial I_j}{\partial y'_{j-1}} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n_v} \left[ (z_j - z_{j-1}) \left( \frac{2 y_j'^2}{3} - \frac{y'_j y'_{j-1}}{3} - \frac{y_{j-1}'^2}{3} \right) + z_{j-1} (y_j'^2 - y_{j-1}'^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Pro derivace podle  $Y_c, Y_s, A_s$  a  $S_s$  (nahrazeny proměnnou  $X$ ) se z (4.59) až (4.61), (4.64) odvodí

$$\frac{dB}{dX} = \frac{dB}{dy_{cs}} \frac{dy_{cs}}{dX} + \frac{\partial B}{\partial X}. \quad (4.68)$$

Jelikož  $\frac{dB}{dy_{cs}}$  je známé z (4.66) – kam je nutné ještě dosadit z (4.67), stačí z (4.59) až (4.61) odvodit  $\frac{dy_{cs}}{dX}$  jako

$$\frac{dy_{cs}}{dX} = \frac{\partial y_{cs}}{\partial A_{cs}} \frac{dA_{cs}}{dX} + \frac{\partial y_{cs}}{\partial S_{cs}} \frac{dS_{cs}}{dX} = \frac{S_{cs}}{A_{cs}^2} \frac{dA_{cs}}{dX} - \frac{1}{A_{cs}} \frac{dS_{cs}}{dX}. \quad (4.69)$$

Pro úplnost zbývá ještě odvodit z (4.59), (4.60), (4.64) vztahy

$$\begin{aligned} \frac{dA_{cs}}{dY_c} &= -\frac{Y_s}{Y_c^2} A_s, & \frac{dS_{cs}}{dY_c} &= -\frac{Y_s}{Y_c^2} S_s, & \frac{\partial B}{\partial Y_c} &= I_c, \\ \frac{dA_{cs}}{dY_s} &= \frac{1}{Y_c} A_s, & \frac{dS_{cs}}{dY_s} &= \frac{1}{Y_c} S_s, & \frac{\partial B}{\partial Y_s} &= I_s + 2 y_{cs} S_s + y_{cs}^2 A_s, \\ \frac{dA_{cs}}{dA_s} &= \frac{Y_s}{Y_c}, & \frac{dS_{cs}}{dA_s} &= 0, & \frac{\partial B}{\partial A_s} &= y_{cs}^2 Y_s, \\ \frac{dA_{cs}}{dS_s} &= 0, & \frac{dS_{cs}}{dS_s} &= \frac{Y_s}{Y_c}, & \frac{\partial B}{\partial S_s} &= 2 y_{cs} Y_s. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Nakonec, dosazením (4.66), (4.69), (4.70) do (4.68) se dostane konečné vyčíslení derivací  $B$  podle  $Y_c, Y_s, A_s$  a  $S_s$  (nahrazeny  $X$ ) jako

$$\frac{dB}{dX} = \frac{dB}{dy_{cs}} \frac{dy_{cs}}{dX} + \frac{\partial B}{\partial X} = \frac{dB}{dy_{cs}} \left( \frac{S_{cs}}{A_{cs}^2} \frac{dA_{cs}}{dX} - \frac{1}{A_{cs}} \frac{dS_{cs}}{dX} \right) + \frac{\partial B}{\partial X}. \quad (4.71)$$

Situace je nejvíce komplikovaná pro derivace podle souřadnic vrcholů polygonu  $y_j, z_j, j = 1, \dots, n_v$ . Při odvozování derivace plochy  $A_c$  se algoritmicky postupuje tak, že pro každou dílčí plochu  $A_j$  se z (4.57) spočítají čtyři dílčí derivace (pozn. pro  $j = 1$  se opět uvažuje  $j - 1 = n_v$ )

$$\begin{aligned} \frac{dA_j}{dy_j} &= \frac{1}{2} (z_j + z_{j-1}), \\ \frac{dA_j}{dy_{j-1}} &= -\frac{1}{2} (z_j + z_{j-1}), \\ \frac{dA_j}{dz_j} &= \frac{1}{2} (y_j - y_{j-1}), \\ \frac{dA_j}{dz_{j-1}} &= \frac{1}{2} (y_j - y_{j-1}) \end{aligned} \quad (4.72)$$

a přičtou se do příslušných derivací  $\frac{dA_c}{dy_j}, \frac{dA_c}{dy_{j-1}}, \frac{dA_c}{dz_j}$  a  $\frac{dA_c}{dz_{j-1}}$ . Každé  $y_j$  a  $z_j$  figuruje v celkové ploše  $A_c$  právě ve dvou dílčích plochách a to  $A_j$  a  $A_{j+1}$ . Celkově se tak pro  $\frac{dA_c}{dy_j}$  a  $\frac{dA_c}{dz_j}$  dostane (pozn. nyní se navíc pro  $j = n_v$  uvažuje  $j + 1 = 1$ )

$$\begin{aligned} \frac{dA_c}{dy_j} &= \frac{dA_j}{dy_j} + \frac{dA_{j+1}}{dy_j} = \frac{1}{2} (z_j + z_{j-1}) - \frac{1}{2} (z_{j+1} + z_j) = -\frac{1}{2} (z_{j+1} - z_{j-1}), \\ \frac{dA_c}{dz_j} &= \frac{dA_j}{dz_j} + \frac{dA_{j+1}}{dz_j} = \frac{1}{2} (y_j - y_{j-1}) + \frac{1}{2} (y_{j+1} - y_j) = \frac{1}{2} (y_{j+1} - y_{j-1}). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Pro derivace statického momentu  $S_c$  platí obdobná situace. Z (4.58) se odvodí dílčí derivace

$$\begin{aligned} \frac{dS_j}{dy_j} &= (z_j - z_{j-1}) \left( \frac{2}{3} y_j - \frac{y_{j-1}}{6} \right) + z_{j-1} y_j, \\ \frac{dS_j}{dy_{j-1}} &= (z_j - z_{j-1}) \left( -\frac{y_j}{6} - \frac{y_{j-1}}{3} \right) - z_{j-1} y_{j-1}, \\ \frac{dS_j}{dz_j} &= \frac{y_j^2}{3} - \frac{y_j y_{j-1}}{6} - \frac{y_{j-1}^2}{6}, \\ \frac{dS_j}{dz_{j-1}} &= -\left( \frac{y_j^2}{3} - \frac{y_j y_{j-1}}{6} - \frac{y_{j-1}^2}{6} \right) + \left( \frac{y_j^2}{2} - \frac{y_{j-1}^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.74)$$

a přičtou se do do příslušných derivací  $\frac{dS_c}{dy_j}$ ,  $\frac{dS_c}{dy_{j-1}}$ ,  $\frac{dS_c}{dz_j}$  a  $\frac{dS_c}{dz_{j-1}}$ . Uvedeno pouze pro úplnost, pro  $\frac{dS_c}{dy_j}$  a  $\frac{dS_c}{dz_j}$  se pak celkově dostane (pozn. pro  $j = 1$  se uvažuje  $j - 1 = n_v$  a naopak pro  $j = n_v$  se uvažuje  $j + 1 = 1$ )

$$\begin{aligned}\frac{dS_c}{dy_j} &= \frac{dS_j}{dy_j} + \frac{dS_{j+1}}{dy_j} = -(z_{j+1} - z_j) \frac{y_{j+1}}{6} - (z_{j+1} - z_{j-1}) \frac{y_j}{3} - (z_j - z_{j-1}) \frac{y_{j-1}}{6}, \\ \frac{dS_c}{dz_j} &= \frac{dS_j}{dz_j} + \frac{dS_{j+1}}{dz_j} = \frac{1}{6} (y_{j+1}^2 + y_{j+1} y_j - y_j y_{j-1} - y_{j-1}^2).\end{aligned}\quad (4.75)$$

Pro derivace momentu setrvačnosti  $I_c$  (4.63) je situace opět podobná. Zde je ale nyní třeba za  $y_j$  a  $y_{j-1}$  dosadit z (4.62). Dále proměnná  $y_{cs}$  bude považována za konstantu – jelikož derivace  $\frac{dI_c}{dy_{cs}}$  je již známá z (4.67) a není třeba ji počítat znovu – a derivace tak budou označeny jako parciální, protože  $y_{cs}$  zřejmě závisí na  $y_i, z_i$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_j}{\partial y_j} &= (z_j - z_{j-1}) \left( \frac{3 y_j^2}{4} - \frac{y_j y_{j-1}}{6} - \frac{y_{j-1}^2}{12} \right) + z_{j-1} y_j^2, \\ \frac{\partial I_j}{\partial y_{j-1}} &= (z_j - z_{j-1}) \left( -\frac{y_j^2}{12} - \frac{y_j y_{j-1}}{6} - \frac{y_{j-1}^2}{4} \right) - z_{j-1} y_{j-1}^2, \\ \frac{\partial I_j}{\partial z_j} &= \frac{y_j^3}{4} - \frac{y_j^2 y_{j-1}}{12} - \frac{y_j y_{j-1}^2}{12} - \frac{y_{j-1}^3}{12}, \\ \frac{\partial I_j}{\partial z_{j-1}} &= -\left( \frac{y_j^3}{4} - \frac{y_j^2 y_{j-1}}{12} - \frac{y_j y_{j-1}^2}{12} - \frac{y_{j-1}^3}{12} \right) + \left( \frac{y_j^3}{3} - \frac{y_{j-1}^3}{3} \right).\end{aligned}\quad (4.76)$$

Takto odvozené dílčí derivace se opět postupně přičítají do derivací (stále označeny jako parciální)  $\frac{\partial I_c}{\partial y_j}$ ,  $\frac{\partial I_c}{\partial y_{j-1}}$ ,  $\frac{\partial I_c}{\partial z_j}$  a  $\frac{\partial I_c}{\partial z_{j-1}}$ . Pro úplnost je opět doplněn konečný tvar  $\frac{\partial I_c}{\partial y_j}$  a  $\frac{\partial I_c}{\partial z_j}$  jako (pozn. opět pro  $j = 1$  se uvažuje  $j - 1 = n_v$  a naopak pro  $j = n_v$  se uvažuje  $j + 1 = 1$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_c}{\partial y_j} &= \frac{\partial I_j}{\partial y_j} + \frac{\partial I_{j+1}}{\partial y_j} = \\ &= -(z_{j+1} - z_j) \left( \frac{y_{j+1}^2}{12} + \frac{y_{j+1} y_j}{6} \right) - (z_{j+1} - z_{j-1}) \frac{y_j^2}{4} - (z_j - z_{j-1}) \left( \frac{y_j y_{j-1}}{6} + \frac{y_{j-1}^2}{12} \right), \\ \frac{\partial I_c}{\partial z_j} &= \frac{\partial I_j}{\partial z_j} + \frac{\partial I_{j+1}}{\partial z_j} = \frac{1}{12} (y_{j+1}^3 + y_{j+1}^2 y_j + y_{j+1} y_j^2 - y_j^2 y_{j-1} - y_j y_{j-1}^2 - y_{j-1}^3).\end{aligned}\quad (4.77)$$



Celkové derivace ohybové tuhosti  $B$  (4.64) podle všech souřadnic vrcholů polygonu  $y_j, z_j, j = 1, \dots, n_v$  lze nyní získat pomocí (za  $\frac{dy_{cs}}{dy_j}$  se dosadí z (4.69) – pozn. podle (4.59), (4.60) zřejmě platí  $\frac{dA_{cs}}{dA_c} = \frac{dS_{cs}}{dS_c} = 1$ )

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dy_j} &= \frac{dB}{dy_{cs}} \frac{dy_{cs}}{dy_j} + \frac{\partial B}{\partial I_c} \frac{\partial I_c}{\partial y_j} = \frac{dB}{dy_{cs}} \left( \frac{S_{cs}}{A_{cs}^2} \frac{dA_{cs}}{dA_c} \frac{dA_c}{dy_j} - \frac{1}{A_{cs}} \frac{dS_{cs}}{dS_c} \frac{dS_c}{dy_j} \right) + Y_c \frac{\partial I_c}{\partial y_j} = \\ &= \frac{dB}{dy_{cs}} \left( \frac{S_{cs}}{A_{cs}^2} \frac{dA_c}{dy_j} - \frac{1}{A_{cs}} \frac{dS_c}{dy_j} \right) + Y_c \frac{\partial I_c}{\partial y_j}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

kam se za  $\frac{dB}{dy_{cs}}$  dosadí z (4.66), za  $\frac{dA_c}{dy_j}$  z (4.73), za  $\frac{dS_c}{dy_j}$  z (4.75) a za  $\frac{\partial I_c}{\partial y_j}$  z (4.77). Vzorec pro  $\frac{dB}{dz_j}$  je naprosto analogický a má tedy tvar

$$\frac{dB}{dz_j} = \frac{dB}{dy_{cs}} \left( \frac{S_{cs}}{A_{cs}^2} \frac{dA_c}{dz_j} - \frac{1}{A_{cs}} \frac{dS_c}{dz_j} \right) + Y_c \frac{\partial I_c}{\partial z_j}. \quad (4.79)$$

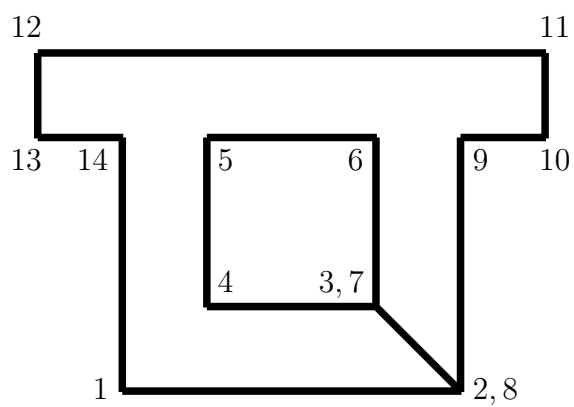
Derivace ohybové tuhosti  $B$  podle všech vstupních proměnných jsou tedy nyní známy.

#### 4.2.4. Průřez s dutinou

Navrženou metodou lze také počítat průřez s dutinou. K tomu stačí jednoduchá úprava s uspořádáním vrcholů průřezu. Příklad takového uspořádání je na Obr. 8. Lze si všimnout, že vnější vrcholy jsou orientovány proti směru hodinových ručiček a plocha a její momenty tak mají korektní znaménka. Naproti tomu vrcholy tvořící dutinu, jsou orientovány po směru hodinových ručiček a plocha a její momenty tak mají znaménka převrácená. Viz odst. 4.2.2. Přidáním podmínek

$$\begin{aligned} [y_2, z_2] &= [y_8, z_8], \\ [y_3, z_3] &= [y_7, z_7] \end{aligned} \quad (4.80)$$

je pak dosaženo přesně požadovaného stavu. Rovnost souřadnic v matematickém modelu zajišťuje i rovnost všech proměnných závislých na poloze bodu v průřezu a všechny procedury J. Plška [2] jsou s tímto postupem v souladu, jelikož sami pracují s obecným polygonem.



Obrázek 8: Příklad uspořádání vrcholů průřezu s dutinou.

# 5. Stochastická úloha a algoritmus řešení

## 5.1. Popis úlohy stochastické optimalizace

V [kap. 4](#) byla představena deterministická forma úlohy a uvedeny základní vztahy MKP. Proces navrhování však ve skutečnosti zahrnuje řadu nejistot, mezi něž patří např.:

- náhodnost fyzikálních veličin – zejména zatížení a materiálové charakteristiky,
- statistické nejistoty při popisu daných veličin kvůli nedostatku informací,
- nejistoty způsobené nepřesnostmi ve výpočtovém modelu vzhledem ke skutečnému chování konstrukce,
- nejistoty dané nepřesnostmi v definicích mezních stavů,
- výrobní nepřesnosti a chyby.

V deterministickém pojetí úlohy jsou veškeré zmíněné nejistoty zahrnuty do výpočtu prostřednictvím patřičného výběru návrhové hodnoty a/nebo použitím různých spolehlivostních součinitelů. Je pak zřejmé, že pro požadovanou pravděpodobnost selhání konstrukce lze stochastickým přístupem získat výstižnější řešení problému.

Při zahrnutí nejistot bude původní úloha (4.1) až (4.4) reformulována do své stochastické podoby

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad \text{za podmíněk:} \quad (5.1)$$

$$P \left( \min_{r=1, \dots, n_r} [R_r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) - L_r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})] \geq 0 \right) \geq p_{\text{MSU}}, \quad (5.2)$$

$$P \left( \min_{s=1, \dots, n_s} [w_{\text{max}} - w_s(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})] \geq 0 \right) \geq p_{\text{MSP}}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{C}, \quad (5.4)$$

kde  $\mathbf{x}$  je vektor optimalizovaných proměnných (nejčastěji tvar průřezu, plocha výztuže, popř. poloha výztuže, třída betonu, druh oceli apod.),  $\boldsymbol{\xi}$  představuje vektor vstupních náhodných veličin, zatímco  $\mathbf{v}$  představuje deterministické vstupní proměnné,  $P()$  značí pravděpodobnost daného jevu a  $p_{\text{MSU}}, p_{\text{MSP}}$  jsou předepsané hodnoty pravděpodobností, s nimiž mají být dodrženy MSÚ a MSP. Funkce  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  je jako v [kap. 4](#) účelová funkce

optimalizace (např. cena konstrukce),  $L_r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})$  představují účinky zatížení v daných průřezech  $r = 1, \dots, n_r$ ,  $R_r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})$  odolnost konstrukce v těchto průřezech  $r$ ,  $w_s(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})$  jsou průhyby konstrukce v průřezech  $s = 1, \dots, n_s$ ,  $w_{\max}$  je maximální povolená hodnota průhybu a  $\min_{r=1, \dots, n_r} (\min_{s=1, \dots, n_s})$  značí výběr minimální hodnoty přes všechny průřezy  $r$  ( $s$ ). Symbol  $\mathbf{C}$  pak představuje omezující podmínky pro návrhové proměnné.

Hodnoty  $p_{\text{MSU}}$  a  $p_{\text{MSP}}$  obvykle nejsou předepsány přímo ale pomocí indexů spolehlivosti  $\beta_{\text{MSU}}$  a  $\beta_{\text{MSP}}$ , z nichž jsou hodnoty pravděpodobností  $p_{\text{MSU}}$ ,  $p_{\text{MSP}}$  získány vzorci

$$p_{\text{MSU}} = \Phi_{\text{N}}(\beta_{\text{MSU}}), \quad (5.5)$$

$$p_{\text{MSP}} = \Phi_{\text{N}}(\beta_{\text{MSP}}), \quad (5.6)$$

kde  $\Phi_{\text{N}}()$  je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení, viz [1].

Účelová funkce (5.1) již byla podrobněji popsána v odst. 4.1.2. Způsob, kterým se v deterministickém tvaru vyhodnocují podmínky MSÚ a MSP, již byly podrobně popsány v odst. 4.1.3 a odst. 4.1.4. Rozdílem zde je, že podmínky MSÚ (5.2) a MSP (5.3) jsou nyní pravděpodobnostní, tj. tyto podmínky musí být splněny s danou pravděpodobností. Omezení (5.4) opět vymezuje limitní hodnoty pro samotné návrhové proměnné a je podrobněji popsáno v odst. 4.1.5. Podrobněji popsán tak zde bude pouze náhodný vektor  $\boldsymbol{\xi}$ .

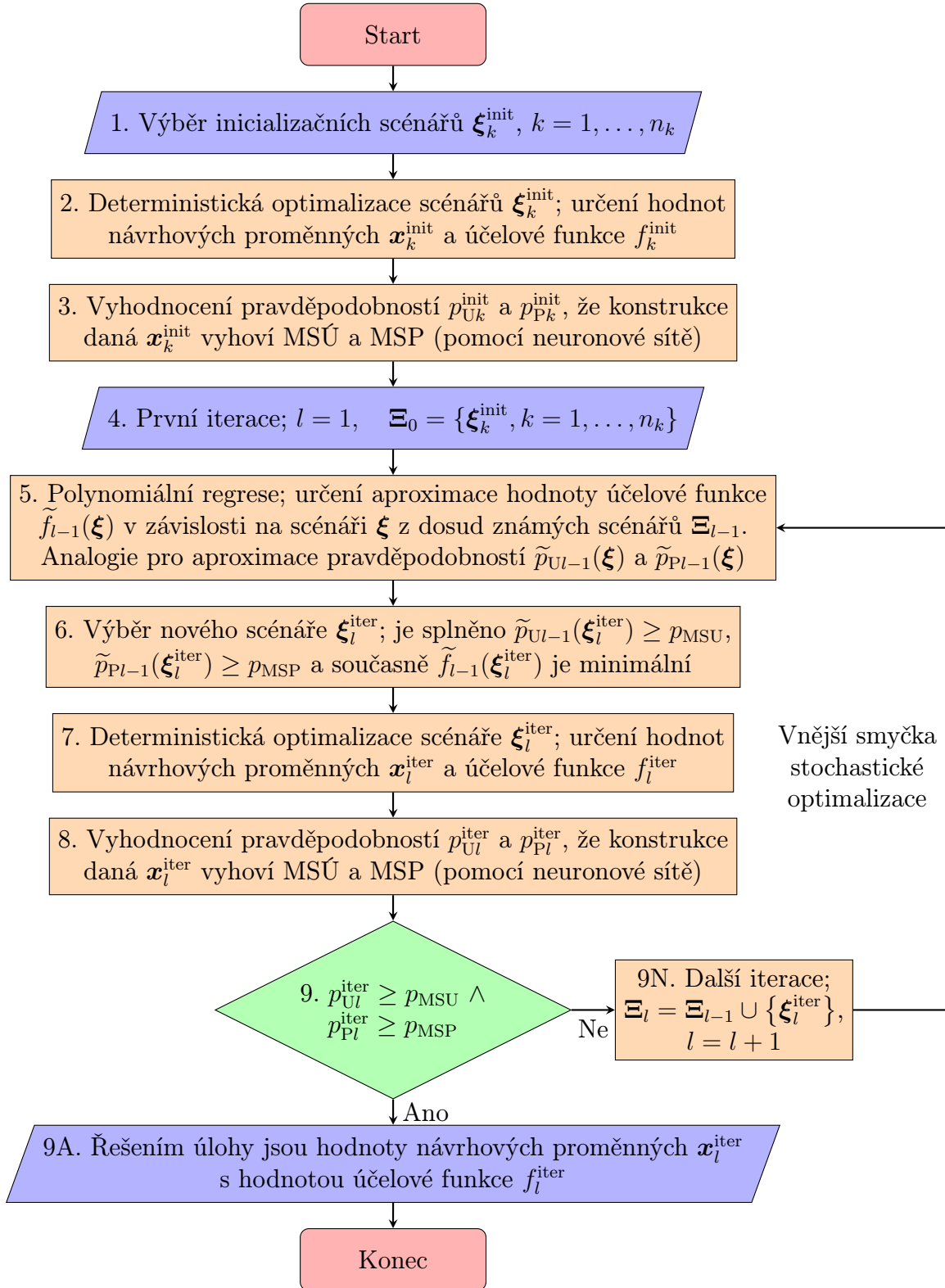
### 5.1.1. Vektor náhodných veličin

Tento vektor obsahuje veškeré náhodné veličiny v dané úloze, na jejichž základě poté dochází k vyhodnocování pravděpodobností splnění podmínek MSÚ a MSP, a to pomocí metody neuronových sítí a simulace Monte Carlo (viz odst. 5.2.4). Náhodnými veličinami jsou obvykle zatížení nebo materiálové charakteristiky.

Bude-li se požadovat náhodnost přímo v některé z návrhových veličin z  $\mathbf{x}$ , např.  $x_A$ , bude tato v  $\mathbf{x}$  nadále reprezentována svou návrhovou hodnotou, přičemž vektor  $\boldsymbol{\xi}$  pak bude obsahovat náhodnou veličinu  $\xi_B$ , která bude představovat náhodnost pro hodnotu  $x_A$  a v samotném matematickém modelu podmínek MSÚ a MSP bude pracováno s hodnotou  $x_A + \xi_B$ .

## 5.2. Algoritmus řešení

Celý algoritmus znázorňuje vývojový diagram na Obr. 9.



Obrázek 9: Vývojový diagram celého algoritmu; zápis v diagramu může být symbolický nebo zkrácený, je podrobně rozveden v textu.

Algoritmus sestává z vnitřní smyčky deterministické optimalizace a vyhodnocování pravděpodobnosti a vnější smyčky stochastické optimalizace.

Ve vnitřní smyčce probíhá deterministická optimalizace pomocí metody redukovaných gradientů (GRG, viz odst. 3.3.8) a vyhodnocování pravděpodobnosti pomocí kombinování metod neuronové sítě (NN, viz odst. 3.3.12) a simulace Monte Carlo (viz odst. 3.3.13). Na vývojovém diagramu na Obr. 9 se jedná o kroky 2. a 3. v inicializační části výpočtu a kroky 6. a 7. v iterační části výpočtu. Deterministická optimalizace je podrobněji popsána v odst. 5.2.3, vyhodnocování pravděpodobnosti pak v odst. 5.2.4.

Vnější smyčka stochastické optimalizace využívá regresní analýzu k postupnému nalezení řešení úlohy (5.1) až (5.4) iteračním postupem. Na vývojovém diagramu na Obr. 9 se jedná o smyčku mezi kroky 5. a 9N. Její podrobnější popis je v odst. 5.2.5.

V popisu se pracuje s obecným vektorem náhodných veličin o  $\eta$  proměnných, tj.

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\eta). \quad (5.7)$$

### 5.2.1. Heuristický algoritmus

Z postupu dle Obr. 9 již je zřejmé, že algoritmus ve skutečnosti neřeší úlohu (5.1) až (5.4) ale úlohu jinou. Označí-li se úloha deterministické optimalizace (tj. kroky 2. a 7. vývojového diagramu na Obr. 9) jako

$$\min_{\boldsymbol{x}} Det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v}) = \min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}), \quad \text{za podmíněk:} \quad (5.8)$$

$$L_r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v}) \leq R_r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v}), \quad (5.9)$$

$$w_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v}) \leq w_{\max}, \quad (5.10)$$

$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C} \quad (5.11)$$

a dále její výsledek jako

$$\boldsymbol{x}_{Det} = \arg \min_{\boldsymbol{x}} Det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v}), \quad (5.12)$$

pak celková úloha řešená algoritmem má zápis

$$\min_{\xi} \left( \min_{\mathbf{x}} \text{Det}(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{v}) \right), \quad \text{za podmínek:} \quad (5.13)$$

$$P \left( \min_{r=1, \dots, n_r} \left[ R_r(\mathbf{x}_{Det}, \xi, \mathbf{v}) - L_r(\mathbf{x}_{Det}, \xi, \mathbf{v}) \right] \geq 0 \right) \geq p_{MSU}, \quad (5.14)$$

$$P \left( \begin{array}{c} \min_{r=1, \dots, n_r} \left[ R_r(\mathbf{x}_{Det}, \xi, \mathbf{v}) - L_r(\mathbf{x}_{Det}, \xi, \mathbf{v}) \right] \geq 0 \\ \wedge \\ \min_{s=1, \dots, n_s} \left[ w_{\max} - w_s(\mathbf{x}_{Det}, \xi, \mathbf{v}) \right] \geq 0 \end{array} \right) \geq p_{MSP}, \quad (5.15)$$

kde  $\mathbf{x}$  je vektor optimalizovaných proměnných,  $\xi$  představuje vektor vstupních náhodných veličin, zatímco  $\mathbf{v}$  představuje deterministické vstupní proměnné,  $P()$  značí pravděpodobnost daného jevu a  $p_{MSU}, p_{MSP}$  jsou předepsané hodnoty pravděpodobností, s nimiž mají být dodrženy MSÚ a MSP. Funkce  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  je stejně jako v [kap. 4](#) účelová funkce optimalizace (např. cena konstrukce),  $L_r(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{v})$  představují účinky zatížení v daných průřezech  $r = 1, \dots, n_r$ ,  $R_r(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{v})$  odolnost konstrukce v těchto průřezech  $r$ ,  $w_s(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{v})$  jsou průhyby konstrukce v průřezech  $s = 1, \dots, n_s$ ,  $w_{\max}$  je maximální povolená hodnota průhybu a  $\min_{r=1, \dots, n_r} (\min_{s=1, \dots, n_s})$  značí výběr minimální hodnoty přes všechny průřezy  $r$  ( $s$ ). Symbol  $\mathbf{C}$  pak představuje omezující podmínky pro návrhové proměnné.

Další problémy spočívají v metodě deterministické optimalizace, která hledá pouze lokální minima (viz [odst. 4.1.6](#)), a také ve využití regrese k optimalizaci (viz [odst. 5.2.5](#)), což není ideální řešení, nicméně je funkční a výpočetně podstatně rychlejší než např. více-dimenzionální varianta Newtonovy metody (která znamená vícenásobné vyhodnocování pravděpodobnosti v jedné iteraci).

Algoritmus je tedy v principu heuristický a je možno předpokládat, že poskytuje alespoň suboptimální řešení.

### 5.2.2. Inicializace výpočtu

Výpočet řešení úlohy je zahájen výběrem inicializačních scénářů (viz krok 1. vývojového diagramu na [Obr. 9](#)) náhodných veličin  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\eta$ . Tyto scénáře jsou označeny

$$\xi_k^{\text{init}} = (\xi_{k,1}^{\text{init}}, \xi_{k,2}^{\text{init}}, \dots, \xi_{k,\eta}^{\text{init}}), \quad k = 1, \dots, n_k, \quad (5.16)$$

kde  $n_k$  je obvykle malý počet scénářů, cca 10. Inicializační scénáře by měly dobře pokrývat prostor, v němž je vysoká hustota pravděpodobností. Pro jejich výběr tak může být

využit přístup Latin HyperCube Sampling (LHS, viz odst. 3.3.15). Současně je vhodné zařadit do množiny inicializačních scénářů větší množství scénářů, které budou splňovat MSÚ a MSP s vysokou pravděpodobností. Takové scénáře jsou voleny ručně pro každý řešený příklad.

Na těchto scénářích je provedena deterministická optimalizace (krok 2.) a následně i vyhodnocení pravděpodobností (krok 3.) tj. operace vnitřní smyčky navrženého algoritmu (viz odst. 5.2.3 a odst. 5.2.4, obdobně platí i pro kroky 6 a 7).

### 5.2.3. Deterministická optimalizace

Pro jednodušší značení budou nadále veškeré vyhodnocované scénáře (ať už  $\xi_k^{\text{init}}$  nebo  $\xi_l^{\text{iter}}$ ) označovány jako  $\xi_a$ . Platí tak

$$\xi_a = (\xi_{a,1}, \xi_{a,2}, \dots, \xi_{a,\eta}), \quad (5.17)$$

$$\xi_a \in \{\xi_k^{\text{init}}, \xi_l^{\text{iter}}, \quad k = 1, \dots, n_k, \quad l = 1, \dots, n_l\}, \quad (5.18)$$

kde  $n_k$  je počet inicializačních scénářů a  $n_l$  je počet iteračních scénářů (a tedy i iterací),  $\eta$  indexuje jednotlivé prvky libovolného vektoru náhodných veličin  $\xi$ , viz (5.7).

Deterministickou optimalizací pro konkrétní scénář  $\xi_a$  (viz kroky 2. nebo 7. vývojového diagramu na Obr. 9) lze určit minimální hodnotu účelové funkce  $f_a$  jako

$$f_a = \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \xi_a, \mathbf{v}) \quad \text{za podmíněk:} \quad (5.19)$$

$$L_r(\mathbf{x}, \xi_a, \mathbf{v}) \leq R_r(\mathbf{x}, \xi_a, \mathbf{v}), \quad (5.20)$$

$$w_s(\mathbf{x}, \xi_a, \mathbf{v}) \leq w_{\max}, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{C} \quad (5.22)$$

a také hodnoty návrhových proměnných  $\mathbf{x}_a$ , při nichž bude tato minimální hodnota účelové funkce dosažena, jako

$$\mathbf{x}_a = \arg \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \xi_a, \mathbf{v}) \quad \text{za podmíněk (5.20) až (5.22)}. \quad (5.23)$$

Jak bylo uvedeno v odst. 4.1.6, deterministická optimalizace je prováděna pomocí řešiče CONOPT3 z prostředí GAMS a předpokládá se, že hledá pouze lokální minimum.



### 5.2.4. Vyhodnocování pravděpodobnosti

Pro známé hodnoty návrhových proměnných  $\mathbf{x}_a$ , je možné vyhodnotit pravděpodobnosti  $p_{Ua}$  (respektive  $p_{Pa}$ ), s nimiž daná konfigurace splní podmínky MSÚ (respektive MSP), tj. stanovit

$$p_{Ua} = P\left(\min_{r=1,\dots,n_r} [R_r(\mathbf{x}_a, \boldsymbol{\xi}_a, \mathbf{v}) - L_r(\mathbf{x}_a, \boldsymbol{\xi}_a, \mathbf{v})] \geq 0\right), \quad (5.24)$$

$$p_{Pa} = P\left(\begin{array}{c} \min_{r=1,\dots,n_r} [R_r(\mathbf{x}_a, \boldsymbol{\xi}_a, \mathbf{v}) - L_r(\mathbf{x}_a, \boldsymbol{\xi}_a, \mathbf{v})] \geq 0 \\ \wedge \\ \min_{s=1,\dots,n_s} [w_{\max} - w_s(\mathbf{x}_a, \boldsymbol{\xi}_a, \mathbf{v})] \geq 0 \end{array}\right). \quad (5.25)$$

Toto odpovídá krokům 3., respektive 8. vývojového diagramu na [Obr. 9](#).

Pravděpodobnost je vyhodnocována metodou neuronové sítě (NN, viz [odst. 3.3.12](#)) na scénářích generovaných metodou Monte Carlo (viz [odst. 3.3.13](#)). Metoda NN je spolehlivým způsobem aproximace funkcí. Zde jí budou aproximovány průběhy hodnot proměnných týkajících se konečných omezení MSÚ a MSP – tj. skutečné hodnoty přetvoření betonu a oceli a průhybu (které tedy nyní nemusí splňovat příslušné omezující podmínky) – v závislosti na hodnotách  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\eta$ , které určují daný scénář. Při dostatečně přesné znalosti těchto průběhů je pak prostým porovnáním možné vyhodnotit velké množství scénářů. K veškerým pracem s NN je v této práci používán MATLAB a jeho knihovny.

Pro MSÚ NN aproximuje průběh nejmenší skutečně dosažené hodnoty přetvoření betonu  $\epsilon_c$  a největší skutečně dosažené hodnoty přetvoření výztuže  $\epsilon_s$ . Jak bylo uvedeno v [odst. 4.1.3](#), uvažovaná znaménková konvence je – pro tlak a + pro tah a podmínku tlačené výztuže není třeba ověřovat, protože pokud by jí nebylo vyhověno, nemohlo by být vyhověno ani podmínce pro tlačенý beton. Platí tedy

$$\epsilon_c = \min_{r,y} \epsilon_r(y), \quad (5.26)$$

$$\epsilon_s = \max_{r,y_j} \epsilon_r(y_j), \quad (5.27)$$

viz [\(4.50\)](#), [\(4.51\)](#), přičemž  $r$  zde označuje jednotlivé vyhodnocované průřezy (které mohou být pouze v uzlech konečných prvků) a  $j$  jednotlivé vrstvy ocelové výztuže,  $y$  je nadále souřadnicová osa (viz zmíněné rovnice).

Pro MSP NN aproximuje průběh skutečné maximální hodnoty průhybu  $w$ , tedy

$$w = \max_s w_s, \quad (5.28)$$

viz (4.53), přičemž  $s$  opět označuje jednotlivé vyhodnocované průřezy (které mohou být pouze v uzlech konečných prvků). Jak bylo uvedeno v odst. 4.1.4, tuto podmínku lze předepsat také pro lokální souřadný systém, pro libovolnou kombinaci posunutí a pootočení  $u, v, \phi$  (viz Obr. 4) nebo je možné předepsat takových podmínek více. V případě více podmínek by pak bylo vytvořeno více výstupů z NN analogicky s tímto.

Funkce metody vyhodnocování pravděpodobnosti je nastíněna vývojovým diagramem na Obr. 10. Jednotlivé kroky vývojového diagramu jsou dále podrobněji popsány v odst. 5.2.4.1 až odst. 5.2.4.17 (poslední číslo odstavce vždy odpovídá číslu kroku ve vývojovém diagramu).

NN je nejprve třeba trénovat. Trénink NN probíhá zvlášť pro vyhodnocování pravděpodobnosti každé jednotlivé konfigurace návrhových proměnných  $\mathbf{x}_a$ , která je výsledkem deterministické optimalizace scénáře  $\xi_a$  (viz (5.23), (5.17), (5.18)).

#### 5.2.4.1. Výběr scénářů Monte Carlo

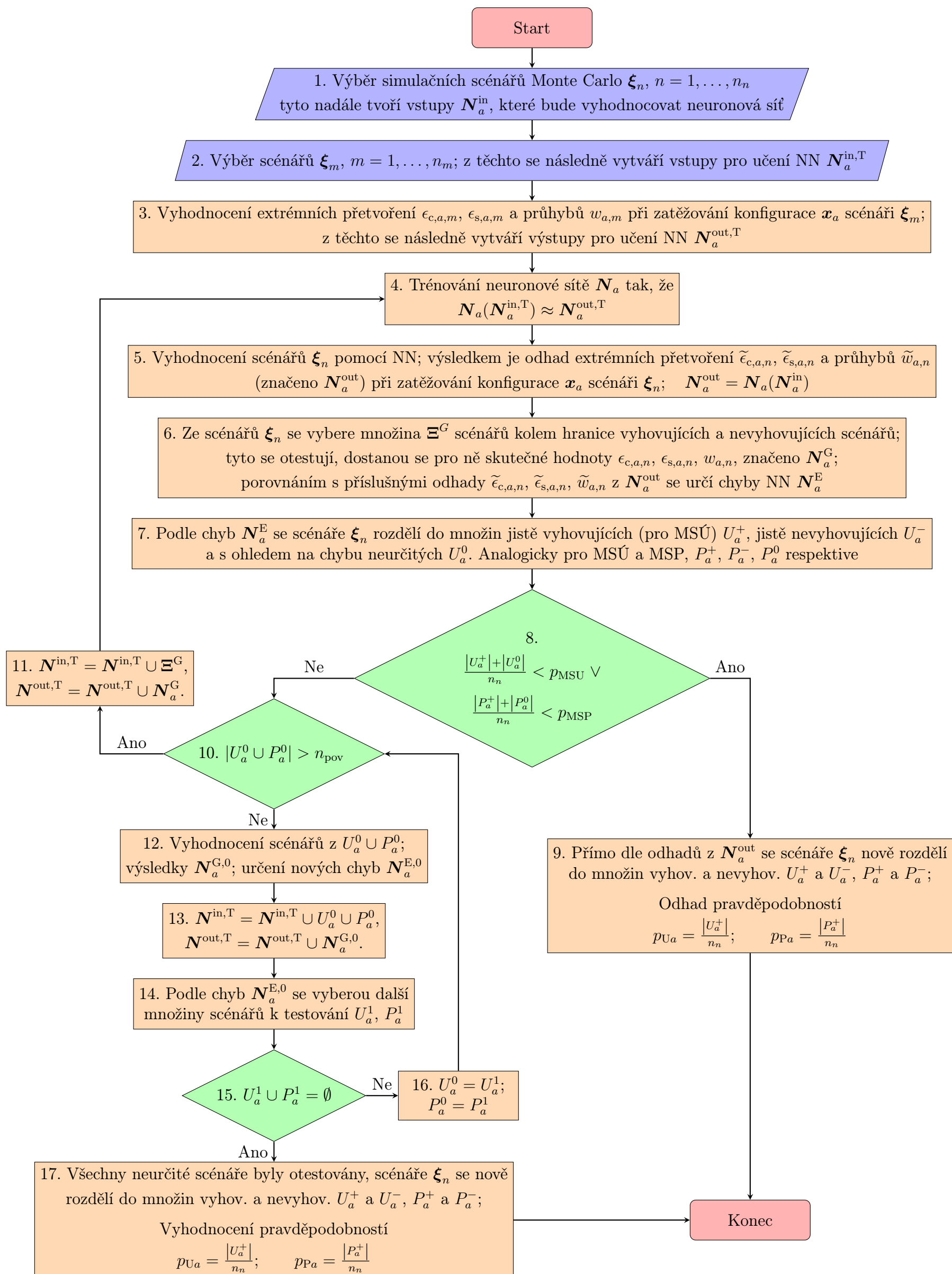
Pravděpodobnost bude vyhodnocena na velkém počtu scénářů  $n_n$ , obvykle  $10^6$  vygenerovaných metodou Monte Carlo

$$\xi_n = (\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \dots, \xi_{n,\eta}), \quad n = 1, \dots, n_n. \quad (5.29)$$

Množina scénářů MC bude pro budoucí zjednodušení zápisu označena

$$S_{MC} = \{\xi_n, n = 1, \dots, n_n\}. \quad (5.30)$$

Napříč celou optimalizační úlohou je vygenerována pouze jediná množina scénářů MC, aby nedocházelo k výkyvům pravděpodobnosti v důsledku jinak vygenerované množiny.



Obrázek 10: Vývojový diagram vyhodnocování pravděpodobnosti pro konfiguraci návrhových proměnných  $x_a$ ; zápis v diagramu může být symbolický nebo zkrácený, pro podrobnější popis viz odst. 5.2.4.x, kde x odpovídá číslu kroku vývojového diagramu.

### 5.2.4.2. Výběr scénářů pro učení NN – vstupy NN

Pro trénování NN je nejprve třeba vytvořit síť  $n_m$  scénářů

$$\boldsymbol{\xi}_m = (\xi_{m,1}, \xi_{m,2}, \dots, \xi_{m,\eta}), \quad m = 1, \dots, n_m, \quad (5.31)$$

na kterých se NN bude učit (viz odst. 5.2.4.4). Počet  $n_m$  je opět obvykle nízký, cca 100. Protože scénáře by měly dobře pokrývat prostor s vysokou hustotou pravděpodobností, je vhodnou metodou pro výběr scénářů metoda LHS (viz odst. 3.3.15).

Vstupy do NN pro trénování  $\mathbf{N}_a^{\text{in},\text{T}}$  jsou reprezentovány jejich rozdíly od původního scénáře  $\boldsymbol{\xi}_a$ , tj.

$$\mathbf{N}_a^{\text{in},\text{T}} = (\mathbf{N}_{a,m}^{\text{in},\text{T}}), \quad m = 1, \dots, n_m, \quad (5.32)$$

$$\mathbf{N}_{a,m}^{\text{in},\text{T}} = \boldsymbol{\xi}_m - \boldsymbol{\xi}_a = (\xi_{m,1} - \xi_{a,1}; \dots; \xi_{m,\eta} - \xi_{a,\eta}). \quad (5.33)$$

### 5.2.4.3. Vyhodnocení extrémních přetvoření a průhybů – výstupy NN

Podobně jsou výstupy z NN pro trénování  $\mathbf{N}_a^{\text{out},\text{T}}$  pro jednoduchost reprezentovány rozdíly skutečných hodnot přetvoření a průhybu, kterých nabývá konfigurace  $\mathbf{x}_a$  při zatěžování scénářem  $\boldsymbol{\xi}_m$ , od předepsaných maximálních a minimálních hodnot daných podmínek, tj.

$$\mathbf{N}_a^{\text{out},\text{T}} = (\mathbf{N}_{a,m}^{\text{out},\text{T}}), \quad m = 1, \dots, n_m, \quad (5.34)$$

$$\mathbf{N}_{a,m}^{\text{out},\text{T}} = (\epsilon_{c,a,m} - \epsilon_{c,\text{min}}; \epsilon_{s,\text{max}} - \epsilon_{s,a,m}; w_{\text{max}} - w_{a,m}), \quad (5.35)$$

kde  $\epsilon_{c,a,m}$  je minimální přetvoření betonu,  $\epsilon_{s,a,m}$  je maximální přetvoření výztuže a  $w_{a,m}$  je maximální průhyb, to vše při zatěžování konfigurace  $\mathbf{x}_a$  scénářem  $\boldsymbol{\xi}_m$ . Pro ostatní proměnné viz (4.50), (4.51), (4.53). V tomto tvaru platí, že daná podmínka je splněna, je-li příslušný výstup z NN větší nebo roven 0 a nesplněna je-li příslušný výstup z NN menší než 0.

Skutečné hodnoty přetvoření a průhybů jsou získány z modelu v GAMS. Zjednodušeně se bude psát

$$\mathbf{N}_{a,m}^{\text{out},\text{T}} = \text{GAMS}(\mathbf{x}_a, \boldsymbol{\xi}_m). \quad (5.36)$$

#### 5.2.4.4. Trénování NN

Neuronová síť  $\mathbf{N}_a$  je nyní vytrénována tak, aby aproximace

$$\mathbf{N}_a(\mathbf{N}_a^{\text{in},T}) \approx \mathbf{N}_a^{\text{out},T} \quad (5.37)$$

měla pokud možno co nejmenší střední kvadratickou odchylku. Pozn. postup zde není tak přímočarý jako např. u polynomicke regrese, kde by nyní byl možný jen jediný výsledek. Zde záleží ještě na konkrétním nastavení NN (viz odst. 3.3.12) jako je např. metoda učení nebo způsob rozdělení vstupních dat na data trénovací, validační a testovací. Tyto aspekty budou rozebrány na konkrétních příkladech.

#### 5.2.4.5. Vyhodnocení scénářů Monte Carlo pomocí vytrénované NN

Vstupy do NN tedy jsou zmiňované scénáře Monte Carlo  $\xi_n$ ,  $n = 1, \dots, n_n$  od nichž jsou opět odečteny hodnoty původního scénáře  $\xi_a$ , viz (5.32), (5.33), (5.29). Platí

$$\mathbf{N}_a^{\text{in}} = (\mathbf{N}_{a,n}^{\text{in}}), \quad n = 1, \dots, n_n, \quad (5.38)$$

$$\mathbf{N}_{a,n}^{\text{in}} = \xi_n - \xi_a = (\xi_{n,1} - \xi_{a,1}; \dots; \xi_{n,\eta} - \xi_{a,\eta}). \quad (5.39)$$

Výstupy  $\mathbf{N}_a^{\text{out}}$  se nyní získají pomocí vytrénované NN jako

$$\mathbf{N}_a^{\text{out}} = \mathbf{N}_a(\mathbf{N}_a^{\text{in}}). \quad (5.40)$$

Je dobré připomenout, že tyto výstupy jsou nyní aproximace skutečných hodnot extrémních přetvoření  $\epsilon_{c,a,n}$ ,  $\epsilon_{s,a,n}$  a průhybů  $w_{a,n}$  a mají tak tvar

$$\mathbf{N}_a^{\text{out}} = (\mathbf{N}_{a,n}^{\text{out}}), \quad n = 1, \dots, n_n, \quad (5.41)$$

$$\mathbf{N}_{a,n}^{\text{out}} = (\tilde{\epsilon}_{c,a,n} - \epsilon_{c,\min}; \epsilon_{s,\max} - \tilde{\epsilon}_{s,a,n}; w_{\max} - \tilde{w}_{a,n}), \quad (5.42)$$

kde  $\tilde{\cdot}$  značí aproximaci dané proměnné  $\cdot$ .

Z těchto výstupů už by bylo možné vyhodnotit pravděpodobnost, ale kvůli možným chybám v aproximaci pomocí NN to tak ještě učiněno nebude. V dalším kroku tak budou vyhodnoceny tyto chyby.

### 5.2.4.6. Chyba NN na hranici vyhovujících a nevyhovujících scénářů

Nejprve pro přetvoření betonu bude označeno

$$\mathbf{N}_a^{\text{out},c} = (\mathbf{N}_{a,n}^{\text{out},c}), \quad n = 1, \dots, n_n, \quad (5.43)$$

$$\mathbf{N}_{a,n}^{\text{out},c} = \tilde{\epsilon}_{c,a,n} - \epsilon_{c,\min}, \quad (5.44)$$

viz (5.41), (5.42). Analogicky bude označeno pro přetvoření výztuže

$$\mathbf{N}_a^{\text{out},s} = (\mathbf{N}_{a,n}^{\text{out},s}), \quad n = 1, \dots, n_n, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{N}_{a,n}^{\text{out},s} = \epsilon_{s,\max} - \tilde{\epsilon}_{s,a,n} \quad (5.46)$$

a pro průhyb

$$\mathbf{N}_a^{\text{out},w} = (\mathbf{N}_{a,n}^{\text{out},w}), \quad n = 1, \dots, n_n, \quad (5.47)$$

$$\mathbf{N}_{a,n}^{\text{out},w} = w_{\max} - \tilde{w}_{a,n}. \quad (5.48)$$

Nyní je pro přetvoření betonu vybrána množina  $\Xi^{c+} \subset S_{\text{MC}}$  malého počtu scénářů (obvykle 10), jejichž hodnota  $\tilde{\epsilon}_{c,a,n} - \epsilon_{c,\min}$  je větší nebo rovna nule a současně je nule nejbližší, tj. platí

$$\Xi^{c+} = \left\{ \xi_o : \begin{array}{l} o = 1, \dots, n_o^{c+}, \quad \xi_o \in S_{\text{MC}}, \\ 0 \leq \mathbf{N}_{a,o}^{\text{out},c} \leq X, \quad |\mathbf{N}_a^{\text{out},c} \cap \langle 0, X \rangle| = n_o^{c+} \end{array} \right\}, \quad (5.49)$$

tato množina může být i prázdná, pokud neexistuje scénář  $\xi_o \in S_{\text{MC}}$ , pro který platí  $\mathbf{N}_{a,o}^{\text{out},c} \geq 0$ .

Analogicky je vybrána množina  $\Xi^{c-} \subset S_{\text{MC}}$  scénářů, jejichž hodnota  $\tilde{\epsilon}_{c,a,n} - \epsilon_{c,\min}$  je menší nebo rovna nule a současně je nule nejbližší, tj. platí

$$\Xi^{c-} = \left\{ \xi_o : \begin{array}{l} o = 1, \dots, n_o^{c-}, \quad \xi_o \in S_{\text{MC}}, \\ X \leq \mathbf{N}_{a,o}^{\text{out},c} \leq 0, \quad |\mathbf{N}_a^{\text{out},c} \cap \langle X, 0 \rangle| = n_o^{c-} \end{array} \right\}. \quad (5.50)$$

Analogicky jsou i pro přetvoření oceli a průhyb vybrány množiny

$$\Xi^{s+} = \left\{ \xi_o : \begin{array}{l} o = 1, \dots, n_o^{s+}, \quad \xi_o \in S_{\text{MC}}, \\ 0 \leq \mathbf{N}_{a,o}^{\text{out},s} \leq X, \quad |\mathbf{N}_a^{\text{out},s} \cap \langle 0, X \rangle| = n_o^{s+} \end{array} \right\}, \quad (5.51)$$

$$\Xi^{s-} = \left\{ \xi_o : \begin{array}{l} o = 1, \dots, n_o^{s-}, \quad \xi_o \in S_{MC}, \\ X \leq N_{a,o}^{\text{out},s} \leq 0, \quad |N_a^{\text{out},s} \cap \langle X, 0 \rangle| = n_o^{s-} \end{array} \right\}, \quad (5.52)$$

$$\Xi^{w+} = \left\{ \xi_o : \begin{array}{l} o = 1, \dots, n_o^{w+}, \quad \xi_o \in S_{MC}, \\ 0 \leq N_{a,o}^{\text{out},w} \leq X, \quad |N_a^{\text{out},w} \cap \langle 0, X \rangle| = n_o^{w+} \end{array} \right\}, \quad (5.53)$$

$$\Xi^{w-} = \left\{ \xi_o : \begin{array}{l} o = 1, \dots, n_o^{w-}, \quad \xi_o \in S_{MC}, \\ X \leq N_{a,o}^{\text{out},w} \leq 0, \quad |N_a^{\text{out},w} \cap \langle X, 0 \rangle| = n_o^{w-} \end{array} \right\}. \quad (5.54)$$

Množina všech těchto scénářů bude označena  $\Xi^G$ , tj.

$$\Xi^G = \{ \xi_o, \quad o = 1, \dots, n_o, \quad \xi_o \in \Xi^{c+} \cup \Xi^{c-} \cup \Xi^{s+} \cup \Xi^{s-} \cup \Xi^{w+} \cup \Xi^{w-} \}. \quad (5.55)$$

Pro všechny scénáře z množiny  $\Xi^G$  jsou nyní z modelu v GAMS získány jejich skutečné hodnoty přetvoření a průhybu  $N_{a,o}^G$  (nyní se jedná o skutečné hodnoty, porovnej s (5.42)), platí

$$N_a^G = (N_{a,o}^G), \quad o = 1, \dots, n_o, \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} N_{a,o}^G &= \text{GAMS}(\mathbf{x}_a, \xi_o) = \\ &= (\epsilon_{c,a,o} - \epsilon_{c,\min}; \epsilon_{s,\max} - \epsilon_{s,a,o}; w_{\max} - w_{a,o}) = \\ &= (N_{a,o}^{G,c}; N_{a,o}^{G,s}; N_{a,o}^{G,w}). \end{aligned} \quad (5.57)$$

Z těch se určí chyby  $N_a^{E1}$ , kterých se dopouští NN pro jednotlivé podmínky. Pro tyto chyby platí

$$N_a^{E1} = (\epsilon_{c,a}^{E1}; \epsilon_{s,a}^{E1}; w_a^{E1}), \quad (5.58)$$

$$\epsilon_{c,a}^{E1} = \max_o \max_{\xi_o \in \Xi^{c+} \cup \Xi^{c-}} |N_{a,o}^{G,c} - N_{a,o}^{\text{out},c}| = \max_o \max_{\xi_o \in \Xi^{c+} \cup \Xi^{c-}} |\epsilon_{c,a,o} - \tilde{\epsilon}_{c,a,o}|, \quad (5.59)$$

$$\epsilon_{s,a}^{E1} = \max_o \max_{\xi_o \in \Xi^{s+} \cup \Xi^{s-}} |N_{a,o}^{G,s} - N_{a,o}^{\text{out},s}| = \max_o \max_{\xi_o \in \Xi^{s+} \cup \Xi^{s-}} |\tilde{\epsilon}_{s,a,o} - \epsilon_{s,a,o}|, \quad (5.60)$$

$$w_a^{E1} = \max_o \max_{\xi_o \in \Xi^{w+} \cup \Xi^{w-}} |N_{a,o}^{G,w} - N_{a,o}^{\text{out},w}| = \max_o \max_{\xi_o \in \Xi^{w+} \cup \Xi^{w-}} |\tilde{w}_{a,o} - w_{a,o}|. \quad (5.61)$$

kde  $\epsilon_{c,a}^{E_1}$ ,  $\epsilon_{s,a}^{E_1}$  a  $w_a^{E_1}$  jsou největší chyby, jíž se NN dopustila u podmínek přetvoření betonu, přetvoření výztuže a průhybu respektive.

Dále se vyhodnotí také chyby  $\mathbf{N}_a^{E_2}$ , kterých se dopouští NN pro jednotlivé podmínky a to navíc za situace, kdy tyto chyby změní scénář z vyhovujícího dané podmínce (tj.  $\epsilon_{c,a,o} - \epsilon_{c,\min} \geq 0$ ;  $\epsilon_{s,\max} - \epsilon_{s,a,o} \geq 0$  nebo  $w_{\max} - w_{a,o} \geq 0$ ) na nevyhovující dané podmínce (tj.  $\epsilon_{c,a,o} - \epsilon_{c,\min} < 0$ ;  $\epsilon_{s,\max} - \epsilon_{s,a,o} < 0$  nebo  $w_{\max} - w_{a,o} < 0$ ) nebo naopak. Tyto chyby jsou vážnější a následně bude aplikován cyklus, který má tyto chyby testováním postupně zcela eliminovat. Z toho důvodu jsou tyto chyby násobeny 2, platí tak

$$\mathbf{N}_a^{E_2} = (\epsilon_{c,a}^{E_2}; \epsilon_{s,a}^{E_2}; w_a^{E_2}), \quad (5.62)$$

$$\frac{\epsilon_{c,a}^{E_2}}{2} = \max_{\substack{\xi_o \in \Xi^{c+} \cup \Xi^{c-} \\ \text{sign}(\epsilon_{c,a,o}) \neq \text{sign}(\tilde{\epsilon}_{c,a,o})}} |N_{a,o}^{G,c} - N_{a,o}^{\text{out},c}| = \max_{\substack{\xi_o \in \Xi^{c+} \cup \Xi^{c-} \\ \text{sign}(\epsilon_{c,a,o}) \neq \text{sign}(\tilde{\epsilon}_{c,a,o})}} |\epsilon_{c,a,o} - \tilde{\epsilon}_{c,a,o}|, \quad (5.63)$$

$$\frac{\epsilon_{s,a}^{E_2}}{2} = \max_{\substack{\xi_o \in \Xi^{s+} \cup \Xi^{s-} \\ \text{sign}(\epsilon_{s,a,o}) \neq \text{sign}(\tilde{\epsilon}_{s,a,o})}} |N_{a,o}^{G,s} - N_{a,o}^{\text{out},s}| = \max_{\substack{\xi_o \in \Xi^{s+} \cup \Xi^{s-} \\ \text{sign}(\epsilon_{s,a,o}) \neq \text{sign}(\tilde{\epsilon}_{s,a,o})}} |\tilde{\epsilon}_{s,a,o} - \epsilon_{s,a,o}|, \quad (5.64)$$

$$\frac{w_a^{E_2}}{2} = \max_{\substack{\xi_o \in \Xi^{w+} \cup \Xi^{w-} \\ \text{sign}(w_{a,o}) \neq \text{sign}(\tilde{w}_{a,o})}} |N_{a,o}^{G,w} - N_{a,o}^{\text{out},w}| = \max_{\substack{\xi_o \in \Xi^{w+} \cup \Xi^{w-} \\ \text{sign}(w_{a,o}) \neq \text{sign}(\tilde{w}_{a,o})}} |\tilde{w}_{a,o} - w_{a,o}|. \quad (5.65)$$

Celková chyba  $\mathbf{N}_a^E$ , se kterou bude pracováno dále, se nyní stanoví jako

$$\mathbf{N}_a^E = (\epsilon_{c,a}^E; \epsilon_{s,a}^E; w_a^E), \quad (5.66)$$

$$\epsilon_{c,a}^E = \max(\epsilon_{c,a}^{E_1}; \epsilon_{c,a}^{E_2}), \quad (5.67)$$

$$\epsilon_{s,a}^E = \max(\epsilon_{s,a}^{E_1}; \epsilon_{s,a}^{E_2}), \quad (5.68)$$

$$w_a^E = \max(w_a^{E_1}; w_a^{E_2}). \quad (5.69)$$

#### 5.2.4.7. Rozdělení scénářů na vyhovující, nevyhovující a neurčité

Nyní jsou scénáře  $\xi_n$ ,  $n = 1, \dots, n_n$  rozděleny na vyhovující, nevyhovující a neurčité a to zvlášť pro MSÚ a kombinaci MSÚ a MSP.



Pro MSÚ se za vyhovující scénáře považují takové scénáře  $\xi_n$ , u nichž obě hodnoty  $\tilde{\epsilon}_{c,a,n}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{s,a,n}$  (5.42) s dostatečnou rezervou splní příslušné omezující podmínky

$$\tilde{\epsilon}_{c,a,n} \geq \epsilon_{c,\min}, \quad (5.70)$$

$$\tilde{\epsilon}_{s,a,n} \leq \epsilon_{s,\max}. \quad (5.71)$$

Za splnění daných podmínek s dostatečnou rezervou je považováno jejich splnění minimálně o dvojnásobek příslušné chyby  $\epsilon_{c,a}^E$ ,  $\epsilon_{s,a}^E$ , viz (5.67), (5.68). Tj. množina vyhovujících scénářů MSÚ  $U_a^+$  je

$$U_a^+ = \left\{ \xi_{u_a^+} \in S_{MC} : \begin{array}{l} \tilde{\epsilon}_{c,a,u_a^+} \geq \epsilon_{c,\min} + 2 \epsilon_{c,a}^E \\ \tilde{\epsilon}_{s,a,u_a^+} \leq \epsilon_{s,\max} - 2 \epsilon_{s,a}^E \end{array} \right\}. \quad (5.72)$$

Jelikož jsou hodnoty  $\tilde{\epsilon}_{c,a,n}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{s,a,n}$  v  $N_{a,n}^{\text{out}}$  (5.42) ve tvaru  $\tilde{\epsilon}_{c,a,n} - \epsilon_{c,\min}$ ,  $\epsilon_{s,\max} - \tilde{\epsilon}_{s,a,n}$ , lze množinu  $U_a^+$  zapsat

$$U_a^+ = \left\{ \xi_{u_a^+} \in S_{MC} : \begin{array}{l} \tilde{\epsilon}_{c,a,u_a^+} - \epsilon_{c,\min} \geq 2 \epsilon_{c,a}^E \\ \epsilon_{s,\max} - \tilde{\epsilon}_{s,a,u_a^+} \geq 2 \epsilon_{s,a}^E \end{array} \right\}. \quad (5.73)$$

Za nevyhovující scénáře se pro MSÚ považují scénáře, u nichž alespoň jedna z hodnot  $\tilde{\epsilon}_{c,a,n}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{s,a,n}$  s dostatečnou rezervou nesplní příslušné omezující podmínky (5.70), (5.71). S dostatečnou rezervou coby opět dvojnásobkem chyb  $\epsilon_{c,a}^E$ ,  $\epsilon_{s,a}^E$  a vzhledem ke tvaru  $N_{a,n}^{\text{out}}$  (5.42) tak množina nevyhovujících scénářů MSÚ  $U_a^-$  je

$$U_a^- = \left\{ \xi_{u_a^-} \in S_{MC} : \begin{array}{l} \tilde{\epsilon}_{c,a,u_a^-} - \epsilon_{c,\min} < 2 \epsilon_{c,a}^E \\ \epsilon_{s,\max} - \tilde{\epsilon}_{s,a,u_a^-} < 2 \epsilon_{s,a}^E \end{array} \right\}. \quad (5.74)$$

Neurčité scénáře pro MSÚ jsou takové, které nelze zařadit jako vyhovující ani jako nevyhovující. Množina neurčitých scénářů pro MSÚ  $U_a^0$  tak je

$$U_a^0 = \{\xi_{u_a^0}\}, \quad U_a^0 = S_{MC} - U_a^+ - U_a^-. \quad (5.75)$$

Pro kombinaci MSÚ a MSP je situace analogická, pouze přibývá podmínka průhybu

$$\tilde{w}_{a,n} \leq w_{\max}. \quad (5.76)$$

Množina vyhovujících scénářů kombinace MSÚ a MSP  $P_a^+$  tedy je

$$P_a^+ = \left\{ \xi_{p_a^+} \in S_{\text{MC}} : \begin{array}{l} \tilde{\epsilon}_{c,a,p_a^+} - \epsilon_{c,\min} \geq 2 \epsilon_{c,a}^E \\ \wedge \\ \epsilon_{s,\max} - \tilde{\epsilon}_{s,a,p_a^+} \geq 2 \epsilon_{s,a}^E \\ \wedge \\ w_{\max} - \tilde{w}_{a,p_a^+} \geq 2 w_a^E \end{array} \right\}. \quad (5.77)$$

Množina nevyhovujících scénářů kombinace MSÚ a MSP  $P_a^-$  je

$$P_a^- = \left\{ \xi_{p_a^-} \in S_{\text{MC}} : \begin{array}{l} \tilde{\epsilon}_{c,a,p_a^-} - \epsilon_{c,\min} < 2 \epsilon_{c,a}^E \\ \vee \\ \epsilon_{s,\max} - \tilde{\epsilon}_{s,a,p_a^-} < 2 \epsilon_{s,a}^E \\ \vee \\ w_{\max} - \tilde{w}_{a,p_a^-} < 2 w_a^E \end{array} \right\}. \quad (5.78)$$

Neurčité scénáře kombinace MSÚ a MSP jsou opět takové, které nejsou vyhovující ani nevyhovující. Množina neurčitých scénářů kombinace MSÚ a MSP  $P_a^0$  je

$$P_a^0 = \{\xi_{p_a^0}\}, \quad P_a^0 = S_{\text{MC}} - P_a^+ - P_a^-. \quad (5.79)$$

#### 5.2.4.8. Lze splnit pravděpodobnostní podmínky?

Výsledná pravděpodobnost nemusí být schopna dosáhnout u MSÚ požadované hranice  $p_{\text{MSU}}$  nebo u MSP požadované hranice  $p_{\text{MSP}}$ , tj. bude platit

$$\frac{|U_a^+| + |U_a^0|}{n_n} < p_{\text{MSU}} \quad \vee \quad \frac{|P_a^+| + |P_a^0|}{n_n} < p_{\text{MSP}}, \quad (5.80)$$

kde  $|\cdot|$  představuje velikost dané množiny  $\cdot$ . Potom konfigurace návrhových proměnných  $\mathbf{x}_a$  nemůže být řešením, není nutno nadále eliminovat potenciální chyby způsobené NN a její pravděpodobnosti vyhovění MSÚ a MSP budou pouze odhadnuty. Tento přístup

může být zdrojem problémů při dalších iteracích, v průběhu všech provedených výpočtů však toto zatím nebylo pozorováno.

Pokud je výsledná pravděpodobnost schopna dosáhnout pravděpodobnostních podmínek, tj.

$$\frac{|U_a^+| + |U_a^0|}{n_n} \geq p_{\text{MSU}} \wedge \frac{|P_a^+| + |P_a^0|}{n_n} \geq p_{\text{MSP}}, \quad (5.81)$$

jsou potenciální chyby NN dále eliminovány s ohledem na skutečnost, že konfigurace  $\mathbf{x}_a$  může být řešením.

#### 5.2.4.9. Odhad pravděpodobnosti

Ve zmíněném případě (5.80) jsou pravděpodobnosti  $p_{U_a}$ ,  $p_{P_a}$  pro účely výpočtu pouze odhadnuty. Za tímto účelem je třeba znovu rozdělit scénáře  $\xi_n$ ,  $n = 1, \dots, n_n$  na vyhovující a nevyhovující, tentokrát bez vlivu spočítané chyby NN a tedy neexistují ani žádné neurčité scénáře. Pro množinu scénářů vyhovujících MSÚ platí (porovnej s (5.73))

$$U_a^+ = \left\{ \begin{array}{l} \xi_{u_a^+} \in S_{\text{MC}} : \\ \tilde{\epsilon}_{c,a,u_a^+} - \epsilon_{c,\min} \geq 0 \\ \wedge \\ \epsilon_{s,\max} - \tilde{\epsilon}_{s,a,u_a^+} \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (5.82)$$

Pravděpodobnost  $p_{U_a}$  pak je odhadnuta jako

$$p_{U_a} = \frac{|U_a^+|}{n_n}. \quad (5.83)$$

Analogicky pro množinu scénářů vyhovujících MSP platí (porovnej s (5.77))

$$P_a^+ = \left\{ \begin{array}{l} \xi_{p_a^+} \in S_{\text{MC}} : \\ \tilde{\epsilon}_{c,a,p_a^+} - \epsilon_{c,\min} \geq 0 \\ \wedge \\ \epsilon_{s,\max} - \tilde{\epsilon}_{s,a,p_a^+} \geq 0 \\ \wedge \\ w_{\max} - \tilde{w}_{a,p_a^+} \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (5.84)$$

Pravděpodobnost  $p_{P_a}$  pak je odhadnuta jako

$$p_{P_a} = \frac{|P_a^+|}{n_n}. \quad (5.85)$$

#### 5.2.4.10. Je počet scénářů k testování dostatečně malý?

Ve zmíněném případě (5.81) jsou s ohledem na to, že konfigurace návrhových proměnných  $\mathbf{x}_a$  může být řešením, nadále eliminovány možné chyby způsobené NN. To znamená testování scénářů které v kroku 7. z Obr. 10, odst. 5.2.4.7 byly vyhodnoceny jako neurčitě,  $U_a^0$  a  $P_a^0$ .

Těchto scénářů ale může být příliš mnoho. Z časového hlediska je pak lepší znovu naučit NN na všechny dosud reálně otestované scénáře, což počet scénářů k testování stlačí dolů.

Ověřuje se tedy zda je velikost množiny  $U_a^0 \cup P_a^0$  větší než daná hodnota  $n_{pov}$ ,

$$|U_a^0 \cup P_a^0| > n_{pov}. \quad (5.86)$$

S ohledem na časovou náročnost učení NN a testování jednoho scénáře se jako vhodná hodnota pro  $n_{pov}$  jeví 1000.

#### 5.2.4.11. Příprava na nové trénování NN

Při splnění podmínky (5.86) bude tedy NN znovu vytrénované na všechny dosud otestované scénáře. To znamená přidat množinu otestovaných scénáře  $\Xi^G$  do vstupů a výsledky jejich testování  $N_a^G$  do výstupů pro učení NN, tj.

$$\mathbf{N}^{in,T} = \mathbf{N}^{in,T} \cup \Xi^G, \quad (5.87)$$

$$\mathbf{N}^{out,T} = \mathbf{N}^{out,T} \cup N_a^G. \quad (5.88)$$

Pozn. pro zjednodušení zápisu není uvedeno, že od scénářů z množiny  $\Xi^G$  je třeba pro účely trénování NN opět odečíst hodnoty určující scénář  $\xi_a$ , viz (5.33). U výsledků testování  $N_a^G$  již je odečtení od extrémních povolených hodnot provedeno, viz (5.35), (5.56), (5.57).

**5.2.4.12. Otestování neurčitých scénářů a nové určení chyby NN**

Pokud je počet scénářů k otestování dostatečně malý a tedy není splněna podmínka (5.86), scénáře z množiny  $U_a^0 \cup P_a^0$  budou otestovány v GAMS,

$$\mathbf{N}_a^{\text{G},0} = (\mathbf{N}_{a,o}^{\text{G},0}), \quad \boldsymbol{\xi}_o \in U_a^0 \cup P_a^0, \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{a,o}^{\text{G},0} &= \text{GAMS}(\mathbf{x}_a, \boldsymbol{\xi}_o) = \\ &= (\epsilon_{c,a,o} - \epsilon_{c,\min}; \epsilon_{s,\max} - \epsilon_{s,a,o}; w_{\max} - w_{a,o}) = \\ &= (\mathbf{N}_{a,o}^{\text{G},0,c}; \mathbf{N}_{a,o}^{\text{G},0,s}; \mathbf{N}_{a,o}^{\text{G},0,w}). \end{aligned} \quad (5.90)$$

Nyní jsou znovu určeny chyby NN, tentokrát pouze ze scénářů, které jsou u dané podmínky chybou změněny z vyhovujících na nevyhovující nebo naopak, viz (5.62) až (5.65). Tyto chyby se nyní budou eliminovat postupným testováním, proto se násobí 2.

$$\mathbf{N}_a^{\text{E},0} = (\epsilon_{c,a}^{\text{E},0}; \epsilon_{s,a}^{\text{E},0}; w_a^{\text{E},0}), \quad (5.91)$$

$$\frac{\epsilon_{c,a}^{\text{E},0}}{2} = \max_{\substack{o \\ \boldsymbol{\xi}_o \in U_a^0 \cup P_a^0 \\ \text{sign}(\epsilon_{c,a,o}) \neq \text{sign}(\tilde{\epsilon}_{c,a,o})}} |\mathbf{N}_{a,o}^{\text{G},0,c} - \mathbf{N}_{a,o}^{\text{out},c}| = \max_{\substack{o \\ \boldsymbol{\xi}_o \in U_a^0 \cup P_a^0 \\ \text{sign}(\epsilon_{c,a,o}) \neq \text{sign}(\tilde{\epsilon}_{c,a,o})}} |\epsilon_{c,a,o} - \tilde{\epsilon}_{c,a,o}|, \quad (5.92)$$

$$\frac{\epsilon_{s,a}^{\text{E},0}}{2} = \max_{\substack{o \\ \boldsymbol{\xi}_o \in U_a^0 \cup P_a^0 \\ \text{sign}(\epsilon_{s,a,o}) \neq \text{sign}(\tilde{\epsilon}_{s,a,o})}} |\mathbf{N}_{a,o}^{\text{G},0,s} - \mathbf{N}_{a,o}^{\text{out},s}| = \max_{\substack{o \\ \boldsymbol{\xi}_o \in U_a^0 \cup P_a^0 \\ \text{sign}(\epsilon_{s,a,o}) \neq \text{sign}(\tilde{\epsilon}_{s,a,o})}} |\tilde{\epsilon}_{s,a,o} - \epsilon_{s,a,o}|, \quad (5.93)$$

$$\frac{w_a^{\text{E},0}}{2} = \max_{\substack{o \\ \boldsymbol{\xi}_o \in U_a^0 \cup P_a^0 \\ \text{sign}(w_{a,o}) \neq \text{sign}(\tilde{w}_{a,o})}} |\mathbf{N}_{a,o}^{\text{G},0,w} - \mathbf{N}_{a,o}^{\text{out},w}| = \max_{\substack{o \\ \boldsymbol{\xi}_o \in U_a^0 \cup P_a^0 \\ \text{sign}(w_{a,o}) \neq \text{sign}(\tilde{w}_{a,o})}} |\tilde{w}_{a,o} - w_{a,o}|. \quad (5.94)$$

**5.2.4.13. Zařazení otestovaných scénářů a jejich výsledků do vstupů trénování NN**

Množiny otestovaných scénářů  $U_a^0 \cup P_a^0$  a výsledky jejich testování  $\mathbf{N}_a^{\text{G},0}$  jsou z důvodu možného dalšího trénování NN zařazeny do jejich vstupů a výstupů pro trénování,

$$\mathbf{N}^{\text{in},\text{T}} = \mathbf{N}^{\text{in},\text{T}} \cup U_a^0 \cup P_a^0, \quad (5.95)$$

$$\mathbf{N}^{\text{out},\text{T}} = \mathbf{N}^{\text{out},\text{T}} \cup \mathbf{N}_a^{\text{G},0}. \quad (5.96)$$

Pozn. pro zjednodušení zápisu opět není uvedeno, že od scénářů z množin  $U_a^0, P_a^0$  je třeba pro účely trénování NN opět odečíst hodnoty určující scénář  $\boldsymbol{\xi}_a$ , viz (5.33). U výsledků

testování  $N_a^{G,0}$  již je odečtení od extrémních povolených hodnot provedeno, viz (5.35), (5.89), (5.90).

#### 5.2.4.14. Výběr dalších scénářů k otestování na základě nově určené chyby

Na základě chyb  $N_a^{E,0}$  jsou nyní vybrány další množiny scénářů k otestování, které budou označeny  $U_a^1, P_a^1$ . Platí

$$U_a^1 = \left\{ \xi_{u_a^1} \in S_{MC} : \begin{array}{l} \tilde{\epsilon}_{c,a,u_a^1} - \epsilon_{c,\min} \leq \epsilon_{c,a}^{E,0} \\ \vee \\ \epsilon_{s,\max} - \tilde{\epsilon}_{s,a,u_a^1} \leq \epsilon_{s,a}^{E,0} \end{array} \right\}, \quad (5.97)$$

$$P_a^1 = \left\{ \xi_{p_a^1} \in S_{MC} : \begin{array}{l} \tilde{\epsilon}_{c,a,p_a^1} - \epsilon_{c,\min} \leq \epsilon_{c,a}^{E,0} \\ \vee \\ \epsilon_{s,\max} - \tilde{\epsilon}_{s,a,p_a^1} \leq \epsilon_{s,a}^{E,0} \\ \vee \\ w_{\max} - \tilde{w}_{a,p_a^1} \leq w_a^{E,0} \end{array} \right\}. \quad (5.98)$$

Z těchto množin jsou následně vyloučeny všechny předchozí testované scénáře z množin  $\Xi^G, U_a^0, P_a^0$ , tj. (zápis je třeba chápat algoritmicky, jako že následující iterace  $U_a^1$  je určena z předchozí)

$$U_a^1 = U_a^1 - \Xi^G - U_a^0 - P_a^0, \quad (5.99)$$

$$P_a^1 = P_a^1 - \Xi^G - U_a^0 - P_a^0. \quad (5.100)$$

#### 5.2.4.15. Byly eliminovány chyby, které změni vyhovující scénář v nevyhovující nebo naopak?

Pokud v množině nově otestovaných scénářů  $U_a^0 \cup P_a^0$  nebyla nalezena chyba NN měnící vyhovující scénář v nevyhovující nebo naopak  $N_a^{E,0}$  (tyto chyby se vždy násobí 2), která by přesahovala předchozí chyby  $N_a^E$ , znamená to, že tyto chyby byly s největší pravděpodobností eliminovány. To je ekvivalent toho, že vybrané množiny  $U_a^1, P_a^1$  (viz (5.97) až (5.100)) jsou prázdné.

Posuzuje se tedy, jestli

$$U_a^1 \cup P_a^1 = \emptyset. \quad (5.101)$$

Pokud ne, tento cyklus eliminace bude pokračovat dále. Pokud ano, stačí pouze vyhodnotit pravděpodobnost.

#### 5.2.4.16. Pokračování cyklu eliminování chyb měnicích vyhovující scénáře v nevyhovující nebo naopak

Platí

$$U_a^1 \cup P_a^1 \neq \emptyset. \quad (5.102)$$

Je třeba označit

$$U_a^0 = U_a^1 \quad (5.103)$$

$$P_a^0 = P_a^1 \quad (5.104)$$

a následuje návrat ke kroku 10. (odst. 5.2.4.10).

#### 5.2.4.17. Vyhodnocení pravděpodobnosti

Vyhodnocení pravděpodobnosti nyní probíhá zcela stejně jako odhad pravděpodobnosti v kroku 9. (odst. 5.2.4.9). Rozdíl je pouze v tom, že byla zásadně snížena chyba v odhadu NN.

### 5.2.5. Vnější smyčka regresní analýzy – iterační postup

V první iteraci  $l = 1$  jsou inicializační scénáře  $\xi_k^{\text{init}}$  zařazeny do množiny dosud známých scénářů  $\Xi_0$ , tj.

$$\Xi_0 = \{ \xi_k^{\text{init}}, \quad k = 1, \dots, n_k \}. \quad (5.105)$$

Toto odpovídá kroku 4. vývojového diagramu na Obr. 9.

Pro dosud známé scénáře  $\xi_a$  z množiny  $\Xi_{l-1}$  je nyní regresní analýzou hledána závislost mezi hodnotami určujícími scénáře  $\xi_a$  a příslušnými hodnotami účelové funkce  $f_a$  a pravděpodobnostmi, že bude splněn MSÚ  $p_{Ua}$ , MSÚ a MSP  $p_{Pa}$ . K tomuto je třeba vybrat vhodné aproximační funkce, což budou obvykle polynomy 3. stupně pro pravděpodobnosti a 1. stupně pro účelovou funkci. Vzniknou tak tři aproximační funkce  $\tilde{f}_{l-1}$ ,  $\tilde{p}_{Ul-1}$ ,  $\tilde{p}_{Pl-1}$ , pro které platí

$$\tilde{f}_{l-1}(\xi_a) \approx f_a, \quad \forall \xi_a \in \Xi_{l-1}, \quad (5.106)$$

$$\tilde{p}_{Ul-1}(\xi_a) \approx p_{Ua}, \quad \forall \xi_a \in \Xi_{l-1}, \quad (5.107)$$

$$\tilde{p}_{Pl-1}(\xi_a) \approx p_{Pa}, \quad \forall \xi_a \in \Xi_{l-1}. \quad (5.108)$$

Při regresi pravděpodobností jsou navíc na dílčí odchylky  $p_{Ua} - \tilde{p}_{Ul-1}(\xi_a)$ , respektive  $p_{Pa} - \tilde{p}_{Pl-1}(\xi_a)$  kladeny váhy podle vzdálenosti příslušných aproximovaných hodnot prav-

---

děpodobnosti od hodnoty pravděpodobnosti požadované. Aproximační funkce  $\tilde{p}_{Ul-1}$  je tak pro dílčí odchylky vážena hodnotami

$$w_{Ua} = \frac{1}{|p_{MSU} - p_{Ua}|}, \quad (5.109)$$

aproximační funkce  $\tilde{p}_{Pl-1}$  je pak pro dílčí odchylky vážena hodnotami

$$w_{Pa} = \frac{1}{|p_{MSP} - p_{Pa}|}. \quad (5.110)$$

Odchylky u regrese účelové funkce nijak váženy nejsou. Toto vše pak odpovídá kroku 5. vývojového diagramu na [Obr. 9](#).

Následně je vybrán scénář  $\xi_l^{\text{iter}}$  tak, že platí

$$\xi_l^{\text{iter}} = \arg \min_{\xi} \tilde{f}_{l-1}(\xi), \quad \text{za podmíněk:} \quad (5.111)$$

$$\tilde{p}_{Ul-1}(\xi) \geq p_{MSU}, \quad (5.112)$$

$$\tilde{p}_{Pl-1}(\xi) \geq p_{MSP}. \quad (5.113)$$

Toto odpovídá kroku 6. vývojového diagramu na [Obr. 9](#).

Pro tento scénář je nyní provedena deterministická optimalizace ([odst. 5.2.3](#)), tj.

$$f_l^{\text{iter}} = \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \xi_l^{\text{iter}}, \mathbf{v}) \quad \text{za podmíněk:} \quad (5.114)$$

$$L_r(\mathbf{x}, \xi_l^{\text{iter}}, \mathbf{v}) \leq R_r(\mathbf{x}, \xi_l^{\text{iter}}, \mathbf{v}), \quad (5.115)$$

$$w_r(\mathbf{x}, \xi_l^{\text{iter}}, \mathbf{v}) \leq w_{\max}, \quad (5.116)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{C}, \quad (5.117)$$

$$\mathbf{x}_l^{\text{iter}} = \arg \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \xi_l^{\text{iter}}, \mathbf{v}) \quad \text{za podmíněk (5.115) až (5.117)}. \quad (5.118)$$

Toto odpovídá kroku 7. vývojového diagramu na [Obr. 9](#).

Poté jsou dle popisu v [odst. 5.2.4](#) vyhodnoceny pravděpodobnosti  $p_{Ul}^{\text{iter}}$ ,  $p_{Pl}^{\text{iter}}$  (krok 8. vývojového diagramu na [Obr. 9](#)).

Pokud jsou splněny pravděpodobnostní podmínky (viz krok 9. vývojového diagramu na [Obr. 9](#))

$$p_{Ul}^{\text{iter}} \geq p_{MSU}, \quad (5.119)$$

$$p_{Pl}^{\text{iter}} \geq p_{MSP}, \quad (5.120)$$



může konfigurace  $\boldsymbol{x}_l^{\text{iter}}$  představovat řešení úlohy (krok 9A. vývojového diagramu na Obr. 9). Od podmínek (5.119), (5.120) je ale navíc požadováno, aby byly splněny s dostatečnou přesností (což pro zkrácení zápisu není uvedeno ve vývojovém diagramu), tj. aby platilo

$$p_{\text{MSU}} \leq p_{\text{UI}}^{\text{iter}} \leq p_{\text{MSU}} + \delta_{\text{MSU}}, \quad (5.121)$$

$$p_{\text{MSP}} \leq p_{\text{PI}}^{\text{iter}} \leq p_{\text{MSP}} + \delta_{\text{MSP}}, \quad (5.122)$$

kde hodnoty  $\delta_{\text{MSU}}$ ,  $\delta_{\text{MSP}}$  obvykle jsou

$$\delta_{\text{MSU}} = \frac{1 - p_{\text{MSU}}}{10}, \quad (5.123)$$

$$\delta_{\text{MSP}} = \frac{1 - p_{\text{MSP}}}{10}. \quad (5.124)$$

V případě nesplnění podmínek (5.123), (5.124) je scénář  $\boldsymbol{\xi}_l^{\text{iter}}$  zařazen do množiny známých scénářů  $\Xi_l$ , platí

$$\Xi_l = \Xi_{l-1} \cup \{\boldsymbol{\xi}_l^{\text{iter}}\}. \quad (5.125)$$

Poté začíná další iterace  $l = l + 1$  (krok 9N. vývojového diagramu na Obr. 9) a sice opět regresní analýzou pro scénáře z množiny  $\Xi_{l-1}$ , kde je nyní navíc scénář z poslední iterace.

Tento postup se opakuje dokud není nalezeno řešení.

Využití regrese k optimalizaci není ideální řešení, nicméně je funkční a výpočetně podstatně rychlejší než např. více-dimenzionální varianta Newtonovy metody (která znamená vícenásobné vyhodnocování pravděpodobnosti v jedné iteraci).

## 6. Řešené příklady

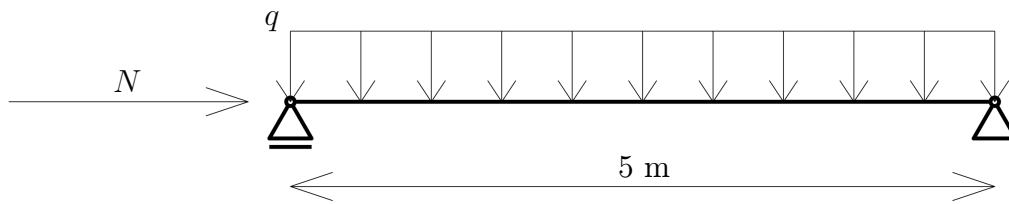
V práci bude řešeno celkem 6 příkladů, které mají dokumentovat správnost a funkčnost navrženého algoritmu.

### 6.1. Společné zadání pro příklady 1 až 3

Následují 3 příklady, kde bude náhodnost uvažována v zatížení a pevnostech. Příklady se liší tím, které proměnné jsou uvažovány náhodně a které deterministicky. Kromě toho mají totožné zadání, které je uvedeno v [odst. 6.1.1](#). Dílčí varianty zadání pak jsou přímo v zadání jednotlivých příkladů v [odst. 6.2.1](#), [odst. 6.3.1](#), [odst. 6.4.1](#).

#### 6.1.1. Společné zadání

Úkolem je pomocí stochastické optimalizace navrhnout 5 m dlouhý nosník zatížený spojitým zatížením  $q$  a normálovou silou  $N$  dle [Obr. 11](#).



Obrázek 11: Schéma nosníku.

Bude tedy řešena optimalizační úloha [\(5.1\)](#) až [\(5.4\)](#)

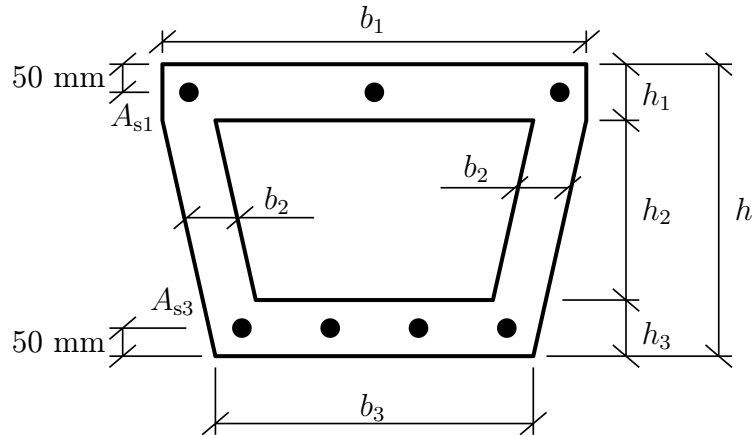
$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad \text{za podmíněk:} \quad (6.1)$$

$$P \left( \min_{r=1, \dots, n_r} [R_r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) - L_r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})] \geq 0 \right) \geq p_{\text{MSU}}, \quad (6.2)$$

$$P \left( \min_{s=1, \dots, n_s} [w_{\text{max}} - w_s(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})] \geq 0 \right) \geq p_{\text{MSP}}, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{C}, \quad (6.4)$$

respektive prostřednictvím navrženého heuristického algoritmu úloha [\(5.8\)](#) až [\(5.15\)](#), viz [odst. 5.2.1](#). Dílčí členy tohoto zápisu pro daný příklad jsou uvedeny dále.



Obrázek 12: Průřez nosníku ( $A_{s1}$ ,  $A_{s3}$  označuje příslušnou plochu ocelové výztuže).

#### 6.1.1.1. Vektor návrhových proměnných $\mathbf{x}$

Očekávaný tvar průřezu nosníku je na Obr. 12 a je popsán osmi proměnnými  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $A_{s1}$ ,  $A_{s3}$ . Prvních šest proměnných popisuje tvar průřezu, poslední dvě popisují plochu ocelové výztuže ve vrstvách. Tyto proměnné představují návrhové proměnné, tedy

$$\mathbf{x} = (b_1, b_2, b_3, h_1, h_2, h_3, A_{s1}, A_{s3}). \quad (6.5)$$

Návrhové proměnné se však mohou lišit v každém konečném prvku. Jelikož konečných prvků bude 10 – viz odst. 6.1.1.4, (6.10) – je tak návrhových proměnných celkem 80.

Plochy výztuží  $A_{s1}$ ,  $A_{s3}$  jsou ve výpočtu zjednodušeně uvažovány jako reálná čísla (což je výhodné z hlediska použití GRG pro optimalizaci, viz odst. 3.3.8), nejsou tedy uvažovány jako určitý počet prutů o určitém průměru.

#### 6.1.1.2. Účelová funkce $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$

Účelovou funkcí je cena nosníku určená jako cena spotřebovaného materiálu daná rovnicí (4.5)

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = V_c(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \times C_{cv} + W_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \times C_{sw}, \quad (6.6)$$

kde  $V_c(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  je objem použitého betonu,  $W_s(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  je hmotnost použité oceli a předepsané ceny betonu a oceli jsou

$$C_{cv} = 2500 \text{ Kč za m}^3 \text{ betonu}, \quad (6.7)$$

$$C_{sw} = 30 \text{ Kč za kg oceli}. \quad (6.8)$$

**6.1.1.3. Vektor náhodných veličin  $\xi$** 

Jak bylo uvedeno, vektor vstupních náhodných veličin se bude lišit podle varianty zadání. Jednotlivé varianty jsou k nalezení přímo v zadání jednotlivých příkladů v [odst. 6.2.1](#), [odst. 6.3.1](#), [odst. 6.4.1](#).

**6.1.1.4. Vektor vstupů  $v$** 

Vektor  $v$  obsahuje další vstupní hodnoty úlohy. I tento se bude lišit dle varianty zadání, které jsou k nalezení přímo v zadání jednotlivých příkladů v [odst. 6.2.1](#), [odst. 6.3.1](#), [odst. 6.4.1](#). Zde budou vyjmenovány společné vstupy.

**Parametry nosníku**

Prvním již zmíněným vstupem je délka nosníku

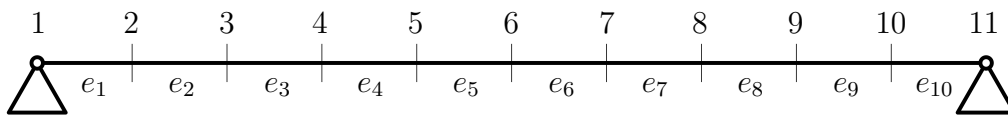
$$D = 5 \text{ m.} \quad (6.9)$$

Pro účely výpočtu metodou konečných prvků je pak nosník rozdělen na 10 konečných prvků (viz [Obr. 13](#))

$$e_i, \quad i = 1, \dots, 10, \quad (6.10)$$

každý o délce

$$d_i = 0,5 \text{ m.} \quad (6.11)$$



Obrázek 13: Dělení nosníku na konečné prvky  $e_i$ , číslování uzlů konečných prvků.

Vzhledem k vazbám jimiž je nosník upevněn (viz [Obr. 11](#), [Obr. 13](#)) jsou pak předepsané okrajové podmínky

$$w_1 = 0 \quad (\text{nulový průhyb v uzlu 1}), \quad (6.12)$$

$$w_{11} = 0 \quad (\text{nulový průhyb v uzlu 11}), \quad (6.13)$$

$$u_{11} = 0 \quad (\text{nulové horizontální posunutí v uzlu 11}). \quad (6.14)$$

## Zatížení

Zatížení nosníku představuje spojitě zatížení  $q$  a normálová síla  $N$ , viz Obr. 11. Obě tyto proměnné budou ale v závislosti na variantě zadání náhodné nebo deterministické a jejich zadání pro dílčí varianty je tak k nalezení přímo v zadání jednotlivých příkladů v odst. 6.2.1, odst. 6.3.1, odst. 6.4.1.

## Materiálové charakteristiky

Pevnosti betonu  $f_c$  a oceli  $f_s$  budou dle varianty zadání uvažovány náhodně nebo deterministicky a jsou tak k nalezení přímo v zadání jednotlivých příkladů v odst. 6.2.1, odst. 6.3.1, odst. 6.4.1. Pro beton je potom s jeho pevností spjat i jeho modul pružnosti  $E_c$ . Pro ocel tomu tak není a nezávisle na její pevnosti je její modul pružnosti uvažován tradičně jako deterministická hodnota

$$E_s = 200 \text{ GPa.} \quad (6.15)$$

Tradičně se uvažují také objemové hmotnosti betonu  $\rho_c$  a oceli  $\rho_s$  jako

$$\rho_c = 2400 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3. \quad (6.16)$$

Pro beton a ocel se používají běžné po částech lineární pracovní diagramy z normy [1], které byly mírně upraveny J. Plškem v [2] kvůli optimalizaci metodou GRG (viz odst. 3.3.8, odst. 4.1.6). V přechodech mezi dílčími lineárními větvemi diagramu je použita Hermitovská interpolace, aby byla zajištěna spojitost pracovního diagramu včetně prvních derivací. Veškeré větve jsou pak rostoucí, v případě plastických větví vždy pouze zanedbatelně. Pracovní diagram oceli je tradičně symetrický pro tah a tlak. U pracovního diagramu betonu je tradičně uvažováno, že beton v tahu nepůsobí.

## Mezní hodnoty přetvoření a průhybu

Deterministické části podmínek (6.2) a (6.3) jsou popsány v odst. 4.1.3 a odst. 4.1.4. Pro MSÚ jsou konečná omezení přetvoření betonu a oceli – viz (4.50), (4.51) – dána hodnotami

$$\epsilon_{c,\min} = -3,5 \text{ mm/m}, \quad (6.17)$$

$$\epsilon_{s,\max} = 10 \text{ mm/m}. \quad (6.18)$$

Pro MSP je pak konečné omezení průhybu dáno hodnotou

$$w_{\max} = 10 \text{ mm.} \quad (6.19)$$

#### 6.1.1.5. Omezující hodnoty pravděpodobností $p_{\text{MSU}}$ , $p_{\text{MSP}}$

Hodnoty pravděpodobností  $p_{\text{MSU}}$ ,  $p_{\text{MSP}}$  jsou pomocí vzorců (5.5), (5.6) odvozeny z indexů spolehlivosti, které byly zvoleny dle [1] pro referenční dobu 50 let a střední třídu následků jako

$$\beta_{\text{MSU}} = 3,8 \implies p_{\text{MSU}} = 99,99277 \%, \quad (6.20)$$

$$\beta_{\text{MSP}} = 1,5 \implies p_{\text{MSP}} = 93,31928 \%. \quad (6.21)$$

#### 6.1.1.6. Omezující podmínky (6.4)

Na návrhové proměnné jsou kladena některá další omezení:

$$h_1, h_2, h_3 \geq 100 \text{ mm,} \quad (6.22)$$

$$h_1 + h_2 + h_3 \leq 350 \text{ mm,} \quad (6.23)$$

$$b_1, b_3 \geq 200 \text{ mm,} \quad (6.24)$$

$$b_1, b_3 \leq 900 \text{ mm,} \quad (6.25)$$

$$b_2 \geq 100 \text{ mm.} \quad (6.26)$$

Pro šířky  $b_1$ ,  $b_3$  musí rovněž být splněna podmínka

$$b_k \geq 2 \times 50 + \frac{4A_{sk}}{\pi 20^2} \times (50 + 20), \quad k = 1, 3. \quad (6.27)$$

Tato podmínka určuje, že beton dané šířky musí pojmout jemu příslušející plochu výztuže; předpokládá se ocelová výztuž z tyčí o průměru 20 mm, s minimální vzdáleností mezi středem ocelových tyčí a povrchem betonu 50 mm a minimální vzdáleností mezi dvěma povrchy ocelových tyčí stejně tak 50 mm. Zde je třeba připomenout, že plochy výztuže  $A_{s1}$ ,  $A_{s3}$  jsou uvažovány jako reálná čísla a nikoliv jako složené z určitého počtu prutů daného průměru (kvůli metodě GRG). Celá podmínka je poté koncipována tak, že v průřezu je vždy dostatek místa pro jednu další tyč. Pokud např. bude plocha  $A_{sk}$  odpovídat 1,5-násobku plochy tyče průměru 20 mm, vyjde

$$b_k \geq 2 \times 50 + 1,5 \times (50 + 20) = 205 \text{ mm,} \quad (6.28)$$

což v daném nastavení postačuje pro 2 tyče, které v průřezu mají skutečně být (ve smyslu reálných čísel pak rozměr postačuje pro 2,5 tyče). Samozřejmě by bylo možné zvolit jinou variantu této podmínky. Její celočíselná varianta by ale vyžadovala (alespoň částečné) použití jiných optimalizačních metod.

Plocha výztuže je vůči ploše betonu omezena ještě podmínkami maximálního a minimálního vyztužení ve tvaru

$$A_{s1} + A_{s3} \leq 0,04 \times A_c, \quad (6.29)$$

$$A_{sk} \geq 0,001 \times A_c, \quad k = 1, 3, \quad (6.30)$$

kde  $A_c$  je plocha průřezu nosníku.

Krytí výztuže je stanoveno na 50 mm ke středu výztuže, viz [Obr. 12](#).

## 6.2. Př. 1: Náhodnost v zatížení

V prvním příkladu je náhodnost uvažována pouze v zatížení. Tento příklad současně slouží jako ilustrační příklad pro metody popsané v [kap. 5](#).

### 6.2.1. Zadání příkladu

Zadání příkladu je variantou společného zadání z [odst. 6.1.1](#). Jak bylo uvedeno, náhodnost je uvažována pouze v zatížení. Je zde tedy představována spojitým zatížením  $q$  a normálovou silou  $N$ , viz [Obr. 11](#). Platí tedy

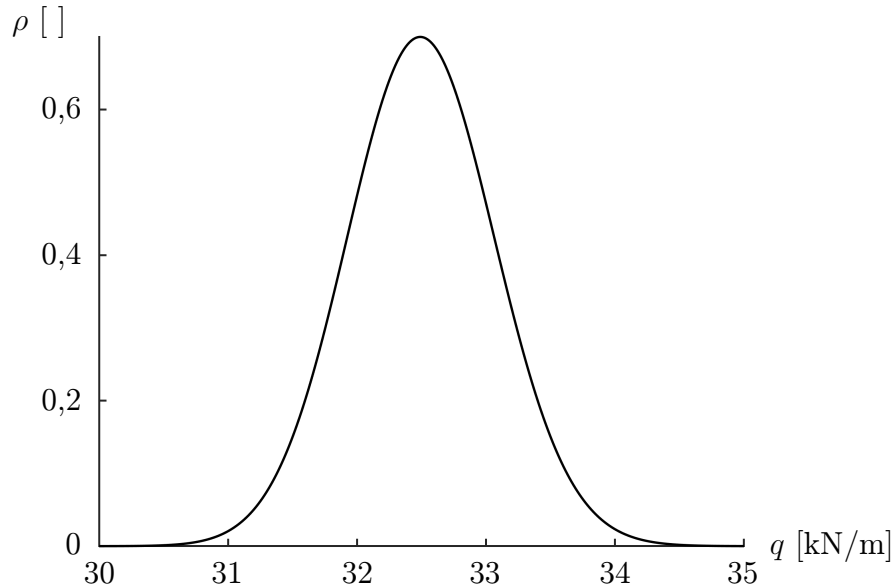
$$\xi = (q, N), \quad (6.31)$$

kde  $q, N$  jsou náhodnými veličinami s gama rozdělením,

$$q \sim \Gamma(3250; 0,01) \text{ [kN/m]}, \quad (6.32)$$

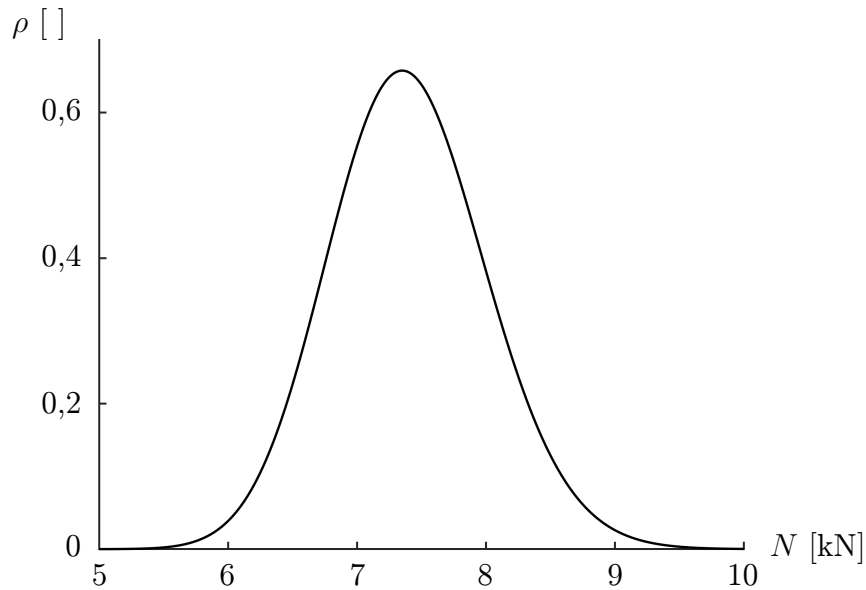
$$N \sim \Gamma(148; 0,05) \text{ [kN]}. \quad (6.33)$$

Hustoty pravděpodobností  $q$  a  $N$  jsou na [Obr. 14](#) a [Obr. 15](#).



Obrázek 14: Hustota pravděpodobnosti spojitého zatížení  $q$ .



Obrázek 15: Hustota pravděpodobnosti normálové síly  $N$ .

Pevnosti jsou uvažovány jako deterministické proměnné a jsou tedy součástí vektoru vstupů  $\mathbf{v}$ . Beton je třídy C25/30, čemuž odpovídá jeho pevnost  $f_c$  a modul pružnosti  $E_c$ ,

$$f_c = 30 \text{ MPa}, \quad E_c = 31 \text{ GPa}. \quad (6.34)$$

Ocel je třídy B500B, čemuž odpovídá její pevnost

$$f_s = 500 \text{ MPa}, \quad (6.35)$$

její modul pružnosti je na pevnosti nezávislý a byl již zadán jako 200 GPa, viz (6.15).

### 6.2.2. Inicializace výpočtu

Ve výpočtu je použito celkem 12 inicializačních scénářů.

Scénáře by měly dobře pokrývat prostor, kde je vysoká hustota pravděpodobnosti. Z toho důvodu je 10 scénářů zvoleno metodou LHS (viz odst. 3.3.15) na síti ekvidistantních bodů. Současně je vhodné zvolit do inicializačního souboru dostatek scénářů, jejichž deterministické řešení bude splňovat MSÚ a MSP s vysokou pravděpodobností. Proto jsou ke zmíněným 10 LHS scénářům navíc přidány další 2 specifické scénáře.

Pro dobré pokrytí prostoru s vysokou hustotou pravděpodobnosti budou pro krajní hodnoty LHS scénářů zvoleny kvantily náhodných veličin odpovídající pravděpodobnostem

$$p_{\text{MSU}} = 99,99277 \% \quad \text{a} \quad (6.36)$$

$$1 - p_{\text{MSU}} = 0,00723 \%. \quad (6.37)$$

(Pravděpodobnost  $p_{\text{MSU}}$  je vždy vyšší než pravděpodobnost  $p_{\text{MSP}}$ ). Odpovídající hodnoty pro  $q$  i  $N$  jsou v [Tab. 6.1](#).

Tabulka 6.1: Kvantily  $p_{\text{MSU}}$  a  $1 - p_{\text{MSU}}$  pro spojitě zatížení  $q$  a normálovou sílu  $N$  dle zadání.

	$q$ [kN/m]	$N$ [kN]
$p_{\text{MSU}}$	34,7113	9,9384
$1 - p_{\text{MSU}}$	30,3783	5,3090

Z těchto již jsou zvoleny zmíněné 2 specifické scénáře jako

$$\xi_{11}^{\text{init}} = (q_{11}^{\text{init}}; N_{11}^{\text{init}}) = (34,7113 \text{ kN/m}; 9,9384 \text{ kN}), \quad (6.38)$$

$$\xi_{12}^{\text{init}} = (q_{12}^{\text{init}}; N_{12}^{\text{init}}) = (34,7113 \text{ kN/m}; 5,3090 \text{ kN}). \quad (6.39)$$

Pro výběr zbývajících 10 scénářů se pro  $q$  i  $N$  určí 10 ekvidistantních bodů mezi určenými kvantily (včetně), tj.

$$\begin{aligned} \text{pro } q \text{ [kN/m]: } & 30,3783; 30,8598; 31,3412; 31,8226; 32,3041; 32,7855; 33,2670; \\ & 33,7484; 34,2298; 34,7113, \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \text{pro } N \text{ [kN]: } & 5,3090; 5,8234; 6,3378; 6,8521; 7,3665; 7,8809; 8,3953; 8,9096; \\ & 9,4240; 9,9384. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Z těchto bodů se nyní vybere 10 scénářů metodou LHS.

Výsledných 12 inicializačních scénářů je v [Tab. 6.2](#).

Pro tyto scénáře jsou nyní pomocí deterministické optimalizace určeny příslušné hodnoty účelových funkcí  $f_k^{\text{init}}$  a návrhových proměnných  $\mathbf{x}_k^{\text{init}}$ . Pomocí aplikace neuronové sítě jsou pak i vyhodnoceny pravděpodobnosti  $p_{U_k}^{\text{init}}$ ,  $p_{P_k}^{\text{init}}$  s nimiž scénáře splní MSÚ, respektive MSÚ a MSP. Hodnoty  $f_k^{\text{init}}$ ,  $p_{U_k}^{\text{init}}$  a  $p_{P_k}^{\text{init}}$  jsou v [Tab. 6.2](#), hodnoty  $\mathbf{x}_k^{\text{init}}$  jsou pro zkrácení vynechány (je jich 80).

Tabulka 6.2: Hodnoty  $q$  a  $N$  určující 12 inicializačních scénářů. Příslušné hodnoty účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP těmito scénáři.

$k$	$q_k^{\text{init}}$ [kN/m]	$N_k^{\text{init}}$ [kN]	$f_k^{\text{init}}$ [Kč]	$p_{Uk}^{\text{init}}$ [%]	$p_{Pk}^{\text{init}}$ [%]
1	30,3783	7,8809	3943,8	0,0057	0,0048
2	30,8598	8,9096	3994,2	0,0430	0,0426
3	31,3412	5,3090	4094,9	8,1347	2,7412
4	31,8226	8,3953	4105,9	7,0952	7,0124
5	32,3041	9,9384	4154,2	13,7258	13,7258
6	32,7855	6,3378	4224,3	79,1339	71,5398
7	33,2670	9,4240	4266,1	76,5274	76,5264
8	33,7484	5,8234	4336,3	99,5134	98,8051
9	34,2298	6,8521	4386,9	99,9001	99,8625
10	34,7113	7,3665	4439,6	99,9906	99,9897
11	34,7113	5,3090	4448,5	99,9991	99,9952
12	34,7113	9,9384	4428,6	99,8676	99,8676

### 6.2.3. Iterační postup

Dle inicializačních hodnot pro účelovou funkci a pravděpodobnosti je nyní odhadnut jejich průběh vzhledem k hodnotám  $q$  a  $N$  pomocí polynomicke regrese. Vznikají tři aproximační funkce  $\tilde{f}_0$ ,  $\tilde{p}_{U0}$  a  $\tilde{p}_{P0}$ , pro které platí (5.106) až (5.108).

Na základě znalosti těchto průběhů a experimentování byl pro regresi pravděpodobností zvolen jako vhodný stupeň polynomu 3 a pro regresi účelové funkce stupeň polynomu 1. Na regresi jsou aplikovány váhy (5.109), (5.110), jak je uvedeno v odst. 5.2.5. Aproximační funkce  $\tilde{f}_0$  je na Obr. 16,  $\tilde{p}_{U0}$  na Obr. 17 a  $\tilde{p}_{P0}$  na Obr. 18.

Na základě takto odhadnutých průběhů pak byl zvolen první iterační scénář  $\xi_1^{\text{iter}}$ , který dle regrese nabývá minimální hodnoty účelové funkce za splnění pravděpodobnostních omezení, tj. platí (5.111) až (5.113). Současně tento scénář musí zůstat v mezích kvantilů dle Tab. 6.1, tj. musí platit

$$30,3783 \text{ kN/m} \leq q_1^{\text{iter}} \leq 34,7113 \text{ kN/m}, \quad (6.42)$$

$$5,3090 \text{ kN} \leq N_1^{\text{iter}} \leq 9,9384 \text{ kN}. \quad (6.43)$$

Vybraným scénářem  $\xi_1^{\text{iter}}$  je scénář

$$\xi_1^{\text{iter}} = (q_1^{\text{iter}}; N_1^{\text{iter}}) = (33,5426 \text{ kN/m}; 6,2380 \text{ kN}). \quad (6.44)$$

Tento scénář je včetně odhadu příslušné veličiny vyznačen na Obr. 16 až Obr. 18. Těmito odhady pro dílčí veličiny jsou hodnoty

$$\tilde{f}_0(\boldsymbol{\xi}_1^{\text{iter}}) = 4315,8 \text{ Kč}, \quad (6.45)$$

$$\tilde{p}_{U0}(\boldsymbol{\xi}_1^{\text{iter}}) = 100,0620 \%, \quad (6.46)$$

$$\tilde{p}_{P0}(\boldsymbol{\xi}_1^{\text{iter}}) = 93,3193 \%. \quad (6.47)$$

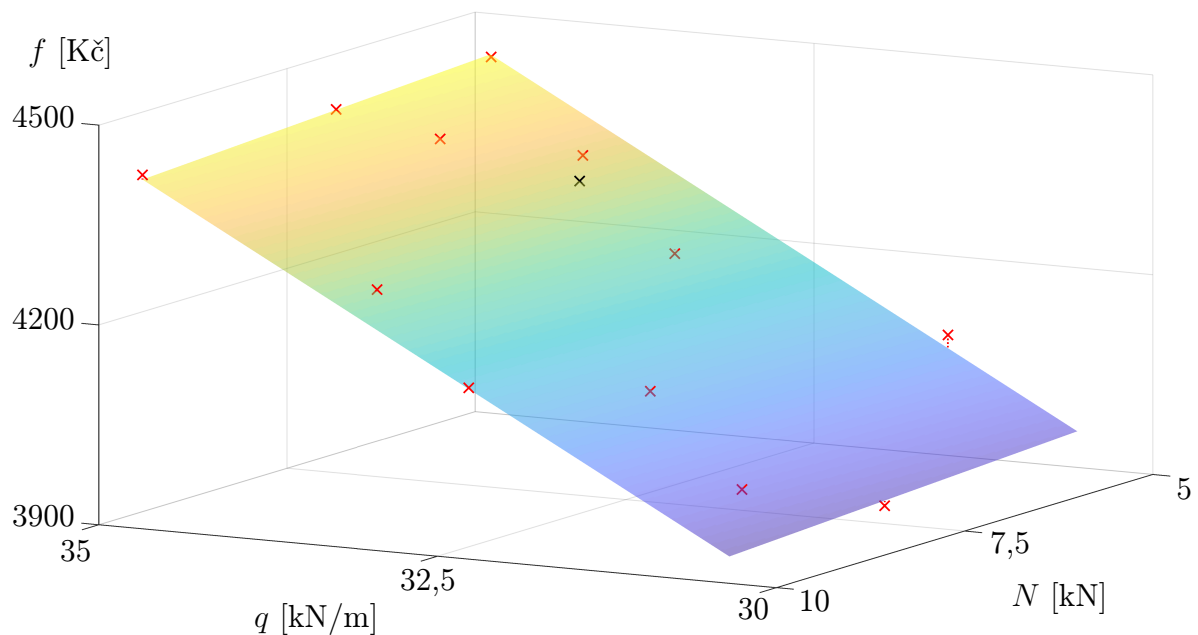
Na scénář  $\boldsymbol{\xi}_1^{\text{iter}}$  je opět aplikována deterministická optimalizace a posléze vyhodnoceny pravděpodobnosti splnění MSÚ a MSP. Skutečně vypočtené hodnoty jsou

$$f_1^{\text{iter}} = 4311,1 \text{ Kč}, \quad (6.48)$$

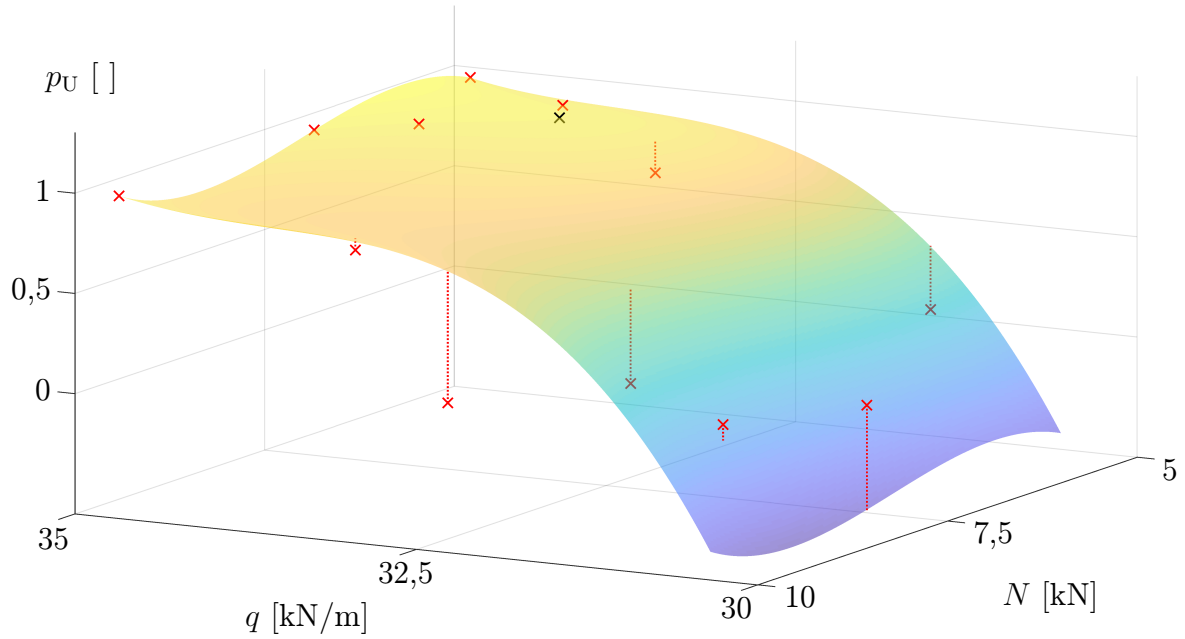
$$p_{U1}^{\text{iter}} = 98,3340 \%, \quad (6.49)$$

$$p_{P1}^{\text{iter}} = 97,0406 \%. \quad (6.50)$$

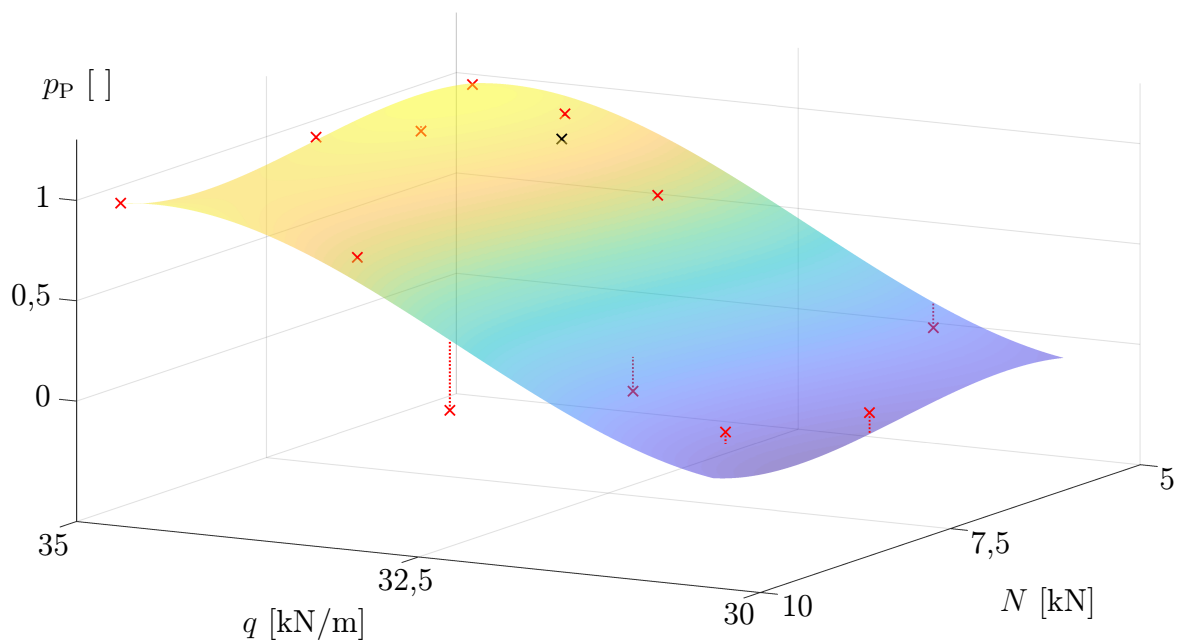
Jelikož tyto pravděpodobnosti nejsou dostatečné, scénář  $\boldsymbol{\xi}_1^{\text{iter}}$  je pro účely regrese zařazen mezi inicializační scénáře a celý iterační cyklus se opakuje. V regresi jsou opět aplikovány váhy analogické váhám (5.109), (5.110) a výběr dalšího scénáře je opět omezen analogicky jako v (6.42), (6.43).



Obrázek 16: Scénáře  $\boldsymbol{\xi}_k^{\text{init}}$ ,  $k = 1, \dots, 12$  s příslušnými hodnotami  $f_k^{\text{init}}$  (červeně), aproximační funkce  $\tilde{f}_0$  (vyjádřená plochou) a vybraným dalším scénářem  $\boldsymbol{\xi}_1^{\text{iter}}$  s pro něj odhadovanou hodnotou účelové funkce (černě).



Obrázek 17: Scénáře  $\xi_k^{\text{init}}$ ,  $k = 1, \dots, 12$  s příslušnými hodnotami  $p_{Uk}^{\text{init}}$  (červeně), aproximační funkce  $\tilde{p}_{U0}$  (vyjádřená plochou) a vybraným dalším scénářem  $\xi_1^{\text{iter}}$  s pro něj odhadovanou pravděpodobností (černě).



Obrázek 18: Scénáře  $\xi_k^{\text{init}}$ ,  $k = 1, \dots, 12$  s příslušnými hodnotami  $p_{Pk}^{\text{init}}$  (červeně), aproximační funkce  $\tilde{p}_{P0}$  (vyjádřená plochou) a vybraným dalším scénářem  $\xi_1^{\text{iter}}$  s pro něj odhadovanou pravděpodobností (černě).

Celý iterační cyklus pak dosáhne celkem 8 iterací. Výpis všech scénářů včetně jimi dosažených hodnot účelové funkce a pravděpodobností je v [Tab. 6.3](#).

Tabulka 6.3: Hodnoty  $q$  a  $N$  postupně určující všech 8 iteračních scénářů. Příslušné hodnoty účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP těmito scénáři.

$l$	$q_l^{\text{iter}}$ [kN/m]	$N_l^{\text{iter}}$ [kN]	$f_l^{\text{iter}}$ [Kč]	$p_{\text{U}l}^{\text{iter}}$ [%]	$p_{\text{P}l}^{\text{iter}}$ [%]
1	33,5426	6,2380	4311,1	98,3340	97,0406
2	33,8510	6,2285	4346,3	99,5895	99,2059
3	34,4729	6,2413	4417,2	99,9889	99,9721
4	34,4892	6,2488	4419,1	99,9900	99,9743
5	34,5038	6,2442	4420,8	99,9910	99,9774
6	34,5177	6,2403	4422,4	99,9920	99,9798
7	34,5251	6,2386	4423,2	99,9926	99,9808
8	34,5268	6,2379	4423,4	99,9929	99,9809

Na [Obr. 19](#), [Obr. 20](#) a [Obr. 21](#) lze vidět polynomiální regresi před 8. iterací pro  $\tilde{f}_7$ ,  $\tilde{p}_{\text{U}7}$  a  $\tilde{p}_{\text{P}7}$  respektive. Body pro regresi tam tedy představují všechny inicializační scénáře a také všechny scénáře z předchozích iterací. Vyznačen je také scénář  $\xi_8^{\text{iter}}$ , který je získán z této regrese coby řešení (přesněji jsou řešením návrhové proměnné získané jeho deterministickou optimalizací), a všechny jemu příslušející odhadované hodnoty účelové funkce a pravděpodobností. Pro ty jsou pak v 8. iteraci určeny skutečné hodnoty.

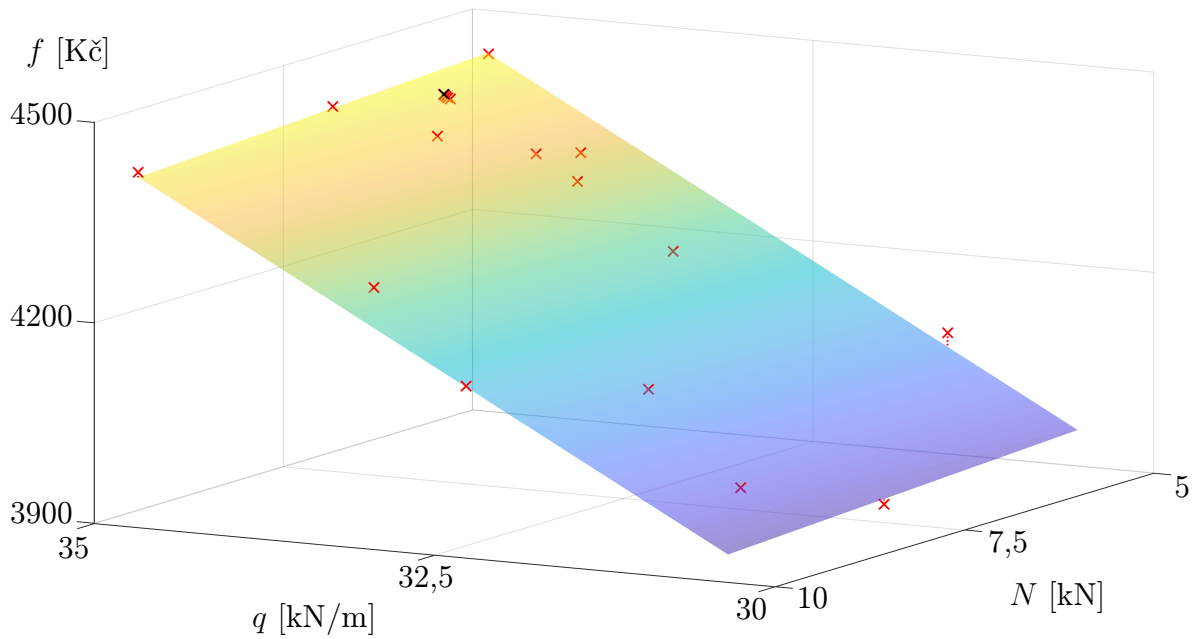
Pro porovnání, odhadované hodnoty pro scénář  $\xi_8^{\text{iter}}$  jsou v [Tab. 6.4](#) a skutečně vypočtené hodnoty jsou v [Tab. 6.3](#) (poslední řádek).

Tabulka 6.4: Odhady z regrese účelové funkce a pravděpodobností pro poslední iterační scénář  $\xi_8^{\text{iter}}$ .

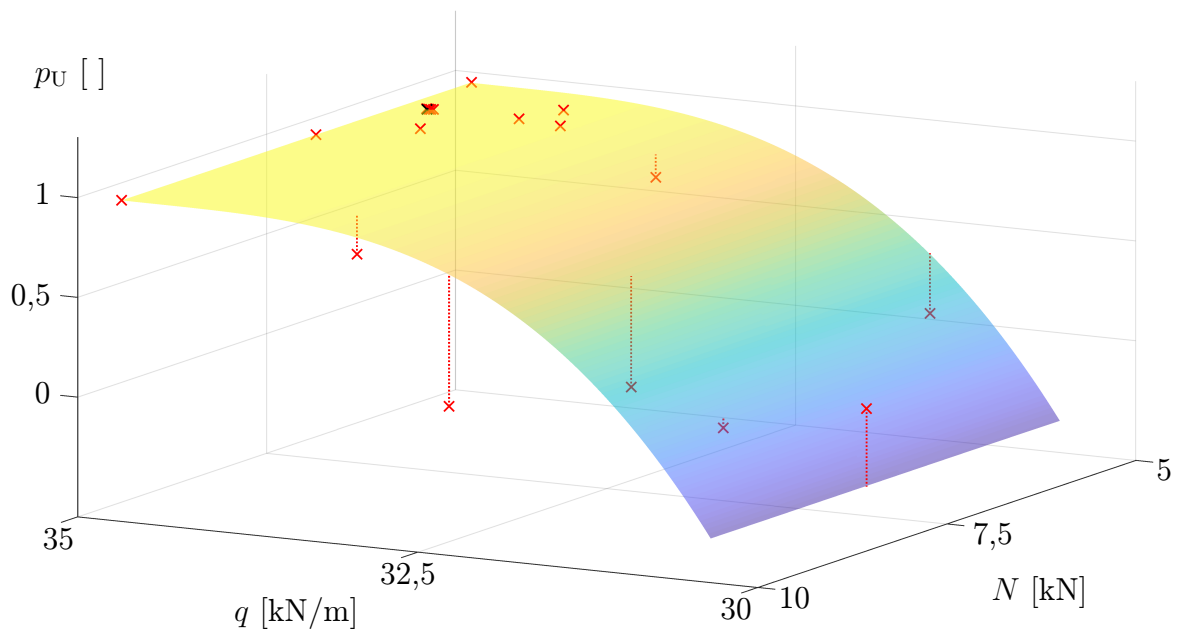
$l$	$q_l^{\text{iter}}$ [kN/m]	$N_l^{\text{iter}}$ [kN]	$\tilde{f}_{l-1}(\xi_l^{\text{iter}})$ [Kč]	$\tilde{p}_{\text{U}l-1}(\xi_l^{\text{iter}})$ [%]	$\tilde{p}_{\text{P}l-1}(\xi_l^{\text{iter}})$ [%]
8	34,5268	6,2379	4424,0	99,9928	100,9707

Kompletní výpis hodnot návrhových proměnných, které jsou řešením příkladu, je v [Tab. 6.5](#) v [odst. 6.2.5](#).

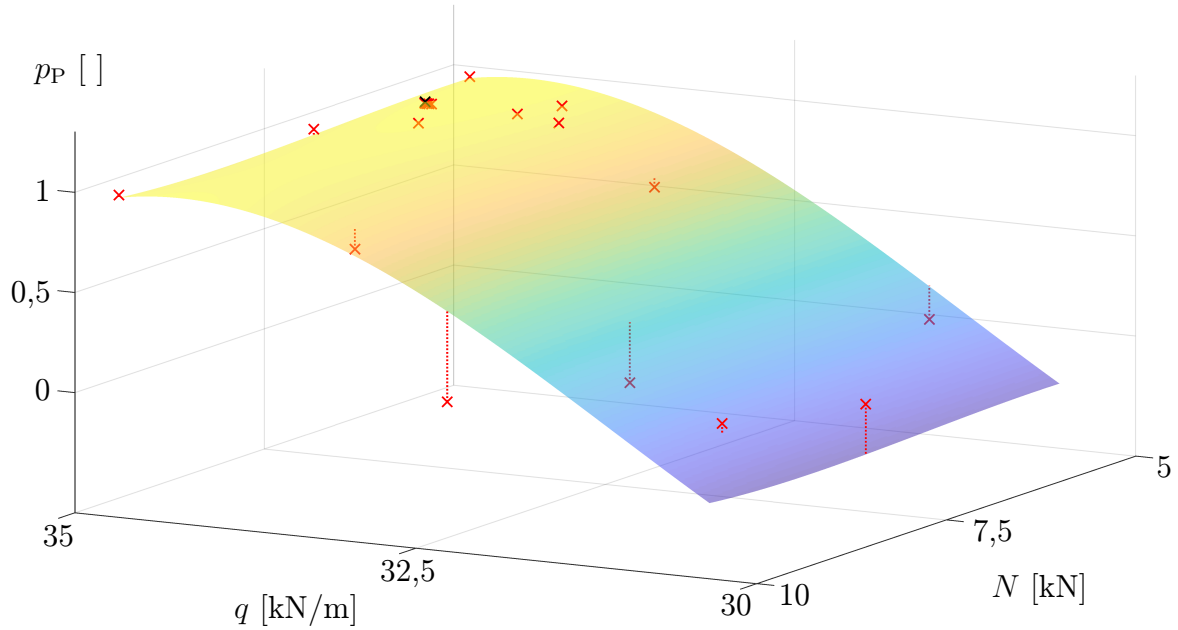
Pozornost si pak zaslouží chyby v dílčích aproximacích. Zde je nutné připomenout váhy aplikované na polynomiální regresi, které jsou navrženy tak, aby minimalizovaly odchylky zejména pravděpodobností, které jsou blízké pravděpodobnosti požadované.



Obrázek 19: Scénáře  $\xi_k^{\text{init}}$ ,  $k = 1, \dots, 12$  a scénáře  $\xi_l^{\text{iter}}$ ,  $l = 1, \dots, 7$  s příslušnými hodnotami  $f_k^{\text{init}}$  a  $f_l^{\text{iter}}$  (červeně), aproximační funkce  $\tilde{f}_7$  (vyjádřená plochou) a vybraným dalším scénářem  $\xi_8^{\text{iter}}$  (který je posledním scénářem iteračního procesu) s pro něj odhadovanou hodnotou účelové funkce (černě).



Obrázek 20: Scénáře  $\xi_k^{\text{init}}$ ,  $k = 1, \dots, 12$  a scénáře  $\xi_l^{\text{iter}}$ ,  $l = 1, \dots, 7$  s příslušnými hodnotami  $p_{Uk}^{\text{init}}$  a  $p_{Ul}^{\text{iter}}$  (červeně), aproximační funkce  $\tilde{p}_{U7}$  (vyjádřená plochou) a vybraným dalším scénářem  $\xi_8^{\text{iter}}$  (který je posledním scénářem iteračního procesu) s pro něj odhadovanou pravděpodobností (černě).



Obrázek 21: Scénáře  $\xi_k^{\text{init}}$ ,  $k = 1, \dots, 12$  a scénáře  $\xi_l^{\text{iter}}$ ,  $l = 1, \dots, 7$  s příslušnými hodnotami  $p_{P_k}^{\text{init}}$  a  $p_{P_l}^{\text{iter}}$  (červeně), aproximační funkce  $\tilde{p}_{P7}$  (vyjádřená plochou) a vybraným dalším scénářem  $\xi_8^{\text{iter}}$  (který je posledním scénářem iteračního procesu) s pro něj odhadovanou pravděpodobností (černě).

#### 6.2.4. Vyhodnocování pravděpodobnosti

Tato podkapitola obsahuje praktickou aplikaci toho, co obsahuje [odst. 5.2.4](#). Celá ukázka vyhodnocování pravděpodobnosti bude provedena na posledním iteračním scénáři  $\xi_8^{\text{iter}}$ .

Nejprve je metodou Monte Carlo vygenerováno  $10^6$  scénářů  $\xi_n$  na nichž bude pravděpodobnost vyhodnocena – viz [odst. 5.2.4.1](#). Platí

$$\xi_n = (q_n, N_n), \quad n = 1, \dots, n_n, \quad n_n = 10^6. \quad (6.51)$$

##### 6.2.4.1. Trénování NN

Tento odstavec zahrnuje aplikace [odst. 5.2.4.2](#) až [odst. 5.2.4.4](#).

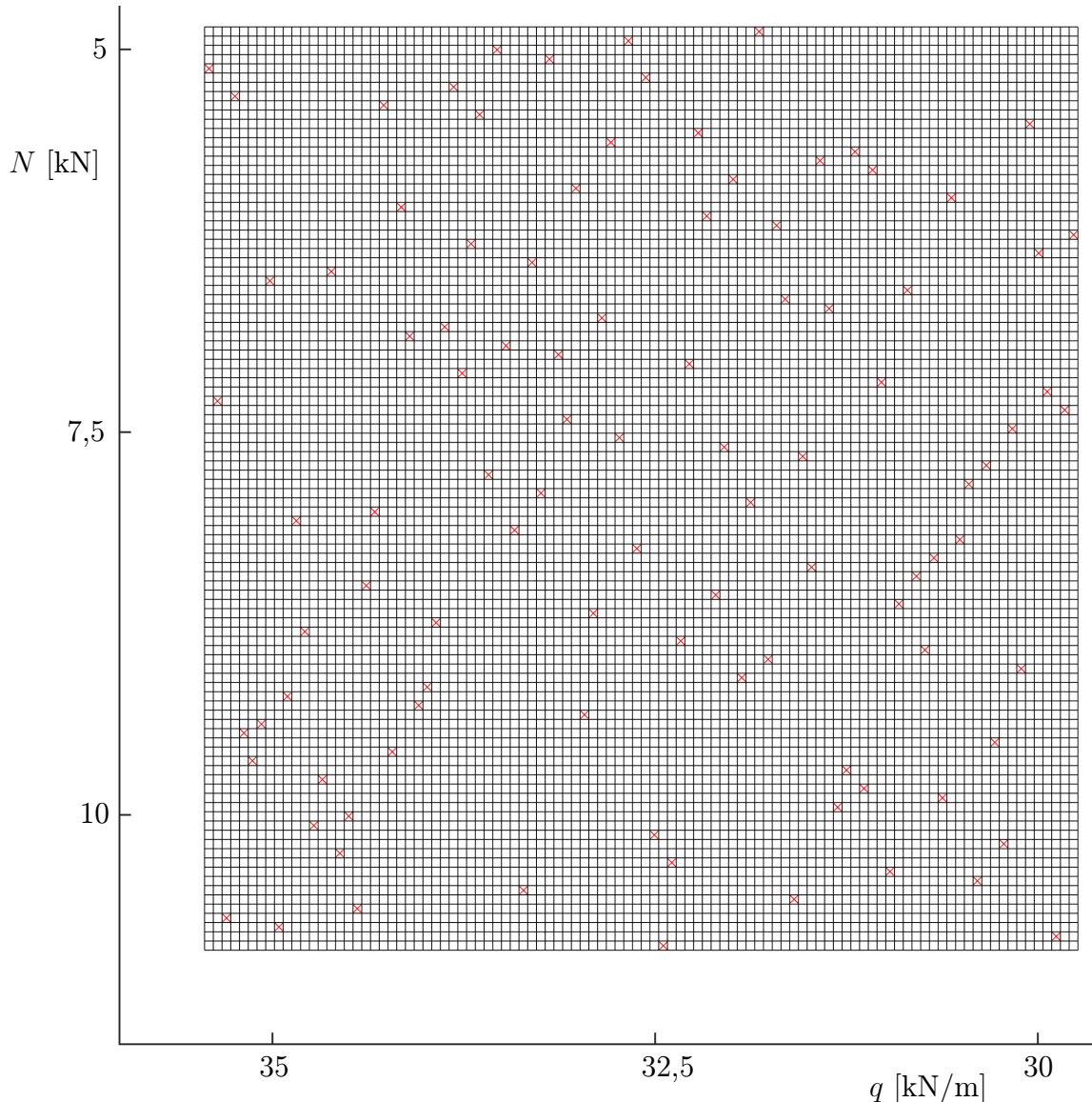
NN je trénována na 100 scénářích získaných metodou LHS. Pro obě náhodné veličiny  $q$ ,  $N$  byla určena nejvyšší a nejnižší hodnota, která se vyskytla mezi scénáři vygenerovanými metodou Monte Carlo, tj.

$$q_{\min} = \min_n q_n, \quad q_{\max} = \max_n q_n, \quad (6.52)$$

$$N_{\min} = \min_n N_n, \quad N_{\max} = \max_n N_n. \quad (6.53)$$



Mezi hodnotami  $q_{\min}$  a  $q_{\max}$  je pak bylo vybráno 100 ekvidistančních hodnot (včetně těchto hraničních), analogicky pro  $N_{\min}$  a  $N_{\max}$ . Na tyto hodnoty byla posléze uplatněna metoda LHS, čímž se dostalo výsledných 100 scénářů, které slouží k učení NN. Tyto scénáře včetně sítě na níž bylo provedeno LHS jsou na Obr. 22.



Obrázek 22: Scénáře získané LHS sloužící k učení NN.

Na vstupu pro učení NN jsou od hodnot  $q$  a  $N$  určující těchto 100 scénářů ještě odečteny hodnoty  $q_8^{\text{iter}}$ ,  $N_8^{\text{iter}}$  určující scénář  $\xi_8^{\text{iter}}$  – viz (5.33). Na výstupu pro učení NN jsou pak skutečné hodnoty průhybů a extrémních přetvoření betonu a oceli získané pro těchto 100 scénářů z modelu v GAMS, od kterých jsou odečteny extrémní přípustné hodnoty pro daná omezení – viz (5.35), (4.50), (4.51), (4.53).

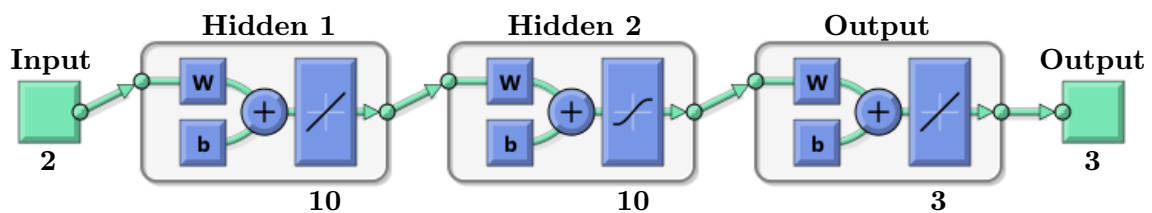
### 6.2.4.2. Architektura a nastavení NN

Podrobnosti o metodě NN jsou uvedeny v [odst. 3.3.12](#).

Jako nejvhodnější architektura NN byla na základě experimentů zvolena síť s dvěma skrytými vrstvami (hidden layers) neuronů, každá obsahující 10 neuronů. Celkově NN tedy obsahuje 4 vrstvy: vstupní vrstvu s 2 neurony (vstupní hodnoty  $q$  a  $N$ ), 2 skryté vrstvy po 10 neuronech a výstupní vrstvu s 3 neurony (výstupní hodnoty přetvoření betonu a oceli, průhybu). Viz [Obr. 23](#).

Na základě experimentů byly zvoleny i přenosové funkce mezi jednotlivými vrstvami. Mezi vstupní a první skrytou vrstvou je to funkce lineární, mezi skrytými vrstvami to je funkce hyperbolický tangens (v NN běžně používaná) a mezi druhou skrytou vrstvou a vrstvou výstupní opět funkce lineární. Jako metoda učení pro NN byla na základě experimentálních výsledků zvolena metoda Levenberg-Marquardt s přesností  $10^{-9}$  pro střední kvadratickou odchylku aproximace a maximem  $7 \times 10^3$  iterací.

Data se v NN dále dělí na skutečně trénovací, validační a testovací. Zde bylo ponecháno základní nastavení MATLABu – data jsou rozdělena na skupiny o počtu 70 %, 15 %, 15 % respektive z původního množství dat na základě náhody.



Obrázek 23: Architektura NN. Vstupní vrstva s 2 neurony – 1. přenosová lineární funkce – 1. skrytá vrstva s 10 neurony – 2. přenosová funkce hyperbolický tangens – 2. skrytá vrstva s 10 neurony – 3. přenosová lineární funkce – výstupní vrstva s 3 neurony.

### 6.2.4.3. Použití NN

Naučená NN je následně použita na  $10^6$  scénářů Monte Carlo – viz [odst. 5.2.4.5](#).

### 6.2.4.4. Chyba NN na hranici vyhovujících a nevyhovujících scénářů a vyhodnocení pravděpodobnosti

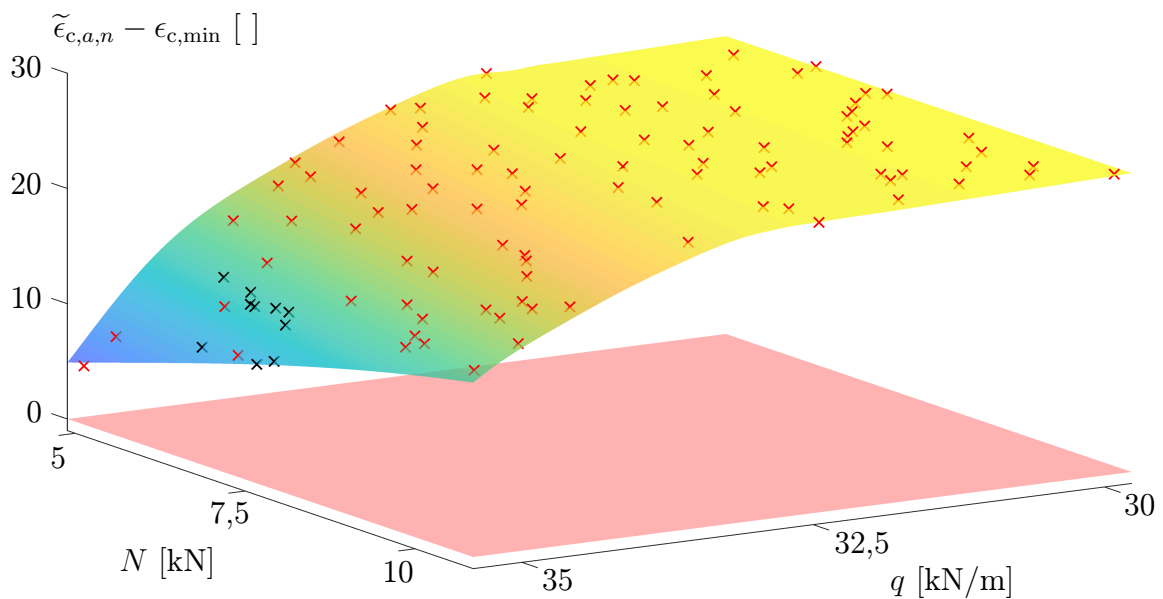
Ze scénářů Monte Carlo jsou vybrány scénáře, které jsou dle NN nejbližší hranici vyhovujících a nevyhovujících scénářů. Pokud jsou vhodné scénáře k dispozici, je jich vybráno 60, a to 10 vyhovujících a 10 nevyhovujících pro každou ze tří výstupních proměnných NN – přetvoření betonu, přetvoření oceli, průhyb. Pro těchto nejvíce 60 scénářů jsou

z modelu v GAMS získány jejich skutečné hodnoty přetvoření betonu a oceli a průhybů a pro ně spočítány maximální dosažené chyby NN pro všechna tato tři omezení, přičemž je zohledněno i to, zda tato chyba změni vyhovující scénář v nevyhovující nebo naopak. Vše viz [odst. 5.2.4.6](#).

Scénáře pro učení NN a také scénáře nejbližze hranici vyhovujících/nevyhovujících scénářů jsou pro jednotlivé výstupní proměnné NN na [Obr. 24](#) až [Obr. 26](#). V případě přetvoření betonu je scénářů nejbližze hranici pouze 10, protože zde neexistuje žádný nevyhovující scénář.

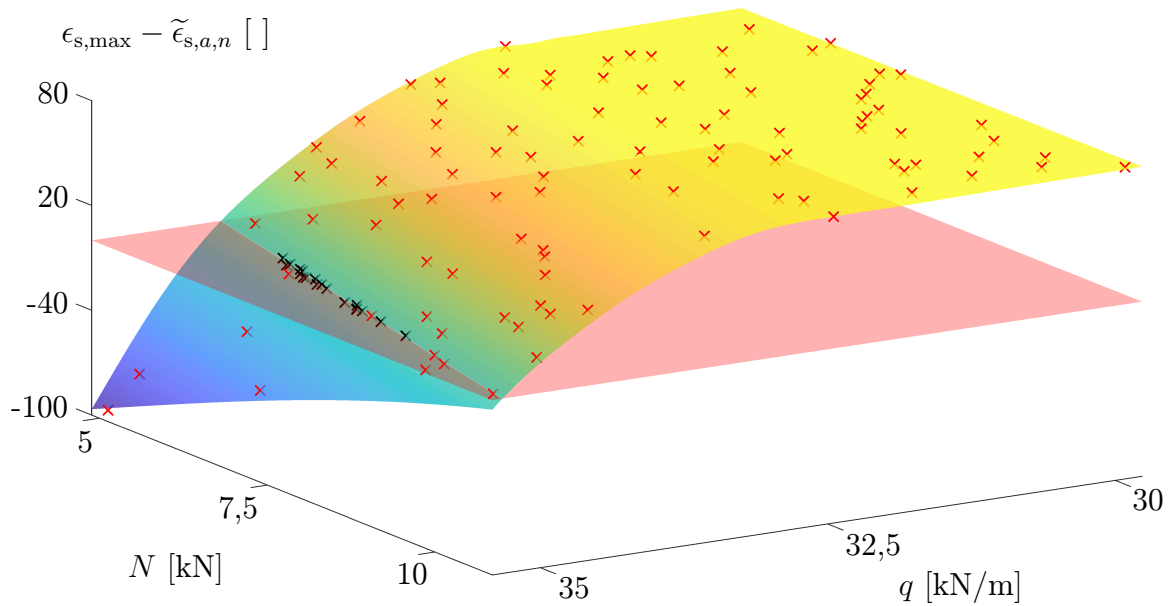
Po vynásobení těchto chyb konstantou 2, jsou scénáře Monte Carlo rozděleny na vyhovující, nevyhovující a neurčité – viz [odst. 5.2.4.7](#).

Nyní je zkontrolováno, že je možné, aby hodnoty pravděpodobností dosáhly požadovaných hodnot. Tj. že poměr vyhovujících a neurčitých scénářů z celkového počtu  $10^6$  je větší než požadované hodnoty pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP – viz [odst. 5.2.4.8](#). Jelikož se jedná o poslední scénář výpočtu, je tato podmínka splněna (podmínka cílí zejména na inicializační scénáře).



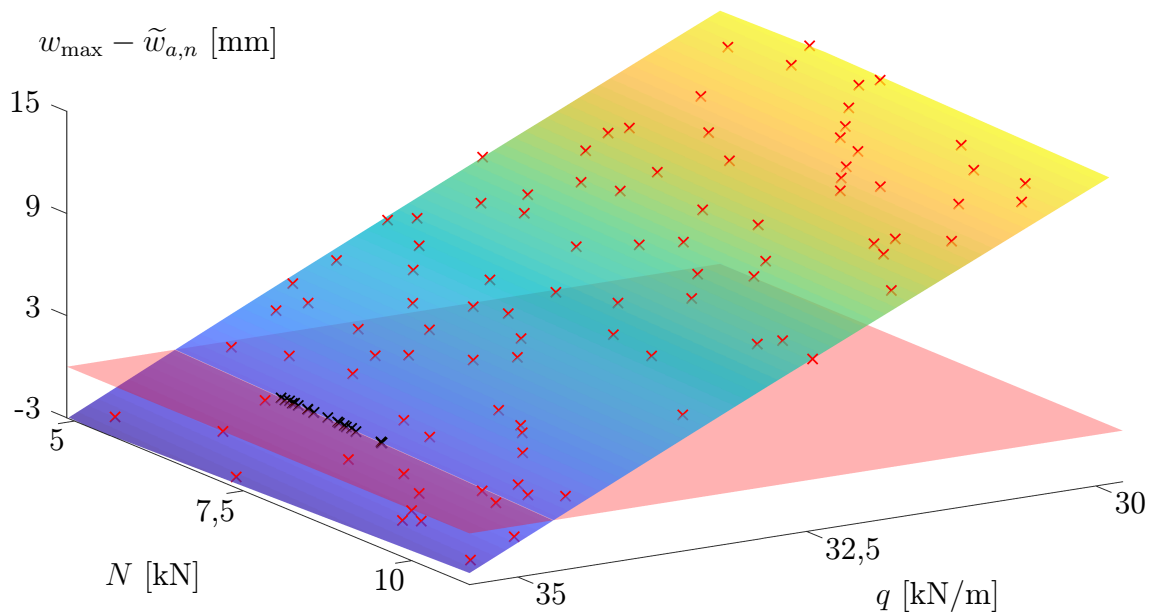
Obrázek 24: Vyhodnocení průběhu extrémního přetvoření betonu při vyhodnocování pravděpodobnosti scénáře  $\xi_8^{\text{iter}}$ . Červených 100 scénářů jsou scénáře pro učení NN.

Černých 10 scénářů jsou scénáře nejbližze hranici vyhovujících a nevyhovujících scénářů. Výsledky poskytované NN jsou vyjádřeny barevnou plochou. Červená plocha vyjadřuje nulovou hranici, rozděljuje tedy vyhovující a nevyhovující scénáře.



Obrázek 25: Vyhodnocení průběhu extrémního přetvoření oceli při vyhodnocování pravděpodobnosti scénáře  $\xi_s^{\text{iter}}$ . Červených 100 scénářů jsou scénáře pro učení NN.

Černých 20 scénářů jsou scénáře nejbližší hranici vyhovujících a nevyhovujících scénářů. Výsledky poskytované NN jsou vyjádřeny barevnou plochou. Červená plocha vyjadřuje nulovou hranici, rozděluje tedy vyhovující a nevyhovující scénáře.



Obrázek 26: Vyhodnocení průběhu extrémního průhybu při vyhodnocování pravděpodobnosti scénáře  $\xi_s^{\text{iter}}$ . Červených 100 scénářů jsou scénáře pro učení NN.

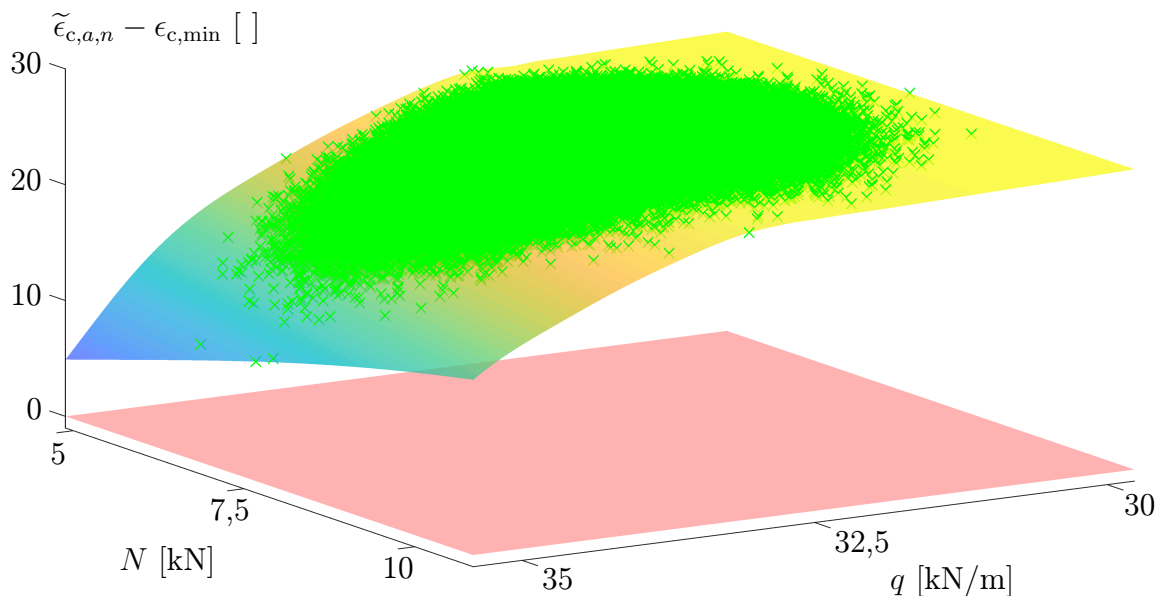
Černých 20 scénářů jsou scénáře nejbližší hranici vyhovujících a nevyhovujících scénářů. Výsledky poskytované NN jsou vyjádřeny barevnou plochou. Červená plocha vyjadřuje nulovou hranici, rozděluje tedy vyhovující a nevyhovující scénáře.

Dále je ověřeno, že počet neurčitých scénářů je dostatečně malý – viz odst. 5.2.4.10. Zde tomu tak je, díky přesnému odhadu NN je počet neurčitých scénářů nulový (po vyloučení již vyzkoušených scénářů). V opačném případě by následovalo opětovné učení NN, kam by nově přibýly všechny již otestované scénáře s cílem snížit chybu odhadu NN a tak i počet neurčitých scénářů.

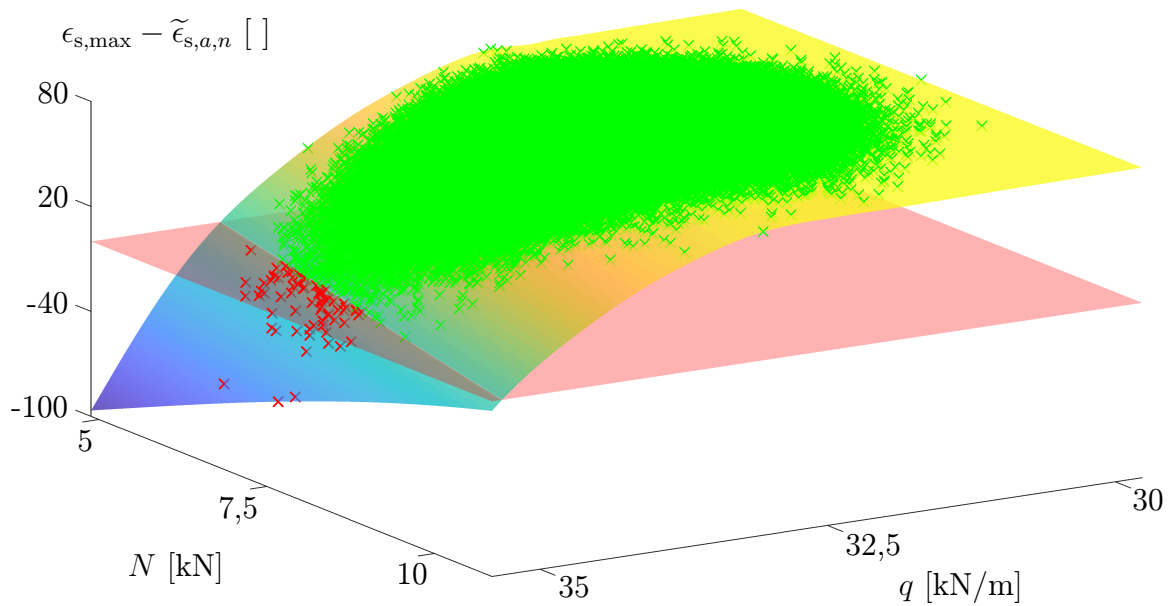
Všechny neurčité scénáře by nyní byly otestovány v modelu v GAMS a byla by pro ně opět vyhodnocena chyba odhadu NN – viz odst. 5.2.4.12. Na jejím základě by pak postupně byla eliminována chyba odhadu NN, která mění vyhovující scénáře v nevyhovující nebo naopak – viz odst. 5.2.4.13 až odst. 5.2.4.16.

Jelikož je ale počet neurčitých scénářů nulový, může být rovnou vyhodnocena pravděpodobnost – viz odst. 5.2.4.17.

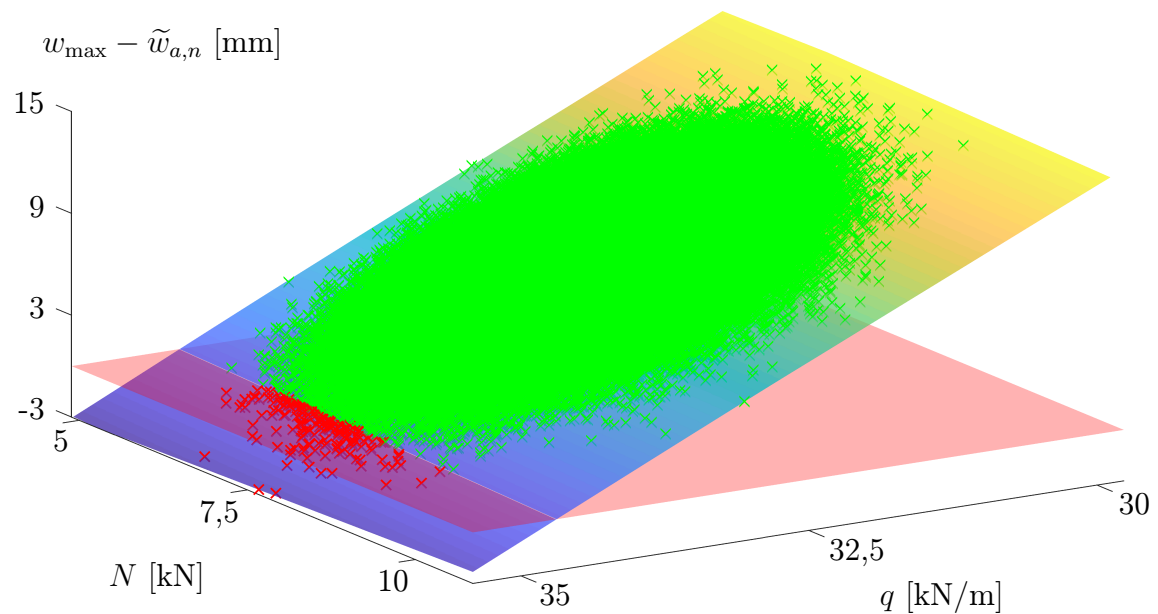
Ukázky konečného vyhodnocení scénářů Monte Carlo pro přetvoření betonu a oceli, průhybu je na Obr. 27 až Obr. 29.



Obrázek 27: Vyhodnocení přetvoření betonu pro scénář  $\xi_8^{\text{iter}}$ . Zeleně jsou vyhovující scénáře Monte Carlo, červeně nevyhovující (zde žádný takový není). Barevná plocha představuje výsledky poskytované NN. Červená plocha je nulová hranice, rozděluje tedy vyhovující a nevyhovující scénáře.



Obrázek 28: Vyhodnocení přetvoření oceli pro scénář  $\xi_8^{\text{iter}}$ . Zeleně jsou vyhovující scénáře Monte Carlo, červeně nevyhovující. Barevná plocha představuje výsledky poskytované NN. Červená plocha je nulová hranice, rozděluje tedy vyhovující a nevyhovující scénáře.



Obrázek 29: Vyhodnocení průhybu pro scénář  $\xi_8^{\text{iter}}$ . Zeleně jsou vyhovující scénáře Monte Carlo, červeně nevyhovující. Barevná plocha představuje výsledky poskytované NN. Červená plocha je nulová hranice, rozděluje tedy vyhovující a nevyhovující scénáře.

### 6.2.5. Řešení příkladu

Řešením příkladu jsou tedy hodnoty návrhových proměnných získané deterministickou optimalizací scénáře

$$\xi_8^{\text{iter}} = (q_8^{\text{iter}}; N_8^{\text{iter}}) = (34,5268 \text{ kN/m}; 6,2379 \text{ kN}). \quad (6.54)$$

Tyto hodnoty ve všech deseti konečných prvcích jsou uvedeny v [Tab. 6.5](#). Řešení je symetrické, což se dá očekávat (ačkoliv z hlediska deterministické optimalizace a její konečné podmínky gradientu dostatečně blízkého nule zde může dojít k odchýlkám).

Celá inicializační část trvala přibližně půl hodiny (přesně 1 483 sekund) – na inicializační část připadá i první deterministická optimalizace, která trvá cca 1-2 minuty, další deterministické optimalizace používají výsledek této první optimalizace za svůj počáteční bod a trvají řádově sekundy. Celá iterační část pak trvala přibližně 15 minut (přesně 916 sekund).

Tabulka 6.5: Hodnoty návrhových proměnných získané deterministickou optimalizací scénáře  $\xi_8^{\text{iter}}$  z poslední iterace a tedy řešení příkladu.

k. p.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$
$b_1$ [mm]	200	393	585	747	883	883	747	585	393	200
$b_2$ [mm]	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$b_3$ [mm]	755	411	585	732	849	849	732	585	411	755
$h_1$ [mm]	150	100	100	100	100	100	100	100	100	150
$h_2$ [mm]	100	150	150	150	150	150	150	150	150	100
$h_3$ [mm]	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$A_{s1}$ [mm <sup>2</sup> ]	112	110	147	178	204	204	178	147	110	112
$A_{s3}$ [mm <sup>2</sup> ]	289	1398	2178	2838	3361	3361	2838	2178	1398	289

### 6.2.6. Verifikace správnosti výsledku

Pravděpodobnosti splnění MSÚ a MSP konfigurací danou výsledkem optimalizace budou ověřeny a to z důvodu použité metody vyhodnocování pravděpodobnosti.

Pravděpodobnosti splnění MSÚ a MSP byly verifikovány na testovacích množinách o 1000, 2000, 4000 a 8000 scénářích. Testovací metoda je kombinací LHS (viz [odst. 3.3.15](#)) a Importance Sampling (viz [odst. 3.3.14](#)).

## 6.2.6.1. První výběr LHS

Bude popsáno jak probíhá výběr scénářů pro první testovací množinu o  $n_t = 1000$  scénářích. Pro názornost bude toto ilustrováno na výběru množiny o  $n'_t = 4$  scénářích (analogicky lze tuto ilustraci rozšířit i na více dimenzí). Nejprve jsou stanoveny kvantily  $10^{-6}$  a  $1 - 10^{-6}$  zadaných pravděpodobností (aby byly hustoty pravděpodobností scénářů dobře pokryty), v tomto případě pro  $q$  a  $N$ . Tyto kvantily jsou v Tab. 6.6.

Tabulka 6.6: Kvantily  $10^{-6}$  a  $1 - 10^{-6}$  pro spojitě zatížení  $q$  a normálovou sílu  $N$  dle zadání.

	$10^{-6}$	$1 - 10^{-6}$
$q$ [kN/m]	29,8617	35,2822
$N$ [kN]	4,8593	10,6591

Mezi těmito hodnotami definovanými kvantily (a to včetně nich) je nyní vybráno  $n'_t + 1$  ( $n_t + 1$ ) ekvidistatních hodnot  $b_i^q$ ,  $b_j^N$ ,  $i = 1, \dots, n'_t$ ,  $j = 1, \dots, n'_t$  ( $i = 1, \dots, n_t$ ,  $j = 1, \dots, n_t$ ). Tyto představují hranice oblastí, pro něž budou dále hledáni reprezentanti. Pro  $n'_t = 4$  se tedy dostane

$$\begin{aligned} b_i^q \dots & 29,8617, \quad 31,2169, \quad 32,5720, \quad 33,9271, \quad 35,2822, \\ b_j^N \dots & 4,8593, \quad 6,3093, \quad 7,7592, \quad 9,2092, \quad 10,6591. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Je třeba stanovit jakou pravděpodobnost reprezentuje daná oblast. Z distribuční funkce jsou tedy odečteny hodnoty pravděpodobností pro hodnoty  $b_i^q$ ,  $b_j^N$ . Tyto budou označeny  $p_i^{bq}$ ,  $p_j^{bN}$  a jejich hodnoty pro  $n'_t = 4$  jsou

$$\begin{aligned} p_i^{bq} \dots & 10^{-6}, \quad 0,011446, \quad 0,552511, \quad 0,993308, \quad 1 - 10^{-6}, \\ p_j^{bN} \dots & 10^{-6}, \quad 0,031306, \quad 0,728590, \quad 0,997351, \quad 1 - 10^{-6}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Následuje určení přímo reprezentovaných pravděpodobností  $p_i^q$ ,  $p_j^N$  jako

$$p_i^q = p_{i+1}^{bq} - p_i^{bq}, \quad i = 1, \dots, n'_t, \quad (6.57)$$

$$p_j^N = p_{j+1}^{bN} - p_j^{bN}, \quad j = 1, \dots, n'_t. \quad (6.58)$$



Ke dvěma krajním oblastem s indexy 1 a  $n'_t$  je třeba ještě přičíst chybějící pravděpodobnosti vzhledem k původním hraničním kvantilům z Tab. 6.6, tedy  $10^{-6}$ . Dostávají se tak hodnoty reprezentovaných pravděpodobností

$$\begin{aligned} p_i^q \dots & 0,011446, \quad 0,541065, \quad 0,440796, \quad 0,006692, \\ p_j^N \dots & 0,031306, \quad 0,697284, \quad 0,268761, \quad 0,002649. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Hodnoty reprezentantů  $v_i^q, v_j^N$  leží uprostřed intervalů hraničních hodnot  $b_i^q, b_j^N$  z (6.55). Platí tedy

$$\begin{aligned} v_i^q \dots & 30,5393, \quad 31,8944, \quad 33,2495, \quad 34,6046, \\ v_j^N \dots & 5,5843, \quad 7,0342, \quad 8,4842, \quad 9,9341. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Dvojice  $(v_i^q, v_j^N)$  nyní budou reprezentovat hodnoty pravděpodobnosti, které vznikají roznásobením příslušných pravděpodobností  $p_i^q, p_j^N$ . Tyto hodnoty jsou v Tab. 6.7.

Tabulka 6.7: Tabulka pravděpodobností reprezentovaných dvojic  $(v_i^q, v_j^N)$ . Ty jsou odvozeny jako  $p_i^q \times p_j^N$  pro příslušná  $i, j$ .

$v_j^N \backslash v_i^q$	30,5393	31,8944	33,2495	34,6046	$p_j^N$
5,5843	0,000358	0,016939	0,013800	0,000210	0,031306
7,0342	0,007981	0,377276	0,307360	0,004666	0,697284
8,4842	0,003076	0,145417	0,118469	0,001799	0,268761
9,9341	0,000030	0,001433	0,001168	0,000018	0,002649
$p_i^q$	0,011446	0,541065	0,440796	0,006692	$p_i^q \times p_j^N$

Na tyto dvojice a jimi reprezentované pravděpodobnosti je nyní aplikována metoda LHS. Jsou tak vybrány např. pouze dvojice dle Tab. 6.8.

Tabulka 6.8: Tabulka pravděpodobností reprezentovaných dvojic  $(v_i^q, v_j^N)$  po aplikaci LHS.

$v_j^N \backslash v_i^q$	30,5393	31,8944	33,2495	34,6046	$p_j^N$
5,5843		0,016939			0,031306
7,0342	0,007981				0,697284
8,4842			0,118469		0,268761
9,9341				0,000018	0,002649
$p_i^q$	0,011446	0,541065	0,440796	0,006692	$p_i^q \times p_j^N$

V této podobě je pravděpodobnost reprezentovaná těmito scénáři pouze

$$0,007981 + 0,016939 + 0,118469 + 0,000018 = 0,143407, \quad (6.61)$$

proto budou pravděpodobnosti pomocí této hodnoty znormovány. Dostane se tedy  $n'_t = 4$  scénářů k otestování  $(v_k^q, v_k^N)$ ,  $k = 1, \dots, n'_t$ , které reprezentují pravděpodobnosti  $p_k^{qN}$  dle Tab. 6.9.

Tabulka 6.9: Tabulka dvojic scénářů k otestování  $(v_k^q, v_k^N)$  a jimi reprezentovaná pravděpodobnost  $p_k^{qN}$ .

k	$v_k^q$	$v_k^N$	$p_k^{qN}$
1	30,5393	7,0342	0,055653
2	31,8944	5,5843	0,118118
3	33,2495	8,4842	0,826103
4	34,6046	9,9341	0,000126

Lze očekávat že tato metoda testování bude mít velké rozptyly, proto je nadále pojata tak, že je jí postupně testováno stále více scénářů, přičemž takto určené hodnoty pravděpodobností budou jistě konvergovat ke skutečné hodnotě. Výběr většího počtu scénářů probíhá rozšířením scénářů předchozích (i když je nutné, aby zde došlo k jejich částečnému posunu). K tomuto rozšíření je použita metoda v [60].

#### 6.2.6.2. Rozšíření výběru LHS

Metoda [60] bude opět ilustrována na  $n'_t = 4$  (analogicky jde rozšířit na více scénářů i dimenzí). Pro rozšíření počtu scénářů  $n'_t = 4$  na  $2n'_t = 8$  je nejprve pro předchozí krok vytvořen další možný výběr LHS, viz Obr. 30, kde červené křížky označují scénáře z předchozího kroku  $n'_t = 4$  a šedé čtverce oblasti z nichž by byly vybrány prvky v tomto nyní provedeném druhém výběru.

	×		
×			
		×	
			×

Obrázek 30: Rozšíření LHS. Scénáře z kroku  $n'_t = 4$  (červené křížky) a oblasti nově provedeného výběru (šedě).

Nyní se přejde k dělení pro  $2n'_t = 8$ . Scénáře z předchozího kroku (červené křížky) nutně leží na hranicích nového dělení (čárkovaně) a proto dojde k jejich náhodnému posunu (modré křížky), viz Obr. 31.

	×			
	*			
*				
×			*	
			×	
				×
				*

Obrázek 31: Rozšíření LHS. Nové dělení pro  $2n'_t = 8$  (čárkované). Scénáře z přechodního kroku (červené křížky) náhodně posunuty do nových pozic (modré křížky).

Nakonec jsou oblasti druhého výběru (šedě) doplněny novými čtyřmi scénáři (zelené křížky) tak, aby byl v každém sloupci i řádku právě jeden scénář, viz Obr. 32. Toto doplnění je jednoznačné.


Obrázek 32: Rozšíření LHS. Doplnění nových scénářů (zelené křížky) do oblastí druhého výběru (šedě), aby byl v každém řádku i sloupci právě jeden scénář.

Tím je rozšíření dokončeno. Posunuté původní scénáře (modré křížky) a nově doplněné scénáře (zelené křížky) tvoří nový výběr  $2n'_t = 8$  scénářů, viz Obr. 32. Reprezentované pravděpodobnosti jsou opět analogické předchozímu kroku a to včetně způsobu jejich normování.

### 6.2.6.3. Výsledky

Jak bylo uvedeno, pravděpodobnosti jsou testovány na množinách o 1000, 2000, 4000 a 8000 scénářích. Množina 1000 scénářů byla vybrána způsobem popsáným v odst. 6.2.6.1 a dále postupně rozšiřována na 2000, 4000, 8000 scénářů metodou popsanou v odst. 6.2.6.2.

Výsledky testování jsou v Tab. 6.10. Byly provedeny 2 testy pro různé výběry LHS.

Tabulka 6.10: Tabulka výsledků testování pro verifikaci pravděpodobností z optimalizace, kde  $n_t$  je počet testovaných scénářů,  $p_U$  a  $p_P$  jsou zjištěné hodnoty pravděpodobností splnění MSÚ a MSP. V dolních řádcích jsou výsledky pravděpodobností z optimalizace a hodnoty předepsaných pravděpodobnostních podmínek.

test # $n_t$	$p_U$ [%]		$p_P$ [%]	
	1	2	1	2
1000	99,9925	99,9928	99,9841	99,9823
2000	99,9933	99,9925	99,9840	99,9841
4000	99,9930	99,9928	99,9822	99,9838
8000	99,9926	99,9921	99,9822	99,9820
výsledek optimalizace	99,9929		99,9809	
podmínky ze zadání úlohy	99,99277		93,31928	

### 6.3. Př. 2: Náhodnost v pevnostech

Ve druhém příkladě je náhodnost uvažována v pevnostech betonu a oceli. V případě betonu je pak s jeho pevností spojen i jeho modul pružnosti.

#### 6.3.1. Zadání příkladu

Zadání je opět variantou společného zadání z odst. 6.1.1. Náhodnost je zde uvažována pouze v pevnostech. Představuje ji tedy pevnost betonu  $f_c$  a pevnost oceli  $f_s$ , platí

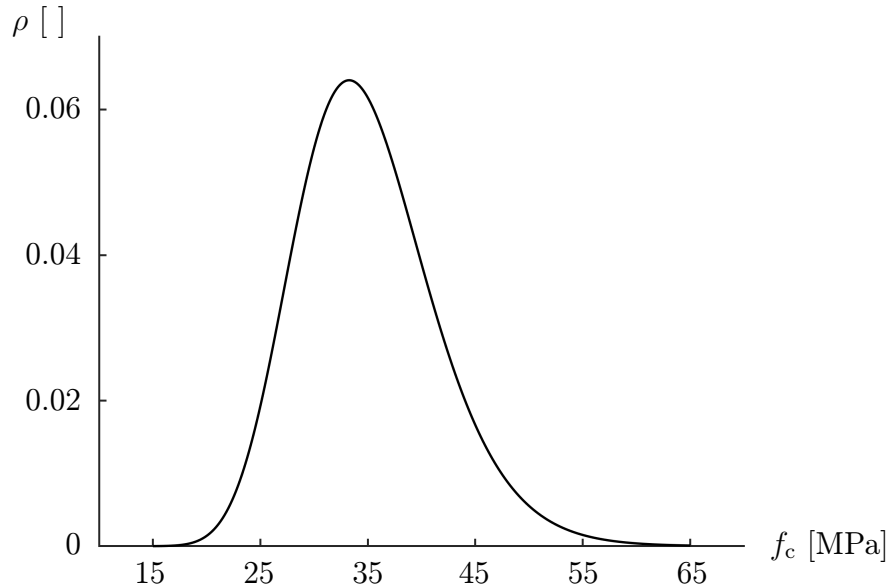
$$\xi = (f_c, f_s), \quad (6.62)$$

kde  $f_c$ ,  $f_s$  jsou náhodné veličiny s lognormálním rozdělením se střední hodnotou a rozptylem

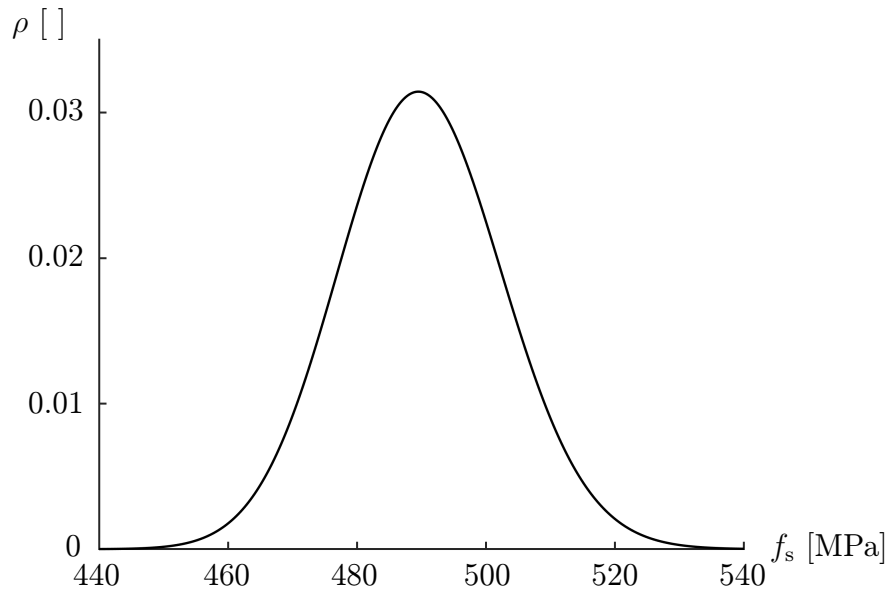
$$f_c \sim \text{Lognormal}(35; 2) \text{ [MPa]}, \quad (6.63)$$

$$f_s \sim \text{Lognormal}(490; 12,7) \text{ [MPa]}. \quad (6.64)$$

Hustoty těchto pravděpodobností jsou na Obr. 33 a Obr. 34.



Obrázek 33: Hustota pravděpodobnosti pevnosti betonu  $f_c$ .

Obrázek 34: Hustota pravděpodobnosti pevnosti oceli  $f_s$ .

Jak bylo uvedeno, s pevností betonu  $f_c$  je přímo spjata také hodnota jeho modulu pružnosti  $E_c$ , a sice prostřednictvím hermitovské interpolace dle Tab. 6.11 (použito z dizertační práce J. Plška [2]). Hodnota modulu pružnosti oceli  $E_s$  je stále 200 GPa, viz (6.15).

Tabulka 6.11: Třída betonu a jí odpovídající pevnost  $f_c$  a modul pružnosti  $E_c$ .

Třída betonu	C12/15	C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60
$f_c$ [MPa]	15	20	25	30	37	45	50	55	60
$E_c$ [GPa]	27	29	30	31	32	34	35	36	37

Naproti tomu spojitě zatížení  $q$  a normálová síla  $N$  jsou zde uvažovány jako deterministické a jsou tedy součástí vektoru  $\mathbf{v}$ . Jejich hodnoty jsou

$$q = 32 \text{ kN/m}, \quad (6.65)$$

$$N = 7,5 \text{ kN}. \quad (6.66)$$

### 6.3.2. Inicializace výpočtu

Ve výpočtu je použito celkem 13 inicializačních scénářů. Z toho jsou 3 zvoleny specificky a 10 metodou LHS na síti ekvidistantních bodů. Celá volba inicializačních scénářů je

ekvivalentem [odst. 6.2.2](#). Výčet inicializačních scénářů včetně příslušných hodnot účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP je v [Tab. 6.12](#).

Tabulka 6.12: Hodnoty  $f_c$  a  $f_s$  určující 13 inicializačních scénářů. Příslušné hodnoty účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP těmito scénáři.

$k$	$f_{c,k}^{\text{init}}$ [MPa]	$f_{s,k}^{\text{init}}$ [MPa]	$f_k^{\text{init}}$ [Kč]	$p_{Uk}^{\text{init}}$ [%]	$p_{Pk}^{\text{init}}$ [%]
1	43,4097	519,0533	3910,7	0,5494	0,0000
2	41,7117	497,5806	3943,4	18,6574	0,0235
3	40,0137	540,5261	3964,2	0,0036	0,0000
4	38,3157	443,8987	4003,3	99,9861	5,3964
5	36,6177	508,3169	4048,1	7,0744	1,7322
6	34,9197	476,1078	4083,5	86,2569	44,1984
7	33,2217	454,6351	4081,9	99,8313	80,7144
8	31,5237	529,7897	4100,2	0,1919	0,1889
9	29,8256	486,8442	4135,9	67,8000	67,5958
10	28,1276	465,3714	4187,9	98,9334	98,9280
11	28,1276	443,8987	4190,4	99,9984	99,9931
12	28,1276	454,6351	4189,1	99,9320	99,9270
13	29,8256	443,8987	4140,9	99,9971	99,7070

### 6.3.3. Iterační postup

Proběhlo celkem 15 iterací. Výčet iteračních scénářů včetně příslušných hodnot účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP je v [Tab. 6.13](#).

### 6.3.4. Řešení příkladu

Řešením příkladu jsou hodnoty návrhových proměnných získané deterministickou optimalizací scénáře

$$\xi_{15}^{\text{iter}} = (f_{c,15}^{\text{iter}}; f_{s,15}^{\text{iter}}) = (28,1276 \text{ MPa}; 447,2943 \text{ MPa}). \quad (6.67)$$

Tyto hodnoty ve všech deseti konečných prvcích jsou uvedeny v [Tab. 6.14](#). Při daném zaokrouhlování je řešení dokonale symetrické.

Tabulka 6.13: Hodnoty  $f_c$  a  $f_s$  postupně určující všech 15 iteračních scénářů. Příslušné hodnoty účelové funkce a pravděpodobnosti splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP těmito scénáři.

$l$	$f_{c,l}^{\text{iter}}$ [MPa]	$f_{s,l}^{\text{iter}}$ [MPa]	$f_l^{\text{iter}}$ [Kč]	$p_{U}^{\text{iter}}$ [%]	$p_{Pl}^{\text{iter}}$ [%]
1	31,6307	453,2963	4106,6	99,9064	95,9668
2	31,9420	452,1213	4101,8	99,9246	94,3205
3	32,0297	450,6368	4100,5	99,9472	93,4266
4	31,8797	448,7360	4103,1	99,9723	94,9391
5	31,6592	448,7135	4106,7	99,9748	95,7707
6	31,5009	448,5012	4109,2	99,9744	96,5009
7	30,9452	448,2005	4118,7	99,9843	98,3071
8	30,8877	446,4030	4119,9	99,9920	98,4457
9	30,8394	446,3970	4120,7	99,9920	98,5500
10	30,7553	445,8391	4122,2	99,9919	98,7185
11	30,8242	446,8337	4120,9	99,9888	98,5773
12	30,7831	446,4718	4121,7	99,9919	98,6629
13	30,7445	446,0307	4122,4	99,9919	98,7436
14	30,5950	446,0541	4125,0	99,9919	98,9912
15	30,2355	445,3743	4131,7	99,9951	99,4310

Tabulka 6.14: Hodnoty návrhových proměnných získané deterministickou optimalizací scénáře  $\xi_{15}^{\text{iter}}$  z poslední iterace a tedy řešení příkladu.

k. p.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$
$b_1$ [mm]	200	364	542	692	818	818	692	542	364	200
$b_2$ [mm]	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$b_3$ [mm]	658	387	548	684	792	792	684	548	387	658
$h_1$ [mm]	150	100	100	100	100	100	100	100	100	150
$h_2$ [mm]	100	150	150	150	150	150	150	150	150	100
$h_3$ [mm]	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$A_{s1}$ [mm <sup>2</sup> ]	104	105	139	168	192	192	168	139	105	104
$A_{s3}$ [mm <sup>2</sup> ]	298	1290	2012	2623	3107	3107	2623	2012	1290	298

Celá inicializační část trvala o něco déle než hodinu (přesně 4 007 sekund). Celá iterační část pak trvala přibližně 3 a půl hodiny (přesně 12 918 sekund).

### 6.3.5. Verifikace správnosti výsledku

Pravděpodobnosti splnění MSÚ a MSP z optimalizace jsou verifikovány anologicky jako v odst. 6.2.6. Výsledky verifikace jsou v Tab. 6.15.



Tabulka 6.15: Tabulka výsledků testování pro verifikaci pravděpodobností z optimalizace, kde  $n_t$  je počet testovaných scénářů,  $p_U$  a  $p_P$  jsou zjištěné hodnoty pravděpodobností splnění MSÚ a MSP. V dolních řádcích jsou výsledky pravděpodobností z optimalizace a hodnoty předepsaných pravděpodobnostních podmínek.

		$p_U$ [%]		$p_P$ [%]	
		1	2	1	2
$n_t$	test #				
	1000	99,9953	99,9955	99,3831	99,3743
	2000	99,9948	99,9954	99,3571	99,3655
	4000	99,9954	99,9955	99,4055	99,3839
	8000	99,9949	99,9955	99,3831	99,4587
výsledek optimalizace		99,9951		99,4310	
podmínky ze zadání úlohy		99,99277		93,31928	

## 6.4. Př. 3: Náhodnost v zatížení a pevnostech

Ve třetím příkladu je náhodnost uvažována v zatížení i v pevnostech.

### 6.4.1. Zadání příkladu

Ve třetím příkladu je náhodnost v zatížení i v pevnostech. Tato varianta zadání je tak v podstatě kombinací obou předchozích variant. Náhodný vektor  $\xi$  je zde tvořen spojitým zatížením  $q$ , normálovou silou  $N$ , pevností betonu  $f_c$  a pevností oceli  $f_s$ , tj.

$$\xi = (f_c, f_s, q, N), \quad (6.68)$$

kde  $f_c$ ,  $f_s$ ,  $q$ ,  $N$  jsou náhodné veličiny s rozděleními

$$f_c \sim \text{Lognormal}(35; 2) \text{ [MPa]}, \quad (6.69)$$

$$f_s \sim \text{Lognormal}(490; 12,7) \text{ [MPa]}, \quad (6.70)$$

$$q \sim \Gamma(3250; 0,01) \text{ [kN/m]}, \quad (6.71)$$

$$N \sim \Gamma(148; 0,05) \text{ [kN]}. \quad (6.72)$$

Hustoty pravděpodobností jsou na [Obr. 14](#), [Obr. 15](#) z [odst. 6.2.1](#) a [Obr. 33](#), [Obr. 34](#) z [odst. 6.3.1](#).

S hodnotou pevnosti betonu  $f_c$  je opět spojena i hodnota jeho modulu pružnosti  $E_c$  prostřednictvím Hermitovské interpolace a [Tab. 6.11](#).

### 6.4.2. Inicializace výpočtu

Ve výpočtu je použito celkem 16 inicializačních scénářů. Z toho je 6 zvoleno specificky a 10 metodou LHS na síti ekvidistantních bodů. Celá volba inicializačních scénářů je ekvivalentem [odst. 6.2.2](#). Výčet inicializačních scénářů včetně příslušných hodnot účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP je v [Tab. 6.16](#).

### 6.4.3. Iterační postup

Proběhly celkem 3 iterace. Výčet iteračních scénářů včetně příslušných hodnot účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP je v [Tab. 6.17](#).

Tabulka 6.16: Hodnoty  $f_c$ ,  $f_s$ ,  $q$ ,  $N$  určující 16 inicializačních scénářů. Příslušné hodnoty účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP těmito scénáři.

$k$	$f_{c,k}^{\text{init}}$ [MPa]	$f_{s,k}^{\text{init}}$ [MPa]	$q_k^{\text{init}}$ [kN/m]	$N_k^{\text{init}}$ [kN]	$f_k^{\text{init}}$ [Kč]	$p_{Uk}^{\text{init}}$ [%]	$p_{Pk}^{\text{init}}$ [%]
1	29,8256	529,7897	30,3783	7,3665	3947,7	0,0002	0,0001
2	31,5237	519,0533	34,7113	5,8234	4415,1	72,9298	72,9298
3	28,1276	476,1078	31,8226	9,9384	4155,6	53,0378	44,3482
4	34,9197	443,8987	33,2670	8,9096	4193,9	99,9850	87,2229
5	36,6177	486,8442	33,7484	5,3090	4228,6	97,6883	97,2453
6	33,2217	497,5806	32,3041	6,8521	4113,9	29,4819	22,0295
7	38,3157	508,3169	31,3412	6,3378	3928,2	1,4216	0,0740
8	40,0137	540,5261	34,2298	8,3953	4203,6	3,5008	3,4942
9	43,4097	454,6351	32,7855	7,8809	4000,9	98,9591	5,4408
10	41,7117	465,3714	30,8598	9,4240	3812,5	25,8443	0,0017
11	28,1276	443,8987	34,7113	5,3090	4514,3	100,0000	100,0000
12	28,1276	443,8987	34,7113	9,9384	4493,8	100,0000	100,0000
13	28,1276	476,1078	34,7113	5,3090	4510,3	99,9864	99,9864
14	28,1276	476,1078	34,7113	9,9384	4489,9	99,7642	99,7642
15	31,5237	443,8987	34,7113	5,3090	4426,2	100,0000	99,9991
16	31,5237	443,8987	34,7113	9,9384	4406,6	100,0000	99,9968

Tabulka 6.17: Hodnoty  $f_c$ ,  $f_s$ ,  $q$ ,  $N$  postupně určující všechny 3 iterační scénáře. Příslušné hodnoty účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP těmito scénáři.

$l$	$f_{c,l}^{\text{iter}}$ [MPa]	$f_{s,l}^{\text{iter}}$ [MPa]	$q_l^{\text{iter}}$ [kN/m]	$N_l^{\text{iter}}$ [kN]	$f_l^{\text{iter}}$ [Kč]	$p_{Ul}^{\text{iter}}$ [%]	$p_{Pl}^{\text{iter}}$ [%]
1	35,4766	443,8987	33,7822	5,3090	4257,4	99,9998	97,7453
2	36,6693	443,8987	33,7649	5,3090	4234,9	99,9998	95,4207
3	37,3509	443,8987	33,7583	5,3090	4222,4	99,9998	93,4374

### 6.4.4. Řešení příkladu

Řešením příkladu jsou hodnoty návrhových proměnných získané deterministickou optimalizací scénáře

$$\begin{aligned} \xi_3^{\text{iter}} &= (f_{c,3}^{\text{iter}}; f_{s,3}^{\text{iter}}, q_3^{\text{iter}}, N_3^{\text{iter}}) = \\ &= (37,3509 \text{ MPa}; 443,8987 \text{ MPa}; 33,7583 \text{ kN/m}; 5,3090 \text{ kN}). \end{aligned} \quad (6.73)$$

Tyto hodnoty ve všech deseti konečných prvcích jsou uvedeny v [Tab. 6.18](#). Při daném zaokrouhlování je řešení dokonale symetrické.

Tabulka 6.18: Hodnoty návrhových proměnných získané deterministickou optimalizací scénáře  $\xi_3^{\text{iter}}$  z poslední iterace a tedy řešení příkladu.

k. p.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$
$b_1$ [mm]	200	377	559	715	848	848	715	559	377	200
$b_2$ [mm]	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$b_3$ [mm]	617	395	560	700	811	811	700	560	395	617
$h_1$ [mm]	150	100	100	100	100	100	100	100	100	150
$h_2$ [mm]	100	150	150	150	150	150	150	150	150	100
$h_3$ [mm]	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$A_{s1}$ [mm <sup>2</sup> ]	101	107	142	172	197	197	172	142	107	101
$A_{s3}$ [mm <sup>2</sup> ]	317	1323	2064	2691	3190	3190	2691	2064	1323	317

Celá inicializační část trvala přibližně hodinu a půl (přesně 5 463 sekund). Celá iterační část pak trvala přibližně stejně dlouho (přesně 5 297 sekund).

### 6.4.5. Verifikace správnosti výsledku

Pravděpodobnosti splnění MSÚ a MSP z optimalizace jsou verifikovány analogicky jako v [odst. 6.2.6](#). Výsledky verifikace jsou v [Tab. 6.19](#).

Tabulka 6.19: Tabulka výsledků testování pro verifikaci pravděpodobností z optimalizace, kde  $n_t$  je počet testovaných scénářů,  $p_U$  a  $p_P$  jsou zjištěné hodnoty pravděpodobností splnění MSÚ a MSP. V dolních řádcích jsou výsledky pravděpodobností z optimalizace a hodnoty předepsaných pravděpodobnostních podmínek.

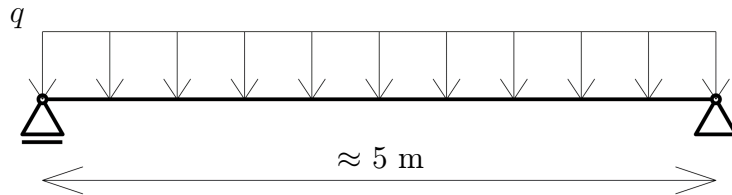
		$p_U$ [%]		$p_P$ [%]	
		1	2	1	2
$n_t$	test #				
	1000	99,9999	99,9999	94,1866	96,0736
	2000	99,9997	99,9999	93,7188	92,1773
	4000	99,9999	99,9999	92,9473	94,2380
	8000	99,9998	99,9999	92,8323	93,2951
výsledek optimalizace		99,9998		93,4374	
podmínky ze zadání úlohy		99,99277		93,31928	

## 6.5. Společné zadání pro příklady 4 až 6

Následují 3 příklady, kde bude náhodnost uvažována v zatížení a délce nosníku a následně i jeho výšce a šířce. Příklady se opět budou lišit pouze tím, které proměnné budou náhodné a které deterministické. Kromě toho je jejich zadání společné, jak je uvedeno v odst. 6.5.1. Dílčí varianty zadání pak budou uvedeny přímo v zadání jednotlivých příkladů v odst. 6.6.1, odst. 6.7.1 a odst. 6.8.1.

### 6.5.1. Společné zadání

Úkolem je pomocí stochastické optimalizace navrhnout přibližně 5 m dlouhý nosník (délka je náhodnou veličinou) zatížený spojitým zatížením  $q$  dle Obr. 35.



Obrázek 35: Schéma nosníku (délka je náhodná veličina, viz dále).

Bude tedy opět řešena optimalizační úloha (5.1) až (5.4)

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad \text{za podmínek:} \quad (6.74)$$

$$P \left( \min_{r=1, \dots, n_r} [R_r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) - L_r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})] \geq 0 \right) \geq p_{\text{MSU}}, \quad (6.75)$$

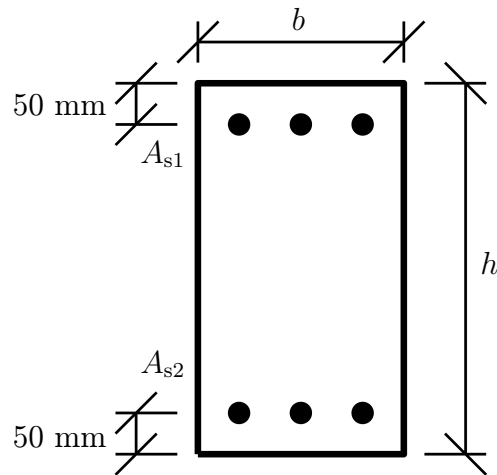
$$P \left( \min_{s=1, \dots, n_s} [w_{\text{max}} - w_s(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})] \geq 0 \right) \geq p_{\text{MSP}}, \quad (6.76)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{C}, \quad (6.77)$$

respektive prostřednictvím navrženého heuristického algoritmu úloha (5.8) až (5.15), viz odst. 5.2.1. Dílčí členy tohoto zápisu pro daný příklad jsou uvedeny dále.

#### 6.5.1.1. Průřez nosníku

Očekávaný tvar průřezu nosníku je na Obr. 36 a je popsán čtyřmi proměnnými  $b$ ,  $h$ ,  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$ . První dvě proměnné popisují tvar průřezu, poslední dvě popisují plochu ocelové výztuže. V závislosti na variantě příkladu budou tyto proměnné představovat optimali-



Obrázek 36: Průřez nosníku ( $A_{s1}$   $A_{s2}$  označuje příslušnou plochu ocelové výztuže).

zací navrhované proměnné. Vektory návrhových veličin  $\mathbf{x}$  tak budou upřesněny přímo v zadání jednotlivých příkladů v [odst. 6.6.1](#), [odst. 6.7.1](#) a [odst. 6.8.1](#).

### 6.5.1.2. Účelová funkce $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$

Účelovou funkcí je cena nosníku daná rovnicí (4.5),

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = V_c(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \times C_{cv} + W_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \times C_{sw}, \quad (6.78)$$

kde předepsané ceny betonu a oceli jsou

$$C_{cv} = 2500 \text{ Kč za m}^3 \text{ betonu}, \quad (6.79)$$

$$C_{sw} = 30 \text{ Kč za kg oceli}. \quad (6.80)$$

### 6.5.1.3. Vektor náhodných veličin $\xi$

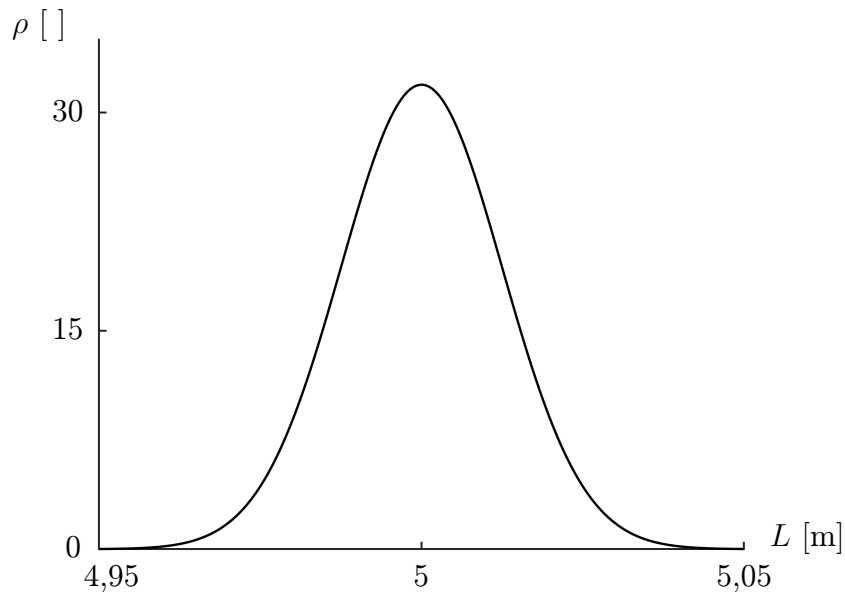
Vektor vstupních náhodných veličin se bude lišit podle varianty zadání. Jednotlivé varianty jsou pak přímo v zadání jednotlivých příkladů v [odst. 6.6.1](#), [odst. 6.7.1](#) a [odst. 6.8.1](#).

Ve všech variantách však náhodnou veličinou bude spojitě zatížení  $q$  a délka nosníku  $L$ , viz [Obr. 35](#). Zatížení  $q$  má gama rozdělení a délka  $L$  normální rozdělení s parametry

$$q \sim \Gamma(3250; 0,01) \text{ [kN/m]}, \quad (6.81)$$

$$L \sim N(5; 0,0125) \text{ [m]}. \quad (6.82)$$

Hustota pravděpodobnosti  $q$  je stejná jako v [odst. 6.2.1](#) a je na [Obr. 14](#), hustota pravděpodobnosti  $L$  je na [Obr. 37](#).



Obrázek 37: Hustota pravděpodobnosti délky nosníku  $L$ .

#### 6.5.1.4. Vektor vstupů $v$

Vektor  $v$  obsahuje další vstupní hodnoty úlohy. I tento se bude lišit dle varianty zadání, které jsou k nalezení přímo v zadání jednotlivých příkladů v [odst. 6.6.1](#), [odst. 6.7.1](#) a [odst. 6.8.1](#). Zde budou vyjmenovány společné vstupy.

#### Parametry nosníku

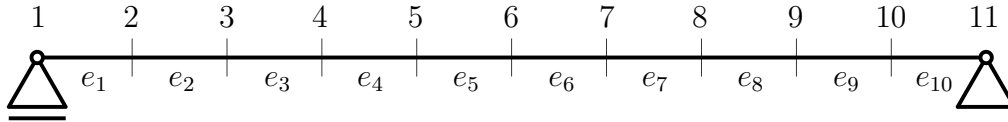
Pro účely výpočtu metodou konečných prvků je nosník rozdělen na 10 konečných prvků (viz [Obr. 38](#))

$$e_i, \quad i = 1, \dots, 10, \quad (6.83)$$

každý o délce

$$d_i = 0,5 \text{ m}. \quad (6.84)$$





Obrázek 38: Dělení nosníku na konečné prvky  $e_i$ , číslování uzlů konečných prvků.

Vzhledem k vazbám jimiž je nosník upevněn (viz Obr. 35, Obr. 38) jsou pak předepsané okrajové podmínky

$$w_1 = 0 \quad (\text{nulový průhyb v uzlu 1}), \quad (6.85)$$

$$w_{11} = 0 \quad (\text{nulový průhyb v uzlu 11}), \quad (6.86)$$

$$u_{11} = 0 \quad (\text{nulové horizontální posunutí v uzlu 11}). \quad (6.87)$$

### Materiálové charakteristiky

Beton je třídy C25/30, čemuž odpovídá jeho pevnost  $f_c$  a modul pružnosti  $E_c$ ,

$$f_c = 30 \text{ MPa}, \quad E_c = 31 \text{ GPa}. \quad (6.88)$$

Ocel je třídy B500B, čemuž odpovídá její pevnost a modul pružnosti

$$f_s = 500 \text{ MPa}, \quad E_s = 20 \text{ GPa}. \quad (6.89)$$

Objemové hmotnosti betonu a oceli se uvažují tradičně jako (respektive)

$$\rho_c = 2400 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3. \quad (6.90)$$

### Mezní hodnoty přetvoření a průhybu

Deterministické části podmínek (6.2) a (6.3) jsou stejné jako ve společném zadání z odst. 6.1.1. Pro MSÚ jsou konečná omezení přetvoření betonu a oceli

$$\epsilon_{c,\min} = -3,5 \text{ mm/m}, \quad (6.91)$$

$$\epsilon_{s,\max} = 10 \text{ mm/m}. \quad (6.92)$$

Pro MSP je pak konečné omezení průhybu dáno hodnotou

$$w_{\max} = 10 \text{ mm}. \quad (6.93)$$

**6.5.1.5. Omezující hodnoty pravděpodobností  $p_{\text{MSU}}$ ,  $p_{\text{MSP}}$** 

Hodnoty pravděpodobností  $p_{\text{MSU}}$ ,  $p_{\text{MSP}}$  jsou opět stejné jako ve společném zadání z odst. 6.1.1 (pro referenční dobu 50 let a střední třídu následků)

$$\beta_{\text{MSU}} = 3,8 \implies p_{\text{MSU}} = 99,99277 \%, \quad (6.94)$$

$$\beta_{\text{MSP}} = 1,5 \implies p_{\text{MSP}} = 93,31928 \%. \quad (6.95)$$

**6.5.1.6. Omezující podmínky (6.77)**

Na výšku průřezu je kladeno omezení

$$h \leq 450 \text{ mm}. \quad (6.96)$$

Pro šířku  $b$  pak musí být splněna podmínka

$$b \geq 2 \times 50 + \frac{4A_{sk}}{\pi 20^2} \times (50 + 20), \quad k = 1, 2. \quad (6.97)$$

Tato podmínka říká, že šířka průřezu betonu musí pojmout horní i dolní plochu ocelové výztuže; předpokládá se ocelová výztuž z tyčí o průměru 20 mm, s minimální vzdáleností mezi středem ocelových tyčí a povrchem betonu 50 mm a minimální vzdáleností mezi dvěma povrchy ocelových tyčí stejně tak 50 mm. Podmínka je koncipována tak, že v průřezu je vždy dostatek místa pro jednu další tyč, viz (6.28), odst. 6.1.1.6.

Plocha výztuže je vůči ploše betonu omezena ještě podmínkami maximálního a minimálního vyztužení ve tvaru

$$A_{s1} + A_{s2} \leq 0,04 \times A_c, \quad (6.98)$$

$$A_{sk} \geq 0,001 \times A_c, \quad k = 1, 2, \quad (6.99)$$

kde  $A_c$  je plocha průřezu nosníku.

Krytí výztuže je stanoveno na 50 mm ke středu výztuže, viz Obr. 36.

## 6.6. Př. 4: Náhodnost v zatížení a délce

Ve čtvrtém příkladu se náhodnost uvažuje v zatížení a délce nosníku.

### 6.6.1. Zadání příkladu

Příklad je variantou společného zadání z [odst. 6.5.1](#), kde náhodnými veličinami jsou tam již zmíněné spojitě zatížení  $q$  a délka  $L$ . Platí

$$\boldsymbol{\xi} = (q, L), \quad (6.100)$$

kde

$$q \sim \Gamma(3250; 0,01) \text{ [kN/m]}, \quad (6.101)$$

$$L \sim N(5; 0,0125) \text{ [m]}. \quad (6.102)$$

Hustota pravděpodobnosti  $q$  je na [Obr. 14](#) v [odst. 6.2.1](#) a  $L$  na [Obr. 37](#) v [odst. 6.5.1](#).

Vektor návrhových proměnných je v tomto příkladu představován všemi zmíněnými parametry průřezu, viz [Obr. 36](#) v [odst. 6.5.1](#). Platí

$$\boldsymbol{x} = (b, h, A_{s1}, A_{s2}). \quad (6.103)$$

Hodnoty  $b$  a  $h$  jsou zde společné všem konečným prvkům, zatímco hodnoty  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$  se mohou v dílčích konečných prvcích lišit.

### 6.6.2. Inicializace výpočtu

Ve výpočtu je použito celkem 12 inicializačních scénářů. Z toho 2 jsou zvoleny specificky a 10 metodou LHS na síti ekvidistantních bodů. Celá volba inicializačních scénářů je ekvivalentem [odst. 6.2.2](#). Výčet inicializačních scénářů včetně příslušných hodnot účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP je v [Tab. 6.20](#).

### 6.6.3. Iterační postup

Proběhlo celkem 22 iterací. Výčet iteračních scénářů včetně příslušných hodnot účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP je v [Tab. 6.21](#).

Tabulka 6.20: Hodnoty  $q$ ,  $L$  určující 12 inicializačních scénářů. Příslušné hodnoty účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP těmito scénáři.

$k$	$q_k^{\text{init}}$ [kN/m]	$L_k^{\text{init}}$ [m]	$f_k^{\text{init}}$ [Kč]	$p_{Uk}^{\text{init}}$ [%]	$p_{Pk}^{\text{init}}$ [%]
1	33,7484	5,0158	2939,3	99,2726	99,1638
2	34,2298	4,9525	2806,2	95,7562	75,4413
3	32,3041	5,0053	2795,7	42,0463	40,3960
4	33,2670	5,0369	2958,1	98,4132	98,4102
5	34,7113	4,9842	2928,5	99,9425	99,6034
6	31,8226	5,0264	2812,0	29,9945	29,9728
7	32,7855	4,9947	2806,1	64,0144	57,5597
8	31,3412	4,9631	2615,0	0,2421	0,0605

Tabulka 6.21: Hodnoty  $q$ ,  $L$  postupně určující všech 22 iteračních scénářů. Příslušné hodnoty účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP těmito scénáři.

$l$	$q_l^{\text{iter}}$ [kN/m]	$L_l^{\text{iter}}$ [m]	$f_l^{\text{iter}}$ [Kč]	$p_{Ul}^{\text{iter}}$ [%]	$p_{Pl}^{\text{iter}}$ [%]
1	34,5279	4,9852	2917,0	99,8550	99,2357
2	34,5456	4,9875	2924,7	99,8898	99,4565
3	34,5566	4,9888	2929,1	99,9076	99,5559
4	34,5612	4,9900	2932,8	99,9188	99,6203
5	34,5585	4,9914	2936,4	99,9272	99,6775
6	34,5490	4,9930	2940,2	99,9328	99,7227
7	34,4520	4,9997	2951,0	99,9333	99,8107
8	34,4858	5,0041	2966,0	99,9617	99,9094
9	34,6425	4,9990	2964,2	99,9761	99,9201
10	34,5593	5,0041	2971,7	99,9751	99,9373
11	34,5359	5,0116	2990,7	99,9861	99,9752
12	34,6545	5,0050	2981,7	99,9883	99,9682
13	34,6319	5,0074	2986,8	99,9896	99,9747
14	34,6269	5,0086	2989,8	99,9902	99,9783
15	34,6243	5,0095	2992,0	99,9909	99,9797
16	34,6238	5,0101	2993,8	99,9911	99,9808
17	34,6235	5,0107	2995,3	99,9914	99,9822
18	34,6240	5,0112	2996,7	99,9919	99,9833
19	34,6234	5,0117	2998,1	99,9927	99,9842
20	34,6239	5,0117	2998,2	99,9927	99,9844
21	34,6113	5,0121	2998,2	99,9919	99,9839
22	34,6386	5,0111	2997,8	99,9931	99,9844

### 6.6.4. Řešení příkladu

Řešením příkladu jsou hodnoty návrhových proměnných získané deterministickou optimalizací scénáře

$$\xi_{22}^{\text{iter}} = (q_{22}^{\text{iter}}, L_{22}^{\text{iter}}) = (34,6386 \text{ kN/m}; 5,0111 \text{ m}). \quad (6.104)$$

Jak bylo uvedeno, hodnoty  $b$  a  $h$  jsou pro všechny konečné prvky totožné, a sice

$$b = 237,2318 \text{ mm}, \quad (6.105)$$

$$h = 450,0000 \text{ mm}. \quad (6.106)$$

Hodnoty  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$  ve všech deseti konečných prvcích jsou uvedeny v [Tab. 6.22](#). Při daném zaokrouhlování je řešení dokonale symetrické.

Tabulka 6.22: Hodnoty návrhových proměnných  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$  získané deterministickou optimalizací scénáře  $\xi_{22}^{\text{iter}}$  z poslední iterace a tedy řešení příkladu.

k. p.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$
$A_{s1}$ [mm <sup>2</sup> ]	107	107	107	107	107	107	107	107	107	107
$A_{s2}$ [mm <sup>2</sup> ]	215	933	1521	1916	1916	1916	1916	1521	933	215

Celá inicializační část trvala přibližně 20 minut (přesně 1 139 sekund). Celá iterační část pak přibližně 40 minut (přesně 2 431 sekund).

### 6.6.5. Verifikace správnosti výsledku

Prvaděpodobnosti splnění MSÚ a MSP z optimalizace jsou verifikovány analogicky jako v [odst. 6.2.6](#). Výsledky verifikace jsou v [Tab. 6.23](#).

Tabulka 6.23: Tabulka výsledků testování pro verifikaci pravděpodobností z optimalizace, kde  $n_t$  je počet testovaných scénářů,  $p_U$  a  $p_P$  jsou zjištěné hodnoty pravděpodobností splnění MSÚ a MSP. V dolních řádcích jsou výsledky pravděpodobností z optimalizace a hodnoty předepsaných pravděpodobnostních podmínek.

		$p_U$ [%]		$p_P$ [%]	
		1	2	1	2
$n_t$	test #				
1000		99,9908	99,9939	99,9814	99,9864
2000		99,9905	99,9932	99,9834	99,9855
4000		99,9920	99,9930	99,9830	99,9858
8000		99,9920	99,9930	99,9845	99,9854
výsledek optimalizace		99,9931		99,9844	
podmínky ze zadání úlohy		99,99277		93,31928	

## 6.7. Př. 5: Náhodnost v zatížení, délce, výšce a šířce

V pátém příkladu je oproti předchozímu příkladu náhodnost navíc ještě ve výšce a šířce průřezu.

### 6.7.1. Zadání příkladu

Jedná se o variantu společného zadání z odst. 6.5.1. Náhodnými veličinami jsou kromě spojitého zatížení  $q$  a délky nosníku  $L$  také šířka průřezu  $b$  a výška průřezu  $h$ , viz Obr. 36.

Platí

$$\xi = (q, L, b, h), \quad (6.107)$$

kde

$$q \sim \Gamma(3250; 0,01) \text{ [kN/m]}, \quad (6.108)$$

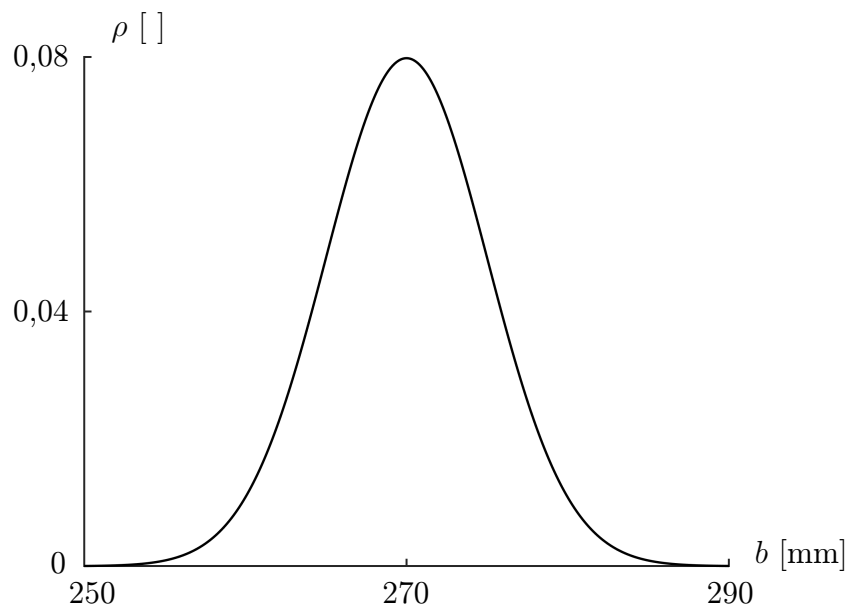
$$L \sim N(5; 0,0125) \text{ [m]}, \quad (6.109)$$

$$b \sim N(270; 5) \text{ [mm]}, \quad (6.110)$$

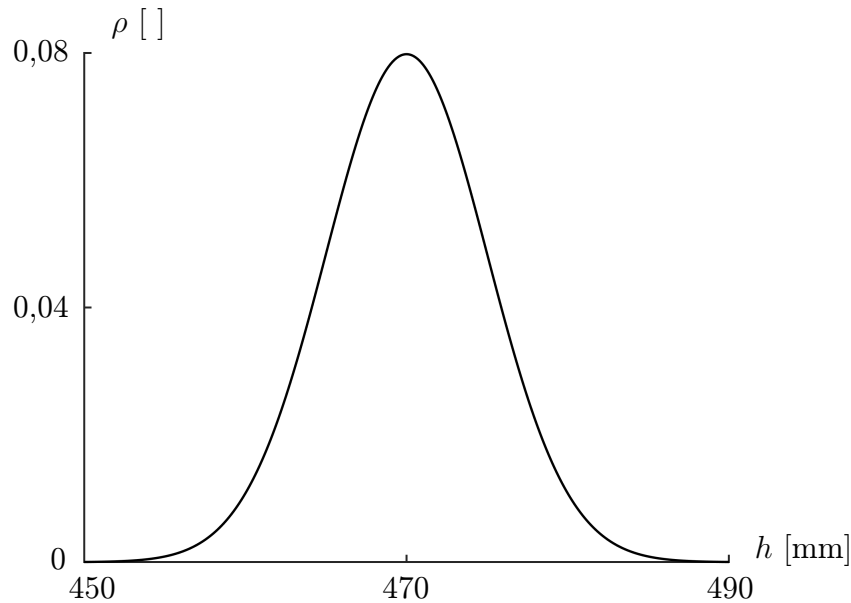
$$h \sim N(470; 5) \text{ [mm]}. \quad (6.111)$$

Hustoty pravděpodobnosti  $q$  je na Obr. 14 v odst. 6.2.1 a  $L$  na Obr. 37 v odst. 6.5.1.

Hustoty pravděpodobností  $b$ ,  $h$  jsou zde na Obr. 39 a Obr. 40.



Obrázek 39: Hustota pravděpodobnosti šířky průřezu  $b$ .

Obrázek 40: Hustota pravděpodobnosti výšky průřezu  $h$ .

V celém matematickém modelu je tedy počítáno s náhodnými hodnotami šířky  $b$  a výšky  $h$ . Platí zde ovšem některé výjimky:

- výpočet hodnoty účelové funkce (6.78), ten probíhá z průměrných hodnot  $b = 270$  mm,  $h = 470$  mm,
- podmínka pro šířku průřezu vzhledem k množství výztuže (6.97), která je vztažena na průměrnou hodnotu šířky  $b = 270$  mm,
- omezující podmínky pro míru vyztužení (6.98), (6.99), kde je plocha průřezu  $A_c$  počítána z průměrných hodnot  $b = 270$  mm,  $h = 470$  mm.

Důvodem těchto výjimek je, že opačná varianta by z praktického hlediska nedávala smysl, respektive po aplikaci záporných odchylek by mohlo docházet k nesmyslnému nesplnění uvedených podmínek.

Vektor návrhových proměnných  $\mathbf{x}$  obsahuje pouze parametry plochy ocelové výztuže, viz Obr. 36 v odst. 6.5.1. Platí

$$\mathbf{x} = (A_{s1}, A_{s2}). \quad (6.112)$$

### 6.7.2. Inicializace výpočtu

Příklad byl náročný na použití regrese a proto je ve výpočtu použito celkem 30 inicializačních scénářů. Z toho 15 je zvoleno specificky a 15 metodou LHS na síti ekvidistantních



bodů. Celá volba inicializačních scénářů je ekvivalentem odst. 6.2.2. Výčet inicializačních scénářů včetně příslušných hodnot účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP je v Tab. 6.24.

Tabulka 6.24: Hodnoty  $q$ ,  $L$ ,  $b$ ,  $h$  určující 30 inicializačních scénářů. Příslušné hodnoty účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP těmito scénáři.

$k$	$q_k^{\text{init}}$ [kN/m]	$L_k^{\text{init}}$ [m]	$b_k^{\text{init}}$ [mm]	$h_k^{\text{init}}$ [mm]	$f_k^{\text{init}}$ [Kč]	$p_{U_k}^{\text{init}}$ [%]	$p_{P_k}^{\text{init}}$ [%]
1	34,4018	4,9729	264,6	453,7	3040,6	99,9937	99,9881
2	30,6878	5,0204	289,0	483,6	2677,7	0,0240	0,0042
3	31,9258	4,9593	261,9	470,0	2756,3	4,3768	3,9505
4	33,7828	5,0475	256,4	456,4	3155,5	99,9977	99,9977
5	32,8543	4,9661	251,0	459,1	2918,2	81,0332	80,9996
6	30,3783	5,0000	259,1	480,9	2684,3	0,0007	0,0007
7	32,5448	5,0339	275,4	464,6	2943,3	92,0012	90,6345
8	32,2353	4,9525	283,6	467,3	2751,8	18,4058	8,7084
9	33,4733	5,0068	270,0	475,4	2854,0	81,2054	55,6653
10	33,1638	5,0407	267,3	478,1	2882,6	79,2258	62,1664
11	31,3068	5,0271	280,9	461,9	2886,0	44,1866	43,9788
12	30,9973	4,9932	272,7	489,0	2632,1	0,0009	0,0001
13	34,7113	5,0136	286,3	486,3	2815,3	94,9464	23,1874
14	34,0923	4,9864	278,1	451,0	3054,8	99,9977	99,9931
15	31,6163	4,9796	253,7	472,7	2767,6	1,8908	1,8420
16	34,7113	5,0475	251,0	451,0	3295,4	100,0000	100,0000
17	34,7113	5,0475	251,0	470,0	3074,4	99,9918	99,9812
18	34,7113	5,0475	270,0	451,0	3244,2	100,0000	100,0000
19	34,7113	5,0000	251,0	451,0	3181,1	100,0000	100,0000
20	34,0000	5,0475	251,0	451,0	3248,5	100,0000	100,0000
21	34,7113	5,0000	270,0	470,0	2943,7	99,8611	97,0204
22	34,0000	5,0475	270,0	470,0	3001,2	99,8586	99,1611
23	34,0000	5,0000	251,0	470,0	2941,7	97,1053	95,8241
24	34,0000	5,0000	270,0	451,0	3094,5	99,9984	99,9981
25	34,7113	5,0475	270,0	470,0	3037,2	99,9955	99,8676
26	34,7113	5,0000	251,0	470,0	2977,2	99,7834	99,2469
27	34,7113	5,0000	270,0	451,0	3135,2	100,0000	100,0000
28	34,0000	5,0475	251,0	470,0	3036,2	99,7793	99,7282
29	34,0000	5,0475	270,0	451,0	3200,3	100,0000	100,0000
30	34,0000	5,0000	251,0	451,0	3137,8	99,9971	99,9971

### 6.7.3. Iterační postup

Proběhlo celkem 20 iterací. Výčet iteračních scénářů včetně příslušných hodnot účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP je v Tab. 6.25.

Tabulka 6.25: Hodnoty  $q$ ,  $L$ ,  $b$ ,  $h$  postupně určující všech 20 iteračních scénářů. Příslušné hodnoty účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP těmito scénáři.

$l$	$q_l^{\text{iter}}$ [kN/m]	$L_l^{\text{iter}}$ [m]	$b_l^{\text{iter}}$ [mm]	$h_l^{\text{iter}}$ [mm]	$f_l^{\text{iter}}$ [Kč]	$p_{\text{Ul}}^{\text{iter}}$ [%]	$p_{\text{Pl}}^{\text{iter}}$ [%]
1	34,2459	4,9736	289,0	469,1	2855,1	98,2881	70,4179
2	34,1752	4,9848	268,7	468,3	2906,6	98,4402	91,5450
3	34,2708	4,9968	280,7	465,5	2940,3	99,8315	96,8764
4	34,3009	4,9950	287,3	464,4	2938,4	99,9091	96,7729
5	34,4236	4,9851	289,0	460,9	2954,9	99,9757	98,7445
6	34,4309	4,9864	289,0	460,3	2962,6	99,9829	99,0827
7	34,4549	4,9861	289,0	459,9	2967,1	99,9856	99,2617
8	34,4458	4,9872	289,0	459,8	2969,9	99,9871	99,3372
9	34,5375	4,9847	289,0	459,5	2972,3	99,9916	99,4517
10	34,4928	4,9858	289,0	459,5	2972,6	99,9905	99,4333
11	34,6233	4,9846	289,0	459,8	2973,5	99,9942	99,4859
12	34,7113	4,9839	289,0	460,3	2971,7	99,9952	99,4441
13	34,7113	4,9815	289,0	460,0	2969,8	99,9946	99,4331
14	34,7113	4,9752	289,0	458,8	2968,1	99,9949	99,4892
15	34,5730	4,9525	289,0	454,0	2961,8	99,9921	99,6482
16	34,7113	4,9574	289,0	455,6	2963,5	99,9954	99,6224
17	34,7113	4,9549	289,0	455,2	2962,0	99,9948	99,6230
18	34,7113	4,9525	289,0	454,9	2960,2	99,9945	99,6151
19	34,7113	4,9525	289,0	455,1	2958,1	99,9942	99,5722
20	34,7113	4,9525	289,0	455,4	2956,1	99,9933	99,5299

### 6.7.4. Řešení příkladu

Řešením příkladu jsou hodnoty návrhových proměnných získané deterministickou optimalizací scénáře

$$\begin{aligned} \xi_{20}^{\text{iter}} &= (q_{20}^{\text{iter}}, L_{20}^{\text{iter}}, b_{20}^{\text{iter}}, h_{20}^{\text{iter}}) = \\ &= (34,7113 \text{ kN/m}; 4,9525 \text{ m}; 289,0 \text{ mm}; 455,4 \text{ mm}). \end{aligned} \quad (6.113)$$

Navržené hodnoty  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$  ve všech deseti konečných prvcích jsou uvedeny v Tab. 6.26. Při daném zaokrouhlování je řešení dokonale symetrické.

Tabulka 6.26: Hodnoty návrhových proměnných získané deterministickou optimalizací scénáře  $\xi_{20}^{\text{iter}}$  z poslední iterace a tedy řešení příkladu.

k. p.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$
$A_{s1}$ [mm <sup>2</sup> ]	127	127	127	127	127	127	127	127	127	127
$A_{s1}$ [mm <sup>2</sup> ]	209	680	1124	1498	1792	1792	1498	1124	680	209

Celá inicializační část trvala přibližně hodinu a čtvrt (přesně 4 343 sekund). Celá iterační část pak přibližně dvě hodiny (přesně 7 040 sekund).

### 6.7.5. Verifikace správnosti výsledku

Pravděpodobnosti splnění MSÚ a MSP z optimalizace jsou verifikovány analogicky jako v odst. 6.2.6. Výsledky verifikace jsou v Tab. 6.27.

Tabulka 6.27: Tabulka výsledků testování pro verifikaci pravděpodobností z optimalizace, kde  $n_t$  je počet testovaných scénářů,  $p_U$  a  $p_P$  jsou zjištěné hodnoty pravděpodobností splnění MSÚ a MSP. V dolních řádcích jsou výsledky pravděpodobností z optimalizace a hodnoty předepsaných pravděpodobnostních podmínek.

test # $n_t$	$p_U$ [%]		$p_P$ [%]	
	1	2	1	2
1000	99,9872	99,9903	99,4544	99,7700
2000	99,9921	99,9927	99,7332	99,7922
4000	99,9943	99,9919	99,7806	99,6888
8000	99,9942	99,9939	99,7616	99,6292
výsledek optimalizace	99,9933		99,5299	
podmínky ze zadání úlohy	99,99277		93,31928	

## 6.8. Př. 6: Náhodnost v zatížení, délce a odchylnkách výšky a šířky

V šestém příkladu jsou výška a šířka průřezu návrhovými veličinami, současně jsou ale pod vlivem náhodné odchylky. Náhodnost v zatížení a délce zůstává beze změny.

### 6.8.1. Zadání příkladu

Jedná se o variantu společného zadání z odst. 6.5.1. Šířka průřezu  $b$  a výška průřezu  $h$  jsou návrhovými veličinami spolu s plochou ocelové výztuže, viz Obr. 36 v odst. 6.5.1. Platí

$$\mathbf{x} = (b, h, A_{s1}, A_{s2}). \quad (6.114)$$

Hodnoty  $b$  a  $h$  jsou opět společné pro všechny konečné prvky, hodnoty ploch ocelové výztuže  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$  se v jednotlivých konečných prvcích mohou lišit.

Návrhové veličiny  $b$  a  $h$  budou ale současně náhodně odchýleny. Náhodnými veličinami jsou tak kromě spojitého zatížení  $q$  a délky nosníku  $L$  také odchylka od návrhové hodnoty šířky průřezu  $\Delta b$  a výšky průřezu  $\Delta h$ . Platí

$$\boldsymbol{\xi} = (q, L, \Delta b, \Delta h), \quad (6.115)$$

kde

$$q \sim \Gamma(3250; 0,01) \text{ [kN/m]}, \quad (6.116)$$

$$L \sim N(5; 0,0125) \text{ [m]}, \quad (6.117)$$

$$\Delta b \sim N(0; 5) \text{ [mm]}, \quad (6.118)$$

$$\Delta h \sim N(0; 5) \text{ [mm]}. \quad (6.119)$$

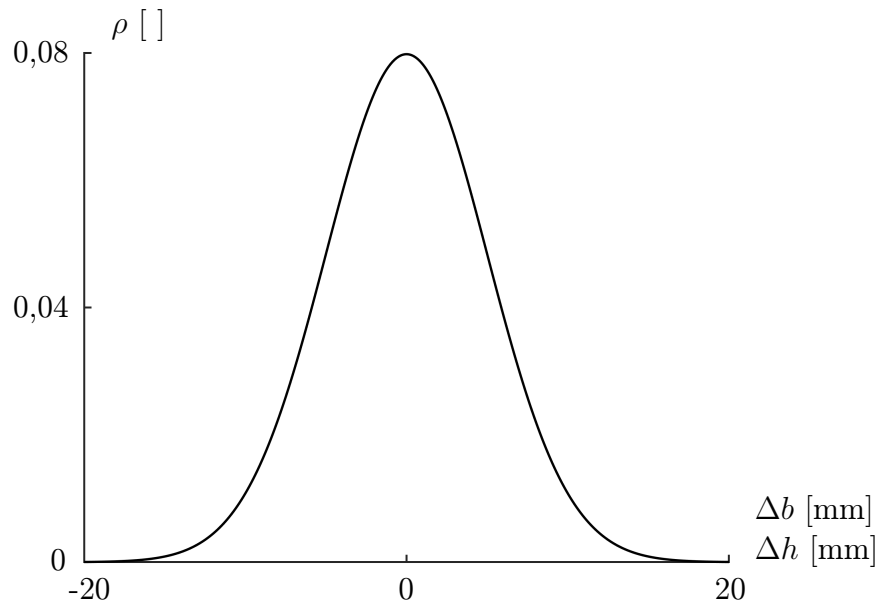
Hustota pravděpodobnosti  $q$  je na Obr. 14 v odst. 6.2.1 a  $L$  na Obr. 37 v odst. 6.5.1. Hustoty pravděpodobností  $\Delta b$ ,  $\Delta h$  jsou zde na Obr. 41 (rozdělení je pro obě veličiny stejné).

V celém matematickém modelu je pak místo šířky  $b$  a výšky  $h$  počítáno s odchýlenými hodnotami  $b + \Delta b$ ,  $h + \Delta h$ . Platí zde ovšem některé výjimky:

- výpočet hodnoty účelové funkce (6.78), zde jsou nadále používány návrhové hodnoty  $b$ ,  $h$ ,

- podmínka pro šířku průřezu vzhledem k množství výztuže (6.97), která je nadále vztažena na návrhovou hodnotu šířky  $b$ ,
- omezující podmínky pro míru vyztužení (6.98), (6.99), kde je plocha průřezu  $A_c$  počítána z návrhových hodnot  $b$ ,  $h$ .

Důvodem těchto výjimek je, že opačná varianta by z praktického hlediska nedávala smysl, respektive po aplikaci záporných odchylek by mohlo docházet k nesmyslnému nesplnění uvedených podmínek.



Obrázek 41: Hustota pravděpodobnosti odchylky šířky průřezu  $\Delta b$  a odchylky výšky průřezu  $\Delta h$  (hustota pravděpodobnosti obou veličin je stejná).

### 6.8.2. Inicializace výpočtu

Analogicky jako předchozí příklad byl i tento náročný na použití regrese a proto je ve výpočtu použito celkem 29 inicializačních scénářů. Z toho 9 je zvoleno specificky a 20 metodou LHS na síti ekvidistantních bodů. Celá volba inicializačních scénářů je ekvivalentem odst. 6.2.2. Výčet inicializačních scénářů včetně příslušných hodnot účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP je v Tab. 6.28.

### 6.8.3. Iterační postup

Proběhlo celkem 5 iterací. Výčet iteračních scénářů včetně příslušných hodnot účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP je v Tab. 6.29.

Tabulka 6.28: Hodnoty  $q$ ,  $L$ ,  $\Delta b$ ,  $\Delta h$  určující 29 inicializačních scénářů. Příslušné hodnoty účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP těmito scénáři.

$k$	$q_k^{init}$ [kN/m]	$L_k^{init}$ [m]	$\Delta b_k^{init}$ [mm]	$\Delta h_k^{init}$ [mm]	$f_k^{init}$ [Kč]	$p_{U_k}^{init}$ [%]	$p_{P_k}^{init}$ [%]
1	33,3430	5,0025	3,0	17,0	2620,3	24,9119	2,0770
2	31,9747	4,9825	-15,0	13,0	2591,5	0,4611	0,3520
3	31,7466	5,0225	5,0	-3,0	2822,1	40,8981	38,6715
4	34,2552	4,9725	-13,0	-7,0	3023,8	100,0000	99,3519
5	33,5710	5,0275	-3,0	19,0	2692,4	43,7459	8,7362
6	34,7113	4,9875	11,0	-13,0	3110,9	99,9993	99,9436
7	34,0271	5,0425	17,0	5,0	2894,5	99,2459	77,9967
8	31,0625	5,0475	-5,0	11,0	2667,9	0,7925	0,7225
9	31,2905	5,0325	-9,0	-19,0	3127,5	87,0728	87,0728
10	33,7991	5,0375	7,0	-17,0	3270,9	99,9996	99,9994
11	32,4308	4,9925	9,0	7,0	2642,1	16,4686	4,2769
12	30,8344	4,9525	13,0	-11,0	2659,0	3,1961	2,9519
13	30,3783	4,9625	19,0	-1,0	2492,5	0,0244	0,0118
14	30,6064	5,0125	-11,0	3,0	2678,5	0,2066	0,2061
15	31,5186	4,9575	-17,0	-15,0	2902,3	98,6951	91,3609
16	33,1149	5,0175	-7,0	-5,0	2999,4	95,6512	95,1342
17	32,6588	4,9975	-19,0	9,0	2748,0	21,5677	18,7389
18	34,4832	4,9775	1,0	1,0	2873,4	98,2413	82,8158
19	32,8869	4,9675	15,0	-9,0	2824,1	85,0550	68,4335
20	32,2027	5,0075	-1,0	15,0	2590,3	2,3846	0,6421
21	34,7113	5,0475	-19,0	-19,0	3540,2	100,0000	100,0000
22	34,7113	5,0475	-19,0	0,0	3187,3	100,0000	99,9847
23	34,7113	5,0475	0,0	-19,0	3455,6	100,0000	100,0000
24	34,7113	5,0000	-19,0	-19,0	3385,3	100,0000	100,0000
25	34,0000	5,0475	-19,0	-19,0	3472,6	100,0000	100,0000
26	34,7113	5,0000	0,0	0,0	2972,4	99,8473	96,5778
27	34,0000	5,0475	0,0	0,0	3048,3	99,8374	98,8379
28	34,0000	5,0000	-19,0	0,0	2992,8	100,0000	97,8065
29	34,0000	5,0000	0,0	-19,0	3239,1	99,9988	99,9986

Tabulka 6.29: Hodnoty  $q$ ,  $L$ ,  $\Delta b$ ,  $\Delta h$  postupně určující všech 5 iteračních scénářů. Příslušné hodnoty účelové funkce a pravděpodobností splnění MSÚ, respektive MSÚ a MSP těmito scénáři.

$l$	$q_l^{\text{iter}}$ [kN/m]	$L_l^{\text{iter}}$ [m]	$\Delta b_l^{\text{iter}}$ [mm]	$\Delta h_l^{\text{iter}}$ [mm]	$f_l^{\text{iter}}$ [Kč]	$p_{U\check{U}}^{\text{iter}}$ [%]	$p_{P\check{I}}^{\text{iter}}$ [%]
1	34,7113	5,0092	19,0	1,0	2911,5	99,9167	87,5645
2	32,8800	4,9730	-19,0	-5,3	2911,8	99,9822	91,3562
3	32,7562	4,9668	-19,0	-7,6	2920,3	99,9930	93,1683
4	32,7207	4,9672	-19,0	-7,7	2921,1	99,9923	93,2503
5	32,8390	4,9652	-19,0	-7,5	2921,2	99,9964	93,4195

#### 6.8.4. Řešení příkladu

Řešením příkladu jsou hodnoty návrhových proměnných získané deterministickou optimalizací scénáře

$$\begin{aligned} \xi_5^{\text{iter}} &= (q_5^{\text{iter}}, L_5^{\text{iter}}, \Delta b_5^{\text{iter}}, \Delta h_5^{\text{iter}}) = \\ &= (32,8390 \text{ kN/m}; 4,9652 \text{ m}; -19,0 \text{ mm}; -7,5 \text{ mm}). \end{aligned} \quad (6.120)$$

Jak bylo uvedeno, hodnoty  $b$  a  $h$  jsou pro všechny konečné prvky totožné, a sice

$$b = 234,8279 \text{ mm}, \quad (6.121)$$

$$h = 450,0000 \text{ mm}. \quad (6.122)$$

Navržené hodnoty  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$  ve všech deseti konečných prvcích jsou uvedeny v Tab. 6.30. Při daném zaokrouhlování je řešení dokonale symetrické.

Tabulka 6.30: Hodnoty návrhových proměnných získané deterministickou optimalizací scénáře  $\xi_5^{\text{iter}}$  z poslední iterace a tedy řešení příkladu.

k. p.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$
$A_{s1}$ [mm <sup>2</sup> ]	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106
$A_{s2}$ [mm <sup>2</sup> ]	219	902	1467	1883	1883	1883	1883	1467	902	219

Celá inicializační část trvala o něco déle než hodinu (přesně 4 256 sekund). Celá iterační část pak necelé půl hodiny (přesně 1 543 sekund).

### 6.8.5. Verifikace správnosti výsledku

Pravděpodobnosti splnění MSÚ a MSP z optimalizace jsou verifikovány analogicky jako v odst. 6.2.6. Výsledky verifikace jsou v Tab. 6.31.

Tabulka 6.31: Tabulka výsledků testování pro verifikaci pravděpodobností z optimalizace, kde  $n_t$  je počet testovaných scénářů,  $p_U$  a  $p_P$  jsou zjištěné hodnoty pravděpodobností splnění MSÚ a MSP. V dolních řádcích jsou výsledky pravděpodobností z optimalizace a hodnoty předepsaných pravděpodobnostních podmínek.

test # $n_t$	$p_U$ [%]		$p_P$ [%]	
	1	2	1	2
1000	99,9966	99,9997	96,0405	93,9148
2000	99,9963	99,9981	94,8221	94,8013
4000	99,9967	99,9976	94,9458	94,4014
8000	99,9965	99,9959	94,4142	93,0923
výsledek optimalizace	99,9964		93,4195	
podmínky ze zadání úlohy	99,99277		93,31928	



## 7. Závěr

Hlavním cílem práce bylo navrhnout, vytvořit a ověřit algoritmus pro stochastickou optimalizaci průřezových charakteristik rovinného rámu za daných podmínek. Práce navázala na práce J. Plška a I. Laníkové soustředěné na deterministickou optimalizaci a byly v ní stanoveny tři dílčí cíle (viz [kap. 2](#)):

1. Reformulovat matematický model deterministické strukturální optimalizace do stochastické podoby záměnou některých deterministických veličin za stochastické.
2. Vytvořit algoritmus pro efektivní a současně dostatečně přesné vyhodnocování pravděpodobnosti poruchy na stochastickém modelu rovinného rámu.
3. Vytvořit algoritmus, který při stanovení pravděpodobnosti poruchy dle bodu 2, bude optimalizovat parametry průřezů řešeného rámu.

Splnění prvního dílčího cíle reformulace matematického modelu spočívalo v zavedení stochastických veličin namísto některých deterministických a následném provedení patřičných úprav matematického modelu. Po teoretické stránce byl toto poměrně jednoduchý úkol a jeho výstup je uveden v [odst. 5.1](#). V praxi byly jeho základem (deterministickou formulací) programy J. Plška a I. Laníkové v Delphi a GAMS, přičemž základní úloha deterministické optimalizace běžela v GAMS a využívala některé další knihovny vytvořené v Delphi. Tyto programy byly patřičně upraveny, v GAMS byl vytvořen nový program pro paralelní simulování scénářů (využívající příslušný nástroj GAMS) a byl vytvořen nový zastřešující program v MATLAB, který pracuje se stochastickou úrovní úlohy a za účelem deterministické optimalizace nebo simulování scénářů se odkazuje na GAMS. Díky tomuto rozhraní pak byly oba další dílčí cíle řešeny kompletně v MATLAB (pouze se zmíněným odvoláváním se na GAMS).

Způsob splnění druhého dílčího cíle vytvořit algoritmus pro vyhodnocování pravděpodobnosti poruchy je uveden v [odst. 5.2.4](#). Byl vytvořen algoritmus, který za využívání simulací prováděných v GAMS učí neuronovou síť průběh přetvoření betonu, přetvoření oceli a průhybu v závislosti na daných stochastických veličinách. Z prostého porovnání hodnot je pak dopočítána pravděpodobnost poruchy. Tato metoda byla vyzkoušena a ověřována na řešených příkladech. Největším úskalím metody pravděpodobně bude klasické „prokletí dimenzionality“ (s rostoucím počtem stochastických veličin – dimenze úlohy – bude algoritmus méně a méně efektivní). Metoda vykazuje dobrou funkčnost pro řešené příklady až o 4 náhodných veličinách, v tomto směru její potenciál nebyl dále zkoušen. Dále všechny řešené příklady mají společné to, že jejich křivka (pro dimenzi 2;

pro vyšší dimenze pak plocha/nadplocha), která rozděluje vyhovující a nevhovující scénáře má jednoduchý tvar. Dalším úskalím tedy mohou být úlohy, kde má tato křivka (plocha/nadplocha) složitější podobu.

Splnění posledního dílčího cíle vytvořit algoritmus pro stochastickou optimalizaci je popsán v odst. 5.2 (s výjimkou odst. 5.2.4 kde je vyhodnocování pravděpodobnosti). Algoritmus je iterační. V inicializační fázi je vytvořena malá síť bodů daných hodnotami stochastických veličin, pro které je následně provedena deterministická optimalizace a tím určeny hodnoty návrhových veličin a hodnota účelové funkce. Pro určené návrhové veličiny je pak možné vyhodnotit také pravděpodobnost poruchy. Algoritmus nadále v iterační fázi využívá regresní analýzu k hledání vhodného bodu daného hodnotami stochastických veličin tak, aby (opět po provedení deterministické optimalizace) nabývala účelová funkce (cena materiálu) minimální hodnoty a současně byly splněny pravděpodobnostní podmínky úlohy. Úloha řešená algoritmem je teda fakticky jiná, než její teoretické zadání a algoritmus je tak vnímán jako heuristický. Jako úskalí se opět nabízí „prokletí dimenzionality“, v tomto směru algoritmus opět nebyl zkoušen dále. Mírně problematické je i použití regresní analýzy k optimalizaci, toto rozhodnutí bylo učiněno zejména s ohledem na rychlost výpočtu.

Poslední částí práce je také ověření funkčnosti algoritmu. To je provedeno na celkem 6 řešených příkladech, které lze rozdělit do dvou skupin po 3, kde se zadání příkladů neliší ničím jiným než tím, které veličiny jsou stochastické. Jak již bylo zmíněno, stochastická dimenze řešených úloh je maximálně 4 a všechny příklady byly vytvořeny algoritmy vyřešeny. Byly také ověřeny pravděpodobnosti výsledků. V posledním příkladu se navíc pracuje se situací, kdy jsou dvě veličiny – šířka  $b$  a výška  $h$  – současně návrhové (a tedy nutně deterministické) a současně stochastické. Fakticky je každá z těchto veličin rozdělena na další dvě veličiny, deterministické  $b_{navrh}$ ,  $h_{navrh}$  a stochastické  $\Delta b$ ,  $\Delta h$ , přičemž platí  $b = b_{navrh} + \Delta b$ ,  $h = h_{navrh} + \Delta h$ . I tento příklad byl algoritmem úspěšně vyřešen.

Celkově byly všechny cíle práce splněny. V další práci je vhodné algoritmy podrobit testování s ohledem na dimenzi řešitelných úloh a navrhnout případná zjednodušení za účelem zvýšení rozsahu řešených úloh. Vhodné je také jejich zkoušení na reálných praktických úlohách (ačkoliv jednoduchých), což se momentálně děje.

---

# Literatura

- [1] EN 1990:2002+A1. *Eurocode: Basis of structural design*. European Committee for Standardization.
- [2] Plšek, J. *Optimalizace návrhu betonových konstrukcí*. Brno, 2011. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav betonových a zděných konstrukcí.
- [3] Štěpánek, P., Laníková, I. a Šimůnek, P. Optimized design of concrete structures considering environmental aspects and life time assessment. In: *18th International Conference of Soft Computing, MENDEL 2012. Mendel Journal series*. Brno: VUT, 2012, pp. 138-143. ISSN 1803-3814. ISBN 978-80-214-4540-6.
- [4] Štěpánek, P., Laníková, I. a Šimůnek, P. Optimized Design of Concrete Structures Considering Environmental Aspects. In: *Proceedings of the First International Conference on Performance-based and Life-cycle Structural Engineering (PLSE 2012)*. Hong Kong, China: The Hong Kong Polytechnic University, 2012, pp. 1793-1801. ISBN 978-988-15439-3-6.
- [5] Yang, X. S., Bekdaş, G. a Nigdeli, S. M. Review and Applications of Metaheuristic Algorithms in Civil Engineering. In: *Metaheuristics and Optimization in Civil Engineering. Modeling and Optimization in Science and Technologies*. Switzerland: Springer, 2016, pp. 1-24. ISSN 2196-7334. ISBN 978-3-319-26245-1.
- [6] Milajić, A., Pejičić, G. a Beljaković, D. Optimal Structural Design of Reinforced Concrete Structures – Review of Existing Solutions Considering Applicability Aspect. In: *Archives for Technical Sciences*. Srbsko: Technical Institute of Bijeljina, 2013, vol. 1, no. 9, pp. 53-60. DOI: 10.7251/afts.2013.0509.053M.
- [7] Coello Coello, C. A., Christiansen, A. D. a Santos Hernández, F. A Simple Genetic Algorithm for the Design of Reinforced Concrete Beams. In: *Engineering with Computers*. London: Springer-Verlag, 1997, vol. 13, iss. 4, pp. 185-196. ISSN 1435-5663.
- [8] Chakrabarty, B. K. A model for optimal design of reinforced concrete beam. In: *Journal of Structural Engineering*. ASCE, 1992, vol. 108, no. 11, pp. 3238-3242. DOI: 10.1016/0045-7949(92)90040-7.
- [9] Chakrabarty, B. K. Models for optimal design of reinforced concrete beams. In: *Computers & Structures*. Elsevier, 1992, vol. 42, iss. 3, pp. 447-451.

- [10] Koumoussis, V. K. a Arsenis, S. J. Genetic Algorithms in Optimal Detailed Design of Reinforced Concrete Members. In: *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. USA: Blackwell Publishers, 1998, vol. 13, iss. 1, pp. 185-196. DOI: 10.1111/0885-9507.00084.
- [11] Lepš, M. a Šejnoha, M. New approach to optimization of reinforced concrete beams. In: *Computers and Structures*. Elsevier, 2003, vol. 81, iss. 18-19, pp. 1957-1966. DOI: 10.1016/S0045-7949(03)00215-3.
- [12] Barros, M. H. F. M., Martins, R. A. F. a Barros, A. F. M. Cost optimization of singly and doubly reinforced concrete beams with EC2-2001. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Springer, 2005, vol. 30, iss. 3, pp. 236-242. DOI: 10.1007/s00158-005-0516-2.
- [13] Sahab, M. G., Ashour, A. F. a Toropov, V. V. A hybrid genetic algorithm for reinforced concrete flat slab buildings. In: *Computers and Structures*. Elsevier, 2005, vol. 83, iss. 8-9, pp. 551-559. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.10.013.
- [14] Sahab, M. G., Ashour, A. F. a Toropov, V. V. Cost optimisation of reinforced concrete flat slab buildings. In: *Engineering Structures*. Elsevier, 2005, vol. 27, iss. 3, pp. 313-322. DOI: 10.1016/j.engstruct.2004.10.002.
- [15] Guerra, A. a Kioussis, P. D. Design optimization of reinforced concrete structures. In: *Computers and Concrete*. Techno-Press, 2006, vol. 3, no. 5, pp. 313-334. ISSN 1598-818X.
- [16] Kwak, H. G. a Kim, J. Optimum design of reinforced concrete plane frames based on predetermined section database. In: *Computer-Aided Design*. Elsevier, 2008, vol. 40, iss. 3, pp. 396-408. DOI: 10.1016/j.cad.2007.11.009.
- [17] Kwak, H. G. a Kim, J. An integrated genetic algorithm complemented with direct search for optimum design of RC frames. In: *Computer-Aided Design*. Elsevier, 2009, vol. 41, iss. 7, pp. 490-500. DOI: 10.1016/j.cad.2009.03.005.
- [18] Barros, A. F. M., Barros, M. H. F. M. a Ferreira, C. C. Optimal design of rectangular RC sections for ultimate bending strength. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Springer, 2012, vol. 45, iss. 6, pp. 845-860. DOI: 10.1007/s00158-011-0717-9.

- [19] Bekdas, G. a Nigdeli, S. M. Cost Optimization of T-shaped Reinforced Concrete Beams under Flexural Effect According to ACI 318. In: *Recent Advances in Engineering*. Paříž: WSEAS Press, 2012. ISBN 978-1-61804-137-1.
- [20] Fedghouche, F. a Tiliouine, B. Minimum cost design of reinforced concrete T-beams at ultimate loads using Eurocode2. In: *Engineering Structures*. Elsevier, 2012, vol. 42, pp. 43-50. DOI: 10.1016/j.engstruct.2012.04.008.
- [21] Jahjough, M. M., Arafa, M. H. a Alqedra, M. A. Artificial Bee Colony (ABC) algorithm in the design optimization of RC continuous beams. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Springer, 2013, vol. 47, iss. 6, pp. 963-979. DOI: 10.1007/s00158-013-0884-y.
- [22] Yousif, S. T. a Najem, R. M. Optimum cost design of reinforced concrete continuous beams Using Genetic Algorithms. In: *International Journal of Applied Sciences and Engineering Research*. Integrated Publishing Association, 2013, vol. 2, no. 1, pp. 79-92. DOI: 10.6080.ijaser.020100009.
- [23] Gare, P. a Angalekar, S. S. Design of Structural Element Employing Optimization Approach. In: *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*. Ess & Ess Research Publications, 2016, vol. 5, iss. 7, pp. 13808-13816. ISSN 2319-8753.
- [24] Frangopol, D. M. Life-cycle performance, management, and optimisation of structural systems under uncertainty: accomplishments and challenges. In: *Structure and Infrastructure Engineering*. Taylor and Francis Online, 2011, vol. 7, iss. 6, pp. 389-413. DOI: 10.1080/15732471003594427.
- [25] Pu Y., Das, P. K. a Faulkner, D. A strategy for reliability-based optimization. In: *Engineering Structures*. Elsevier, 1997, vol. 19, iss. 3, pp. 276-282. DOI: 10.1016/S0141-0296(96)00088-0.
- [26] Papadrakakis, M. a Lagaros, N. D. Reliability-based structural optimization using neural networks and Monte Carlo simulation. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Elsevier, 2002, vol. 191, iss. 32, pp. 3491-3507. DOI: 10.1016/S0045-7825(02)00287-6.
- [27] Liu, H., Chen, W., Sheng, J. a Gea, H. C. Application of the Sequential Optimization and Reliability Assessment Method to Structural Design Problems. In: *ASME 2003*

- 
- International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. Chicago, 2003, pp. 63-72. ISBN 0-7918-3698-3.
- [28] Tsompanakis, Y. a Papadrakakis, M. Large-scale reliability-based structural optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Springer, 2004, vol. 26, iss. 6, pp. 429-440. DOI: 10.1007/s00158-003-0369-5.
- [29] Cheng, G., Xu, L. a Jiang, L. A sequential approximate programming strategy for reliability-based structural optimization. In: *Computers & Structures*. Elsevier, 2006, vol. 84, iss. 21, pp. 1353-1367. DOI: 10.1016/j.compstruc.2006.03.006.
- [30] Aoues, Y. a Chateaufneuf, A. Reliability-based optimization of structural systems by adaptive target safety – Application to RC frames. In: *Structural Safety*. Elsevier, 2008, vol. 30, iss. 2, pp. 144-161. DOI: 10.1016/j.strusafe.2006.10.002.
- [31] Dubourg, V., Sudret, B. a Bourinet, J.-M. Reliability-based design optimization using kriging surrogates and subset simulation. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Springer, 2011, vol. 44, iss. 5, pp. 673-690. DOI: 10.1007/s00158-011-0653-8.
- [32] Lee, I., Choi, K. K. a Zhao, L. Sampling-based RBDO using the stochastic sensitivity analysis and Dynamic Kriging method. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Springer, 2011, vol. 44, iss. 3, pp. 299-317. DOI: 10.1007/s00158-011-0659-2.
- [33] Khatibinia, M., Salajegheh, E., Salajegheh, J. a Fadaee, M. J. Reliability-based design optimization of reinforced concrete structures including soil–structure interaction using a discrete gravitational search algorithm and a proposed metamodel. In: *Engineering Optimization*. Taylor and Francis Online, 2013, vol. 45, iss. 10, pp. 1147-1165. DOI: 10.1080/0305215X.2012.725051.
- [34] Yazdani, H., Khatibinia, M., Gharehbaghi, S. a Hatami, K. Probabilistic Performance-Based Optimum Seismic Design of RC Structures Considering Soil–Structure Interaction Effects. In: *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering*. ASCE, 2016. ISSN 2376-7642. DOI: 10.1061/AJ-RUA6.0000880.
- [35] Boyd, S., Kim, S. J., Vandenberghe, L. et al. A tutorial on geometric programming. In: *Optimization and Engineering*. Springer, 2007, vol. 8, no. 67. DOI: 10.1007/s11081-007-9001-7.
-

- 
- [36] Mitchell, M. *An Introduction to Genetic Algorithms*. 1. vydání. Cambridge (MA): MIT Press, 1998. ISBN 0–262–13316–4 (HB), 0–262–63185–7.
- [37] Du, K. L. a Swamy, M. N. S. *Search and Optimization by Metaheuristics*. Switzerland: Springer International Publishing, 2016. ISBN 978-3-319-41192-7. DOI: 10.1007/978-3-319-41192-7.
- [38] Rockafellar, R. T. Basic Issues in Lagrangian Optimization. In: *Optimization in Planning and Operation of Electric Power Systems*. Heidelberg: Physica, 1993, pp. 3-30. DOI: 10.1007/978-3-662-12646-2\_1.
- [39] Boggs, P. T. a Tolle, J. W. Sequential quadratic programming for large-scale nonlinear optimization. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Elsevier, 2000, vol. 124, iss. 1-2, pp. 123-137. DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00429-5.
- [40] Kall, P. a Wallace, S. W. *Stochastic Programming*. 2. vydání. Chichester: John Wiley & Sons, 1994.
- [41] Geem, Z. W., Kim, J. H. a Loganathan, G. V. A New Heuristic Optimization Algorithm: Harmony Search. In: *Simulation*. SCS, 2001, vol. 76, iss. 2, pp. 60-68. DOI: 10.1177/003754970107600201.
- [42] Yang, X. S. Harmony Search as a Metaheuristic Algorithm. In: *Music-Inspired Harmony Search Algorithm*. Studies in Computational Intelligence. Berlin: Springer, 2009, vol. 191, pp. 1-14. ISBN 978-3-642-00185-7. DOI: 10.1007/978-3-642-00185-7.
- [43] Lasdon, L. S., Fox, R. L. a Ratner, M. W. Nonlinear optimization using the generalized reduced gradient method. In: *RAIRO – Operations Research – Recherche Opérationnelle*. 1974, vol. 8, no. V3, pp. 73-103. Dostupné z: [http://www.numdam.org/item/R0\\_1974\\_\\_8\\_3\\_73\\_0/](http://www.numdam.org/item/R0_1974__8_3_73_0/).
- [44] Lee, O. S. a Kim, D. H. The reliability estimation of pipeline using FORM, SORM and Monte Carlo Simulation with FAD. In: *Journal of Mechanical Science and Technology*. Springer, 2006, vol. 20, iss. 12, pp. 2124-2135. DOI: 10.1007/BF02916329.
- [45] Zhang, Z. A gentle introduction to artificial neural networks. In: *Annals of Translational Medicine*. 2016, vol. 4, iss. 19. DOI: 10.21037/atm.2016.06.20.
- [46] Berliner, L. M a Wikle, C. K. Approximate importance sampling Monte Carlo for data assimilation. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2007, vol. 230, iss. 1-2, pp. 37-49. ISSN 0167-2789. DOI: 10.1016/j.physd.2006.07.031.
-

- [47] Helton, J. C. a Davis, F. J. Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. In: *Reliability Engineering & System Safety*. 2003, vol. 81, iss. 1, pp. 23-69. DOI: 10.1016/S0951-8320(03)00058-9.
- [48] EN 1991-1-1. *Eurocode 1: Actions on structures – Part 1-1: General actions – Densities, self-weight, imposed loads for buildings*. European Committee for Standardization.
- [49] EN 1992-1-1. *Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings*. European Committee for Standardization.
- [50] Kolář, V., Kratochvíl, J., Leitner, F. a Ženíšek, A. *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*. 2., přepracované vydání. Praha: SNTL, 1979.
- [51] Oñate, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Vol. 1: Basis and Solids*. Nizozemsko: Springer Netherlands, 2009. ISBN 978-1-4020-8733-2. DOI: 10.1007/978-1-4020-8733-2.
- [52] Oñate, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Vol. 2: Beams, Plates and Shells*. Nizozemsko: Springer Netherlands, 2013. ISBN 978-1-4020-8743-1. DOI: 10.1007/978-1-4020-8743-1.
- [53] Kadlčák, J. a Kytýr, J. *Statika II. stavebních konstrukcí. Staticky neurčité konstrukce*. Brno: VUTIUM, 2004.
- [54] Novotný, J., Materna, A. a Štěpánek, P. *Maticová analýza konstrukcí – Prutové soustavy*. Praha: SNTL, 1984.
- [55] Venclovský, J. Výpočet ohybové tuhosti a jejích prvních derivací. In: *22. Betonářské dny 2015*. Litomyšl: 2015. ISBN 978-80-906097-0-9.
- [56] Venclovský, J. a P. Štěpánek. Calculation of bending stiffness and its first derivatives related to optimization of a steel-reinforced concrete cross section. In: *Proceedings from 22nd Czech Concrete Day 2015*. Solid State Phenomena. Švýcarsko: Trans Tech Publications, 2016, pp. 253-260. ISSN 1662-9779.
- [57] Venclovský, J., Štěpánek, P. a Laníková, I. Stochastická optimalizace železobetonových prvků pomocí heuristického algoritmu. In: *24. Betonářské dny 2017*. Litomyšl: 2017. ISBN 978-80-906759-0-2.
- [58] Venclovský, J., Štěpánek, P. a Laníková, I. Stochastic optimization of a reinforced concrete elements using heuristic algorithm. In: *24th Concrete Days 2017*. Solid State
-



- Phenomena. Switzerland: Trans Tech Publications, 2018, vol. 272, pp. 262-269. ISSN 1662-9779.
- [59] Venclovský, J., Štěpánek, P. a Laníková, I. Stochastic optimization of reinforced concrete elements' design. In: *2018 International Joint Conference on Materials Science and Mechanical Engineering*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Hong Kong: IOP Publishing, 2018. ISSN: 1757-8981.
- [60] Sallaberry, C. J. a Helton, J. C. *A Method for Extending the Size of Latin Hypercube Sample* [online]. 2005 [cit. 6.4.2021]. Dostupné z ResearchGate: <https://www.researchgate.net/publication/255210181>.